

۱۴۰۱ سراسری خارج

نام درس	دهم	یازدهم	دوازدهم	ترکیبی	آسان	متوسط	سخت
ریاضیات	۶	۱۴	۱۳	۷	۲	۳۱	۷
فیزیک	۷	۹	۱۷	۲	۵	۲۲	۸
شیمی	۱۰	۷	۱۰	۳	۷	۱۸	۵

ریاضیات

۱- گزینه ۳

❖ شفاف سازی نمودار $y = 3x^2 + (2m-1)x + m + \frac{4}{3}$ در ناحیه دوم بر نیمساز آن ناحیه مماس است، یعنی معادله $3x^2 + (2m-1)x + m + \frac{4}{3} = -x$ در نقطه تماس دو نمودار، ریشه مضاعف دارد.

📖 درس نامه ۱ معادله درجه دوم $ax^2 + bx + c = 0$ وقتی ریشه مضاعف دارد که

$$\Delta = 0 \text{ باشد؛ مقدار این ریشه مضاعف هم برابر } x = -\frac{b}{2a} \text{ است.}$$

$$2 \text{ طول رأس سهمی } y = ax^2 + bx + c \text{ برابر } x = -\frac{b}{2a} \text{ است.}$$

🌱 گام معادله نیمساز ناحیه دوم، $y = -x$ است. طبق شفاف سازی، برای این که نمودار

تابع $y = 3x^2 + (2m-1)x + m + \frac{4}{3}$ بر نیمساز ناحیه دوم مماس باشد، باید معادله $3x^2 + (2m-1)x + m + \frac{4}{3} = -x$ در نقطه تماس دو نمودار، دارای ریشه مضاعف باشد.

🌱 گام $-x$ را به طرف چپ معادله می بریم و دلتای معادله حاصل را برابر صفر می گذاریم تا مقادیر m به دست آید:

$$3x^2 + (2m-1)x + x + m + \frac{4}{3} = 0 \Rightarrow 3x^2 + 2mx + m + \frac{4}{3} = 0$$

$$\Delta = 0 \Rightarrow 4m^2 - 4 \times 2(m + \frac{4}{3}) = 0 \xrightarrow{\div 4} m^2 - 2(m + \frac{4}{3}) = 0$$

$$\Rightarrow m^2 - 2m - \frac{8}{3} = 0 \Rightarrow (m-4)(m+1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} m = -1 \\ m = 4 \end{cases}$$

🌱 گام تابع درجه دوم در ناحیه دوم بر نیمساز آن مماس است، پس ریشه مضاعف معادله

$$3x^2 + 2mx + m + \frac{4}{3} = 0 \text{ باید منفی باشد (نقاطی که در ناحیه دوم هستند، طولشان}$$

منفی است).

ریشه مضاعف این معادله $x = -\frac{b}{2a} = -\frac{2m}{6} = -\frac{m}{3}$ است؛ حالا برای این که علامت آن منفی باشد، m باید مثبت شود، پس $m = 4$ قابل قبول است.

🌱 گام ضابطه سهمی $y = 3x^2 + (2m-1)x + m + \frac{4}{3}$ به ازای $m = 4$ به این صورت

$$y = 3x^2 + 7x + \frac{16}{3}$$

می شود:

مسئله طول رأس این سهمی را می خواهد که طبق مورد (۲) درس نامه برابر می شود با:

$$x_{\text{رأس}} = -\frac{b}{2a} = -\frac{7}{6}$$

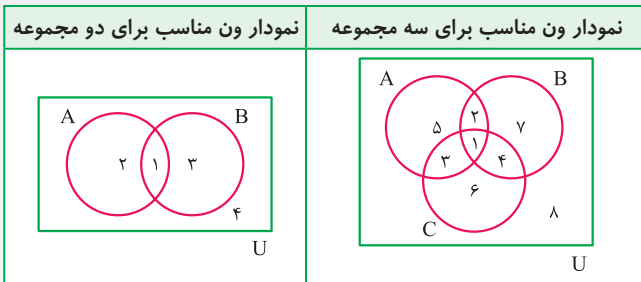
🗨 مشاوره معادله درجه دوم و تابع درجه دوم (سهمی)، جزء پای ثابت های کنکور سراسری هستند و خیلی وقت ها با مباحث دیگر هم ترکیب می شوند. به همین خاطر پیشنهاد می کنیم خیلی خوب این مباحث را بخوانید.

۲- گزینه ۴

📖 درس نامه ۱ بعضی وقت ها یک عبارت مجموعه ای (نسبتاً) طولانی به ما می دهند و می گویند، این عبارت با کدام مجموعه برابر است (یا کدام گزینه درست است).

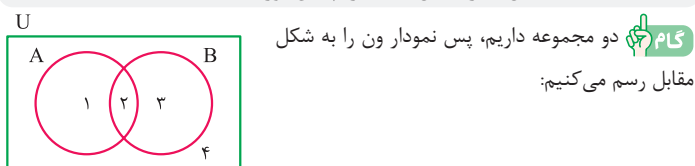
برای حل کردن این سؤالات کارهای زیر را انجام می دهیم:

الف) می بینیم عبارت صورت سؤال چند مجموعه دارد (معمولاً ۲ تا ۳ تا). در ادامه مطابق جدول زیر نمودار ون مناسب را می کشیم و قسمت های مختلفش را شماره گذاری می کنیم:



ب) حالا عبارت صورت سؤال را بر حسب شماره ها بازنویسی می کنیم، مثلاً در حالتی که سه مجموعه داشته باشیم، طبق جدول بالا به جای A ، مجموعه $\{1, 2, 3, 5\}$ و در حالتی که دو مجموعه داشته باشیم به جای A ، $\{1, 2\}$ را می نویسیم.

۲) حواستان باشد اگر در سؤال شرطی برای مجموعه ها داشته باشیم، باید نمودار ون را طوری رسم کنیم که شرط رعایت شود، برای مثال اگر در سؤالی دو مجموعه داشته باشیم و سؤال بخواهد $A \subseteq B$ باشد، باید کل A را داخل B بگذاریم؛ این جوری:



🌱 گام حالا تساوی $A' \cup B = A' \cap B'$ را بر حسب شماره ناحیه ها می نویسیم:

$$A' \cup B = A' \cap B' \Rightarrow \{3, 4\} \cup \{2, 3\} = \{3, 4\} \cap \{1, 4\} \Rightarrow \{2, 3, 4\} = \{4\} (*)$$

🌱 گام از تساوی (*) نتیجه می گیریم که دو ناحیه ۲ و ۳ نباید وجود داشته باشند (تهی باشند). حالا خوب به نمودار ون در گام (۱) نگاه کنید. همان طور که می بینید با تهی شدن ناحیه های ۲ و ۳، مجموعه B تهی می شود، پس می توانیم بگوییم:

🗨 مشاوره جبر مجموعه ها تقریباً پای ثابت همه کنکورهای سراسری است که سؤالات آن به راحتی با روش شماره گذاری ناحیه ها حل می شوند، پس پیشنهاد می کنم روی این مبحث وقت کافی بگذارید.

۳- گزینه ۲

📖 درس نامه ۱ جدول ارزش گزاره، 2^n سطر (حالت) دارد، برای مثال جدول ارزش گزاره p, q و r $2^3 = 8$ سطر (حالت) دارد؛ ببینید:

p	q	r
د	د	د
د	د	ن
د	ن	د
د	ن	ن
ن	د	د
ن	د	ن
ن	ن	د
ن	ن	ن



۲ جدول ارزش گزاره‌های $p \wedge q$ (همون p و q) و $p \Rightarrow q$ (همون p انگه q) به صورت مقابل است:

p	q	$p \wedge q$	$p \Rightarrow q$
د	د	د	د
د	ن	ن	ن
ن	د	ن	د
ن	ن	ن	د

روش گام اول به کمک درسنامه جدول ارزش گزاره $(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow r)$ را رسم می‌کنیم:

p	q	r	$p \Rightarrow q$	$q \Rightarrow r$	$(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow r)$
د	د	د	د	د	د
د	د	ن	د	ن	ن
د	ن	د	ن	د	ن
د	ن	ن	ن	د	ن
ن	د	د	د	د	د
ن	د	ن	د	ن	ن
ن	ن	د	د	د	د
ن	ن	ن	د	د	د

گام با توجه به جدول بالا، ارزش گزاره $(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow r)$ در حالت گفته شده در (۲) p نادرست، q نادرست، r نادرست درست است.

روش همه گزینه‌ها را بررسی می‌کنیم:

$$① (p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow r) \equiv \text{د} \Rightarrow (ن \wedge د) \equiv \text{ن} : \times$$

$$② (p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow r) \equiv \text{د} \Rightarrow (د \wedge د) \equiv \text{د} : \checkmark$$

همین‌جا گزینه درست خودش را لو داد، اما اگر بررسی سایر گزینه‌ها را هم می‌خواهید؛ خدمت شما:

$$③ (p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow r) \equiv \text{د} \Rightarrow (د \wedge ن) \equiv \text{ن} : \times$$

$$④ (p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow r) \equiv \text{د} \Rightarrow (د \wedge ن) \equiv \text{ن} : \times$$

مشاوره «ترکیب گزاره‌ها» جزء تیپ سؤالات رایج کنکور سراسری است که به راحتی می‌توانید با رسم جدول ارزش گزاره‌ها به آن‌ها پاسخ دهید.

۴- گزینه ۴

استراتژی با توجه به این‌که سه عدد a ، α و β تشکیل دنباله هندسی می‌دهند، متوجه می‌شویم که $\alpha\beta = a^2$. حالا کافی است به جای $\alpha\beta$ قرار دهیم $\frac{C}{A} = 2a - 1$ تا مقدار a حاصل شود.

درس‌نامه ۱ اگر x ، y و z به ترتیب سه جمله متوالی یک دنباله هندسی باشند، $xz = y^2$ می‌شود. ۲ اگر α و β ریشه‌های معادله درجه دوم $Ax^2 + Bx + C = 0$ باشند، شرط $\Delta > 0$ باشند، آن‌گاه جمع و ضرب ریشه‌های این معادله از رابطه‌های زیر محاسبه می‌شوند:

$$S = \alpha + \beta = -\frac{B}{A} \quad \text{و} \quad P = \alpha\beta = \frac{C}{A}$$

گام سه عدد a ، α و β تشکیل یک دنباله هندسی می‌دهند، پس طبق مورد (۱) $\alpha\beta = a^2 \Rightarrow P = a^2$

گام P را از معادله درجه دوم $\frac{1}{A}x^2 + \frac{2(a+1)}{B}x + \frac{2a-1}{C} = 0$ حساب می‌کنیم:

$$P = \frac{C}{A} = \frac{2a-1}{1} = 2a-1$$

حالا با جای گذاری $P = 2a - 1$ در معادله $\alpha\beta = a^2$ ، مقدار a را محاسبه می‌کنیم:

$$2a - 1 = a^2 \Rightarrow a^2 - 2a + 1 = 0 \Rightarrow (a-1)^2 = 0 \Rightarrow a = 1$$

مشاوره در کنکورهای سراسری سال‌های اخیر، سؤالات ترکیبی زیادی مطرح می‌شود که صرفاً دانستن مفاهیم اولیه فصل‌ها برای پاسخ‌دادن به آن‌ها کافی است، پس پیشنهاد می‌کنیم هیچ فصلی را به طور کامل حذف نکنید و مفاهیم اولیه همه فصل‌ها را بلد باشید.

۵- گزینه ۳

استراتژی کافی است با حل دو معادله $\alpha + \beta = 1$ و $\alpha\beta = -2$ ، مقدار α یا β را به دست آورید، سپس با جای گذاری آن در معادله $4x^2 + kx^2 - 9x - 2 = 0$ ، مقدار k به دست می‌آید.

روش گام با توجه به دو معادله $\alpha + \beta = 1$ و $\alpha\beta = -2$ ، به دنبال دو عدد (یعنی α و β) هستیم که جمعشان $+1$ و ضربشان -2 شود که این دو عدد $+2$ و -1 هستند، پس یکی از α و β برابر $+2$ و دیگری برابر -1 است.

گام α و β ریشه‌های معادله $4x^2 + kx^2 - 9x - 2 = 0$ هستند، پس می‌توانیم به جای x و α را جای گذاری کنیم، ما در این‌جا به جای x قرار می‌دهیم -1 :

$$4x^2 + kx^2 - 9x - 2 = 0 \xrightarrow{x=-1} -4 + k + 9 - 2 = 0 \Rightarrow k = -3$$

(البته با جای گذاری $x = +2$ هم به همین مقدار می‌رسیدیم.)

روش از معادله $\alpha\beta = -2$ نتیجه می‌گیریم $\beta = -\frac{2}{\alpha}$ است، حالا با جای گذاری $\beta = -\frac{2}{\alpha}$ در معادله $\alpha + \beta = 1$ ، مقادیر قابل قبول برای α به دست می‌آیند:

$$\alpha + \beta = 1 \xrightarrow{\beta = -\frac{2}{\alpha}} \alpha - \frac{2}{\alpha} = 1 \xrightarrow{\times \alpha} \alpha^2 - 2 = \alpha$$

$$\Rightarrow \alpha^2 - \alpha - 2 = 0 \Rightarrow (\alpha - 2)(\alpha + 1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \alpha = +2 \\ \alpha = -1 \end{cases}$$

حالا مثل راه اول، با جای گذاری -1 یا $+2$ در معادله $4x^2 + kx^2 - 9x - 2 = 0$ مقدار k به دست می‌آید.

۶- گزینه ۲

استراتژی اول رادیکال را از بین ببرید و آن را به قدرمطلق تبدیل کنید. با این کار ضابطه تابع، قدرمطلق می‌شود که می‌توانید آن را با بازه‌بندی تبدیل به تابعی چندضابطه‌ای کرده و سپس آن را رسم کنید. پس از رسم تابع، مشخص می‌شود که تابع در کدام بازه نزولی است و به دست آوردن ضابطه وارون تابع در آن بازه هم بسیار ساده است.

درس‌نامه

$$\sqrt{0^2} = |0|$$

$$|0| = \begin{cases} 0 & 0 \geq 0 \\ -0 & 0 < 0 \end{cases}$$

می‌توانیم یک تابع قدرمطلق را با روش بازه‌بندی تبدیل به تابعی چندضابطه‌ای کنیم، به این صورت که ریشه‌های عبارت‌های داخل قدرمطلق‌ها را به دست می‌آوریم و با کمک آن‌ها دامنه را بازه‌بندی می‌کنیم. برای مثال در تابع $f(x) = |2x + 8| - |x - 3|$ ، ریشه‌های عبارت‌های داخل قدرمطلق $x = 3$ و $x = -4$ هستند، حالا اگر این دو عدد را روی محور x در نظر بگیریم:



واضح است که اعداد حقیقی به سه قسمت $x \leq 3$ ، $-4 \leq x < 3$ و $x < -4$ تقسیم می‌شوند، حالا داریم:

$$f(x) = \begin{cases} \text{مثبت} & \text{مثبت} \\ |2x+8| - |x-3| = 2x+8 - (x-3) & x \leq -4 \\ \text{مثبت} & \text{منفی} \\ |2x+8| - |x-3| = 2x+8 + (x-3) & -4 \leq x < 3 \\ \text{منفی} & \text{منفی} \\ |2x+8| - |x-3| = -(2x+8) + (x-3) & x < -4 \end{cases}$$



گام ۴ در قسمت (۳) درسنامه گفتیم محل تقاطع یک تابع و وارون آن روی نیمساز ناحیه اول و سوم قرار دارد، ما طول نقطه تلاقی را $x=2$ به دست آوردیم، پس عرض آن هم $y=2$ می‌شود. در آخر فاصله نقطه $(2,2)$ از مبدأ مختصات، یعنی $(0,0)$ را حساب می‌کنیم:

$$\sqrt{(2-0)^2 + (2-0)^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$

۸- گزینه ۲

درسنامه ۱ اگر x واسطه حسابی y و z باشد، $y+z=2x$ می‌شود.

۲ چندتا از قوانین لگاریتم را ببینید:

الف $\log_c a + \log_c b = \log_c ab$

ب $\log_c a = \log_c b \Rightarrow a = b$

پ $\log_b a^m = \frac{m}{n} \log_b a$

روش گزینه‌ها را بررسی می‌کنیم:

۱ اگر $\log \frac{a+3b}{4}$ واسطه حسابی $\log 3b$ و $\log a$ باشد، داریم:

$$\log a + \log 3b = 2 \log \frac{a+3b}{4}$$

$$\Rightarrow \log 3ab = \log \left(\frac{a+3b}{4} \right)^2 \Rightarrow 3ab = \left(\frac{a+3b}{4} \right)^2$$

$$\Rightarrow 3ab = \frac{a^2 + 6ab + 9b^2}{16} \Rightarrow 48ab = a^2 + 6ab + 9b^2$$

$$\Rightarrow a^2 + 9b^2 = 42ab \Rightarrow \text{خ}$$

$$\log a + \log b = 2 \log \left(\frac{a+3b}{4} \right)$$

$$\Rightarrow \log ab = \log \left(\frac{a+3b}{4} \right)^2 \Rightarrow ab = \left(\frac{a+3b}{4} \right)^2$$

$$\Rightarrow ab = \frac{a^2 + 6ab + 9b^2}{16} \Rightarrow 16ab = a^2 + 6ab + 9b^2$$

$$\Rightarrow a^2 + 9b^2 = 10ab \Rightarrow \text{✓}$$

همین‌جا گزینه درست مشخص شد، اما اگر بررسی سایر گزینه‌ها را هم می‌خواهید؛ خدمت شما:

۳ $\log \sqrt{a} + \log \sqrt{b} = 2 \log \frac{a+3b}{4} \Rightarrow \log \sqrt{ab} = \log \left(\frac{a+3b}{4} \right)^2$

$$\Rightarrow \sqrt{ab} = \frac{a^2 + 6ab + 9b^2}{16} \Rightarrow 16\sqrt{ab} = a^2 + 6ab + 9b^2$$

$$\Rightarrow a^2 + 9b^2 = 16\sqrt{ab} - 6ab \Rightarrow \text{خ}$$

$$\log \sqrt{a} + \log \sqrt{3b} = 2 \log \frac{a+3b}{4}$$

$$\Rightarrow \log \sqrt{3ab} = \log \left(\frac{a+3b}{4} \right)^2 \Rightarrow \sqrt{3ab} = \left(\frac{a+3b}{4} \right)^2$$

$$\Rightarrow \sqrt{3ab} = \frac{a^2 + 6ab + 9b^2}{16} \Rightarrow 16\sqrt{3ab} = a^2 + 6ab + 9b^2$$

$$\Rightarrow a^2 + 9b^2 = 16\sqrt{3ab} - 6ab \Rightarrow \text{خ}$$

روش سؤال را با یک روش سریع‌تر و خلاصانه هم می‌توانیم حل کنیم. با دیدن

$$a^2 + 9b^2 = 10ab \text{ در } a^2 + 9b^2 = 10ab \text{ و } a+3b \text{ در } \log \frac{a+3b}{4} \text{ به یاد } (a+3b)^2 \text{ می‌افتیم:}$$

$$(a+3b)^2 = a^2 + 6ab + 9b^2 \Rightarrow a^2 + 9b^2 = (a+3b)^2 - 6ab$$

گام ۴ حالا می‌توانیم به جای $a^2 + 9b^2 = 10ab$ در تساوی $(a+3b)^2 - 6ab$ را جای گذاری کنیم:

$$a^2 + 9b^2 = 10ab \Rightarrow (a+3b)^2 - 6ab = 10ab$$

$$\Rightarrow (a+3b)^2 = 16ab \Rightarrow \frac{(a+3b)^2}{16} = ab \Rightarrow \left(\frac{a+3b}{4} \right)^2 = ab$$

در ادامه از دو طرف تساوی بالا لگاریتم می‌گیریم:

$$\log \left(\frac{a+3b}{4} \right)^2 = \log ab \Rightarrow 2 \log \frac{a+3b}{4} = \log a + \log b$$

بنابراین $\log \frac{a+3b}{4}$ واسطه حسابی $\log a$ و $\log b$ می‌شود.

۴ برای به دست آوردن ضابطه وارون یک تابع، ابتدا جای x و y را عوض و سپس y را تنها می‌کنیم، برای مثال:

$$f(x) = x^2 + 2 \Rightarrow y = x^2 + 2$$

$$\xrightarrow{\text{جای } x \text{ و } y \text{ را عوض کن}} x = y^2 + 2 \Rightarrow y^2 = x - 2$$

$$\Rightarrow y = \sqrt{x-2} \Rightarrow f^{-1}(x) = \sqrt{x-2}$$

۵ دامنه تابع f برابر برد f^{-1} و برد تابع f برابر دامنه f^{-1} است.

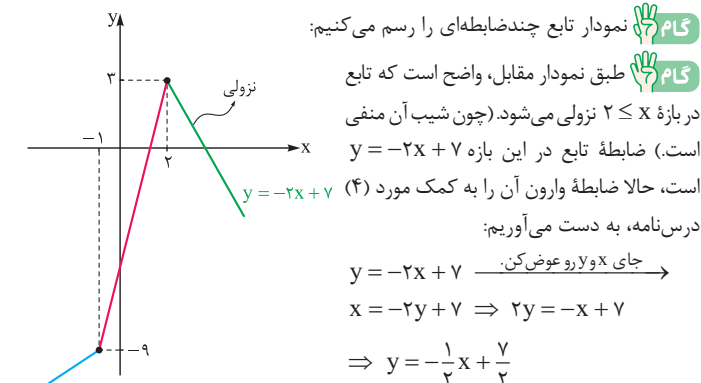
گام ۴ به جای $\sqrt{x+1}$ می‌نویسیم $|x+1|$ تا ضابطه تابع به این صورت دربیاید:

$$y = \sqrt{x+1} \Rightarrow |x+1| = |3x-6| \Rightarrow x+1 = 3x-6 \text{ یا } x+1 = -(3x-6)$$

گام ۴ با استفاده از بازه‌بندی، قدرمطلق‌ها را از بین می‌بریم تا به تابعی چندضابطه‌ای برسیم: (ریشه‌های عبارت‌های داخل قدرمطلق‌ها $x = -1$ و $x = +2$ هستند، پس بازه‌های ما $x \geq 2$ ، $-1 \leq x < 2$ و $x < -1$ می‌شوند.)

$$y = \begin{cases} x+1-(3x-6) & x \geq 2 \\ x+1+(3x-6) & -1 \leq x < 2 \\ -(x+1)+(3x-6) & x < -1 \end{cases} \Rightarrow y = \begin{cases} -2x+7 & x \geq 2 \\ 4x-5 & -1 \leq x < 2 \\ 2x-7 & x < -1 \end{cases}$$

گام ۴ نمودار تابع چندضابطه‌ای را رسم می‌کنیم:



گام ۴ با توجه به گزینه‌ها واضح است که جواب (۲) می‌شود، اما بد نیست دامنه تابع را نیز به دست آوریم. طبق نمودار تابع، برد تابع در بازه‌ای که نزولی است، $[-\infty, +3]$ (یا همون $y \leq 3$) می‌شود، پس دامنه وارون تابع $x \leq 3$ است. (طبق مورد ۵ درسنامه)

تیزبازی اصلاً نیازی به رسم تابع چندضابطه‌ای نبود، چون واضح است خطی نزولی می‌شود که شیب آن منفی باشد و فقط شیب خط $y = -2x + 7$ منفی است.

۷- گزینه ۳

استراتژی کافی است معادله $x^3 + 3x - 12 = x$ را حل کنید تا جواب حاصل شود. (دلیلش رو توی مورد (۳) درسنامه می‌بینید.)

درسنامه ۱ اگر f و g دو تابع صعودی باشند، $f+g$ نیز صعودی می‌شود.

۲ اگر $f' > 0$ باشد، f تابعی صعودی اکید می‌شود. **۳** اگر f تابعی اکیداً صعودی باشد، نقاط تلاقی f^{-1} و f روی نیمساز ناحیه اول و سوم یعنی خط $y=x$ قرار دارد، پس برای پیدا کردن نقاط تلاقی f و f^{-1} کافی است معادله $f(x) = x$ را حل کنیم.

۴ فاصله دو نقطه $A(x_1, y_1)$ و $B(x_2, y_2)$ برابر است با:

$$AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

گام ۴ ابتدا از y مشتق می‌گیریم:

$$y = x^3 + 3x - 12 \Rightarrow y' = 3x^2 + 3$$

همواره مثبت

مشتق تابع y همواره مثبت است، پس طبق مورد (۲) درسنامه، y تابعی صعودی اکید می‌شود. (البته می‌توانستیم بگوییم x^3 و $3x - 12$ دو تابع صعودی‌اند، پس طبق مورد (۱) درسنامه جمع آن‌ها، یعنی $x^3 + 3x - 12$ هم تابعی صعودی می‌شود.)

گام ۴ حالا که فهمیدیم تابع ما صعودی اکید است، با توجه به مورد (۳) درسنامه، برای پیدا کردن نقطه تلاقی تابع با وارونش، باید معادله $x^3 + 3x - 12 = x$ را حل کنیم:

$$x^3 + 3x - 12 = x \Rightarrow x^3 + 2x - 12 = 0$$

حل تشریحی این معادله ساده نیست، بنابراین سعی می‌کنیم جواب این معادله را حدس بزنیم. با کمی سعی و خطا می‌بینیم که $x=2$ در این معادله صدق می‌کند.



گزینه ۲ - ۱۱

درس نامه

$$\sin 2x = 2 \sin x \cdot \cos x, \quad \sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

نسبت‌های مثلثاتی مجموع و تفاضل دو کمان به صورت زیرند:

$$\sin(x \pm y) = \sin x \cdot \cos y \pm \cos x \cdot \sin y$$

$$\cos(x \pm y) = \cos x \cdot \cos y \mp \sin x \cdot \sin y$$

جواب معادلات مثلثاتی خاص به صورت زیر است:

$$\diamond \sin x = 1 \Rightarrow x = 2k\pi + \frac{\pi}{2}$$

$$\diamond \sin x = -1 \Rightarrow x = 2k\pi - \frac{\pi}{2} \text{ یا } 2k\pi + \frac{3\pi}{2}$$

$$\diamond \sin x = \pm 1 \Rightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{2}$$

$$\diamond \sin x = 0 \Rightarrow x = k\pi$$

$$\diamond \cos x = 1 \Rightarrow x = 2k\pi$$

$$\diamond \cos x = -1 \Rightarrow x = 2k\pi + \pi$$

$$\diamond \cos x = 0 \Rightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{2}$$

روش گام ۱: معادله را با کمک نسبت‌های مثلثاتی مجموع و تفاضل زوایا (مورد ۱) و

(۲) درس‌نامه ساده‌تر می‌نویسیم:

$$\sin(x + \frac{\pi}{4}) = \sin x \cdot \cos \frac{\pi}{4} + \cos x \cdot \sin \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} (\sin x + \cos x)$$

$$\cos(x - \frac{\pi}{4}) = \cos x \cdot \cos \frac{\pi}{4} + \sin x \cdot \sin \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} (\sin x + \cos x)$$

با جای‌گذاری موارد بالا در رابطه $\sin(x + \frac{\pi}{4}) \cos(x - \frac{\pi}{4}) = 1$ داریم:

$$\frac{\sqrt{2}}{2} (\sin x + \cos x) \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} (\sin x + \cos x) = 1$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} (\sin x + \cos x)^2 = 1 \Rightarrow (\sin x + \cos x)^2 = 2$$

$$\Rightarrow \underbrace{\sin^2 x + \cos^2 x}_1 + \underbrace{2 \sin x \cdot \cos x}_{\sin 2x} = 2 \Rightarrow \sin 2x = 1$$

گام ۲: حالا با توجه به مورد (۳) درس‌نامه داریم:

$$\sin 2x = 1 \Rightarrow 2x = 2k\pi + \frac{\pi}{2} \Rightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{4} \xrightarrow[k=0,1]{x \in [0, 2\pi]} x = \frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}$$

بنابراین مجموع جواب‌ها برابر می‌شود با:

$$\frac{\pi}{4} + \frac{5\pi}{4} = \frac{6\pi}{4} = \frac{3\pi}{2}$$

روش گام ۲: می‌دانیم $\cos(\alpha) = \cos(-\alpha)$ است، پس:

$$\cos(x - \frac{\pi}{4}) = \cos(\frac{\pi}{4} - x)$$

بنابراین معادله $\sin(x + \frac{\pi}{4}) \cos(x - \frac{\pi}{4}) = 1$ به این صورت در می‌آید:

$$\sin(x + \frac{\pi}{4}) \cos(\frac{\pi}{4} - x) = 1 (*)$$

نکته ★ اگر 90° یا $\frac{\pi}{2}$ باشد، در این صورت:

$$\sin \alpha = \cos \beta \text{ و } \tan \alpha = \cot \beta$$

گام ۳: حالا با کمی دقت متوجه می‌شویم که $(x + \frac{\pi}{4}) + (\frac{\pi}{4} - x) = \frac{\pi}{2}$ ، پس می‌توانیم

به جای $\cos(\frac{\pi}{4} - x)$ در معادله (*) بنویسیم:

$$\sin(x + \frac{\pi}{4}) \cdot \sin(x + \frac{\pi}{4}) = 1 \Rightarrow \sin^2(x + \frac{\pi}{4}) = 1 \Rightarrow \sin(x + \frac{\pi}{4}) = \pm 1$$

گام ۴: حالا به کمک مورد (۳) درس‌نامه داریم:

$$\sin(x + \frac{\pi}{4}) = \pm 1 \Rightarrow x + \frac{\pi}{4} = k\pi + \frac{\pi}{2} \Rightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{4}$$

$$\xrightarrow[k=0,1]{x \in [0, 2\pi]} \frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}$$

تیزبازی

$a = 9$ و $b = 1$ در معادله $a^2 + 9b^2 = 10ab$ صدق می‌کند که به ازای آن‌ها، $\log \frac{a+9b}{9} = \log 3$ می‌شود. حالا با جای‌گذاری $a = 9$ و $b = 1$ در گزینه‌ها، فقط درست می‌شود:

$$\log a = \log 9 \Rightarrow \log a + \log b = \log 9 + \log 1 = \log 9 = \log 3^2 = 2 \log 3$$



گزینه ۴ - ۹

استراتژی اول مقدار $\sin x$ را از معادله $\frac{1 - \sin x}{1 + \sin x} = 4$ به دست می‌آوریم. بعد با توجه به رابطه $\sin x = \frac{2 \tan \frac{x}{2}}{1 + \tan^2 \frac{x}{2}}$ و حل معادله درجه دوم، مقدار $\tan \frac{x}{2}$ را محاسبه می‌کنیم.

درس نامه $\sin x$ را می‌توانیم به کمک رابطه زیر بر حسب $\tan \frac{x}{2}$ بنویسیم:

$$\sin x = \frac{2 \tan \frac{x}{2}}{1 + \tan^2 \frac{x}{2}}$$

گام ۱: مقدار $\sin x$ را محاسبه می‌کنیم:

$$\frac{1 - \sin x}{1 + \sin x} = 4 \Rightarrow 1 - \sin x = 4 + 4 \sin x \Rightarrow -3 = 5 \sin x \Rightarrow \sin x = -\frac{3}{5}$$

گام ۲: حالا از فرمول درس‌نامه کمک می‌گیریم:

$$\sin x = \frac{2 \tan \frac{x}{2}}{1 + \tan^2 \frac{x}{2}} \Rightarrow -\frac{3}{5} = \frac{2 \tan \frac{x}{2}}{1 + \tan^2 \frac{x}{2}} \Rightarrow -3 - 3 \tan^2 \frac{x}{2} = 10 \tan \frac{x}{2}$$

$$\Rightarrow 3 \tan^2 \frac{x}{2} + 10 \tan \frac{x}{2} + 3 = 0 \xrightarrow{\tan \frac{x}{2} = t} 3t^2 + 10t + 3 = 0$$

ریشه‌های این معادله را به کمک دلتا محاسبه می‌کنیم:

$$t = \frac{-10 \pm \sqrt{10^2 - 4(3)(3)}}{2(3)} = \frac{-10 \pm 8}{6} \Rightarrow \begin{cases} t = -3 \\ t = -\frac{1}{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \tan \frac{x}{2} = -3 \\ \tan \frac{x}{2} = -\frac{1}{3} \end{cases}$$

مقدار صحیح $\tan \frac{x}{2}$ را می‌خواهیم که برابر -3 می‌شود.

مشاوره یادگرفتن نسبت‌های مثلثاتی دوآلفایی و نسبت‌های مجموع و تفاضل دو کمان برای حل سؤالات مثلثات کنکور الزامی است.



گزینه ۱ - ۱۰

درس نامه در توابع مثلثاتی به شکل $y = a \sin x + b$ یا $y = a \cos x + b$ داریم:

$$\text{الف) } \max = b + |a| \quad \text{ب) } \min = b - |a| \quad \text{پ) } b = \frac{\min + \max}{2}$$

گام ۱: با توجه به نمودار تابع مثلثاتی، حداکثر مقدار تابع (max) برابر ۳ و حداقل مقدار تابع (min) برابر -7 است، پس با توجه به مورد (پ) درس‌نامه داریم:

$$b = \frac{\min + \max}{2} = \frac{-7 + 3}{2} = -2$$

گام ۲: همان‌طور که می‌بینید، نمودار، محور y ها را در نقطه‌ای به عرض ۳ قطع می‌کند، پس $f(0) = 3$ است:

$$f(x) = a \cos x + b \xrightarrow{f(0)=3} 3 = a \cos 0 - 2 \Rightarrow 3 = a - 2 \Rightarrow a = 5$$

بنابراین ضابطه تابع به این صورت شد:

$$f(x) = 5 \cos x - 2$$

گام ۳: حالا $f(\frac{\pi}{3})$ را محاسبه می‌کنیم:

$$f(\frac{\pi}{3}) = 5 \cos \frac{\pi}{3} - 2 = 5 \times \frac{1}{2} - 2 = \frac{5}{2} - 2 = \frac{1}{2}$$



$$f(0) = |b - 0| = |b|$$

گام ۳ مقدار f در $x = 0$ برابر است با:

برای این که حد راست با مقدار f در $x = 0$ برابر باشد، باید $|b| = \frac{1}{4b}$ باشد.

$|b|$ مثبت است، پس $\frac{1}{4b}$ هم باید مثبت باشد که نتیجه می‌دهد $b > 0$:

$$\frac{1}{4b} = |b| \xrightarrow{b > 0 \Rightarrow |b| = b} \frac{1}{4b} = b \Rightarrow b^2 = \frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow b = \pm \frac{1}{2} \xrightarrow{b > 0} b = \frac{1}{2}$$

گام ۴ بنابراین مقدار f و حد راست آن در $x = 0$ برابر $\frac{1}{2}$ است، پس حد چپ f در $x = 0$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \frac{1}{2} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0^-} [x] - 2a = \frac{1}{2} \quad \text{نیز باید } \frac{1}{2} \text{ شود:}$$

مقدار $[x]$ در $x \rightarrow 0^-$ برابر -1 است، با جای‌گذاری داریم:

$$-1 - 2a = \frac{1}{2} \Rightarrow -2a = \frac{3}{2} \Rightarrow a = -\frac{3}{4}$$

بنابراین $b - a = \frac{1}{2} - (-\frac{3}{4}) = \frac{5}{4}$ می‌شود.

۱۴- گزینه ۴

استراتژی فرض کنید خارج‌قسمت $q(x)$ است و الگوریتم تقسیم را بنویسید. حالا با

جای‌گذاری $x = 1$ و $x = -1$ ، مقادیر $q(1)$ و $q(-1)$ به دست می‌آیند که در آخر با بررسی گزینه‌ها سؤال حل می‌شود.

درس‌نامه اگر چندجمله‌ای $p(x)$ را بر $f(x)$ تقسیم کنیم و خارج‌قسمت و

باقی‌مانده را به ترتیب با $q(x)$ و $r(x)$ نمایش دهیم، الگوریتم تقسیم به صورت زیر می‌شود:

$$\underbrace{p(x)}_{\text{مقسم}} = \underbrace{f(x)}_{\text{مقسم‌علیه}} \underbrace{q(x)}_{\text{خارج‌قسمت}} + \underbrace{r(x)}_{\text{باقی‌مانده}}$$

گام ۱ خارج‌قسمت را با $q(x)$ نمایش داده و الگوریتم تقسیم را به کمک درس‌نامه می‌نویسیم:

$$f(x) = \underbrace{(x^2 + 4x + 5)}_{\text{باقی‌مانده}} \underbrace{q(x)}_{\text{خارج‌قسمت}} + \underbrace{x + 2}_{\text{مقسم}} \quad (*)$$

گام ۲ مقادیر $f(1)$ و $f(-1)$ را داریم (به ترتیب ۱۳ و ۱۱)، پس در (*) به جای x قرار

می‌دهیم ۱ و -1 تا مقادیر $q(1)$ و $q(-1)$ حاصل شود:

$$\begin{cases} x = 1 \Rightarrow \underbrace{f(1)}_{13} = 1 \cdot q(1) + 3 \Rightarrow 10 = 1 \cdot q(1) \Rightarrow q(1) = 1 \\ x = -1 \Rightarrow \underbrace{f(-1)}_{11} = 2q(-1) + 1 \Rightarrow 10 = 2q(-1) \Rightarrow q(-1) = 5 \end{cases}$$

گام ۳ با توجه به این که $q(1) = 1$ و $q(-1) = 5$ است، ضابطه خارج‌قسمت باید

به گونه‌ای باشد که به ازای $x = 1$ برابر ۱ و به ازای $x = -1$ برابر ۵ شود، حالا گزینه‌ها را بررسی می‌کنیم:

$$\begin{array}{ll} \text{① } -x + 2 & \begin{cases} x=1 \rightarrow 1 \checkmark \\ x=-1 \rightarrow 3 \times \end{cases} \\ \text{② } 2x - 1 & \begin{cases} x=1 \rightarrow 1 \checkmark \\ x=-1 \rightarrow -3 \times \end{cases} \\ \text{③ } 3x - 2 & \begin{cases} x=1 \rightarrow 1 \checkmark \\ x=-1 \rightarrow -5 \times \end{cases} \\ \text{④ } -2x + 3 & \begin{cases} x=1 \rightarrow 1 \checkmark \\ x=-1 \rightarrow 5 \checkmark \end{cases} \end{array}$$

بنابراین جواب ④ می‌شود.

۱۵- گزینه ۱

استراتژی اول باید چند دسته دیگر را هم بنویسیم؛ بعد با پیدا کردن یک الگو

می‌توانیم اعضای دسته سیزدهم را مشخص کنیم و میانه آن‌ها را به دست آوریم.

درس‌نامه اگر تعدادی عدد متوالی داشته باشیم، میانه برابر میانگین عدد اول و عدد

$$\frac{7 + 79}{2} = 43 \quad \text{آخر است، برای مثال میانه اعداد ۷ و ۸ و ۹ و ... و ۷۹ برابر است با:}$$

بنابراین مجموع جواب‌ها برابر می‌شود با: $\frac{\pi}{4} + \frac{5\pi}{4} = \frac{6\pi}{4} = \frac{3\pi}{2}$

مشاوره معادله مثلثاتی جزء پای ثابت‌های کنکور سراسری است که معمولاً با نسبت‌های دوآلفایی و نسبت‌های مجموع و تفاضل دو کمان ترکیب می‌شود.

۱۲- گزینه ۳

استراتژی چون $x \rightarrow 0^-$ ، پس کافی است ابتدا از هم‌ارزی مثلثاتی و سپس از قاعده هوییتال استفاده کنید.

درس‌نامه ۱ اگر $x \rightarrow 0$ باشد، داریم:

$$\sin x \approx x, \quad \cos x \approx 1 - \frac{x^2}{2}, \quad \tan x \approx x$$

۲ اگر حد تابع کسری $\frac{f}{g}$ در $x \rightarrow a$ برابر $\frac{0}{0}$ شود، می‌توانیم از قاعده هوییتال استفاده کنیم، یعنی اول از صورت و مخرج مشتق بگیریم، بعد حاصل حد را به دست آوریم:

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{0}{0} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} \xrightarrow{\text{Hop}} \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

۳ مشتق توابع به شکل $\sqrt{u}$ برابر $\frac{u'}{2\sqrt{u}}$ می‌شود.

گام ۱ با جای‌گذاری $x = 0$ به $\frac{0}{0}$ می‌رسیم، پس باید رفع ابهام کنیم. طبق مورد (۱)

درس‌نامه می‌توانیم از هم‌ارزی‌های مثلثاتی کمک بگیریم تا $\sqrt{2 - 2\cos x}$ را ساده‌تر کنیم:

$$\sqrt{2 - 2\cos x} = \sqrt{2 - 2(1 - \frac{x^2}{2})} = \sqrt{x^2} = |x| \xrightarrow{x \rightarrow 0^- \text{ منفی است.}} -x$$

گام ۲ حالا به جای $\sqrt{2 - 2\cos x}$ قرار می‌دهیم $-x$ و هوییتال می‌زنیم:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sqrt{2 - 2\cos x} - \sqrt{2 - 2\cos x}}{-x} & \xrightarrow{\text{Hop}} \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\frac{-3}{2\sqrt{2 - 2\cos x}} - \frac{-5}{2\sqrt{2 - 2\cos x}}}{-1} \\ & = \frac{\frac{-3}{2\sqrt{2}} + \frac{5}{2\sqrt{2}}}{-1} = \frac{\frac{2}{2\sqrt{2}}}{-1} = -\frac{1}{\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{aligned}$$

مشاوره رفع ابهام $\frac{0}{0}$ جزء پای ثابت‌های کنکورهای سراسری است که از آن به طور

مستقیم یا غیرمستقیم سؤال طرح می‌شود. برای حل سریع سؤالات $\frac{0}{0}$ ، یادگرفتن هم‌ارزی‌های مثلثاتی و قاعده هوییتال الزامی است.

۱۳- گزینه ۳

درس‌نامه ۱ برای این که تابع f در $x = a$ پیوسته باشد باید حد راست، حد چپ

و مقدار آن در $x = a$ با هم برابر باشند، یعنی: $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = f(a)$

۲ در سؤالات حد، هر وقت براکت یا قدرمطلق داشتیم، اولین کار این است که آن‌ها را از بین ببریم، یعنی به جای براکت باید مقدار آن را قرار دهیم و قدرمطلق را تعیین علامت کنیم.

۳ وقتی $u \rightarrow 0$ ، هم‌ارزی‌های مثلثاتی مقابل را داریم:

$$\begin{cases} \sin u \approx u \\ \tan u \approx u \\ 1 - \cos u \approx \frac{u^2}{2} \end{cases}$$

گام ۱ برای این که f در $x = 0$ پیوسته باشد، باید حد راست، حد چپ و مقدار آن در $x = 0$ برابر باشند.

گام ۲ حد راست f در $x = 0$ را به دست می‌آوریم: $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1 - \cos x}{2bx^2}$

با جای‌گذاری $x = 0$ به $\frac{0}{0}$ می‌رسیم، پس باید رفع ابهام کنیم. برای رفع ابهام از هم‌ارزی‌های مثلثاتی استفاده می‌کنیم:

$$\begin{aligned} 1 - \cos x & \approx \frac{x^2}{2} \xrightarrow{\text{طبق مورد ۳ درس‌نامه}} \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{x^2}{2}}{2bx^2} & = \frac{1}{4b} \end{aligned}$$

با جای‌گذاری داریم:



گام ۱ نقطه‌ای از منحنی $y = x^2 - 4x + 5$ را می‌خواهیم که خط مماس بر آن، بر خط $6y - 3x = 1$ عمود باشد. دیدیم که شیب خط عمود بر $6y - 3x = 1$ برابر -2 است، بنابراین باید نقطه‌ای از $y = x^2 - 4x + 5$ را پیدا کنیم که شیب خط مماس بر آن برابر -2 شود. برای این کار معادله $y' = -2$ را حل می‌کنیم (مورد (۲) درس‌نامه):

$$(x^2 - 4x + 5)' = -2 \Rightarrow 2x - 4 = -2 \Rightarrow 2x = 2 \Rightarrow x = 1$$

گام ۲ در آخر عرض نقطه‌ای به طول $x = 1$ روی منحنی $y = x^2 - 4x + 5$ را محاسبه می‌کنیم:

$$y = x^2 - 4x + 5 \xrightarrow{x=1} y = 2 \xrightarrow{\text{نقطه}} (1, 2)$$



۱۸- گزینه ۴

درس‌نامه در جدول مقابل، فرمول مشتق برخی از توابع را می‌بینید:

تابع	مشتق
u^n	$nu'u^{n-1}$
$\cos x$	$-\sin x$
$\tan x$	$1 + \tan^2 x$
$f(g(x))$	$g'(x) \cdot f'(g(x))$

دوتا مثال هم ببینید: $y = f(\sqrt{x^2 - 5x + 1}) \Rightarrow y' = (1/2x - 5/2)f'(\sqrt{x^2 - 5x + 1})$
 $y = \cos^4 x \Rightarrow y' = 4 \times (-\sin x) \times \cos^3 x$

گام ۱ از دو طرف معادله $g(x) = f(\tan^2 x + \sqrt{2} \cos x)$ مشتق می‌گیریم:

$$g'(x) = (2(1 + \tan^2 x) \tan x - \sqrt{2} \sin x) f'(\tan^2 x + \sqrt{2} \cos x) \quad (*)$$

گام ۲ به گفته سؤال، $g'(\frac{\pi}{4}) = \sqrt{3}$ است، پس در رابطه (*) به جای x قرار می‌دهیم $\frac{\pi}{4}$:

$$g'(\frac{\pi}{4}) = (2(1 + \tan^2 \frac{\pi}{4}) \tan \frac{\pi}{4} - \sqrt{2} \sin \frac{\pi}{4}) f'(\tan^2 \frac{\pi}{4} + \sqrt{2} \cos \frac{\pi}{4})$$

$$\Rightarrow \sqrt{3} = 3f'(\frac{\pi}{4}) \Rightarrow f'(\frac{\pi}{4}) = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

مشاوره شدیداً توصیه می‌کنیم که به فرمول‌های مشتق مسلط باشید، چون در غیر این صورت سؤالات خود مشتق، کاربرد مشتق و حد (البته در صورت نیاز به استفاده از هویتال) کنکور سراسری را از دست می‌دهید!



۱۹- گزینه ۱

درس‌نامه آهنگ متوسط تغییر تابع f در بازه $[a, b]$ برابر است با:

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

گام ۱ اول آهنگ متوسط تغییر تابع $f(x) = \sin x \cos 2x$ را در بازه $[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}]$ محاسبه می‌کنیم:

$$\frac{f(\frac{\pi}{2}) - f(\frac{\pi}{4})}{\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}} = \frac{\sin \frac{\pi}{2} \cos \pi - \sin \frac{\pi}{4} \cos \frac{\pi}{2}}{\frac{\pi}{4}} = \frac{-1}{\frac{\pi}{4}} = -\frac{4}{\pi}$$

گام ۲ حالا آهنگ متوسط تغییر تابع $y = \sin^4 x - \cos^4 x$ را هم در همان بازه قبلی به دست می‌آوریم:

$$\frac{g(\frac{\pi}{2}) - g(\frac{\pi}{4})}{\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}} = \frac{(\sin^4 \frac{\pi}{2} - \cos^4 \frac{\pi}{2}) - (\sin^4 \frac{\pi}{4} - \cos^4 \frac{\pi}{4})}{\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{\frac{\pi}{4}} = \frac{4}{\pi}$$

گام ۱ اعضای چند دسته دیگر را هم می‌نویسیم:

$$\begin{array}{ccccccc} 2^1 & 2^2 & 2^3 & 2^4 & 2^5 & & \\ \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow & & \\ \{1, 2\}, & \{3, 4\}, & \{5, 6, 7, 8\}, & \{9, 10, \dots, 16\}, & \{17, 18, \dots, 32\}, & \dots & \end{array}$$

دسته پنجم دسته چهارم دسته سوم دسته دوم

گام ۲ با توجه به دسته‌ها، واضح است که جمله آخر دسته $a_n = 2^n$ می‌شود، پس جمله آخر دسته سیزدهم $a_{13} = 2^{13} = 8192$ است. جمله آخر دسته دوازدهم هم $a_{12} = 2^{12} = 4096$ است، پس جمله اول دسته سیزدهم، $4096 + 1 = 4097$ می‌شود. حالا می‌توانیم اعضای دسته سیزدهم را بنویسیم:

$$\text{دسته سیزدهم: } \{4097, 4098, 4099, \dots, 8192\}$$

گام ۳ میانه اعضای دسته سیزدهم را می‌خواهیم که چون اعضای آن اعداد متوالی‌اند، طبق درس‌نامه، برابر است با:

$$\frac{4097 + 8192}{2} = 6144.5$$



۱۶- گزینه ۱

استراتژی کافی است حد در بی‌نهایت تابع y را برابر 3 و ریشه مخرج y را برابر $-\frac{1}{4}$ قرار دهید تا جواب حاصل شود.

درس‌نامه ۱ مجانب‌های قائم یک تابع کسری همان ریشه‌های مخرج هستند. (این ریشه‌ها نباید ریشه صورت هم باشند). **۲** برای به دست آوردن مجانب‌های افقی یک تابع کسری، حد در بی‌نهایت آن تابع کسری را محاسبه می‌کنیم. **۳** طبق هم‌ارزی پرتوان هر وقت $x \rightarrow \pm\infty$ ، می‌توانیم به جای چندجمله‌ای $ax^n + bx^{n-1} + \dots + px + q$ ، جمله با بیشترین توان، یعنی ax^n را جای‌گذاری کنیم.

گام ۱ نقطه $A(-\frac{1}{4}, 3)$ محل تلاقی مجانب‌های تابع y است، پس مجانب قائم y برابر $x = -\frac{1}{4}$ و مجانب افقی آن برابر $y = 3$ می‌شود.

گام ۲ $x = -\frac{1}{4}$ مجانب قائم است، پس $x = -\frac{1}{4}$ باید ریشه مخرج y ، یعنی $4x^2 + ax + 1$ باشد (مورد (۱) درس‌نامه):

$$4x^2 + ax + 1 \xrightarrow{x=-\frac{1}{4}} 1 - \frac{a}{4} + 1 = 0 \Rightarrow 2 = \frac{a}{4} \Rightarrow a = 4$$

گام ۳ $y = 3$ مجانب افقی است، پس حد در بی‌نهایت y برابر 3 می‌شود (مورد (۲) درس‌نامه):

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{bx^2 + 7}{4x^2 + ax + 1} \stackrel{\text{پرتوان}}{=} \frac{bx^2}{4x^2} = \frac{b}{4} \Rightarrow \frac{b}{4} = 3 \Rightarrow b = 12$$

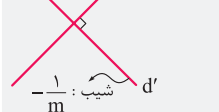
بنابراین جواب برابر $\frac{b}{a} = \frac{12}{4} = 3$ است.



۱۷- گزینه ۳

استراتژی کافی است قرینه و معکوس شیب خط $6y - 3x = 1$ را برابر با مشتق $x^2 - 4x + 5$ قرار دهید تا مقدار x به دست آید؛ سپس با جای‌گذاری x به دست آمده در ضابطه منحنی می‌توانید عرض نقطه را نیز محاسبه کنید.

درس‌نامه ۱ اگر خط d' بر d عمود باشد، شیب d' شیب d قرینه و معکوس شیب d می‌شود.



۲ شیب خط مماس بر منحنی f در نقطه‌ای به طول α واقع بر آن برابر $f'(\alpha)$ می‌شود.

گام ۱ شیب خط $6y - 3x = 1$ را به دست می‌آوریم:

$$6y - 3x = 1 \Rightarrow 6y = 3x + 1 \Rightarrow y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{6}$$

شیب این خط برابر $\frac{1}{2}$ است، پس شیب خط عمود بر آن برابر $-\frac{1}{2}$ می‌شود (طبق مورد (۱) درس‌نامه).



گام ۴ حالا نوبت محاسبه تعداد حالت‌های نامطلوب است. برای این کار تعداد حالاتی را می‌شماریم که a و b کنار هم باشند، برای این کار ابتدا به $\binom{5}{3}$ حالت، ۳ نفر دیگر از بین ۵ نفر باقی‌مانده (یعنی c و d و e و f و g) انتخاب می‌کنیم. (فرض کنید این ۳ نفر c ، d و e هستند). حالا برای این که a و b کنار هم باشند، آن‌ها را مطابق شکل زیر درون یک بسته قرار می‌دهیم:

تعداد جایگشت‌های ۴ بسته بالا، $4! \times 2! = 48$ است؛ پس تعداد کل حالت‌های نامطلوب می‌شود:

$$4! \times 2! \times \binom{5}{3} = 24 \times 2 \times \binom{5}{3} = 48 \times \frac{5 \times 4}{2 \times 1} = 480$$

جایگشت
بسته‌ها
 a و b

گام ۵ طبق اصل ممتنع، تعداد حالاتی که a و b کنار هم نیستند، برابر تعداد کل حالت‌ها منهای تعداد حالت‌هایی است که a و b کنار هم باشند، بنابراین جواب برابر $2520 - 480 = 2040$ می‌شود.

مشاوره سؤالات شمارش بدون شمردن، پای ثابت سؤالات کنکور سراسری است.

۲۲- گزینه ۲

درس‌نامه در پرتاب دو تاس، برای به دست آوردن احتمال رخ دادن هر پیشامدی، اول جدولی به شکل زیر رسم کنید و داخل خانه‌های مطلوب ضربدر بزنید تا تعداد حالات مطلوب به دست آید؛ بعد حاصل را بر تعداد کل حالت‌ها تقسیم کنید.

تاس اول

	۱	۲	۳	۴	۵	۶
۱			x			x
۲			x			x
۳	x	x	x	x	x	x
۴			x			x
۵			x			x
۶	x	x	x	x	x	x

تعداد کل حالت‌های پرتاب دو تاس $6 \times 6 = 36$ تا است.

مثلاً در جدول بالا، حالاتی را مشخص کردیم که حاصل ضرب اعداد رو شده، مضرب ۳ باشد؛ پس احتمال این که دو تاس پرتاب کنیم و حاصل ضرب اعداد رو شده مضرب ۳ شود، برابر $\frac{20}{36} = \frac{5}{9}$ است.

طبق درس‌نامه، اول جدول زیر را می‌کشیم. حالا باید به دنبال خانه‌هایی باشیم که حداقل یک عدد مضرب ۳ و مجموع دو عدد رو شده برابر ۷ باشد. این خانه‌ها را در جدول با x مشخص می‌کنیم. همان‌طور که می‌بینید، ۴ خانه از ۳۶ خانه علامت‌دار شده‌اند، پس احتمال مورد نظر برابر می‌شود با:

$$P = \frac{4}{36} = \frac{1}{9}$$

تاس اول

	۱	۲	۳	۴	۵	۶
۱						x
۲						
۳				x		
۴			x			
۵						
۶	x					

۲۳- گزینه ۳

استراتژی اول با استفاده از $P(A) = \frac{1}{7}$ و $P(B) = \frac{3}{5}$ ، حاصل $P(x) + P(y)$ و $P(z) + P(t)$ را به دست آورید، بعد با توجه به این که $P(s) = 1$ است، حاصل $P(w)$ هم به دست می‌آید. در آخر حاصل $P(C) = P(x) + P(y) + P(w)$ به راحتی محاسبه می‌شود.

$$\text{بنابراین جواب برابر } -1 = -\frac{\frac{4}{\pi}}{\frac{4}{\pi}} \text{ می‌شود.}$$

۲۰- گزینه ۲

درس‌نامه اگر $A(\alpha, \beta)$ نقطه اکستریم نسبی تابع $f(x)$ باشد، داریم:

$$f(\alpha) = \beta \quad (\text{الف})$$

$$f'(\alpha) = 0 \quad (\text{ب})$$

گام ۱ اول y' را به دست می‌آوریم:

$$y = ax^3 + bx^2 + cx + d \Rightarrow y' = 3ax^2 + 2bx + c$$

$A(0, 0)$ نقطه اکستریم نسبی تابع است، پس:

$$\begin{cases} y(0) = 0 \Rightarrow a(0)^3 + b(0)^2 + c(0) + d = 0 \Rightarrow d = 0 \\ y'(0) = 0 \Rightarrow 3a(0)^2 + 2b(0) + c = 0 \Rightarrow c = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = ax^3 + bx^2 \\ y' = 3ax^2 + 2bx \end{cases}$$

تا این جا ضابطه y و y' به این صورت شد:

گام ۲ هم اکستریم نسبی تابع است، پس:

$$\begin{cases} y(1) = 1 \Rightarrow a(1)^3 + b(1)^2 = 1 \Rightarrow a + b = 1 \xrightarrow{\times 2} 2a + 2b = 2 \\ y'(1) = 0 \Rightarrow 3a(1)^2 + 2b(1) = 0 \Rightarrow 3a + 2b = 0 \end{cases}$$

طرفین دو رابطه بالا را از هم کم می‌کنیم تا مقدار a به دست آید:

حالا $a = -2$ را در $a + b = 1$ جای گذاری می‌کنیم تا مقدار b هم مشخص شود:

$$a + b = 1 \Rightarrow b = 3$$

بنابراین $ab = -2 \times 3 = -6$ است.

۲۱- گزینه ۳

استراتژی کافی است از اصل ممتنع استفاده کنید، یعنی تعداد کل حالاتی که ۷ نفر می‌توانند روی ۵ صندلی در یک ردیف قرار بگیرند را منهای تعداد حالاتی کنید که دو نفر خاص کنار هم نشسته باشند.

درس‌نامه ۱ n نفر به $n!$ حالت می‌توانند روی n صندلی کنار هم بنشینند. بعضی وقت‌ها در محاسبه تعداد جایگشت‌ها کنار هم بودن چند شیء خاص برایمان مهم است. در چنین حالتی از روش «بسته‌بندی» استفاده می‌کنیم. مثلاً فرض کنید می‌خواهیم ببینیم به چند طریق می‌شود ۶ نفر a, b, c, d, e, f روی ۶ صندلی بنشینند به طوری که a و b و c کنار هم باشند. برای پیدا کردن جواب، کارهای زیر را انجام می‌دهیم:

الف) اول افراد را به شکل $\{abc, d, e, f\}$ بسته‌بندی می‌کنیم.

ب) حالا می‌گوییم ۴ بسته داریم که ۴ جایگشت دارند. اما باید حواسمان باشد که a, b و c هم درون بسته خود ۳! جایگشت دارند. پس جواب می‌شود: $3! \times 4! = 6 \times 24 = 144$

۳ به $\binom{n}{k}$ حالت می‌توانیم k نفر از بین n نفر انتخاب کنیم به طوری که ترتیب انتخاب k نفر مهم نباشد.

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \quad (\text{۴})$$

گام ۱ فرض کنید ۷ نفر، a و b و c و d و e و f و g هستند و می‌خواهیم a و b کنار هم نباشند. اول تعداد حالاتی که ۷ نفر می‌توانند روی ۵ صندلی بنشینند را می‌شماریم.

۵ صندلی داریم، پس ابتدا به $\binom{7}{5}$ حالت، ۵ نفر انتخاب می‌کنیم تا روی ۵ صندلی بنشینند.

حالا خود این ۵ نفر هم به ۵! حالت می‌توانند روی صندلی‌ها جابه‌جا شوند، پس تعداد کل حالت‌ها برابر است با:

$$5! \times \binom{7}{5} = 5! \times \binom{7}{2} = 120 \times \frac{7 \times 6}{2 \times 1} = 120 \times 21 = 2520$$



۲۵- گزینه ۳

درس نامه ۱

$$1+2+3+\dots+n = \frac{n(n+1)}{2}$$

۲ میانگین اعداد متوالی $a, a+1, a+2, \dots, b$ برابر با میانگین اولین و آخرین داده، یعنی $\frac{a+b}{2}$ است.

گام ۱ ابتدا میانگین اعداد N تا را به دست می‌آوریم:

$$\text{میانگین} = \frac{\text{مجموع}}{\text{تعداد}} = \frac{0+1+2+\dots+N}{N+1} = \frac{\frac{N(N+1)}{2}}{N+1} = \frac{N}{2}$$

البته چون اعداد N تا متوالی بودند، می‌توانستیم بگوییم میانگین کل داده‌ها برابر میانگین اولین و آخرین داده، یعنی $\frac{0+N}{2} = \frac{N}{2}$ می‌شود.

گام ۲ حالا میانگین پنج عدد انتخاب‌شده را به دست می‌آوریم:

$$\frac{11+8+5+2+9}{5} = \frac{35}{5} = 7$$

گام ۳ در آخر میانگین داده‌های متوالی را با میانگین حدود انتخاب‌شده برابر قرار می‌دهیم $\frac{N}{2} = 7 \Rightarrow N = 14$ تا برآورد نقطه‌ای N به کمک میانگین پیدا شود.



۲۶- گزینه ۴

درس نامه مجموعه انحراف از میانگین داده‌ها برابر صفر است.

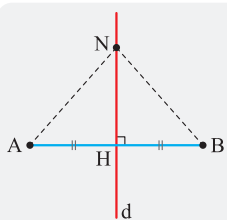
گام ۱ توان دوم انحراف از میانگین داده‌ها برابر ۱ یا صفر است، پس خود انحراف از میانگین داده‌ها برابر $+1, -1$ یا صفر هستند.

گام ۲ داده‌ای با میانگین برابر است که انحراف از میانگین آن صفر باشد، پس باید کاری کنیم تا تعداد داده‌هایی که انحراف از میانگین آن‌ها صفر است، حداقل شود، از طرفی مجموع انحراف از میانگین داده‌ها برابر صفر است، پس حداقل تعداد داده‌هایی که انحراف از میانگین آن‌ها برابر صفر است، وقتی به دست می‌آید که ۴۱ داده انحراف از میانگین $+1$ ، ۴۱ داده انحراف از میانگین -1 و یک داده انحراف از میانگین صفر داشته باشد. بنابراین جواب برابر ۱ می‌شود.

مشاوره سؤالات آمار توصیفی در کنکورهای جدید، به جای این که محاسبات زیادی داشته باشند، ایده‌دار، خلاقانه و مفهومی هستند؛ به همین خاطر باید دید خیلی عمیقی به این فصل داشته باشید.

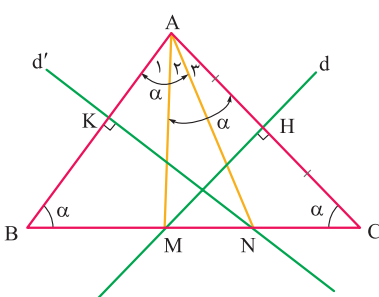


۲۷- گزینه ۲



درس نامه ۱ هر نقطه‌ای که روی عمودمنصف یک پاره‌خط باشد، از دو سر آن پاره‌خط به یک فاصله است و برعکس. یعنی هر نقطه‌ای که فاصله‌اش از دو سر یک پاره‌خط یکسان باشد، روی عمودمنصف آن پاره‌خط قرار دارد. برای درک بهتر این موضوع، شکل مقابل را ببینید: $NA = NB \Leftrightarrow N$ روی عمودمنصف AB است. مجموع زاویه‌های داخلی هر مثلث 180° است.

گام ۲ (رسم شکل مناسب و تحلیل آن): شکل مسئله به صورت زیر است.



همان‌طور که از شکل پیداست؛ خط d عمودمنصف AC است که BC را در M و خط d' عمودمنصف AB است که BC را در N قطع کرده است. طبق مورد (۱) درس‌نامه می‌دانیم هر نقطه‌ای که روی عمودمنصف یک پاره‌خط باشد، از دو سر آن به یک فاصله است، پس می‌توانیم بگوییم دو مثلث MAC و NAB متساوی‌الساقین هستند.

درس نامه ۱ اگر فضای نمونه‌ای یک آزمایش به صورت $S = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ باشد، داریم:

$$P(a_1) + P(a_2) + \dots + P(a_n) = 1$$

باشد، داریم:

۲ اگر پیشامد A به صورت $A = \{b_1, b_2, \dots, b_m\}$ باشد، داریم:

$$P(A) = P(b_1) + P(b_2) + \dots + P(b_m)$$

گام ۱ به گفته سؤال $A = \{x, y\}$ و $B = \{x, y, z, t\}$ است، پس طبق مورد (۲) درس‌نامه داریم:

$$\begin{cases} P(A) = P(x) + P(y) \\ P(B) = P(x) + P(y) + P(z) + P(t) \end{cases}$$

حالا $P(A) = \frac{1}{5}$ و $P(B) = \frac{3}{5}$ را در رابطه بالا جای‌گذاری می‌کنیم:

$$\begin{cases} P(x) + P(y) = \frac{1}{5} \quad (1) \\ P(x) + P(y) + P(z) + P(t) = \frac{3}{5} \quad (2) \end{cases}$$

گام ۲ احتمال رخ دادن فضای نمونه‌ای، یعنی $P(S)$ ، برابر ۱ است، بنابراین:

$$P(S) = P(x) + P(y) + P(z) + P(t) + P(w) = 1 \Rightarrow P(w) = 1 - \frac{3}{5} = \frac{2}{5}$$

طبق رابطه (۲) می‌شه

گام ۳ در آخر چون $C = \{x, y, w\}$ است، می‌توانیم بنویسیم:

$$P(C) = P(x) + P(y) + P(w) = \frac{1}{5} + \frac{2}{5} = \frac{3}{5}$$

طبق رابطه (۱) می‌شه



۲۴- گزینه ۱

درس نامه ۱ اگر A و B دو پیشامد مستقل باشند، احتمال این که دو پیشامد A و B هم‌زمان رخ دهند برابر حاصل‌ضرب احتمال رخ دادن هر کدام از پیشامدها است، یعنی:

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

۲ اگر A و B دو پیشامد از فضای نمونه‌ای S باشند، احتمال رخ دادن پیشامد A به شرط رخ دادن پیشامد B را به صورت $P(A|B)$ نمایش می‌دهیم. از این رابطه محاسبه می‌شود:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

۳ یکی از نشانه‌هایی که به شما کمک می‌کند بفهمید با یک احتمال شرطی طرف هستید؛ وجود کلمه یا جملاتی مثل «اگر»، «می‌دانیم» و «در صورتی که» است. جمله بعد از این کلمات (یا جملات) همان شرط سؤال است.

$$A \cup (A \cap B) = A, \quad A \cap (A \cup B) = A$$

۴ قانون جذب:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

گام ۱ بعد از دیدن کلمه اگر در صورت سؤال متوجه می‌شویم که با احتمال شرطی طرف هستیم. به هدف زدن علی را پیشامد A و به هدف زدن حسن را پیشامد B در نظر می‌گیریم. به گفته سؤال علی و حسن با احتمال‌های $\frac{1}{6}$ و $\frac{1}{4}$ به هدف می‌زنند، پس:

$$P(A) = \frac{1}{6}, \quad P(B) = \frac{1}{4}$$

گام ۲ به هدف زدن تیر توسط دو نفر، مستقل از هم هستند، پس احتمال این که هر دو نفر به هدف بزنند، برابر است با:

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{24}$$

گام ۳ حالا خوب به جمله زیر توجه کنید:

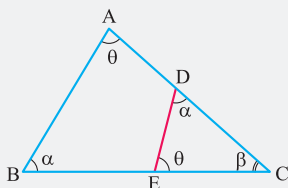
«اگر هر کدام از آن‌ها یک بار تیراندازی کنند و بدانیم حداقل یک تیر به هدف اصابت کرده است، با کدام احتمال علی به هدف زده است؟»

جمله بالا یعنی احتمال رخ دادن پیشامد A به شرط رخ دادن $A \cup B$ چه قدر است؟ این احتمال طبق مورد (۲) درس‌نامه برابر می‌شود با:

$$P(A|A \cup B) = \frac{P(A \cap (A \cup B))}{P(A \cup B)} = \frac{P(A)}{P(A) + P(B) - P(A \cap B)} = \frac{\frac{1}{6}}{\frac{1}{6} + \frac{1}{4} - \frac{1}{24}} = \frac{\frac{1}{6}}{\frac{10}{24}} = \frac{4}{10} = \frac{2}{5}$$



۲ برای نوشتن نسبت تشابه دو مثلث، ضلع‌های رو به زاویه برابر را در یک نسبت زیر هم می‌نویسیم، به طوری که در صورت نسبت‌ها اضلاع یک مثلث و در مخرج آن‌ها اضلاع مثلث دیگر قرار داشته باشند. مثلاً نسبت تشابه مثلث‌های ABC و DEC در شکل زیر برابر می‌شود با:



$$\frac{AC}{EC} = \frac{AB}{DE} = \frac{BC}{DC}$$

رو به α رو به β رو به θ

۳ (پیدا کردن مثلث‌های متشابه)

سؤال می‌گوید $ECA = BDE$ ، پس این دو زاویه را مطابق شکل α در نظر می‌گیریم. مثلث‌های ABC و BED یک زاویه برابر α دارند و در رأس B مشترک‌اند، پس طبق مورد (۱) درس‌نامه می‌توانیم بگوییم این دو مثلث متشابه‌اند.

۴ (نوشتن نسبت تشابه و محاسبه خواسته سؤال)

می‌دانیم اگر دو مثلث، دو زاویه برابر داشته باشند، زاویه سومشان هم خودبه‌خود برابر می‌شود. زاویه سوم در مثلث‌های متشابه را مطابق شکل مقابل، β در نظر می‌گیریم. حالا می‌توانیم به کمک مورد (۲) درس‌نامه نسبت تشابه را بنویسیم:

$$\frac{AB}{EB} = \frac{BC}{BD} = \frac{AC}{ED} \Rightarrow \frac{48}{24} = \frac{BC}{18} = \frac{24+x}{y}$$

رو به α رو به β رو به θ

(۲)

از تساوی (۱)، x را حساب می‌کنیم:

$$\frac{48}{24} = \frac{24+x}{18} \Rightarrow 2 = \frac{24+x}{18} \Rightarrow 24+x=36 \Rightarrow x=12$$

و از تساوی (۲) هم y را به دست می‌آوریم:

$$\frac{48}{24} = \frac{24}{y} \Rightarrow 2 = \frac{24}{y} \Rightarrow y=12$$

بنابراین $\frac{x}{y} = \frac{12}{12} = 1$.

۵ مشاوره مشابه این سؤال را هم در کتاب درسی داریم، هم در کنکورهای قبل. در کل از مدل‌های ساده سؤال در هندسه ۱ است که نباید از دستش بدهید.



۲۹- گزینه ۴

۶ استراتژی اول نوع چهارضلعی داخل شکل مسئله را مشخص می‌کنیم؛ با این کار زاویه‌های داخلی چهارضلعی و طول وتر مثلث‌های رنگی پیدا می‌شوند. در ادامه زاویه‌های داخلی مثلث‌های قائم‌الزاویه رنگی را حساب می‌کنیم تا به کمک آن‌ها بتوانیم طول ضلع‌های قائمه‌شان را به دست بیاوریم. در آخر با داشتن طول ضلع‌های قائمه، خواسته مسئله را پیدا می‌کنیم.

۷ درس‌نامه ۱ در n ضلعی منتظم، تمام اضلاع با هم و تمام زاویه‌های داخلی با هم برابرند. هر زاویه داخلی یک n ضلعی منتظم $\frac{(n-2) \times 180^\circ}{n}$ است؛ مثلاً در شش ضلعی

$$\text{منتظم، هر زاویه داخلی } 120^\circ = \frac{(6-2) \times 180^\circ}{6} \text{ است.}$$

۲ اگر طول چهار ضلع یک چهارضلعی با هم برابر باشند، آن چهارضلعی لوزی است. اگر لوزی یک زاویه قائمه داشته باشد، تبدیل به مربع می‌شود.

۳ هر وقت در یک مثلث قائم‌الزاویه، زاویه‌های 30° و 60° دیدید؛ برای محاسبه طول اضلاع از نسبت‌های مثلثاتی استفاده کنید. مثلاً در شکل مقابل، برای محاسبه b و c می‌توانیم بنویسیم:

$$\sin 30^\circ = \frac{b}{c} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{b}{c} \Rightarrow b = \frac{c}{2}$$

$$\cos 30^\circ = \frac{c}{c} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{c}{c} \Rightarrow c = 6 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 3\sqrt{3}$$

۸ (محاسبه α)

از متساوی‌الساقین بودن مثلث ABC نتیجه می‌گیریم $\hat{B} = \hat{C} = \alpha$. حالا مجموع زوایای داخلی این مثلث را مساوی 180° می‌گذاریم:

$$\Delta ABC: \hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180^\circ$$

طبق صورت سؤال 80° است.

$$\Rightarrow 80^\circ + \alpha + \alpha = 180^\circ \Rightarrow 2\alpha = 100^\circ \Rightarrow \alpha = 50^\circ$$

۹ (محاسبه خواسته سؤال)

از روی شکل می‌توانیم حدس بزنیم کوچک‌ترین زاویه مثلث AMN ، زاویه $\hat{M}$ است؛ بیایید این زاویه را محاسبه کنیم:

$$\hat{A} = 80^\circ \Rightarrow \hat{A}_1 + \hat{A}_2 + \hat{A}_3 = 80^\circ$$

$$\Rightarrow (\alpha - \hat{A}_1) + \hat{A}_2 + (\alpha - \hat{A}_3) = 80^\circ$$

$$\Rightarrow 2\alpha - \hat{A}_3 = 80^\circ \xrightarrow{\alpha=50^\circ} 2(50^\circ) - \hat{A}_3 = 80^\circ \Rightarrow \hat{A}_3 = 20^\circ$$

۱۰ مشاوره دقیقاً همین سؤال، در کنکور سراسری تجربی ۹۲ آمده بود، بدون تغییر عدد! این اتفاق، اهمیت تمرین کردن سؤال‌های کنکورهای قبل را به ما گوشزد می‌کند.



۲۸- گزینه ۱

۱۱ درس‌نامه

۱ چندتا شکل مهم و پرکاربرد داریم که در آن‌ها دو مثلث با زاویه‌های برابر متشابه هستند. این شکل‌ها را در جدول زیر ببینید:

مثلث‌های متشابه	شکل‌ها
$\Delta ABD \sim \Delta BEC$	
$\Delta ABC \sim \Delta ADC$	
$\Delta ADE \sim \Delta ABC$	
$\Delta AOB \sim \Delta COD$	



ما به دنبال اندازه زاویه ظلی BCT هستیم که طبق مورد (۲) درسنامه برابر است با نصف اندازه کمان مقابلش:

$$\widehat{BCT} = \frac{1}{2} \widehat{BAC} \Rightarrow \widehat{BCT} = \frac{1}{2} (6^\circ + x + 10^\circ) = 8^\circ + \frac{1}{2}x \quad (*)$$

📌 (محاسبه x و خواسته سوال)

طبق مورد (۳) درسنامه یک دایره کلاً 36° است، پس داریم:

$$\widehat{AB} + \widehat{BE} + \widehat{EF} + \widehat{CF} + \widehat{CD} + \widehat{AD} = 36^\circ$$

$$\Rightarrow 6^\circ + x + 8^\circ + x + 10^\circ + x = 36^\circ \Rightarrow 3x = 12^\circ \Rightarrow x = 4^\circ$$

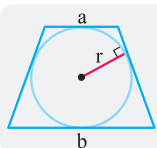
حالا $x = 4^\circ$ را در تساوی (*) جای گذاری می کنیم تا خواسته سوال یعنی $\widehat{BCT}$ پیدا شود:

$$\widehat{BCT} = 8^\circ + \frac{1}{2}(4^\circ) = 10^\circ$$

📌 **مشاوره** از مبحث «زاویه‌ها در دایره» تقریباً هر سال در کنکور سوال می آید؛ سوال هایی که معمولاً هم روتین هستند. به همین خاطر پیشنهاد می کنیم روی این مبحث سرمایه گذاری کنید. (ضرر نمی کنید)



۳۱- گزینه ۱



📌 **نکته** مطابق شکل مقابل، اگر دوزنقه متساوی الساقین با قاعده های a و b بر دایره ای به شعاع r محیط شود، آن گاه:

$$4r^2 = a \cdot b$$

در این سوال $a = 2$ و $b = 4$ است، پس:

$$4r^2 = 2 \times 4 \Rightarrow r^2 = 2$$

بنابراین مساحت دایره می شود $\pi r^2 = 2\pi$.

📌 **مشاوره** باز هم یک سوال از مبحث «خواص دوزنقه متساوی الساقین محیطی» که بسیار مورد علاقه طراح کنکور است. نکته ای را که در پاسخ گفته ایم، حتماً بلد باشید.



۳۲- گزینه ۴

📌 **نکته** اگر دو دایره با شعاع های r و R مماس خارج باشند، طول مماس مشترک خارجی شان برابر می شود با:

$$\sqrt{Rr} = \text{طول مماس مشترک خارجی}$$

شعاع دایره بزرگ را R و شعاع دایره کوچک را r در نظر می گیریم. این دو دایره مماس خارج اند، پس طبق نکته بالا، طول مماس مشترک خارجی شان می شود $\sqrt{2Rr}$. به گفته سوال طول

این مماس مشترک خارجی برابر شعاع دایره بزرگ تر (R) است، پس داریم:

$$\sqrt{2Rr} = \frac{\sqrt{3}}{2} R \xrightarrow{\text{توان ۲}} 4(Rr) = \frac{3}{4} R^2$$

$$\Rightarrow 4r = \frac{3}{4} R \Rightarrow \frac{R}{r} = \frac{4 \times 4}{3} = \frac{16}{3}$$

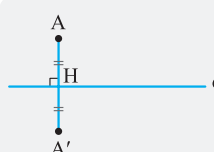
📌 **مشاوره** فرمول محاسبه طول مماس مشترک ها، جزو فرمول های بسیار مهم در هندسه پایه است که هم در آزمون های تشریحی و هم آزمون های تستی پراهمیت است، حتماً این فرمول ها را حفظ باشید.



۳۳- گزینه ۱

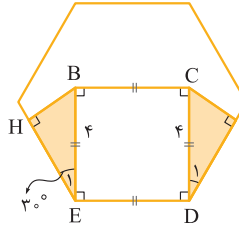
📌 **شفاف سازی ۱** «بازتاب نقطه C نسبت به محور y ها بر خودش منطبق می شود»، یعنی نقطه C روی محور y ها قرار دارد. 📌 «بازتاب نقطه D نسبت به قطر AC» همان نقطه B است.

📌 **استراتژی** از تعریف بازتاب و خاصیت عمود منصف بودن قطرها در مربع، برای پیدا کردن مختصات رأس B استفاده کنید.



📌 **درسنامه ۱ الف** همان طور در شکل مقابل می بینید؛ برای پیدا کردن بازتاب نقطه A نسبت به خط d (عمود بازتاب)، اول از A به خط d عمود می کنیم و پای عمود را H می نامیم. بعد AH را به اندازه خودش امتداد می دهیم تا به A' برسیم. نقطه A'، بازتاب نقطه A نسبت به خط d است.

📌 **گام ۱** (محاسبه طول وتر مثلث های رنگی و زاویه های مورد نیاز)



مطابق شکل مقابل، اضلاع چهارضلعی BCDE با هم برابرند، پس تا این جا می توانیم بگوییم لوزی است. اما همان طور که در شکل می بینید، این لوزی یک زاویه قائمه هم دارد، پس طبق مورد (۲) درسنامه تبدیل به مربع می شود. حالا می توانیم بگوییم $ED = BE = CD = 4$ و $\hat{E} = \hat{D} = 90^\circ$ است. و تر مثلث های رنگی

از آن جا که هر زاویه داخلی شش ضلعی منتظم 120° است، داریم:

$$\begin{cases} \hat{E}_1 = 120^\circ - 90^\circ = 30^\circ \\ \hat{D}_1 = 120^\circ - 90^\circ = 30^\circ \end{cases}$$

📌 **گام ۲** (محاسبه مساحت مثلث BHE)

همان طور که در شکل می بینید؛ در مثلث قائم الزاویه BHE زاویه 30° داریم، پس طبق مورد (۳) درسنامه برای محاسبه طول BH و HE از نسبت های مثلثاتی استفاده می کنیم:

$$\sin 30^\circ = \frac{BH}{BE} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{BH}{4} \Rightarrow BH = 2$$

$$\cos 30^\circ = \frac{HE}{BE} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{HE}{4} \Rightarrow HE = 2\sqrt{3}$$

پس مساحت مثلث BHE می شود:

$$S_{\triangle BHE} = \frac{1}{2} BH \cdot HE = \frac{1}{2} \times 2 \times 2\sqrt{3} = 2\sqrt{3}$$

📌 **گام ۳** (محاسبه خواسته سوال)

اگر گام دوم را برای مثلث CDK هم انجام بدهیم، می بینیم که $S_{\triangle CKD} = S_{\triangle BHE} = 2\sqrt{3}$ می شود. (دقت کنید که از روی تقارن شکل هم می توانستیم بفهمیم مثلث های EBH و CDK همنهشت و در نتیجه هم مساحت اند)، پس مساحت ناحیه رنگی برابر است با:

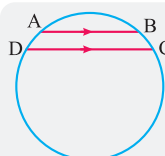
$$S_{\triangle BHE} + S_{\triangle CKD} = 2\sqrt{3} + 2\sqrt{3} = 4\sqrt{3}$$

📌 **مشاوره** رد پای «مثلث های قائم الزاویه با زاویه های 30° و 60° »، در اکثر تست های هندسه پایه دیده می شود. لطفاً مورد ۳ درسنامه را خوب بخوانید.

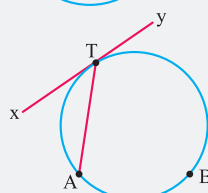


۳۰- گزینه ۳

📌 **استراتژی** زاویه BCT یک زاویه ظلی است، پس اندازه آن نصف اندازه کمان مقابلش است. پس باید اندازه کمان BAC را به دست بیاوریم. برای این کار اول با توجه به وترهای موازی، چندتا کمان با اندازه های برابر پیدا می کنیم، بعد کل دایره را مساوی 360° می گذاریم.

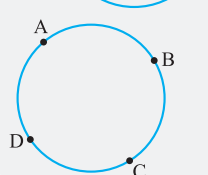


📌 **درسنامه ۱** کمان های محصور بین دو وتر موازی از یک دایره، با هم برابرند. مثلاً در شکل روبه رو اگر $AB \parallel CD$ باشد، می توانیم بگوییم $\widehat{AD} = \widehat{BC}$.



📌 **۲** اندازه هر زاویه ظلی در هر دایره، نصف اندازه کمان روبه روی آن است، مثلاً در شکل روبه رو، داریم:

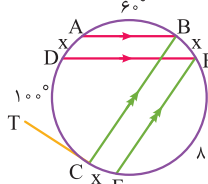
$$\hat{ATy} = \frac{1}{2} \widehat{ABT} \text{ و } \hat{ATx} = \frac{1}{2} \widehat{AT}$$



📌 **۳** یک دایره کلاً 360° است، بنابراین برای دایره مقابل می توانیم بنویسیم:

$$\widehat{AB} + \widehat{BC} + \widehat{CD} + \widehat{AD} = 360^\circ$$

📌 **گام ۱** (انتقال اطلاعات سوال روی شکل و تحلیل خواسته سوال)



فرض های سوال را روی شکل مسئله می نویسیم. به گفته سوال، وترهای AB و DE موازی اند، پس طبق مورد (۱) درسنامه می توانیم اندازه کمان های محصور بین این دو وتر را x در نظر بگیریم؛ یعنی $\widehat{AD} = \widehat{BE} = x$ باشد. از طرفی وترهای BC و EF هم موازی اند، پس $\widehat{CF} = \widehat{BE} = x$ است.



۳ اگر $\frac{a}{b} = \frac{m}{n}$ باشد، می‌توانیم فرض کنیم $\begin{cases} a = mk \\ b = nk \end{cases}$

۴ اگر دو مثلث دارای یک ارتفاع مشترک باشند، نسبت مساحت‌های آن‌ها برابر است با نسبت قاعده‌های نظیر آن ارتفاع مشترک. مثلاً در شکل زیر، مثلث‌های ABP و ACP و ABC در ارتفاع AH مشترک هستند، پس می‌توانیم بنویسیم:

$$\frac{S_{\triangle ABP}}{S_{\triangle ACP}} = \frac{BP}{CP}, \quad \frac{S_{\triangle ABP}}{S_{\triangle ABC}} = \frac{BP}{BC}, \quad \dots$$

گام ۴ (رسم شکل مناسب و استفاده از قضیه نیمساز داخلی)

طول اضلاع مثلث را ۴، ۵ و ۶ در نظر می‌گیریم. می‌دانیم زاویه متوسط، روبه‌روی ضلع متوسط است، پس مطابق شکل روبه‌رو، باید نیمساز زاویه روبه‌روی ضلع به طول ۵ را بکشیم. با استفاده از قضیه نیمساز داخلی، داریم:

$$\frac{BD}{CD} = \frac{AB}{AC} = \frac{4}{6} \Rightarrow \frac{BD}{CD} = \frac{2}{3}$$

طبق مورد (۳) درس‌نامه از تناسب بالا نتیجه می‌گیریم $BD = 2k$ و $CD = 3k$ است.

گام ۵ (محاسبه خواسته سؤال) همان‌طور که از شکل پیداست، کوچک‌ترین مثلث حاصل از این رسم، مثلث ABD است.

دو مثلث ABC و ABD در ارتفاع به طول h مشترکند، پس طبق مورد (۴) درس‌نامه نسبت مساحت‌هایشان می‌شود:

$$\frac{S_{\triangle ABC}}{S_{\triangle ABD}} = \frac{BC}{BD} = \frac{2k + 3k}{2k} = \frac{5}{2}$$

مشاوره «قضیه نیمساز داخلی» از مباحث بسیار مهم هندسه ۲ است که بارها در کنکور سؤال داشته است و باید حتماً آن را بلد باشید.

۳۵ - گزینه ۲

نکته استراتژی اول طرفین تساوی $\alpha A + \beta I = A^{-1}$ را از سمت چپ (یا از راست)

در ماتریس A ضرب می‌کنیم تا بتوانیم A^2 را برحسب A و I بنویسیم، بعد A^2 را از روی تساوی $A = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 4 & -3 \end{bmatrix}$ هم برحسب A و I می‌نویسیم. در آخر با مقایسه دو رابطه

به دست آمده برای A^2 ، خواسته مسئله را به دست می‌آوریم.

گام ۱ (ایجاد تغییرات مناسب در تساوی صورت سؤال)

اول طرفین تساوی $\alpha A + \beta I = A^{-1}$ را از سمت چپ در ماتریس A ضرب می‌کنیم:

$$A(\alpha A + \beta I) = AA^{-1} \Rightarrow \alpha A^2 + \beta A = I$$

$$\alpha A^2 = -\beta A + I \Rightarrow A^2 = -\frac{\beta}{\alpha} A + \frac{1}{\alpha} I \quad (*)$$

نکته مربع هر ماتریس 2×2 مثل $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ را می‌توانیم به صورت زیر برحسب خودش و I بنویسیم:

$$A^2 = (a+d)A - (ad-bc)I$$

همون دترمینان
مواست به این منقیه باشه.

گام ۲ (محاسبه A^2 برحسب A و I)

به گفته سؤال $A = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 4 & -3 \end{bmatrix}$ است، پس طبق نکته بالا می‌توانیم A^2 را برحسب خودش و I بنویسیم:

$$A^2 = (-1-3)A - ((-1)(-3) - (2)(4))I \Rightarrow A^2 = -4A + 5I \quad (**)$$

گام ۳ (محاسبه خواسته سؤال) با مقایسه رابطه‌های (*) و (**) نتیجه می‌گیریم که

$$-\frac{\beta}{\alpha} = -4 \quad \text{است؛ بنابراین } \frac{\beta}{\alpha} = 4 \quad \text{می‌شود.}$$

ب) مطابق شکل مقابل، وقتی نقطه‌ای روی محور بازتاب باشد، بازتابش می‌شود خودش و برعکس؛ یعنی اگر بازتاب نقطه‌ای بشود خودش، می‌توانیم بگوییم آن نقطه روی محور بازتاب قرار دارد.

۲ در هر لوزی (و در نتیجه هر مربع، چون مربع هم نوعی لوزی است) قطرهای عمودمنصف هم هستند.

۳ یادآوری از هندسه تحلیلی:

الف) اگر نقطه M وسط پاره‌خط AC باشد، آن‌گاه:

$$x_M = \frac{x_A + x_C}{2} \quad \text{و} \quad y_M = \frac{y_A + y_C}{2}$$

ب) فاصله نقطه $A(a, b)$ از مبدأ مختصات $(O(0, 0))$ ، از رابطه زیر محاسبه می‌شود:

$$OA = \sqrt{a^2 + b^2}$$

گام ۱ (رسم شکل فرضی و تحلیل سؤال):

ابتدا شکل فرضی مقابل را می‌کشیم:

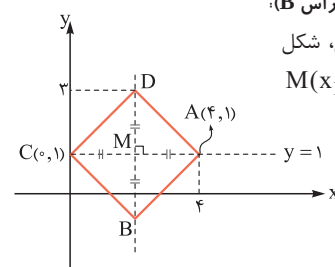
سؤال گفته مختصات رأس A به صورت $A(4, 1)$ است، ضمن آن‌که بازتاب نقطه C نسبت به محور l بر خودش منطبق است، پس طبق شفاف‌سازی، نقطه C روی محور l هاست؛ از طرفی عرض این نقطه برابر ۱ است، بنابراین مختصاتش به صورت $C(0, 1)$ می‌شود. از آن‌جا که در هر مربع، قطرهای عمودمنصف هم هستند، در مربع $ABCD$ ، بازتاب رأس D نسبت به قطر AC ، همان رأس B است و دو رأس A و C هم بازتاب یکدیگر نسبت به قطر BD هستند.

گام ۲ (رسم شکل دقیق و پیدا کردن مختصات رأس B):

با توجه به فرضیات سؤال و توضیحات گام قبل، شکل

دقیق به این صورت است. برای نقطه $M(x_M, y_M)$

دو چیز می‌توانیم بگوییم:



♦ M وسط BD است؛ طبق مورد (۳) درس‌نامه داریم:

$$y_M = \frac{y_B + y_D}{2} \Rightarrow 1 = \frac{y_B + 3}{2} \Rightarrow y_B = -1$$

♦ M وسط AC است؛ باز هم طبق مورد (۳) درس‌نامه داریم:

$$x_M = \frac{x_A + x_C}{2} \Rightarrow x_M = x_B = \frac{4 + 0}{2} = 2$$

پس مختصات نقطه B به این صورت می‌شود:

گام ۳ (محاسبه خواسته سؤال):

در گام قبل، مختصات نقطه B را به دست آوردیم، حالا می‌توانیم فاصله $B(2, -1)$ را از مبدأ

$$OB = \sqrt{2^2 + (-1)^2} = \sqrt{5}$$

۳۴ - گزینه ۳

شفاف‌سازی «نیمساز زاویه متوسط را رسم می‌کنیم»، یعنی نیمساز زاویه رو به ضلع متوسط را می‌کشیم.

درس‌نامه ۱ در هر مثلث هر چه طول یک ضلع

بزرگ‌تر باشد، اندازه زاویه روبه‌روی آن هم بزرگ‌تر است و

بالعکس. مثلاً در شکل مقابل اگر $\hat{A} > \hat{B} > \hat{C}$ رو به a رو به b رو به c

باشد؛ می‌توانیم بگوییم $a > b > c$ است و همین‌طور

اگر $a > b > c$ باشد، $\hat{A} > \hat{B} > \hat{C}$ می‌شود.

۲ قضیه نیمساز داخلی: در مثلث ABC ، اگر مطابق شکل، AD نیمساز زاویه A باشد، داریم:

$$\frac{BD}{CD} = \frac{AB}{AC}$$



۳۶- گزینه ۱



فقط حواستان باشد، زمانی می‌توانید از رابطه‌های مذکور استفاده کنید که ضرب x^2 و y^2 برابر ۱ و عدد ثابت، سمت چپ باشد. اگر معادله گسترده این شکلی نبود، باید چنین شرایطی را خودتان بسازید. ۲) معادله دایره به مرکز $O(\alpha, \beta)$ و شعاع r به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = r^2$$

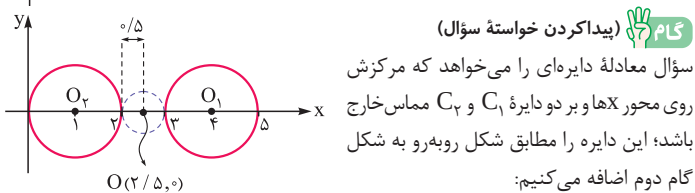
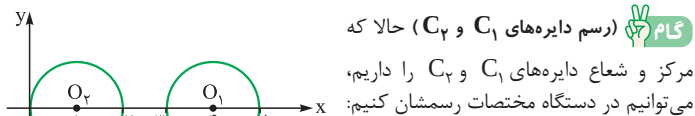
گام ۱ (پیدا کردن مرکز و شعاع دایره‌های داده شده)

اول مرکز و شعاع دایره‌ها را به دست می‌آوریم: $C_1: x^2 - 8x + y^2 + 15 = 0$

$$O_1 = \left(-\frac{-8}{2}, -\frac{0}{2}\right) = (4, 0), \quad r = \sqrt{4^2 + 0^2 - 15} = 1$$

$C_2: x^2 - 2x + y^2 = 0$

$$O_2 = \left(-\frac{-2}{2}, -\frac{0}{2}\right) = (1, 0), \quad r = \sqrt{1^2 + 0^2 - 0} = 1$$



همان‌طور که می‌بینید، مرکز این دایره نقطه $O(2/5, 0)$ و شعاعش $5/2$ است، پس معادله دایره می‌شود: $(x - 2/5)^2 + (y - 0)^2 = 25/4 \Rightarrow x^2 - 8x + 6/25 + y^2 = 25/4 \Rightarrow x^2 + y^2 - 8x + 6 = 0$

۳۸- گزینه ۱



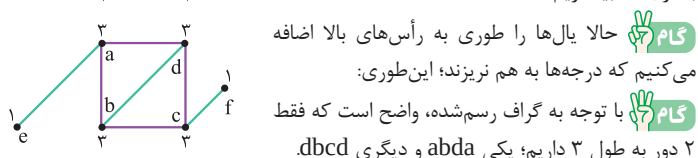
درس‌نامه ۱ باقی‌مانده تقسیم مجموع اعداد فاکتوریلی بر یک عدد خاص از یک جایی به بعد همواره برابر صفر می‌شود. برای مثال اگر باقی‌مانده تقسیم « $1! + 2! + 3! + 4! + \dots$ » بر ۸ را بخواهیم، واضح است که از ۳! به بعد $(4!, 5!, \dots)$ همه مضرب ۸ هستند، پس باقی‌مانده این عدد بر ۸، برابر باقی‌مانده عدد « $1! + 2! + 3! = 9$ » بر ۸ است که می‌شود ۱. ۲) رقم یکان هر عدد صحیح برابر با باقی‌مانده تقسیمش بر ۱۰ است. طبق مورد (۲) درس‌نامه، رقم یکان هر عدد، برابر باقی‌مانده تقسیم آن عدد بر ۱۰ است. واضح است که از ۵! به بعد، همه اعداد مضرب ۱۰ هستند، پس:

$$\underbrace{(1! + 3! + 5! + \dots + 25!)}_{\text{همه مضرب } 10} + \underbrace{(2! + 4! + 6! + \dots + 26!)}_{\text{همه مضرب } 10} \equiv 1! + 2! + 3! + 4! \equiv 9 \pmod{8} \equiv 1 \pmod{8}$$

۳۹- گزینه ۲



گام ۱ اول باید گراف را رسم کنیم. می‌خواهیم دو رأس با کم‌ترین درجه، غیر مجاور باشند، پس رأس‌ها را به این شکل می‌چینیم تا بیشترین فاصله را بین دو رأس با درجه ۱ بیندازیم:



مشاوره این چندمین بار است که طراحان، سؤال گراف را طوری می‌دهند که شما باید گراف را رسم کنید. پس حتماً رسم گراف از روی درجه‌های آن را خیلی خوب تمرین کنید.

درس‌نامه هر وقت همه درایه‌های حاصل از ضرب دو ماتریس A و B را نمی‌خواستید و هدفشان پیدا کردن یک‌سری درایه یا سطر و ستون خاص بود از رابطه‌های زیر استفاده کنید:

$$\begin{bmatrix} \text{ستون } i \text{ از } A \\ \text{ماتریس } B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \text{سطر } i \text{ از } A \\ \text{ماتریس } B \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \text{ستون } j \text{ از } B \\ \text{ماتریس } A \end{bmatrix}$$

$$\text{کل ماتریس } B = [\text{سطر } i \text{ از } A] \times \text{سطر } i \text{ از } A$$

$$\begin{bmatrix} \text{ستون } j \text{ از } A \\ \text{ماتریس } B \end{bmatrix} = \text{کل ماتریس } A \times \begin{bmatrix} \text{ستون } j \text{ از } A \\ \text{ماتریس } B \end{bmatrix}$$

می‌دانیم $A^3 = A \times A \times A$ ، پس می‌توانیم بنویسیم:

$$A^3 = \begin{bmatrix} 3 & -3 & 4 \\ 2 & -3 & 4 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & -3 & 4 \\ 2 & -3 & 4 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & -3 & 4 \\ 2 & -3 & 4 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

اول ضرب دو ماتریس سمت چپ را انجام می‌دهیم:

$$\begin{bmatrix} 3 & -3 & 4 \\ 2 & -3 & 4 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & -3 & 4 \\ 2 & -3 & 4 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -4 & 4 \\ 0 & -1 & 0 \\ -2 & 2 & -3 \end{bmatrix}$$

حالا می‌توانیم به کمک تساوی بالا، A^3 را برحسب ضرب دو ماتریس به این صورت بنویسیم:

$$A^3 = \begin{bmatrix} 3 & -4 & 4 \\ 0 & -1 & 0 \\ -2 & 2 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & -3 & 4 \\ 2 & -3 & 4 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

از ماتریس بالا فقط درایه‌های سطر اولش را می‌خواهیم، پس طبق درس‌نامه کافی است سطر اول ماتریس قرمز را در کل ماتریس سبز ضرب کنیم:

$$A^3 \text{ سطر اول} = \begin{bmatrix} 3 & -4 & 4 \\ 2 & -3 & 4 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 3 & -3 & 4 \\ 2 & -3 & 4 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

تیزبازی در ضرب ۳ ماتریس هم می‌توانیم به جای محاسبه کل درایه‌ها، فقط درایه‌های خاص را هدف قرار بدهیم. برای این کار از رابطه زیر استفاده می‌کنیم:

$$\begin{bmatrix} \text{ستون } i \text{ از } A \\ \text{ماتریس } B \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \text{سطر } i \text{ از } A \\ \text{ماتریس } B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \text{سطر } i \text{ از } A \\ \text{ماتریس } B \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \text{ستون } j \text{ از } B \\ \text{ماتریس } A \end{bmatrix}$$

همان‌طور که می‌بینید سطر اول و ستون سوم گزینیه متفاوت‌اند، پس می‌توانیم با محاسبه این درایه سؤال را حل کنیم. از ضرب $A \times A \times A$ ، فقط درایه سطر اول و ستون سوم را می‌خواهیم، پس طبق نکته بالا کافی است بنویسیم:

$$\begin{bmatrix} 3 & -3 & 4 \\ 2 & -3 & 4 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & -3 & 4 \\ 2 & -3 & 4 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & -3 & 4 \\ 2 & -3 & 4 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -4 & 4 \\ 2 & -3 & 4 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & -3 & 4 \\ 2 & -3 & 4 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & -3 & 4 \\ 2 & -3 & 4 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

تنها ماتریسی که سطر اول و ستون سومش ۰ است، ماتریس $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$ در ① است؛ پس همین گزینه جواب است.

۳۷- گزینه ۲



درس‌نامه ۱ معادله گسترده هر دایره به صورت $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$ است. برای به دست آوردن شعاع و مرکز دایره در این معادله، از روابط زیر استفاده می‌کنیم:

$$O\left(-\frac{a}{2}, -\frac{b}{2}\right), \quad r = \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{b}{2}\right)^2 - c}$$

↓
عدد ثابت معادله گسترده



۴۳- گزینه ۴

درس نامه تبدیل یکای زنجیره‌ای؛ برای تبدیل یکای یک کمیت به یکای دیگر، از روش تبدیل یکای زنجیره‌ای استفاده می‌کنیم. مثلاً برای این که ببینیم 20 in معادل چند cm است، به صورت زیر عمل می‌کنیم:

گام ۱ ابتدا تساوی بین دو یکا را می‌نویسیم، سپس کسر تبدیل مناسب را به دست می‌آوریم.

$$1 \text{ in} = 2.54 \text{ cm} \Rightarrow \frac{1 \text{ in}}{2.54 \text{ cm}} = 1 \text{ یا } \frac{2.54 \text{ cm}}{1 \text{ in}} = 1$$

گام ۲ حالا کسر تبدیل مناسب را انتخاب می‌کنیم تا پس از ساده‌شدن به یکای مورد نظرمان برسیم.

$$20 \text{ in} = 20 \text{ in} \times \frac{2.54 \text{ cm}}{1 \text{ in}} = 50.8 \text{ cm}$$

با استفاده از روش تبدیل یکای زنجیره‌ای، جرم الماس را بر حسب kg به دست می‌آوریم:

$$m = 182 \text{ قیراط} \times \frac{200 \text{ mg}}{1 \text{ قیراط}} \times \frac{10^{-3} \text{ g}}{1 \text{ mg}} \times \frac{1 \text{ kg}}{10^3 \text{ g}} = \frac{182 \times 200 \times 10^{-3}}{10^3} \text{ kg} = 3.64 \times 10^{-2} \text{ kg}$$

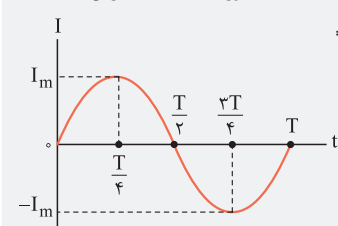
تله اگر جرم الماس را بر حسب گرم به دست بیاورید، به ۱ می‌رسید.

۴۴- گزینه ۲

درس نامه ۱ معادله جریان متناوب سینوسی بر حسب زمان:

$$(A) \text{ جریان} \leftarrow I = I_m \sin \frac{2\pi}{T} t \rightarrow (s) \text{ زمان}$$

(A) بیشینه جریان (s) دوره



۲ نمودار جریان متناوب سینوسی بر حسب زمان:

گام ۱ با استفاده از نمودار داده‌شده، بیشینه جریان و دوره را مشخص می‌کنیم:

$$I_m = 2 \text{ A}, \quad \frac{T}{4} = 0.01 \Rightarrow T = 0.04 \text{ s}$$

گام ۲ معادله جریان متناوب سینوسی بر حسب زمان را می‌نویسیم:

$$I = I_m \sin \frac{2\pi}{T} t \xrightarrow{\frac{I_m = 2 \text{ A}}{T = 0.04 \text{ s}}} I = 2 \sin \frac{2\pi}{0.04} t \Rightarrow I = 2 \sin 50\pi t$$

۴۵- گزینه ۱

شفاف‌سازی در حرکت هماهنگ ساده، تندی نوسانگر در نقطه تعادل ($x=0$) بیشینه می‌شود.

درس نامه دوره تناوب آونگ ساده:

$$\begin{aligned} \uparrow & \text{دوره تناوب (S)} \\ \uparrow & \text{طول آونگ (m)} \rightarrow T = 2\pi \sqrt{\frac{L}{g}} \\ \uparrow & \text{شتاب گرانش (m/s}^2\text{)} \rightarrow \end{aligned}$$

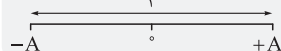
گام ۱ ابتدا نکات زیر را بخوانید:

نکته ۱ در حرکت هماهنگ ساده، حداقل مدت زمانی که طول می‌کشد تا نوسانگر از

انتها تا وسط پاره خط نوسان (بیشینه تندی نوسانگر در این نقطه است) را طی کند، برابر با $\frac{T}{4}$ است.

نکته ۲ در حرکت هماهنگ ساده، حداقل مدت زمانی که طول می‌کشد تا نوسانگر از یک انتها به

انتهای دیگر پاره خط نوسان برود، برابر با $\frac{T}{2}$ است.



۴۰- گزینه ۱

درس نامه اگر m کیلوتر وارد k لانه شوند، بیشترین مقدار n به گونه‌ای که مطمئن باشیم حداقل n کیلوتر درون یک لانه هستند، از رابطه مقابل به دست می‌آید:

$$n = \left\lceil \frac{m}{k} \right\rceil$$

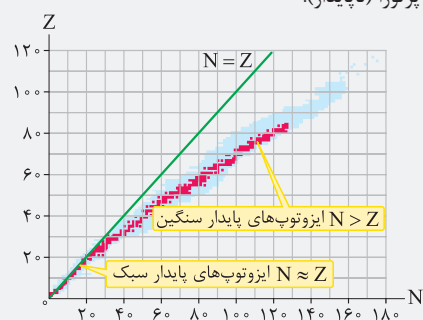
۶۵ نفر سر کلاس را برابر تعداد کیلوترها و ۱۲ ماه سال را برابر تعداد لانه‌ها در نظر می‌گیریم، پس بیشترین مقدار n به گونه‌ای که مطمئن باشیم حداقل n نفر دارای ماه تولد یکسان

$$\text{هستند، طبق نکته بالا، می‌شود } n = \left\lceil \frac{65}{12} \right\rceil = \left\lceil 5.4 \right\rceil = 6$$

فیزیک

۴۱- گزینه ۴

درس نامه نمودار تغییرات Z (تعداد پروتون‌ها) بر حسب N (تعداد نوترون‌ها) برای هسته‌های پایدار و پرتوزا (ناپایدار):



در نمودار بالا، در هسته‌های پایدار سبک عموماً $N = Z$ و در هسته‌های پایدار سنگین $N > Z$ است.

با توجه به نمودار $Z - N$ که در درس‌نامه آمده است، گزینه‌ها را بررسی می‌کنیم.

۱ در هسته‌های پایدار سبک عموماً $N = Z$ و در هسته‌های پایدار سنگین $N > Z$ است. ✗

۲ نسبت $\frac{N}{Z}$ برای تمام عناصر یکسان نیست. این نسبت برای هسته‌های پایدار سبک

عموماً برابر با یک و برای هسته‌های پایدار سنگین بزرگ‌تر از یک است. ✗

۳ در هسته‌های ناپایدار (پرتوزا)، $N > Z$ است. ✗

۴ در هسته‌های پایدار سنگین‌تر، تعداد نوترون‌ها بیشتر از تعداد پروتون‌هاست؛ پس نسبت

$$\frac{N}{Z} \text{ بزرگ‌تر است. } \checkmark$$

۴۲- گزینه ۳

درس نامه نیمه‌عمر: اگر تعداد هسته‌های مادر اولیه در یک نمونه پرتوزا N_0 باشد، تعداد هسته‌های پرتوزای باقی‌مانده پس از مدت زمان t از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$\begin{aligned} \text{تعداد هسته‌های اولیه} & \uparrow \text{مدت زمان} \\ N_0 & \uparrow \\ N = \frac{N_0}{2^n} & \leftarrow \text{تعداد هسته‌های باقی‌مانده} \\ \text{تعداد نیمه‌عمر} & \rightarrow \end{aligned} \quad \begin{aligned} n & = \frac{t}{T_{1/2}} \\ \uparrow \\ \text{نیمه‌عمر} & \downarrow \end{aligned}$$

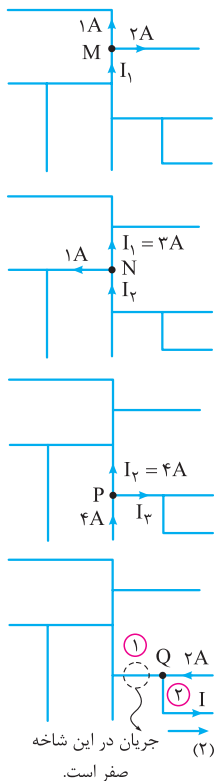
گام ۱ ابتدا تعداد نیمه‌عمرهای سپری‌شده را به دست می‌آوریم:

$$n = \frac{t}{T_{1/2}} = \frac{t = 3 \text{ h} = 3 \times 60 \text{ min}}{T_{1/2} = 45 \text{ min}} = \frac{3 \times 60}{45} = 4$$

گام ۲ حالا $n = 4$ را در رابطه زیر جای‌گذاری می‌کنیم تا ببینیم چه کسری از ماده اولیه

$$N = \frac{N_0}{2^n} \xrightarrow{n=4} N = \frac{N_0}{2^4} = \frac{N_0}{16}$$

باقی مانده است:



گام ۱ طبق قاعده انشعاب (برابری مجموع جریان‌های ورودی به یک گره با مجموع جریان‌های خروجی از آن) در گره M، جریان I_1 را به دست می‌آوریم.

$$I_1 = I_2 + I_3 = 3A$$

گام ۲ قاعده انشعاب را در گره N به کار می‌بریم تا جریان I_2 را به دست بیاوریم.

$$I_2 = I_1 - I_3 = 1A$$

$$I_3 = I_1 - I_2 = 2A$$

گام ۳ حالا قاعده انشعاب را برای گره P به کار می‌بریم تا جریان I_4 را پیدا کنیم.

$$I_4 = I_2 + I_3 = 3A$$

$$I_4 = I_2 + I_3 = 3A$$

گام ۴ قاعده انشعاب را برای گره Q استفاده می‌کنیم تا مقدار جریان I را پیدا و جهت آن را مشخص کنیم.

$$I_2 = I_1 - I_3 = 1A$$

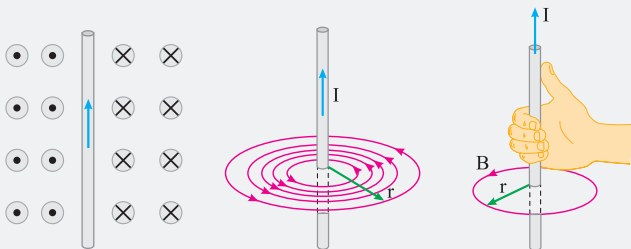
$$2A = I$$

با توجه به این که جریان عبوری از شاخه (۱) صفر است، پس جریان $2A$ باید از شاخه (۲) عبور کند. بنابراین $I = 2A$ و در جهت (۲) است.

۴۹ - گزینه ۳

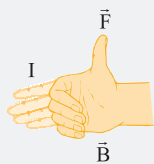
درس‌نامه ۱ میدان مغناطیسی در اطراف سیم حامل جریان:

وقتی که از یک سیم، جریان الکتریکی عبور می‌کند، در اطراف آن میدان مغناطیسی ایجاد می‌شود. طبق قاعده دست راست، اگر سیم را طوری در دست راست خود بگیریم که انگشت شست دست راست در جهت جریان باشد، جهت خم شدن چهار انگشت، جهت میدان مغناطیسی در اطراف آن را نشان می‌دهد.



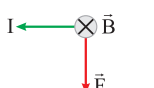
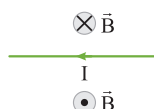
۲ جهت نیروی مغناطیسی وارد بر سیم حامل جریان:

طبق قاعده دست راست، اگر چهار انگشت دست راستمان را در جهت جریان الکتریکی بگیریم و آن‌ها را مطابق شکل به طرف میدان مغناطیسی $\vec{B}$ خم کنیم، آن‌گاه انگشت شست ما جهت نیروی مغناطیسی وارد بر سیم را نشان می‌دهد.



گام ۱ جهت میدان مغناطیسی در بالای سیم درون سو و پایین سیم برون سو است. طبق قاعده دست راست، اگر انگشت شست دست راستمان را به سمت چپ بر روی سیم قرار بدهیم و چهار انگشتان را خم کنیم، جهت میدان مغناطیسی در بالای سیم درون سو و در پایین سیم برون سو می‌شود (رد ۱ و ۴).

گام ۲ در ادامه، میدان مغناطیسی خارجی درون سو بر سیم اثر می‌کند. در این حالت طبق قاعده دست راست، اگر چهار انگشت دست راستمان را در جهت جریان الکتریکی (←) طوری قرار بدهیم که وقتی آن‌ها را خم می‌کنیم، در جهت میدان مغناطیسی (⊗) قرار بگیرد، آن‌گاه انگشت شستمان جهت نیروی مغناطیسی وارد بر سیم (↓) را نشان می‌دهد.



با توجه به نکات، در مدتی که نوسانگر A مسیر شکل (الف) را طی می‌کند، متحرک B مسیر شکل (ب) را طی کرده است. (توجه کنید که تندی آونگ A در $x = 0$ بیشینه می‌شود).

$$\Delta t = \frac{T_A}{4} = \frac{T_B}{2} \Rightarrow T_A = 2T_B$$



گام ۱ حالا با استفاده از رابطه دوره تناوب آونگ ساده می‌توانیم بنویسیم:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}} \Rightarrow \frac{T_A}{T_B} = \sqrt{\frac{L_A}{L_B}} \xrightarrow{T_A=2T_B} 2 = \sqrt{\frac{L_A}{L_B}} \Rightarrow \frac{L_A}{L_B} = 4$$

تله اگر نسبت $\frac{L_B}{L_A}$ را به دست بیاوریم، به گزینه نادرست ۴ می‌رسید.

۴۶ - گزینه ۳

نکته استراتژی ابتدا f_1 را با استفاده از اختلاف دو بسامد تشدید متوالی تار به دست بیاوریم، سپس با توجه به تعداد گره در تار، بسامد هماهنگ n ام را محاسبه کنید.

گام ۱ ابتدا نکته زیر را بخوانید:

نکته اختلاف دو بسامد تشدید متوالی تار دو انتها بسته برابر با بسامد تشدید اول (f_1) است.

با توجه به نکته بالا، بسامد تشدید اول (f_1) تار را محاسبه می‌کنیم:

$$f_{n+1} - f_n = f_1 \Rightarrow f_1 = 225 - 150 = 75 \text{ Hz}$$

گام ۲ شماره هماهنگ تار را با توجه به نکته زیر به دست می‌آوریم:

نکته شماره هماهنگ تار مرتضی دو انتها بسته از تعداد گره‌های تار، یک عدد کم‌تر است. $n = \text{تعداد گره} - 1$

$$n = 5 - 1 = 4$$

گام ۳ در آخر با توجه به نکته زیر، بسامد تشدید هماهنگ چهارم تار (f_4) را محاسبه می‌کنیم:

نکته بسامد تشدید هماهنگ n ام تار دو انتها بسته، n برابر بسامد تشدید اول (f_1) است.

$$f_4 = 4f_1 \Rightarrow f_4 = 4 \times 75 = 300 \text{ Hz}$$

تله اگر به جای $n = 4$ ، مقدار $n = 5$ را لحاظ کنید، به ۲ می‌رسید.

۴۷ - گزینه ۴

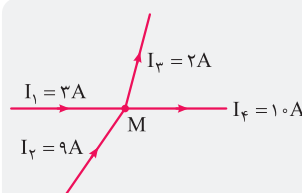
«تحلیل نقش پراش مبتنی بر بحث تداخل امواج است». این جمله عیناً از کتاب درسی آمده است. کتاب درسی درباره این موضوع بیشتر از این صحبت نکرده است! شما هم فقط همین را بدانید.

مشاوره اگر چشمتان به بخش پدیده پراش در کتاب درسی خورده بود، می‌توانستید به این سؤال پاسخ درست بدهید. حتی اگر مبحثی را حذف کردید، حواستان باشد اطلاعات مقدماتی‌اش را بلد باشید؛ چون ممکن است یک سؤال ساده مثل این بیاید.

۴۸ - گزینه ۱

درس‌نامه قاعده انشعاب: مجموع جریان‌های

ورودی به یک گره (یا محل انشعاب) برابر با مجموع جریان‌های خروجی از آن گره است. مثلاً در شکل روبه‌رو، جریان $I_1 + I_2 = 12A$ به گره M وارد شده و جریان $I_3 + I_4 = 12A$ از آن خارج شده است.





تله اگر به اشتباه، گرمای داده شده به منبع دما پایین را بر زمان هر چرخه تقسیم کنید، ۱ را به دست می آورید.

گزینه ۱ - ۵۲

استراتژی نمودار سرعت - زمان متحرک را با توجه به نمودار مکان - زمان آن رسم کنید و با استفاده از مساحت محصور بین نمودار سرعت - زمان و محور t ، سرعت متوسط متحرک در بازه زمانی صفر تا t_1 را به دست بیاورید.

درس نامه ۱ سرعت متوسط: نسبت جابه جایی متحرک به مدت زمان جابه جایی:

$$v_{av} = \frac{\Delta x}{\Delta t}$$

۲ مساحت محصور بین نمودار سرعت - زمان و محور t در یک بازه زمانی، بیانگر اندازه جابه جایی متحرک در آن بازه زمانی است. اگر نمودار سرعت - زمان بالای محور t باشد، جابه جایی متحرک مثبت و اگر پایین محور t باشد، جابه جایی متحرک منفی است.

$$\begin{cases} \Delta x_1 = S_1 & \text{جابه جایی در بازه زمانی صفر تا } t_1 \\ \Delta x_2 = -S_2 & \text{جابه جایی در بازه زمانی } t_1 \text{ تا } t_2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \Delta x = \Delta x_1 + \Delta x_2 = S_1 - S_2$$

گام ۱ به شکل (الف) نگاه کنید و توضیحات زیر را بخوانید.

(۱) سرعت متوسط متحرک در ۸ ثانیه اول صفر است؛ پس طبق رابطه $v_{av} = \frac{\Delta x}{\Delta t}$ ، جابه جایی آن در ۸ ثانیه اول صفر است (یعنی مکان متحرک در لحظه $t = 0$ و $t = 8$ یکسان است).

(۲) سهمی نسبت به خطی که از رأس آن می گذرد، متقارن است؛ پس رأس سهمی در لحظه $t = 4$ است.

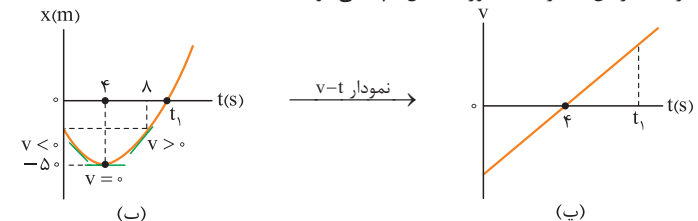
(۳) طبق گفته سؤال، متحرک در لحظه t_1 از مبدأ محور عبور می کند.

گام ۲ در گام اول، اطلاعات داده شده در سؤال را روی نمودار مکان - زمان متحرک مشخص کردیم. حالا می خواهیم نمودار سرعت - زمان متحرک را با توجه به نمودار مکان - زمان آن رسم کنیم. برای این کار، ابتدا نکته زیر را بخوانید.

نکته شیب خط مماس بر نمودار مکان - زمان متحرک در هر لحظه، بیانگر سرعت متحرک در آن لحظه است.



همان طور که در شکل (ب) می بینید، شیب نمودار مکان - زمان متحرک در بازه زمانی $(0, 4)$ منفی، در لحظه $t = 4$ صفر و پس از لحظه $t = 4$ مثبت است. پس نمودار سرعت - زمان متحرک به صورت شکل (پ) می شود.



گام ۳ سرعت متحرک در لحظه t_1 برابر با 20 m/s است و با توجه به شکل (ب)، جابه جایی متحرک از لحظه $t = 0$ تا لحظه t_1 برابر با 50 m است. با استفاده از مساحت محصور بین نمودار سرعت - زمان و محور t در t_1 می توانیم بنویسیم (شکل ت):

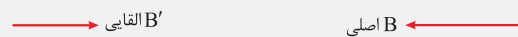
$$S_1 = \Delta x_1 = \frac{20 \times (t_1 - 4)}{2} = 50 \Rightarrow t_1 - 4 = 5 \Rightarrow t_1 = 9 \text{ s}$$

گزینه ۱ - ۵۰

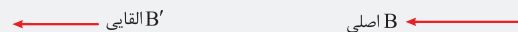
درس نامه قانون لنز

از قانون لنز برای تعیین جهت جریان القایی استفاده می شود.

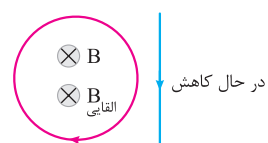
(الف) وقتی شار افزایشی است، میدان القایی (ثانویه) در جهت مخالف میدان اصلی (اولیه) است تا از این راه با افزایش شار مخالفت کند.



(ب) وقتی شار کاهش می یابد، میدان القایی (ثانویه) هم جهت با میدان اصلی (اولیه) است تا از این راه با کاهش شار مخالفت کند.



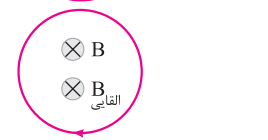
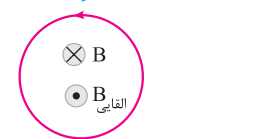
جهت جریان القایی حلقه را برای هر یک از گزینه ها بررسی می کنیم:



I در حال کاهش



I در حال افزایش



I در حال کاهش

۱: طبق قاعده دست راست، جهت میدان مغناطیسی حاصل از سیم درون حلقه (B)، درون سو است. از طرفی چون I در حال کاهش است، پس شار مغناطیسی عبوری از درون حلقه نیز در حال کاهش است؛ بنابراین طبق قانون لنز، جهت جریان القایی حلقه باید ساعتگرد باشد تا از کاهش شار جلوگیری کند (گزینه درست معلوم شد).

۲ و ۳: این دو گزینه مثل هم هستند، پس با هم بررسی شان می کنیم. طبق قاعده دست راست، جهت میدان مغناطیسی حاصل از سیم درون حلقه (B)، درون سو است. از طرفی چون I در حال افزایش است، پس شار مغناطیسی عبوری از درون حلقه نیز در حال افزایش است؛ بنابراین طبق قانون لنز، جهت جریان القایی حلقه باید پادساعتگرد باشد تا از افزایش شار جلوگیری کند.

۴: طبق قاعده دست راست، جهت میدان مغناطیسی حاصل از سیم درون حلقه (B)، درون سو است. از طرفی چون I در حال کاهش است، پس شار مغناطیسی عبوری از درون حلقه نیز در حال کاهش است؛ بنابراین طبق قانون لنز، جهت جریان القایی حلقه باید ساعتگرد باشد تا از کاهش شار جلوگیری کند.

گزینه ۲ - ۵۱

درس نامه ۱ قانون دوم ترمودینامیک به بیان ماشین گرمایی:

$$\begin{aligned} & \text{گرمای به منبع دما پایین (J)} \\ & \uparrow \\ & Q_H = |W| + |Q_L| \leftarrow \text{گرمای از منبع دما بالا (J)} \\ & \downarrow \\ & \text{کار (J)} \\ & \downarrow \\ & P = \frac{|W|}{\Delta t} \leftarrow \text{توان خروجی یک ماشین گرمایی} \\ & \downarrow \\ & \text{مدت زمان (s)} \end{aligned}$$

گام ۱ ابتدا با استفاده از قانون دوم ترمودینامیک به بیان ماشین گرمایی، کار انجام شده در هر چرخه را به دست می آوریم:

$$Q_H = |W| + |Q_L| \xrightarrow{\frac{Q_H = 100 \text{ J}}{|Q_L| = 60 \text{ J}}} 100 = |W| + 60 \Rightarrow |W| = 40 \text{ J}$$

$$P = \frac{|W|}{\Delta t} \xrightarrow{\frac{|W| = 40 \text{ J}}{\Delta t = 5 \text{ s}}} P = \frac{40}{5} = 8 \text{ W}$$

مشاوره این سؤال عیناً از تمرین کتاب درسی است؛ حتی عددهای آن! اگر کتاب درسی را تا الان نخوانده اید، فرصت را از دست ندهید.



۵۴- گزینه ۴

شفاف سازی نیرویی که سطح زمین بر جسم وارد می کند، برابری دو نیروی عمودی سطح (F_N) و نیروی اصطکاک (f) است.

درس نامه ۱ قانون دوم نیوتون:

نیروی خالص (N)
 $\uparrow$
 $F_{net} = m a \rightarrow (m/s^2)$ شتاب
 $\downarrow$
 (kg) جرم

۲ اندازه نیرویی که سطح بر جسم وارد می کند (R)، برابر با برابری دو نیروی عمودی سطح (F_N) و نیروی اصطکاک (f) است.
 در رابطه بالا، f می تواند f_s یا $f_{s,max}$ باشد.

گام ۱ اندازه نیرویی که سطح زمین بر جسم وارد می کند، برابر با برابری دو نیروی عمودی سطح (F_N) و نیروی اصطکاک (f) است. بنابراین با توجه به شکل روبه رو می توانیم بنویسیم:

$$R = \sqrt{F_N^2 + f_k^2} \xrightarrow{F_N = 1500 N} 1625^2 = (1500)^2 + f_k^2$$

$$\Rightarrow (125 \times 13)^2 = (125 \times 12)^2 + f_k^2 \Rightarrow 125^2 \times 13^2 = 125^2 \times 12^2 + f_k^2$$

$$\Rightarrow f_k^2 = 125^2 [(13)^2 - (12)^2] \Rightarrow f_k = 125 \sqrt{25} = 625 N$$

نکته در مثلث قائم الزاویه، اگر یکی از ضلع ها مضرب از Δ ($5k$) و ضلع دیگر مضرب از 12 ($12k$) باشد، آن گاه وتر این مثلث مضرب از 13 ($13k$) است.

با توجه به نکته بالا، می توانستیم مقدار f_k را سریع تر به دست بیاوریم.

$$\begin{cases} 13k = 1625 \\ 12k = 1500 \end{cases} \Rightarrow k = 125, f_k = 5k \xrightarrow{k=125} f_k = 5 \times 125 = 625 N$$

گام ۲ حالا از قانون دوم نیوتون استفاده می کنیم و اندازه F را به دست می آوریم:

$$F - f_k = ma \xrightarrow{m=150 kg, a=2 m/s^2, f_k=625 N} F - 625 = 150 \times 2$$

$$\Rightarrow F - 625 = 300 \Rightarrow F = 925 N$$

۵۵- گزینه ۳

درس نامه ۱ جابه جایی در T ثانیه m در سقوط آزاد بدون سرعت اولیه (جهت $+y$ را رو به پایین فرض کردیم):

$$\Delta y = (n - 0 / \Delta) g T^2$$

۲ **تندی متوسط**: نسبت مسافت طی شده به مدت زمان.

$$s_{av} = \frac{\ell}{\Delta t} \rightarrow (m)$$

مسافت (m) $\rightarrow$ مدت زمان (s)

گام ۱ داده ها را در رابطه زیر جای گذاری می کنیم تا جابه جایی گلوله در نیم ثانیه سوم را به دست بیاوریم (جهت مثبت y را رو به پایین فرض کردیم):

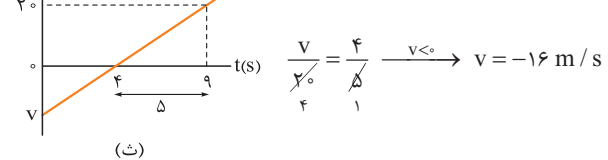
$$\Delta y = (n - 0 / \Delta) g T^2 \quad n=3, T=0.5 s \quad \Delta y = (3 - 0 / 0.5) (9.8) (0.5)^2 = \frac{9}{8} \times 9.8 m$$

گام ۲ در سقوط آزاد، جابه جایی در یک بازه زمانی مشخص با مسافت طی شده در آن بازه زمانی برابر است؛ بنابراین تندی متوسط گلوله در نیم ثانیه سوم برابر است با:

$$s_{av} = \frac{\ell}{\Delta t} \xrightarrow{\ell = \frac{9}{8} \times 9.8 m, \Delta t = 0.5 s} s_{av} = \frac{\frac{9}{8} \times 9.8}{0.5} = 12.25 m/s$$

مشاوره گاهی اوقات طراح اطلاعات اضافی به ما می دهد. مثلاً در این سؤال، ارتفاع 30 متر تأثیری در حل مسئله ندارد و اطلاعات اضافی است. پس هواستون به این اطلاعات اضافی باشد تا هواستون رو به هم نزنه!

گام ۱ حالا با استفاده از تشابه مثلث ها، می توانیم سرعت اولیه متحرک را به دست بیاوریم (شکل ث):



گام ۲ دیگه آفرشه... جابه جایی متحرک در بازه زمانی صفر تا $t_1 = 9 s$ را با استفاده از مساحت محصور بین نمودار سرعت - زمان و محور t به دست می آوریم و در آخر خواسته سؤال یعنی سرعت متوسط متحرک در بازه زمانی صفر تا $t_1 = 9 s$ را با استفاده از رابطه

$$v_{av} = \frac{\Delta x}{\Delta t} \quad \Delta x = S_1 - S_2 \quad S_1 = 50 m \quad \Delta x = 50 - \frac{4 \times 16}{2} = 18 m$$

$$v_{av} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{18}{9} = 2 m/s$$

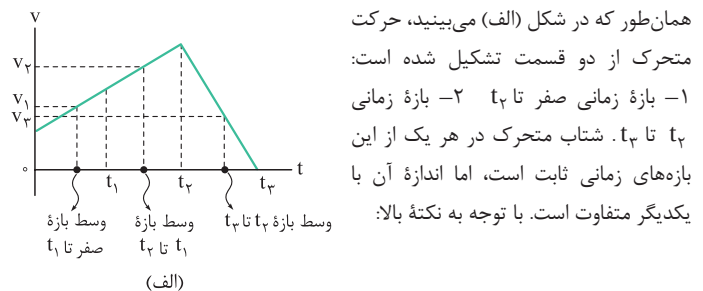
(ج)

مشاوره شما می توانید برای تمام مسائل حرکت بر خط راست، نمودار سرعت - زمان متحرک را رسم کنید، اما گاهی اوقات رسم این نمودار دشوار و وقت گیر است و حل مسئله را پیچیده می کند و گاهی اوقات هم رسم آن به سادگی امکان پذیر است (مثل همین سؤال) و حل مسئله را ساده می کند.

۵۳- گزینه ۲

با سؤال بدقلقی مواجهیم! ابتدا نکته زیر را بخوانید:

نکته اگر متحرکی با شتاب ثابت بر روی خط راست و بدون تغییر جهت حرکت کند، تندی متوسط آن در یک بازه زمانی مشخص، برابر با تندی آن در لحظه وسط آن بازه است.



همان طور که در شکل (الف) می بینید، حرکت متحرک از دو قسمت تشکیل شده است:

۱- بازه زمانی صفر تا t_1 - ۲- بازه زمانی t_1 تا t_3 .

شتاب متحرک در هر یک از این بازه های زمانی ثابت است، اما اندازه آن با یکدیگر متفاوت است. با توجه به نکته بالا:

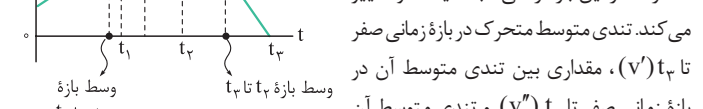
تندی متوسط متحرک در بازه زمانی صفر تا t_1 $v_1 = t_1$

تندی متوسط متحرک در بازه زمانی t_1 تا t_3 $v_2 = t_2$

تندی متوسط متحرک در بازه زمانی t_2 تا t_3 $v_3 = t_3$

تا الان مشخص شد که تندی متوسط در بازه زمانی t_1 تا t_2 (v_2) از تندی متوسط در دو بازه زمانی دیگر بیشتر است (۱) و (۴) پرا.

اما تندی متوسط در بازه زمانی صفر تا t_3 ! برای محاسبه تندی متوسط در بازه زمانی صفر تا t_3 ، نمی توانیم از نکته بالا استفاده کنیم؛ چون شتاب متحرک در این بازه زمانی ثابت نیست و تغییر می کند. تندی متوسط متحرک در بازه زمانی صفر تا t_3 (v')، مقداری بین تندی متوسط آن در بازه زمانی صفر تا t_1 (v'') و تندی متوسط آن در بازه زمانی t_1 تا t_3 (v_3) است (شکل ب):



یعنی: $v'' < v' < v_3$

بنابراین از بین بازه های زمانی داده شده، تندی متوسط در بازه زمانی t_1 تا t_2 (v_2) بیشتر است.



گام ۲ حالا معادله مکان - زمان دو متحرک را می نویسیم:

$$x_A = v_A t + x_{0A} \xrightarrow{\substack{v_A = -2 \text{ m/s} \\ x_{0A} = 16 \text{ m}}} x_A = -2t + 16$$

$$x_B = v_B t + x_{0B} \xrightarrow{\substack{v_B = \frac{1}{2} \text{ m/s} \\ x_{0B} = -29 \text{ m}}} x_B = \frac{1}{2}t - 29$$



نکته وقتی دو متحرک A و B به یکدیگر می رسند، مکان آن ها یکسان است؛ یعنی:

$$x_A = x_B$$

با توجه به نکته بالا، لحظه ای را که دو متحرک به یکدیگر می رسند، به دست می آوریم:

$$x_A = x_B \xrightarrow{\substack{x_A = -2t + 16 \\ x_B = \frac{1}{2}t - 29}} -2t + 16 = \frac{1}{2}t - 29 \Rightarrow \frac{1}{2}t = 45 \Rightarrow t = 90 \text{ s}$$

گام ۳ سؤال از ما مکان دو متحرک را در لحظه ای که به هم می رسند، می خواهد. کافی

است لحظه $t = 90 \text{ s}$ را در معادله مکان - زمان یکی از متحرک ها (مثلاً متحرک A) قرار

بدهیم و مکان موردنظر را پیدا کنیم.

$$x_A = -2t + 16 \xrightarrow{t=90 \text{ s}} x_A = -2(90) + 16 = -164 \text{ m}$$

۵۸ - گزینه ۲

گام ۱ ابتدا نیروی خالص وارد بر جسم را محاسبه می کنیم:

$$F_{\text{net}} = F - f_k \xrightarrow{\substack{F = 100 \text{ N} \\ f_k = 60 \text{ N}}} F_{\text{net}} = 100 - 60 = 40 \text{ N}$$

گام ۲ حالا داده ها را در رابطه زیر جای گذاری می کنیم و تغییر تکانه جسم در مدت ۱ s

$$F_{\text{net}} = \frac{\Delta p}{\Delta t} \xrightarrow{\substack{F_{\text{net}} = 40 \text{ N} \\ \Delta t = 1 \text{ s}}} 40 = \frac{\Delta p}{1} \Rightarrow \Delta p = 40 \frac{\text{kg} \cdot \text{m}}{\text{s}}$$

مشاوره بعضی از سؤالات کنکور ساده هستند (مثل این سؤال). زمانتان را سر جلسه طوری مدیریت کنید که این سؤالات ساده را از دست ندهید. راستی! وزن جسم (W) در حل این سؤال، کمکی به ما کرد؟!

۵۹ - گزینه ۱

شفاف سازی طول عقربه ساعت شمار برابر با شعاع دایره ای است که نوک عقربه طی می کند.

درس نامه تندی متحرکی که بر روی دایره ای به شعاع r حرکت دایره ای یکنواخت انجام می دهد، از رابطه زیر به دست می آید.

$$v = \frac{2\pi r}{T} \xrightarrow{\substack{\text{شعاع دایره (m)} \\ \text{دوره (s)}}} v = \frac{2\pi r}{T} \text{ (تندی (m/s))}$$

طول عقربه ثانیه شمار، دو برابر طول عقربه ساعت شمار است؛ یعنی شعاع دایره ای که نوک عقربه ثانیه شمار طی می کند، دو برابر شعاع دایره ای است که نوک عقربه ساعت شمار طی می کند. از طرفی، دوره تناوب عقربه ثانیه شمار برابر با ۶۰ s و دوره تناوب عقربه

ساعت شمار برابر با $12 \text{ h} = 12 \times 60 \times 60 \text{ s}$ است؛ بنابراین با استفاده از رابطه $v = \frac{2\pi r}{T}$

$$v = \frac{2\pi r}{T} \xrightarrow{\substack{\text{نوک عقربه ثانیه شمار (۱): } r_1 \\ \text{نوک عقربه ساعت شمار (۲): } r_2}} \frac{v_1}{v_2} = \frac{r_1}{r_2} \times \frac{T_2}{T_1}$$

$$\xrightarrow{T_2 = 12 \times 60 \times 60 \text{ s}, T_1 = 60 \text{ s}, r_1 = 2r_2} \frac{v_1}{v_2} = 2 \times \frac{12 \times 60 \times 60}{60} \Rightarrow \frac{v_1}{v_2} = 1440$$

۶۰ - گزینه ۳

شفاف سازی چون شدت صوت A از شدت صوت B بیشتر است، پس اختلاف تراز شدت صوت A و B برابر ۱۰ dB است؛ یعنی $\beta_A - \beta_B = 10 \text{ dB}$.

۵۶ - گزینه ۴

درس نامه ۱ رابطه مستقل از زمان در سقوط آزاد بدون سرعت اولیه (جهت مثبت Y

را رو به پایین فرض کردیم):

$$v^2 = 2g \Delta y \rightarrow (m) \text{ جابه جایی در راستای قائم}$$

$$\downarrow \text{ شتاب گرانش (m/s}^2\text{)}$$

۲ نیروی خالص متوسط وارد بر جسم، برابر با تغییر تکانه جسم تقسیم بر زمان تغییر آن است و از رابطه زیر به دست می آید:

$$\vec{F}_{\text{av}} = \frac{\Delta \vec{p}}{\Delta t} = \frac{m \Delta \vec{v}}{\Delta t} \xrightarrow{\substack{\text{جرم (kg)} \\ \text{تغییر سرعت (m/s)}}}$$

گام ۱ ابتدا با استفاده از رابطه مستقل از زمان در سقوط آزاد بدون سرعت اولیه، سرعت

برخورد گلوله به سطح سنگ فرس شده را محاسبه می کنیم (جهت مثبت Y را رو به پایین فرض کردیم):

$$v_1^2 = 2g \Delta y \xrightarrow{\substack{g = 10 \text{ m/s}^2 \\ \Delta y = 20 \text{ m}}} v_1^2 = 2 \times 10 \times 20 \Rightarrow v_1 = 20 \text{ m/s}$$

گام ۲ گلوله پس از برخورد به سطح سنگ فرس شده، با تندی 10 m/s از سطح جدا می شود. با توجه به این که جهت Y را رو به پایین فرض کردیم، پس گلوله با سرعت

$$\vec{F}_{\text{av}} = \frac{m \Delta \vec{v}}{\Delta t} \quad v_2 = -10 \text{ m/s} \text{ از سطح جدا می شود. بنابراین می توانیم بنویسیم:}$$

$$\xrightarrow{\substack{m = 2 \text{ kg}, \Delta t = 2 \text{ s} \\ \Delta v = v_2 - v_1, v_1 = 20 \text{ m/s}, v_2 = -10 \text{ m/s}}} F_{\text{av}} = \frac{2 \times 2 \times [(-10) - (20)]}{2} = -30 \text{ N}$$

$$\Rightarrow |F_{\text{av}}| = 30 \text{ N}$$

تله اگر علامت سرعت v_2 را لحاظ نکنید، شما را شکار خواهد کرد.

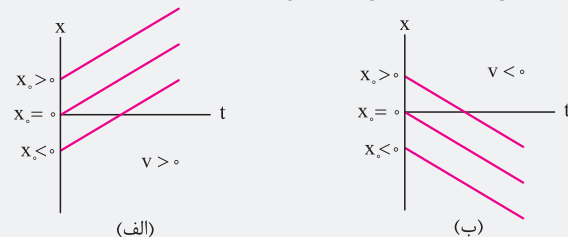
۵۷ - گزینه ۱

شفاف سازی در لحظه ای که دو متحرک به هم می رسند، مکان آن ها یکسان است.

درس نامه ۱ معادله مکان - زمان در حرکت با سرعت ثابت بر روی خط راست:

$$\begin{array}{c} \text{زمان (s)} \\ \uparrow \\ \text{مکان اولیه (m)} \rightarrow x = vt + x_0 \leftarrow \text{مکان متحرک در لحظه (m)} \\ \downarrow \\ \text{سرعت متحرک (m/s)} \end{array}$$

۲ نمودار مکان - زمان متحرکی که با سرعت ثابت بر روی خط راست حرکت می کند، به صورت یک خط راست است. (شکل های الف و ب)



گام ۱ نمودار مکان - زمان دو متحرک A و B به

صورت یک خط راست است؛ پس این دو متحرک با سرعت ثابت حرکت می کنند (یعنی سرعت متوسط متحرک در هر بازه زمانی با سرعت آن در هر لحظه یکسان است). با توجه به شکل روبه رو، سرعت هر یک از متحرک ها را به دست می آوریم.

$$v_A = v_{\text{av},A} = \frac{\Delta x_A}{\Delta t} = \frac{0 - 16}{\lambda - 0} = -\frac{16}{\lambda} = -2 \text{ m/s}$$

$$v_B = v_{\text{av},B} = \frac{\Delta x_B}{\Delta t} = \frac{-25 - (-29)}{\lambda} = \frac{4}{\lambda} = \frac{1}{2} \text{ m/s}$$



گام ۱ دوره تناوب موج را محاسبه می‌کنیم (توجه کنید که دوره تناوب موج برابر با دوره تناوب هر یک از ذرات طناب است):

$$\lambda = vT \Rightarrow T = \frac{0.4}{v} = 0.2 \text{ s}$$

گام ۲ ذره M در نقطه تعادل قرار دارد؛ بنابراین تندی آن بیشینه است و داریم:

$$v_M = v_{\max} = A\omega$$

$$\frac{A=2\text{ cm}=2 \times 10^{-2} \text{ m}}{\omega=\frac{2\pi}{T}=\frac{2\pi}{0.2} \text{ rad/s}} \rightarrow v_{\max} = 2 \times 10^{-2} \times \frac{2\pi}{0.2} = \frac{\pi}{5} \text{ m/s} \rightarrow v_M = v_{\max} = \frac{\pi}{5} \text{ m/s}$$

تله اگر جهت حرکت ذره M را اشتباه تشخیص بدهید، به (۲) می‌رسید.

۶۲- گزینه ۴

شفاف‌سازی سومین حالت برانگیخته اتم هیدروژن؛ یعنی $n=4$ و حالت پایه؛ یعنی $n=1$.

درس‌نامه ۱ انرژی الکترون در اتم هیدروژن در مدار nام:

$$E_n = -\frac{13.6 \text{ eV}}{n^2}$$

۲ در اتم هیدروژن وقتی که الکترون از یک حالت مانا با انرژی بیشتر (E_U) به یک حالت مانا با انرژی کمتر (E_L) می‌رود، یک فوتون گسیل می‌شود. انرژی این فوتون برابر با اختلاف انرژی بین دو مدار اولیه و نهایی است.

$$E_U - E_L = hf$$

بسامد فوتون (Hz)

نکته ۱ پایین‌ترین تراز انرژی ($n=1$) حالت پایه و ترازهای بالاتر ($n>1$) حالت‌های برانگیخته نام دارند. **۲** شماره مدار اولین، دومین، سومین و ... حالت برانگیخته در اتم هیدروژن به ترتیب برابر با $n=2$ ، $n=3$ ، $n=4$ و ... است.

با توجه به نکته بالا، شماره مدار الکترون در سومین حالت برانگیخته اتم هیدروژن برابر با $n=4$ است؛ پس وقتی الکترون در اتم هیدروژن، از سومین حالت برانگیخته به حالت پایه جهش می‌کند، یعنی از تراز $n_U=4$ به تراز $n_L=1$ می‌رود. حالا داده‌ها را در رابطه زیر جای‌گذاری می‌کنیم و بسامد فوتون گسیل‌شده در این جهش را به دست می‌آوریم.

$$E_U - E_L = hf \Rightarrow -\frac{13.6}{n_U^2} - \left(-\frac{13.6}{n_L^2}\right) = 4 \times 10^{-15} \text{ f}$$

$$\Rightarrow \frac{13.6}{(4)^2} - \frac{13.6}{(1)^2} = 4 \times 10^{-15} \text{ f} \Rightarrow \frac{15}{16} \times 13.6 = 4 \times 10^{-15} \text{ f}$$

$$\Rightarrow f = 3.1875 \times 10^{15} \text{ Hz} = 3.1875 \text{ THz}$$

تله چشم به راه شماسه؛ اگر به جای $n_U=4$ ، مقدار $n_U=3$ را در نظر می‌گرفتید.

۶۳- گزینه ۳

درس‌نامه بیشینه انرژی جنبشی فوتوالکترون‌ها در اثر فوتوالکتریک:

$$K_{\max} = hf - W_0$$

بسامد فوتون (Hz) ↑
تابع کار فلز (J) ↓ ثابت پلانک (J.s) ↓

ابتدا بسامد نور و بیشینه انرژی جنبشی فوتوالکترون‌ها در حالت دوم را نسبت به حالت اول به دست می‌آوریم:

$$f_2 = f - \frac{25}{100} f = \frac{3}{4} f$$

$$K_{\max_2} = K_{\max_1} - \frac{40}{100} K_{\max_1} = \frac{6}{10} K_{\max_1}$$

حالا معادله فوتوالکتریک را برای هر دو حالت می‌نویسیم و تابع کار فلز را محاسبه می‌کنیم.

$$\text{eV} \xrightarrow{\frac{1.6 \times 10^{-19}}{1.6 \times 10^{-19}}} \text{J}$$

نکته تبدیل یکای eV به J (و برعکس):

درس‌نامه اختلاف تراز شدت دو صوت:

$$\beta_2 - \beta_1 = 10 \log \frac{I_2}{I_1}$$

شدت صوت (W/m^2) ↑
تراز شدت صوت (dB) ↓

گام ۱ ابتدا شدت صوت B (I_B) را با استفاده از اختلاف تراز شدت دو صوت A و B، به دست می‌آوریم:

$$\beta_A - \beta_B = 10 \log \frac{I_A}{I_B} \Rightarrow 10 = 10 \log \frac{0.4}{I_B} \Rightarrow \frac{0.4}{I_B} = 10$$

$$\Rightarrow I_B = 0.04 \text{ W/m}^2$$

گام ۲ حالا اختلاف شدت دو صوت A و B را محاسبه می‌کنیم:

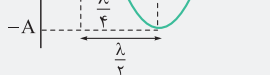
$$I_A - I_B = 0.4 - 0.04 = 0.36 \text{ W/m}^2$$

$$\frac{1 \text{ W/m}^2 = 10^2 \text{ mW/m}^2}{0.36 \text{ W/m}^2} \rightarrow I_A - I_B = 36 \text{ mW/m}^2$$

۶۱- گزینه ۴

استراتژی ابتدا با توجه به جهت انتشار موج، جهت حرکت ذره M را مشخص کنید، سپس از روی نقش موج، طول موج را به دست آورده و پس از آن به کمک تندی انتشار موج، دوره تناوب را محاسبه کنید. در نهایت با توجه به موقعیت نوسانی ذره M تندی آن را به دست بیاورید.

درس‌نامه ۱ شکل مقابل که فاصله نقاط را برحسب طول موج نشان می‌دهد، به خاطر بسپارید.



۲ تندی نوسانگر در نقطه تعادل بیشینه است و از رابطه روبه‌رو به دست می‌آید:

$$v_{\max} = A\omega$$

بسامد زاویه‌ای (rad/s) ↓

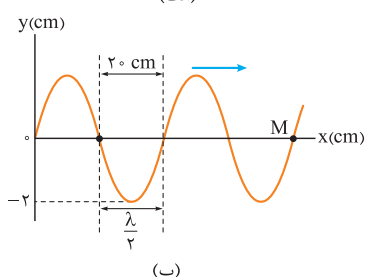
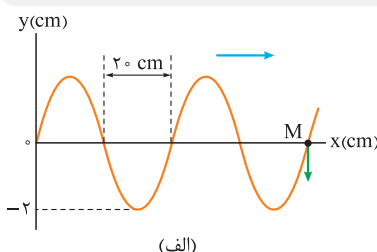
۳ رابطه بین تندی انتشار موج، دوره تناوب موج و طول موج:

$$\lambda = vT$$

دوره تناوب (s) ↑
تندی انتشار موج (m/s) ↓

گام ۱ ابتدا نکته زیر را بخوانید.

نکته اگر جهت انتشار موج به سمت راست باشد، وضعیت ذره شبیه نقاط سمت چپ خود و اگر جهت انتشار موج به سمت چپ باشد، وضعیت ذره شبیه نقاط سمت راست خود خواهد شد.



با توجه به نکته بالا و مطابق شکل (الف)، جهت حرکت ذره M به سمت پایین است.

گام ۲ طول موج را با توجه به شکل (ب) به دست می‌آوریم:

$$\frac{\lambda}{2} = 20 \Rightarrow \lambda = 40 \text{ cm} = 0.4 \text{ m}$$

۶۵- گزینه ۲

درس نامه ۱ اندازه اختلاف پتانسیل الکتریکی بین دو نقطه از میدان الکتریکی یکنواخت:

$$\begin{aligned} & \text{میدان الکتریکی (N/C)} \\ & \uparrow \\ & |\Delta V| = Ed \quad \leftarrow \text{اندازه اختلاف پتانسیل الکتریکی (V)} \\ & \downarrow \\ & \text{فاصله بین دو نقطه در راستای میدان الکتریکی (m)} \end{aligned}$$

۲ اختلاف پتانسیل الکتریکی بین دو نقطه از میدان الکتریکی:

$$\begin{aligned} & \text{تغییر انرژی پتانسیل الکتریکی (J)} \\ & \uparrow \\ & \Delta V = \frac{\Delta U_E}{q} \quad \leftarrow \text{اختلاف پتانسیل الکتریکی (V)} \\ & \downarrow \\ & \text{بار الکتریکی (C)} \end{aligned}$$

مواستون باشه! در این رابطه باید q رو با علامتش بذاریم!

۳ اندازه نیروی الکتریکی وارد بر ذره باردار از طرف میدان الکتریکی:

$$F = |q|E$$

گام تنها نیروی موثر بر ذره باردار، نیروی الکتریکی است؛ بنابراین نیروی خالص با نیروی الکتریکی برابر است. شتاب الکترون را با استفاده از قانون دوم نیوتون به دست می آوریم:

$$\begin{aligned} F_{\text{net}} &= ma \quad \xrightarrow{F_{\text{net}}=Eq} \quad E|q|=ma \Rightarrow 125 \times 10^{-19} \times 1.6 \times 10^{-19} = 10^{-30} a \\ \Rightarrow a &= \frac{125 \times 10^{-19} \times 1.6 \times 10^{-19}}{10^{-30}} = 2 \times 10^{13} \text{ m/s}^2 \end{aligned}$$

گام حالا با استفاده از معادله مکان - زمان در حرکت با شتاب ثابت بر روی خط راست، مدت زمان جابه جایی را محاسبه می کنیم:

$$\Delta x = \frac{1}{2}at^2 + v_0 t \Rightarrow 0/1 = \frac{1}{2} \times 2 \times 10^{13} \times t^2 + 0 \Rightarrow$$

$$t^2 = 10^{-14} \Rightarrow t = 10^{-7} \text{ s} = 100 \times 10^{-9} \text{ s} = 100 \text{ ns}$$

(۳ و ۴ بزن!)

گام برای این که تغییر انرژی پتانسیل الکتریکی الکترون در این جابه جایی را به دست بیاوریم، ابتدا اختلاف پتانسیل الکتریکی در این جابه جایی را محاسبه می کنیم:

$$|\Delta V| = Ed \quad \xrightarrow{E=125 \text{ N/C}, d=0.1 \text{ m}} \quad |\Delta V| = 12.5 \text{ V}$$

نکته اگر در جهت خطوط میدان الکتریکی حرکت کنیم، پتانسیل الکتریکی کاهش و اگر در خلاف جهت خطوط میدان الکتریکی حرکت کنیم، پتانسیل الکتریکی افزایش می یابد. وقتی الکترون رها می شود، در خلاف جهت خطوط میدان الکتریکی حرکت می کند؛ بنابراین با توجه به نکته بالا، پتانسیل الکتریکی در این جابه جایی افزایش می یابد.

$$\Delta V > 0 \Rightarrow \Delta V = 12.5 \text{ V}$$

گام در آخر تغییر انرژی پتانسیل الکتریکی الکترون در این جابه جایی را به دست می آوریم:

$$\Delta V = \frac{\Delta U}{q} \Rightarrow \Delta U = -1.6 \times 10^{-19} \times 12.5 \text{ V} = -2 \times 10^{-18} \text{ J}$$

۶۶- گزینه ۳

گام در شکل (الف)، نقطه O (مبدأ مختصات)

و نقطه A را مشخص کردیم. وقتی در جهت عمود بر میدان الکتریکی حرکت می کنیم، پتانسیل الکتریکی تغییر نمی کند، پس $V_A = V_{A'}$ است. به کمک رابطه $|\Delta V| = Ed$ اندازه میدان الکتریکی را به دست می آوریم. d فاصله بین دو نقطه در راستای میدان (محور x) است.

$$\begin{aligned} |\Delta V| &= |V_{A'} - V_O| = |-5 - 15| = 20 \text{ V} \\ |\Delta V| &= Ed_E \Rightarrow 20 = E \times 4 \times 10^{-2} \Rightarrow E = \frac{20}{4 \times 10^{-2}} = 500 \text{ N/C} \end{aligned}$$

$$K_{\text{max}} = hf - W_0 \Rightarrow \begin{cases} K_{\text{max}_1} = hf - W_0 \\ \frac{1}{6} K_{\text{max}_1} = \frac{3}{4} hf - W_0 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} & \xrightarrow{K_{\text{max}_1} = 8 \times 10^{-19} \text{ J}} \begin{cases} \frac{8 \times 10^{-19}}{1/6 \times 10^{-19}} = hf - W_0 \\ \text{تبدیل به eV} \\ \frac{6}{10} \times \frac{8 \times 10^{-19}}{1/6 \times 10^{-19}} = \frac{3}{4} hf - W_0 \\ \text{تبدیل به eV} \end{cases} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \Delta = hf - W_0 \\ \frac{3}{4} = \frac{3}{4} hf - W_0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \Delta = hf - W_0 \\ \Delta = hf - \frac{4}{3} W_0 \end{cases} \Rightarrow \frac{W_0}{3} = 1 \Rightarrow W_0 = 3 \text{ eV}$$

۶۴- گزینه ۱

درس نامه میدان الکتریکی حاصل از بار q در فاصله r از آن:

$$\begin{aligned} & \text{اندازه بار الکتریکی (C)} \quad \text{اندازه میدان الکتریکی (N/C)} \\ & \uparrow \quad \uparrow \\ & E = k \frac{|q|}{r^2} \\ & \downarrow \quad \downarrow \\ & \text{فاصله از بار (m)} \quad \text{ثابت کولن (N.m}^2\text{/C}^2\text{)} \end{aligned}$$

گام میدان الکتریکی ناشی از بارهای q در سه رأس A، B و C را در وسط ضلع AC رسم می کنیم.

طبق رابطه $E = k \frac{|q|}{r^2}$ ، میدان های الکتریکی E_A و E_C به دلیل برابر بودن بارهای q_A و q_C و فاصله یکسان آنها تا نقطه M (وسط ضلع AC) با هم برابر است ($E_A = E_C$) و یکدیگر را خنثی می کنند. بنابراین میدان برایند در نقطه M ناشی از بار q_B است.

گام برای محاسبه میدان الکتریکی ناشی از بار q_B تا نقطه M داریم. با توجه به نکته زیر، فاصله بار q_B تا نقطه M را به دست می آوریم.

نکته در مثلث قائم الزاویه، میانه وارد بر وتر نصف وتر است.

$$r_B = BM = \frac{AC}{2}$$

هم چنین ضلع AC را می توانیم با استفاده از رابطه فیثاغورس محاسبه کنیم:

$$\begin{aligned} AC^2 &= AB^2 + BC^2 \quad \xrightarrow{AB=6 \text{ cm}, BC=8 \text{ cm}} \quad AC^2 = 6^2 + 8^2 \\ \Rightarrow AC &= \sqrt{36 + 64} = 10 \text{ cm} \end{aligned}$$

حالا مقدار r_B را به دست می آوریم:

$$r_B = \frac{AC}{2} = \frac{10 \text{ cm}}{2} = 5 \text{ cm} = 0.05 \text{ m}$$

گام بزرگی میدان الکتریکی در نقطه M برابر با میدان الکتریکی حاصل از بار q_B در این نقطه است. بنابراین می توانیم بنویسیم:

$$\begin{aligned} E_B &= k \frac{|q|}{r_B^2} \Rightarrow 9 \times 10^9 = \frac{9 \times 10^{-9} \times |q|}{(0.05)^2} \\ \xrightarrow{q > 0} \quad q &= \frac{9 \times 10^9 \times (0.05)^2}{9 \times 10^9} = 2.5 \times 10^{-6} \text{ C} = 2.5 \mu\text{C} \end{aligned}$$

مشاوره برای حل این سؤال، علاوه بر فیزیک، کمی هندسه هم باید بلد باشید.



حرکت از نقطه B به سمت نقطه C در جهت جریان:

$$V_B + \varepsilon_1 = V_C \Rightarrow -8 + 20 = V_C \Rightarrow V_C = +12 \text{ V}$$

حرکت از نقطه C به سمت نقطه D در جهت جریان:

$$V_C - 2I = V_D \Rightarrow 12 - 2(0.5) = V_D \Rightarrow V_D = 11 \text{ V}$$

بنابراین پتانسیل نقطه C از پتانسیل سایر نقاط بیشتر است.

تیزبازی باتری ε_1 تنها باتری‌ای است که به مدار انرژی می‌دهد و جریان مدار را تأمین می‌کند. بنابراین نقطه C که نزدیک‌ترین نقطه به پایانه مثبت این باتری است، بیشترین پتانسیل را دارد.

گزینه ۶۸

درس‌نامه ۱ مقاومت معادل دو مقاومت سری:

$$R_{eq} = R_1 + R_2$$

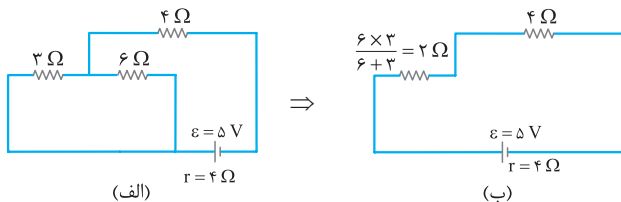
۲ مقاومت معادل دو مقاومت موازی:

$$R_{eq} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$$

$$P = \frac{\varepsilon^2}{R_{eq} + r}$$

۳ توان تولیدی باتری:

گام ۱ در حالت اول مقاومت 3Ω و مقاومت 6Ω با هم موازی هستند (شکل الف) و مقاومت معادل این دو با مقاومت 4Ω متوالی است (شکل ب).

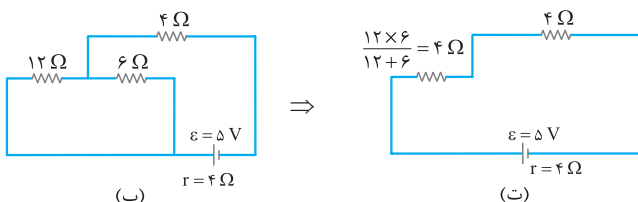


بنابراین مقاومت معادل مدار در این حالت برابر است با:

$$R_{eq} = 2 + 4 = 6 \Omega$$

گام ۲ توان تولیدی باتری در حالت اول:

گام ۳ مقاومت معادل مدار در حالت دوم:



$$R'_{eq} = 4 + 4 = 8 \Omega$$

گام ۴ توان تولیدی باتری در حالت دوم:

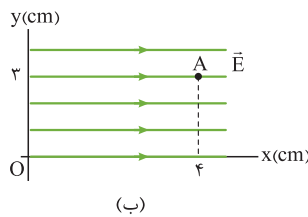
گام ۵ اختلاف توان تولیدی باتری در حالت‌های دوم و اول:

$$P_2 - P_1 = \frac{25}{12} - \frac{25}{10} = \frac{5(25) - 6(25)}{60} = \frac{-25}{60} = -\frac{5}{12} \text{ W}$$

یعنی توان تولیدی باتری $\frac{5}{12} \text{ W}$ کاهش می‌یابد.

گزینه ۶۹

استراتژی ابتدا جریان عبوری از مقاومت‌ها را به دست بیاورید، سپس توان مصرفی هر یک از مقاومت‌ها را با استفاده از رابطه $P = RI^2$ محاسبه کنید تا مقاومتی که بیشترین توان مصرفی را دارد، پیدا شود.



گام ۱ خطوط میدان الکتریکی از پتانسیل بیشتر به پتانسیل کمتر است. از آن‌جا که $V_O > V_A$ است، پس میدان الکتریکی در جهت محور X است (شکل ب).

تله دقت کنید که فاصله در راستای میدان الکتریکی را باید در نظر بگیرید. اگر فاصله را ۵ cm لحاظ کنید، به گزینه نادرست ۱ می‌رسید.

گزینه ۶۷

درس‌نامه ۱ مدار زیر شامل دو باتری است که در جهت‌های مخالف یکدیگر بسته شده‌اند. در این مدار چون $\varepsilon_2 > \varepsilon_1$ است، پس جهت جریان کل مدار به صورت پادساعتگرد است و مقدار آن از رابطه زیر به دست می‌آید.

$$I = \frac{\varepsilon_2 - \varepsilon_1}{R_{eq} + r_1 + r_2}$$

↓
مقاومت معادل مدار (Ω)

۲ قانون اختلاف پتانسیل‌ها:

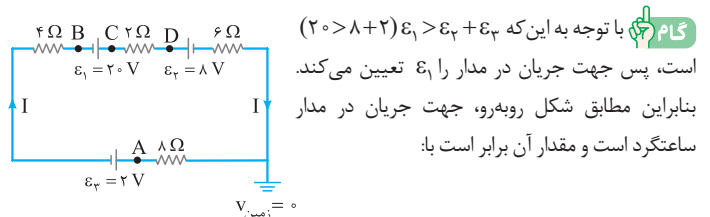
در هر حلقه بسته، مجموع جبری اختلاف پتانسیل‌ها صفر است.

$$\sum V = 0 \Rightarrow \sum \varepsilon - \sum RI = 0$$

در به کار بردن این قانون، به نکات زیر توجه کنید:

(۱) یک جهت چرخش اختیاری در نظر می‌گیریم. (۲) جهت جریان در هر حلقه را به دلخواه انتخاب می‌کنیم. (۳) برای نوشتن ε ، با توجه به چرخش در مدار، اگر از پایانه مثبت باتری خارج شویم $(\rightarrow)$ نیروی محرکه باتری را مثبت $(+\varepsilon)$ و اگر از پایانه منفی باتری خارج شویم $(\leftarrow)$ ، نیروی محرکه باتری را منفی $(-\varepsilon)$ در نظر می‌گیریم.

(۴) برای نوشتن RI ، اگر در جهت جریان از مقاومت R عبور کنیم، چون پتانسیل الکتریکی در حال کاهش است، RI را منفی $(-RI)$ و اگر در خلاف جهت جریان از مقاومت R عبور کنیم، چون پتانسیل الکتریکی در حال افزایش است، RI را مثبت $(+RI)$ در نظر می‌گیریم. اگر علامت جریان مثبت به دست آمد، یعنی جهت انتخابی درست است و اگر منفی به دست آمد، فقط جهت جریان را در شاخه مورد نظر برعکس می‌کنیم.



$$I = \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2 - \varepsilon_r}{R_{eq} + \sum R} = \frac{20 - 8 - 2}{4 + 2 + 6 + 8} = \frac{10}{20} = 0.5 \text{ A}$$

گام ۲ حالا با استفاده از قانون اختلاف پتانسیل‌ها، پتانسیل نقاط A، B، C و D را به دست می‌آوریم.

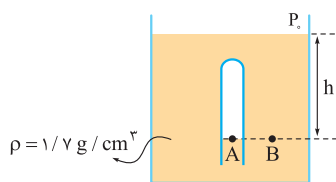
حرکت از نقطه A به سمت نقطه زمین در خلاف جهت جریان:

$$V_A + 8I = V_{\text{زمین}} \Rightarrow V_A + 8(0.5) = 0 \Rightarrow V_A = -4 \text{ V}$$

حرکت از نقطه B به سمت نقطه زمین در جهت جریان:

$$V_B + \varepsilon_1 - 2I - \varepsilon_2 - 6I = V_{\text{زمین}}$$

$$\Rightarrow V_B + 20 - 2(0.5) - 8 - 6(0.5) = 0 \Rightarrow V_B = -8 \text{ V}$$



گام ۱ دو نقطه A و B در یک مایع هستند و هم‌ترازند؛ پس $P_A = P_B$ است.

هم‌چنین فشار پیمانه‌ای گاز برابر با اختلاف فشار مطلق و فشار جو است. بنابراین فشار پیمانه‌ای گاز برابر است با:

$$P_A = P_B \Rightarrow P_{\text{گاز}} = \rho gh + P_0 \Rightarrow P_{\text{گاز}} - P_0 = \rho gh$$

فشار پیمانه‌ای گاز

گام ۲ حالا فشار پیمانه‌ای گاز را برابر با فشار حاصل از h سانتی‌متر از مایع جیوه قرار می‌دهیم و h را پیدا می‌کنیم:

$$\rho_{\text{جیوه}} \times h_{\text{جیوه}} = \rho_{\text{مایع}} \times h_{\text{مایع}} \Rightarrow \rho_{\text{جیوه}} \times h_{\text{جیوه}} = (\rho gh)_{\text{مایع}}$$

$$\frac{\rho_{\text{مایع}} = 1/7 \text{ g/cm}^3, h_{\text{مایع}} = 40 \text{ cm}}{\rho_{\text{جیوه}} = 13/6 \text{ g/cm}^3} \rightarrow 1/7 \times 40 = 13/6 \times h_{\text{جیوه}} \Rightarrow h_{\text{جیوه}} = 5 \text{ cm}$$

یعنی فشار مایع، معادل 5 cmHg است.

تله با توجه به این که فشار جو در شرایط متعارف 76 cmHg است، طراح با فرض این که 5 cmHg به 76 اضافه یا از آن کم کنید، (۳) و (۴) را قرار داده است.

۷۱- گزینه‌ها

شفاف‌سازی قایق‌ها در ابتدا ساکن هستند، پس تندی اولیه آن‌ها و در نتیجه انرژی جنبشی اولیه آن‌ها صفر است.

درس‌نامه ۱ قضیه کار - انرژی جنبشی: کار کل وارد بر یک جسم در یک جابه‌جایی معین برابر با تغییر انرژی جنبشی جسم در این جابه‌جایی است.

$$W_t = \Delta K = \frac{1}{2} m (v_f^2 - v_i^2)$$

تندی نهایی (m/s) تندی اولیه (m/s) جرم (kg)

$$W = F d \cos \theta$$

جابه‌جایی (m) زاویه بین نیرو و جابه‌جایی نیرو (N)

۲ کار نیروی ثابت F:

گام ۱ ابتدا کار کل انجام‌شده بر روی قایق‌ها را مقایسه می‌کنیم:

$$W_t = F_{\text{net}} d \cos \theta \xrightarrow{\theta=0^\circ \Rightarrow \cos 0^\circ=1} W_t = F d \xrightarrow{\text{یکسان}} W_{\text{ت سبک}} = W_{\text{ت سنگین}}$$

گام ۲ انرژی جنبشی نهایی قایق‌ها را با کمک قضیه کار - انرژی جنبشی مقایسه می‌کنیم:

$$W_t = \Delta K = K_f - K_i \xrightarrow{K_i=0} W_t = K_f \xrightarrow{W_{\text{ت سبک}} = W_{\text{ت سنگین}}} K_{\text{ت سبک}} = K_{\text{ت سنگین}}$$

گام ۳ نسبت تندی نهایی قایق سبک به تندی نهایی قایق سنگین را با استفاده از رابطه

$$K = \frac{1}{2} m v^2 \text{ به دست می‌آوریم:}$$

$$K = \frac{1}{2} m v^2 \Rightarrow \frac{K_{\text{ت سبک}}}{K_{\text{ت سنگین}}} = \frac{m_{\text{ت سبک}}}{m_{\text{ت سنگین}}} \times \left(\frac{v_{\text{ت سبک}}}{v_{\text{ت سنگین}}} \right)^2$$

$$\Rightarrow 1 = \frac{1}{4} \times \left(\frac{v_{\text{ت سبک}}}{v_{\text{ت سنگین}}} \right)^2 \Rightarrow \frac{v_{\text{ت سبک}}}{v_{\text{ت سنگین}}} = 2$$

۷۲- گزینه‌ها

درس‌نامه ۱ نیروی اصطکاک جنبشی:

$$f_k = \mu_k F_N$$

نیروی عمودی سطح (N) ضریب اصطکاک جنبشی بین جسم و سطح

درس‌نامه ۱ در مقاومت‌های موازی، نسبت جریان عبوری از دو مقاومت برابر با وارون نسبت مقاومت‌ها است.

$$\frac{I_1}{I_2} = \frac{R_2}{R_1}$$

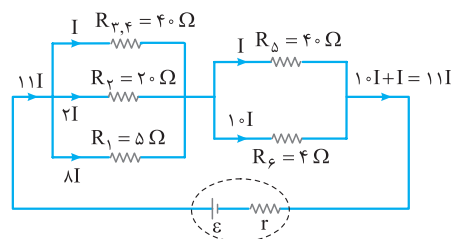
مقاومت الکتریکی (Ω)

$$P = R I^2 \leftarrow \text{توان مصرفی (W)}$$

جریان الکتریکی (A)

۲ توان مصرفی مقاومت:

دو مقاومت R_3 و R_4 سری (متوالی) هستند و مقاومت معادل آن‌ها برابر با 40Ω ($R_3 + R_4 = 10 + 30 = 40$) است. پس مدار را به شکل زیر ساده می‌کنیم.



جریان عبوری از مقاومت R_5 را I در نظر می‌گیریم و جریان عبوری از هر یک از مقاومت‌ها را بر حسب I به دست می‌آوریم.

$$\frac{I_f}{I} = \frac{R_5}{R_f} \xrightarrow{\frac{R_5=40 \Omega}{R_f=4 \Omega}} I_f = 10 I$$

$$\frac{I_f}{I_{3,4}} = \frac{R_{3,4}}{R_f} \xrightarrow{\frac{R_{3,4}=40 \Omega}{R_f=20 \Omega}} I_f = 2 I_{3,4}$$

$$\frac{I_1}{I_{3,4}} = \frac{R_{3,4}}{R_1} \xrightarrow{\frac{R_{3,4}=40 \Omega}{R_1=5 \Omega}} I_1 = 8 I_{3,4}$$

$$I_{3,4} + 2 I_{3,4} + 8 I_{3,4} = 11 I \Rightarrow I_{3,4} = I$$

حالا توان مصرفی هر یک از مقاومت‌ها را با استفاده از رابطه $P = R I^2$ به دست می‌آوریم. (دقت کنید که جریان عبوری از مقاومت‌های R_3 و R_4 یکسان و برابر با I است.)

$$P_1 = R_1 I_1^2 \xrightarrow{\frac{R_1=5 \Omega}{I_1=8 I}} P_1 = 5 \times (8 I)^2 = 320 I^2$$

$$P_f = R_f I_f^2 \xrightarrow{\frac{R_f=20 \Omega}{I_f=2 I}} P_f = 20 \times (2 I)^2 = 80 I^2$$

$$P_r = R_r I_r^2 \xrightarrow{\frac{R_r=10 \Omega}{I_r=I}} P_r = 10 I^2$$

$$P_4 = R_4 I_4^2 \xrightarrow{\frac{R_4=30 \Omega}{I_4=I}} P_4 = 30 I^2$$

$$P_5 = R_5 I_5^2 \xrightarrow{\frac{R_5=40 \Omega}{I_5=I}} P_5 = 40 I^2$$

$$P_6 = R_6 I_6^2 \xrightarrow{\frac{R_6=4 \Omega}{I_6=10 I}} P_6 = 4 \times (10 I)^2 = 400 I^2$$

با توجه به مقادیر به دست آمده، توان مصرفی مقاومت R_6 بیشتر از توان مصرفی بقیه مقاومت‌ها است.

۷۰- گزینه‌ها

درس‌نامه ۱ فشار پیمانه‌ای: اختلاف فشار مطلق و فشار جو را فشار پیمانه‌ای می‌گوییم.

فشار مطلق

$$P_g = P - P_0 \leftarrow \text{فشار پیمانه‌ای}$$

فشار جو

شتاب گرانش (m/s^2)

$$P = \rho g h \rightarrow \text{عمق مایع (m)}$$

چگالی مایع (kg/m^3)

۲ فشار مایع در عمق h از سطح آزاد مایع:



گام ۵ حجم گاز در حالت دوم را به دست می‌آوریم:

$$\Delta V = V_f - V_i \Rightarrow V_f = V_i + \Delta V \xrightarrow{\Delta V = A \Delta h = 5 \times 10^{-3} \text{ cm}^3} V_f = 2100 \text{ cm}^3$$

گام ۶ با توجه به این که اصطکاک پیستون ناچیز است، پس فشار گاز ثابت است؛ بنابراین با استفاده از معادله حالت گازهای کامل می‌توانیم بنویسیم:

$$\frac{V_1}{T_1} = \frac{V_2}{T_2} \xrightarrow{V_1 = 2000 \text{ cm}^3, V_2 = 2100 \text{ cm}^3} \frac{2000}{300} = \frac{2100}{T_2}$$

$$\Rightarrow T_2 = \frac{21 \times 300}{20} = 315 \text{ K}$$

گام ۷ در آخر خواسته سؤال یعنی تغییر دمای گاز را محاسبه می‌کنیم:

$$\Delta T = T_2 - T_1 \xrightarrow{T_1 = 300 \text{ K}} \Delta T = 315 - 300 = 15 \text{ K}$$

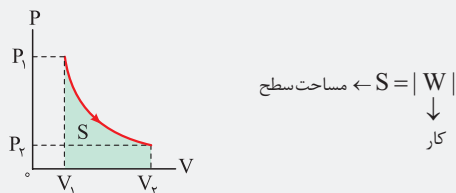
۷۵- گزینه ۲

درس‌نامه ۱ انرژی درونی گاز آرمانی، فقط تابع دمای گاز است.

$$(J) \leftarrow U \propto T \Rightarrow \frac{U_2}{U_1} = \frac{T_2}{T_1}$$

(K) دما

۲ در هر فرایند ترمودینامیکی، قدرمطلق کار انجام‌شده با مساحت سطح زیر نمودار $P-V$ در آن فرایند برابر است.



۳ قانون اول ترمودینامیک: کار محیط بر روی دستگاه $\rightarrow \Delta U = Q + W$

گرمای

$$(J) \leftarrow \Delta U = U_2 - U_1 \rightarrow (J) \leftarrow \text{تغییر انرژی درونی}$$

انرژی درونی نهایی (J)

گام ۱ انرژی درونی گاز آرمانی فقط تابع دمای آن است؛ بنابراین با استفاده از معادله حالت گازهای کامل می‌توانیم بنویسیم:

$$\frac{P_1 V_1}{T_1} = \frac{P_2 V_2}{T_2} \xrightarrow{T_1 = 300 \text{ K}, T_2 = 315 \text{ K}} \frac{P_1 V_1}{300} = \frac{P_2 V_2}{315}$$

$$\xrightarrow{P_1 = 3 \times 10^5 \text{ Pa}, V_1 = 1 \text{ L}, P_2 = 4 \times 10^5 \text{ Pa}} \frac{3 \times 10^5 \times 1}{300} = \frac{4 \times 10^5 \times V_2}{315}$$

$$\Rightarrow U_2 = 750 \times \frac{1}{3} = 250 \text{ J}$$

گام ۲ با استفاده از مساحت زیر نمودار $P-V$ ، قدر مطلق کار انجام‌شده توسط محیط بر روی گاز را به دست می‌آوریم:

$$|W| = S = \frac{(3 \times 10^5 + 4 \times 10^5) \times (1 - 1/3) \times 10^{-3}}{2} = 750 \text{ J}$$

فرایند انبساطی است، پس کار محیط بر روی گاز $W = -750 \text{ J}$ است.

گام ۳ حالا قانون اول ترمودینامیک را می‌نویسیم و گرمایی را که گاز دریافت کرده است، محاسبه می‌کنیم:

$$\Delta U = Q + W \xrightarrow{\Delta U = 250 - 750 = -500 \text{ J}, W = -750 \text{ J}} 1250 = Q - 750 \Rightarrow Q = 2000 \text{ J}$$

۲ معادله مکان - زمان در حرکت با شتاب ثابت بر روی خط راست:

$$x = \frac{1}{2} a t^2 + v_0 t + x_0$$

سرعت اولیه (m/s) مکان اولیه (m) شتاب (m/s²)

گام ۱ با توجه به شکل مقابل، نیروی خالص وارد بر صندوق را به دست می‌آوریم:

$$F_N = mg = 500 \text{ N}$$

$$F_{\text{net}} = F - f_k$$

$$f_k = \mu_k F_N \Rightarrow F_{\text{net}} = F - \mu_k F_N$$

$$\xrightarrow{\mu_k = 0.4, F_N = 500 \text{ N}} F_{\text{net}} = 220 - (0.4 \times 500) = 20 \text{ N}$$

گام ۲ حالا از قانون دوم نیوتون استفاده می‌کنیم و شتاب جسم را محاسبه می‌کنیم:

$$F_{\text{net}} = ma \Rightarrow 20 = 50 \times a \Rightarrow a = 0.4 \text{ m/s}^2$$

گام ۳ به کمک معادله مکان - زمان در حرکت با شتاب ثابت بر روی خط راست، جابه‌جایی جسم را به دست می‌آوریم:

$$x = \frac{1}{2} a t^2 + v_0 t + x_0 \xrightarrow{v_0 = 0 \text{ m/s}, t = 2 \text{ s}, a = 0.4 \text{ m/s}^2, x_0 = 0} x = \frac{1}{2} \times 0.4 \times (2)^2 = 0.8 \text{ m}$$

گام ۴ در آخر کار نیروی F در این جابه‌جایی را به دست می‌آوریم:

$$W = F d \cos \theta \xrightarrow{F = 220 \text{ N}, d = 0.8 \text{ m}, \theta = 0^\circ \Rightarrow \cos 0^\circ = 1} W = 220 \times 0.8 \times 1 = 176 \text{ J}$$

۷۳- گزینه ۳

درس‌نامه ظرفیت گرمایی: حاصل ضرب جرم ماده در گرمای ویژه آن:

$$C = m c$$

گرمای ویژه (J/kg.K) ظرفیت گرمایی (J/K) جرم (kg)

گام ۱ نسبت ظرفیت گرمایی فلز در دو حالت را می‌نویسیم و جرم اولیه فلز را به دست می‌آوریم:

$$\frac{C_2}{C_1} = \frac{m_2 c_2}{m_1 c_1} \xrightarrow{c_1 = c_2 = c} \frac{C_2}{C_1} = \frac{m_2}{m_1} \xrightarrow{C_2 = C_1 - 0.2 C_1 = 0.8 C_1, m_2 = m_1 - 1} \frac{0.8 C_1}{C_1} = \frac{m_1 - 1}{m_1}$$

$$\Rightarrow 0.8 m_1 = m_1 - 1 \Rightarrow 0.2 m_1 = 1 \Rightarrow m_1 = 5 \text{ kg}$$

گام ۲ محاسبه گرمای ویژه فلز:

$$C_1 = m_1 c \xrightarrow{C_1 = 2100 \text{ J/K}, m_1 = 5 \text{ kg}} 2100 = 5c \Rightarrow c = 420 \frac{\text{J}}{\text{kg.K}}$$

۷۴- گزینه ۴

درس‌نامه ۱ با توجه به معادله حالت گاز کامل ($PV = nRT$)، برای مقایسه دو حالت مختلف، رابطه کلی زیر را در نظر بگیرید و هر کمیتی را که در سؤال، ثابت فرض شده بود، از طرفین این رابطه حذف کنید.

$$\frac{P_1 V_1}{n_1 T_1} = \frac{P_2 V_2}{n_2 T_2}$$

فشار حجم دما (K) تعداد مول

در رابطه بالا، کمیت‌های فشار و حجم در طرفین رابطه کافی است یک‌پارگی داشته باشند، اما کمیت دما در هر دو طرف، حتماً باید برحسب کلوین باشد.

۲ رابطه بین دما برحسب درجه سلسیوس و کلوین:

$$T = \theta + 273$$

دما برحسب درجه سلسیوس (°C) دما برحسب کلوین (K)



۸۰- گزینه ۴

همه عبارت‌های داده‌شده، درست‌اند.

بررسی عبارت پنجم:

☆ نکته در مقایسه چگالی بار چند یون، اولویت با بار است، به طوری که هر چه مقدار بار یون بیشتر باشد، چگالی بار آن نیز بیشتر است. اگر مقدار بار دو یون یکسان باشد، چگالی بار یونی بیشتر است که شعاع کمتری دارد.

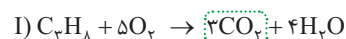
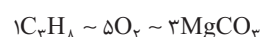
مثال: ${}_{13}\text{Al}^{3+} > {}_{15}\text{P}^{3-} > {}_{12}\text{Mg}^{2+} > {}_{16}\text{S}^{2-}$ چگالی بار

بار یون‌های ${}_{12}\text{Mg}^{2+}$ و ${}_{20}\text{Ca}^{2+}$ برابر است و از آن جایی که شعاع کوچک‌تری دارد، چگالی بار آن بیشتر است. هم‌چنین بار یون‌های ${}_{16}\text{S}^{2-}$ و ${}_{8}\text{O}^{2-}$ یکسان، اما شعاع ${}_{16}\text{S}^{2-}$ بزرگ‌تر از ${}_{8}\text{O}^{2-}$ است؛ از این رو چگالی بار ${}_{16}\text{S}^{2-}$ کم‌تر می‌باشد.

۸۱- گزینه ۳

☆ استراتژی ابتدا معادله واکنش‌ها را بنویس و موازنه کن. قسمت اول سؤال که یک مسئله استوکیومتری ساده‌ست و باید در واکنش سوختن پروپان از مول C_3H_8 به مول O_2 برسی. برای قسمت دوم سؤال، کافیه که با ضرب کردن دو معادله در عدد مناسب (در صورت لزوم)، ضریب ماده مشترک در دو واکنش، یعنی CO_2 رو برابر کنی. این‌طوری مستقیماً می‌تونی از روی مول C_3H_8 مصرفی در واکنش اول، جرم MgCO_3 تولیدی در واکنش دوم رو به دست بیاری.

گام ۱ موازنه معادله واکنش‌ها و یکسان‌سازی ضریب ماده مشترک در دو واکنش:

گام ۲ به دست آوردن مول O_2 مصرفی و MgCO_3 تولیدی:

$$\frac{\text{مول}}{\text{ضریب}} = \frac{\text{مول}}{\text{ضریب}} = \frac{\text{جرم}}{\text{جرم مولی} \times \text{ضریب}} \Rightarrow \frac{0}{3} = \frac{x}{5} = \frac{y}{3 \times 84}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 0/3 \times 5 = 1/5 \text{ mol O}_2 \\ y = 0/3 \times 3 \times 84 = 75/6 \text{ g MgCO}_3 \end{cases}$$

روش ۲ استفاده از کسر تبدیل:

$$0/3 \text{ mol C}_3\text{H}_8 \times \frac{5 \text{ mol O}_2}{1 \text{ mol C}_3\text{H}_8} = 1/5 \text{ mol O}_2$$

$$0/3 \text{ mol C}_3\text{H}_8 \times \frac{3 \text{ mol MgCO}_3}{1 \text{ mol C}_3\text{H}_8} \times \frac{84 \text{ g MgCO}_3}{1 \text{ mol MgCO}_3} = 75/6 \text{ g MgCO}_3$$

۸۲- گزینه ۲

 MPO_4 ، MS_4 ، ScX_3 و XCl_3 وجود ندارند.

با توجه به فرمول MO و توضیحات داده‌شده، فلز M تنها دارای کاتیون پایدار M^{2+} است؛ بنابراین با توجه به فرمول یون‌های نیتريد (N^{3-}) و کربنات (CO_3^{2-})، فرمول‌های MCO_3 و M_3N_2 درست و با توجه به فرمول یون‌های فسفات (PO_4^{3-}) و سولفید (S^{2-})، فرمول‌های MPO_4 و MS_4 نادرست‌اند: $\text{M}^{2+}\text{PO}_4^{3-} \Rightarrow \text{M}_3(\text{PO}_4)_2$ ؛ $\text{M}^{2+}\text{S}^{2-} \Rightarrow \text{MS}$

حالا بریم سراغ نافلز X:

عدد اکسایش X در XO_3 برابر با +۶ است و طبق توضیحات سؤال، شمار الکترون‌های ظرفیتی X نیز برابر ۶ است؛ پس X نافلز از گروه ۱۶ (S یا Se) است.

☆ ScX_3 : فلز اسکاندیم (Sc) تنها دارای کاتیون پایدار Sc^{3+} و نافلز گروه ۱۶ دارای آنیون پایدار X^{2-} است؛ بنابراین فرمول ترکیب یونی حاصل از آن‌ها Sc_2X_3 است، نه ScX_3 !

شیمی

۷۶- گزینه ۱

☆ نکته شما باید حالت فیزیکی عنصرهای مهم جدول دوره‌ای در دمای 25°C را بلد باشید! برای این کار کافیه که عناصر مایع و گازی جدول رو بشناسید، سایر عناصر جامدند.

حالت فیزیکی	عنصرها
جامد	فلزهای قلیایی و قلیایی خاکی (فلزهای دسته s)، فلزهای واسطه یا عناصر دسته d (به جز جیوه)، عناصر دسته f، عناصر دسته p به جز موارد نام برده شده در حالت‌های فیزیکی مایع و گاز
مایع	برم (Br_2) و جیوه (Hg)
گاز	هیدروژن، نیتروژن، اکسیژن، فلونور، کلر، هلیوم، نئون، آرگون، کریپتون و زنون

در دمای اتاق، برم (Br_2) به حالت مایع است، در حالی که سه عنصر دیگر، جامد می‌باشند.

۷۷- گزینه ۴

عبارت‌های (ب) و (پ) درست‌اند.

بررسی عبارت‌های نادرست: (الف) هوای پاک را می‌توان محلولی از گازها در نظر گرفت، نه هوای شهرها که معمولاً آلوده و شامل ذرات گرد و غبار هم هست! (ت) پی‌شه؟! مخلوط‌ها انواع مختلفی دارند که یکی از آن‌ها محلول‌ها هستند. جای مخلوط و محلول رو در عبارت داده‌شده، جایه‌جا گفته!

۷۸- گزینه ۱

☆ نکته اگر اختلاف شمار نوترون‌ها و الکترون‌ها در یک یون، بیشتر از مقدار بار یون باشد، عدد اتمی عنصر مورد نظر را می‌توان از رابطه زیر به دست آورد:

$$\left(\begin{array}{c} \text{تفاوت شمار} \\ \text{نوترون‌ها و الکترون‌ها} \end{array} \right) + \left(\begin{array}{c} \text{بار یون} \\ \text{با علامت} \end{array} \right) - \left(\begin{array}{c} \text{عدد جرمی} \\ \text{عدد اتمی} \end{array} \right) = \frac{\text{تفاوت شمار}}{2}$$

ابتدا باید عدد اتمی عنصر X را حساب کنیم:

$$\begin{cases} n + p = 79 \\ n - e = 9 \Rightarrow p = 34 \\ e = p + 2 \end{cases}$$

روش ۱

روش ۲

$$\left(\begin{array}{c} \text{تفاوت شمار} \\ \text{نوترون‌ها و الکترون‌ها} \end{array} \right) + \left(\begin{array}{c} \text{بار یون} \\ \text{با علامت} \end{array} \right) - \left(\begin{array}{c} \text{عدد جرمی} \\ \text{عدد اتمی} \end{array} \right) = \frac{79 - 9 - 2}{2} = \frac{68}{2} = 34$$

☆ تیزبازی نیازی به این کارها نبود! با توجه به گزینه‌ها، عدد اتمی X یا ۳۴ است و یا ۳۹. با به نگاه معلومه که ۳۹ غلطه! زیرا در این حالت، تفاوت شمار الکترون‌ها ($39 + 2 = 41$) و نوترون‌ها ($79 - 39 = 40$) برابر ۱ است و نه ۱۹! می‌تونید بگید عدد اتمی ۳۹، ۳ و واحد از گاز نجیب دوره چهارم (Kr) بیشتر است؛ بنابراین عنصر با عدد اتمی ۳۹، یک فلز در گروه ۳ جدول (فلز واسطه) است و فلزات، یون منفی (X^{2-}) تشکیل نمی‌دهند. عنصری با عدد اتمی ۳۴ در دوره چهارم جدول قرار دارد (عدد اتمی آن دو واحد کم‌تر از عدد اتمی گاز نجیب دوره چهارم، یعنی Kr ۳۶ است).

۷۹- گزینه ۲

عبارت‌های اول و سوم درست‌اند.

بررسی عبارت‌های نادرست: عبارت دوم: هرگاه مقدار گاز متان در هوای معدن زغال‌سنگ به بیش از ۵ درصد برسد، احتمال انفجار وجود دارد.

عبارت چهارم: ارزش سوختی (مقدار گرمای آزادشده به ازای سوختن یک گرم) بنزین بیشتر از زغال‌سنگ است. علاوه بر آن در سوختن بنزین، به ازای هر کیلوژول انرژی تولیدشده، مقدار کربن دی‌اکسید کم‌تری تولید می‌شود.

۱- بهتر بود طراح محترم در عبارت سوم، به H_2O هم اشاره می‌کرد.



- ♦ فقط آمونیاک را با پایین آوردن دما، از مخلوط واکنش جدا می کنند.
- ♦ هابر برای جداسازی آمونیاک از مخلوط واکنش، از تفاوت نقطه جوش مواد شرکت کننده در واکنش استفاده کرد، نه تفاوت نقطه ذوب!

۸۵ - گزینه ۳

باید نسبت جرم مولی آنیون به کاتیون را در CaSO_4 ، MgSO_4 ، AlPO_4 ، ScPO_4 حساب کنیم:

$$\begin{cases} \text{PO}_4^{3-} \text{ جرم مولی} = 95 \text{ g.mol}^{-1} \\ \text{SO}_4^{2-} \text{ جرم مولی} = 96 \text{ g.mol}^{-1} \end{cases}$$

$$\frac{\text{جرم مولی آنیون}}{\text{جرم مولی کاتیون}} = \begin{cases} \frac{\text{ScPO}_4}{45} \rightarrow \frac{95}{45} \approx 2/1 \\ \frac{\text{AlPO}_4}{27} \rightarrow \frac{95}{27} \approx 3/5 \\ \frac{\text{MgSO}_4}{24} \rightarrow \frac{96}{24} = 4 \\ \frac{\text{CaSO}_4}{40} \rightarrow \frac{96}{40} = 2/4 \end{cases}$$

۸۶ - گزینه ۲

درس نامه روندهای تناوبی در دسته های S و P جدول دوره ای

در یک دوره از چپ به راست	در یک گروه از بالا به پایین
♦ شعاع اتمی عناصرها و اختلاف شعاع اتمی دو عنصر متوالی، کاهش می یابد.	♦ شعاع اتمی عناصرها افزایش می یابد.
♦ خصلت فلزی عناصرها، کاهش می یابد.	♦ خصلت فلزی عناصرها افزایش می یابد.
♦ واکنش پذیری فلزها، کاهش می یابد.	♦ واکنش پذیری فلزها افزایش می یابد.
♦ خصلت نافلزی عناصرها، افزایش می یابد.	♦ خصلت نافلزی عناصرها کاهش می یابد.
♦ واکنش پذیری نافلزها، افزایش می یابد.	♦ واکنش پذیری نافلزها کاهش می یابد.

به جز عبارت آخر، بقیه عبارت ها درست اند.

در فلزهای قلیایی با افزایش عدد اتمی و افزایش شمار لایه های الکترونی اشغال شده، شعاع اتمی افزایش یافته و واکنش پذیری فلز افزایش می یابد و آسان تر الکترون از دست می دهد.

۸۷ - گزینه ۴

در هر مول سدیم فسفید (Na_3P) ، ۴ مول یون (Na^+) و ۱ مول (P^{3-}) وجود دارد:

$$\text{Na}_3\text{P} \text{ جرم مولی} = (3 \times 23) + 31 = 100 \text{ g.mol}^{-1}$$

$$\text{یون } \frac{23 \times 10^3}{100} \times \frac{4 \text{ mol یون}}{1 \text{ mol Na}_3\text{P}} \times \frac{1 \text{ mol Na}_3\text{P}}{100 \text{ g Na}_3\text{P}} \times 5 \text{ g Na}_3\text{P} = 5 \text{ g Na}_3\text{P}$$

$$\text{یون } = 1/204 \times 10^{23}$$

برای قسمت دوم سؤال، با توجه به این که جرم محلول ۵ کیلوگرم (۵۰۰۰ گرم) است، خواهیم داشت:

$$\text{Na}^+ \text{ جرم} = 5 \text{ g Na}_3\text{P} \times \frac{1 \text{ mol Na}_3\text{P}}{100 \text{ g Na}_3\text{P}} \times \frac{3 \text{ mol Na}^+}{1 \text{ mol Na}_3\text{P}} \times \frac{23 \text{ g Na}^+}{1 \text{ mol Na}^+} = 3/45 \text{ g Na}^+$$

$$\text{ppm}(\text{Na}^+) = \frac{\text{جرم Na}^+}{\text{جرم محلول}} \times 10^6 = \frac{3/45}{5000} \times 10^6 = 69$$

۸۸ - گزینه ۳

استراتژی ابتدا به کمک واکنش، غلظت مولی محلول رقیق شده رو به دست بیار و بعد به کمک فرمول رقیق سازی، غلظت محلول اولیه رو حساب کن.

نکته به هنگام رقیق سازی محلول ها با آب، فقط حجم محلول تغییر می کند و شمار مول های حل شونده ثابت است؛ بنابراین خواهیم داشت:

$$\text{مول حل شونده (n)} = \text{غلظت مولی (M)} \times \text{حجم محلول (V)} \Rightarrow \frac{M_1 V_1}{\text{غلظت}} = \frac{M_2 V_2}{\text{رقیق}}$$

♦ XCl_3 : اگر X از گروه ۱۶ باشد، شمار کل الکترون های ظرفیتی این مولکول برابر ۲۷ (عددی فرد) خواهد بود و اتم X از قاعده هشت تایی پیروی نمی کند؛ پس این ترکیب وجود خارجی ندارد.



♦ CX_4 : درسته مانند مولکول CS_4 !

♦ Na_2XO_4 : XO_4^{2-} می تواند همان یون سولفات باشد؛ پس این ترکیب هم وجود دارد.

۸۳ - گزینه ۱

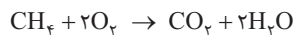
درس نامه استوکیومتری واکنش با مخلوط واکنش دهنده ها:

در واکنش هایی که دو یا چند واکنش دهنده، اگر نسبت شمار مول های اولیه مواد با نسبت ضرایب استوکیومتری آن ها در معادله موازنه شده واکنش برابر باشد، با انجام واکنش (با فرض ۱۰۰ درصد بودن بازده)، همه مواد به طور کامل مصرف می شوند و چیزی از آن ها باقی نمی ماند. به طور مثال اگر ۲ مول گاز متان و ۴ مول گاز اکسیژن در ظرفی وارد شده و واکنش انجام شود، همه گاز متان و اکسیژن اولیه مصرف می شوند، زیرا نسبت مول های اولیه متان به اکسیژن با نسبت ضرایب استوکیومتری آن ها در معادله موازنه شده واکنش $(\frac{2}{4} = \frac{1}{2})$ برابر است:



پس در سؤال هایی که اطلاعاتی در مورد مخلوط واکنش دهنده ها (و نه تک آن ها) به صورت جداگانه داده شده و گفته می شود که مواد به طور کامل با هم واکنش می دهند، باید نسبت شمار مول های مواد در مخلوط واکنش را با نسبت ضرایب استوکیومتری آن ها در معادله موازنه شده واکنش برابر در نظر بگیریم.

معادله واکنش سوختن کامل متان به صورت زیر است:



با توجه به این که متان و اکسیژن به طور کامل با هم واکنش داده اند، نسبت شمار مول های آن ها در مخلوط باید با نسبت ضرایب استوکیومتری آن ها در معادله برابر باشد؛ یعنی مول اکسیژن باید دو برابر مول متان باشد:

$$\text{جرم CH}_4 = 16x \Rightarrow \text{جرم O}_2 = 32 \times 2x = 64x$$

$$\text{O}_2 \text{ جرم} = 2x \Rightarrow \text{O}_2 \text{ جرم} = 32 \times 2x = 64x$$

$$\text{CH}_4 \text{ جرم} + \text{O}_2 \text{ جرم} = 60 \text{ g} \Rightarrow 16x + 64x = 60 \Rightarrow x = \frac{60}{80} = \frac{3}{4} \text{ mol}$$

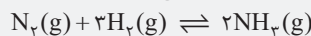
$$\left. \begin{aligned} \text{CH}_4 \text{ حجم} &= \frac{3}{4} \text{ mol CH}_4 \times \frac{22.4 \text{ L CH}_4}{1 \text{ mol CH}_4} = 3 \times 5.6 \text{ L CH}_4 \\ \text{O}_2 \text{ حجم} &= 2 \times \frac{3}{4} \text{ mol O}_2 \times \frac{22.4 \text{ L O}_2}{1 \text{ mol O}_2} = 6 \times 5.6 \text{ L O}_2 \end{aligned} \right\}$$

$$\Rightarrow \text{تفاوت جرم} = 3 \times 5.6 = 16.8 \text{ L}$$

۸۴ - گزینه ۲

درس نامه فرایند تولید آمونیاک به روش هابر:

در صنعت، آمونیاک را از واکنش گازهای هیدروژن و نیتروژن تهیه می کنند. این واکنش به فرایند هابر معروف است.



♦ این واکنش برگشت پذیر است و همه واکنش دهنده ها به فراورده تبدیل نمی شوند.

♦ واکنش در دما و فشار اتاق انجام نمی شود. شرایط بهینه فرایند هابر، دمای 450°C ، فشار 200 atm و در حضور کاتالیزگر آهن است.

♦ در شرایط بهینه، تنها ۲۸٪ مولی از مخلوط تعادلی واکنش را آمونیاک تشکیل می دهد.

♦ برای خارج کردن آمونیاک از مخلوط واکنش، دما را کمی پایین تر از نقطه جوش آمونیاک (-33°C) می آورند.

در ضمن، گازهای هیدروژن و نیتروژن واکنش نداده را به محفظه انجام واکنش بازمی گردانند. عبارت های سوم و چهارم نادرست اند.

بررسی عبارت ها:

♦ فرایند هابر در دما و فشار اتاق انجام نمی شود. این موضوع، چالش اصلی هابر بود.

♦ نقطه جوش: $\text{NH}_3 > \text{N}_2 > \text{H}_2$



۲ برای محاسبه ارزش سوختی مواد می توان از رابطه زیر استفاده کرد:

$$\text{ارزش سوختی (kJ.g}^{-1}\text{)} = \frac{|\text{آنتالپی سوختن (kJ.mol}^{-1}\text{)}|}{\text{جرم مولی (g.mol}^{-1}\text{)}}$$

به کمک آنتالپی سوختن متان و اتان، می توان آنتالپی سوختن پروپان را حساب کرد. با توجه به این که تفاوت آنتالپی سوختن دو آلکان متوالی، تقریباً یکسان است، خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} & \text{آنتالپی سوختن } C_4H_{10} - \text{آنتالپی سوختن } C_3H_8 \\ &= \text{آنتالپی سوختن } CH_4 - \text{آنتالپی سوختن } C_2H_6 \\ \Rightarrow & C_4H_{10} - (-1560) = -1560 - (-890) \\ \Rightarrow & C_4H_{10} = -2230 \text{ kJ.mol}^{-1} \end{aligned}$$

$$\text{ارزش سوختی } C_4H_{10} = \frac{|\text{آنتالپی سوختن}|}{\text{جرم مولی}} = \frac{2230}{44} = 50.7 \text{ kJ.g}^{-1}$$

۳ **تیزبازی** در این سؤال نیازی به محاسبه آنتالپی سوختن C_4H_{10} هم نبود! با توجه به گزینه ها، آنتالپی سوختن این ماده، -2230 یا -4580 است. اگر هر دو عدد را بر جرم مولی این ماده (۴۴) تقسیم کنیم، فقط 50.7 با ارزش سوختی این ماده تطابق دارد:

$$\frac{4580}{44} \approx 104 \quad \frac{2230}{44} \approx 50.7$$

۹۱ - گزینه ۲

☆ **نکته** جدول زیر را در مورد الکل ها و کربوکسیلیک اسیدها ببینید:

کربوکسیلیک اسیدها (RCOOH)	الکل ها (ROH)	
HCOOH: متانوئیک (فورمیک) اسید	CH ₃ OH: متانول	نام و ساختار ساده ترین عضو
CH ₃ COOH: اتانوئیک (استیک) اسید	C ₂ H ₅ OH: اتانول	نام و ساختار پر کاربردترین عضو
C _n H _{2n+1} O ₂ یا C _m H _{2m+1} COOH (n ≥ 1, m ≥ 0)	C _n H _{2n+1} O یا C _m H _{2m+1} OH (n, m ≥ 1)	فرمول عمومی با فرض این که زنجیر هیدروکربنی سیر شده (گروه آلکیل) باشد.

عبارت های سوم و چهارم درست اند.

بررسی عبارت ها:

♦ دومین عضو هر خانواده، جزء پرکاربردترین ترکیب ها در زندگی روزانه هستند.

♦ دومین عضو الکل های یک عاملی ← اتانول (C₂H₅OH) ← ضد عفونی کننده و ...

♦ دومین عضو کربوکسیلیک اسید های یک عاملی ← استیک اسید (CH₃COOH) ← اسید سرکه و ...

♦ در الکل ها (ROH)، بخش ناقطبی فقط می تواند گروه هیدروکربنی باشد (R نمی تواند اتم هیدروژن باشد)، اما در کربوکسیلیک اسیدها (RCOOH)، بخش ناقطبی (R)، هم می تواند هیدروژن و هم گروه هیدروکربنی باشد.

♦ واکنش الکل ها و اسیدها (واکنش استری شدن)، برگشت پذیر است و در آن، عدد اکسایش هیچ اتمی تغییر نمی کند:

♦ دومین عضو کربوکسیلیک اسیدها، استیک اسید با فرمول CH₃COOH و الکی دارای دو اتم کربن، همان اتانول با فرمول C₂H₅OH است.

$$\frac{\text{جرم مولی استیک اسید (C}_2\text{H}_4\text{O}_2\text{)}}{\text{جرم مولی اتانول (C}_2\text{H}_6\text{O)}} = \frac{60}{46} > 1$$

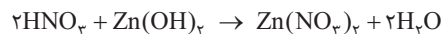
۹۲ - گزینه ۱

عبارت های (الف) و (ت) درست اند.

بررسی عبارت ها:

(الف) (RCOO)₂Mg، نمک منیزیم اسید چرب است. نمک های منیزیم و کلسیم اسیدهای چرب برخلاف صابون های جامد (نمک سدیم اسید چرب) و صابون های مایع (نمک پتاسیم یا آمونیوم اسیدهای چرب) در آب حل نمی شوند و رسوب می کنند.

گام ۱ معادله واکنش را موازنه می کنیم:



گام ۲ به کمک واکنش، غلظت محلول رقیق شده نیتریک اسید را حساب می کنیم:

روش ۱ استفاده از کسر تناسب:

$$\frac{\text{حجم (L)} \times \text{غلظت مولی}}{\text{ضریب}} = \frac{\text{مول}}{\text{ضریب}} \Rightarrow \frac{x \times \frac{10}{1000}}{2} = \frac{0.02}{1} \Rightarrow x = 0.4 \text{ mol.L}^{-1}$$

روش ۲ استفاده از کسر تبدیل:

$$0.02 \text{ mol Zn(OH)}_2 \times \frac{2 \text{ mol HNO}_3}{1 \text{ mol Zn(OH)}_2} = 0.04 \text{ mol HNO}_3$$

$$\text{غلظت مولی HNO}_3 = \frac{0.04 \text{ mol}}{\frac{10}{1000} \text{ L}} = 0.4 \text{ mol.L}^{-1}$$

گام ۳ به کمک رابطه رقیق سازی، غلظت محلول اولیه را حساب می کنیم:

۱۰ میلی لیتر را از ۲۵۰ میلی لیتر محلول رقیق شده برداشته ایم؛ پس غلظت ۲۵۰ میلی لیتر محلول رقیق شده همان ۰/۴ مولار است (غلظت یک محلول مشخص، به مقدار آن بستگی ندارد). حالا به کمک رابطه معروف رقیق سازی، غلظت محلول اولیه را حساب می کنیم:

$$M_1 V_1 = M_2 V_2 \Rightarrow M_1 \times 40 = 0.4 \times 250 \Rightarrow M_1 = 2.5 \text{ mol.L}^{-1}$$

۹۹ - گزینه ۱

☆ **نکته** گروه های عاملی اکسیژن دار در جدول زیر آمده است:

نام گروه عاملی (خانواده)	ساختار
آلدهیدی	$\begin{array}{c} \text{O} \\ \parallel \\ -\text{C}-\text{H} \end{array}$
کربونیل (کتونی)	$\begin{array}{c} \text{O} \\ \parallel \\ -\text{C}- \end{array}$
اتری	$-\text{O}-$
هیدروکسیل (الکی)	$-\text{OH}$
کربوکسیل (اسیدی)	$\begin{array}{c} \text{O} \\ \parallel \\ -\text{C}-\text{OH} \end{array}$
استری	$\begin{array}{c} \text{O} \\ \parallel \\ -\text{C}-\text{O}- \end{array}$

همه عبارت های داده شده درست اند.

بررسی عبارت ها:

♦ ترکیب مورد نظر دارای سه گروه عاملی هیدروکسیل (—OH)، کتونی (—C=O) و

آلدهیدی (—C=O—H) است.

♦ در ساختار ترکیب مورد نظر، ۱۰ اتم کربن، ۱۰ اتم هیدروژن و ۳ اتم اکسیژن وجود دارد:

$$C_1, H_1, O_3 = (10 \times 12) + 10 + (3 \times 16) = 178 \text{ g.mol}^{-1}$$

♦ شمار اتم های کربن و هیدروژن مولکول، یکسان و برابر ۱۰ است.

♦ شمار اتم های هیدروژن مولکول داده شده، مانند پنتن (C₅H₁₂)، برابر ۱۰ است.

۹۰ - گزینه ۲

☆ **نکته ۱** دو عضو متوالی آلکان ها در یک گروه CH₂ با هم تفاوت دارند. به همین

دلیل تفاوت آنتالپی سوختن دو آلکان متوالی تقریباً یکسان است. مثلاً می توان نوشت:

$$\begin{aligned} & \text{آنتالپی سوختن } C_4H_{10} = \text{آنتالپی سوختن } C_3H_8 - \text{آنتالپی سوختن } C_2H_6 \\ & \text{آنتالپی سوختن } C_4H_{10} - \text{آنتالپی سوختن } C_3H_8 \end{aligned}$$



$$\bar{R}(\text{واکنش}) = \frac{\bar{R}(\text{NOBr})}{2} = \frac{0.0244 - 0.0204}{2} = 2 \times 10^{-4} \text{ mol.L}^{-1} \cdot \text{s}^{-1}$$

در بین گزینه‌ها، فقط عدد ۳ بین $1/45 \times 10^{-4}$ و 2×10^{-4} است.



گزینه ۹۵

انحلال CaCl_2 در آب، گرماده و انحلال NH_4NO_3 در آب، گرماگیر است و مقدار گرمای آزاد شده به ازای انحلال ۱ مول CaCl_2 (83 kJ) بیشتر از مقدار گرمای مصرف شده به ازای انحلال ۱ مول NH_4NO_3 (26 kJ) است؛ بنابراین فرایند انحلال تعداد مول برابری از این دو ماده در آب، در مجموع گرماده است.

بررسی سایر گزینه‌ها: با توجه به گرماگیر بودن انحلال NH_4NO_3 ، از آن می‌توان برای سرد کردن محل آسیب دیدگی و بسته‌های سرمازا استفاده کرد.

$$\frac{26 \text{ kJ}}{1 \text{ mol NH}_4\text{NO}_3} \times 2 \text{ mol NH}_4\text{NO}_3 = 52 \text{ kJ}$$

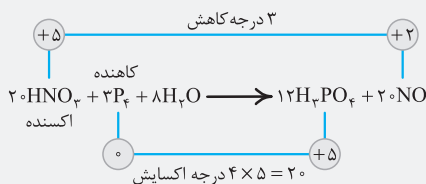
با توجه به گرماده بودن انحلال CaCl_2 در آب می‌توان گفت که انحلال پذیری این نمک با افزایش دما کاهش می‌یابد. در حالی که نمودار انحلال پذیری بسیاری از نمک‌ها بر حسب دما، صعودی است.



گزینه ۹۶

درس‌نامه موازنه واکنش از طریق تغییر عدد اکسایش:

به طور کلی برای موازنه واکنش‌های اکسایش - کاهش، ابتدا تغییر عدد اکسایش اتم‌ها را حساب می‌کنیم. سپس مقدار تغییر عدد اکسایش گونه کاهنده را ضرب گونه اکسندۀ و مقدار تغییر عدد اکسایش گونه اکسندۀ را ضرب کاهنده قرار می‌دهیم و در آخر با توجه به ضرایبی که معلوم هستند، ضرایب بقیه گونه‌ها را تعیین می‌کنیم. موازنه باشد که اگر عنصری که عدد اکسایش آن تغییر کرده است، دارای زیروند باشد، باید تغییر عدد اکسایش آن را در زیروندش ضرب کنیم و سپس جابه‌جایی تغییر عدد اکسایش‌ها را انجام بدهیم. مثلاً در واکنش مربوط به این سؤال، هر اتم P، ۵ درجه اکسایش می‌یابد ولی با توجه به زیروند آن (P_4) باید تغییر عدد اکسایش هر مولکول P_4 را $4 \times 5 = 20$ در نظر بگیریم.



به جز عبارت چهارم، بقیه عبارت‌ها درست‌اند.

با توجه به معادله موازنه شده واکنش در درس‌نامه، می‌توانیم سراغ بررسی عبارت‌ها:

بررسی عبارت‌ها:

عدد اکسایش N و P در اسیدهای HNO_3 و H_3PO_4 برابر با ۵+ است.

نکته برای تعیین شمار الکترون‌های مبادله شده در یک واکنش اکسایش - کاهش می‌توانید از فرمول زیر استفاده کنید:

تغییر عدد اکسایش $\times$ ضریب $\times$ شمار اتم‌ها (زیروند) = شمار الکترون‌های مبادله شده
هر اتم در اکسنده در اکسنده براساس معادله موازنه شده
تغییر عدد اکسایش هر اتم در کاهنده $\times$ ضریب کاهنده $\times$ شمار اتم‌ها در کاهنده =

در واکنش مورد نظر، P_4 اکسایش یافته و ماده کاهنده است. ضریب این ماده برابر ۳ است. براساس معادله موازنه شده، شمار الکترون‌های مبادله شده در این واکنش برابر ۶۰ است:

$$3 \times 4 \times 5 = 60$$

تغییر عدد اکسایش $\times$ زیروند $\times$ ضریب = شمار الکترون‌های مبادله شده

هر اتم فسفر ۵ درجه اکسایش یافته است؛ بنابراین عدد اکسایش ۱۲ اتم فسفر موجود در واکنش، در مجموع $12 \times 5 = 60$ درجه تغییر کرده است. از طرفی ضریب فسفریک اسید (H_3PO_4) برابر ۱۲ است:

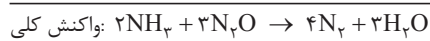
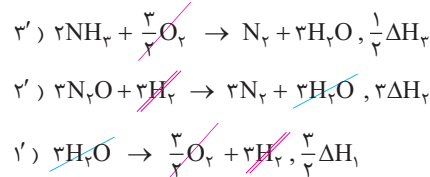
مجموع ضرایب استوکیومتری واکنش دهنده‌ها برابر ۳۱ ($2 + 3 + 8 = 31$) و مجموع ضرایب استوکیومتری فراورده‌ها برابر ۳۲ ($12 + 20 = 32$) است.

(ب) RCOONa (صابون جامد) در آب حل شده و یون‌های آن در آب تفکیک می‌شوند، ولی درون آب سخت (آب حاوی مقادیر زیادی از یون‌های Ca^{2+} و Mg^{2+})، بخش آنیونی آن (RCOO^-) با کاتیون‌های Ca^{2+} و Mg^{2+} واکنش داده و رسوب می‌کند. در ضمن قدرت پاک‌کنندگی صابون در آب سخت کاهش می‌یابد، نه این‌که کلاً قدرت پاک‌کنندگی نداشته باشد. (پ) آب سخت دارای مقادیر زیادی از یون‌های کلسیم و منیزیم است. بتاسیم رو اضافه گفته! (ت) مولکول‌های چربی ناقطبی‌اند و با سر ناقطبی مولکول‌های صابون، جاذبه وان‌دروالسی برقرار می‌کنند.



گزینه ۹۳

برای رسیدن به واکنش اصلی، واکنش سوم را در $\frac{1}{3}$ (به خاطر 2NH_3)، واکنش دوم را در ۳ (به خاطر $3\text{N}_2\text{O}$) ضرب می‌کنیم و در آخر به منظور حذف H_2O و O_2 ، واکنش اول را در $\frac{2}{3}$ ضرب می‌کنیم.



$$\begin{aligned} \Delta H(\text{واکنش کلی}) &= \frac{1}{3}\Delta H_1 + 3\Delta H_2 + \frac{2}{3}\Delta H_3 \\ &= \frac{1}{3}(572) + 3(-367) + \frac{2}{3}(-1530) \\ &= 3(286 - 367) - 765 = -243 - 765 = -1008 \text{ kJ} \end{aligned}$$



گزینه ۹۴

استراتژی اول سرعت واکنش را در بازه‌های ۲۰ تا ۳۰ ثانیه و ۳۰ تا ۴۰ ثانیه حساب کن! سرعت واکنش در بازه ۲۵ تا ۳۰ ثانیه باید بین این دو عدد باشد.

نکته اگر زمان c بین دو زمان a و b باشد، می‌توان نوشت:

$$\begin{aligned} \bar{R}(a-b) &= \frac{\bar{R}(a-c) + \bar{R}(c-b)}{2}, (c = \frac{a+b}{2}) \\ \Rightarrow \bar{R}(a-c) &> \bar{R}(a-b) > \bar{R}(c-b) \end{aligned}$$

بازه زمانی ۲۵ تا ۳۰ ثانیه در جدول وجود ندارد، اما هیچ دشواری نداریم!

با توجه به این‌که سرعت واکنش با گذشت زمان کاهش می‌یابد، می‌توان نتیجه گرفت که سرعت در بازه زمانی ۲۵ تا ۳۰ ثانیه، بیشتر از بازه ۳۰ تا ۴۰ ثانیه و کمتر از بازه ۲۰ تا ۳۰ ثانیه است.

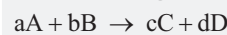
$$\text{I) } \bar{R}(30-35) > \bar{R}(30-40) > \bar{R}(25-40)$$

$$\text{II) } \bar{R}(25-30) > \bar{R}(30-35)$$

$$\text{III) } \bar{R}(20-25) > \bar{R}(20-30) > \bar{R}(25-30)$$

$$\xrightarrow{\text{III, II, I}} \bar{R}(30-40) < \bar{R}(25-30) < \bar{R}(20-30)$$

نکته سرعت متوسط واکنش از تقسیم سرعت متوسط تولید یا مصرف یک ماده شرکت کننده در واکنش بر ضریب استوکیومتری آن در معادله موازنه شده به دست می‌آید.



$$\begin{aligned} \bar{R}_{\text{واکنش}} &= \frac{\bar{R}(A)}{a} = \frac{\bar{R}(B)}{b} = \frac{\bar{R}(C)}{c} = \frac{\bar{R}(D)}{d} \\ &= \frac{-\Delta n_A}{a\Delta t} = \frac{-\Delta n_B}{b\Delta t} = \frac{\Delta n_C}{c\Delta t} = \frac{\Delta n_D}{d\Delta t} \end{aligned}$$

سرعت واکنش از تقسیم سرعت مصرف NOBr بر ضریب استوکیومتری آن به دست می‌آید؛ بنابراین خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} \bar{R}(\text{واکنش}) &= \frac{\bar{R}(\text{NOBr})}{2} = \frac{0.0204 - 0.0204}{2} \\ &= 1/45 \times 10^{-4} \text{ mol.L}^{-1} \cdot \text{s}^{-1} \end{aligned}$$



داده شده، منیزیم و روی برای حفاظت کاتدی آهن مناسباند که منیزیم به دلیل داشتن E° کم تر، گزینه مناسب تری است.

♦ $E^\circ(\text{کم تر}) - E^\circ(\text{بیشتر}) = E^\circ(\text{آند}) - E^\circ(\text{کاتد}) = E^\circ(\text{سلول})$

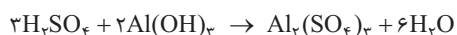
$E^\circ(\text{Mg} - \text{Co}) = -0.28 - (-0.37) = 0.09 \text{ V}$

$E^\circ(\text{Mg} - \text{Zn}) = -0.76 - (-0.37) = -0.39 \text{ V} \Rightarrow \frac{0.09}{0.39} = 1/3$



۹۹- گزینه ۱

معادله ها را موازنه کرده و حجم محلول H_2SO_4 مصرف شده در هر واکنش را حساب می کنیم:



$\frac{\text{حجم} \times \text{غلظت مولی}}{\text{ضریب}} = \frac{\text{مول}}{\text{ضریب}} \Rightarrow \frac{0.1 \times V_1}{3} = \frac{0.3}{2}$

$\Rightarrow V_1 = \frac{0.9}{0.2} = 0.45 \text{ L} = 450 \text{ mL}$



$\frac{\text{حجم} \times \text{غلظت مولی}}{\text{ضریب}} = \frac{\text{حجم} \times \text{غلظت مولی}}{\text{ضریب}} \Rightarrow \frac{0.1 \times V_2}{2} = \frac{0.3 \times 0.1}{1}$

با توجه به این که در هر دو کسر، حجم محلول را داریم و از طرفی می خواهیم حجم محلول H_2SO_4 را برحسب میلی لیتر حساب کنیم، نیازی به تبدیل حجم محلول NaOH از میلی لیتر به لیتر نیست!

$\frac{0.1 \times V_2}{1} = \frac{0.3 \times 0.1}{2} \Rightarrow V_2 = 0.3 \text{ mL}$

بنابراین حجم محلول سولفوریک اسید مورد استفاده در معادله (الف) بیشتر است.



۱۰۰- گزینه ۲

★ نکته طبق نظریه آرنیوس، برخی اکسیدهای فلزی (مانند Li_2O ، Na_2O و BaO) با حل شدن در آب، یون هیدروکسید تولید می کنند و باز به شمار می آیند.



برخی اکسیدهای نافلزی (مانند CO_2 ، N_2O_5 و SO_3) با آب واکنش داده و یون هیدرونیوم تولید می کنند و اسید به شمار می آیند:



لیتیم اکسید (Li_2O)، یک اکسید فلزی است و باز آرنیوس به حساب می آید. در بین گزینه های داده شده، CaO و K_2O نیز باز آرنیوس هستند.

با حل کردن Li_2O در آب، pH آب افزایش می یابد و طبق گفته سؤال از ۷ به ۵/۱۰



$[\text{H}^+] = 10^{-\text{pH}} = 10^{-10.5}$

$[\text{H}^+][\text{OH}^-] = 10^{-14} \Rightarrow [\text{OH}^-] = \frac{10^{-14}}{10^{-10.5}} = 10^{-3.5}$

$= 10^{-4} \times 10^{0.5} \xrightarrow{\log 2 = 0.3} 3 \times 10^{-4} \text{ mol.L}^{-1}$

$\xrightarrow{V=2/5 \text{ L}} \text{OH}^- \text{ مول} = 2/5 \times 3 \times 10^{-4} = 7/5 \times 10^{-4} \text{ mol}$

$7/5 \times 10^{-4} \text{ mol OH}^- \times \frac{1 \text{ mol Li}_2\text{O}}{2 \text{ mol OH}^-} \times \frac{30 \text{ g Li}_2\text{O}}{1 \text{ mol Li}_2\text{O}}$

$\times \frac{10^3 \text{ mg}}{1 \text{ g}} = \frac{7/5 \times 15}{1} = 11/25 \text{ mg Li}_2\text{O}$

♦ مجموع تغییر عدد اکسایش اتم های فسفر ($60 = 12 \times 5$) با مجموع تغییر عدد اکسایش اتم های نیتروژن ($60 = 20 \times 3$) یکسان است.

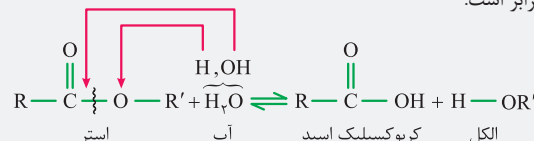
★ نکته در واکنش های اکسایش - کاهش، مجموع تغییرات اعداد اکسایش گونه های اکسند و کاهنده با یکدیگر برابر است.

🏠 مشاوره این مدل سؤال های یک یا دو واکنشی که ترکیب موازنه و عدد اکسایش است، در کنکورهای اخیر خیلی رو بورس بوده! معمولاً هم به صورت شمارشی و عبارتی داده شده! پس نیازه که حسابی این مدل سؤال ها رو تمرین کنید تا سر جلسه وقت کم نیارید!

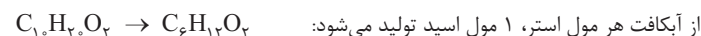
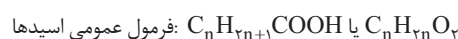


۹۷- گزینه ۴

★ نکته در واکنش آبکافت استرهای یک عاملی، ضرایب همه مواد برابر ۱ است؛ یعنی ۱ مول استر با ۱ مول آب واکنش داده و ۱ مول الکل و ۱ مول کربوکسیلیک اسید تولید می شود. همچنین شمار اتم های کربن استر با مجموع شمار اتم های کربن الکل و کربوکسیلیک اسید سازنده آن برابر است.



استر داده شده، ۱۰ اتم کربن دارد؛ بنابراین مجموع شمار اتم های کربن الکل و کربوکسیلیک اسید سازنده آن باید برابر ۱۰ باشد. بوتانول یک الکل ۴ کربنی است؛ در نتیجه اسید سازنده استر، باید ۶ کربنی باشد:



📌 روش استفاده از کسر تناسب:

$\frac{\text{جرم}}{\text{جرم مولی} \times \text{ضریب}} = \frac{\text{جرم}}{\text{جرم مولی} \times \text{ضریب}} \Rightarrow \frac{x}{172} = \frac{29}{116} \Rightarrow x = 43 \text{ g}$

📌 روش استفاده از کسر تبدیل:

$29 \text{ g C}_6\text{H}_{12}\text{O}_2 \times \frac{1 \text{ mol C}_6\text{H}_{12}\text{O}_2}{116 \text{ g C}_6\text{H}_{12}\text{O}_2} \times \frac{1 \text{ mol C}_4\text{H}_9\text{O}_2}{1 \text{ mol C}_6\text{H}_{12}\text{O}_2} \times \frac{172 \text{ g C}_4\text{H}_9\text{O}_2}{1 \text{ mol C}_4\text{H}_9\text{O}_2} = 43 \text{ g C}_4\text{H}_9\text{O}_2$



۹۸- گزینه ۲

★ نکته ۱ هر چه E° یک نیم واکنش کوچک تر باشد، گونه سمت راست آن کاهنده قوی تر است.

۲ اگر قدرت کاهندگی فلز A از B بیشتر باشد (E° فلز A کم تر باشد)، فلز A می تواند با نمک های فلز B به طور طبیعی واکنش دهد.

۳ ولتاژ یا E° یک سلول گالوانی از رابطه زیر به دست می آید:

$E^\circ(\text{کم تر}) - E^\circ(\text{بیشتر}) = E^\circ(\text{آند}) - E^\circ(\text{کاتد}) = E^\circ(\text{سلول})$

عبارت های اول و سوم درست اند.

📌 بررسی عبارت ها:

♦ هر چه E° نیم سلول یک فلز کم تر باشد، فلز مورد نظر قدرت کاهندگی بیشتری دارد.

$E^\circ(\text{Mg}^{2+} / \text{Mg}) < E^\circ(\text{Zn}^{2+} / \text{Zn}) < E^\circ(\text{Co}^{2+} / \text{Co})$

$\Rightarrow$ قدرت کاهندگی: $\text{Mg} > \text{Zn} > \text{Co}$

♦ قدرت کاهندگی فلز نقره کم تر از کبالت است (E° نقره بیشتر است)؛ بنابراین واکنش فلز نقره با محلول حاوی کبالت (II)، به طور طبیعی انجام نمی شود.

♦ برای حفاظت کاتدی اشیای آهنی، باید از فلزی با قدرت کاهندگی بیشتر (E° کم تر) نسبت به فلز آهن استفاده کرد که در شرایط خوردگی، نقش آند را ایفا کند. در بین فلزهای



گام ۳ با توجه به غلظت اولیه محلول‌ها و $[H^+]$ و $[OH^-]$ در آن‌ها، درصد یونش اسید و باز را حساب می‌کنیم:

$$\frac{[H^+]}{M} \times 100 = \frac{2 \times 10^{-4}}{2 \times 10^{-2}} \times 100 = 1$$

درصد یونش اسید

$$\frac{[OH^-]}{M} \times 100 = \frac{2 \times 10^{-3}}{10^{-2}} \times 100 = 20$$

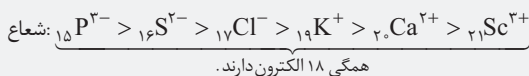
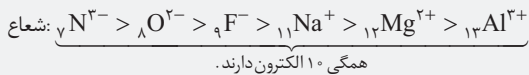
درصد یونش باز

$$\frac{\text{درصد یونش باز}}{\text{درصد یونش اسید}} = \frac{20}{1} = 20$$

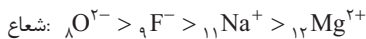


۱۰۳- گزینه ۱

نکته در یون‌های هم‌الکترون، هر چه عدد اتمی بیشتر باشد، شعاع یون کوچک‌تر است.



همه یون‌های داده‌شده، ۱۰ الکترون دارند. در بین یون‌های هم‌الکترون، هر چه عدد اتمی بیشتر باشد، شعاع یون کوچک‌تر است:



۱۰۴- گزینه ۴

عبارت‌های (ب) و (ت) درست‌اند.

بررسی عبارت‌ها:

(الف) در واکنش‌های گرماگیر، فرآورده‌ها سطح انرژی بالاتر و در نتیجه پایداری کم‌تری دارند.
(ب) فسفر سفید، برخلاف گاز هیدروژن، در هوا و دمای اتاق می‌سوزد و این موضوع نشان می‌دهد که انرژی فعال‌سازی سوختن فسفر سفید کم‌تر است.

(پ) سرعت واکنش، یک کمیت سینتیکی است و به گرماده یا گرماگیر بودن واکنش ارتباطی ندارد.

(ت) واکنش‌های حذف CO و C_xH_y در هر دو نوع مبدل، یکسان است، اما با توجه به این‌که با استفاده از مبدل‌های کاتالیستی خودروهای بنزینی نمی‌توان اکسیدهای نیتروژن خروجی از خودروهای دیزلی را به گاز نیتروژن تبدیل کرد، مبدل کاتالیستی خودروهای دیزلی ساختار متفاوتی دارند و در یک قسمت از آن‌ها با ورود آمونیاک و انجام واکنش $NO + NO + 2NH_3 \rightarrow 2N_2 + 3H_2O$ اکسیدهای نیتروژن به گاز N_2 تبدیل می‌شوند؛ فاصله این‌که مبدل خودروهای دیزلی برخلاف خودروهای بنزینی، دومرحله‌ای‌اند.



۱۰۵- گزینه ۳

گام ۱ با توجه به مول تعادلی A، مول تعادلی بقیه مواد را حساب می‌کنیم:



$$A \text{ تعادلی } = 0/2 \Rightarrow 1-2x = 0/2 \Rightarrow 2x = 0/8 \Rightarrow x = 0/4$$

$$\Rightarrow D \text{ تعادلی } = 0/41 - 0/4 = 0/01$$

$$E \text{ تعادلی } = 2 \times 0/4 = 0/8$$

گام ۲ مول تعادلی مواد را در رابطه ثابت تعادل قرار می‌دهیم:

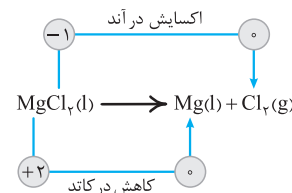
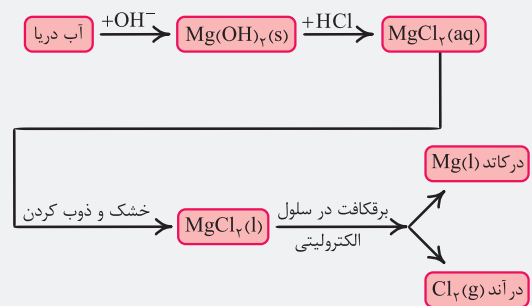
حجم ظرف ۰/۵ لیتر است؛ بنابراین خواهیم داشت:

$$K = \frac{[E]^2}{[A]^2[D]} = \frac{(0/8/0.5)^2}{(0/2/0.5)^2(0/01/0.5)} = \frac{1/6 \times 1/6 \times 0/5}{1/4 \times 1/4 \times 0/01} = \frac{8}{0/01} = 800$$



۱۰۱- گزینه ۳

نکته مراحل تهیه منیزیم از آب دریا به صورت زیر است:



عبارت‌های دوم، سوم و پنجم نادرست‌اند.

بررسی عبارت‌ها:

کاملاً درست!

پس گاز کلر می‌دهد!

منیزیم کلرید مذاب برقکافت می‌شود و نه محلول آن!

با توجه به شکل کتاب شیمی دوازدهم، درست! گاز کلر آزادشده در طی برقکافت، در تهیه هیدروکلریک اسید استفاده می‌شود. گاز کلر می‌تواند با گاز هیدروژن واکنش دهد تا HCl به دست آید:

منیزیم در آب دریا به صورت یون $(Mg^{2+}(aq))$ وجود دارد. فود فلز منیزیم رو که نداریم!



۱۰۲- گزینه ۴

درس‌نامه فرمول‌های درجه یونش و ثابت یونش اسید و باز:

۱ برای اسید ضعیف HA داریم:

$$K_a = \frac{[H^+]^2}{[HA]} = \frac{[H^+]^2}{M - [H^+]}$$

غلظت اولیه اسید یا باز: $K_a \approx \frac{[H^+]^2}{M}$ (معمولاً کوچک‌تر از 10^{-4})

$$\alpha = \frac{[H^+]}{M}, ([H^+] = M\alpha)$$

۲ برای باز ضعیف XOH داریم:

$$K_b = \frac{[OH^-]^2}{[XOH]} = \frac{[OH^-]^2}{M - [OH^-]}$$

(معمولاً کوچک‌تر از 10^{-4})

$$\alpha = \frac{[OH^-]}{M}, ([OH^-] = M\alpha)$$

گام ۱ با توجه به رابطه ثابت یونش اسید و باز، به ترتیب $[H^+]$ و $[OH^-]$ در محلول آن‌ها را به دست می‌آوریم:

$$K_a \approx \frac{[H^+]^2}{M} \Rightarrow 2 \times 10^{-6} = \frac{[H^+]^2}{2 \times 10^{-2}} \Rightarrow [H^+]^2 = 4 \times 10^{-8}$$

$$\Rightarrow [H^+] = 2 \times 10^{-4} \text{ mol.L}^{-1}$$

$$K_b \approx \frac{[OH^-]^2}{M} \Rightarrow 4 \times 10^{-4} = \frac{[OH^-]^2}{10^{-2}} \Rightarrow [OH^-]^2 = 4 \times 10^{-6}$$

$$\Rightarrow [OH^-] = 2 \times 10^{-3} \text{ mol.L}^{-1}$$

$$\frac{[H^+]}{[OH^-]} = \frac{2 \times 10^{-4}}{2 \times 10^{-3}} = 0/1$$

۱- در شکل کتاب درسی فقط نشان داده شده که از گاز کلر می‌توان برای تهیه هیدروکلریک اسید استفاده کرد، ولی به واکنش تهیه آن اشاره نشده است. از واکنش‌های دیگری مانند $Cl_2 + H_2O \rightarrow HCl + HOCl$ نیز برای تهیه هیدروکلریک اسید استفاده می‌شود.