

۱۴۰۱ سراسری داخل

نام درس	دهم	یازدهم	دوازدهم	ترکیبی	آسان	متوسط	سخت
ریاضیات	۵	۱۵	۱۱	۹	۲	۲۴	۱۴
فیزیک	۶	۱۱	۱۷	۱	۹	۲۳	۳
شیمی	۵	۱۲	۹	۴	۶	۲۲	۲

ریاضیات

۱- گزینه ۴

استراتژی جمله اول را a و قدرنسبت دنباله را q در نظر می‌گیریم. در این صورت با توجه به این که قدرنسبت طبیعی و بزرگتر از یک است، کوچکترین جمله a و بزرگترین جمله aq^4 می‌شود. از طرفی حداقل مقدار جملات ۱ و حداکثر آن ۱۰۰ است که با بررسی $a \leq 1$ و $aq^4 \leq 100$ مقادیر قابل قبول برای q به دست می‌آیند. در آخر با حالت‌بندی کردن برحسب مقادیر q جواب حاصل می‌شود.

گام ۵ جمله این دنباله هندسی را a, aq, aq^2, aq^3, aq^4 در نظر می‌گیریم. قدرنسبت این دنباله، طبیعی و بزرگتر از یک است؛ پس ترتیب جملات به صورت زیر می‌شود:

گام ۶ حداقل مقدار جملات این دنباله‌ها می‌تواند برابر ۱ و حداکثر آن برابر ۱۰۰ باشد، حالا کوچکترین جمله (یعنی a) را برابر حداقل مقدار خود ($a=1$) در نظر می‌گیریم تا مقادیر قابل قبول برای q مشخص شوند.

$a=1$ است، پس بزرگترین جمله $aq^4 = q^4$ می‌شود که باید کوچکتر یا مساوی ۱۰۰ باشد. با امتحان کردن مقادیر طبیعی و بزرگتر از ۱ برای q متوجه می‌شویم که فقط وقتی $q^4 \leq 100$ می‌شود که q برابر ۲ یا ۳ باشد ($2^4=16, 3^4=81$).

گام ۷ تعداد حالاتی را می‌شماریم که $q=2$ است:

جمله دنباله هندسی $a, aq, aq^2, aq^3, aq^4 = a, 2a, 4a, 8a, 16a$

$$\left. \begin{aligned} 1 \leq a &\Rightarrow \text{کوچکترین جمله} \\ a \leq 6/25 &\Rightarrow 16a \leq 100 \Rightarrow \text{بزرگترین جمله} \end{aligned} \right\} \xrightarrow{\text{اشتراک}} 1 \leq a \leq 6/25 \xrightarrow{a \in \mathbb{N}} a=1, 2, \dots, 6$$

در این حالت، ۶ دنباله داریم.

گام ۸ حالا تعداد حالاتی را می‌شماریم که $q=3$ است:

جمله دنباله هندسی $a, aq, aq^2, aq^3, aq^4 = a, 3a, 9a, 27a, 81a$

$$\left. \begin{aligned} 1 \leq a &\Rightarrow \text{کوچکترین جمله} \\ a \leq 100/81 &\Rightarrow 81a \leq 100 \Rightarrow \text{بزرگترین جمله} \end{aligned} \right\} \xrightarrow{\text{اشتراک}} 1 \leq a \leq 100/81 \xrightarrow{a \in \mathbb{N}} a=1$$

این‌جا هم، ۱ دنباله داریم.

بنابراین کلاً $6+1=7$ دنباله با ویژگی خواسته شده داریم.

۲- گزینه ۱

درس‌نامه ۱ در تابع درجه دوم $y = ax^2 + bx + c$ ، اگر $a > 0$ باشد، سهمی رو

به بالا است و حداقل مقدار آن برابر عرض رأس سهمی، یعنی $-\frac{\Delta}{4a}$ می‌شود. اگر $a < 0$ باشد، سهمی رو به پایین است و حداکثر مقدار آن هم $-\frac{\Delta}{4a}$ می‌شود.

۲ محور تقارن سهمی $y = ax^2 + bx + c$ برابر $x = -\frac{b}{2a}$ است.

۳ روش روسی برای حل معادله درجه دوم: برای به دست آوردن ریشه‌های معادله درجه دومی مثل $ax^2 + bx + c = 0$ که ضریب x^2 برابر ۱ نیست (و با تجزیه به راحتی حل نمی‌شود) می‌توانیم از این تکنیک استفاده کنیم که ابتدا a را در C ضرب کنیم تا ضریب x^2 برابر ۱ شود،

یعنی: ضرب $ax^2 + bx + c = 0 \Rightarrow x^2 + bx + ac = 0$

حالا باید ریشه‌های معادله $x^2 + bx + ac = 0$ را با تجزیه به دست آوریم و هر دو ریشه به دست آمده را تقسیم بر a کنیم تا ریشه‌های معادله اصلی، یعنی $ax^2 + bx + c = 0$ به دست آیند.

گام ۱ کمترین مقدار تابع $y = mx^2 - 12x + 5m - 1$ برابر ۲ است، حالا با توجه به مورد (۱) درس‌نامه داریم:

$$-\frac{\Delta}{4a} = 2 \Rightarrow -\frac{144 - 4m(5m-1)}{4m} = 2 \xrightarrow{\text{صورت و مخرج تقسیم بر ۴}} -\frac{36 - m(5m-1)}{m} = 2 \Rightarrow -\frac{36 - 5m^2 + m}{m} = 2$$

$$\Rightarrow 36 - 5m^2 + m = -2m \Rightarrow 5m^2 - 3m - 36 = 0$$

گام ۲ از روش روسی برای به دست آوردن ریشه‌های معادله $5m^2 - 3m - 36 = 0$ استفاده می‌کنیم:

$$5m^2 - 3m - 36 = 0 \Rightarrow m^2 - 3m - 18 = 0 \Rightarrow \begin{cases} m = 15 \\ m = -12 \end{cases} \xrightarrow{\text{تقسیم بر ۵}} \begin{cases} m = \frac{15}{5} = 3 \\ m = -\frac{12}{5} \end{cases}$$

گام ۳ طبق گفته سؤال، تابع $y = mx^2 - 12x + 5m - 1$ ، $\min y$ دارد، پس ضریب x^2 یا همان m باید مثبت باشد و $m=3$ قابل قبول است.

گام ۴ در آخر به جای m در $y = mx^2 - 12x + 5m - 1$ قرار می‌دهیم و محور تقارن سهمی را با کمک مورد (۲) درس‌نامه به دست می‌آوریم:

$$y = 3x^2 - 12x + 14 \xrightarrow{\text{محور تقارن سهمی}} x = -\frac{b}{2a} = -\frac{-12}{2 \times 3} = +2$$

مشاوره معادله درجه دوم و تابع درجه دوم، جزء پای ثابت‌های کنکور سراسری هستند. خبر خوب این است که سؤالات این مبحث عموماً ساده هستند و به راحتی می‌توانید به آن‌ها پاسخ دهید.

۳- گزینه ۴

درس‌نامه تعداد اعضای ضرب دکارتی دو مجموعه مانند A و B برابر حاصل ضرب

$$n(A \times B) = n(A) \times n(B)$$

تعداد اعضای دو مجموعه است؛ یعنی:

گام ۱ تعداد اعضای C دو واحد بیشتر از تعداد اعضای A است، پس فرض می‌کنیم $n(A) = x$ باشد، در این صورت $n(C) = x + 2$ می‌شود. تعداد اعضای D هم سه واحد کمتر از تعداد اعضای B است، پس فرض می‌کنیم $n(B) = y + 3$ باشد، این‌طوری $n(D) = y$ می‌شود.

گام ۲ تعداد اعضای مجموعه $C \times B$ ، ۲۵٪ بیشتر از تعداد اعضای $A \times B$ است؛ این

$$\text{یعنی } n(C \times B) = \left(1 + \frac{1}{4}\right) n(A \times B) \Rightarrow n(C) \times n(B) = \frac{5}{4} n(A) \times n(B)$$

$$n(C \times B) = \frac{5}{4} n(A \times B) \Rightarrow n(C) \times n(B) = \frac{5}{4} n(A) \times n(B)$$

$$\Rightarrow x + 2 = \frac{5}{4} x \xrightarrow{\times 4} 4x + 8 = 5x \Rightarrow x = 8$$

$$\begin{cases} n(A) = x = 8 \\ n(C) = x + 2 = 10 \end{cases} \quad \text{بنابراین } n(A) \text{ و } n(C) \text{ می‌شود:}$$



★ نکته فرم کلی اتحاد مزدوج به صورت زیر است:

$$(\bigcirc - \square)(\bigcirc + \square) = \bigcirc^2 - \square^2$$

گام ۱ معادله اول را ساده می‌کنیم:

$$\frac{1}{a^3+1} + \frac{1}{a^3-1} = 2 \xrightarrow{\text{مخرج مشترک}} \frac{a^3-1+a^3+1}{(a^3+1)(a^3-1)} = 2$$

$$\Rightarrow \frac{2a^3}{a^6-1} = 2 \Rightarrow \frac{a^3}{a^6-1} = 1 \Rightarrow a^6-1=a^3 \Rightarrow \frac{a^6}{a^3-1} = \frac{a^3+1}{a^3-1}$$

رابطه (I)

گام ۲ عبارت خواسته شده را بدون در نظر گرفتن توان ۱۴۰۱ ساده می‌کنیم:

$$\frac{1}{a^3-\sqrt{a^3}+1} + \frac{1}{a^3+\sqrt{a^3}+1} = \frac{1}{a^3+1-\sqrt{a^3}} + \frac{1}{a^3+1+\sqrt{a^3}}$$

$$= \frac{a^3+1+\sqrt{a^3}+a^3+1-\sqrt{a^3}}{(a^3+1-\sqrt{a^3})(a^3+1+\sqrt{a^3})} = \frac{2a^3+2}{(a^3+1)^2-a^3}$$

مزدوج

$$= \frac{2a^3+2}{a^6+2a^3+1-a^3} = \frac{2a^3+2}{a^6+a^3+1}$$

پس عبارت خواسته شده به شکل زیر شد:

$$\left(\frac{1}{a^3-\sqrt{a^3}+1} + \frac{1}{a^3+\sqrt{a^3}+1}\right)^{1401} = \left(\frac{2a^3+2}{a^6+a^3+1}\right)^{1401}$$

گام ۳ حالا در عبارت به دست آمده، به جای a^6 قرار می‌دهیم a^3+1 (با توجه به (I)):

$$\left(\frac{2a^3+2}{a^6+a^3+1}\right)^{1401} = \left(\frac{2a^3+2}{2a^3+2}\right)^{1401} = 1^{1401} = 1$$

۴ گزینه

★ استراتژی ضابطه f را از حالت رادیکالی به حالت قدرمطلق تبدیل و آن را رسم کنید تا مشخص شود در کدام بازه نزولی است. سپس ضابطه وارون تابع در آن بازه به سادگی به دست می‌آید، اما باید حواستان باشد که دامنه f^{-1} همان برد f است تا در دام سؤال نیفتید!

درس نامه ۱ برای به دست آوردن ضابطه وارون یک تابع، ابتدا جای x و y را عوض و سپس y را تنها می‌کنیم. برای مثال:

$$f(x) = x^3 + 2 \Rightarrow y = x^3 + 2$$

$$\xrightarrow{\text{جای } x \text{ و } y \text{ رو عوض کن.}} x = y^3 + 2 \Rightarrow y^3 = x - 2$$

$$\Rightarrow y = \sqrt[3]{x-2} \Rightarrow f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x-2}$$

۲ دامنه تابع f برابر برد f^{-1} و برد تابع f برابر دامنه f^{-1} است.

۳ نمودار تابع $y = x^3$ به شکل مقابل است:



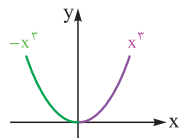
گام ۴ $\sqrt{x^2} = |x|$ ، پس می‌توانیم ضابطه f را ساده‌تر بنویسیم:

$$f(x) = x^2 \sqrt{x^2} = x^2 |x|$$

گام ۵ با توجه این که ریشه عبارت داخل قدرمطلق $x=0$ است، پس در دو محدوده $x \geq 0$ و $x < 0$ ضابطه f را ساده‌تر می‌نویسیم.

$$f(x) = x^2 |x| = \begin{cases} x^2(x) & x \geq 0 \\ x^2(-x) & x < 0 \end{cases} \Rightarrow f(x) = \begin{cases} x^3 & x \geq 0 \\ -x^3 & x < 0 \end{cases}$$

گام ۶ نمودار f را می‌کشیم:



گام ۷ تعداد اعضای مجموعه $C \times B$ ، $1/5$ برابر تعداد اعضای مجموعه $A \times D$ است:

$$n(C \times B) = 1/5 n(A \times D) \Rightarrow n(C) \times n(B) = 1/5 n(A) \times n(D)$$

$$\Rightarrow 10(y+3) = 1/5 \times 8 \times y \Rightarrow 10y + 30 = 8y \Rightarrow y = 15$$

$$n(B) = y + 3 = 15 + 3 = 18$$

بنابراین $n(B)$ می‌شود:

گام ۸ حالا که $n(B)$ و $n(A)$ را داریم می‌توانیم اختلاف تعداد اعضای مجموعه‌های A و B را به دست بیاوریم:

$$n(B) - n(A) = 18 - 8 = 10$$

مشاوره درصدها، نقطه ضعف اکثر دانش آموزان است. به همین خاطر طراحان هم پای درصد را در اکثر سوالات باز می‌کنند. لطفاً روی این موضوع کار کنید تا به نقطه قوتتان تبدیل شود.

۴ گزینه

★ استراتژی ابتدا در معادله اصلی، یک بار به جای x قرار دهید α و یک بار به جای x قرار دهید β تا $\alpha^2 = -6\alpha - a$ و $\beta^2 = -6\beta - a$ حاصل شود. حالا در معادله داده شده، مقادیر α^2 و β^2 را جای گذاری کنید و از S و P کمک بگیرید تا معادله ساده‌تر شود. در آخر ریشه‌های معادله درجه دوم را به دست آورده و در معادله قرار دهید.

گام ۱ α و β ریشه‌های معادله هستند، پس می‌توانیم به جای x در معادله $\alpha^2 + 6\alpha + a = 0$ و $\beta^2 + 6\beta + a = 0$ را قرار دهیم:

$$\begin{cases} \alpha^2 + 6\alpha + a = 0 \Rightarrow \alpha^2 = -6\alpha - a \\ \beta^2 + 6\beta + a = 0 \Rightarrow \beta^2 = -6\beta - a \end{cases}$$

گام ۲ در معادله داده شده برحسب α و β و α^2 را جای گذاری می‌کنیم:

$$3\alpha^2 + 2\beta^2 = 12\sqrt{2} + 85 \Rightarrow 3(-6\alpha - a) + 2(-6\beta - a) = 12\sqrt{2} + 85$$

$$\Rightarrow -18\alpha - 12\beta - 5a = 12\sqrt{2} + 85$$

گام ۳ به جای -18α می‌نویسیم $-6\alpha - 12\alpha$ تا معادله ساده‌تر شود:

$$-6\alpha - 12\alpha - 12\beta - 5a = 12\sqrt{2} + 85$$

$-12(\alpha + \beta)$

$\alpha + \beta$ همان S معادله $x^2 + 6x + a = 0$ است که برابر با -6 است. جای -6 ، $\alpha + \beta$ قرار می‌دهیم.

$$-6\alpha - 12 \times (-6) - 5a = 12\sqrt{2} + 85 \Rightarrow -6\alpha - 5a = 12\sqrt{2} + 13$$

گام ۴ ریشه‌های معادله درجه دوم $x^2 + 6x + a = 0$ را محاسبه می‌کنیم:

$$\Delta = 36 - 4a \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{-6 + \sqrt{36 - 4a}}{2} \\ x_2 = \frac{-6 - \sqrt{36 - 4a}}{2} \end{cases}$$

واضح است که $x_2 < x_1$ است، پس با توجه به $\alpha < \beta$ ، باید $\alpha = x_2$ باشد:

$$\alpha = \frac{-6 - \sqrt{36 - 4a}}{2} = \frac{-6 - \sqrt{4(9 - a)}}{2} = \frac{-6 - 2\sqrt{9 - a}}{2} = -3 - \sqrt{9 - a}$$

گام ۵ با جای گذاری $\alpha = -3 - \sqrt{9 - a}$ در $-6\alpha - 5a = 12\sqrt{2} + 13$ ، a را به دست می‌آوریم:

$$\Rightarrow 18 + 6\sqrt{9 - a} - 5a = 12\sqrt{2} + 13 \Rightarrow 6\sqrt{9 - a} - 5a = 12\sqrt{2} - 5$$

حل معادله به دست آمده سخت است. از گزینه‌ها کمک می‌گیریم. به ازای $a = 1$ تساوی برقرار است.

★ تیزبازی با توجه به این که در حاصل $3\alpha^2 + 2\beta^2$ عبارت $\sqrt{2}$ داریم، پس جذر دلتای معادله $x^2 + 6x + a = 0$ باید ضریب طبیعی از $\sqrt{2}$ باشد. فقط به ازای $a = 1$ این اتفاق می‌افتد:

$$x^2 + 6x + 1 = 0 \Rightarrow \Delta = 36 - 4 = 32 \Rightarrow \sqrt{\Delta} = \sqrt{32} = 4\sqrt{2}$$

۵ گزینه

★ استراتژی دقت کنید! اصلاً نیازی به محاسبه مقادیر a نداریم. ابتدا معادله اول را با استفاده از مخرج مشترک گیری و اتحاد مزدوج ساده می‌کنیم. بعد عبارت خواسته شده را نیز ساده می‌کنیم و ساده شده عبارت اول را در آن جای گذاری می‌کنیم.



مشاوره ایده نقطه شناور (برای مثال A نقطه‌ای روی نمودار f با خط $ax + by = c$ است که فلان ویژگی را دارد) در سؤالات کنکور سراسری هندسه تحلیلی و کاربرد مشتق استفاده می‌شود که اکثر دانش‌آموزان با آن مشکل دارند، پس پیشنهاد می‌کنیم به مورد (۲) درس‌نامه این سؤال توجه ویژه‌ای داشته باشید.

۸- گزینه ۳

استراتژی ابتدا از دو طرف معادله $5^x = 10$ لگاریتم بگیرید تا x از توان آزاد شود! حالا از دو طرف معادله $2^{f(x)} = 20$ هم لگاریتم بگیرید تا $f(x)$ تنها شود، در آخر با استفاده از قوانین لگاریتم و معادله به‌دست‌آمده برحسب x ، جواب حاصل می‌شود.

درس‌نامه ۱ در هر تساوی، برای از بین رفتن توان‌ها می‌توانیم از دو طرف تساوی لگاریتم بگیریم (مبنای لگاریتم هر مقداری می‌تواند باشد):

$$a = b \rightarrow \log_c a = \log_c b \quad \text{از دو طرف در مبنای } c \text{ لگاریتم می‌گیریم.}$$

۲ بعضی از قواعد لگاریتم را ببینید: $\log_a a = 1$, $\log_c ab = \log_c a + \log_c b$

$$\log_{b^n} a^m = \frac{m}{n} \log_b a, \quad \log_1 2 + \log_1 5 = 1$$

گام ۱ از دو طرف معادله $5^x = 10$ ، در مبنای ۱۰ لگاریتم می‌گیریم:

$$5^x = 10 \Rightarrow \log_1 5^x = \log_1 10 \Rightarrow x(\log_1 5) = 1 \Rightarrow \log_1 5 = \frac{1}{x}$$

گام ۲ حالا از دو طرف معادله $2^{f(x)} = 20$ هم در مبنای ۱۰ لگاریتم می‌گیریم:

$$2^{f(x)} = 20 \Rightarrow \log_1 2^{f(x)} = \log_1 20$$

$$\Rightarrow f(x)(\log_1 2) = \log_1 (10 \times 2) \Rightarrow f(x)(\log_1 2) = \underbrace{\log_1 10}_{=1} + \log_1 2$$

$$\Rightarrow f(x)(\log_1 2) = 1 + \log_1 2 \quad (I)$$

گام ۳ مقدار $\log_1 2$ را می‌خواهیم، پس (مورد (۲) درس‌نامه):

$$\log_1 2 + \log_1 5 = 1$$

از طرفی در گام (۱) دیدیم $\log_1 5 = \frac{1}{x}$ ؛ پس:

$$\log_1 2 + \frac{1}{x} = 1 \Rightarrow \log_1 2 = 1 - \frac{1}{x}$$

گام ۴ حالا با جای‌گذاری $\log_1 2 = 1 - \frac{1}{x}$ در (I) داریم:

$$f(x)\left(1 - \frac{1}{x}\right) = 1 + 1 - \frac{1}{x} \Rightarrow f(x) \times \frac{x-1}{x} = \frac{2x-1}{x} \Rightarrow f(x) = \frac{2x-1}{x-1}$$

۹- گزینه ۲

استراتژی ابتدا یک مثلث رسم کنید و همه زوایا را برحسب B بنویسید، حالا زاویه‌های به‌دست‌آمده را در معادله خواسته‌شده جای‌گذاری کنید و در آخر با استفاده از روابط مثلثاتی مجموع و تفاضل دو کمان، جواب به دست می‌آید.

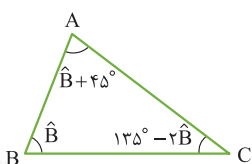
درس‌نامه روابط مثلثاتی مجموع و تفاضل دو کمان و روابط دوآلفایی را ببینید:

$$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cdot \cos \alpha$$

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin \alpha \cdot \cos \beta \pm \cos \alpha \cdot \sin \beta$$

$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos \alpha \cdot \cos \beta \mp \sin \alpha \cdot \sin \beta$$

$$\cos 2\alpha = \begin{cases} 2 \cos^2 \alpha - 1 \\ 1 - 2 \sin^2 \alpha \\ \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha \end{cases}$$



روش گام ۱ ابتدا یک مثلث رسم می‌کنیم،

زاویه A، ۴۵ درجه بیشتر از B-hat است، پس $\hat{A} = \hat{B} + 45$ می‌شود.

گام ۱ با توجه به نمودار رسم‌شده برای f، مشخص است که f در بازه $(-\infty, 0]$ نزولی است و ضابطه آن در این بازه $y = -x^3$ می‌شود. حالا ضابطه f^{-1} را به دست می‌آوریم:

$$y = -x^3 \xrightarrow{\text{جای } x \text{ و } y \text{ رو عوض کن.}} x = -y^3 \Rightarrow y^3 = -x$$

$$\Rightarrow y = \sqrt[3]{-x} \Rightarrow f^{-1}(x) = \sqrt[3]{-x}$$

گام ۲ اگر دوباره به نمودار f نگاه کنید، متوجه می‌شوید که برد تابع f در $(-\infty, 0]$ برابر $[0, +\infty)$ است، پس با توجه به مورد (۲) درس‌نامه، دامنه f^{-1} نیز برابر $[0, +\infty)$ می‌شود؛ یعنی:

$$f^{-1}(x) = \sqrt[3]{-x} = -\sqrt[3]{x}; \quad \begin{matrix} x \geq 0 \\ \text{همان برد } f \end{matrix}$$

تله به‌ها مواستون باشه یهو نگفته باشین ما تابع رو توی بازه $(-\infty, 0]$ می‌خوانیم، پس دامنه f^{-1} هم $X \leq 0$ می‌شه. این پوری تو تله ۲ میفتید.

مشاوره اکثر سؤالات تابع کنکور سراسری، سؤالاتی ترکیبی هستند، حالا یا ترکیبی بین مباحث مختلف خود تابع، مثل تابع خطی، وارون تابع، ترکیب توابع و ... یا ترکیبی با فصل‌های دیگر از جمله نامعادله، معادله گویا و گنگ، لگاریتم و ... پس لازم است دید عمیق و مفهومی به این فصل داشته باشید.

۷- گزینه ۱

استراتژی نقاط روی خط $x + y = a$ را به صورت $(x, a - x)$ در نظر بگیرید، سپس فاصله این نقطه از دو نقطه داده‌شده را به دست آورید و مانند دستگاه دو معادله - دو مجهول، دو معادله به‌دست‌آمده را از هم کم کنید تا جواب حاصل شود.

درس‌نامه ۱ فاصله دو نقطه $A(x_1, y_1)$ و $B(x_2, y_2)$ برابر است با:

$$AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

۲ نقطه شناور، هر وقت در سؤالی به ما گفته شود که نقطه A روی نمودار $y = f(x)$ قرار دارد، مختصات این نقطه را به صورت $A(x, f(x))$ در نظر می‌گیریم. برای مثال، نقاط روی تابع $f(x) = x^2 - 4x$ را به صورت $A(x, x^2 - 4x)$ فرض می‌کنیم. دقیقاً همین کار را وقتی گفته شود نقطه روی یک خط قرار دارد نیز انجام می‌دهیم، با این تفاوت که ابتدا y را تنها می‌کنیم و سپس عبارت به‌دست‌آمده را به جای $f(x)$ قرار می‌دهیم. برای مثال برای پیدا کردن نقاط روی خط $3x + 5y = 7$ به این صورت عمل می‌کنیم:

$$3x + 5y = 7 \Rightarrow 5y = -3x + 7 \Rightarrow y = \frac{-3x + 7}{5}$$

$$\xrightarrow{\text{نقاط روی خط}} A\left(x, \frac{-3x + 7}{5}\right)$$

گام ۱ نقطه‌ای روی خط $x + y = a$ است، پس با استفاده از مورد (۲) درس‌نامه داریم:

$$x + y = a \Rightarrow y = a - x \xrightarrow{\text{نقاط روی خط}} A(x, a - x)$$

گام ۲ فاصله A از دو نقطه $B(-3, 2)$ و $C(-1, 4)$ به ترتیب $\sqrt{29}$ و ۵ است. (مورد (۱) درس‌نامه)

$$\begin{cases} AB = \sqrt{29} \xrightarrow{A(x, a-x) \rightarrow B(-3, 2)} \sqrt{(x+3)^2 + (a-x-2)^2} = \sqrt{29} \\ \Rightarrow (x+3)^2 + (a-x-2)^2 = 29 \quad (I) \end{cases}$$

$$\begin{cases} AC = 5 \xrightarrow{A(x, a-x) \rightarrow C(-1, 4)} \sqrt{(x+1)^2 + (a-x-4)^2} = 5 \\ \Rightarrow (x+1)^2 + (a-x-4)^2 = 25 \quad (II) \end{cases}$$

گام ۳ حالا دو معادله به‌دست‌آمده را از هم کم می‌کنیم:

$$\bigcirc^2 - \square^2 = (\bigcirc - \square)(\bigcirc + \square)$$

نکته اتحاد مزدوج:

$$\underbrace{(x+3)^2 - (x+1)^2}_{\text{تجزیه با مزدوج}} + \underbrace{(a-x-2)^2 - (a-x-4)^2}_{\text{تجزیه با مزدوج}} = 4$$

$$\Rightarrow (x+3+x+1)(x+3-x-1) + (a-x-2+a-x-4)$$

$$(x^2 - x^2 - 2 - x + x + 4) = 4 \Rightarrow 2(2x + 4) + 2(a - 2x - 6) = 4$$

$$\xrightarrow{\div 2} 2x + 4 + 2a - 2x - 6 = 2 \Rightarrow 2a - 2 = 2$$

$$\Rightarrow 2a = 4 \Rightarrow a = 2$$

р



گام ۳ با جدول تعیین علامت، تکلیف هر سه دامنه معلوم شد:

$$f(x) = \begin{cases} |x| + [-x] & -1 < x < 1, x \neq 0 \\ 1 + \cos \pi x & x = 0, \pm 1 \\ [x^2] - [x] & x > 1 \text{ یا } x < -1 \end{cases}$$

گام ۴ ضابطه پایین، کلید حل سؤال است. نقاط ناپیوستگی هر براکت را زیرش می‌نویسیم:

(طبق مورد (۳) درس‌نامه)

$$\begin{array}{ccc} [x^2] - [x] & & \\ \downarrow & & \downarrow \\ \pm\sqrt{2} & & \pm 2 \\ \pm\sqrt{3} & & \pm 3 \\ \pm 2 & & \vdots \\ \pm\sqrt{5} & & \\ \vdots & & \end{array}$$

گام ۵ در تمام نقاط غیرمشتک (مثل $\pm\sqrt{2}, \pm\sqrt{3}, \pm\sqrt{5}, \dots$)، ما با تفریق یک تابع

ناپیوسته و یک تابع پیوسته روبه‌رو هستیم که قطعاً ناپیوسته است (مورد (۱) درس‌نامه؛ پس ضابطه پایینی ما بی‌شمار نقطه ناپیوستگی دارد. در نتیجه f در بی‌شمار نقطه ناپیوسته است.

۱۴- گزینه ۴

درس‌نامه ۱ اگر چندجمله‌ای $p(x)$ بر $ax + b$ بخش‌پذیر باشد، $p(-\frac{b}{a}) = 0$ می‌شود.

۲ برای به دست آوردن باقی‌مانده تقسیم چندجمله‌ای‌ها وقتی مقسوم‌علیه از درجه ۲ است، به این صورت عمل می‌کنیم که ابتدا الگوریتم تقسیم را می‌نویسیم و به جای باقی‌مانده قرار می‌دهیم $ax + b$. حالا به جای x ، ریشه‌های مقسوم‌علیه را قرار می‌دهیم و با حل دستگاه دو معادله - دو مجهول، a و b را محاسبه می‌کنیم.

برای مثال فرض کنید باقی‌مانده تقسیم $3 - 2x^5 + x^6$ بر $x^2 - 1$ را می‌خواهیم. ابتدا الگوریتم تقسیم را می‌نویسیم و به جای باقی‌مانده قرار می‌دهیم $ax + b$:

$$x^6 + 2x^5 - 3 = (x^2 - 1)q(x) + ax + b$$

حالا به جای x ، ریشه‌های $x^2 - 1$ ، یعنی $+1$ و -1 را قرار می‌دهیم:

$$x^6 + 2x^5 - 3 = (x^2 - 1)q(x) + ax + b$$

$$\begin{cases} \xrightarrow{x=+1} 0 = a + b \\ \xrightarrow{x=-1} -4 = -a + b \end{cases} \Rightarrow a = 2, b = -2$$

بنابراین باقی‌مانده برابر $2x - 2$ می‌شود.

گام ۳ چندجمله‌ای $p(x)$ به ازای هر عدد طبیعی n بر $x + 2$ بخش‌پذیر است؛ پس

طبق مورد (۱) درس‌نامه، $p(-2) = 0$ می‌شود. برای راحتی کار به جای n عدد ۱ را قرار

می‌دهیم:

$$p(x) = x^6 + 2x^5 + x^4 + 3x^3 + 16a$$

$$\xrightarrow{p(-2)=0} 16 - 16 + 64 - 96 + 16a = 0 \Rightarrow -32 + 16a = 0 \Rightarrow a = 2$$

بنابراین ضابطه $p(x)$ به ازای $n = 1$ و $a = 2$ به صورت زیر می‌شود:

$$p(x) = x^6 + 2x^5 + x^4 + 3x^3 + 32$$

گام ۴ حالا باقی‌مانده $p(x)$ بر $(x-1)(x+3)$ را می‌خواهیم، پس

طبق مورد (۲) درس‌نامه، الگوریتم تقسیم را می‌نویسیم و به جای باقی‌مانده قرار می‌دهیم

$$x^6 + 2x^5 + x^4 + 3x^3 + 32 = (x^2 + 2x - 3)q(x) + ax + b$$

حالا ریشه‌های مقسوم‌علیه، یعنی $x = 1$ و $x = -3$ را در تساوی بالا قرار می‌دهیم:

$$x = 1 \Rightarrow 1 + 2 + 1 + 3 + 32 = 0 + a + b \Rightarrow a + b = 39$$

$$x = -3 \Rightarrow 81 - 54 + 81 - 27 + 32 = 0 - 3a + b \Rightarrow -3a + b = 59$$

گام ۵ از حل دو معادله $a + b = 39$ و $-3a + b = 59$ ، داریم: $a = -5$ و $b = 44$. بنابراین باقی‌مانده برابر با $ax + b = -5x + 44$ می‌شود.

تیزبازی بعد از به دست آوردن مقدار a و با جای‌گذاری $n = 1$ ،

$$p(x) = x^6 + 2x^5 + x^4 + 3x^3 + 32$$

و به جای x ، یکی از ریشه‌های مقسوم‌علیه، یعنی $+1$ را قرار می‌دهیم:

$$x^6 + 2x^5 + x^4 + 3x^3 + 32 = (x^2 + 2x - 3)q(x) + R(x)$$

$$x = 1 \Rightarrow 39 = R(1)$$

یعنی مقدار باقی‌مانده باید به ازای $x = 1$ برابر ۳۹ شود که فقط **۴** این‌گونه است.

۱۲- گزینه ۴

درس‌نامه ۱ اگر حد تابع کسری $\frac{f}{g}$ وقتی $x \rightarrow a$ ، $\frac{0}{0}$ باشد، می‌توانیم از

قاعده هسپیتال استفاده کنیم، یعنی اول از صورت و مخرج مشتق بگیریم و بعد حاصل حد را به دست آوریم:

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} \stackrel{\text{Hop}}{=} \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

۲ مشتق توابع به شکل $\sqrt{u}$ برابر $\frac{u'}{2\sqrt{u}}$ و مشتق توابع به شکل $\sqrt[3]{u}$ برابر $\frac{u'}{3\sqrt[3]{u^2}}$ می‌شود.

$$(A \pm B)(A^2 \mp AB + B^2) = A^3 \pm B^3$$

اتحاد چاق و لاغر به صورت مقابل است:

لاغر چاق

روش ۱ با جای‌گذاری $x = -1$ به $\frac{0}{0}$ می‌رسیم، پس از قاعده هسپیتال استفاده می‌کنیم:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sqrt{2x+3} - \sqrt{3x+4}}{1 + \sqrt[3]{x}} & \stackrel{\text{Hop}}{=} \lim_{x \rightarrow -1} \frac{\frac{2}{2\sqrt{2x+3}} - \frac{3}{2\sqrt{3x+4}}}{\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}} = \frac{\frac{2}{2} - \frac{3}{2}}{\frac{1}{3}} = \frac{-\frac{1}{2}}{\frac{1}{3}} = -\frac{3}{2} \end{aligned}$$

روش ۲ قبل از این که روش دوم رو توضیح بدم، باید بگم که روش ساده‌کردن برای رفع ابهام $\frac{0}{0}$ رو خیلی پیشنهاد نمی‌کنم، چون اکثراً وقت‌گیره و با استفاده از هسپیتال، سوالاتی $\frac{0}{0}$ خیلی سریع تر حل می‌شن. صورت و مخرج را یک بار در مزدوج صورت و یک بار در چاق مخرج ضرب می‌کنیم:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sqrt{2x+3} - \sqrt{3x+4}}{\sqrt[3]{x} + 1} & \times \frac{\sqrt{2x+3} + \sqrt{3x+4}}{\sqrt{2x+3} + \sqrt{3x+4}} \times \frac{\sqrt[3]{x^2} - \sqrt[3]{x} + 1}{\sqrt[3]{x^2} - \sqrt[3]{x} + 1} \\ & \downarrow \\ & \frac{-(x+1)}{x+1} \\ & = \frac{3}{2} \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(2x+3) - (3x+4)}{x+1} = \frac{3}{2} \lim_{x \rightarrow -1} \frac{-x-1}{x+1} = \frac{3}{2} \times (-1) = -\frac{3}{2} \end{aligned}$$

مشاوره رفع ابهام صفرصفرم جزء پای ثابت‌های کنکور سراسری است که به طور مستقیم یا غیرمستقیم از آن سؤال مطرح می‌شود.

۱۳- گزینه ۳

استراتژی ۱ اول با حل نامعادله‌ها و معادله‌ای که در قسمت دامنه‌ها آمده، دامنه‌ها را

ساده‌تر می‌نویسیم. بعد حواسمان به دوتا چیز باید باشد: **۱** نقاط مرزی **۲** نقاطی که داخل براکت‌ها را عدد صحیح می‌کند.

درس‌نامه ۱ اگر f در $x = a$ پیوسته و g در آن ناپیوسته باشد، آن‌گاه $f \pm g$ در $x = a$ ناپیوسته است.

۲ اگر f و g در $x = a$ ناپیوسته باشند، $f + g$ یا $f - g$ در $x = a$ می‌تواند پیوسته یا ناپیوسته باشد.

۳ تابع به فرم $[f]$ در تمام نقاطی که $f \in \mathbb{Z}$ باشد ناپیوسته است مگر این که آن نقطه، $\min$ نسبی f باشد.

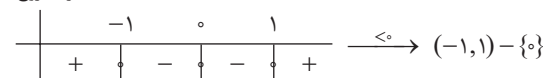
گام ۱ دامنه ضابطه اول، جواب نامعادله $|x^3| < x^2$ است:

$$|x^3| - x^2 < 0 \Rightarrow |x^2x| - x^2 < 0 \Rightarrow x^2|x| - x^2 < 0$$

$$\xrightarrow{\text{فاکتور}} x^2(|x| - 1) < 0$$

$$\begin{array}{c} x^2(|x| - 1) = 0 \\ \downarrow \quad \downarrow \\ x = \pm 1 \end{array}$$

مرتبه زوج



ریشه‌های عبارت سمت چپ را می‌نویسیم:

تعیین علامت می‌کنیم:



۱۷- گزینه ۳

استراتژی از طرفین تساوی $g(x) = \dots$ ، مشتق می‌گیریم و بعد $x = -2$ را در آن قرار می‌دهیم. بعد با توجه به $T = 5$ ، حاصل دو عبارت به فرم $f'(a)$ را حساب می‌کنیم.

درس‌نامه ۱ مشتق $f(u)$ برابر با $f'(u) \cdot u'$ است.

برای مثال مشتق $f(x^2 + 3x - 1)$ برابر است با: $(2x + 3)f'(x^2 + 3x - 1)$

۲ اگر دوره تناوب تابع f برابر T باشد، داریم:

$$\dots = f(a - T) = f(a) = f(a + T) = f(a + 2T) = \dots$$

$$\dots = f'(a - T) = f'(a) = f'(a + T) = f'(a + 2T) = \dots$$

گام ۱ از دو طرف معادله $g(x) = f(x+1) + f(3x+10)$ (با کمک مورد ۱) درس‌نامه) مشتق می‌گیریم.

$$g'(x) = 1 \times f'(x+1) + 3 \times f'(3x+10) \rightarrow \text{مشتق}$$

گام ۲ چون $g'(-2)$ را می‌خواهیم، پس در تساوی قبل، $x = -2$ را جای‌گذاری می‌کنیم:

$$g'(-2) = f'(-1) + 3f'(4)$$

گام ۳ f تابعی متناوب با دوره تناوب ۵ است، پس (مورد ۲) درس‌نامه):

$$f'(-1) = f'(-1+5) \Rightarrow f'(-1) = f'(4) = \frac{3}{2}$$

$$g'(-2) = \frac{3}{2} + 3 \times \frac{3}{2} = \frac{12}{2} = 6$$

مشاوره در کنکورهای سال‌های اخیر، سؤالات ترکیبی بین فصل‌ها مثل ترکیب مشتق و مثلثات، کاربرد مشتق و هندسه تحلیلی، حد و معادله درجه ۲ و ... بسیار رایج شده و لازم است حتماً خود را برای مواجهه با چنین سؤالاتی آماده کنید.

۱۸- گزینه ۴

درس‌نامه ۱ در توابع هموگرافیک به شکل $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$ ، معادله دو مجانب به صورت زیر است:

۱ ریشهٔ مخرج $\rightarrow x = -\frac{d}{c}$ مجانب قائم

۲ نسبت ضرایب x های صورت و مخرج $\rightarrow y = \frac{a}{c}$ مجانب افقی

پس محل برخورد دو مجانب، نقطه $(-\frac{d}{c}, \frac{a}{c})$ است.

۲ در توابع درجه دوم (سه‌می) به شکل $y = ax^2 + bx + c$:

الف) اگر $a > 0$ باشد، دهانهٔ سهمی رو به بالا است و نقطهٔ مینیمم آن $S(-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a})$ می‌شود.

ب) اگر $a < 0$ باشد، دهانهٔ سهمی رو به پایین است و نقطهٔ ماکزیمم آن $S(-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a})$ می‌شود.

استراتژی کافی است طول محل تلاقی مجانب‌های تابع هموگرافیک (همون مؤناب قائم یا ریشهٔ مخرج) را با طول رأس سهمی برابر قرار دهید تا a به دست آید. سپس تابع هموگرافیک را برابر صفر قرار دهید تا طول نقطه برخورد آن با محور x ها حاصل شود.

گام ۱ طبق مورد (۱) درس‌نامه، طول محل تلاقی مجانب‌های تابع هموگرافیک

$$y = \frac{ax+3}{(a+1)x+(a-1)}$$

$$(a+1)x + (a-1) = 0 \Rightarrow (a+1)x = -a+1 \Rightarrow x = \frac{-a+1}{a+1}$$

گام ۲ طول نقطهٔ مینیمم تابع درجه دوم $y = \frac{3}{2}x^2 + x + \frac{5}{6}$ (یا همون طول رأس سهمی) برابر $\frac{-1}{2 \times \frac{3}{2}} = -\frac{1}{3}$ است. (مورد ۲) درس‌نامه)

گام ۳ حالا با برابر قراردادن $-\frac{1}{3}$ و $\frac{-a+1}{a+1}$ ، a به دست می‌آید:

$$\frac{-a+1}{a+1} = -\frac{1}{3} \Rightarrow -3a+3 = -a-1 \Rightarrow -2a = -4 \Rightarrow a = 2$$

گام ۴ با جای‌گذاری $a = 2$ ، ضابطهٔ تابع هموگرافیک به صورت $y = \frac{2x+3}{3x+1}$ می‌شود.

۱۵- گزینه ۳

استراتژی باید تعداد اعضای چند دسته دیگر را هم به دست آوریم. بعد با پیدا کردن یک گکو، تعداد اعضای دسته n ام را بنویسیم. در نهایت کافی است عضو اول و عضو آخر دسته سیزدهم را پیدا کنیم و میانگین آن‌ها را محاسبه کنیم.

درس‌نامه اگر تعدادی عدد متوالی داشته باشیم، میانگینشان برابر با میانگین عدد اول و عدد آخر است. مثلاً میانگین اعداد ۱۷، ۱۸، ۱۹، ... و ۵۲ برابر با $34 / 5$ است.

گام ۱ تعداد عضوهای چند دسته اول (به جز دسته ۱ و ۲) را مشخص می‌کنیم:

دسته ۳، ۳ تا، بزرگ‌ترین ۶

دسته ۴، چون بزرگ‌ترین عدد دسته قبل ۶ بوده، پس ۶ عدد دارد که آخرین (بزرگ‌ترین) آخرین عدد دسته قبل

$$6 + 6 = 12 \text{ می‌شود.}$$

تعداد اعداد این دسته

دسته ۵، چون بزرگ‌ترین عدد دسته قبل ۱۲ بوده، پس ۱۲ عدد دارد که آخرین (بزرگ‌ترین) عدد $12 + 12 = 24$ می‌شود.

گام ۲ با توجه به اعداد به دست آمده، الگوی بزرگ‌ترین عدد هر دسته را پیدا می‌کنیم:

$$\begin{array}{ccc} 3 \times 2 & 3 \times 2^2 & 3 \times 2^3 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ a_3 & a_4 & a_5 \end{array}$$

$$a_n = 3 \times 2^{n-2}$$

پس بزرگ‌ترین عدد دسته n ام برابر است با:

گام ۳ عدد اول و آخر دسته سیزدهم را می‌خواهیم:

$$a_{13} = 3 \times 2^{13-2} = 3 \times 2^{11} = 3 \times 2048 = 6144$$

$$a_{13} = 3 \times 2^{13-2} = 3 \times 2048 = 6144$$

گام ۴ اگر تعدادی عدد متوالی داشته باشیم، میانگین برابر با «میانگین عدد اول و آخر» است، پس:

$$\text{میانگین اعداد دسته } a_{13} = \frac{3 \times 2^{13-2} + 1}{2} = \frac{6144 + 1}{2} = \frac{6145}{2} = 3072.5$$

۱۶- گزینه ۲

درس‌نامه ۱ معادلهٔ خط مماس بر منحنی $y = f(x)$ در نقطه‌ای به طول $X = \alpha$ واقع بر آن به صورت مقابل است:

$$y - f(\alpha) = f'(\alpha)(x - \alpha)$$

۲ مشتق $\sin x$ برابر $\cos x$ و مشتق $\cos x$ برابر $-\sin x$ می‌شود.

۳ برای پیدا کردن طول نقطه تلاقی توابع f و g ، باید معادله $f(x) = g(x)$ را حل کنیم.

گام ۱ نقطه تلاقی f و g را پیدا می‌کنیم:

$$f(x) = g(x) \Rightarrow \sin x + \frac{1}{2} \cos x = \frac{3}{4} \sin x$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} \cos x = \frac{2}{4} \sin x \xrightarrow{\div \cos x} \tan x = 1$$

تنها نقطه در $[0, \pi]$ که تانژانت آن برابر ۱ شود، $x = \frac{\pi}{4}$ است.

گام ۲ مختصات نقطه‌ای به طول $\frac{\pi}{4}$ روی f به صورت زیر است:

$$f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \sin \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} \cos \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{4} = \frac{3\sqrt{2}}{4} \Rightarrow A\left(\frac{\pi}{4}, \frac{3\sqrt{2}}{4}\right)$$

شیب خط مماس بر f در $\frac{\pi}{4}$ را حساب می‌کنیم:

$$f'(x) = \cos x - \frac{1}{2} \sin x \Rightarrow f'\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{4} = \frac{\sqrt{2}}{4} \Rightarrow m_{\text{مماس}} = \frac{\sqrt{2}}{4}$$

بنابراین طبق مورد (۱) درس‌نامه، معادلهٔ خط مماس (خط گذرنده از نقطه $A(\frac{\pi}{4}, \frac{3\sqrt{2}}{4})$)

با شیب $m = \frac{\sqrt{2}}{4}$ به صورت مقابل می‌شود:

گام ۳ محل تلاقی این خط با محور x ها را می‌خواهیم، پس به جای y ، صفر قرار می‌دهیم:

$$0 - \frac{3\sqrt{2}}{4} = \frac{\sqrt{2}}{4} \left(x - \frac{\pi}{4}\right) \Rightarrow -3 = x - \frac{\pi}{4} \Rightarrow x = \frac{\pi}{4} - 3$$



گام ۳ طبق مورد (۲) درس‌نامه جمع $p(x)$ ، $p(y)$ و $p(z)$ برابر ۱ است:

$$p(x) + \underbrace{p(y) + p(z)}_{\frac{1}{5}} = 1 \Rightarrow p(x) + p(z) = 1 - \frac{1}{5}$$

$$\Rightarrow p(x) + p(z) = \frac{4}{5} \quad (۲)$$

گام ۴ با توجه به روابط (۱) و (۲) باید به دنبال ۲ عدد بگردیم که جمعشان $\frac{4}{5}$ و ضربشان $\frac{1}{25}$ باشد. طبق مورد (۳) درس‌نامه این دو عدد ریشه‌های معادله زیر هستند:

$$t^2 - \frac{4}{5}t + \frac{1}{25} = 0 \xrightarrow{\times 25} 25t^2 - 20t + 1 = 0$$

$$\Rightarrow t = \frac{20 \pm \sqrt{(20)^2 - 4(25)(1)}}{2(25)} = \frac{20 \pm \sqrt{300}}{50} = \frac{20 \pm 10\sqrt{3}}{50} = \frac{2 \pm \sqrt{3}}{5}$$

همین‌جا معلوم است که از بین سه احتمال $\frac{2+\sqrt{3}}{5}$ ، $\frac{2-\sqrt{3}}{5}$ و $\frac{1}{5}$ ، کم‌ترینشان $\frac{2-\sqrt{3}}{5}$

است. حالا ممکن است بخواهید بدانید که $\frac{2-\sqrt{3}}{5}$ احتمال کدام پیشامد است. برای فهمیدن

این موضوع باید حواسمان باشد که به گفته سؤال قدرنسبت دنباله کم‌تر از یک است، پس دنباله

نزولی و در نتیجه $p(x) > p(y) > p(z)$ می‌شود؛ این یعنی $p(z) = \frac{2-\sqrt{3}}{5}$.

۲۱- گزینه ۳

شفاف‌سازی اگر بدانیم شماره گوی دوم از شماره گوی اول کم‌تر است، با کدام احتمال شماره گوی اول ۱۶ است؟ یعنی احتمال این را می‌خواهیم که شماره گوی اول ۱۶ باشد، به شرط آن که شماره گوی دوم کوچک‌تر از شماره گوی اول باشد، پس با احتمال شرطی طرفیم.

نکته استراتژی اول تعداد حالاتی را می‌شماریم که شماره گوی دوم از شماره گوی اول کم‌تر است. فرض کنید این تعداد m باشد، بعد تعداد حالاتی را به دست می‌آوریم که شماره گوی اول ۱۶ و شماره گوی دوم از شماره گوی اول کوچک‌تر است. فرض کنید این تعداد n باشد، در این صورت جواب برابر $\frac{n}{m}$ می‌شود.

درس‌نامه مفهوم احتمال شرطی: فرض کنید احتمال رخ دادن پیشامد A را می‌خواهیم به شرط آن که بدانیم پیشامد B رخ داده است، در این صورت برای به دست آوردن جواب، تعداد حالاتی که هر دو پیشامد A و B رخ می‌دهند را به تعداد حالاتی که پیشامد B رخ می‌دهد تقسیم می‌کنیم؛ یعنی:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{n(A \cap B)}{n(B)}$$

گام ۱ اول پیشامد A و B را تعریف می‌کنیم:

پیشامد A: دو گوی به طور متوالی و بدون جای‌گذاری انتخاب کنیم و شماره گوی اول ۱۶ باشد.
پیشامد B: دو گوی به طور متوالی و بدون جای‌گذاری انتخاب کنیم و شماره گوی دوم، کوچک‌تر از گوی اول باشد.

حالا ما احتمال A به شرط B یعنی $P(A|B)$ را می‌خواهیم که طبق درس‌نامه برابر می‌شود با:

$$P(A|B) = \frac{n(A \cap B)}{n(B)} \quad (*)$$

در این رابطه منظور از $n(A \cap B)$ تعداد حالاتی است که شماره گوی اول ۱۶ و شماره گوی دوم کوچک‌تر از گوی اول است.

و منظور از $n(B)$ ، تعداد حالاتی است که شماره گوی دوم کوچک‌تر از گوی اول است.

گام ۲ به $16 \times 15 = 240$ حالت می‌توانیم دو گوی به طور متوالی از بین ۱۶ گوی انتخاب کنیم که در نیمی از حالت‌ها شماره گوی اول کوچک‌تر و در نیم دیگر از حالت‌ها شماره گوی دوم کوچک‌تر است، پس تعداد حالات این‌که دو گوی به طور متوالی انتخاب کنیم و شماره گوی دوم از شماره گوی اول کوچک‌تر باشد، $n(B) = \frac{240}{2} = 120$ تا است.

گام ۳ حالا تعداد حالاتی را می‌خواهیم که شماره گوی دوم از شماره گوی اول کوچک‌تر و شماره گوی اول ۱۶ باشد. در این حالت شماره گوی اول یک حالت دارد (چون باید ۱۶ باشد) و شماره گوی دوم ۱۵ حالت دارد (چون هر گوی با هر شماره‌ای که انتخاب شود، شماره آن کوچک‌تر از ۱۶ است)، پس $n(A \cap B) = 1 \times 15 = 15$ حالت داریم.

برای به دست آوردن طول نقطه تلاقی این تابع با محور x ها، آن را برابر صفر قرار می‌دهیم:

$$\frac{2x+3}{3x+1} = 0 \Rightarrow 2x+3=0 \Rightarrow x = -\frac{3}{2}$$

۱۹- گزینه ۳

نکته استراتژی اول مسئله را حالت‌بندی می‌کنیم. در دو حالت، ارقام یکی‌درمیان زوج و فرد می‌شوند؛ یکی حالت (زوج-فرد-زوج-زوج) و دیگری حالت (فرد-زوج-زوج-زوج-فرد) است. بعد تعداد اعداد در هر حالت را به کمک اصل ضرب به دست می‌آوریم. (این‌جا باید حواسمان باشد که در حالت اول، یعنی (زوج-فرد-زوج-زوج-فرد)، رقم سمت چپ نمی‌تواند صفر باشد). در آخر تعداد اعداد در دو حالت را با هم جمع می‌کنیم تا جواب مسئله به دست آید.

گام ۱ طبق استراتژی در دو حالت زیر، ارقام یکی‌درمیان زوج و فرد می‌شوند:

حالت ۱: (زوج-فرد-زوج-زوج) حالت ۲: (فرد-زوج-زوج-زوج-فرد)

گام ۲ حالا تعداد اعداد هر حالت را جداگانه به دست می‌آوریم:

♦ **تعداد اعداد در حالت ۱:** رقم اول شامل ۴ حالت {۲، ۴، ۶، ۸} و رقم دوم شامل ۵ حالت {۱، ۳، ۵، ۷، ۹} است. رقم سوم باید زوج غیرتکراری باشد. از ۴ رقم زوج {۲، ۴، ۶، ۸} یکی را به رقم اول اختصاص دادیم؛ پس ۳ حالت برای رقم سوم باقی می‌ماند. اما حواسمان باشد، رقم سوم صفر هم می‌تواند باشد، پس در کل برای رقم سوم هم ۴ حالت داریم. به همین ترتیب تعداد حالت‌های دو رقم دیگر را هم مطابق شکل زیر مشخص می‌کنیم. در آخر طبق اصل ضرب تعداد اعداد در این حالت برابر می‌شود با:

$$4 \times 5 \times 4 \times 4 \times 3 = 960$$

زوج	فرد	زوج	فرد	زوج
رقم پنجم	رقم چهارم	رقم سوم	رقم دوم	رقم اول

♦ **تعداد اعداد در حالت ۲:** رقم اول دارای ۵ حالت {۱، ۳، ۵، ۷، ۹} و رقم دوم دارای ۵ حالت {۰، ۲، ۴، ۶، ۸} است. رقم‌های سوم و پنجم، باید فرد غیرتکراری باشند. از ۵ رقم فرد {۱، ۳، ۵، ۷، ۹} یکی را به رقم اول اختصاص دادیم، پس ۴ حالت برای رقم سوم و ۳ حالت برای رقم پنجم باقی می‌ماند. به همین ترتیب برای رقم چهارم هم ۴ حالت داریم؛ بنابراین تعداد اعداد این حالت طبق اصل ضرب می‌شود:

$$5 \times 5 \times 4 \times 4 \times 3 = 1200$$

فرد	زوج	فرد	زوج	فرد
رقم پنجم	رقم چهارم	رقم سوم	رقم دوم	رقم اول

گام ۳ حالا می‌توانیم بگوییم طبق اصل جمع کلاً $960 + 1200 = 2160$ عدد با ویژگی مورد نظر داریم.

مشاوره شمارش بدون شمردن، از جمله مباحثی است که تقریباً هر سال یک تست را به خود اختصاص می‌دهد و عموماً سؤالات این مبحث ساده و متوسط هستند.

۲۰- گزینه ۲

شفاف‌سازی واسطه هندسی $p(x)$ ، $p(y)$ و $p(z)$ برابر $\frac{1}{5}$ است؛ یعنی:

$$p(x) \cdot p(z) = \left(\frac{1}{5}\right)^2, \quad p(y) = \frac{1}{5}$$

درس‌نامه ۱ اگر b واسطه هندسی بین a و c باشد، داریم:

$$ac = b^2$$

۲ در یک فضای نمونه‌ای مثل $S = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ ، جمع احتمال همه برآمدها برابر ۱ می‌شود، یعنی:

$$p(a_1) + p(a_2) + \dots + p(a_n) = 1$$

۳ اگر جمع دو عدد S و ضربشان P باشد، این دو عدد ریشه‌های معادله زیر هستند:

$$x^2 - Sx + P = 0$$

گام ۱ به گفته سؤال $p(x)$ ، $p(y)$ و $p(z)$ سه جمله متوالی از یک دنباله هندسی‌اند

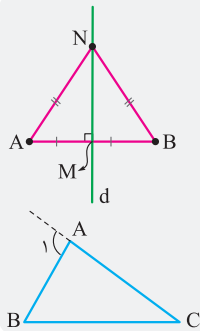
و عدد $\frac{1}{5}$ واسطه هندسی آن‌ها است، پس $p(y) = \frac{1}{5}$ و می‌توانیم بنویسیم:

$$p(x) \cdot p(z) = p(y)^2 \xrightarrow{p(y)=\frac{1}{5}} p(x) \cdot p(z) = \frac{1}{25} \quad (۱)$$



مشاوره در چند سال اخیر، سؤالات آمار توصیفی جزء سؤالات خلاقانه و ایده‌دار کنکور سراسری به حساب می‌آیند که برای حل آن‌ها باید تسلط کاملی بر مفاهیم این فصل داشته باشید.

۲۴- گزینه ۳



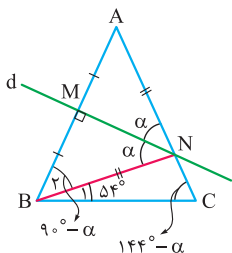
درس‌نامه ۱ هر نقطه روی عمودمنصف یک پاره‌خط، از دو سر آن پاره‌خط به یک فاصله است و برعکس؛ یعنی هر نقطه‌ای که فاصله‌اش از دو سر یک پاره‌خط یکسان باشد، روی عمودمنصف آن پاره‌خط قرار دارد. برای درک بهتر شکل مقابل را ببینید:

$NA = NB \Leftrightarrow N$ روی عمودمنصف AB است.

۲ اندازه هر زاویه خارجی یک مثلث، برابر با مجموع زاویه‌های داخلی غیرمجاور آن می‌شود. مثلاً برای زاویه خارجی A_1 در شکل مقابل داریم:

$$\hat{A}_1 = \hat{B} + \hat{C}$$

گام ۱ (رسم شکل مناسب و تحلیل آن):



مطابق شکل، d عمودمنصف ضلع AB است. چون N روی عمودمنصف d قرار دارد، طبق ویژگی عمودمنصف $NA = NB$ می‌شود، حالا خوب به ارتفاع NM در مثلث متساوی‌الساقین ANB نگاه کنید. می‌دانیم در مثلث متساوی‌الساقین، این ارتفاع نیمساز هم هست، پس $\hat{ANM} = \hat{MNB} = \alpha$ می‌توانیم بگوییم:

گام ۲ (محاسبه زاویه‌های مورد نیاز بر حسب α): در مثلث قائم‌الزاویه BMN داریم:

$$\hat{B}_p = 90^\circ - \alpha$$

به گفته سؤال، مثلث ABC، متساوی‌الساقین است، پس می‌توانیم بنویسیم:

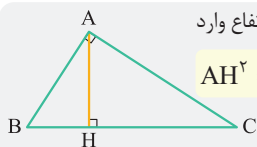
$$\hat{C} = \hat{B} \Rightarrow \hat{C} = \hat{B}_1 + \hat{B}_p \Rightarrow \hat{C} = 54^\circ + (90^\circ - \alpha) = 144^\circ - \alpha$$

گام ۳ (محاسبه خواسته سؤال): با توجه به این که زاویه $\hat{ANB} = 2\alpha$ برای مثلث BCN یک زاویه خارجی است، داریم:

$$\hat{ANB} = \hat{B}_1 + \hat{C} \Rightarrow 2\alpha = 54^\circ + (144^\circ - \alpha) \Rightarrow 3\alpha = 198^\circ$$

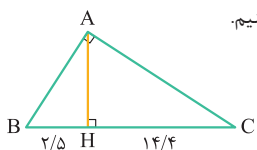
$$\Rightarrow \alpha = 66^\circ$$

۲۵- گزینه ۲



درس‌نامه در مثلث قائم‌الزاویه ABC، اگر ارتفاع وارد بر وتر باشد، آن‌گاه:

$$AH^2 = BH \cdot CH$$



کار سختی در پیش نداریم؛ اول شکل مسئله را رسم می‌کنیم. حالا به کمک درس‌نامه، می‌توانیم طول AH را به دست بیاوریم:

$$AH^2 = BH \cdot HC \Rightarrow AH^2 = \frac{25}{10} \times \frac{14}{10}$$

$$\Rightarrow AH^2 = \frac{5^2 \times 12^2}{10^2} \Rightarrow AH = \frac{5 \times 12}{10} = \frac{60}{10} = 6$$

مشاوره روابط طولی، در مثلث قائم‌الزاویه را بلد باشید. احتمال آن‌که به طور مستقیم یا در ترکیب با سایر مبحث‌ها از آن‌ها سؤال بیاید، بسیار زیاد است.

۲۶- گزینه ۱

استراتژی چهارضلعی پایین مثلث رنگی، مربع است؛ پس می‌توانیم بگوییم طول قاعده مثلث رنگی ۶ است. برای محاسبه مساحت این مثلث طول ارتفاع وارد بر قاعده را هم می‌خواهیم. پیدا کردن زاویه‌های داخلی مثلث رنگی به ما کمک می‌کند که طول ارتفاع وارد بر قاعده را هم پیدا کنیم.

گام ۱ حالا $n(B) = 120$ و $n(A \cap B) = 15$ را در رابطه $(*)$ جای گذاری می‌کنیم تا احتمال مورد نظر را به دست بیاوریم:

$$P(A|B) = \frac{15}{120} = \frac{1}{8}$$

مشاوره احتمال شرطی جزء مباحثی است که بعضی وقت‌ها به طور مستقیم (مثل همین سؤال) و بعضی وقت‌ها هم به طور غیرمستقیم و ترکیبی با مباحث و فصل‌های دیگر در کنکور از آن سؤال طرح می‌شود، پس مسلط بودن به مفهوم آن الزامی است.

۲۲- گزینه ۲

درس‌نامه اگر از جامعه‌ای با انحراف معیار σ ، نمونه‌ای به اندازه n انتخاب کنیم، انحراف معیار برآورد میانگین برابر $\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ می‌شود.

گام ۱ فرض می‌کنیم اندازه نمونه اول برابر n_1 و اندازه نمونه دوم برابر n_2 باشد، در این صورت

انحراف معیار برآورد میانگین برای نمونه اول و دوم به ترتیب برابر $\frac{\sigma}{\sqrt{n_1}}$ و $\frac{\sigma}{\sqrt{n_2}}$ می‌شود.

گام ۲ انحراف معیار برآورد میانگین نمونه دوم، $\frac{2}{3}$ برابر مقدار محاسبه شده با نمونه اول است، پس:

$$\frac{\sigma}{\sqrt{n_2}} = \frac{2}{3} \times \frac{\sigma}{\sqrt{n_1}} \xrightarrow{\text{توان ۲}} \frac{1}{n_2} = \frac{4}{9} \times \frac{1}{n_1} \Rightarrow \frac{n_1}{n_2} = \frac{4}{9}$$

$$\Rightarrow \frac{n_2}{n_1} = \frac{9}{4} = 2.25$$

مشاوره اکثر دانش‌آموزان با آمار استنباطی مشکل دارند و این فصل را حذف می‌کنند. در حالی که اگر صرفاً به مفاهیم اولیه فصل مسلط باشید، به راحتی می‌توانید تست‌های مربوط به آن در کنکور را پاسخ دهید.

۲۳- گزینه ۴

استراتژی با توجه به تعریف واریانس (میانگین مربعات انحراف از میانگین داده‌ها)، اول مقدار $a^2 + b^2$ را به دست می‌آوریم؛ بعد با توجه به این که مجموع انحراف از میانگین داده‌ها برابر صفر است، می‌توانیم به جواب برسیم.

درس‌نامه ۱ اگر میانگین n داده $x_1, x_2, \dots, x_n$ برابر $\bar{x}$ باشد، در این صورت واریانسشان از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$\sigma^2 = \frac{(x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + \dots + (x_n - \bar{x})^2}{n}$$

۲ مجموع انحراف داده‌ها از میانگین همیشه برابر صفر است؛ یعنی:

$$(x_1 - \bar{x}) + (x_2 - \bar{x}) + (x_3 - \bar{x}) + \dots + (x_n - \bar{x}) = 0$$

گام ۱ توان دوم انحراف از میانگین این ۶ داده به صورت $1, b^2, 9, 0, a^2, 9$ و واریانسشان برابر ۴ است، پس با توجه به مورد (۱) درس‌نامه می‌توانیم بنویسیم:

$$\sigma^2 = \frac{(x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + \dots + (x_6 - \bar{x})^2}{6}$$

$$\Rightarrow \frac{9 + a^2 + 0 + 9 + b^2 + 1}{6} = 4 \Rightarrow a^2 + b^2 + 19 = 24 \Rightarrow a^2 + b^2 = 5$$

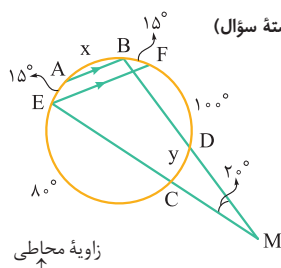
گام ۲ a و b اعداد صحیح هستند که $a^2 + b^2 = 5$ است، پس مقدار یکی از a و b برابر ± 1 و مقدار دیگری برابر ± 2 است. از طرفی توان دوم انحراف از میانگین ۴ داده دیگر $0, 1, 9, 9$ است. پس خود انحراف از میانگین آن ۴ داده می‌توانند برابر $0, \pm 1, \pm 3$ و ± 3 باشند. حالا دقت کنید که طبق مورد (۲) درس‌نامه مجموع انحراف از میانگین داده‌ها باید صفر باشد. دو حالت داریم:

۱ a و b هم علامت باشند؛ در این حالت $a + b = \pm 3 \pm 3 \pm 1 \pm 0$ می‌شود و مقدار ± 3 به هیچ وجه صفر نمی‌شود.

۲ a و b هم علامت نباشند؛ در این حالت می‌توانیم کاری کنیم که مجموع انحراف از میانگین‌ها صفر بشود، برای این که مطمئن شوید دو حالت زیر را ببینید:

$$(\underbrace{+2, -1, -1, -3, +3, 0}_{a, b}) \text{ یا } (\underbrace{-2, +1, +1, -3, +3, 0}_{a, b})$$

بنابراین $ab = -2$ است.

**گام ۴ (انتقال اطلاعات مسئله روی شکل و تحلیل خواسته سؤال)**

اطلاعات مسئله را روی شکل مقابل می‌نویسیم.

به گفته سؤال AB و EF موازی‌اند، پس طبق مورد (۱)

درس‌نامه می‌توانیم بگوییم $\widehat{BF} = \widehat{AE} = 15^\circ$. فرضمی‌کنیم $\widehat{AB} = x$ و $\widehat{DC} = y$ باشد، در این صورت

خواسته سؤال یعنی زاویه ABD برابر می‌شود با:

$$\widehat{ABD} = \frac{1}{2} \widehat{ACD} \Rightarrow \widehat{ABD} = \frac{1}{2} (15^\circ + 8^\circ + y) = \frac{95^\circ + y}{2} (*)$$

گام ۵ (به دست آوردن روابط بین x و y) $\widehat{M} = 2^\circ$ ، زاویه بین امتداد دو وتر در خارج دایره است، پس طبق مورد (۳) درس‌نامه داریم:

$$\widehat{M} = \frac{\widehat{EAB} - \widehat{DC}}{2} \Rightarrow 2^\circ = \frac{(15^\circ + x) - y}{2} \Rightarrow x - y = 25^\circ$$

از طرفی یک دایره کلاً 360° است:

$$x + 15^\circ + 8^\circ + y + 10^\circ + 15^\circ = 360^\circ \Rightarrow x + y = 15^\circ$$

گام ۶ (محاسبه خواسته سؤال) در گام‌های قبلی دیدیم که $\begin{cases} x - y = 25^\circ \\ x + y = 15^\circ \end{cases}$ حالا طرفین تساوی پایین را از طرفین تساوی بالا کم می‌کنیم تا y پیدا شود:

$$(x + y) - (x - y) = 15^\circ - 25^\circ \Rightarrow 2y = 10^\circ \Rightarrow y = 5^\circ$$

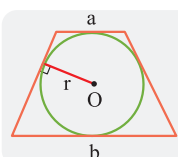
حالا که y را داریم می‌توانیم به کمک رابطه (*): خواسته سؤال را به دست بیاوریم:

$$\widehat{ABD} = \frac{95^\circ + y}{2} = \frac{95^\circ + 5^\circ}{2} = 78^\circ / 2 = 39^\circ$$

مشاوره سؤال‌های «زاویه در دایره» معمولاً سؤالات متوسطی هستند و اگر روی این مبحث وقت بگذارید، ضرر نمی‌کنید.

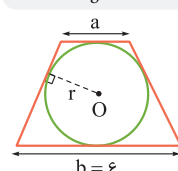
**۲۸ - گزینه ۴**

استراتژی با معلوم‌بودن مساحت دایره محاطی دوزنقه، شعاع آن هم به دست می‌آید، حالا کافی است رابطه بین شعاع دایره محاطی با طول قاعده را بنویسید.



نکته اگر دوزنقه متساوی‌الساقین با قاعده‌های a و b، مثل شکل مقابل بر دایره‌ای به شعاع r محیط شود، آن‌گاه:

$$4r^2 = a \cdot b$$



اول شکل مسئله را رسم می‌کنیم.

در این سؤال $4r^2 = 15\pi$ ، پس $r^2 = 15$. از طرفی طول

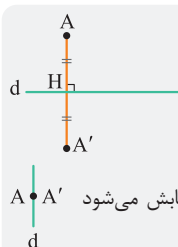
قاعده‌های دوزنقه برابر ۶ و a هستند؛ بنابراین طبق نکته بالا داریم:

$$4r^2 = ab \Rightarrow 4 \times 15 = (a)(6) \Rightarrow a = 10$$

مشاوره خواص دوزنقه متساوی‌الساقین محیطی (مثل خاصیتی که در پاسخ همین سؤال گفتیم) را حتماً بلد باشید، چون کنکور نشان داده که علاقه عجیب و غریبی به دوزنقه متساوی‌الساقین محیطی دارد.

**۲۹ - گزینه ۲**

استراتژی از تعریف بازتاب و خاصیت عمودمنصف‌بودن قطرهای مربع، برای پیدا کردن مختصات رأس A استفاده کنید.

**درس‌نامه ۱ الف) همان‌طور که در شکل مقابل می‌بینید:**

برای پیدا کردن بازتاب نقطه A نسبت به خط d (محور بازتاب)،

اول از نقطه A به خط d عمود می‌کشیم و پای عمود را H می‌نامیم؛

بعد AH را به اندازه خودش امتداد می‌دهیم تا به

نقطه A' برسیم؛ نقطه A'، بازتاب نقطه A نسبت به خط d است.

ب) مطابق شکل مقابل، وقتی نقطه روی محور بازتاب باشد، بازتابش می‌شود A'.

خودش و برعکس.

۲) در هر لوزی (و در نتیجه هر مربع، چون مربع هم نوعی لوزی است) قطرهای عمودمنصف هم هستند.

درس‌نامه ۱ اگر طول تمام اضلاع یک n ضلعی با هم برابر و اندازه تمام زاویه‌های آن هم با هم برابر باشند، آن n ضلعی را منظم می‌نامیم. اندازه هر زاویه داخلی n ضلعی منظم،

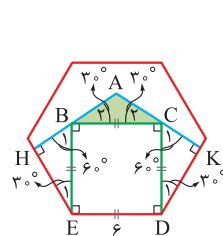
$$\frac{(n-2) \times 180^\circ}{n}$$

برابر است با:

۲) اگر طول ضلع‌های یک چهارضلعی با هم برابر باشند، آن چهارضلعی لوزی است و اگر

یکی از زاویه‌های لوزی قائمه شود، لوزی به مربع تبدیل می‌شود.

۳) هر وقت در یک مثلث قائم‌الزاویه، زاویه‌های 3° و 6° دیدید، برای محاسبه طول اضلاعش از نسبت‌های مثلثاتی استفاده کنید.

**گام ۱ (به دست آوردن زاویه‌های مورد نیاز در شکل)**

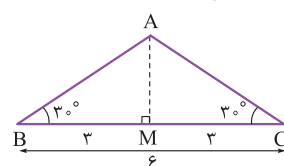
چهارضلعی BCDE که اضلاع آن با هم برابرند، یک زاویه

قائمه دارد، پس مربع است. (طبق مورد (۲) درس‌نامه).

از طرفی هر یک از زاویه‌های داخلی شش‌ضلعی منظم

 120° است، پس $\widehat{E_1} = 120^\circ - 90^\circ = 30^\circ$. در مثلثقائم‌الزاویه BHE داریم $\widehat{B_1} = 90^\circ - \widehat{E_1} = 60^\circ$ ، پس:

$$\widehat{B_1} + 90^\circ + \widehat{B_2} = 180^\circ \Rightarrow 60^\circ + 90^\circ + \widehat{B_2} = 180^\circ \Rightarrow \widehat{B_2} = 30^\circ$$

به روش مشابه می‌توان نشان داد $\widehat{C_2} = 30^\circ$.**گام ۲ (بررسی مثلث ABC)** مثلث ABC را جداگانه رسم می‌کنیم.از آن‌جا که $\widehat{B_2} = \widehat{C_2} = 30^\circ$ ، می‌توان نتیجه گرفت

که مثلث ABC، متساوی‌الساقین است. می‌دانیم با

رسم ارتفاع وارد بر قاعده مثلث متساوی‌الساقین،

قاعده آن نصف می‌شود؛ پس $BM = MC = 3$.**گام ۳ (محاسبه خواسته سؤال)** در شکل گام قبل، در مثلث قائم‌الزاویه ABM داریم:

$$\tan 30^\circ = \frac{AM}{BM} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{AM}{3} \Rightarrow AM = \sqrt{3}$$

بنابراین:

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} AM \cdot BC \Rightarrow S_{ABC} = \frac{1}{2} \times \sqrt{3} \times 6 = 3\sqrt{3}$$

مشاوره خواص شش‌ضلعی‌های منظم (اندازه زاویه‌ها، طول قطرهای برحسب اضلاع و ...)

به طور مستقیم در کتاب درسی هندسه (۱) بررسی نشده‌اند، اما در کنکور مهم‌اند، حتماً آن‌ها را یاد بگیرید.

**۲۷ - گزینه ۴**

استراتژی زاویه ABD، یک زاویه محاطی است؛ پس برای محاسبه اندازه آن، ابتدا

باید اندازه کمان روبه‌روی آن یعنی $\widehat{ACD}$ را به دست آوریم که با معلوم‌بودن $\widehat{AE} = 15^\circ$ و $\widehat{EC} = 8^\circ$ ، کافی است اندازه $\widehat{CD}$ محاسبه شود.

درس‌نامه ۱ کمان‌های محصور بین دو وتر موازی از

یک دایره، با هم برابرند. یعنی در شکل مقابل اگر $AB \parallel CD$ باشد می‌توانیم بگوییم $\widehat{AC} = \widehat{BD}$ است.**۲)** اندازه هر زاویه محاطی مثل α در شکل روبه‌رو، برابر با

نصف اندازه کمان مقابلش است:

$$\alpha = \frac{1}{2} \widehat{AC}$$

۳) به زاویه‌ای که امتداد دو وتر از دایره، در خارج از آن با هممی‌سازند، زاویه بین امتداد دو وتر می‌گوییم. مثلاً α در شکلمقابل این چنین است. زاویه α از این رابطه محاسبه می‌شود:

$$\alpha = \frac{1}{2} (\widehat{AC} - \widehat{BD})$$





گام ۴ (استفاده از قضیه کسینوس ها و محاسبه مقدار k) طبق قضیه کسینوس ها در مثلث ABC داریم:

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \hat{C} \Rightarrow (vk)^2 = 6^2 + (\Delta k)^2 - 2(6)(\Delta k)\left(\frac{1}{4}\right)$$

$$\Rightarrow 49k^2 = 36 + 2\Delta k^2 - 3\Delta k \Rightarrow 24k^2 + 3\Delta k - 36 = 0$$

$$\xrightarrow{\div 6} 4k^2 + \Delta k - 6 = 0 \Rightarrow k = \frac{-\Delta \pm \sqrt{\Delta^2 - 4(4)(-6)}}{2(4)}$$

$$\xrightarrow{k > 0} k = \frac{-\Delta + \sqrt{121}}{8} = \frac{-\Delta + 11}{8} = \frac{6}{8} = \frac{3}{4}$$

گام ۵ (محاسبه خواسته سوال) ضلع مثلث ABC، عبارت انداز $a = 6$ ، $b = \Delta k = \frac{15}{4} = 3\frac{3}{4}$ ، $c = vk = \frac{21}{4} = 5\frac{1}{4}$ و $b = 3\frac{3}{4}$ پس کوچک ترین آن ها $b = 3\frac{3}{4}$ است.

۳۱- گزینه ۳

درس نامه ۱ وارون یک ماتریس 2×2 مثل $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ به صورت زیر به دست می آید:

$$A^{-1} = \frac{1}{ad-bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

۲ برای به دست آوردن X از رابطه ماتریسی $AX = B$ ، کافی است طرفین آن را از سمت چپ در A^{-1} ضرب کنیم:

$$AX = B \xrightarrow{A^{-1} \times} \underbrace{A^{-1}A}_I X = A^{-1}B \Rightarrow X = A^{-1}B$$

گام ۱ (محاسبه $|A|$) اول $|A|$ را حساب می کنیم. برای این کار بسط حول سطر اول را می نویسیم:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & -3 \\ 4 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 1 \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} - (-1) \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} + (-3) \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= 1(3-2) + 1(2-4) - 3(4-2) = 3$$

گام ۲ (جای گذاری $|A|$ در رابطه ماتریسی) حالا $|A| = 3$ را در رابطه

$$\begin{bmatrix} 6 & 3 \\ 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} X = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$$
 جای گذاری می کنیم: $\begin{bmatrix} 2|A| & |A| \\ 1 & \frac{2}{|A|} \end{bmatrix} X = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$

گام ۳ (پیدا کردن خواسته سوال) طبق مورد (۲) درس نامه برای به دست آوردن X از رابطه

$$\begin{bmatrix} 6 & 3 \\ 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 6 & 3 \\ 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} X = \begin{bmatrix} 6 & 3 \\ 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$$
 باید طرفینش را از سمت چپ در ضرب کنیم:

$$\begin{bmatrix} 6 & 3 \\ 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 6 & 3 \\ 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} X = \begin{bmatrix} 6 & 3 \\ 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow X = \begin{bmatrix} 6 & 3 \\ 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow X = \frac{1}{\underbrace{\left(\frac{2}{3}\right) - (3)(1)}_{-1}} \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & -3 \\ -1 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow X = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & -3 \\ -1 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 6 \\ 10 & 6 \end{bmatrix}$$

همان طور که می بینید کوچک ترین درایه قطر اصلی برابر ۶ است.

مشاوره ماتریس از آن می بحث هایی است که می توانید روی آن حساب کنید، چون مراحل حل سوالاتش مشخص است. فقط باید دقت و تمرکز در محاسبات داشته باشید.

۳۲- گزینه ۱

استراتژی اول به m دو مقدار مختلف می دهیم تا معادله دو قطر از دایره پیدا شود. بعد محل برخورد قطرهای پیدا شده را به دست می آوریم تا به مرکز دایره برسیم. در ادامه با محاسبه فاصله مرکز از نقطه $A(-1, 1)$ ، شعاع دایره را پیدا می کنیم. در آخر محاسبه محیط دایره با داشتن شعاع کار راحتی است.

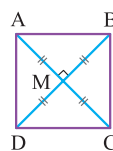
۳ یادآوری از هندسه تحلیلی، (الف) اگر نقطه M وسط پاره خط AC باشد، آن گاه:

$$y_M = \frac{y_A + y_C}{2}, \quad x_M = \frac{x_A + x_C}{2}$$

(ب) فاصله نقطه $A(a, b)$ از مبدأ مختصات $(0, 0)$ ، از رابطه زیر محاسبه می شود:

$$OA = \sqrt{a^2 + b^2}$$

شفاف سازی اگر بازتاب نقطه D نسبت به محور X ها بر خودش منطبق شود؛ یعنی D روی محور X ها قرار دارد. همین طور منظور از «بازتاب نقطه C نسبت به قطر BD » رأس A است.



گام ۱ (رسم شکل فرضی و تحلیل آن)

ابتدا شکل فرضی مقابل را می کشیم:

به گفته سوال، مختصات رأس B به صورت $B(3, 5)$ است، ضمن آن که بازتاب نقطه D نسبت به محور X ها بر خودش منطبق است. پس طبق شفاف سازی نقطه D روی محور X ها است؛ حالا طول این نقطه ۳ است پس مختصات آن $D(3, 0)$ می شود. از طرفی به دلیل آن که در هر مربع، قطرهای عمود منصف هم هستند، در مربع $ABCD$ ، بازتاب رأس C نسبت به قطر BD همان رأس A است و دو رأس B و D هم بازتاب یکدیگر نسبت به قطر AC هستند.

گام ۲ (رسم شکل دقیق و پیدا کردن مختصات)

رأس A با توضیحات گام قبل و فرضیات سوال،

شکل دقیق را کشیده ایم. در این شکل M ،

وسط قطر AC است، پس:

$$x_M = \frac{x_A + x_C}{2} \Rightarrow 3 = \frac{x_A + 5}{2} \Rightarrow x_A = 1$$

M ، وسط قطر BD هم هست:

$$\frac{y_M}{\beta} = \frac{y_B + y_D}{2} \Rightarrow \beta = \frac{5+0}{2} = \frac{5}{2} \Rightarrow y_A = \beta = \frac{5}{2}$$

گام ۳ (محاسبه خواسته سوال)

در گام قبل فهمیدیم که مختصات A به صورت $A(1, 2.5)$ است، پس فاصله آن از

$$OA = \sqrt{1^2 + 2.5^2} = \sqrt{1 + 6.25} = \sqrt{7.25} = \sqrt{\frac{29}{4}} = \frac{\sqrt{29}}{2}$$

مبدأ مختصات می شود:

۳۰- گزینه ۱

استراتژی شکل سوال را رسم کنید، خودش راهنمایی تان می کند به استفاده از قضیه نیمساز داخلی و قضیه کسینوس ها.

درس نامه ۱ قضیه نیمساز داخلی: اگر مطابق شکل،

AD نیمساز $\hat{A}$ در مثلث ABC باشد، داریم:

$$\frac{BD}{CD} = \frac{AB}{AC}$$

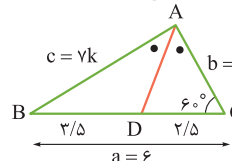
۲ قضیه کسینوس ها: مطابق شکل در مثلث ABC ، داریم:

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \hat{C}$$

۳ اگر $\frac{a}{b} = \frac{m}{n}$ باشد، می توانید فرض کنید $a = mk$ و $b = nk$.

گام ۱ (رسم شکل مناسب و استفاده از قضیه نیمساز داخلی) شکل مسئله به صورت زیر است.

همان طور که می بینید، AD نیمساز است، پس طبق مورد (۱) درس نامه می توانیم بنویسیم:



$$\frac{AB}{AC} = \frac{BD}{CD} \Rightarrow \frac{c}{b} = \frac{3/\Delta}{2/\Delta} = \frac{3}{2} \Rightarrow \frac{vk}{\Delta k} = \frac{3}{2} \Rightarrow \frac{v}{\Delta} = \frac{3}{2}$$

طبق قسمت (۳) درس نامه از تساوی $\frac{c}{b} = \frac{v}{\Delta}$ ، می توانیم نتیجه بگیریم که $c = vk$ و $b = \Delta k$.



۳ ضرب داخلی و خارجی دو بردار مثل $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ و $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$ به صورت مقابل محاسبه می‌شوند:

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{a}_1 & \vec{a}_2 & \vec{a}_3 \\ \vec{b}_1 & \vec{b}_2 & \vec{b}_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$$

مواست به این منقیه باشد.

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = (a_1, a_2, a_3) \cdot (b_1, b_2, b_3) = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$$

۴ اندازه بردار $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ برابر است با:

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$$

گام ۱ (نوشتن رابطه کلی $\vec{h}$) شکل فرضی مقابل را می‌کشیم. طبق مورد (۲) درس‌نامه، می‌توانیم بنویسیم:

$$\vec{h} = \frac{\vec{c} \cdot (\vec{a} \times \vec{b})}{|\vec{a} \times \vec{b}|} (\vec{a} \times \vec{b}) (*)$$

گام ۲ (جای‌گذاری موارد معلوم در رابطه $(*)$) طبق اطلاعات مسئله $\vec{a} = (1, 1, 0)$ و $\vec{b} = (-1, 2, 0)$ بنابرین $\vec{a} \times \vec{b}$ می‌شود:

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = (0, 0, 3)$$

پس $|\vec{a} \times \vec{b}| = \sqrt{0^2 + 0^2 + 3^2} = \sqrt{9} = 3$ برابر است با:

در ادامه فرض می‌کنیم $\vec{c} = (c_1, c_2, c_3)$ باشد، حالا با توجه به این که $\vec{h} = (x, y, 4)$ است، می‌توانیم رابطه $(*)$ را به کمک جای‌گذاری به صورت زیر بنویسیم:

$$(x, y, 4) = \frac{(c_1, c_2, c_3) \cdot (0, 0, 3)}{3} (0, 0, 3)$$

$$\Rightarrow (x, y, 4) = \frac{0 + 0 + 3c_3}{3} (0, 0, 3) \Rightarrow (x, y, 4) = (0, 0, c_3) \Rightarrow c_3 = 4$$

پس تا این‌جا بردار $\vec{c}$ به این صورت شد:

گام ۳ (محاسبه c_1 و c_2) حالا با جای‌گذاری $\vec{a} = (1, 1, 0)$ ، $\vec{b} = (-1, 2, 0)$ و $\vec{c} = (c_1, c_2, 4)$ در روابط $\vec{a} \cdot \vec{c} = 1$ و $\vec{b} \cdot \vec{c} = 5$ ، مقادیر c_1 و c_2 را به دست می‌آوریم:

$$\begin{cases} \vec{a} \cdot \vec{c} = 1 \Rightarrow (1, 1, 0) \cdot (c_1, c_2, 4) = 1 \Rightarrow c_1 + c_2 = 1 \\ \vec{b} \cdot \vec{c} = 5 \Rightarrow (-1, 2, 0) \cdot (c_1, c_2, 4) = 5 \Rightarrow -c_1 + 2c_2 = 5 \end{cases}$$

$$\xrightarrow{+} 3c_2 = 6 \Rightarrow c_2 = 2 \xrightarrow{c_1 + c_2 = 1} c_1 + 2 = 1 \Rightarrow c_1 = -1$$

بنابراین بردار $\vec{c}$ به این صورت شد:

گام ۴ (محاسبه خواسته سؤال) سؤال طول بردار $\vec{c} = (-1, 2, 4)$ را می‌خواهد که طبق مورد (۴)

درس‌نامه برابر می‌شود با:

$$|\vec{c}| = \sqrt{(-1)^2 + (2)^2 + (4)^2} = \sqrt{1 + 4 + 16} = \sqrt{21}$$

مشاوره تپ این سؤال جدید محسوب می‌شود، بنابراین پیشنهاد می‌کنیم روش حل آن را در ذهنتان save کنید.



۳۵ - گزینه ۴

استراتژی تعداد نقاط (a, b) روی منحنی $y = \frac{3x-1}{x+2}$ با شرط $a, b \in \mathbb{Z}$ برابر با تعداد جواب‌های معادله عادکردنی $3x-1 = x+2$ است.

نکته در معادله‌های عادکردنی به فرم $ax+b \mid f(x)$ ، می‌توانیم ریشه عبارت خطی،

عبارت خطی

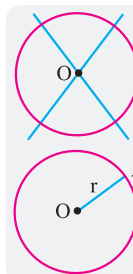
یعنی $x = \frac{-b}{a}$ را در سمت راست معادله جای‌گذاری کنیم:

$$ax+b \mid f(x) \Rightarrow ax+b \mid f\left(-\frac{b}{a}\right)$$

فقط خواستار آن باشیم که از معادله بالا به دست می‌آیند، باید در معادله اولیه صدق کند.

گام ۱ سمت چپ معادله عادکردنی $3x-1 \mid 3x+2$ یک عبارت خطی است، پس طبق نکته بالا می‌توانیم ریشه عبارت خطی، یعنی $x = -2$ را در سمت راست معادله جای‌گذاری کنیم:

$$\begin{aligned} 3x+2 \mid 3(-2)-1 &\Rightarrow 3x+2 \mid -7 \\ \Rightarrow 3x+2 &= \pm 1, \pm 7 \Rightarrow \begin{cases} 3x = -2 \pm 1 = -1, -3 \\ 3x = -2 \pm 7 = -9, 5 \end{cases} \end{aligned}$$



درس‌نامه ۱ قطرهای دایره، مطابق شکل مقابل، همدیگر را در مرکز دایره قطع می‌کنند.

۲ اگر مطابق شکل مقابل، نقطه‌ای مثل A روی دایره باشد، فاصله‌اش از مرکز، برابر می‌شود با شعاع دایره:

$$OA = r \Rightarrow A \text{ روی دایره است.}$$

گام ۱ (پیدا کردن مرکز دایره) اول به m دو مقدار مختلف می‌دهیم تا معادله دو قطر از دایره پیدا شود. این‌جا برای راحتی کار به ۲ و -۱ می‌دهیم:

$$(m-2)x + (m+1)y = 6 \begin{cases} m=2 \Rightarrow 3y = 6 \Rightarrow y = 2 \\ m=-1 \Rightarrow -3x = 6 \Rightarrow x = -2 \end{cases}$$

همان‌طور که در شکل مقابل می‌بینید: این دو قطر در نقطه $O(-2, 2)$ همدیگر را قطع می‌کنند، پس طبق مورد (۱) درس‌نامه، نقطه O مرکز دایره است.

گام ۲ (محاسبه شعاع دایره) چون نقطه $A(-1, 1)$ روی دایره است، پس طبق مورد (۲) درس‌نامه، فاصله‌اش از مرکز برابر می‌شود با شعاع دایره:

$$r = OA \Rightarrow r = \sqrt{(-2 - (-1))^2 + (2 - 1)^2} = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$$

گام ۳ (محاسبه خواسته سؤال) حالا که شعاع دایره را داریم، محیطش به راحتی محاسبه می‌شود:

$$\text{محیط دایره} = 2\pi r = 2\sqrt{2}\pi$$



۳۳ - گزینه ۲

درس‌نامه ۱ در معادله گسترده سهمی، اگر نسبت به متغیر درجه دوم مشتق بگیریم یا عرض رأس سهمی پیدا می‌شود یا طولش. احتمالاً می‌پرسید چه‌طور تشخیص بدهیم؟ باید خدمتتان عرض کنم که اگر متغیر درجه دوم X بود طول رأس و اگر متغیر درجه دوم Y بود عرض رأس پیدا شده است. ۲ مختصات رأس سهمی در معادله‌اش صدق می‌کند.

گام ۱ (محاسبه a) در سهمی $y^2 - 2ay + \lambda x + b = 0$ داریم، پس طبق مورد (۱) درس‌نامه اگر نسبت به Y مشتق بگیریم عرض رأس سهمی پیدا می‌شود:

$$4y - 2a + 0 + 0 = 0 \Rightarrow 4y = 2a \Rightarrow y = \frac{a}{2}$$

به گفته سؤال نقطه $(-1, 1)$ رأس سهمی است، پس می‌توانیم بگوییم $\frac{a}{2} = 1$ و در نتیجه

$$2y^2 - 4y + \lambda x + b = 0 \quad \text{است؛ پس معادله سهمی به این صورت می‌شود:}$$

گام ۲ (محاسبه b) طبق مورد (۲) درس‌نامه مختصات رأس سهمی یعنی $(-1, 1)$ در معادله‌اش صدق می‌کند، پس:

$$2(1)^2 - 4(1) + \lambda(-1) + b = 0 \Rightarrow -1 + b = 0 \Rightarrow b = 1$$

گام ۳ (محاسبه خواسته سؤال) سؤال نسبت $\frac{a}{b}$ را می‌خواهد که برابر می‌شود با:

$$\frac{a}{b} = \frac{2}{1} = 2$$



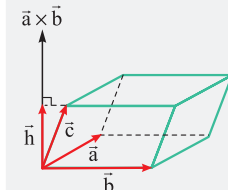
۳۴ - گزینه ۴

درس‌نامه ۱ اگر $\vec{a}'$ ، تصویر قائم بردار $\vec{a}$ بر بردار $\vec{b}$ باشد، در این صورت $\vec{a}'$ از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$\vec{a}' = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{b}|^2} (\vec{b})$$

۲ همان‌طور که در شکل مقابل می‌بینید، بردار ارتفاع متوازی‌السطوح ($\vec{h}$)، تصویر قائم بردار $\vec{c}$ بر بردار $\vec{a} \times \vec{b}$ است، پس طبق مورد (۱) درس‌نامه رابطه زیر برقرار است:

$$\vec{h} = \frac{\vec{c} \cdot (\vec{a} \times \vec{b})}{|\vec{a} \times \vec{b}|} (\vec{a} \times \vec{b})$$





۳۷- گزینه ۳

درس نامه ۱ به معادله‌هایی به شکل $ax + by = c$ (a و b اعدادی صحیح‌اند). معادله سیالۀ خطی می‌گوییم. برای حل کردن این معادله‌ها کارهای زیر را انجام می‌دهیم:

الف) طرفین معادله را به پیمانه ضرب کوچکتر (یا a یا b) هم‌نهشت قرار می‌دهیم تا به یک معادله هم‌نهشتی برسیم.

ب) با حل کردن معادله هم‌نهشتی، فرم کلی یک از مجهول را به دست می‌آوریم.

پ) مجهول به‌دست‌آمده را در معادله سیالۀ جای‌گذاری می‌کنیم تا فرم کلی مجهول دیگر هم به دست بیاید.

۲) اگر طرفین یک هم‌نهشتی به پیمانه m، بر عدد صحیحی مثل $a \neq 0$ بخش‌پذیر باشند، می‌توانیم a را از طرفین هم‌نهشتی ساده کنیم؛ اما باید حواسمان باشد که پیمانه را هم بر (a, m) تقسیم کنیم؛ یعنی:

$$ax \equiv ay \xrightarrow{(a, m)=d} x \equiv y \quad \text{هر هم‌نهشتی مثل } a \equiv b \text{ را می‌توانیم به یک تساوی تبدیل کنیم؛ ببینید:}$$

$$a \equiv b \Leftrightarrow a = mk + b$$

گام ۱ ابتدا طرفین معادله $12x + 11y = 759$ را به پیمانه ضرب کوچکتر، یعنی ۱۱ هم‌نهشت قرار می‌دهیم:

$$\begin{array}{r} 11 \\ -11 \quad -69 \times 11 \\ \hline 12x \equiv 759 \Rightarrow x \equiv 0 \Rightarrow x = 11t \end{array}$$

گام ۲ حالا به جای x در $12x + 11y = 759$ قرار می‌دهیم $11t$ تا فرم y هم مشخص شود:

$$12(11t) + 11y = 759 \xrightarrow{\div 11} 12t + y = 69 \Rightarrow y = 69 - 12t$$

گام ۳ مقادیر طبیعی x و y را می‌خواهیم:

$$\begin{cases} 1 \leq x \Rightarrow 1 \leq 11t \xrightarrow{t \in \mathbb{Z}} \frac{1 \leq t}{(I)} \\ 1 \leq y \Rightarrow 1 \leq 69 - 12t \Rightarrow 12t \leq 68 \xrightarrow{t \in \mathbb{Z}} \frac{t \leq 5}{(II)} \end{cases}$$

اشتراک نامساوی‌های (I) و (II) می‌شود $1 \leq t \leq 5$ که ۵ عدد صحیح ۱، ۲، ۳، ۴ و ۵ در آن وجود دارد؛ بنابراین معادله ۵ جواب طبیعی دارد.

مشاوره حل معادله سیالۀ خطی جزء مباحثی است که تقریباً هر سال در کنکور سراسری یک تست را به خود اختصاص می‌دهد و خبر خوب این است که سؤالات این مبحث عموماً ساده هستند و به راحتی می‌توانید به آن‌ها پاسخ دهید.

۳۸- گزینه ۲

استراتژی کافی است به جای $\Delta(G)$ ، $\delta(G)$ و $q(G)$ به ترتیب بنویسید « $p-1$ »، « $p-1$ » و « $\frac{p(p-1)}{2}$ » و معادله به‌دست‌آمده را حل کنید تا جواب حاصل شود.

درس نامه در هر گراف کامل p رأسی، مثل G، اگر درجه بزرگ‌ترین رأس را با $\Delta(G)$ ، درجه کوچک‌ترین رأس را با $\delta(G)$ و تعداد یال‌ها را با $q(G)$ نمایش دهیم، داریم:

$$\Delta(G) = \delta(G) = p-1, \quad q(G) = \frac{p(p-1)}{2}$$

با توجه به درس‌نامه، به جای $\Delta(G)$ ، $\delta(G)$ و $q(G)$ به ترتیب می‌نویسیم « $p-1$ »، « $p-1$ » و « $\frac{p(p-1)}{2}$ »:

$$q(G) = \Delta^2(G) - 2\delta(G) \Rightarrow \frac{p(p-1)}{2} = (p-1)^2 - 2(p-1)$$

در بین گزینه‌ها $p=1$ موجود نیست، پس $p-1 \neq 0$ و در نتیجه حق داریم $(p-1)$ ها را از طرفین معادله بزنیم:

$$\frac{p}{2} = (p-1) - 2 \Rightarrow \frac{p}{2} = p-3 \xrightarrow{\times 2} p = 2p-6 \Rightarrow p = 6$$

مشاوره شاید از نظر اکثر دانش‌آموزان، گراف سخت‌ترین فصل گسسته باشد، اما بعضی وقت‌ها مثل همین کنکور ساده‌ترین سؤال گسسته از گراف می‌آید. به همین خاطر پیشنهاد می‌کنیم هیچ مبحث و فصلی را حذف نکنید.

گام ۱ حالا باید ببینیم x‌های به‌دست‌آمده، در معادله $3x - 1 \mid 3x + 2 \mid x + 2$ صدق می‌کنند یا نه:

$$x = -1: -1 + 2 \mid 3(-1) - 1 \Rightarrow 1 \mid -4 \quad \checkmark$$

$$x = -3: -3 + 2 \mid 3(-3) - 1 \Rightarrow -1 \mid -10 \quad \checkmark$$

$$x = -9: -9 + 2 \mid 3(-9) - 1 \Rightarrow -7 \mid -28 \quad \checkmark$$

$$x = 5: 5 + 2 \mid 3(5) - 1 \Rightarrow 7 \mid 14 \quad \checkmark$$

هر ۴ مقدار به‌دست‌آمده، در معادله اولیه صدق می‌کنند، پس مسئله ۴ جواب دارد.

۳۹- گزینه ۱

درس نامه ۱ اگر رقم یکان دو عدد a و b برابر باشد، $a \equiv b$ می‌شود.

الف) می‌توانیم هر عدد دلخواهی را به دو طرف هم‌نهشتی اضافه یا از آن کم کنیم:

$$a \equiv b \Rightarrow a \pm c \equiv b \pm c$$

ب) طرفین دو هم‌نهشتی با پیمانه‌های یکسان را می‌توانیم با هم جمع یا از هم کم کنیم:

$$\begin{cases} a \equiv b \\ c \equiv d \end{cases} \Rightarrow a \pm c \equiv b \pm d$$

۳) اگر $a \equiv b$ باشد، می‌توانیم هر مضرب صحیحی از m را به طرفین هم‌نهشتی اضافه یا از آن کم کنیم:

$$a \pm km \equiv b \pm km$$

۴) هم‌نهشتی $a \equiv b$ را می‌توانیم به دو هم‌نهشتی $a \equiv b$ و $a \equiv b$ بشکنیم.

۵) دو هم‌نهشتی با طرفین یکسان را، می‌توانیم به صورت زیر به یک هم‌نهشتی تبدیل کنیم:

$$\begin{cases} a \equiv b \\ a \equiv b \end{cases} \Rightarrow a \equiv b \quad [m, n]$$

گام ۱ اعداد $a^2 - 1$ و $a^2 + 6a + 6$ رقم یکانشان برابر است، پس طبق مورد (۱) درس‌نامه داریم:

$$a^2 - 1 \equiv a^2 + 6a + 6 \Rightarrow a^2 - 14a - 7 \equiv 0 \Rightarrow a^2 + 6a - 7 \equiv 0$$

گام ۲ به کمک مورد (۴) درس‌نامه، هم‌نهشتی $a^2 + 6a - 7 \equiv 0$ را به دو هم‌نهشتی

$$a^2 + 6a - 7 \equiv 0 \text{ و } a^2 + 6a - 7 \equiv 0 \text{ می‌شکنیم. از هم‌نهشتی اول داریم:}$$

$$a^2 + 6a - 7 \equiv 0 \Rightarrow a^2 - 7 \equiv 0 \Rightarrow a^2 - 1 \equiv 0 \Rightarrow a^2 \equiv 1 \quad (1)$$

از هم‌نهشتی $a^2 \equiv 1$ نتیجه می‌گیریم که a عددی فرد است، پس:

$$a \equiv 1 \quad (2)$$

حالا طرفین هم‌نهشتی‌های (۱) و (۲) را با هم جمع می‌کنیم:

$$a^2 + a \equiv 1 + 1 \quad (*)$$

در ادامه به سراغ هم‌نهشتی دوم می‌رویم:

$$a^2 + 6a - 7 \equiv 0 \Rightarrow a^2 + a \equiv 7 \Rightarrow a^2 + a \equiv 2 \quad (**)$$

حالا خوب به هم‌نهشتی‌های (*) و (**) توجه کنید. همان‌طور که می‌بینید، طرفینشان یکسان است، پس طبق مورد (۵) درس‌نامه داریم:

$$\begin{cases} a^2 + a \equiv 2 \\ a^2 + a \equiv 2 \end{cases} \Rightarrow a^2 + a \equiv 2 \quad [2, 5]$$

بنابراین رقم یکان $a^2 + a$ برابر ۲ است.

تیزبازی بیا باید به جای a از عدد استفاده کنیم که شرایط مسئله را برآورده کند؛ یعنی رقم یکان $a^2 - 1$ و $a^2 + 6a + 6$ یکسان می‌شود. $a=1$ این کار را می‌کند. به ازای این

مقدار رقم یکان هر دو عدد صفر می‌شود. حالا کافی است ببینیم به ازای $a=1$ ، رقم یکان $a^2 + a$ چند می‌شود:

$$a^2 + a = 1^2 + 1 = 2$$

بله! همان‌طور که می‌بینید باز هم به عدد ۲ رسیدیم.



فیزیک

گزینه ۱ - ۴۱

درس نامه تبدیل یکای زنجیره‌ای

برای تبدیل یکای یک کمیت به یکای دیگر، از روش تبدیل یکای زنجیره‌ای استفاده می‌کنیم؛ مثلاً برای این که ببینیم 20 in معادل چند cm است، به صورت زیر عمل می‌کنیم:

گام ۱ ابتدا تساوی بین دو یکا را می‌نویسیم، سپس کسر تبدیل مناسب را به دست می‌آوریم.

$$1 \text{ in} = 2.54 \text{ cm} \Rightarrow \frac{1 \text{ in}}{2.54 \text{ cm}} = 1 \text{ یا } \frac{2.54 \text{ cm}}{1 \text{ in}} = 1$$

گام ۲ حالا کسر تبدیلی را انتخاب می‌کنیم که پس از ساده‌شدن، به یکای مورد نظرمان برسیم.

$$20 \text{ in} = 20 \text{ in} \times \frac{2.54 \text{ cm}}{1 \text{ in}} = 50.8 \text{ cm}$$

گام ۳ ابتدا کسر تبدیل‌های مناسب را می‌نویسیم.

$$\frac{10^3 \text{ m}}{1 \text{ km}} = 1, \frac{1 \text{ mile}}{1609 \text{ m}} = 1, \frac{1 \text{ h}}{60 \text{ min}} = 1$$

گام ۴ حالا با استفاده از تبدیل یکای زنجیره‌ای، تبدیلی را برحسب $\frac{\text{mile}}{\text{min}}$ به دست می‌آوریم.

$$216 \frac{\text{km}}{\text{h}} = 216 \frac{\text{km}}{\text{h}} \times \frac{10^3 \text{ m}}{1 \text{ km}} \times \frac{1 \text{ mile}}{1609 \text{ m}} \times \frac{1 \text{ h}}{60 \text{ min}} = 2 \frac{\text{mile}}{\text{min}}$$

گزینه ۴ - ۴۲

درس نامه انبساط حجمی یک جسم جامد:

ضریب انبساط طولی ($\frac{1}{K}$ یا $\frac{1}{C}$)

$$\Delta V = V_1 \times \alpha \Delta \theta$$

تغییر حجم (m^3)

تغییر دما ($^\circ\text{C}$ یا K)

حجم اولیه (m^3)

ابتدا تغییر حجم قطعه را با استفاده از رابطه زیر به دست می‌آوریم.

$$\Delta V = V_1 \times \alpha \Delta \theta \quad \alpha = 3 \times 10^{-5} \frac{1}{^\circ\text{C}} \quad \Delta \theta = 200^\circ\text{C} \Rightarrow \Delta V = V_1 \times 3 \times 10^{-5} \times 200$$

$$= 18 \times 10^{-3} V_1$$

گام ۱ با توجه به نکته زیر، درصد تغییر حجم قطعه را محاسبه می‌کنیم.

نکته به طور کلی در قسمت‌هایی که درصد تغییرات یک کمیت مانند X خواسته می‌شود، به صورت مقابل عمل کنید.

$$\text{درصد تغییر کمیت } X = \frac{\Delta X}{X_1} \times 100$$

مقدار اولیه کمیت X

$$\text{درصد تغییر حجم} = \frac{\Delta V}{V_1} \times 100 = \frac{\Delta V = 18 \times 10^{-3} V_1}{V_1} \times 100 = \frac{18 \times 10^{-3} V_1}{V_1} \times 100$$

$$\Rightarrow \text{درصد تغییر حجم} = 1.8\%$$

تله اگر فراموش کنید که ضریب انبساط حجمی، ۳ برابر ضریب انبساط طولی است، را به دست می‌آورید که تله است.

گزینه ۴ - ۴۳

درس نامه ۱ اندازه نیروی مغناطیسی وارد بر سیم راست حامل جریان:

میدان مغناطیسی (T)

جریان الکتریکی (A)

$$F = I L B \sin \theta$$

زاویه بین امتداد سیم و میدان مغناطیسی

طول قسمتی از سیم که

داخل میدان است (m)

نیرو (N)

برای تعیین جهت این نیرو از قاعده دست راست استفاده می‌کنیم. طبق

این قاعده، اگر چهار انگشت دست راستمان را در جهت جریان الکتریکی

بگیریم و آن‌ها را مطابق شکل به طرف میدان مغناطیسی خم کنیم، آن‌گاه

انگشت شست ما جهت نیروی مغناطیسی وارد بر سیم را نشان می‌دهد.

انگشت شست ما جهت نیروی مغناطیسی وارد بر سیم را نشان می‌دهد.

گزینه ۱ - ۳۹

استراتژی اعداد مورد نظر را به صورت $X_1 X_2 X_3 X_4$ در نظر می‌گیریم. در این صورت

تعداد اعداد طبیعی کوچک‌تر از 6000 (یا همان اعداد طبیعی کوچک‌تر مساوی 5999) با

مجموع ارقام 8 ، برابر تعداد جواب‌های صحیح و نامنفی معادله $X_1 + X_2 + X_3 + X_4 = 8$

با شروط $0 \leq X_1 \leq 5$ و $0 \leq X_2, X_3, X_4 \leq 9$ است. برای پیدا کردن تعداد جواب‌ها با این

شروط اول تعداد کل جواب‌های صحیح و نامنفی معادله $X_1 + X_2 + X_3 + X_4 = 8$ را به

دست می‌آوریم، بعد تعداد جواب‌های نامطلوب (جواب‌هایی که در آن‌ها $6 \leq X_1$ است)

را از کل حالت‌ها کم می‌کنیم.

درس نامه تعداد جواب‌های صحیح و نامنفی معادله $X_1 + X_2 + X_3 + \dots + X_k = n$

برابر $\binom{n+k-1}{k-1}$ است.

گام ۱ اعداد مورد نظر را به صورت $X_1 X_2 X_3 X_4$ در نظر می‌گیریم. طبق استراتژی تعداد

اعداد مورد نظر برابر با تعداد جواب‌های صحیح و نامنفی معادله $X_1 + X_2 + X_3 + X_4 = 8$

با شروط $0 \leq X_1 \leq 5$ و $0 \leq X_2, X_3, X_4 \leq 9$ است. اول تعداد کل جواب‌های صحیح و

نامنفی این معادله را به دست می‌آوریم:

$$X_1 + X_2 + X_3 + X_4 = 8 \Rightarrow \begin{cases} k = 4 \\ n = 8 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \binom{n+k-1}{k-1} = \binom{11}{3} = \frac{11 \times 10 \times 9}{3 \times 2 \times 1} = 165$$

گام ۲ حالا تعداد جواب‌های نامطلوب را به دست می‌آوریم. در جواب‌های نامطلوب،

$X_1 = 6$ یا 7 یا 8 یا 9 است. تعداد جواب‌های نامطلوب در هر حالت می‌شود:

$$\begin{aligned} X_1 = 9 &\Rightarrow X_2 + X_3 + X_4 = -1 \text{ امکان پذیر نیست} \\ X_1 = 8 &\Rightarrow X_2 + X_3 + X_4 = 0 \Rightarrow X_2, X_3, X_4 = 0 \Rightarrow \text{حالت } 1 \\ X_1 = 7 &\Rightarrow X_2 + X_3 + X_4 = 1 \Rightarrow \begin{cases} k = 3 \\ n = 1 \end{cases} \\ &\Rightarrow \binom{n+k-1}{k-1} = \binom{3}{2} = 3 \Rightarrow \text{حالت } 3 \\ X_1 = 6 &\Rightarrow X_2 + X_3 + X_4 = 2 \Rightarrow \begin{cases} k = 3 \\ n = 2 \end{cases} \\ &\Rightarrow \binom{n+k-1}{k-1} = \binom{4}{2} = 6 \Rightarrow \text{حالت } 6 \end{aligned}$$

گام ۳ $10 = 1 + 3 + 6 = 10$ حالت نامطلوب داریم، پس جواب برابر $165 - 10 = 155$ می‌شود.

گزینه ۱ - ۴۰

استراتژی زیرمجموعه‌ها را طوری دوتا دوتا در یک گروه قرار می‌دهیم که اشتراک دو

زیرمجموعه درون یک گروه تهی باشد، بعد با استفاده از اصل لانه کبوتری به جواب می‌رسیم.

درس نامه اصل لانه کبوتری: فرض کنید m کبوتر و n لانه داریم، اگر $n < m$ باشد

(یعنی تعداد کبوترها بیشتر از تعداد لانه‌ها باشد) و همه کبوترها داخل لانه‌ها بنشینند،

مطمئن هستیم لانه‌ای وجود دارد که در آن دست کم دو کبوتر وجود دارد.

گام ۱ تعداد کل زیرمجموعه‌های یک مجموعه 7 عضوی، $2^7 = 128$ تا است. ما به دنبال

این هستیم که دو زیرمجموعه با اشتراک تهی داشته باشیم؛ پس این 128 زیرمجموعه را به

64 گروه دوتایی طوری تقسیم می‌کنیم که هر زیرمجموعه و متمم آن در یک گروه باشند.

برای درک بهتر تعدادی از این گروه‌های دوتایی را ببینید: $(\{1\}, \{2, 3, 4, 5, 6, 7\})$

$$(\{2\}, \{1, 3, 4, 5, 6, 7\})$$

$$(\{3\}, \{1, 2, 4, 5, 6, 7\})$$

$$(\{4\}, \{1, 2, 3, 5, 6, 7\})$$

$$(\{5\}, \{1, 2, 3, 4, 6, 7\})$$

$$(\{6\}, \{1, 2, 3, 4, 5, 7\})$$

$$(\{7\}, \{1, 2, 3, 4, 5, 6\})$$

گام ۲ با توجه به گروه‌بندی‌ای که انجام دادیم، مطمئن هستیم اشتراک هر دو زیرمجموعه

درون یک گروه تهی است. حالا 64 گروه داریم، پس اگر 65 زیرمجموعه انتخاب کنیم، طبق

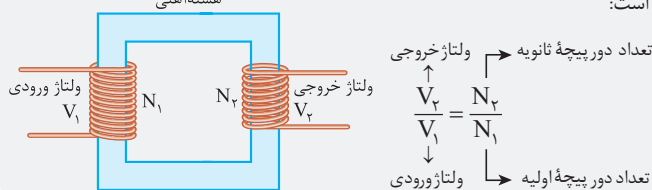
اصل لانه کبوتری مطمئن هستیم گروهی وجود دارد که هر دو زیرمجموعه آن انتخاب شده

و اشتراک آن‌ها تهی می‌شود.



۴۶ - گزینه ۴

درس نامه برای یک مبدل آرمانی که مقاومت پیچیه‌های آن ناچیز است، رابطه زیر برقرار است:



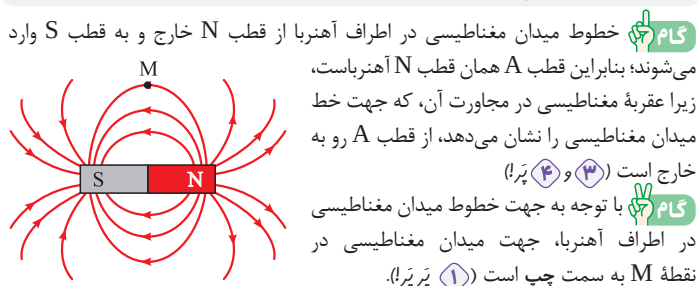
کافی است داده‌ها را در رابطه زیر جای گذاری کنیم تا ولتاژ خروجی V_2 را به دست بیاوریم.

$$\frac{V_2}{V_1} = \frac{N_2}{N_1} \rightarrow \frac{V_2}{240} = \frac{900}{50} \Rightarrow V_2 = \frac{240 \times 900}{50} = 4320 \text{ V}$$

۴۷ - گزینه ۲

درس نامه ۱ خطوط میدان مغناطیسی در اطراف آهنربا، از قطب N خارج و به قطب S وارد می‌شوند.

۲ بردار میدان مغناطیسی در هر نقطه، در جهت عقربه مغناطیسی است.



مشاوره این سؤال از شکل کتاب درسی طراحی شده است. کتاب درسی را جدی بگیرید تا هم خشنود شوید و هم رستگار!

۴۸ - گزینه ۱

درس نامه بسامدهای تشدید در تار مرتعش دو انتها بسته، مضارب درستی از بسامد تشدید اول اند.

$$f_n = n f_1 \Rightarrow \begin{cases} f_2 = 2f_1 \\ f_3 = 3f_1 \\ \vdots \end{cases}$$

روش با توجه به این که $f_2 = 2f_1$ است، می‌توانیم مقدار f_1 را به دست بیاوریم.

$$f_2 = 160 \text{ Hz} \xrightarrow{f_2 = 2f_1} 2f_1 = 160 \Rightarrow f_1 = 80 \text{ Hz}$$

گام ۳ حالا از رابطه $f_3 = 3f_1$ استفاده می‌کنیم و خواسته سؤال یعنی مقدار $f_3 - f_1$ را محاسبه می‌کنیم.

$$\Rightarrow f_3 - f_1 = 3f_1 - f_1 = 2f_1 \xrightarrow{f_1 = 80 \text{ Hz}} f_3 - f_1 = 2 \times 80 = 160 \text{ Hz}$$

روش اختلاف دو بسامد فرد متوالی برابر با اختلاف دو بسامد زوج متوالی است؛ بنابراین $f_3 - f_1 = f_2 - f_2 = 320 - 160 = 160 \text{ Hz}$ می‌توانیم بنویسیم:

تیزبازی اختلاف دو بسامد تشدید متوالی تار دو انتها بسته برابر با بسامد تشدید اول (f_1) است؛ پس می‌توانیم بنویسیم:

$$f_3 - 160 = f_1 \Rightarrow f_3 - f_1 = 160 \text{ Hz}$$

۴۹ - گزینه ۴

درس نامه معادله جریان متناوب برحسب زمان، جریان در لحظه t (A) زمان $t \rightarrow (s)$ $I = I_m \sin \frac{2\pi}{T} t$ دوره (s) $\rightarrow$ بیشینه جریان (A)

با داشتن بیشینه جریان و دوره، معادله جریان متناوب را می‌نویسیم.

$$I = I_m \sin \frac{2\pi}{T} t \xrightarrow{\frac{I_m = 2A}{T = 0.02s}} I = 2 \sin \frac{2\pi}{0.02} t \Rightarrow I = 2 \sin 100\pi t$$

گام ۱ با جای گذاری داده‌ها در رابطه زیر، اندازه نیروی مغناطیسی وارد بر سیم را محاسبه می‌کنیم.

$$F = ILB \sin \theta \xrightarrow{I=2/5A, L=2/4m, \theta=90^\circ} F = 2/5 \times 2/4 \times 0.5 \times 10^{-4} \times \sin 90^\circ$$

$$\Rightarrow F = 2/5 \times 10^{-4} = 3 \times 10^{-4} \text{ N}$$

گام ۲ برای تعیین جهت نیروی مغناطیسی وارد بر سیم، از قاعده دست راست استفاده می‌کنیم. طبق این قاعده، چهار انگشت باز شده دست راست خود را در جهت جریان (به طرف غرب) می‌گیریم و آن‌ها را به طرف میدان مغناطیسی (به طرف شمال) خم می‌کنیم. در این صورت، انگشت شست جهت نیروی مغناطیسی (به طرف پایین) را نشان می‌دهد.

تله در این سؤال اگر به جای دست راست، از دست چپتان استفاده کنید، به گزینه نادرست می‌رسید.

۴۴ - گزینه ۳

شفاف سازی نماد $\oplus$ بیانگر پروتون و نماد $\ominus$ بیانگر نوترون است.

درس نامه ۱ مجموع تعداد کل پروتون‌ها (Z) و نوترون‌ها (N) را عدد جرمی (A) می‌گویند.

$$\begin{array}{c} A \\ \swarrow \searrow \\ Z \quad N \\ \swarrow \searrow \\ \text{عدد نوترونی} \quad \text{عدد اتمی} \end{array} \quad A = Z + N$$

۲ فرایند واپاشی β^+ (پوزیترون) با رابطه مقابل بیان می‌شود:

$${}_Z^A X \rightarrow {}_{Z-1}^A Y + {}_1^0 e^+$$

گام ۱ ابتدا با توجه به شکل، عدد جرمی هسته مادر و هسته دختر را به دست می‌آوریم، سپس فرایند این واپاشی را می‌نویسیم (هسته دختر را با Y و ذره گسیل شده را با X نشان دادیم).

$$A_{\text{مادر}} = Z_{\text{مادر}} + N_{\text{مادر}} \xrightarrow{Z_{\text{مادر}}=53, N_{\text{مادر}}=71} A_{\text{مادر}} = 53 + 71 = 124$$

$$A_{\text{دختر}} = Z_{\text{دختر}} + N_{\text{دختر}} \xrightarrow{Z_{\text{دختر}}=52, N_{\text{دختر}}=72} A_{\text{دختر}} = 52 + 72 = 124$$

$${}_{53}^{124} I \rightarrow {}_{52}^{124} Y + {}_1^0 X$$

گام ۲ تعداد نوکلئون‌ها قبل از فرایند با تعداد نوکلئون‌ها پس از فرایند یکسان است؛ بنابراین با توجه به فرایند واپاشی می‌توانیم بنویسیم:

$$124 = 124 + A' \Rightarrow A' = 0 \Rightarrow {}_1^0 X$$

$$53 = 52 + Z' \Rightarrow Z' = 1$$

ذره گسیل شده ${}_1^0 X$ است؛ یعنی این ذره پوزیترون (${}_1^0 e^+$) است.

تیزبازی در واپاشی β^+ ، یکی از پروتون‌های درون هسته به یک نوترون و پوزیترون تبدیل می‌شود. همان‌طور که در شکل صورت سؤال می‌بینیم، از تعداد پروتون‌های درون هسته مادر یک عدد کم شده و تعداد نوترون‌های هسته دختر یک عدد اضافه شده است؛ پس ذره گسیل شده پوزیترون (β^+) است.

۴۵ - گزینه ۱

درس نامه تندی انتشار موج عرضی در تار مرتعش تحت کشش:

$$v = \sqrt{\frac{F}{\rho \cdot A}} \rightarrow \begin{array}{l} \text{نیروی کشش تار (N)} \\ \text{سطح مقطع تار (m}^2\text{)} \end{array}$$

چگالی تار (kg/m^3)

کافی است داده‌ها را در رابطه زیر جای گذاری کنیم و نیروی کشش تار را به دست بیاوریم.

$$v = \sqrt{\frac{F}{\rho \cdot A}} \xrightarrow{v=25 \text{ m/s}, \rho=8000 \text{ kg/m}^3, A=2 \times 10^{-6} \text{ m}^2} 25 = \sqrt{\frac{F}{8000 \times 2 \times 10^{-6}}}$$

$$\xrightarrow{\text{به توان ۲}} 625 = \frac{F}{16 \times 10^{-3}} \Rightarrow F = 10 \text{ N}$$

مشاوره طراحان کنکور در سال‌های گذشته علاقه زیادی به مطرح کردن سؤال از این قسمت داشته‌اند. حتماً فرمول‌های تکمیلی این قسمت را حفظ باشید.

۵۲- گزینه ۲

درس نامه ۱ شتاب متوسط: اگر سرعت متحرکی که بر روی خط راست حرکت می‌کند، در لحظه t_1 برابر با v_1 و در لحظه t_2 برابر با v_2 باشد، آن‌گاه شتاب متوسط متحرک از رابطه مقابل به دست می‌آید.

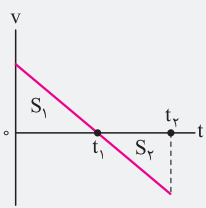
$$a_{av} = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v_2 - v_1}{t_2 - t_1}$$

تغییرات سرعت (m/s)
شتاب متوسط (m/s²)
مدت زمان (s)

۲ معادله سرعت - زمان در حرکت با شتاب ثابت بر روی خط راست:

$$v = a t + v_0$$

شتاب متحرک (m/s²)
سرعت اولیه متحرک (m/s)
زمان (s)
لحظه t سرعت متحرک در (m/s)

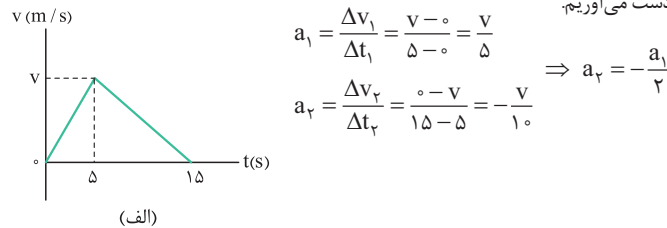


۳ مساحت محصور بین نمودار سرعت - زمان و محور t در یک بازه زمانی، بیانگر اندازه جابه‌جایی متحرک در آن بازه زمانی است. اگر نمودار سرعت - زمان بالای محور t باشد، جابه‌جایی متحرک مثبت و اگر پایین محور t باشد، جابه‌جایی منفی است.

$$\begin{cases} \Delta x_1 = S_1 & \text{جابه‌جایی در بازه زمانی صفر تا } t_1 \\ \Delta x_2 = -S_2 & \text{جابه‌جایی در بازه زمانی } t_1 \text{ تا } t_2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow t_2 \text{ جابه‌جایی در بازه زمانی صفر تا } t_2: \Delta x = \Delta x_1 + \Delta x_2 = S_1 - S_2$$

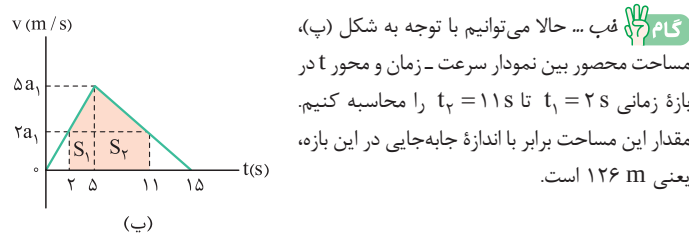
روش کام با توجه به شکل (الف)، حرکت متحرک در ۱۵ ثانیه اول از دو قسمت تشکیل شده است: (۱) از صفر تا ۵ s (۲) از ۵ s تا ۱۵ s. شتاب متحرک را در هر یک از این بازه‌های زمانی به دست می‌آوریم.



کام سؤال به ما جابه‌جایی متحرک در بازه زمانی $t_1 = 2$ s تا $t_2 = 11$ s را داده است؛ پس سرعت متحرک در این دو لحظه را با استفاده از معادله سرعت - زمان در حرکت با شتاب ثابت بر روی خط راست به دست می‌آوریم و آن را روی نمودار سرعت - زمان متحرک مشخص می‌کنیم.

$$v(t_1=2s) = a_1 t_1 + v_0 \xrightarrow{t_1=2s, v_0=0 \text{ m/s}} v(t_1=2s) = 2a_1$$

$$v(t_2=11s) = a_2 t_2 + v \xrightarrow{a_2=\frac{a_1}{2}, t_2=11-5=6s, v=5a_1} v(t_2=11s) = \left(-\frac{a_1}{2}\right)(6) + 5a_1 = 2a_1$$



$$\Delta x = S_1 + S_2 \xrightarrow{\Delta x=126 \text{ m}} 126 = \frac{(2a_1 + 5a_1)(3)}{2} + \frac{(2a_1 + 5a_1)(6)}{2}$$

$$\Rightarrow 126 = \frac{21}{2} a_1 + 21 a_1 \Rightarrow \frac{63}{2} a_1 = 126 \Rightarrow a_1 = 4 \text{ m/s}^2$$

$$a_2 = -\frac{a_1}{2} \xrightarrow{a_1=4 \text{ m/s}^2} a_2 = -\frac{4}{2} = -2 \text{ m/s}^2$$

مشاوره مقاومت 5Ω در به دست آوردن پاسخ این تست بی‌تأثیر است. مقدار این مقاومت در صورتی کاربرد دارد که بخواهیم اختلاف پتانسیل‌ها را نیز بررسی کنیم.

۵۰- گزینه ۱

درس نامه ۱ انرژی مکانیکی: به مجموع انرژی جنبشی (K) و انرژی پتانسیل (U) جسم، انرژی مکانیکی می‌گوییم.

۲ کار نیروی ثابت F:

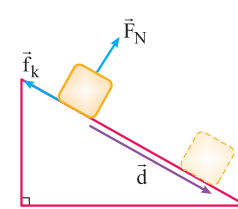
$$W = F d \cos \theta \rightarrow \text{زاویه بین نیرو و جابه‌جایی}$$

نیرو (N)
جابه‌جایی (m)

۳ کار کل: به جمع جبری کار تک‌تک نیروهای وارد بر جسم، کار کل می‌گوییم.

$$W_t = W_1 + W_2 + W_3 + \dots$$

عبارات‌ها را بررسی می‌کنیم:



(الف) سطح دو نیروی عمودی سطح (F_N) و نیروی اصطکاک (f_k) را بر جسم وارد می‌کند. با توجه به شکل مقابل، نیروی عمودی سطح بر جابه‌جایی جسم عمود است $(\theta = 90^\circ)$ پس کار نیروی عمودی سطح صفر است، اما نیروی اصطکاک بر جابه‌جایی جسم عمود نیست. پس کار نیروی اصطکاک صفر نیست و در نتیجه کار نیرویی که سطح به جسم وارد می‌کند، صفر نیست (نادرستی (الف)).

$$W_{\text{سطح}} = W_{F_N} + W_{f_k} = F_N d \cos 90^\circ + f_k d \cos 180^\circ = -f_k d$$

(ب و ت) با توجه به این‌که جسم با تندی ثابت حرکت می‌کند، پس انرژی جنبشی آن (K) ثابت است و تغییر نمی‌کند. از طرفی چون ارتفاع جسم در حال کاهش است، پس انرژی پتانسیل گرانشی آن (U) نیز در حال کاهش است. بنابراین می‌توانیم نتیجه بگیریم که انرژی مکانیکی جسم کاهش می‌یابد.

(درستی (ب) و نادرستی (ت))

(پ) نیروی وزن، نیروی عمودی سطح و نیروی اصطکاک بر جسم وارد می‌شوند. کار نیروی خالص وارد بر جسم برابر با جمع جبری کار تک‌تک این نیروهاست.

$$W_t = W_{mg} + W_{F_N} + W_{f_k} = W_{mg} + W_{f_k}$$

بنابراین کار نیروی خالص وارد بر جسم برابر با مجموع کار نیروی وزن و کار نیروی اصطکاک است (نادرستی (پ)).

مشاوره در سؤالات چندموردی (الف، ب و ...) ابتدا سراغ عبارتی بروید که بلد هستید و با توجه به آن، گزینه‌های نادرست را حذف کنید.

۵۱- گزینه ۲

درس نامه ۱ جابه‌جایی متحرک در t ثانیه اول حرکت با شتاب ثابت:

$$\Delta x = \frac{1}{2} a t^2 + v_0 t$$

شتاب (m/s²)
جابه‌جایی (m)
سرعت اولیه (m/s)

۲ جابه‌جایی متحرک در n ثانیه ام در حرکت با شتاب ثابت:

$$\Delta x = a(n - 0/5) + v_0$$

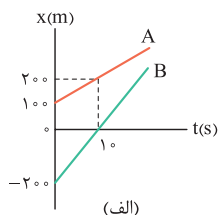
شتاب (m/s²)
جابه‌جایی (m)
سرعت اولیه (m/s)

متحرک در جهت محور X حرکت می‌کند و شتاب آن نیز در جهت محور X است، پس این متحرک تغییر جهت نمی‌دهد و در نتیجه جابه‌جایی آن با مسافت طی شده برابر است. طبق گفته سؤال، جابه‌جایی متحرک در فاصله زمانی $t_1 = 0$ s تا $t_2 = 2$ s (یعنی ۲ ثانیه اول) به اندازه ۴ m بیشتر از جابه‌جایی آن در ثانیه سوم است؛ بنابراین می‌توانیم بنویسیم:

$$\Delta x_{(2 \text{ ثانیه اول})} = \Delta x_{(3 \text{ ثانیه سوم})} + 4 \Rightarrow \frac{1}{2} a t^2 + v_0 t = a(n - 0/5) + v_0 + 4$$

حالا داده‌ها را در رابطه بالا جای‌گذاری می‌کنیم و مقدار سرعت اولیه متحرک (v_0) را به دست می‌آوریم.

$$\frac{1}{2} (4)(2)^2 + v_0 \times 2 = (4)(3 - 0/5) + v_0 + 4 \Rightarrow 8 + 2v_0 = 10 + v_0 + 4 \Rightarrow v_0 = 6 \text{ m/s}$$

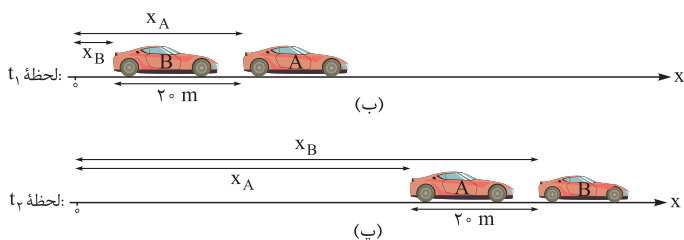


گام ۱ نمودار مکان - زمان دو متحرک A و B یک خط راست است؛ پس این دو متحرک با سرعت ثابت حرکت می‌کنند (یعنی سرعت متوسط متحرک در هر بازه زمانی با سرعت آن در هر لحظه یکسان است). با توجه به شکل (الف)، سرعت هر یک از متحرک‌ها را به دست می‌آوریم.

$$v_A = v_{av,A} = \frac{\Delta x_A}{\Delta t} = \frac{2.00 - 1.00}{1.00 - 0.00} = 1.00 \text{ m/s}$$

$$v_B = v_{av,B} = \frac{\Delta x_B}{\Delta t} = \frac{0.00 - (-2.00)}{1.00 - 0.00} = 2.00 \text{ m/s}$$

گام ۲ می‌خواهیم ببینیم چند ثانیه فاصله دو متحرک از هم، کمتر یا مساوی ۲۰ m است. برای این که به این سؤال پاسخ بدهیم، بیایید با هم نمودار مکان - زمان این دو متحرک را تحلیل کنیم. همان‌طور که در شکل (الف) می‌بینید، متحرک B در حال نزدیک شدن به متحرک A است و پس از مدتی بالاخره به متحرک A می‌رسد و از آن سبقت خواهد گرفت؛ بنابراین فاصله بین دو متحرک یک بار قبل از سبقت (شکل (ب)) و یک بار پس از سبقت (شکل (پ)) به ۲۰ m می‌رسد و در این میان فاصله آن‌ها از یکدیگر کمتر از ۲۰ m است.



گام ۳ حالا باید لحظه‌های t_1 و t_2 را به دست بیاوریم. برای این کار ابتدا معادله مکان - زمان دو متحرک A و B را می‌نویسیم. $x_A = v_A t + x_{0A}$ $\frac{v_A = 1.0 \text{ m/s}}{x_{0A} = 1.00 \text{ m}} \rightarrow x_A = 1.0 t + 1.00$

$$x_B = v_B t + x_{0B} \quad \frac{v_B = 2.0 \text{ m/s}}{x_{0B} = -2.00 \text{ m}} \rightarrow x_B = 2.0 t - 2.00$$

گام ۴ با توجه به شکل‌های (ب) و (پ) و با استفاده از معادله مکان - زمان دو متحرک A و B، لحظه‌های t_1 و t_2 را به دست می‌آوریم.

$$\text{شکل (ب): } x_A - x_B = 2.0 \text{ m} \Rightarrow (1.0 t_1 + 1.00) - (2.0 t_1 - 2.00) = 2.0$$

$$\Rightarrow 1.0 t_1 + 1.00 - 2.0 t_1 + 2.00 = 2.0 \Rightarrow 1.0 t_1 = 2.80 \Rightarrow t_1 = 2.8 \text{ s}$$

$$\text{شکل (پ): } x_B - x_A = 2.0 \text{ m} \Rightarrow (2.0 t_2 - 2.00) - (1.0 t_2 + 1.00) = 2.0$$

$$\Rightarrow 2.0 t_2 - 2.00 - 1.0 t_2 - 1.00 = 2.0 \Rightarrow 1.0 t_2 = 3.20 \Rightarrow t_2 = 3.2 \text{ s}$$

در نتیجه فاصله دو متحرک از هم به اندازه ۴ s ($t_2 - t_1 = 3.2 - 2.8 = 0.4$)، کمتر یا مساوی ۲۰ m است.

۵۴ - گزینه ۳

درس‌نامه ۱ رابطه مستقل از زمان در سقوط آزاد بدون سرعت اولیه (جهت مثبت y را رو به پایین فرض کردیم):

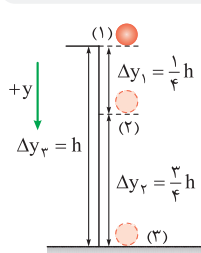
$$v^2 = 2g\Delta y$$

شتاب گرانش
(m/s)
(m/s²)

۲ در سقوط آزاد، سرعت متوسط در یک بازه زمانی مشخص برابر با میانگین سرعت‌های ابتدایی و انتهایی در آن بازه زمانی است. سرعت ثانویه (m/s) ← سرعت اولیه (m/s)

$$v_{av} = \frac{v_1 + v_2}{2}$$

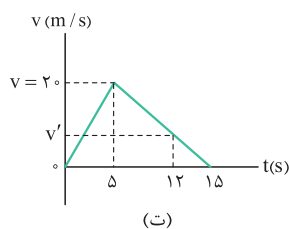
سرعت متوسط (m/s)



گام ۱ ابتدا یک شکل مناسب رسم می‌کنیم تا ببینیم هی به چه در تمام مراحل جهت مثبت y را رو به پایین فرض کردیم.

گام ۲ سؤال ما با تندی متوسط گلوله در ۳ پایانی مسیر (یعنی Δy_3) را داده است؛ بنابراین می‌توانیم بنویسیم:

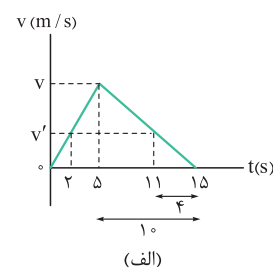
$$v_{av} = \frac{v_2 + v_3}{2} \quad \frac{v_{av} = 1.5 \text{ m/s}}{1.5 = \frac{v_2 + v_3}{2}} \Rightarrow v_2 + v_3 = 3.0 \text{ m/s} \quad (1)$$



گام ۳ دیگه آفرشه ... حالا همه چیز را داریم! سؤال از ما سرعت متحرک در لحظه $t = 1.2 \text{ s}$ را خواسته است. ما هم با توجه به شکل (ت) و با استفاده از معادله سرعت - زمان متحرک، سرعت آن در این لحظه را به دست می‌آوریم.

$$v' = v_{(t=1.2 \text{ s})} = a_t t' + v$$

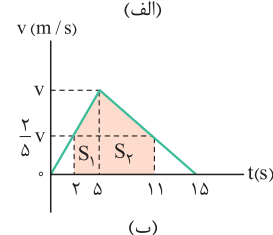
$$\frac{a_t = -2 \text{ m/s}^2, v = 2.0 \text{ m/s}}{t' = 1.2 - 0.5 = 0.7 \text{ s}} \rightarrow v_{(t=1.2 \text{ s})} = (-2)(0.7) + 2.0 = 0.6 \text{ m/s}$$



روش گام ۴ از تشابه مثلث‌ها استفاده می‌کنیم و سرعت متحرک را در لحظه‌های $t_1 = 2 \text{ s}$ و $t_2 = 11 \text{ s}$ به دست می‌آوریم (شکل (الف)).

$$\frac{v_{(t=2 \text{ s})}}{2} = \frac{v}{5} \Rightarrow v_{(t=2 \text{ s})} = v_{(t=11 \text{ s})} = v' = \frac{2}{5} v$$

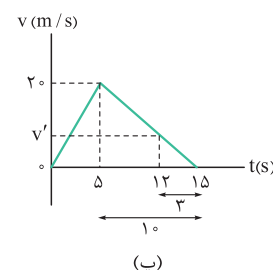
$$\frac{v_{(t=11 \text{ s})}}{4} = \frac{v}{10} \Rightarrow v_{(t=11 \text{ s})} = v_{(t=2 \text{ s})} = v' = \frac{2}{5} v$$



گام ۵ طبق گفته سؤال، جابه‌جایی متحرک در بازه زمانی $t_1 = 2 \text{ s}$ تا $t_2 = 11 \text{ s}$ برابر با ۱۲۶ m است؛ پس با توجه به شکل (ب) مساحت محصور بین نمودار سرعت - زمان متحرک و محور t را که بیانگر جابه‌جایی متحرک در این بازه زمانی است، محاسبه می‌کنیم.

$$\Delta x = S_1 + S_2 \quad \frac{\Delta x = 126 \text{ m}}{126 = \frac{(v + \frac{2}{5}v)(3)}{2} + \frac{(v + \frac{2}{5}v)(6)}{2}}$$

$$\Rightarrow 126 = \frac{1}{2} \times \frac{21}{5} v + \frac{21}{5} v \Rightarrow \frac{21 \times 21}{2 \times 5} v = 126 \Rightarrow v = 2.0 \text{ m/s}$$



گام ۶ حالا با توجه به شکل (پ)، دوباره از تشابه مثلث‌ها استفاده می‌کنیم و سرعت متحرک در لحظه $t = 1.2 \text{ s}$ را به دست می‌آوریم.

$$\frac{2.0}{1.0} = \frac{v'}{3} \Rightarrow v' = 6 \text{ m/s}$$

۵۳ - گزینه ۳

درس‌نامه ۱ سرعت متوسط: نسبت جابه‌جایی متحرک به مدت زمان جابه‌جایی را سرعت متوسط متحرک می‌گوییم و رابطه آن به صورت زیر است. مکان متحرک در لحظه t_2 (m)

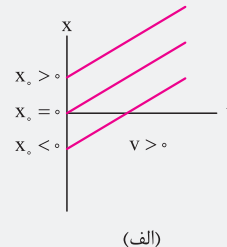
$$v_{av} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1} \rightarrow \text{مکان متحرک در لحظه } t_1 \text{ (m)}$$

۲ معادله مکان - زمان در حرکت با سرعت ثابت بر روی خط راست:

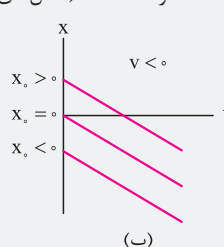
$$x = vt + x_0$$

سرعت متحرک (m/s)
مکان اولیه (m)
زمان (s)
لحظه (m)t

۳ نمودار مکان - زمان متحرکی که با سرعت ثابت بر روی خط راست حرکت می‌کند، به صورت یک خط راست است (شکل‌های الف و ب).



(الف)



(ب)



گزینه ۵۷

درس نامه ۱ بیشینه نیروی اصطکاک ایستایی:

ضرب اصطکاک ایستایی
بین جسم و سطح

$$f_{s,max} = \mu_s F_N \rightarrow (N) \text{ نیروی عمودی سطح}$$

بیشینه نیروی اصطکاک
(N) ایستایی

در رابطه بالا اگر $f_{s,max} \leq F_{\text{محری}}$ باشد، جسم ساکن می ماند و نیروی اصطکاک برابر با $F_{\text{محری}}$ است.

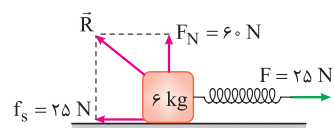
۲ اندازه نیرویی که سطح بر جسم وارد می کند، برابر با برآیند دو نیروی عمودی سطح (F_N) و نیروی اصطکاک (f) است.

$$R = \sqrt{F_N^2 + f^2}$$

در رابطه بالا، f می تواند f_s یا $f_{s,max}$ باشد.

گام ابتدا بیشینه نیروی اصطکاک ایستایی را محاسبه می کنیم و با $F = 25 \text{ N}$ مقایسه می کنیم تا ببینیم جسم حرکت می کند یا نه!

$$f_{s,max} = \mu_s F_N \xrightarrow{\mu_s = 0.75, F_N = mg = 60 \text{ N}} f_{s,max} = 0.75 \times 60 = 45 \text{ N}$$

چون $F < f_{s,max}$ است، پس جسم ساکن می ماند و $f_s = F = 25 \text{ N}$ است.

گام حالا با توجه به شکل مقابل، نیرویی را که سطح به جسم (R) وارد می کند، به دست می آوریم.

$$R = \sqrt{F_N^2 + f_s^2} = \sqrt{60^2 + 25^2}$$

$$= \sqrt{(5 \times 12)^2 + (5 \times 5)^2} = \sqrt{5^2 (12^2 + 5^2)} = 5 \sqrt{144 + 25} = 5 \times 13 = 65 \text{ N}$$

نکته در مثلث قائم الزاویه، اگر یکی از ضلعها مضربی از 5 ($5k$) و ضلع دیگر مضربی از 12 ($12k$) باشد، آن گاه وتر این مثلث مضربی از 13 ($13k$) است.

با توجه به این نکته، مقدار R را سریع تر می توانیم به دست بیاوریم.

$$5k = 25 \Rightarrow k = 5, R = 13k \xrightarrow{k=5} R = 13 \times 5 = 65 \text{ N}$$

طبق قانون سوم نیوتون، نیرویی که جسم به سطح وارد می کند، هم اندازه، هم راستا و در خلاف جهت نیرویی است که سطح به جسم وارد می کند؛ بنابراین نیرویی که جسم به سطح افقی وارد می کند برابر با $R' = R = 65 \text{ N}$ است.

گزینه ۵۸

درس نامه ۱ اگر در حرکت دایره ای یکنواخت، متحرک در مدت زمان n, t دور کامل بزند، دوره آن از رابطه زیر به دست می آید.

$$T = \frac{t \rightarrow (s)}{n \rightarrow \text{تعداد دور}} \rightarrow \text{دوره (s)}$$

۲ تندی متحرکی که بر روی دایره ای به شعاع r ، حرکت دایره ای یکنواخت انجام می دهد، از رابطه زیر به دست می آید.

$$v = \frac{2\pi r \rightarrow (m)}{T \rightarrow (s)} \rightarrow \text{تندی (m/s)}$$

۳ انرژی جنبشی جسمی با جرم m که با تندی v در حال حرکت است، از رابطه زیر به دست می آید.

$$K = \frac{1}{2} m v^2 \rightarrow \text{تندی (m/s)}$$

گام متحرک در هر دقیقه، 30 دور می زند؛ بنابراین دوره آن برابر است با:

$$T = \frac{t}{n} \xrightarrow{t=60 \text{ s}, n=30} T = \frac{60}{30} = 2 \text{ s}$$

گام حالا با جای گذاری داده ها در رابطه زیر، تندی متحرک را محاسبه می کنیم.

$$v = \frac{2\pi r}{T} \xrightarrow{r=2 \text{ m}, T=2 \text{ s}} v = \frac{2\pi \times 2}{2} = 2\pi \text{ m/s}$$

گام در آخر انرژی جنبشی جسم را به دست می آوریم.

$$K = \frac{1}{2} m v^2 \xrightarrow{m=5 \text{ kg}, v=2\pi \text{ m/s}} K = \frac{1}{2} \times 5 \times (2\pi)^2 = 10\pi^2 \text{ J}$$

گام نه v_p را داریم و نه v_r ! از رابطه مستقل از زمان کمک می گیریم تا v_p و v_r را نسبت به هم به دست بیاوریم.

$$v_p^2 = 2g\Delta y_1 \xrightarrow{\Delta y_1 = \frac{1}{2}h} v_p^2 = 2g \frac{h}{2}$$

$$v_p^2 = 2g\Delta y_r \xrightarrow{\Delta y_r = h} v_p^2 = 2gh$$

$$\Rightarrow \left(\frac{v_p}{v_r}\right)^2 = \frac{2g \frac{h}{2}}{2gh} \Rightarrow \frac{v_p}{v_r} = \sqrt{\frac{1}{2}} \Rightarrow v_p = \frac{v_r}{\sqrt{2}} \quad (2)$$

گام حالا رابطه (۲) را در رابطه (۱) جای گذاری می کنیم و مقدار v_p را به دست می آوریم.

$$v_p + v_r = 30 \xrightarrow{v_p = \frac{v_r}{\sqrt{2}}} \frac{v_r}{\sqrt{2}} + v_r = 30 \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} v_r = \frac{30}{\sqrt{2}}$$

$$\Rightarrow v_p = 20 \text{ m/s}$$

گام در آخر تندی متوسط گلوله در کل مسیر را محاسبه می کنیم.

$$v_{av} = \frac{v_1 + v_2}{2} \xrightarrow{v_1=0 \text{ m/s}, v_2=20 \text{ m/s}} v_{av} = \frac{0+20}{2} = 10 \text{ m/s}$$

مشاوره در مسائل سقوط آزاد، شکل مناسبی رسم کنید و با استفاده از شکل، حرکت جسم را تحلیل کنید. رسم شکل به شما کمک می کند تا مسئله را بهتر درک کنید.

گزینه ۲

درس نامه ۱ حاصل ضرب جرم جسم در سرعت آن را تکانه جسم می گوئیم و رابطه آن به صورت زیر است.

$$\vec{p} = m \vec{v} \rightarrow \text{سرعت (m/s)} \rightarrow \text{تکانه (kg.m/s)}$$

۲ نیروی خالص وارد بر جسم برابر با تغییر تکانه جسم تقسیم بر زمان تغییر آن است و از رابطه زیر به دست می آید.

$$\vec{F}_{net} = \frac{\Delta \vec{p}}{\Delta t} \rightarrow \text{تغییر تکانه (kg.m/s)} \rightarrow \text{مدت زمان تغییر تکانه (s)} \rightarrow \text{نیروی خالص (N)}$$

گام ابتدا با جای گذاری داده ها در رابطه زیر، تکانه جسم را محاسبه می کنیم.

$$\vec{p}_1 = m \vec{v}_1 \xrightarrow{m=20 \text{ kg}, \vec{v}_1=5 \vec{i}} \vec{p}_1 = 20 \times 5 \vec{i} = 100 \vec{i} \Rightarrow p_1 = 100 \frac{\text{kg.m}}{\text{s}}$$

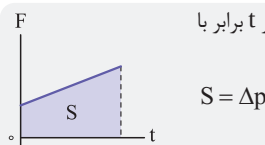
گام حالا می خواهیم ببینیم چند ثانیه باید نیروی خالص $\vec{F}_{net} = 4 \vec{i}$ بر جسم اثر کند تا تکانه آن دو برابر شود. برای محاسبه این مدت زمان می توانیم بنویسیم:

$$\vec{F}_{net} = \frac{\Delta \vec{p}}{\Delta t} \xrightarrow{\vec{p}_2 = 2 \vec{p}_1} \frac{p_2 - p_1}{\Delta t} \xrightarrow{p_2 = 2p_1} F_{net} = \frac{2p_1 - p_1}{\Delta t} = \frac{p_1}{\Delta t}$$

$$\xrightarrow{F_{net}=4 \text{ N}, p_1=100 \frac{\text{kg.m}}{\text{s}}} 4 = \frac{100}{\Delta t} \Rightarrow \Delta t = \frac{100}{4} = 25 \text{ s}$$

گزینه ۳

درس نامه مساحت بین نمودار نیرو - زمان و محور t برابر با اندازه تغییرات تکانه است.



گام ابتدا با استفاده از مساحت بین نمودار نیرو - زمان و محور t ، تغییرات تکانه جسم را از لحظه $t_1 = 0 \text{ s}$ تا $t_2 = 50 \text{ s}$ به دست می آوریم.

$$\Delta p = S = \frac{(50 + 20) \left(\frac{1}{2}\right)}{1} = 35 \frac{\text{kg.m}}{\text{s}}$$

گام حالا با استفاده از رابطه $F_{net} = \frac{\Delta p}{\Delta t}$ ، نیروی خالص متوسط وارد بر جسم در این 50 s را محاسبه می کنیم.

$$F_{net} = \frac{\Delta p}{\Delta t} \xrightarrow{\Delta p=35 \frac{\text{kg.m}}{\text{s}}, \Delta t=50 \text{ s}} F_{net} = \frac{35}{50} = 0.7 \text{ N}$$



گام ۱: $T = \frac{t}{n} \xrightarrow{t=1s, n=1} T = \frac{1}{1} = 1s$ دوره تناوب آونگ ساده را به دست می آوریم.

گام ۲: حالا با جای گذاری داده ها در رابطه زیر، طول آونگ را محاسبه می کنیم.

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}} \xrightarrow{g=\pi^2 \text{ m/s}^2, T=1s} 1 = 2\pi\sqrt{\frac{L}{\pi^2}} = 2\sqrt{L} \Rightarrow L = \frac{1}{4} \text{ m} = 25 \text{ cm}$$

گزینه ۳ - ۶۲

درس نامه ۱: وقتی یک پرتوی نور از یک محیط رقیق وارد یک محیط غلیظتر (با ضریب شکست بیشتر) می شود، می شکند و به خط عمود بر مرز دو محیط نزدیک تر شده و زاویه کمتری با آن می سازد. هر چه قدر طول موج نور کوتاه تر باشد، ضریب شکست محیط شفاف برای آن بیشتر و در نتیجه زاویه انحراف پرتوی نور بیشتر می شود.

با توجه به درس نامه هر دو پرتوی قرمز و آبی باید به خط عمود بر مرز دو محیط نزدیک تر شوند (۱ و ۴) (پرا). از طرفی چون طول موج نور آبی از طول موج نور قرمز کوتاه تر است، پس باید زاویه انحراف بیشتری داشته باشد (۲) (پرا). بنابراین شکل (۳) شکستی را نشان می دهد که از نظر فیزیکی ممکن است.

گزینه ۴ - ۶۳

درس نامه ۱: انرژی یک فوتون: بسامد فوتون (Hz) $E = hf = \frac{hc}{\lambda} \rightarrow (m/s) \text{ در خلا} \rightarrow (m) \text{ طول موج فوتون}$ ثابت پلانک $\lambda = \frac{c}{f}$ رابطه بین طول موج، تندی انتشار موج و بسامد فوتون:

گام ۱: با توجه به این که انرژی فوتون B، ۲۵ درصد از انرژی فوتون A کم تر است، می توانیم بنویسیم:

$$E_B = E_A - \frac{25}{100} E_A = \frac{75}{100} E_A \xrightarrow{E = \frac{hc}{\lambda}} \frac{hc}{\lambda_B} = \frac{75}{100} \frac{hc}{\lambda_A} \Rightarrow \lambda_B = \frac{4}{3} \lambda_A \quad (1)$$

گام ۲: با استفاده از رابطه (۱) و با توجه به این که اختلاف طول موج فوتون های A و B برابر با ۵۰ nm است، می توانیم طول موج فوتون ها را به دست بیاوریم.

$$\lambda_B - \lambda_A = 50 \times 10^{-9} \text{ m} \xrightarrow{\lambda_B = \frac{4}{3} \lambda_A} \frac{4}{3} \lambda_A - \lambda_A = 50 \times 10^{-9} \Rightarrow \frac{\lambda_A}{3} = 50 \times 10^{-9} \Rightarrow \lambda_A = 150 \times 10^{-9} \text{ m}$$

$$\lambda_B = \frac{4}{3} \lambda_A \xrightarrow{\lambda_A = 150 \times 10^{-9} \text{ m}} \lambda_B = \frac{4}{3} \times 150 \times 10^{-9} = 200 \times 10^{-9} \text{ m}$$

گام ۳: حالا می توانیم اختلاف بسامد این دو فوتون را محاسبه کنیم.

$$f_A - f_B = \frac{c}{\lambda_A} - \frac{c}{\lambda_B} \xrightarrow{c=3 \times 10^8 \text{ m/s}, \lambda_A=150 \times 10^{-9} \text{ m}, \lambda_B=200 \times 10^{-9} \text{ m}} f_A - f_B = \frac{3 \times 10^8}{150 \times 10^{-9}} - \frac{3 \times 10^8}{200 \times 10^{-9}} = 2 \times 10^{15} - 1.5 \times 10^{15} = 0.5 \times 10^{15} \text{ Hz}$$

گزینه ۳ - ۶۴

درس نامه ۱: در اثر فوتوالکتریک، انرژی جنبشی سریع ترین فوتوالکترئون های گسیل شده از سطح فلز، از رابطه زیر به دست می آید.

تندی انتشار امواج الکترومغناطیسی در خلا (m/s) $K_{\max} = hf - W_0 \rightarrow$ تابع کار فلز $\downarrow$ انرژی جنبشی سریع ترین فوتوالکترئون ها $\downarrow$ طول موج فوتون (m) $\downarrow$ ثابت پلانک

گزینه ۴ - ۵۹

استراتژی ابتدا شدت صوت را به کمک رابطه تراز شدت صوت به دست بیاورید، سپس با داشتن شدت صوت، توان چشمه صوت را محاسبه کنید.

درس نامه ۱: شدت صوت: شدت یک موج صوتی در یک سطح، برابر با آهنگ متوسط انرژی ای است که توسط موج به واحد سطح، عمود بر راستای انتشار صوت می رسد یا از آن عبور می کند. توان متوسط صوت (W) $I = \frac{P_{av}}{A} \rightarrow$ شدت صوت مساحت سطحی که صوت به آن برخورد می کند (m²).

۲ تراز شدت صوت: شدت صوت (W/m²) $\beta = 10 \log \left(\frac{I}{I_0} \right)$ شدت صوت مرجع (W/m²)

گام ۱: شدت صوت را با استفاده از تراز شدت صوت به دست می آوریم.

$$\beta = 10 \log \left(\frac{I}{I_0} \right) \Rightarrow 60 = 10 \log \left(\frac{I}{10^{-12}} \right) \Rightarrow \frac{I}{10^{-12}} = 10^6 \Rightarrow I = 10^{-6} \text{ W/m}^2$$

گام ۲: حالا می توانیم توان چشمه صوت را محاسبه کنیم.

$$I = \frac{P_{av}}{A} \xrightarrow{A=4\pi r^2, r=50 \text{ m}, \pi=3} 10^{-6} = \frac{P_{av}}{4 \times 3 \times (50)^2} \Rightarrow P_{av} = 10^{-6} \times 4 \times 3 \times 2500 = 0.3 \text{ W} = 30 \text{ mW}$$

گزینه ۱ - ۶۰

درس نامه ۱: دوره تناوب تناوب سامانه جرم - فنر: دوره تناوب (s) $T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}} \rightarrow$ جرم (kg) $\downarrow$ ثابت فنر (N/m)

گام ۱: دوره تناوب نوسانگر را با استفاده از رابطه زیر محاسبه می کنیم.

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}} \xrightarrow{m=200 \text{ g}=0.2 \text{ kg}, k=50 \text{ N/m}} T = 2\sqrt{10} \times \sqrt{\frac{0.2}{50}} = 2\sqrt{10} \times \frac{1}{\sqrt{250}} = 0.4 \text{ s}$$

گام ۲: مدت زمان $t = 0.5 \text{ s}$ را بر حسب دوره تناوب نوسانگر $(T = 0.4 \text{ s})$ به دست می آوریم.

$$\frac{t}{T} = \frac{0.5}{0.4} = \frac{5}{4} \Rightarrow t = \frac{5}{4} T = T + \frac{T}{4}$$

نکته در سامانه جرم - فنر، فاصله رها شدن جسم تا نقطه تعادل فنر، همان دامنه نوسان (A) است.

با توجه به نکته بالا، دامنه نوسان برابر با $A = 3 \text{ cm}$ است.

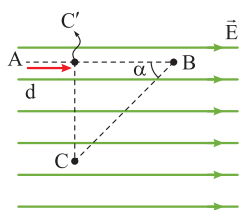
گام ۳: ابتدا نکته زیر را بخوانید: نکته حداقل مدت زمانی که طول می کشد تا نوسانگر از انتهای پاره خط نوسان به وسط پاره خط نوسان برود (و برعکس)، برابر با $\frac{T}{4}$ است.

با توجه به نکته بالا، مسیر حرکت نوسانگر در نیم ثانیه اول را رسم می کنیم و مسافت و جابه جایی آن را پیدا می کنیم. $L = 5A = 5 \times 3 = 15 \text{ cm}$ $|\Delta x| = A = 3 \text{ cm}$

گام ۴: در آخر، خواسته سؤال یعنی نسبت مسافت طی شده به بزرگی جابه جایی در نیم ثانیه اول را به دست می آوریم. $\frac{L}{|\Delta x|} = \frac{15}{3} = 5$

گزینه ۴ - ۶۱

درس نامه ۱: دوره تناوب آونگ ساده: طول آونگ (m) $T = 2\pi \sqrt{\frac{L}{g}} \rightarrow$ شتاب گرانش (m/s²) $\downarrow$ دوره تناوب (s)



گام ۱ ابتدا با توجه به شکل مقابل، از نقطه C بر خط AB عمود می‌کنیم و فاصله بین دو نقطه A و C در راستای میدان الکتریکی (AC') را محاسبه می‌کنیم.

$$d = AB - BC'$$

$$\frac{AB = \Delta \cdot \cos \alpha}{BC' = BC \cos \alpha} \rightarrow d = \Delta \cdot \cos \alpha$$

$$\cos \alpha = \sqrt{1 - \sin^2 \alpha} = \sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2} = \sqrt{1 - \left(\frac{0.9}{1}\right)^2} = \sqrt{0.19} \rightarrow d = \Delta \cdot \cos \alpha = 0.433 \cdot 0.5 = 0.2165 \text{ m}$$

گام ۲ حالا داده‌ها را در رابطه زیر جای‌گذاری می‌کنیم و اندازه اختلاف پتانسیل الکتریکی بین این دو نقطه را به دست می‌آوریم.

$$|\Delta V| = Ed \rightarrow \frac{E = 1.5 \times 10^6 \text{ N/C}}{d = 0.2165 \text{ m}} \rightarrow |\Delta V| = 1.5 \times 10^6 \times 0.2165 = 3.2475 \times 10^5 \text{ V}$$

نکته اگر در جهت میدان الکتریکی حرکت کنیم، پتانسیل الکتریکی کاهش و اگر در خلاف جهت میدان الکتریکی حرکت کنیم، پتانسیل الکتریکی افزایش می‌یابد.

با توجه به نکته بالا، $V_C < V_A$ و در نتیجه $V_C - V_A < 0$ است و مقدار آن برابر است با:

$$|\Delta V| = 3.2475 \times 10^5 \text{ V} \rightarrow V_C - V_A = -3.2475 \times 10^5 \text{ V}$$

گام ۳ در آخر تغییر انرژی پتانسیل الکتریکی ذره q در این مسیر را محاسبه می‌کنیم (علامت‌ها یادتون نره!).

$$\Delta V = \frac{\Delta U}{q} \rightarrow \frac{\Delta V = -3.2475 \times 10^5 \text{ V}}{q = -5 \times 10^{-6} \text{ C}} \rightarrow -3.2475 \times 10^5 = \frac{\Delta U}{-5 \times 10^{-6}} \Rightarrow \Delta U = 1.62375 \times 10^{-1} \text{ J}$$

بنابراین انرژی پتانسیل الکتریکی ذره q در این مسیر به اندازه 0.162 J افزایش می‌یابد.

۶۷ - گزینه ۴

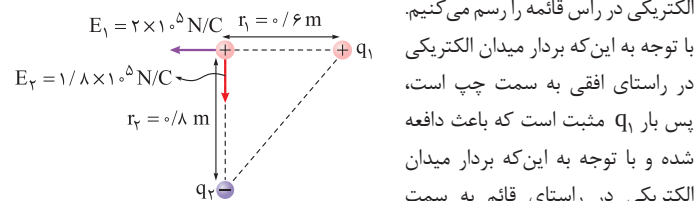
شفاف‌سازی $\vec{E}$ دارای دو مؤلفه افقی $\vec{E}_x = -2 \times 10^5 \text{ V/m}$ و قائم $\vec{E}_y = -1/8 \times 10^5 \text{ V/m}$ است. E_x میدان الکتریکی حاصل از بار q_1 در رأس قائمه و E_y میدان الکتریکی حاصل از بار q_2 در رأس قائمه است.

درس‌نامه ۱ میدان الکتریکی حاصل از بار q در فاصله r از آن:

$$\text{ثابت کولن } \left(\frac{\text{N} \cdot \text{m}^2}{\text{C}^2}\right) \rightarrow E = k \frac{|q|}{r^2} \rightarrow \text{اندازه بار الکتریکی (C)} \rightarrow \text{فاصله از بار (m)} \rightarrow E = k \frac{|q|}{r^2} \rightarrow \text{اندازه میدان الکتریکی (N/C)}$$

۲ میدان الکتریکی در هر نقطه، هم‌جهت با نیروی الکتریکی وارد بر بار مثبت آزمون در آن نقطه است.

گام ۱ برای تشخیص جهت میدان الکتریکی، از بار مثبت آزمون استفاده می‌کنیم و بردار میدان الکتریکی در رأس قائمه را رسم می‌کنیم.



پایین است، پس بار q_2 منفی است که باعث جذب بار آزمون مثبت شده است. (۱) و (۲) را به

گام ۲ به کمک رابطه $E = \frac{k|q|}{r^2}$ در راستاهای افقی و قائم، مقدارهای q_1 و q_2 را به دست می‌آوریم.

$$E_x = \frac{k|q_1|}{r_1^2} \Rightarrow 2 \times 10^5 = \frac{9 \times 10^9 \times |q_1|}{(0.6)^2} \Rightarrow |q_1| = \frac{2 \times 10^5 \times 0.36 \times 10^{-2}}{9 \times 10^9} = 8 \times 10^{-6} \text{ C} \rightarrow q_1 > 0 \rightarrow q_1 = +8 \mu\text{C}$$

$$E_y = \frac{k|q_2|}{r_2^2} \Rightarrow 1/8 \times 10^5 = \frac{9 \times 10^9 \times |q_2|}{(0.8)^2} \Rightarrow |q_2| = \frac{1/8 \times 10^5 \times 0.64 \times 10^{-2}}{9 \times 10^9} = 12/8 \times 10^{-6} \text{ C} \rightarrow q_2 < 0 \rightarrow q_2 = -12/8 \mu\text{C}$$

گام ۱ ابتدا بیشینه انرژی جنبشی فوتوالکترون‌های گسیل‌شده را به دست می‌آوریم.

$$K_{\max} = \frac{1}{2} m v_{\max}^2 \rightarrow \frac{m_e = 9.1 \times 10^{-31} \text{ kg}}{v_{\max} = 5 \times 10^6 \text{ m/s}} \rightarrow K_{\max} = \frac{1}{2} \times 9.1 \times 10^{-31} \times 25 \times 10^{12} = \frac{22.75}{2} \times 10^{-19} \text{ J}$$

گام ۲ حالا با جای‌گذاری داده‌ها در رابطه زیر، طول موج نور تابیده‌شده به فلز را محاسبه می‌کنیم.

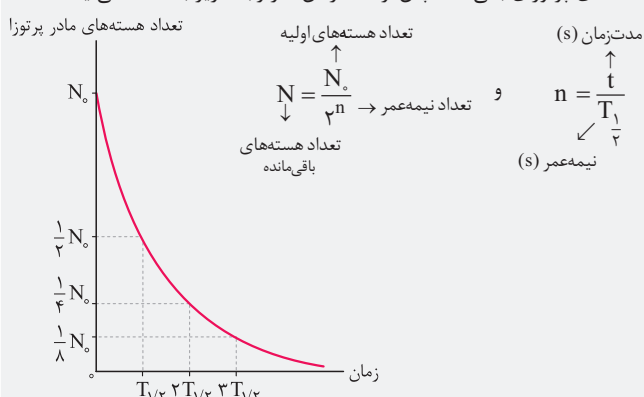
نکته برای تبدیل یکای eV به J و برعکس به صورت زیر عمل می‌کنیم.

$$1 \text{ eV} = 1.6 \times 10^{-19} \text{ J} \rightarrow 1 \text{ J} = \frac{1}{1.6 \times 10^{-19}} \text{ eV}$$

$$K_{\max} = \frac{hc}{\lambda} - W_0 \Rightarrow \frac{22.75 \times 10^{-19}}{\lambda} - \frac{1240}{\lambda} = -4/46 \Rightarrow \frac{22.75 \times 10^{-19}}{\lambda} = \frac{1240}{\lambda} - 4/46 \Rightarrow \frac{22.75 \times 10^{-19}}{\lambda} = \frac{1240}{\lambda} - 0.087 \Rightarrow \frac{22.75 \times 10^{-19}}{\lambda} = \frac{1240}{\lambda} \Rightarrow \lambda = \frac{1240}{5/16} = 240 \text{ nm}$$

۶۵ - گزینه ۳

درس‌نامه نیمه‌عمر: اگر تعداد هسته‌های مادر اولیه در یک نمونه پرتوزا N_0 باشد، تعداد هسته‌های پرتوزای باقی‌مانده پس از مدت زمان t از رابطه زیر به دست می‌آید.



گام ۱ با توجه به نمودار، تعداد هسته‌های ماده پرتوزا پس از ۲۴ روز به $N_0/16$ می‌رسد؛

بنابراین می‌توانیم بنویسیم:

$$N = \frac{N_0}{2^n} \rightarrow \frac{N_0}{16} = \frac{N_0}{2^n} \Rightarrow 2^n = 16 = 2^4 \Rightarrow n = 4$$

گام ۲ حالا کافیت داده‌ها را در رابطه $n = \frac{t}{T_{1/2}}$ جای‌گذاری کنیم و نیمه‌عمر ماده را به دست بیاوریم.

$$n = \frac{t}{T_{1/2}} \rightarrow \frac{4}{T_{1/2}} = \frac{24}{\text{روز}} \Rightarrow T_{1/2} = 6 \text{ روز}$$

۶۶ - گزینه ۱

درس‌نامه ۱ اندازه اختلاف پتانسیل الکتریکی بین دو نقطه از میدان الکتریکی یکنواخت:

$$\text{میدان الکتریکی (V/m)} \rightarrow \text{فاصله بین دو نقطه در راستای میدان الکتریکی (m)} \rightarrow |\Delta V| = Ed \rightarrow \text{اندازه اختلاف پتانسیل الکتریکی (V)}$$

۲ اختلاف پتانسیل الکتریکی بین دو نقطه از میدان الکتریکی:

$$\text{تغییر انرژی پتانسیل الکتریکی (J)} \rightarrow \Delta V = \frac{\Delta U}{q} \rightarrow \text{اختلاف پتانسیل الکتریکی (V)} \rightarrow \text{بار الکتریکی (C)}$$

مواستون باشه! تو این رابطه باید بار q رو با علامتش بذارین.

گزینه ۴ - ۷۰

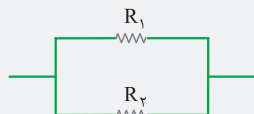
شفاف سازی وقتی کلید را وصل می‌کنیم، مقاومت الکتریکی وارد مدار می‌شود و مقاومت معادل مدار تغییر می‌کند.

درس نامه ۱ مقاومت معادل دو مقاومت سری:



$$R_{eq} = R_1 + R_2$$

۲ مقاومت معادل دو مقاومت موازی:



$$R_{eq} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$$

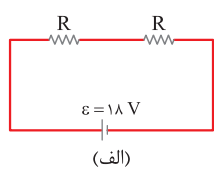
۳ مقاومت معادل n مقاومت مشابه موازی:

$$R_{eq} = \frac{R}{n}$$

۴ توان مصرفی مدار:

$$P_{\text{مصرفی مدار}} = R_{eq} \left(\frac{\mathcal{E}}{R_{eq} + r} \right)^2$$

گام ۱ وقتی کلید باز است، مدار شامل دو مقاومت سری است (شکل الف)).

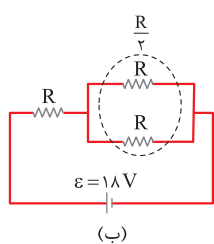


مقاومت معادل و توان مصرفی مدار را به دست می‌آوریم.
(هر یک از مقاومت‌ها را R در نظر گرفتیم.)

$$R_{eq} = R + R = 2R$$

$$P_{\text{مصرفی مدار}} = R_{eq} \left(\frac{\mathcal{E}}{R_{eq} + r} \right)^2 \xrightarrow{r=0} P_1 = 2R \left(\frac{\mathcal{E}}{2R} \right)^2 = \frac{\mathcal{E}^2}{2R}$$

گام ۲ وقتی کلید را وصل می‌کنیم، دو مقاومت با هم موازی می‌شوند و معادل آن‌ها (یعنی $\frac{R}{2}$) با مقاومت دیگر سری است (شکل ب)). در این حالت، مقاومت معادل و توان مصرفی مدار را محاسبه می‌کنیم.



$$R'_{eq} = R + \frac{R}{2} = \frac{3}{2}R$$

$$P_{\text{مصرفی مدار}} = R'_{eq} \left(\frac{\mathcal{E}}{R'_{eq} + r} \right)^2 \xrightarrow{r=0} P_2 = \frac{3}{2}R \left(\frac{\mathcal{E}}{\frac{3}{2}R} \right)^2 = \frac{2}{3} \frac{\mathcal{E}^2}{R}$$

گام ۳ اختلاف توان مصرفی مدارها، ۹ W است؛ بنابراین می‌توانیم بنویسیم:

$$P_2 - P_1 = 9 \text{ W} \Rightarrow \frac{2}{3} \frac{\mathcal{E}^2}{R} - \frac{1}{2} \frac{\mathcal{E}^2}{R} = 9$$

$$\Rightarrow \frac{1}{6} \frac{\mathcal{E}^2}{R} = 9 \xrightarrow{\mathcal{E}=18 \text{ V}} \frac{1}{6} \times \frac{(18)^2}{R} = 9 \Rightarrow R = \frac{18 \times 18}{6 \times 9} = 6 \Omega$$

گزینه ۲ - ۷۱

استراتژی وقتی پتانسیل یک نقطه را از شما می‌پرسند، باید از قانون اختلاف پتانسیل‌ها استفاده کنید.

درس نامه قانون اختلاف پتانسیل‌ها:

در هر حلقه بسته، مجموع جبری اختلاف پتانسیل‌ها صفر است.

$$\sum V = 0 \Rightarrow \sum \mathcal{E} - \sum RI = 0$$

در به کار بردن این قانون به نکات زیر توجه کنید:

- یک جهت چرخش اختیاری در نظر می‌گیریم.
- جهت جریان را در هر حلقه به دلخواه انتخاب می‌کنیم.
- برای نوشتن $\mathcal{E}$ ‌ها، با توجه به چرخش در مدار، اگر از پایانه مثبت باتری خارج شویم (+) و اگر از پایانه منفی باتری خارج شویم (-)، نیروی محرکه باتری را مثبت (+ $\mathcal{E}$) و اگر از پایانه منفی باتری خارج شویم (- $\mathcal{E}$)، نیروی محرکه باتری را منفی (- $\mathcal{E}$) در نظر می‌گیریم.

گزینه ۲ - ۶۸

درس نامه ۱ ظرفیت خازن تخت به ساختمان آن بستگی دارد و از رابطه زیر به دست می‌آید.

$$C = \kappa \epsilon_0 \frac{A}{d} \rightarrow (m) \quad \text{مساحت هر یک از صفحه‌ها } A \rightarrow (m^2) \quad \text{ثابت دی‌الکتریک}$$

$$C = \kappa \epsilon_0 \frac{A}{d} \rightarrow (m) \quad \text{فاصله صفحات از هم}$$

$$(F/m) \quad \text{ضریب‌گذردهی الکتریکی خلا}$$

۲ انرژی ذخیره شده در خازن:

$$U = \frac{1}{2} C V^2 \rightarrow (V) \quad \text{اختلاف پتانسیل الکتریکی}$$

$$U = \frac{1}{2} C V^2 \rightarrow (J) \quad \text{انرژی ذخیره شده در خازن}$$

گام ۱ با جای گذاری داده‌ها در رابطه زیر، ظرفیت خازن در حالت دوم (موقعی که اومریم بین صفحات خازن عایق گذاشتیم) را به دست می‌آوریم.

$$U = \frac{1}{2} C V^2 \Rightarrow 2 \times 10^{-3} = \frac{1}{2} \times C_p \times (20)^2 \Rightarrow C_p = \frac{2 \times 10^{-3}}{200} = 10^{-5} F = 10 \mu F$$

گام ۲ در حالت دوم، تنها جنس عایق (یعنی κ) تغییر کرده است؛ پس با استفاده از رابطه $C = \kappa \epsilon_0 \frac{A}{d}$ می‌توانیم بنویسیم:

$$\frac{C_2}{C_1} = \frac{\kappa_2}{\kappa_1} \xrightarrow{\kappa_1 = \kappa_2 = 1} \frac{10}{5} = \frac{\kappa_2}{1} \Rightarrow \kappa_2 = 2$$

گزینه ۳ - ۶۹

شفاف سازی دو باتری مخالف یکدیگر بسته شده‌اند. چون $\mathcal{E}_2 > \mathcal{E}_1$ است، پس جهت جریان مدار پادساعتگرد است.

درس نامه ۱ مدار زیر شامل دو باتری است که در جهت مخالف یکدیگر بسته شده‌اند. در این مدار چون $\mathcal{E}_2 > \mathcal{E}_1$ است، پس جهت جریان کل مدار به صورت پادساعتگرد است و مقدار آن از رابطه زیر به دست می‌آید.

$$I = \frac{\mathcal{E}_2 - \mathcal{E}_1}{R_{eq} + r_1 + r_2}$$

↓
مقاومت معادل مدار (Ω)

هم‌چنین در این مدار باتری $\mathcal{E}_1$ مصرف‌کننده انرژی است و اختلاف پتانسیل آن از رابطه زیر به دست می‌آید.

$$V_1 = \mathcal{E}_1 + r_1 I$$

۲ تعریف مقاومت الکتریکی: نسبت اختلاف پتانسیل دو سر یک رسانا به جریان الکتریکی عبوری از آن.

$$R = \frac{V}{I}$$

↓
جریان الکتریکی (A) ↓
مقاومت الکتریکی (Ω)

گام ۱ در این مدار، باتری‌ها مخالف یکدیگر بسته شده‌اند و چون $\mathcal{E}_2 > \mathcal{E}_1$ است، پس جهت جریان الکتریکی در مدار پادساعتگرد است.

گام ۲ ولت‌سنج آرمانی اختلاف پتانسیل دو سر باتری $\mathcal{E}_1$ را نشان می‌دهد. با توجه به این که در این مدار، $\mathcal{E}_1$ مصرف‌کننده انرژی است، می‌توانیم بنویسیم:

$$V_1 = \mathcal{E}_1 + r_1 I \xrightarrow{\mathcal{E}_1=10 \text{ V}, r_1=2 \Omega, V_1=14 \text{ V}} 14 = 10 + 2I \Rightarrow 2I = 4 \Rightarrow I = 2 \text{ A}$$

گام ۳ حالا داده‌ها را در رابطه زیر جای گذاری می‌کنیم و مقدار R را به دست می‌آوریم.

$$I = \frac{\mathcal{E}_2 - \mathcal{E}_1}{R + r_1 + r_2} \Rightarrow 2 = \frac{18 - 10}{R + 2 + 1} \Rightarrow \frac{1}{R + 3} = \frac{1}{4} \Rightarrow R = 1 \Omega$$

گام ۴ در آخر با استفاده از رابطه $V = RI$ ، اختلاف پتانسیل دو سر مقاومت R را محاسبه می‌کنیم.

$$V = RI \xrightarrow{R=1 \Omega, I=2 \text{ A}} V = 1 \times 2 = 2 \text{ V}$$

۷۴- گزینه ۲

❖ **شفاف سازی** فشار پیمانه‌ای درون مخزن (P_g) در واقع اختلاف فشار گاز درون مخزن (P) با فشار جو (P_o) است.

❖ **درس نامه ۱** تعداد مول‌های گاز: جرم گاز ($m \rightarrow (g)$)
جرم مولی ($M \rightarrow (g/mol)$)
 $n = \frac{m}{M}$ ← تعداد مول

وقتی دو گاز با هم مخلوط می‌شوند، تعداد مول‌های آن‌ها با هم جمع می‌شود.

❖ **قانون گازهای کامل:**

$$\begin{aligned} \text{ثابت جهانی گازها } \left(\frac{J}{mol \cdot K} \right) &\rightarrow \text{حجم گاز } (m^3) \\ P V &= n R T \rightarrow \text{دما } (K) \\ \text{تعداد مول} &\rightarrow \text{فشار گاز } (Pa) \end{aligned}$$

❖ **گام ۱** جرم گاز هلیوم با جرم گاز نیتروژن برابر است؛ بنابراین تعداد مول گاز هلیوم را به صورت مقابل به دست می‌آوریم.

$$\begin{aligned} n &= \frac{m}{M} \rightarrow \frac{m_{N_2} = m_{He}}{M_{He}} \rightarrow \frac{n_{N_2}}{n_{He}} = \frac{M_{He}}{M_{N_2}} \\ \frac{n_{N_2} = 1, M_{N_2} = 28 \text{ g/mol}}{M_{He} = 4 \text{ g/mol}} &\rightarrow \frac{1}{n_{He}} = \frac{4}{28} \Rightarrow n_{He} = 7 \text{ mol} \end{aligned}$$

در حالت اول، یک مول گاز نیتروژن در مخزن داشتیم. در حالت دوم، گاز هلیوم به درون مخزن اضافه کردیم؛ پس تعداد مول‌های گاز در حالت دوم برابر است با:

$$n_2 = n_{N_2} + n_{He} \xrightarrow{n_{N_2} = 1, n_{He} = 7} n_2 = 1 + 7 = 8 \text{ mol}$$

❖ **گام ۲** با استفاده از رابطه $P V = n R T$ و با توجه به این که حجم و دمای گاز ثابت است، می‌توانیم بنویسیم:

$$\frac{P_1}{n_1} = \frac{P_2}{n_2} \xrightarrow{P_1 = \frac{5}{4} P_o, n_1 = 1, n_2 = 8} \frac{\frac{5}{4} P_o}{1} = \frac{P_2}{8} \Rightarrow P_2 = 10 P_o$$

❖ **گام ۳** فشار پیمانه‌ای گاز درون کپسول در حالت دوم را محاسبه می‌کنیم.

$$P_g = P_2 - P_o \xrightarrow{P_2 = 10 P_o} P_g = 10 P_o - P_o = 9 P_o$$

❖ **تله** فشار گاز درون کپسول در حالت دوم، ۱۰ برابر فشار هواست ($P_g = 10 P_o$) اما فشار پیمانه‌ای گاز درون کپسول در حالت دوم، ۹ برابر فشار هواست ($P_g = 9 P_o$). اگر به این موضوع دقت نکنید، ممکن است ① را انتخاب کنید.

۷۵- گزینه ۳

❖ **درس نامه ۱** وقتی دستگاه پس از طی چند فرایند ترمودینامیکی به حالت اولیه خود برمی‌گردد، به مجموعه این فرایندها چرخه ترمودینامیکی گفته می‌شود.

❖ **مساحت سطح داخل یک چرخه در نمودار $P - V$ با قدر مطلق $|W| = S$ کار انجام شده در آن چرخه برابر است.**
اگر جهت چرخه ساعتگرد باشد، کار محیط بر روی دستگاه در چرخه منفی ($W < 0$) و اگر پادساعتگرد باشد، کار محیط بر روی دستگاه در چرخه مثبت ($W > 0$) است.

❖ **در یک چرخه، تغییر انرژی درونی دستگاه صفر است ($\Delta U = 0$).**

❖ **قانون اول ترمودینامیک:**
کار محیط بر روی دستگاه $\rightarrow \Delta U = Q + W$

❖ **گام ۱** با استفاده از مساحت داخل چرخه، قدر مطلق کار انجام شده را محاسبه می‌کنیم.

$$|W| = S = \frac{(3 \times 10^5 - 10^5)(4 - 1) \times 10^{-3}}{2} = \frac{2 \times 10^5 \times 3 \times 10^{-3}}{2} \Rightarrow |W| = 300 \text{ J}$$

چرخه ساعتگرد است؛ پس کار محیط بر روی دستگاه در این چرخه، -300 J است.

❖ **گام ۲** در آخر با استفاده از قانون اول ترمودینامیک، می‌توانیم بنویسیم:

$$\Delta U = 0 \xrightarrow{\Delta U = Q + W} Q + W = 0 \Rightarrow Q = -W \xrightarrow{W = -300 \text{ J}} Q = 300 \text{ J}$$

❖ **۴** برای نوشتن $R I$ ‌ها اگر در جهت جریان از مقاومت R عبور کنیم، چون پتانسیل الکتریکی در حال کاهش است، $R I$ را منفی ($-R I$) و اگر در خلاف جهت جریان از مقاومت R عبور کنیم، چون پتانسیل الکتریکی در حال افزایش است، $R I$ را مثبت ($+R I$) در نظر می‌گیریم. اگر علامت جریان مثبت به دست آمد، یعنی جهت انتخابی درست است و اگر منفی به دست آمد، فقط جهت جریان را در شاخه مورد نظر برعکس می‌کنیم.

❖ **گام ۱** در این مدار، باتری‌ها مخالف یکدیگر بسته شده‌اند و چون $\mathcal{E}_1 > \mathcal{E}_2$ است، پس جهت جریان در مدار ساعتگرد است و مقدار آن برابر است با:

$$\begin{aligned} I &= \frac{\mathcal{E}_1 - \mathcal{E}_2}{R_1 + R_2 + r_1 + r_2} \\ &= \frac{18 - 12}{2 + 8 + 0.5 + 1.5} = \frac{6}{12} = 0.5 \text{ A} \end{aligned}$$

❖ **گام ۲** در جهت جریان مدار (ساعتگرد) از نقطه A به سمت E (جایی که پتانسیل زمین هست و صفر است). حرکت می‌کنیم و قانون اختلاف پتانسیل‌ها را می‌نویسیم.

$$\begin{aligned} V_A - I r_1 + \mathcal{E}_1 - I R_2 &= V_E \Rightarrow V_A - 0.5(0.5) + 18 - (0.5)(8) = 0 \\ \Rightarrow V_A &= -13.75 \text{ V} \end{aligned}$$

❖ **تله** به عنوان تله در اثر بی‌دقتی در علامت مد نظر است. در ضمن اگر در جهت حرکت به جای $-I r_1$ و $-I R_2$ از $+I r_1$ و $+I R_2$ استفاده کنیم، ① و ④ در کمین نشسته‌اند.

۷۶- گزینه ۴

❖ **درس نامه** توان ورودی باتری: مقاومت درونی مولد (Ω)
نیروی محرکه الکتریکی (V)
 $P = \mathcal{E} I + r I^2$
جریان (A)

همان‌طور که در شکل مقابل می‌بینید، جریان از پایانه منفی باتری خارج شده و به پایانه مثبت آن وارد می‌شود؛ بنابراین این باتری در حال شارژ شدن است و توان ورودی آن برابر است با:

$$P_{\text{ورودی باتری}} = \mathcal{E} I + r I^2 = 12(2) + 3(2)^2 = 36 \text{ W}$$

❖ **تله** اگر به اشتباه از رابطه $\mathcal{E} I - r I^2$ استفاده کنید، به گزینه چشمک‌زنان ① می‌رسید. این رابطه برای توان خروجی باتری است، نه توان ورودی!

۷۳- گزینه ۳

❖ **درس نامه ۱** فشار مایع در عمق h از سطح آزاد:

$$\begin{aligned} \text{شتاب گرانش } (m/s^2) &\rightarrow \text{عمق } (m) \\ P &= \rho g h \rightarrow (m) \\ \text{چگالی مایع } (kg/m^3) &\end{aligned}$$

❖ **۲** اگر فشار یک شاره را معادل فشار ستونی از جیوه در نظر بگیریم و ارتفاع جیوه را به دست آوریم، اندازه این ارتفاع برحسب سانتی‌متر، همان فشار شاره برحسب سانتی‌متر جیوه ($cmHg$) است.

کافی است ببینیم که چه ارتفاعی از مایع جیوه، فشار 68 kPa را ایجاد می‌کند. برای این کار می‌توانیم بنویسیم:

$$\begin{aligned} P_{\text{جیوه}} &= \rho_{\text{جیوه}} g h \\ 68 \text{ kPa} &= 68000 \text{ Pa} \\ \rho &= 13.6 \text{ g/cm}^3 = 13600 \text{ kg/m}^3, g = 10 \text{ N/kg} \\ \Rightarrow h_{\text{جیوه}} &= 0.5 \text{ m} = 50 \text{ cm} \end{aligned}$$

❖ **مشاوره** در این سؤال به ارتفاع 3000 متر نیازی نداشتیم. بعضی وقت‌ها اطلاعاتی داده می‌شود که نیازی به آن‌ها نداریم؛ پس فکر نکنید که حتماً باید از همه اطلاعات داده شده استفاده کنیم.



شیمی

۷۶- گزینه ۱

در مولکول O_3 ، یک پیوند دوگانه وجود دارد و پس!



۷۷- گزینه ۳

عبارت‌های (ب) و (ت) درست‌اند.

بررسی عبارت‌های نادرست: (الف) و (پ) بور فقط طیف نشری خطی عنصر هیدروژن را توجیه کرد. (مدل بور فقط برای عنصر هیدروژن بود!) دانشمندان دیگر به دنبال توجیه طیف نشری خطی دیگر عناصرها، ساختار لایه‌ای را معرفی کردند.

۷۸- گزینه ۴

درس‌نامه تعیین شماره دوره و گروه عناصرها بدون رسم آرایش الکترونی

بدون نوشتن آرایش الکترونی و با استفاده از عدد اتمی گازهای نجیب هم می‌توانیم شماره دوره و گروه عناصرها را تعیین کنیم.

تعیین شماره دوره: گازهای نجیب با عددهای اتمی ۲، ۱۰، ۱۸، ۳۶، ۵۴، ۸۶ و ۱۱۸ به ترتیب در انتهای دوره‌های اول تا هفتم قرار دارند؛ بنابراین برای تعیین شماره دوره یک عنصر، کافی است عدد اتمی عنصر مورد نظر را بین عدد اتمی دو گاز نجیب قبل و بعد از آن قرار دهیم. شماره دوره عنصر با شماره دوره گاز نجیب با عدد اتمی بیشتر، یکسان است.

بازه عدد اتمی	۱ و ۲	۳-۱۰	۱۱-۱۸	۱۹-۳۶	۳۷-۵۴	۵۵-۸۶	۸۷-۱۱۸
شماره دوره عنصر	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷

تعیین شماره گروه: برای تعیین شماره گروه، سه حالت پیش می‌آید:

۱ اگر عدد اتمی عنصر مورد نظر یک یا دو واحد بیشتر از عدد اتمی یکی از گازهای نجیب باشد، در این حالت شماره گروه برابر با تفاوت عدد اتمی عنصر با گاز نجیب دوره قبل است. (شماره گروه برابر ۱ یا ۲ می‌باشد.)

مثال، عنصری با عدد اتمی ۱۹ متعلق به گروه ۱ و عنصری با عدد اتمی ۵۶ متعلق به گروه ۲ است.

$$19X: 19 - \underset{\text{آرگون}}{18} = 1 \quad \text{و} \quad 56X: 56 - \underset{\text{زنون}}{54} = 2$$

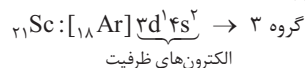
۲ عنصرهایی که در ردیف در پایین جدول قرار دارند (عنصرهایی با عدد اتمی ۵۷ تا ۷۰ و ۸۹ تا ۱۰۲) همگی به گروه ۳ تعلق دارند.

۳ برای بقیه عناصرها که عدد اتمی آن‌ها بیش از دو واحد از عدد اتمی گاز نجیب قبل از خود بیشتر است، باید اختلاف عدد اتمی عنصر و گاز نجیب هم‌دوره‌اش را از عدد ۱۸ کم کنیم تا شماره گروه به دست آید.

مثال، ${}_{33}A \xrightarrow{23-18=5>2} \text{شماره گروه} = 18 - (36-23) = 5$
گاز نجیب هم‌دوره
 ${}_{17}B \xrightarrow{17-1=16>2} \text{شماره گروه} = 18 - (18-17) = 17$
گاز نجیب هم‌دوره

اتم ${}_{31}Ga$ در گروه ۱۳ قرار دارد $[18 - (36-31) = 13]$ و دارای ۳ الکترون ظرفیتی ${}_{31}Ga$ در گروه ۱۳ قرار دارد $[18 - (36-31) = 13]$ و دارای ۳ الکترون ظرفیتی

است؛ بنابراین عنصر A با ۳ الکترون ظرفیتی و ۸ الکترون با $l=0$ (زیرلایه‌های $4s^2$ ، $3d^2$ ، $4s^2$)، ${}_{21}Sc$ یا ${}_{31}Ga$ است (عنصر گروه ۳ یا ۱۳) که با توجه به آورده شدن اتم ${}_{21}Ga$ در صورت سؤال، قطعاً منظور طراح اتم ${}_{21}Sc$ است.



عنصر Y که عدد اتمی آن ۳ واحد بیشتر از گاز نجیب کریپتون (${}_{36}Kr$) است نیز در گروه ۳ قرار دارد یا می‌توان نوشت:

$${}_{39}Y \xrightarrow{39-36=3>2} \text{شماره گروه} = 18 - (54-39) = 18 - 15 = 3$$

۷۹- گزینه ۳

شفاف‌سازی منظور طراح در این سؤال از مناسب‌ترین ماده غذایی، ماده‌ای است که به ازای جرم کم‌تر، انرژی بیشتری را در بدن تولید کند؛ یعنی ارزش سوختی (مقدار انرژی حاصل از سوختن ۱ گرم ماده) آن بیشتر باشد.

گام ۱ ابتدا مناسب‌ترین و نامناسب‌ترین ماده غذایی را از جدول پیدا می‌کنیم. مناسب‌ترین و نامناسب‌ترین ماده غذایی به ترتیب B و D هستند که به ترتیب بیشترین و کم‌ترین ارزش سوختی را دارند.

گام ۲ انرژی مورد نیاز برای یک ساعت ورزش فرد را محاسبه کرده و حساب می‌کنیم که برای تولید این مقدار انرژی، به چه جرمی از هر کدام از مواد B و D نیاز داریم:

$$1320 \text{ kJ} = 60 \text{ min} \times \frac{22 \text{ kJ}}{1 \text{ min}} \quad \text{انرژی مورد نیاز برای یک ساعت ورزش}$$

$$330 \text{ g} = 1320 \text{ kJ} \times \frac{1 \text{ g}}{4 \text{ kJ}} \quad \text{جرم D مورد نیاز}$$

$$66 \text{ g} = 1320 \text{ kJ} \times \frac{1 \text{ g}}{20 \text{ kJ}} \quad \text{جرم B مورد نیاز}$$

گام ۳ نسبت خواسته‌شده را به دست می‌آوریم:

$$\frac{\text{جرم D}}{\text{جرم B}} = \frac{330}{66} = 5$$

تیزبازی مقدار ماده مورد نیاز را می‌توان از تقسیم کل انرژی به ارزش سوختی ماده به دست آورد:

$$\text{انرژی (kJ)} \div \text{ارزش سوختی (kJ.g}^{-1}\text{)} = \text{جرم ماده (g)}$$

با توجه به این که در دو حالت، مقدار انرژی مورد نیاز برابر است، نسبت جرم دو ماده، برابر با معکوس نسبت ارزش سوختی آن‌ها است؛ پس خیلی راحت می‌شد بزرگ‌ترین عدد (۲۰) را به کوچک‌ترین عدد (۴) تقسیم کرد و به جواب رسید.

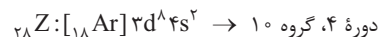
$$\frac{20}{4} = 5$$

۸۰- گزینه ۲

به جز عبارت آخر، بقیه عبارت‌ها درست‌اند.

بررسی عبارت‌ها:

♦ آرایش الکترونی ${}_{28}Z$ به صورت زیر است:



♦ **بله! کاملاً درست!** هر چه $n+l$ ، یک زیرلایه کم‌تر باشد، زودتر از الکترون اشغال می‌شود.

نکته ساختار یا همان شکل هندسی و واقعی مولکول‌ها و یون‌های چنداتمی به دو مورد: ۱) **شمار اتم‌های متصل به اتم مرکزی** (استوکیومتری فرمول شیمیایی) و ۲) **شمار جفت الکترون‌های ناپیوندی روی اتم مرکزی** بستگی دارد.

شمار اتم‌های متصل به اتم مرکزی	۲	۳	۴	۵	۶
شمار جفت الکترون ناپیوندی اتم مرکزی	۰	۰	۰	۱ یا ۲	۱
شکل گونه	خطی	سه ضلعی مسطح	چهاروجهی	خمیده	هرمی
شکل کلی					
مثال	CO_2 , N_2O , HCN و SCO	SO_2 , CO_3^{2-} و NO_3^-	CCl_4 , CH_4 , $CHCl_3$ و NH_4^+	H_2S , H_2O , SO_2 و OF_2	NH_3 , PCl_3 و NF_3

شبه فلز

۲۳



همچنین در یک گروه از بالا به پایین، شعاع اتمی عنصرها افزایش می‌یابد؛ یعنی در گروه‌های جدول، عنصرهای پایین‌تر، شعاع اتمی بزرگ‌تری دارند.

با توجه به نکته بالا در نمودار داده‌شده، قله‌ها نشان‌دهنده فلز قلیایی و دره‌ها، نشان‌دهنده هالوژن هستند؛ بنابراین جواب درست، ۲ است.

مواستون باشد که نمودار داده‌شده در صورت سؤال، پیوسته است و نظم مشخصی دارد و بخشی از روند تغییر شعاع اتمی عنصرهای اصلی، در کل جدول دوره‌ای (براساس افزایش عدد اتمی) را نشان می‌دهد.

۸۷- گزینه ۳

شفاف‌سازی درصد جرمی مجموع فراورده‌های واکنش در جامد برجای‌مانده؛ یعنی:

$$\frac{\text{مجموع جرم } \text{CaCO}_3 \text{ و } \text{MgCO}_3}{\text{جرم ناخالصی‌ها + مجموع جرم } \text{CaCO}_3 \text{ و } \text{MgCO}_3} \times 100$$

استراتژی اول به کمک جرم و در نتیجه تعداد مول CO_2 ، درصدی از آن که در هر واکنش مصرف می‌شود را حساب کن، بعد به کمک تعداد مول CO_2 مصرف‌شده در هر واکنش، جرم فراورده‌ها و ناخالصی‌ها رو به دست بیار! با معلوم‌شدن جرم جامد برجای‌مانده که می‌شه جرم فراورده‌های تولیدشده (MgCO_3 و CaCO_3) و ناخالصی‌ها در مواد اولیه، می‌تونی درصد جرمی فراورده‌ها را در این جامد حساب کنی!

گام ۱ مول CO_2 مصرف‌شده در هر واکنش را حساب می‌کنیم:

$$\text{CO}_2 \text{ تعداد مول} = 88 \text{ g CO}_2 \times \frac{1 \text{ mol CO}_2}{44 \text{ g CO}_2} = 2 \text{ mol CO}_2$$

۴۰ درصد از حجم گاز و در نتیجه ۴۰ درصد از مول آن، در واکنش با MgO (واکنش I) و ۶۰ درصد از مول آن، در واکنش با CaO (واکنش II) مصرف شده است.

$$\text{I} \quad \text{CO}_2 \text{ مصرف‌شده در واکنش} = \frac{40}{100} \times 2 = 0.8 \text{ mol}$$

$$\text{II} \quad \text{CO}_2 \text{ مصرف‌شده در واکنش} = \frac{60}{100} \times 2 = 1.2 \text{ mol}$$

گام ۲ معادله واکنش‌ها را نوشته و به کمک تعداد مول CO_2 ، جرم ناخالصی‌ها و جرم فراورده تولیدشده در هر واکنش را محاسبه می‌کنیم: $\text{I) MgO} + \text{CO}_2 \rightarrow \text{MgCO}_3$

$$\frac{\text{درصد خلوص} \times \text{جرم ناخالص}}{100} = \frac{\text{مول}}{\text{جرم مولی} \times \text{ضریب}} = \frac{\text{جرم}}{\text{جرم مولی} \times \text{ضریب}}$$

$$\frac{x \times \frac{40}{100}}{1 \times 40} = \frac{0.8}{1 \times 1} \Rightarrow \begin{cases} x = 40 \text{ g MgO} \\ x' = 67.2 \text{ g MgCO}_3 \end{cases}$$

با توجه به سؤال، درصد خلوص MgO ، ۸۰٪ است؛ پس یعنی ۲۰ درصد جرم MgO را ناخالصی‌ها تشکیل داده‌اند.

$$\text{MgO} \text{ جرم ناخالصی‌های} = 40 \times \frac{20}{100} = 8 \text{ g}$$



$$\frac{\text{درصد خلوص} \times \text{جرم ناخالص}}{100} = \frac{\text{مول}}{\text{جرم مولی} \times \text{ضریب}} = \frac{\text{جرم}}{\text{جرم مولی} \times \text{ضریب}}$$

$$\frac{y \times \frac{60}{100}}{1 \times 56} = \frac{1.2}{1 \times 1} \Rightarrow \begin{cases} y = 112 \text{ g CaO} \\ y' = 120 \text{ g CaCO}_3 \end{cases}$$

با توجه به سؤال، درصد خلوص CaO ، ۶۰٪ است؛ یعنی ۴۰ درصد جرم CaO را ناخالصی تشکیل داده است:

$$\text{CaO} \text{ جرم ناخالصی‌های} = 112 \times \frac{40}{100} = 44.8 \text{ g}$$

گام ۳ جرم جامد به‌جای‌مانده را حساب می‌کنیم:

$$\text{جرم ناخالصی‌های باقی‌مانده} + \text{جرم فراورده‌های تولیدشده} = \text{جرم جامد به‌جای‌مانده}$$

$$\text{MgCO}_3 + \text{CaCO}_3$$

$$= (67.2/2 + 120) + (8 + 44.8/2) = 187.2 + 52.4 = 239.6 \text{ g}$$

با توجه به معادله واکنش، هر مول Ca^{2+} یا Mg^{2+} (X^{2+} در XCl_2)، ۲ مول صابون (RCOONa) را رسوب داده و از چرخه پاک‌کنندگی حذف می‌کند:

$$2 \times \left(\frac{25}{4} + \frac{55}{2} \right) \times 10^{-3} = \text{تعداد مول صابون رسوب‌داده}$$

مجموع مول
 Ca^{2+} و Mg^{2+}

$$= \left(\frac{25 + 110}{2} \right) \times 10^{-3} = \frac{135}{2} \times 10^{-3}$$

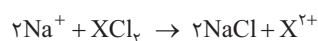
گام ۴ تعداد مول اولیه صابون را حساب کرده و درصد صابون رسوب کرده را به دست می‌آوریم.

$$\text{مول اولیه صابون} = \frac{27 \text{ g}}{300 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}} = 0.09 \text{ mol}$$

$$\text{درصد صابون رسوب‌کرده} = \frac{\text{مول صابون رسوب‌کرده}}{\text{مول اولیه صابون}} \times 100 = \frac{\frac{135}{2} \times 10^{-3}}{0.09} \times 100 = 75\%$$

گام ۵ جرم یون Na^+ را حساب می‌کنیم:

در فرایند نرم کردن آب سخت، یون‌های کلسیم و منیزیم را با یون سدیم جایگزین می‌کنند.



یعنی به ازای هر مول کلسیم یا منیزیم، ۲ مول یون سدیم نیاز است:

$$\text{Na}^+ \text{ تعداد مول} = 2 \times \left(\frac{25}{4} + \frac{55}{2} \right) \times 10^{-3} = \frac{135}{2} \times 10^{-3} \text{ mol}$$

$$\Rightarrow \text{جرم Na}^+ = \frac{135}{2} \times 10^{-3} \text{ mol} \times \frac{23 \text{ g}}{1 \text{ mol}}$$

با توجه به گزینه‌ها، جواب یا 1.78 g یا 1.55 g است؛ اگر $\frac{23}{2}$ را به تقریب ۱۰ در نظر بگیریم، جواب 1.35 g خواهد شد؛ پس جواب نهایی قطعاً 1 g بیشتر است و جواب، ۲ است.

مشاوره با به نگاه به صورت سؤال، معلومه که با یک سؤال **یغرو بد بدن!** و وقت گیر روبه‌رو هستیم و اصلاً منطقی نیست که برای دور اول، بریم سراغش! در سر جلسه کنگور، چنین سؤالاتی را در دور اول رها کنید و در دور آخر، اگر وقت اضافه آوردید، برید سراغشون!

۸۵- گزینه ۴

نکته فرمول عمومی و نخستین عضو خانواده آلکان‌ها، آلکن‌ها و آلکین‌ها در جدول زیر آورده شده است:

نام خانواده	فرمول عمومی	نخستین عضو
آلکان	$\text{C}_n\text{H}_{2n+2} \quad (n \geq 1)$	CH_4 (متان)
آلکن	$\text{C}_n\text{H}_{2n} \quad (n \geq 2)$	C_2H_4 (اتن یا اتیلن)
آلکین	$\text{C}_n\text{H}_{2n-2} \quad (n \geq 2)$	C_2H_2 (اتین یا استیلن)

سومین عضو خانواده آلکین‌ها، C_3H_4 و سومین عضو خانواده آلکان‌ها، C_3H_8 است.

$$\text{تعداد مول هر گاز} = 89/6 \text{ L} \times \frac{1 \text{ mol}}{22.4 \text{ L}} = 4$$

$$\text{تفاوت جرم دو هیدروکربن} = 4 \times (\text{C}_3\text{H}_8 - \text{C}_3\text{H}_4) = 4 \times (2 \times 4) = 32 \text{ g}$$

تفاوت جرم مولی
شمار مول‌های
دو هیدروکربن دو هیدروکربن

حالا باید ببینیم جرم مولی کدام هیدروکربن برابر با ۴۰ گرم است:

$$\text{بررسی گزینه‌ها: ۱) اتان: } \text{C}_2\text{H}_6 \leftarrow 30 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$$

$$\text{۲) اتین: } \text{C}_2\text{H}_2 \leftarrow 26 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$$

$$\text{۳) دومین عضو آلکن‌ها: } \text{C}_3\text{H}_6 \leftarrow 42 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$$

$$\text{۴) دومین عضو آلکین‌ها: } \text{C}_3\text{H}_4 \leftarrow 40 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$$

۸۶- گزینه ۲

نکته در هر دوره از چپ به راست، شعاع اتمی عنصرها کاهش می‌یابد؛ یعنی اگر بی‌خیال گازهای نجیب بشیم، در هر دوره (به‌جز دوره اول)، عنصرهای گروه ۱ (فلزهای قلیایی)، بیشترین شعاع اتمی و عنصرهای گروه ۱۷ (هالوژن‌ها)، کم‌ترین شعاع اتمی را دارند.



نکته در مسائل استوکیومتری که درصد جرمی جزء اطلاعات سؤال است، می‌توانید برای سرعت بیشتر، به جای استفاده از فرمول درصد جرمی، از کسر تبدیل معادل آن استفاده کنید. مثلاً می‌توان نوشت:

$$A \text{ درصد جرمی} = a \Rightarrow \frac{a \text{ g } A}{100 \text{ g محلول}} \text{ یا } \frac{100 \text{ g محلول}}{a \text{ g } A}$$

۹۰- گزینه ۲

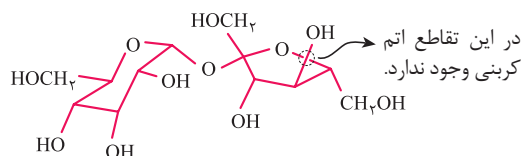
عبارت‌های اول و چهارم درست‌اند.

بررسی عبارت‌ها:

ترکیب داده‌شده، بخش‌های قطبی زیادی دارد و در مجموع یک مولکول قطبی به حساب می‌آید؛ بنابراین در حلال‌های قطبی مانند آب بیشتر حل می‌شود. (بنزن (C_6H_6) ، ناقطبی است.)

ترکیب داده‌شده دارای ۱۲ اتم کربن و ۸ گروه هیدروکسیل $(-OH)$ است: $\frac{12}{8} = 1.5$

بچه‌ها دقت کنید که ساختار داده‌شده، فضایی است؛ پس در محل تلاقی هر دو خطی لزوماً اتم کربن وجود ندارد، در این ساختارها در تقاطع‌هایی که کمی فضای خالی وجود دارد، اتم کربنی وجود ندارد.



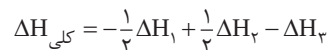
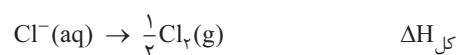
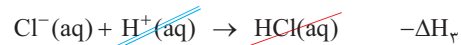
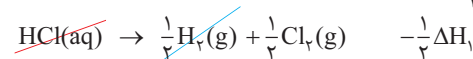
یکی از حلقه‌های موجود در ترکیب داده‌شده (حلقه سمت راست)، ۵ اتمی است.

ترکیب داده‌شده دارای ۸ عامل الکلی (OH) است. اگر به جای آن‌ها، ۸ گروه متیل (CH_3) قرار دهیم، خواهیم داشت: $-8OH + 8CH_3 = 8(-17 + 15) = 8 \times (-2) = -16 \text{ g}$

۹۱- گزینه ۴

برای رسیدن به واکنش $\frac{1}{4}Cl_2(g) \rightarrow \frac{1}{4}Cl_2(aq)$ ، باید واکنش سوم را وارونه (به خاطر

Cl^- ، واکنش اول را وارونه و در $\frac{1}{4}$ ضرب کنیم (به خاطر $\frac{1}{4}Cl_2$). همچنین برای حذف H_2 ، واکنش دوم را باید در $\frac{1}{4}$ ضرب کنیم:



$$= -\frac{1}{4}(-184/6) + 0 - (-75/2) = 92/3 + 75/2 = 167/2 \text{ kJ}$$

ΔH واکنش، مثبت و فرایند گرماگیر است.

۹۲- گزینه ۳

به جز عبارت دوم، بقیه عبارت‌ها درست‌اند.

بررسی عبارت‌ها:

با توجه به ساختار داده‌شده، فرمول مولکولی کافئین به صورت $C_8H_{10}N_4O_2$ است.^۱

$$C_8H_{10}N_4O_2 \text{ جرم مولی} = (8 \times 12) + 10 + (4 \times 14) + (2 \times 16) = 196 \text{ g.mol}^{-1}$$

$$0.2 \text{ mol } C_8H_{10}N_4O_2 \times \frac{196 \text{ g } C_8H_{10}N_4O_2}{1 \text{ mol } C_8H_{10}N_4O_2} = 39.2 \text{ g}$$

هر عامل آمیدی $(-C(=O)-N-)$ و هر عامل آمینی $(-N-)$ ، یک اتم نیتروژن دارد. با توجه به عبارت که گفته ۳ عامل آمیدی و ۳ عامل آمینی، پس باید ۶ اتم N داشته باشیم، اما ۴ تا داریم.

۱- البته طراح مقترم به پیوند دوگانه کم گذاشته و فرمول واقعی کافئین $C_8H_{10}N_4O_2$ است.

گام ۲ درصد جرمی فراورده‌ها در جامد به‌جای‌مانده را حساب می‌کنیم:

$$\frac{187/2}{240} \times 100 = 78\% \quad \text{درصد جرمی فراورده‌ها} = \frac{\text{جرم کل جامد به‌جای‌مانده}}{\text{مجموع جرم فراورده‌ها}} \times 100$$

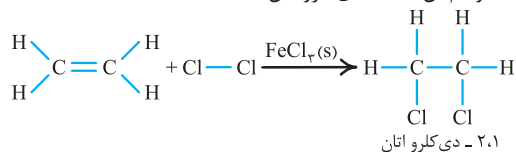
۸۸- گزینه ۲

عبارت‌های اول، سوم و چهارم درست‌اند.

بررسی عبارت‌ها:

این واکنش در تمرین‌های دوره‌ای فصل ۳ شیمی یازدهم آورده شده و کاتالیزگر آن، $FeCl_3(s)$ است.

فراورده واکنش، سیرشده و نام آن، ۲، دی‌کلرو اتان است.



۲، دی‌کلرو اتان $(C_2H_4Cl_2)$ جرم مولی فراورده $= (2 \times 12) + 4 + (2 \times 35.5) = 99 \text{ g.mol}^{-1}$

$$24/75 \text{ g } C_2H_4Cl_2 \times \frac{1 \text{ mol } C_2H_4Cl_2}{99 \text{ g } C_2H_4Cl_2} \times \frac{1 \text{ mol } Cl_2}{1 \text{ mol } C_2H_4Cl_2} = 0.25 \text{ mol } Cl_2$$

برای آزادشدن ۱۷۸ کیلوژول گرما، باید ۱ مول $C_2H_4Cl_2$ (28 g.mol^{-1}) و ۱ مول Cl_2 (71 g.mol^{-1}) مصرف شود، یعنی در مجموع 99 g گرم واکنش‌دهنده!

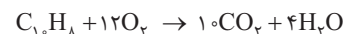
$$\text{واکنش‌دهنده } 99 \text{ g} \times \frac{178 \text{ kJ}}{99 \text{ g}} = 178 \text{ kJ}$$

به کمک کسر تناسب هم می‌شد نوشت:

$$\frac{\text{جرم}}{\text{جرم مولی} \times \text{ضریب}} = \frac{Q}{|\Delta H|} \Rightarrow \frac{x}{(1 \times 28) + (1 \times 71)} = \frac{178}{99} \Rightarrow x = 4/95 \text{ g}$$

۸۹- گزینه ۱

معادله سوختن کامل نفتالن به صورت زیر است:



برای محاسبه حجم O_2 با دو روش در فرمتونیم:

روش ۱ استفاده از کسر تناسب:

$$\frac{\text{جرم}}{\text{جرم مولی} \times \text{ضریب}} = \frac{\text{حجم}}{\text{حجم} \times 22/4}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{1 \times 128} = \frac{x}{12 \times 22/4} \Rightarrow x = \frac{12 \times 22/4}{128} = 13/44 \text{ LO}_2$$

روش ۲ استفاده از کسر تبدیل:

$$6/4 \text{ g } C_{10}H_8 \times \frac{1 \text{ mol } C_{10}H_8}{128 \text{ g } C_{10}H_8} \times \frac{12 \text{ mol } O_2}{1 \text{ mol } C_{10}H_8} \times \frac{22/4 \text{ LO}_2}{1 \text{ mol } O_2} = 13/44 \text{ LO}_2$$

برای قسمت دوم سؤال باید ببینیم که ۱۳/۴۴ لیتر O_2 از تجزیه چند گرم محلول هیدروژن پراکسید به دست می‌آید:

روش ۱ استفاده از کسر تناسب:

$$\frac{\text{جرم}}{\text{جرم مولی} \times \text{ضریب}} = \frac{\text{حجم}}{\text{حجم} \times 22/4}$$

$$\xrightarrow{\frac{50-1}{100} \rightarrow} \frac{x \times \frac{1}{100}}{2 \times 34} = \frac{13/44}{1 \times 22/4} \Rightarrow x = 34 \times 2/4 = 81/6 \text{ g محلول}$$

روش ۲ استفاده از کسر تبدیل:

$$13/44 \text{ LO}_2 \times \frac{1 \text{ mol } O_2}{22/4 \text{ LO}_2} \times \frac{2 \text{ mol } H_2O_2}{1 \text{ mol } O_2}$$

$$\times \frac{34 \text{ g } H_2O_2}{1 \text{ mol } H_2O_2} \times \frac{100 \text{ g محلول}}{50 \text{ g } H_2O_2} = 81/6 \text{ g محلول}$$

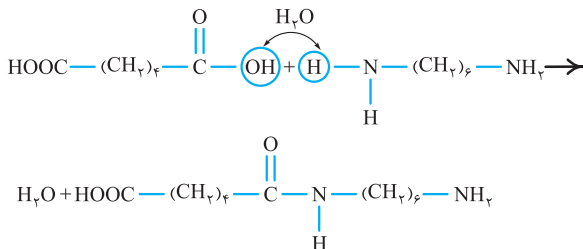
کسر مربوط به درصد جرمی



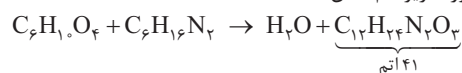
۹۵- گزینه ۴

شفاف سازی هر چند مواد واکنش دهنده، دی‌اسید و دی‌آمین هستند، اما با توجه به این که طراح گفته واکنش موازنه شده است و ضرایب همه مواد هم برابر با ۱ است، بنابراین با یک واکنش تهیه امید سروکار داریم نه پلی‌امید!

همان‌طور که در بخش شفاف‌سازی گفتیم با یک واکنش تهیه امید سروکار داریم؛ بنابراین ابتدا ساختار امید حاصل را رسم کرده و واکنش را کامل می‌کنیم:



معادله واکنش را می‌توان به صورت زیر هم نشان داد:



برای قسمت دوم سؤال هم که یک استوکیومتری ساده است، باید روابط استوکیومتری را بین جرم دی‌اسید و فرآورده آلی واکنش (آمید حاصل) بنویسیم.

$$(\text{C}_6\text{H}_8\text{O}_4) = \text{جرم مولی اسید} = (6 \times 12) + 8 + (4 \times 16) = 146 \text{ g.mol}^{-1}$$

$$\text{جرم مولی فرآورده آلی} = (12 \times 12) + 24 + (2 \times 14) + (2 \times 16) = 244 \text{ g.mol}^{-1}$$

روش ۱ استفاده از کسر تناسب:

$$\frac{\text{جرم}}{\text{جرم مولی} \times \text{ضریب}} = \frac{\text{جرم}}{\text{جرم مولی} \times \text{ضریب}}$$

$$\frac{\text{C}_6\text{H}_8\text{O}_4}{\text{C}_{14}\text{H}_{24}\text{N}_2\text{O}_2} = \frac{x}{244}$$

$$\Rightarrow \frac{146}{244} = \frac{x}{244} \Rightarrow x = 48/8 \text{ g C}_{14}\text{H}_{24}\text{N}_2\text{O}_2$$

روش ۲ استفاده از کسر تبدیل:

$$\text{فرآورده آلی} = 48/8 \text{ g} = \frac{244 \text{ g}}{1 \text{ mol}} \times \frac{1 \text{ mol}}{146 \text{ g}} \times \frac{1 \text{ mol}}{1} \times \frac{1 \text{ mol}}{29/2 \text{ g}} \times \frac{1 \text{ mol}}{146 \text{ g}} \times \frac{1 \text{ mol}}{1} \times \frac{1 \text{ mol}}{29/2 \text{ g}}$$

۹۶- گزینه ۴

متأسفانه این سؤال پاسخ درست ندارد، چون فقط به عبارت (عبارت دوم) درسته! ولی در گزینه‌ها، (یک) نداریم!

بررسی عبارت‌ها:

♦ پاک‌کننده‌های غیرصابونی ($\text{RC}_6\text{H}_4\text{SO}_3^-\text{Na}^+$) دارای دو بخش کاتیونی و آنیونی هستند که این دو بخش با پیوند یونی به یکدیگر متصل‌اند. دقت کنید که اگر بخش آنیونی پاک‌کننده رو می‌گفت، این عبارت درست می‌شد.

♦ به! طبق متن کتاب درسی درسته!

♦ عدد اکسایش گوگرد در پاک‌کننده‌های غیرصابونی برابر ۴+ و در هیدروژن سولفید (H_2S) برابر ۲- است.

$$\text{H}_2\text{S}: 2(+1) + \text{S} = 0 \Rightarrow \text{S} = -2$$

♦ در شهر مراغه، صابون سنتی (پاک‌کننده صابونی) از واکنش چربی‌ها و سدیم هیدروکسید تولید می‌شود.



$$\Rightarrow \text{جرم مولی} = 16(12) + 33 + 32 + 2(16) + 23 = 320 \text{ g.mol}^{-1}$$

۹۷- گزینه ۳

به جز عبارت دوم، بقیه عبارت‌ها درست‌اند.

اول بیایید تکلیف اتم‌های A و B را مشخص کنیم:

$$\text{A: } 2 + 8 + 18 + 7 = 35 \Rightarrow \text{A: } {}_{35}\text{Br}$$

$$\text{B: } 2 + 8 + 2 = 12 \Rightarrow \text{B: } {}_{12}\text{Mg}$$

♦ هر ۱۲ اتم هیدروژن موجود در ساختار ترکیب، در پیوند C—H وجود دارند. از طرفی در ساختار این ترکیب، ۱۰ پیوند C—N وجود دارد.

نکته شمار پیوندهای اشتراکی در ترکیبی شامل C, H, N و O را می‌توان از رابطه زیر محاسبه کرد:

تعداد	تعداد	تعداد	تعداد
(اتم‌های ۲ × ۳)	(اتم‌های ۱ × ۳)	(اتم‌های ۱ × ۳)	(اتم‌های ۱ × ۳)
اکسیژن	نیتروژن	هیدروژن	کربن
۲	۲	۲	۲
اشتراکی			

$$\text{شمار پیوندها در } \text{C}_8\text{H}_{12}\text{N}_4\text{O}_2 = \frac{\text{C}}{(4 \times 8)} + \frac{\text{H}}{(1 \times 12)} + \frac{\text{N}}{(3 \times 4)} + \frac{\text{O}}{(2 \times 2)} = 3$$

هر اتم اکسیژن، دو جفت الکترون ناپیوندی و هر اتم نیتروژن، ۱ جفت الکترون ناپیوندی دارد:

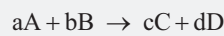
$$\text{شمار جفت الکترون‌های ناپیوندی} = \frac{(2 \times 2)}{\text{O}} + \frac{(4 \times 1)}{\text{N}} = 8$$

$$\frac{\text{شمار جفت الکترون‌های پیوندی}}{\text{شمار جفت الکترون‌های ناپیوندی}} = \frac{3}{8} = \frac{24}{8} + \frac{6}{8} = 3/75$$

۹۳- گزینه ۱

شفاف سازی عبارت «اگر سرعت متوسط تغییر غلظت ماده X به سرعت واکنش نزدیک‌ترین باشد»، یعنی ضریب ماده X در معادله واکنش برابر ۱ باشد یا به عبارت دیگر، ماده X کوچک‌ترین ضریب را داشته باشد.

نکته اگر سرعت متوسط تولید یا مصرف مواد بر ضریب استوکیومتری‌شان تقسیم شود، سرعت متوسط واکنش به دست می‌آید. واضح است که اگر ضریب استوکیومتری ماده‌ای در معادله واکنش برابر ۱ باشد، سرعت متوسط واکنش با سرعت آن ماده برابر خواهد بود.



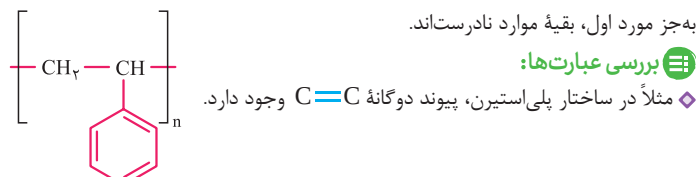
$$\bar{R}(\text{واکنش}) = \frac{\bar{R}(A)}{a} = \frac{\bar{R}(B)}{b} = \frac{\bar{R}(C)}{c} = \frac{\bar{R}(D)}{d}$$

می‌دانیم که تغییرات غلظت مواد در یک بازه زمانی، متناسب با ضرایب استوکیومتری آن‌ها است؛ بنابراین ضریب استوکیومتری A از D بزرگ‌تر است. از طرفی از تقسیم سرعت متوسط یک ماده به ضریب استوکیومتری آن، سرعت متوسط واکنش به دست می‌آید. از آنجایی که سرعت متوسط X با سرعت متوسط واکنش نزدیک‌ترین است، نتیجه می‌گیریم که ضریب X در معادله موازنه‌شده، از بقیه مواد کوچک‌تر است.

۹۴- گزینه ۲

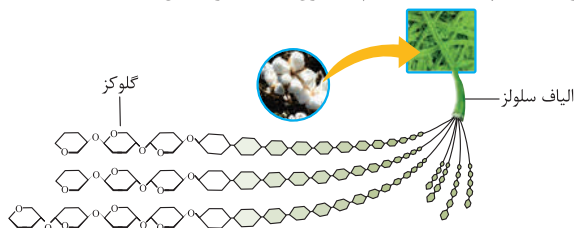
به جز مورد اول، بقیه موارد نادرست‌اند.

بررسی عبارت‌ها:



♦ در واکنش بسپارش ترکیب‌هایی مانند اتن، وجود پیوند دوگانه ضروری است! اما دی‌الکل‌ها و دی‌آمین‌ها که در واکنش تهیه پلی‌استرها و پلی‌آمیدها کاربرد دارند، لزوماً در ساختار خود پیوند دوگانه ندارند.

♦ واحدهای سازنده الیاف پنبه، به کمک اتم اکسیژن به یکدیگر متصل شده‌اند.



نمایی ساده از الیاف سلولز و مولکول‌های سازنده آن در پنبه

♦ در واکنش تولید پلی‌استرها و پلی‌آمیدها، علاوه بر پلیمر، مولکول آب نیز تولید می‌شود، یعنی یک فرآورده معین نداریم!



هر مول NaOH مانند هر مول KCl، دو مول یون در آب پدید می‌آورد؛ به همین دلیل رسانایی الکتریکی محلول آن‌ها به تقریب با هم برابر است.
بدانید و آگاه باشید! که آمین‌ها مانند آمونیاک، جزء بازهای ضعیف هستند.



گزینه ۳ - ۱۰۰

نکته

اکسنده ← گونه‌ای که عدد اکسایش آن کاهش می‌یابد.

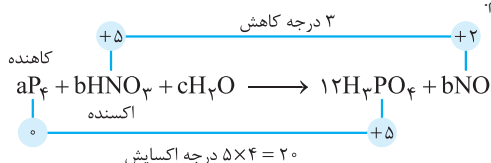
کاهنده ← گونه‌ای که عدد اکسایش آن افزایش می‌یابد.

عبارت‌های اول تا چهارم درست‌اند.

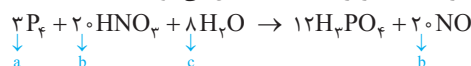
خب اول بریم سراغ تکمیل موازنه واکنش. اولاً دقت کنید که طراح محترم! ضریب NO رو در این واکنش به شما نداده پس به اشتباه ضریب اون رو ۱ در نظر نگیرید. در سمت چپ معادله واکنش، b تا اتم N وجود دارد، بنابراین در سمت راست هم باید تعداد اتم‌های N، b تعداد باشد نه یکی! فوب بود طراح مقرر نقطه پی‌تی، پی‌زی پشت NO می‌داشت! پی بگیریم!



با توجه به عبارت‌ها، بهتره که موازنه واکنش را به روش تغییر عدد اکسایش انجام دهیم، به این صورت که مقدار تغییر عدد اکسایش گونه‌های کاهنده و اکسنده را به صورت برعکس، ضریب هم قرار می‌دهیم و بعد با توجه به ضرایب معلوم، ضرایب بقیه گونه‌ها را تعیین می‌کنیم. فقط حواستون باشه که اگر عنصری که عدد اکسایش آن تغییر کرده است، دارای زیروند باشد، باید تغییر عدد اکسایش آن را در زیروندش ضرب کرده و سپس جابه‌جایی تغییر عدد اکسایش را انجام دهیم.



در ادامه با موازنه اتم‌های H، ضریب c که برابر ۸ است، مشخص می‌شود.



بررسی عبارت‌ها:

$$\frac{c}{b} = \frac{8}{20} = 0.4$$

در این واکنش، عدد اکسایش N از +۵ در NO به +۲ در NO می‌رسد؛ بنابراین یون چندانمی NO کاهش می‌یابد و نقش اکسنده را ایفا می‌کند.

عدد اکسایش همه اتم‌های اکسیژن در دو سمت معادله برابر با -۲ است.

در معادله موازنه‌شده، ضریب استوکیومتری HNO₃ و NO برابر است.

در واکنش مورد نظر، عدد اکسایش فسفر از صفر در P₄ به +۵ در H₃PO₄ رسیده است؛ بنابراین گونه کاهنده همان P₄ است. با توجه به این که در P₄، ۴ اتم فسفر وجود دارد،

تغییر عدد اکسایش هر گونه کاهنده برابر با ۴×۵=۲۰ است. از طرفی تغییر عدد اکسایش

در گونه اکسنده (HNO₃ یا NO) برابر با ۳ است (عدد اکسایش N از +۵ در HNO₃ به +۲ در NO می‌رسد).

۲۰-۳=۱۷ تفاوت تغییر عدد اکسایش

ضریب استوکیومتری هیچ‌یک از واکنش‌دهنده‌ها برابر با ۱۷ نیست.



گزینه ۲ - ۱۰۱

درس‌نامه اثر کاتالیزگر بر واکنش:

کاتالیزگر این موارد را تغییر نمی‌دهد	کاتالیزگر این موارد را افزایش می‌دهد	کاتالیزگر این موارد را کاهش می‌دهد
- سطح انرژی واکنش‌دهنده‌ها و فراورده‌ها - ΔH واکنش - مقدار نهایی فراورده‌ها	- سرعت واکنش (شیب نمودار غلظت - زمان) - پایداری ذره تشکیل‌شده - در قله نمودار انرژی - پیشرفت واکنش	- انرژی فعال‌سازی واکنش - سطح انرژی ذره تشکیل‌شده - در قله نمودار انرژی - پیشرفت واکنش - زمان انجام واکنش

بررسی عبارت‌ها:

♦ برم در گروه ۱۷ قرار دارد و با گرفتن ۱ الکترون به آرایش گاز نجیب Kr می‌رسد.
♦ همان فلز منیزیم است که الکترون از دست می‌دهد و یک کاهنده قوی است نه اکسنده قوی!

کاهنده	اکسنده
گونه (های) دیگر را کاهش می‌دهد.	گونه (های) دیگر را اکسید می‌کند.
خودش اکسایش می‌یابد (الکترون از دست می‌دهد).	خودش کاهش می‌یابد (الکترون می‌گیرد).

♦ اتم برم با گرفتن الکترون به یون برمید تبدیل می‌شود:

♦ در واکنش بین منیزیم و برم، هر مول منیزیم، دو مول الکترون از دست می‌دهد و ۱ مول

فراورده (MgBr₂) تشکیل می‌شود.



گزینه ۲ - ۹۸

گام ۱ ابتدا غلظت مولی محلول باریم هیدروکسید را حساب می‌کنیم:

$$Ba(OH)_2 \text{ مول} = \frac{27 \times 10^{-3} \text{ g } Ba(OH)_2}{171 \text{ g } Ba(OH)_2} \times \frac{1 \text{ mol } Ba(OH)_2}{171 \text{ g } Ba(OH)_2} = 2 \times 10^{-3} \text{ mol}$$

$$\text{حجم محلول} = \frac{250}{1000} \text{ L} = 2 \times 10^{-1} \text{ L}$$

$$[Ba(OH)_2] = \frac{2 \times 10^{-3} \text{ mol}}{2 \times 10^{-1} \text{ L}} = 10^{-2} \text{ mol.L}^{-1}$$

گام ۲ غلظت یون هیدروکسید و سپس غلظت یون هیدرونیوم pH محلول را حساب می‌کنیم.

نکته ۱ باریم هیدروکسید (Ba(OH)₂)، یک باز قوی دوظرفیتی است و در محلول آن، غلظت یون هیدروکسید دو برابر غلظت محلول است:

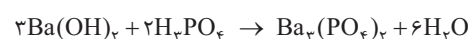
$$[OH^-] = 2[Ba(OH)_2] = 2M$$

$$[OH^-] = 2 \times 10^{-2} \text{ mol.L}^{-1} \xrightarrow{[H^+][OH^-] = 10^{-14}} [H^+] = \frac{10^{-14}}{2 \times 10^{-2}} = 5 \times 10^{-13} \text{ mol.L}^{-1}$$

$$pH = -\log[H^+] = -\log(5 \times 10^{-13}) = 13 - \log 5 = 13 - 0.7 = 12.3$$

تله ۱ آگه به اشتباه غلظت یون هیدروکسید را با غلظت باریم هیدروکسید برابر در نظر بگیرید (یعنی ضرب در ۲ رو یادتون بره!)، pH محلول را ۱۲ به دست می‌آورید و به اشتباه گزینه ۱ یا ۳ را می‌زنید.

گام ۲ معادله موازنه‌شده واکنش را نوشته و جرم رسوب را به دست می‌آوریم:



روش ۱ استفاده از کسر تناسب:

$$\frac{\text{جرم}}{\text{جرم مولی} \times \text{ضریب}} = \frac{\text{حجم} \times \text{غلظت مولی}}{\text{ضریب}} \Rightarrow \frac{x}{3 \times 1} = \frac{10^{-2} \times 150 \times 10^{-3}}{2 \times 1} \Rightarrow x = 300 / 5 \times 10^{-3} \text{ g} = 300 / 5 \text{ mg } Ba_3(PO_4)_2$$

$$\Rightarrow x = 300 / 5 \times 10^{-3} \text{ g} = 300 / 5 \text{ mg } Ba_3(PO_4)_2$$

روش ۲ استفاده از کسر تبدیل:

$$\frac{150}{1000} \text{ L } Ba(OH)_2(aq) \times \frac{10^{-2} \text{ mol } Ba(OH)_2}{1 \text{ L } Ba(OH)_2(aq)} \times \frac{1 \text{ mol } Ba_3(PO_4)_2}{3 \text{ mol } Ba(OH)_2} \times \frac{601 \text{ g } Ba_3(PO_4)_2}{1 \text{ mol } Ba_3(PO_4)_2} \times \frac{10^3 \text{ mg}}{1 \text{ g}} = 300 / 5 \text{ mg } Ba_3(PO_4)_2$$



گزینه ۴ - ۹۹

شفاف‌سازی ۱ کاغذ pH را به رنگ آبی درمی‌آورد، یعنی محلول آن خاصیت بازی دارد. ۲ رسانایی الکتریکی نزدیک به محلول پتاسیم کلرید دارد، یعنی مانند پتاسیم کلرید (KCl)، در هر مول آن ۲ مول یون وجود داشته باشد.

نکته ۱ کاغذ pH در محلول‌های اسیدی به رنگ سرخ و در محلول‌های بازی به رنگ آبی درمی‌آید.

محلول‌های بازی، کاغذ pH را به رنگ آبی درمی‌آورند.
آمین‌ها (مانند متیل آمین) و سود سوزآور (NaOH)، جزء ترکیب‌های بازی هستند.



♦ نیروی جاذبه بین مولکولی در مواد مولکولی که در ساختار آن ها، H متصل به یکی از اتم های O، F یا N وجود دارد، از نوع پیوند هیدروژنی است، مانند H_2O و NH_3 .

۳ تعداد مواد کووالانسی محدود است و به طور عمده از اتم های کربن و سیلیسیم تشکیل شده اند. مثال: گرافیت، الماس، Si، SiO_2 و SiC از جمله مواد کووالانسی هستند.

ماده مولکولی: HF ، C_6H_6 ، CO_2 ، C_6H_{14} ، PCl_3 ، SO_2 ، H_2O ، HCN ، F_2

ماده کووالانسی: (الماس، C(s))، (گرافیت، C(s)) و SiO_2

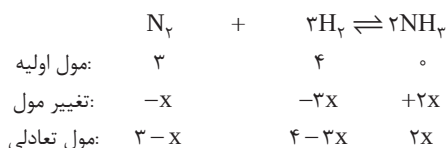
جامد یونی: NaCl و NaNO_3

پیوند هیدروژنی: ماده مولکولی دارای یکی از پیوندهای $\text{O}-\text{H}$ و $\text{H}-\text{F}$ ، $\text{N}-\text{H}$ و HF و H_2O ←



۱۰۴ - گزینه ۱

گام ۱ جدول تغییرات را رسم کرده و X (مول مصرف شده N_2) را حساب می کنیم.



N_2 مول تعادلی $2 \Rightarrow 3-x=2 \Rightarrow x=1$

گام ۲ غلظت های تعادلی مواد را در رابطه ثابت تعادل قرار می دهیم:

$$K = \frac{[\text{NH}_3]^2}{[\text{N}_2][\text{H}_2]^3} = \frac{\left(\frac{2}{5}\right)^2}{\left(\frac{2}{5}\right)\left(\frac{1}{5}\right)^3} = \frac{2}{5} \times 5^3 = 2 \times 25 = 50$$



۱۰۵ - گزینه ۳

عبارت های دوم، چهارم و پنجم درست اند.

بررسی عبارت ها:



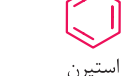
♦ فرمول پاراازایلن، C_8H_{10} و جرم مولی آن ۱۰۶ گرم بر مول است:

نکته ۱ درصد جرمی یک عنصر در ترکیب از رابطه زیر به دست می آید:

$$\begin{aligned} \text{درصد جرمی عنصر} &= \frac{\text{جرم عنصر در ۱ مول ترکیب}}{\text{جرم مولی ترکیب}} \times 100 \\ &= \frac{\text{جرم مولی اتم عنصر} \times \text{تعداد اتم عنصر}}{\text{جرم مولی ترکیب}} \times 100 \end{aligned}$$

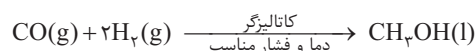
$$\text{C}_8\text{H}_{10} \text{ در } \text{C} \text{ درصد جرمی} = \frac{8 \times 12}{106} \times 100 = \frac{96}{106} \times 100 = \frac{9600}{106} \approx 90.57\%$$

♦ در هر دو مولکول پاراازایلن (C_8H_{10}) و استیرن (C_8H_8)، ۸ اتم کربن وجود دارد.

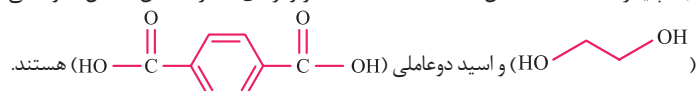


♦ اتانوتیک اسید را نمی توان به طور مستقیم از اتن تهیه کرد. اتن را باید اول به اتانول (الکل) و سپس اتانول را به اتانوتیک اسید تبدیل کرد.

♦ به درسته! البته بهتر بود طراح محترم، به فشار بالای لازم برای انجام واکنش هم اشاره می کرد.



♦ پلیمر داده شده، همان PET است که مونومرهای سازنده آن، الکل دوعاملی



با توجه به این که ΔH واکنش منفی است، واکنش مورد نظر گرماده است و در واکنش های گرماده، سطح انرژی واکنش دهنده ها بیشتر از فرآورده ها می باشد.

بررسی سایر گزینه ها: ۱ کاتالیزگر، آنتالپی واکنش و محتوای انرژی فرآورده را تغییری نمی دهد.

۲ در واکنش های گرماده، فرآورده ها از واکنش دهنده ها پایدارترند، اما کاتالیزگر ΔH واکنش را تغییر نمی دهد؛ بنابراین مقدار گرمای مبادله شده با محیط تغییری نمی کند.

۴ کاتالیزگر سرعت واکنش را افزایش می دهد، اما سطح انرژی و پایداری مواد واکنش دهنده و فرآورده را تغییر نمی دهد.



۱۰۲ - گزینه ۳

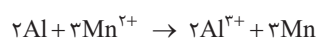
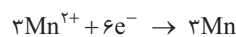
نکته سلول های گالوانی در یک نگاه!

نیم سلول آند	نیم سلول کاتد
قطب منفی	قطب مثبت
در آن نیم واکنش اکسایش صورت می گیرد.	در آن نیم واکنش کاهش صورت می گیرد.
E° آن نسبت به E° کاتد، کوچک تر است.	E° آن نسبت به E° آند، بزرگ تر است.
با گذشت زمان، غلظت کاتیون مربوط به آند در آن زیاد می شود.	با گذشت زمان، غلظت کاتیون مربوط به کاتد در آن کم می شود.
به طور معمول جرم تیغه کاهش می یابد (لاغر می شود).	به طور معمول جرم تیغه افزایش می یابد (چاق می شود).
آیون ها با عبور از دیواره متخلخل وارد می شوند.	کاتیون ها با عبور از دیواره متخلخل وارد آن می شوند.

عبارت های اول و چهارم درست اند.

بررسی عبارت ها:

♦ E° نیم سلول آلومینیم کم تر از منگنز است؛ بنابراین در سلول مورد نظر، آلومینیم نقش آند و منگنز نقش کاتد را ایفا می کند.



♦ با انجام واکنش، غلظت یون های آلومینیم افزایش و غلظت یون های منگنز کاهش می یابد.

با توجه به ضرایب مواد در واکنش، تغییرات غلظت Mn^{2+} ، $\frac{3}{2}$ برابر تغییرات غلظت Al^{3+} است؛ بنابراین شیب تغییرات غلظت یون ها قرینه یکدیگر نیست، بلکه شیب تغییرات غلظت یکی، $-\frac{3}{2}$ برابر دیگری است.

♦ در سلول های گالوانی، الکترون ها از آند به کاتد حرکت می کنند و از جرم تیغه آند (قطب منفی)، کاسته می شود.

♦ محلول منگنز (II) سولفات در نیم واکنش کاتدی شرکت می کند (یون Mn^{2+} کاهش می یابد)، هر چند محلول آلومینیم سولفات در نیم واکنش آندی نقشی ندارد (یون های Al^{3+} و SO_4^{2-} نمی توانند اکسایش یابند)، اما با توجه به معادله کلی واکنش (که احتمالاً منظور طراح هم همین بوده!)، می توان این عبارت را درست در نظر گرفت. (Al^{3+} به عنوان فرآورده در واکنش حضور دارد.)



۱۰۳ - گزینه ۱

درس نامه روش تشخیص مواد مولکولی، کووالانسی و یونی

۱ مواد یونی به طور معمول از واکنش یک فلز با نافلز یا یون های چنداتمی تشکیل می شوند.

مثال: NaCl ، MgCO_3 و NH_4NO_3 از جمله مواد یونی اند.

۲ مواد مولکولی به طور معمول از واکنش دو یا چند نافلز تشکیل می شوند.

مثال: CO_2 ، CH_4 ، PCl_3 و SO_3 از جمله مواد مولکولی اند.