

۱۴۰۰ سراسری داخل

نام درس	دهم	یازدهم	دوازدهم	ترکیبی	آسان	متوسط	سخت
ریاضیات	۱	۶	۱۴	۱۹	-	۲۱	۱۹
فیزیک	۸	۹	۱۶	۲	۲	۲۸	۵
شیمی	۶	۱۲	۸	۴	۶	۱۹	۵

ریاضیات

گزینه ۴ - ۱

استراتژی ابتدا با تغییر متغیر $X^2 = t$ ، جواب‌های معادله را به دست آورید. ریشه‌های این معادله قرینه یکدیگرند، پس $S = 0$ می‌شود و کافی است P را محاسبه کنید.

درس‌نامه برخی از معادلات را می‌توانیم با تغییر متغیر مناسب به معادله درجه ۲ تبدیل کنیم، برای مثال: $X^4 - 5X^2 + 4 = 0 \xrightarrow{X^2=t} t^2 - 5t + 4 = 0 \Rightarrow \begin{cases} t=1 \\ t=4 \end{cases}$ حالا به جای t ، X^2 قرار می‌دهیم تا جواب‌های معادله به دست آیند: $X^2=1 \Rightarrow X=\pm 1$ ، $X^2=4 \Rightarrow X=\pm 2$

گام از تغییر متغیر $X^2 = t$ استفاده می‌کنیم و ریشه‌های معادله را به دست می‌آوریم:

$$X^4 - 7X^2 - 5 = 0 \xrightarrow{X^2=t} t^2 - 7t - 5 = 0 \xrightarrow{\Delta=49+20=69} \begin{cases} t_1 = \frac{7+\sqrt{69}}{2} \\ t_2 = \frac{7-\sqrt{69}}{2} \end{cases}$$

$$t = X^2 \Rightarrow \begin{cases} X^2 = \frac{7+\sqrt{69}}{2} \Rightarrow X = \pm \sqrt{\frac{7+\sqrt{69}}{2}} \\ X^2 = \frac{7-\sqrt{69}}{2} \Rightarrow X = \pm \sqrt{\frac{7-\sqrt{69}}{2}} \end{cases}$$

غرق؛ چون X^2 نمی‌تواند عددی منفی باشد.

گام ریشه‌های این معادله قرینه یکدیگرند، پس $S = 0$ می‌شود؛ ببینید:

$$S = X_1 + X_2 = \sqrt{\frac{7+\sqrt{69}}{2}} + (-\sqrt{\frac{7+\sqrt{69}}{2}}) = 0$$

حالا حاصل ضرب ریشه‌ها را محاسبه می‌کنیم:

$$P = X_1 X_2 = \sqrt{\frac{7+\sqrt{69}}{2}} \times (-\sqrt{\frac{7+\sqrt{69}}{2}}) = -\frac{7+\sqrt{69}}{2}$$

گام در آخر، خواسته سؤال را محاسبه می‌کنیم:

$$2P^2 - 3SP + 2S = 2P^2 = 2 \times \left(-\frac{7+\sqrt{69}}{2}\right)^2 = 2 \times \frac{49+69+14\sqrt{69}}{2} = 118+14\sqrt{69} = 59+7\sqrt{69}$$

گزینه ۳ - ۲

درس‌نامه ۱ حاصل دترمینان ماتریس $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ برابر است با:

$$|A| = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

۲ برخی قواعد لگاریتم را در زیر می‌بینید:

(الف) $\log_c a + \log_c b = \log_c ab$ (ب) $\log_c a - \log_c b = \log_c \frac{a}{b}$

(پ) $\log_a a = 1$ (ت) $\log_b a = c \Leftrightarrow a = b^c$

(ث) $\log_b a \times \log_a c = \log_b c$

گام ابتدا حاصل دترمینان را محاسبه می‌کنیم:

$$\left| \begin{matrix} \log 5 & \log 2 \\ \log 2 & \log 5 \end{matrix} \right| = (\log 5)^2 - (\log 2)^2 \xrightarrow{\text{مزدوج}} \underbrace{(\log 5 - \log 2)}_{\log \frac{5}{2}} \underbrace{(\log 5 + \log 2)}_{\log 10=1} = \log \frac{5}{2}$$

گام حالا مقدار به‌دست‌آمده برای دترمینان را در معادله جای‌گذاری و آن را حل می‌کنیم:

$$\log \frac{5}{2} \times \log \frac{5}{2} = 1 \xrightarrow{\text{مورد (۲) درس‌نامه}} \log(3x-2) = 1$$

$$\xrightarrow{\text{مورد (۲) درس‌نامه}} 3x-2=10^1 \Rightarrow 3x=12 \Rightarrow x=4$$

گزینه ۴ - ۳

استراتژی ابتدا اعداد ۱۴۷ و ۱۳۲۳ را برحسب ۳ و ۲۱ بنویسید، سپس با استفاده از قوانین لگاریتم و اتحاد مزدوج جواب به دست می‌آید.

درس‌نامه برخی قوانین لگاریتم را در زیر می‌بینید:

(الف) $\log_c ab = \log_c a + \log_c b$

(ب) $\log_c \frac{a}{b} = \log_c a - \log_c b$

(پ) $\log_{b^n} a^m = \frac{m}{n} \log_b a$

$$147 = 3 \times 7^2 = \frac{3^2 \times 7^2}{3} = \frac{21^2}{3}$$

$$1323 = 3^2 \times 7^2 = 3 \times 3^2 \times 7^2 = 3 \times 21^2$$

$$(\log_{21} 3)^2 + \log_{21} \frac{21^2}{3} \times \log_{21} (21^2 \times 3)$$

$$(\log_{21} 3)^2 + (\log_{21} 21^2 - \log_{21} 3)(\log_{21} 21^2 + \log_{21} 3)$$

$$= (\log_{21} 3)^2 + (2 - \log_{21} 3)(2 + \log_{21} 3) = (\log_{21} 3)^2 + 2^2 - (\log_{21} 3)^2 = 4$$

مزدوج

گزینه ۲ - ۴

استراتژی ابتدا با استفاده از $\tan\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{1}{4}$ ، حاصل $\tan \alpha$ را محاسبه کنید و سپس با روش رسم مثلث قائم‌الزاویه برای به دست آوردن نسبت‌های مثلثاتی، حاصل $\sin \alpha$ و $\cos \alpha$ را هم به دست آورید.

درس‌نامه ۱

$$\tan 2\alpha = \frac{2 \tan \alpha}{1 - \tan^2 \alpha}$$

۲ وقتی یکی از نسبت‌های مثلثاتی (فرقی ندارد کدام) را داشته باشیم، می‌توانیم با رسم یک مثلث قائم‌الزاویه و استفاده از فیثاغورس، مابقی نسبت‌ها را هم به دست بیاوریم، برای مثال اگر $\sin \alpha = \frac{3}{5}$ باشد، ضلع مقابل به زاویه α را برابر ۳ و وتر را برابر ۵ در نظر می‌گیریم. به کمک فیثاغورس، ضلع سوم را هم حساب می‌کنیم و نسبت‌ها را می‌نویسیم:

$$\Rightarrow \begin{cases} \cos \alpha = \frac{\text{مجاور}}{\text{وتر}} = \frac{4}{5} \\ \tan \alpha = \frac{\text{مقابل}}{\text{مجاور}} = \frac{3}{4} \\ \cot \alpha = \frac{\text{مجاور}}{\text{مقابل}} = \frac{4}{3} \end{cases}$$

البته این روش، علامت نسبت‌ها را به ما نمی‌دهد و علامت را با توجه به محدوده کمان باید خودمان پیدا کنیم.



گام ۷ همین کارها را برای معادله $\sin \lambda \alpha = \sin(-\alpha)$ هم انجام می‌دهیم:

$$\sin \lambda \alpha = \sin(-\alpha) \Rightarrow \begin{cases} \lambda \alpha = 2k\pi - \alpha \Rightarrow 9\alpha = 2k\pi \\ \lambda \alpha = 2k\pi + (\pi - (-\alpha)) \Rightarrow 7\alpha = 2k\pi + \pi \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \alpha = \frac{2k\pi}{9} \xrightarrow[k=4]{\text{بزرگترین جواب در } [0, \pi]} \frac{8\pi}{9} \\ \alpha = \frac{2k\pi + \pi}{7} \xrightarrow[k=3]{\text{بزرگترین جواب در } [0, \pi]} \pi \end{cases}$$

حواستان باشد جواب $\alpha = \pi$ قابل قبول نیست چون در معادله (*) صدق نمی‌کند، در اصل دلیل این‌که ما به این جواب رسیدیم این است که دو طرف معادله را در $\sin^2 \alpha$ ضرب کردیم که باعث ایجاد جواب‌های اضافه شد. بنابراین بزرگترین جواب در این بازه برابر $\frac{8\pi}{9}$ می‌شود.

مشاوره معادله مثلثاتی جزء پای ثابت‌های کنکورهای سراسری است که اکثر سؤالات آن با نسبت‌های دوآلفایی و نسبت‌های مجموع و تفاضل دو کمان ترکیب می‌شوند.

۶- گزینه ۳

استراتژی فرض کنید $p(x) = ax^2 + bx + c$ است، الگوریتم تقسیم را بنویسید و معادله را ساده کنید و در آخر همه ضرایب را برحسب b نوشته و مقدار b را طوری تعیین کنید که همه ضرایب طبیعی و مجموع آن‌ها حداقل شود.

درس‌نامه ۱ اگر چندجمله‌ای $p(x)$ را بر $f(x)$ تقسیم و خارج قسمت و باقی‌مانده را به ترتیب با $q(x)$ و $r(x)$ نمایش دهیم، الگوریتم تقسیم به شکل زیر می‌شود:

$$\underbrace{p(x)}_{\text{مقسوم‌علیه}} = \underbrace{f(x)}_{\text{خارج قسمت}} \underbrace{q(x)}_{\text{باقی‌مانده}} + \underbrace{r(x)}_{\text{باقی‌مانده}}$$

۲ مشتق x^n برابر nx^{n-1} می‌شود، برای مثال: $15x^2 \xrightarrow{\text{مشتق}} 30x$

۳ اگر چندجمله‌ای $p(x)$ به ازای هر مقدار حقیقی x برابر صفر باشد، تک‌تک ضرایب آن باید صفر شوند، برای مثال:

$$(a-2)x^2 + (b+3)x + c + d - 4 = 0 \Rightarrow \begin{cases} a=2 \\ b=-3 \\ c=0 \\ d=4 \end{cases}$$

گام ۷ فرض می‌کنیم $p(x) = ax^2 + bx + c$ باشد که در این صورت $p'(x) = 2ax + b$ می‌شود.

گام ۸ الگوریتم تقسیم را می‌نویسیم:

$$p(x) = \underbrace{p'(x)}_{\text{مقسوم‌علیه}} \underbrace{\left(\frac{1}{2}x + 1\right)}_{\text{خارج قسمت}} + \underbrace{(-2)}_{\text{باقی‌مانده}} \Rightarrow ax^2 + bx + c = (2ax + b)\left(\frac{1}{2}x + 1\right) - 2$$

حالا معادله را ساده می‌کنیم:

$$ax^2 + bx + c = ax^2 + \frac{1}{2}bx + b - 2 \Rightarrow 2ax - \frac{1}{2}bx + b - c - 2 = 0 \Rightarrow (2a - \frac{1}{2}b)x + b - c - 2 = 0$$

گام ۹ این معادله به ازای هر مقدار حقیقی x برقرار است، پس طبق مورد (۳) درس‌نامه داریم:

$$\underbrace{(2a - \frac{1}{2}b)}_{\text{ضریب } x} x + \underbrace{b - c - 2}_{\text{عدد ثابت}} = 0 \Rightarrow \begin{cases} 2a - \frac{1}{2}b = 0 \\ b - c - 2 = 0 \end{cases}$$

از دو تساوی بالا، a و c را برحسب b می‌نویسیم:

$$\begin{cases} a = \frac{1}{4}b \\ c = b - 2 \end{cases}$$

گام ۱۰ ضرایب $p(x)$ (یعنی a ، b ، c) طبیعی هستند و برای این‌که مجموع آن‌ها حداقل باشد، b را برابر ۴ در نظر می‌گیریم ($a = \frac{1}{4}b$)، پس برای این‌که a طبیعی باشد، b باید مضرب ۴ باشد که کوچک‌ترین عدد طبیعی مضرب ۴ خود ۴ می‌شود، حالا با انتخاب $b = 4$ ، مقدار c هم طبیعی می‌شود، بنابراین:

$$\begin{cases} a = \frac{1}{4}b = 1 \\ b = 4 \\ c = b - 2 = 2 \end{cases} \xrightarrow{\text{حداقل مجموع ضرایب}} 1 + 4 + 2 = 7$$

گام ۶ با استفاده از مورد (۱) درس‌نامه، $\tan \alpha$ را محاسبه می‌کنیم:

$$\tan \alpha = \frac{2 \tan \frac{\alpha}{2}}{1 - \tan^2 \frac{\alpha}{2}} = \frac{2 \times \frac{1}{4}}{1 - (\frac{1}{4})^2} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{15}{16}} = \frac{8}{15}$$

گام ۷ حالا که مقدار $\tan \alpha$ را داریم، می‌توانیم با رسم مثلث قائم‌الزاویه (مورد (۲) درس‌نامه)، بقیه نسبت‌های مثلثاتی را هم به دست بیاوریم. چون $\tan \alpha = \frac{8}{15}$ است، پس ضلع مقابل به زاویه α را برابر ۸ و ضلع مجاور به α را ۱۵ در نظر می‌گیریم که با فیثاغورس، وتر برابر ۱۷ می‌شود.

$$\Rightarrow \begin{cases} \sin \alpha = \frac{8}{17} \\ \cos \alpha = \frac{15}{17} \end{cases}$$

در این‌جا یک حالت دیگر هم ممکن است پیش بیاید ($\sin \alpha = -\frac{8}{17}$ و $\cos \alpha = -\frac{15}{17}$). اگر با حالت اول به جواب نرسیدیم، سراغ این حالت می‌رویم.

گام ۸ در آخر سراغ خواسته مسئله می‌رویم:

$$\frac{\tan \alpha - \sin \alpha}{\sin \alpha - \cos \alpha} = \frac{\frac{8}{17} - \frac{8}{17}}{\frac{8}{17} - \frac{15}{17}} = \frac{16}{-7} = -\frac{16}{7}$$

مشاوره هر سال در کنکور سراسری حداقل ۲ سؤال مستقیم و تعدادی سؤال ترکیبی با حد، مشتق، کاربرد مشتق و ... از فصل مثلثات داریم، به عبارت دیگر مثلثات یکی از مباحث محوری در کنکور سراسری است و مسلط‌بودن به مفاهیم آن الزامی است.

۵- گزینه ۴

درس‌نامه

۱ $\sin \alpha \cdot \cos \alpha = \frac{\sin 2\alpha}{2}$

۲ (فرمول طلایی) $1 + \cos 2\alpha = 2 \cos^2 \alpha$

۳ برای ساده‌کردن تساوی‌های به فرم $\cos \alpha \cos 2\alpha \cos 4\alpha \dots = \dots$ طرفین تساوی را در $\sin \alpha$ ضرب می‌کنیم و چندین بار از مورد (۱) درس‌نامه استفاده می‌کنیم.

۴ جواب‌های معادله مثلثاتی $\sin \alpha = \sin \beta$ به صورت زیرند:

$$\sin \alpha = \sin \beta \Rightarrow \begin{cases} \alpha = 2k\pi + \beta \\ \alpha = 2k\pi + (\pi - \beta) \end{cases}$$

گام ۶ اول از فرمول طلایی (مورد ۲ درس‌نامه) استفاده می‌کنیم:

$$\frac{(1 + \cos(2\alpha))(1 + \cos(4\alpha))(1 + \cos(8\alpha))}{2 \cos^2 \alpha \cdot 2 \cos^2 2\alpha \cdot 2 \cos^2 4\alpha} = \frac{1}{8} \Rightarrow \frac{1}{8} \cos^2 \alpha \cdot \cos^2 2\alpha \cdot \cos^2 4\alpha = \frac{1}{8}$$

$$\Rightarrow \cos^2 \alpha \cdot \cos^2 2\alpha \cdot \cos^2 4\alpha = \frac{1}{8} \quad (*)$$

گام ۷ طرفین معادله (*) را در $\sin^2 \alpha$ ضرب و با کمک عبارت مورد (۱) درس‌نامه، عبارت را ساده‌تر می‌کنیم:

$$\sin^2 \alpha \cdot \cos^2 \alpha \cdot \cos^2 2\alpha \cdot \cos^2 4\alpha = \frac{1}{8} \sin^2 \alpha$$

$$\Rightarrow (\underbrace{\sin \alpha \cdot \cos \alpha}_{\frac{1}{2} \sin 2\alpha} \cdot \underbrace{\cos 2\alpha \cdot \cos 4\alpha}_{\frac{1}{2} \sin 4\alpha})^2 = \frac{1}{8} \sin^2 \alpha$$

$$\Rightarrow \frac{1}{8} \sin^2 2\alpha = \frac{1}{8} \sin^2 \alpha$$

$$\Rightarrow \frac{1}{8} \sin^2 2\alpha = \frac{1}{8} \sin^2 \alpha \Rightarrow \sin^2 2\alpha = \sin^2 \alpha \Rightarrow \sin 2\alpha = \pm \sin \alpha$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \sin 2\alpha = \sin \alpha \\ \sin 2\alpha = -\sin \alpha \Rightarrow \sin 2\alpha = \sin(-\alpha) \end{cases}$$

گام ۸ حالا معادله مثلثاتی $\sin 2\alpha = \sin \alpha$ را حل می‌کنیم و بزرگترین جواب آن در بازه $[0, \pi]$ را محاسبه می‌کنیم:

$$\sin 2\alpha = \sin \alpha \Rightarrow \begin{cases} \lambda \alpha = 2k\pi + \alpha \Rightarrow 7\alpha = 2k\pi \\ \lambda \alpha = 2k\pi + (\pi - \alpha) \Rightarrow 9\alpha = 2k\pi + \pi \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \alpha = \frac{2k\pi}{7} \xrightarrow[k=3]{\text{بزرگترین جواب در } [0, \pi]} \frac{6\pi}{7} \\ \alpha = \frac{2k\pi + \pi}{9} \xrightarrow[k=4]{\text{بزرگترین جواب در } [0, \pi]} \pi \end{cases}$$



۷- گزینه ۴

استراتژی ابتدا با تغییر متغیر $\sqrt{9\cos^2 x - 1} = t$ ، ضابطه f را ساده‌تر کنید، حالا تابعی صعودی است (پراشو تو پاسخ می‌بینید)، پس با به دست آوردن حداقل و حداکثر t و جای‌گذاری آن در ضابطه f ، برد تابع حاصل می‌شود.

درس‌نامه ۱ محدوده تغییرات $\cos x$ و $\cos^2 x$ به صورت زیر است:

$$-1 \leq \cos x \leq 1, \quad 0 \leq \cos^2 x \leq 1$$

۲ در توابع نمایی به شکل $y = a^x$ داریم:

الف) اگر $a > 1$ ، تابع اکیداً صعودی است.

ب) اگر $0 < a < 1$ ، تابع اکیداً نزولی است.

۳ اگر f تابعی صعودی و g تابعی نزولی باشد، $f - g$ صعودی است.

۴ اگر f تابعی اکیداً صعودی و پیوسته با دامنه $[a, b]$ باشد، بردش بازه $[f(a), f(b)]$ می‌شود.

گام ۱ برای ساده‌تر شدن ضابطه، از تغییر متغیر $\sqrt{9\cos^2 x - 1} = t$ استفاده می‌کنیم:

$$\sqrt{9\cos^2 x - 1} = t \xrightarrow{x(-1)} \sqrt{1 - 9\cos^2 x} = -t$$

$$\Rightarrow f(x) = \sqrt[3]{9\cos^2 x - 1} - \sqrt[3]{1 - 9\cos^2 x} = \sqrt[3]{t} - \sqrt[3]{-t} = \sqrt[3]{t} - (-\sqrt[3]{t}) = 2\sqrt[3]{t} \quad (*)$$

گام ۲ تابعی صعودی و $\left(\frac{1}{\sqrt[3]{t}}\right)^t$ تابعی نزولی است (طبق مورد (۲) درس‌نامه)، پس طبق

مورد (۳) درس‌نامه، $f(x) = \sqrt[3]{t} - \left(\frac{1}{\sqrt[3]{t}}\right)^t$ تابعی صعودی می‌شود و برای به دست آوردن برد $f(x)$ کافی است به جای t حداقل و حداکثر مقدار آن را قرار دهیم.

گام ۳ محدوده تغییرات t را به دست می‌آوریم:

$$0 \leq \cos^2 x \leq 1 \xrightarrow{\times 9} 0 \leq 9\cos^2 x \leq 9 \xrightarrow{-1} -1 \leq 9\cos^2 x - 1 \leq 8$$

$$\xrightarrow{\sqrt[3]{}} -1 \leq \sqrt[3]{9\cos^2 x - 1} \leq 2 \Rightarrow -1 \leq t \leq 2$$

گام ۴ با توجه به مورد (۴) درس‌نامه، با جای‌گذاری $t = -1$ و $t = 2$ در $(*)$ ، حداقل و حداکثر

مقدار f حاصل می‌شود:

$$f(x) = \sqrt[3]{t} - \left(\frac{1}{\sqrt[3]{t}}\right)^t \Rightarrow \begin{cases} t = -1 \Rightarrow f(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{-1}} - 2 = -\frac{3}{\sqrt[3]{1}} \\ t = 2 \Rightarrow f(x) = \sqrt[3]{2} - \frac{1}{\sqrt[3]{2}} = \frac{15}{\sqrt[3]{2}} \end{cases}$$

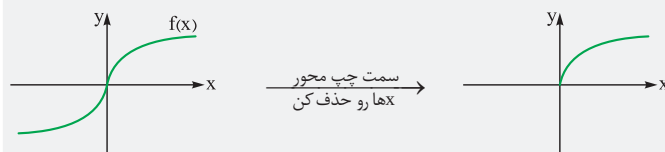
بنابراین برد تابع به صورت $\left[-\frac{3}{\sqrt[3]{1}}, \frac{15}{\sqrt[3]{2}}\right]$ شده و $b - a = \frac{15}{\sqrt[3]{2}} + \frac{3}{\sqrt[3]{1}} = \frac{21}{\sqrt[3]{2}}$ می‌شود.

مشاوره برای به دست آوردن برد توابعی که مشتق آن‌ها را بلد نیستیم، یکی از بهترین ایده‌ها استفاده از تغییر متغیر است.

۸- گزینه ۱

استراتژی برای به دست آوردن دامنه تابع، باید نامساوی $6 + \sqrt{|x|} - |x| > 0$ را حل کنید که راحت‌ترین راه برای حل آن، رسم تابع است.

درس‌نامه ۱ برای به دست آوردن دامنه توابع لگاریتمی به شکل $y = \log_a f(x)$ ، باید نامساوی $f(x) > 0$ را حل کنیم. ۲ برای رسم نمودار $f(|x|)$ ، قسمت‌هایی از نمودار $f(x)$ که سمت چپ محور y است را حذف می‌کنیم و قسمت‌هایی که سمت راست محور y هستند را نسبت به محور y قرینه می‌کنیم، برای مثال:



۳ برای رسم نمودار $y = f(x) + a$ ، کافی است نمودار $y = f(x)$ را a واحد به سمت بالا ببرید.

گام ۱ برای به دست آوردن دامنه $f(x) = \log_6 \frac{1}{6 + \sqrt{|x|} - |x|}$ ، باید نامساوی

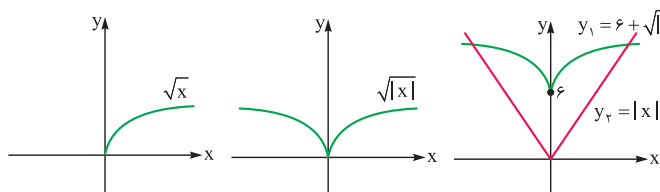
$$\frac{1}{6 + \sqrt{|x|} - |x|} > 0$$

را حل کنیم. حالا دقت کنید صورت این کسر همواره مثبت است، پس مخرج آن یعنی $6 + \sqrt{|x|} - |x|$ هم باید مثبت باشد، به عبارت دیگر جواب نامعادله $6 + \sqrt{|x|} - |x| > 0$ را می‌خواهیم.

گام ۲ برای حل نامعادله $6 + \sqrt{|x|} - |x| > 0$ ، از روش رسم استفاده می‌کنیم:

$$6 + \sqrt{|x|} - |x| > 0 \Rightarrow \underbrace{6 + \sqrt{|x|}}_{y_1} > \underbrace{|x|}_{y_2}$$

نامساوی آخر، یعنی می‌خواهیم نمودار $y_1 = 6 + \sqrt{|x|}$ بالاتر از نمودار $y_2 = |x|$ باشد.



گام ۳ با توجه به نمودار رسم‌شده، کافی است محل تقاطع دو نمودار $|x|$ و $6 + \sqrt{|x|}$ را به دست آوریم. x های بین دو نقطه تقاطع، جواب‌های نامعادله $y_1 > y_2$ می‌شود:

$$6 + \sqrt{|x|} = |x| \Rightarrow \sqrt{|x|} = |x| - 6 \xrightarrow{|x|=t \text{ تغییر متغیر}} \sqrt{t} = t - 6 \quad (*)$$

$$\xrightarrow{\text{توان } 2} t = t^2 - 12t + 36 \Rightarrow t^2 - 13t + 36 = 0$$

$$\Rightarrow (t - 4)(t - 9) = 0 \Rightarrow \begin{cases} t = 4 & \times \\ t = 9 & \checkmark \end{cases}$$

در معادله گنگ باید جواب‌های به‌دست‌آمده را در معادله اولیه، یعنی معادله $(*)$ چک کنیم. فقط $t = 9$ جواب می‌دهد. حالا در تساوی $t = 9$ جای t می‌نویسیم $|x| = 9 \Rightarrow x = \pm 9$:

بنابراین جواب، x های بین -9 و 9 یعنی $(-9, 9)$ می‌شود.

تیزبازی $x = -4$ و $x = 4$ هر دو در دامنه f صدق می‌کنند (چون مقدار f به ازای آن‌ها برابر $\log_6 \frac{1}{4}$ می‌شود)، پس هر دو باید در دامنه تابع وجود داشته باشند و تنها $x = \pm 4$ شامل x است.

۹- گزینه ۲

استراتژی کافی است دامنه f را به دست آورده و ضابطه f را ساده کنید.

درس‌نامه ۱ دامنه توابع لگاریتمی به شکل $y = \log_a$ ، مجموعه جواب

نامعادله $a^{\log_b c} > 0$ است. ۲ در عبارت‌های به فرم $a^{\log_b c}$ ، حق داریم جای طبقه اول و سوم را عوض کنیم:

۳ دامنه تابع را باید قبل از ساده‌کردن ضابطه‌اش حساب کنید.

گام ۱ ابتدا دامنه f را به دست می‌آوریم: (مورد (۱) درس‌نامه)

$$f(x) = 9^{\log_3 x} \Rightarrow x \in (0, +\infty)$$

گام ۲ حالا ضابطه f را ساده می‌کنیم: (مورد (۲) درس‌نامه)

$$f(x) = 9^{\log_3 x} = x^{\log_3 9} = x^{\log_3 3^2} = x^{2\log_3 3} = x^2$$

بنابراین، ما تابع $f(x) = x^2$ با دامنه $(0, +\infty)$ را می‌خواهیم که نمودار آن به شکل مقابل می‌شود:



۱۰- گزینه ۴

درس‌نامه وقتی $u \rightarrow 0$ ، هم‌ارزی‌های مثلثاتی مقابل را داریم: $\begin{cases} \tan u \approx u \\ 1 - \cos u \approx \frac{u^2}{2} \end{cases}$

گام ۱ ابتدا دقت کنید وقتی $x \rightarrow 0^+$ ، کمان $\tan$ یعنی $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} - 1$ هم به سمت صفر می‌رود، پس از هم‌ارزی تانژانت می‌توانیم استفاده کنیم:

$$\tan\left(\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} - 1\right) \sim \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} - 1$$



۱۲- گزینه ۴

شفاف سازی فقط دو مجانب موازی با محورهای مختصات دارد؛ یعنی تابع روی هم دو مجانب قائم و افقی دارد.

درس نامه ۱ تابع کسری $y = \frac{f(x)}{g(x)}$ در ریشه‌های مخرج ناپیوسته است.

۲ در توابع کسری مثل $y = \frac{f(x)}{g(x)}$ ، برای پیدا کردن مجانب قائم، به دنبال ریشه‌هایی از مخرج هستیم که حاصل صورت در آن‌ها برابر یک عدد حقیقی ناصفر شود و برای پیدا کردن مجانب افقی، حد در بی‌نهایت کسر را محاسبه می‌کنیم.

گام ۱ تابع f در دو نقطه ناپیوسته است، پس مخرج f ، یعنی $ax^2 - bx + 2$ دو ریشه دارد.

گام ۲ فقط دو مجانب موازی با محورهای مختصات دارد، پس دو حالت داریم:

حالت اول: f دو مجانب قائم داشته باشد و مجانب افقی نداشته باشد که در این صورت باید $a = 0$ شود، پس $f(x) = \frac{-bx^2 + 2}{-bx + 2}$. ولی این حالت امکان‌پذیر نیست، چون مخرج ۲ ریشه ندارد.

حالت دوم: f یک مجانب افقی و یک مجانب قائم داشته باشد (در این حالت باید $a \neq 0$ باشد تا مجانب افقی داشته باشیم). گفتیم مخرج f دو ریشه دارد ولی می‌خواهیم فقط یک مجانب قائم داشته باشیم، پس صورت و مخرج f باید یک ریشه مشترک داشته باشند.

گام ۳ حالا ریشه مشترک صورت و مخرج f را پیدا می‌کنیم:

$$\left. \begin{aligned} ax^2 - bx^2 + 2 &= 0 \\ ax^2 - bx + 2 &= 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow ax^2 - bx^2 + 2 = ax^2 - bx + 2 \Rightarrow -bx^2 + bx = 0 \Rightarrow -b(x^2 - x) = 0 \Rightarrow -bx(x-1) = 0$$

b برابر صفر نیست، چون اگر $b = 0$ باشد، دوباره مخرج f دو ریشه ندارد؛ بنابراین از معادله $-bx(x-1) = 0$ ، $x = 0$ یا $x = 1$ می‌شود.

گفتیم $a \neq 0$ است، حالا حالت $x = 0$ قابل قبول نیست زیرا به ازای $x = 0$ ، $ax^2 - bx + 2$ و $ax^2 - bx^2 + 2$ صفر نمی‌شوند، بنابراین ریشه مشترک صورت و مخرج، $x = 1$ است.

$$\left. \begin{aligned} ax^2 - bx^2 + 2 &\xrightarrow{x=1} a - b + 2 = 0 \\ ax^2 - bx + 2 &\xrightarrow{x=1} a - b + 2 = 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow b = a + 2$$

گام ۴ حالا در f به جای b قرار می‌دهیم $a + 2$ و تابع را تجزیه و ساده می‌کنیم:

$$f(x) = \frac{ax^2 - bx^2 + 2}{ax^2 - bx + 2} = \frac{ax^2 - (a+2)x^2 + 2}{ax^2 - (a+2)x + 2} = \frac{ax^2 - ax^2 - 2x^2 + 2}{ax^2 - ax - 2x + 2} = \frac{-2x^2 + 2}{ax^2 - ax - 2x + 2} = \frac{-2x^2 + 2}{ax^2 + ax - 2}$$

از صورت و مخرج، $(x-1)$ را ساده می‌کنیم:

$$f(x) = \frac{ax^2 - 2x - 2}{ax^2 + ax - 2} \quad \text{حالا باید مخرج } f, \text{ یعنی } ax^2 + ax - 2, \text{ فقط یک ریشه داشته باشد، پس دلتای آن صفر می‌شود: } \Delta = 0 \Rightarrow a^2 + 4a = 0 \Rightarrow a(a+4) = 0 \xrightarrow{a \neq 0} a = -4$$

پس: $b = a + 2 = -4 + 2 = -6$

۱۳- گزینه ۲

درس نامه ۱ مجموع اعداد طبیعی از ۱ تا n برابر است با:

$$1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

۲ برای به دست آوردن حد در بی‌نهایت تابع کسری $y = \frac{f(x)}{g(x)}$ ، از هم‌ارزی پرتوان استفاده می‌کنیم، یعنی در صورت و در مخرج، فقط x با بزرگ‌ترین توان را نگه می‌داریم.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x^3 - 5x + 2}{5x^3 + 7x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x^3}{5x^3} = \frac{4}{5} \quad \text{برای مثال:}$$

از طرفی وقتی $x \rightarrow 0^+$ ، $\cos \sqrt{2x}$ یعنی $\sqrt{2x}$ هم به سمت صفر می‌رود، پس از هم‌ارزی کسینوس هم می‌توانیم استفاده کنیم:

$$1 - \cos \sqrt{2x} \sim \frac{(\sqrt{2x})^2}{2} = x$$

گام ۱ حالا از هم‌ارزی‌های مثلثاتی گام قبل استفاده می‌کنیم:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\tan^2\left(\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} - 1\right)}{(1 - \cos \sqrt{2x})^n} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\left(\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} - 1\right)^2}{x^n} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\left(\frac{1 - \sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1-x^2}}\right)^2}{x^n}$$

گام ۲ عبارت داخل پرانتز را در مزدوج صورتش ضرب و تقسیم می‌کنیم:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\left(\frac{1 - \sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1-x^2}} \times \frac{1 + \sqrt{1-x^2}}{1 + \sqrt{1-x^2}}\right)^2}{x^n} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{(1 - x^2)(1 + \sqrt{1-x^2})^2}{x^n} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^2}{x^n \times (\sqrt{1-x^2} \times (1 + \sqrt{1-x^2}))^2} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^2}{4x^n}$$

گام ۳ حالا برای این که حد $\frac{x^2}{4x^n}$ در $x \rightarrow 0^+$ برابر یک عدد حقیقی مخالف صفر باشد، باید $n = 4$ شود، پس:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^2}{4x^4} = \frac{1}{4} = a$$

بنابراین $a + n = \frac{1}{4} + 4 = \frac{17}{4}$ می‌شود.

مشاوره رفع ابهام صفر صفرم جزء پای ثابت‌های کنکورهای سراسری است که حل کردن سؤالات آن بدون استفاده از هم‌ارزی‌های مثلثاتی و هوپیتال، گاهی اوقات بسیار زمان‌بر است.

۱۱- گزینه ۱

استراتژی با از بین بردن براکت‌ها، جواب به راحتی محاسبه می‌شود.

درس نامه ۱ برای به دست آوردن حاصل حد بی‌نهایت از جدول زیر استفاده می‌کنیم: (a یک عدد حقیقی غیر صفر است.)

$a > 0$	$a < 0$
$\frac{a}{0^+} = +\infty$	$\frac{a}{0^+} = -\infty$
$\frac{a}{0^-} = -\infty$	$\frac{a}{0^-} = +\infty$

۲ اگر a و b هر دو منفی و $a > b$ باشد، با به توان ۲ رساندن طرفین، جهت نامساوی عوض می‌شود؛ یعنی:

۳ اگر a و b هم‌علامت و $a > b$ باشد، آن‌گاه $\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$.

گام ۱ ابتدا حاصل براکت‌ها را محاسبه می‌کنیم:

$$\frac{1}{x^2} < \frac{1}{x^2} \xrightarrow{\text{مورد (۲) درس نامه}} \frac{1}{x^2} > \frac{1}{x^2} \xrightarrow{\text{توان ۲}} x^2 < -\frac{1}{x^2} \Rightarrow x < -\frac{1}{x^2} \Rightarrow x < (-\frac{1}{x^2})^-$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -x^2 > \frac{3}{x^2} < 12 \Rightarrow [\frac{3}{x^2}] = [12] = 11 \\ -x^2 > \frac{2}{x^2} < 8 \xrightarrow{\text{قرینه}} -\frac{2}{x^2} > -8 \Rightarrow [-\frac{2}{x^2}] = [(-8)^+] = -8 \end{cases}$$

گام ۲ حالا با جای گذاری در عبارت اولیه داریم:

$$\lim_{x \rightarrow -\frac{1}{4}} \frac{10x - 5 + [\frac{3}{x^2}]}{16x - [-\frac{2}{x^2}]} = \lim_{x \rightarrow -\frac{1}{4}} \frac{10x + 6}{16x + 8}$$

گام ۳ حد $10x + 6$ وقتی $x \rightarrow (-\frac{1}{4})^-$ برابر $10 \times (-\frac{1}{4}) + 6 = +1$ و مقدار $16x + 8$ برابر $16 \times (-\frac{1}{4}) + 8 = (-8)^- + 8 = 0^-$ می‌شود.



گام ۱ حالا سراغ $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)}{x} = 0$ می‌رویم:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\cos^2 2x + 7x^2 + b}{x} = 0 \Rightarrow \frac{1+0+b}{0} = 0$$

$b = -1$ است، چون اگر $b \neq -1$ باشد، حاصل حد نامتناهی می‌شود، پس: $a+b = 7-1 = 6$

۱۵- گزینه ۳

درس‌نامه ۱ مشتق $\sin u$ برابر $u' \cos u$ می‌شود، برای مثال:

$$\sin 4x \xrightarrow{\text{مشتق}} 4 \cos 4x$$

۲ فاصله دو نقطه $A(x_1, y_1)$ و $B(x_2, y_2)$ برابر است با:

$$AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

۳ ریشه‌های ساده داخل قدرمطلق، طول نقاط گوشه‌ای هستند. در نقاط گوشه‌ای، نیم‌ماس راست و چپ داریم. شیب نیم‌ماس‌ها به ترتیب برابر با مشتق راست و مشتق چپ تابع در آن نقطه است.

معادله نیم‌ماس‌ها در نقطه گوشه $(a, f(a))$ به صورت زیر است:

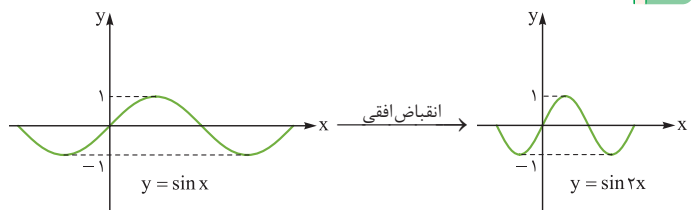
$$\text{نیم‌ماس راست: } y - f(a) = f'_+(a)(x - a)$$

$$\text{نیم‌ماس چپ: } y - f(a) = f'_-(a)(x - a)$$

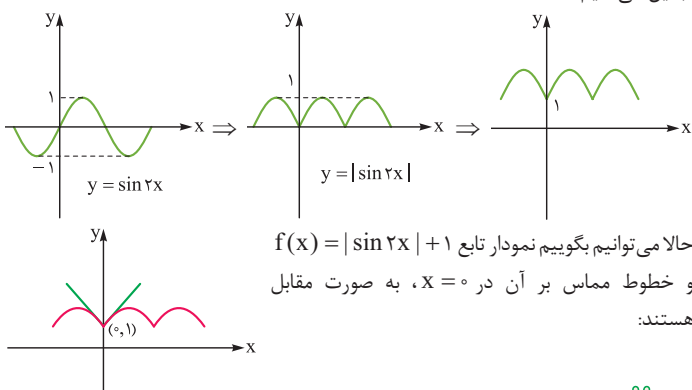
۴ برای رسم نمودار $y = |f(x)|$ ، اول نمودار $y = f(x)$ را می‌کشیم؛ بعد قسمت‌هایی از نمودار $f(x)$ که زیر محور x قرار دارند را نسبت به همین محور قرینه می‌کنیم. (به قسمت‌هایی که بالا یا روی محور x قرار دارند دست نمی‌زنیم.)

۵ (الف) اگر $k > 1$ باشد، در این صورت نمودار $y = f(kx)$ از انقباض افقی نمودار $y = f(x)$ به دست می‌آید. (ب) اگر $k > 0$ باشد، در این صورت برای رسم نمودار $y = f(x) + k$ ، باید نمودار $y = f(x)$ را k واحد در جهت محور y ‌ها به سمت بالا ببریم.

گام ۲ اول نمودار $y = \sin 2x$ را رسم می‌کنیم:



حالا به کمک مورد (۵) درس‌نامه، نمودار $y = \sin 2x$ را به نمودار $y = |\sin 2x| + 1$ تبدیل می‌کنیم:



حالا می‌توانیم بگوییم نمودار تابع $f(x) = |\sin 2x| + 1$ و خطوط مماس بر آن در $x = 0$ ، به صورت مقابل هستند:

گام ۱ معادله نیم‌ماس‌های چپ و راست را در $x = 0$ می‌نویسیم:

♦ نیم‌ماس راست: $f(x) = \sin(2x) + 1 \Rightarrow f'(x) = 2 \cos(2x) \Rightarrow f'_+(0) = 2$

پس شیب نیم‌ماس راست، $m = 2$ و معادله آن به صورت زیر است:

$$y - f(0) = 2(x - 0) \xrightarrow{f(0)=1} y - 1 = 2x \Rightarrow y = 2x + 1$$

♦ نیم‌ماس چپ:

$$f(x) = -\sin(2x) + 1 \Rightarrow f'(x) = -2 \cos(2x) \Rightarrow f'_-(0) = -2$$

پس شیب نیم‌ماس چپ، $m = -2$ و معادله آن به صورت زیر است:

$$y - f(0) = -2(x - 0) \Rightarrow y = -2x + 1$$

گام ۲ از هم‌ارزی پرتوان استفاده می‌کنیم:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt[5]{(a^2 x^2 - 1)(a^4 x^4 - 1) \dots (a^{100} x^{100} - 1)}}{a^{49} x^k} = -1$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt[5]{a^2 x^2 \times a^4 x^4 \times \dots \times a^{100} x^{100}}}{a^{49} x^k} = -1$$

گام ۱ عبارت زیر رادیکال را با کمک مورد (۱) درس‌نامه ساده‌تر می‌کنیم:

$$a^2 x^2 \times a^4 x^4 \times \dots \times a^{100} x^{100} = a^{2+4+\dots+100} \times x^{2+4+\dots+100}$$

$$\text{از طرفی: } 2+4+\dots+100 = 2(1+2+\dots+50) = 2 \times \frac{50 \times 51}{2} = 50 \times 51$$

بنابراین عبارت زیر رادیکال برابر $a^{50 \times 51} \times x^{50 \times 51}$ می‌شود.

گام ۲ حالا با جای‌گذاری داریم:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt[5]{a^{50 \times 51} \times x^{50 \times 51}}}{a^{49} x^k} = -1 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{|a^{51} \times x^{51}|}{a^{49} x^k} = -1$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{|a^{51}| \times (-x^{51})}{a^{49} \times x^k} = -1$$

گام ۱ برای این که حاصل حد برابر -1 باشد، باید:

اولاً توان x در صورت و مخرج برابر شود، یعنی $k = 51$.

ثانیاً بعد از ساده‌کردن x ‌ها، نسبت ضرایب برابر -1 شود:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{|a^{51}| \times (-x^{51})}{a^{49} \times x^{51}} = -1 \Rightarrow \frac{-|a^{51}|}{a^{49}} = -1 \Rightarrow |a^{51}| = a^{49}$$

$$\xrightarrow{\text{علامت } a \text{ باید مثبت باشد}} a^{51} = a^{49} \xrightarrow{+a^{49}} a^2 = 1 \Rightarrow a = \pm 1$$

$$\xrightarrow{a > 0} a = +1$$

۱۴- گزینه ۲

استراتژی ۱ اول با توجه به این که $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f'(x)}{x} = 2$ است، مقدار a را محاسبه کنید؛

بعد با استفاده از $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)}{x} = 0$ ، مقدار b به دست می‌آید.

درس‌نامه ۱ فرمول مشتق برخی از توابع در جدول زیر آمده است:

مثال	مشتق	تابع
0	$\xrightarrow{\text{مشتق}} 2$	عدد ثابت
$\cos 4x \xrightarrow{\text{مشتق}} -4 \sin 4x$	$-u' \sin u$	$\cos u$
$\cos^3(3x) \xrightarrow[\text{u}=\cos 3x]{\text{مشتق}} 3 \cos^2(3x) \times (-\sin 3x) \times 3$	$nu' u^{n-1}$	u^n

۲ وقتی $0 \rightarrow u$ ، می‌توانیم از هم‌ارزی $\sin u \sim u$ استفاده کنیم.

گام ۱ مشتق تابع f را به کمک مورد (۱) درس‌نامه به دست می‌آوریم:

$$f'(x) = 3 \times 2 \times (-\sin 2x) \cos^2 2x + 2ax = -6 \sin 2x \cdot \cos^2 2x + 2ax$$

گام ۲ ضابطه $f'(x)$ را در $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f'(x)}{x} = 2$ جای‌گذاری می‌کنیم:

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-6 \sin 2x \cdot \cos^2 2x + 2ax}{x} = 2$$

چون $x \rightarrow 0$ ، پس با توجه به مورد (۲) درس‌نامه، $\sin 2x = 2x$ می‌شود:

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-6 \times 2x \times \cos^2 2x + 2ax}{x} = 2 \Rightarrow -6 \times 2 + 2a = 2$$

$$\Rightarrow 2a = 14 \Rightarrow a = 7$$



گام ۱۳ دو نیم‌مماس را با خط $y = -x$ قطع می‌دهیم:

$$1) \begin{cases} y = 2x + 1 \\ y = -x \end{cases} \xrightarrow{\text{تقاطع}} A = (-\frac{1}{3}, \frac{1}{3})$$

$$2) \begin{cases} y = -2x + 1 \\ y = -x \end{cases} \xrightarrow{\text{تقاطع}} B = (1, -1)$$

بنابراین طول پاره‌خط AB برابر است با:

$$AB = \sqrt{(1 - (-\frac{1}{3}))^2 + (-1 - \frac{1}{3})^2} = \sqrt{(\frac{4}{3})^2 + (-\frac{4}{3})^2} = \sqrt{(\frac{4}{3})^2 \times 2} = \frac{4}{3}\sqrt{2}$$

۱۶- گزینه ۲

درس‌نامه ۱ اگر f تابعی صعودی اکید و $f > 0$ باشد، $\sqrt[n]{f}$ صعودی اکید و $\frac{1}{f}$ نزولی اکید می‌شود.

۲ اگر f تابعی نزولی اکید و $a < 0$ باشد، af صعودی اکید می‌شود.

۳ اگر f و g دو تابع صعودی اکید باشند، $f + g$ نیز صعودی اکید می‌شود.

گام ۱۴ ابتدا دامنه تابع را به دست می‌آوریم:

$$f(x) = 2\sqrt{x} - \frac{3}{2\sqrt{x^2-1}} \Rightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ x^2 - 1 \neq 0 \Rightarrow x^2 \neq 1 \Rightarrow x \neq \pm 1 \end{cases}$$

نامنفی مخالف صفر

$$\xrightarrow{\text{اشتراک}} D_f = [0, 1) \cup (1, +\infty)$$

گام ۱۵ تابع $y = 2\sqrt{x}$ در هر دو بازه بالا صعودی اکید است. حالا یکنوایی تابع

$$y = -\frac{3}{2\sqrt{x^2-1}} \text{ را در } D_f \text{، مرحله به مرحله بررسی می‌کنیم:}$$

$$y = \underbrace{x^2-1}_{\text{صعودی اکید}} \xrightarrow{\text{درس‌نامه (۱)}} y = \underbrace{\sqrt{x^2-1}}_{\text{صعودی اکید}} \Rightarrow y = \underbrace{2\sqrt{x^2-1}}_{\text{صعودی اکید}}$$

$$\xrightarrow{\text{درس‌نامه (۱)}} y = \frac{1}{\underbrace{2\sqrt{x^2-1}}_{\text{نزولی اکید}}} \xrightarrow{\text{درس‌نامه (۲)}} y = -\frac{3}{\underbrace{2\sqrt{x^2-1}}_{\text{صعودی اکید}}}$$

از طرفی طبق مورد (۳) درس‌نامه، مجموع دو تابع صعودی اکید، صعودی اکید می‌شود، پس تابع اصلی نیز صعودی اکید می‌شود.

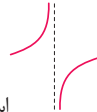
$$y = \underbrace{2\sqrt{x}}_{\text{صعودی اکید}} + \underbrace{\frac{-3}{2\sqrt{x^2-1}}}_{\text{صعودی اکید}}$$

تله هواستون باشه یهو ۱ رو هشتم بسته نزنید، چون باید مقدار تابع در سمت راست و چپ $X = 1$ رو مقایسه کنیم!

گام ۱۶ حد راست و چپ در $X = 1$ را به دست می‌آوریم:

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} 2\sqrt{x} - \frac{3}{2\sqrt{x^2-1}} = 2 - \frac{3}{0^+} = 2 - \infty = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} 2\sqrt{x} - \frac{3}{2\sqrt{x^2-1}} = 2 - \frac{3}{0^-} = 2 - (-\infty) = 2 + \infty = +\infty$$

بنابراین، نمودار f در اطراف $x = 1$ به شکل  است، پس f در بازه $(0, 1) \cup (1, +\infty)$ صعودی اکید نیست، بلکه در بازه‌های $(0, 1)$ و $(1, +\infty)$ صعودی اکید است.

۱۷- گزینه ۴

استراتژی باید نامعادله $f'(x) < 0$ را حل کنید.

درس‌نامه ۱ تابع f در بازه‌هایی نزولی اکید است که $f' < 0$ باشد.

۲ مشتق عبارت کسری $\frac{f}{g}$ برابر $\frac{f'g - fg'}{g^2}$ است.

گام ۱۷ f' را حساب می‌کنیم:

$$f(x) = \frac{x^6}{x^3-8} \Rightarrow f'(x) = \frac{6x^5(x^3-8) - 3x^6}{(x^3-8)^2} = \frac{6x^5 - 24x^2 - 3x^6}{(x^3-8)^2} = \frac{6x^5 - 3x^6 - 24x^2}{(x^3-8)^2}$$

گام ۱۸ ریشه‌های f' را پیدا می‌کنیم:

$$\frac{x^2(x^3-24)}{(x^3-8)^2} = 0 \Rightarrow \begin{cases} x^3 = 0 \Rightarrow x = 0 \text{ (ریشه فرد)} \\ x = \sqrt[3]{24} = 2\sqrt[3]{4} \text{ (ریشه فرد)} \\ x = 2 \text{ (ریشه مرتبه زوج مخرج)} \end{cases}$$

گام ۱۹ f' را تعیین علامت می‌کنیم:

		۰	۲	$2\sqrt[3]{4}$	
f'	+	۰	-	۰	-
f	↗		↘		↗
			نزولی		نزولی

گام ۲۰ طول دو بازه‌ای که تابع f در آن نزولی است را حساب می‌کنیم:

بازه اول: $(0, 2) \Rightarrow \text{طول بازه} = 2 - 0 = 2$

بازه دوم: $(2, 2\sqrt[3]{4}) \Rightarrow \text{طول بازه} = 2\sqrt[3]{4} - 2 = 2(\sqrt[3]{4} - 1)$
بین ۰ و ۱

پس طول بازه کوچک‌تر، $2(\sqrt[3]{4} - 1)$ است.

۱۸- گزینه ۳

شفاف‌سازی خطوط مماس بر منحنی f در نقاطی موازی پاره‌خط AB می‌شوند که شیب خط مماس در آن نقاط (یا همان مشتق آن‌ها) برابر شیب خط AB شود.

استراتژی اول مشتق تابع f را برابر صفر قرار دهید تا طول نقاط اکسترم نسبی حاصل شود؛ بعد مشتق تابع f را برابر شیب خط گذرنده از A و B بگذارید.

درس‌نامه ۱ برای به دست آوردن طول نقاط اکسترم تابع چندجمله‌ای f ، مشتق تابع f را برابر صفر قرار می‌دهیم. ریشه‌های مرتبه فرد این معادله، طول نقاط اکسترم نسبی هستند.

۲ شیب خط مماس بر تابع f در $x = \alpha$ برابر $f'(\alpha)$ است.

گام ۱ ابتدا نقاط اکسترم f را با کمک مورد (۱) درس‌نامه به دست می‌آوریم:

$$f'(x) = 0 \Rightarrow 6x^2 - 6x - 12 = 0 \xrightarrow{\div 6} x^2 - x - 2 = 0$$

$$\Rightarrow (x-2)(x+1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = -1 \text{ (ریشه فرد)} \\ x = +2 \text{ (ریشه فرد)} \end{cases}$$

گام ۲ با جای گذاری $x = -1$ و $x = +2$ در ضابطه f ، عرض نقاط اکسترم را محاسبه می‌کنیم:

$$f(-1) = 8 \xrightarrow{\text{نقطه}} A(-1, 8)$$

$$f(2) = -19 \xrightarrow{\text{نقطه}} B(2, -19)$$

گام ۳ شیب خط گذرنده از دو نقطه A و B برابر -9 است، حالا به دنبال

تعداد نقاطی روی f هستیم که مشتق آن‌ها برابر -9 شود:

$$f'(x) = -9 \Rightarrow 6x^2 - 6x - 12 = -9 \Rightarrow 6x^2 - 6x - 3 = 0 \xrightarrow{\div 3} 2x^2 - 2x - 1 = 0$$

چون معادله دو جواب داشت، پس ۲ نقطه با این ویژگی داریم.

۱۹- گزینه ۱

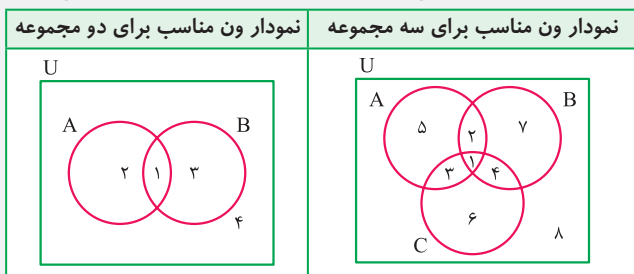
استراتژی اول جدول ارزش گزاره $(q \vee r)$ را رسم می‌کنیم؛ بعد به دنبال سطرهایی می‌گردیم که در آن‌ها ارزش گزاره $(q \vee r)$ درست باشند؛ تعداد این سطرها برابر با تعداد کل حالت‌ها (فضای نمونه) است. در آخر می‌بینیم در چند سطر از جدول گزاره $(q \vee r) \Rightarrow p$ درست ولی گزاره r نادرست است تا تعداد حالت‌های مطلوبمان هم پیدا شود.



۲۰- گزینه ۱

درسنامه ۱ بعضی وقتها یک عبارت مجموعه‌ای (نسبتاً) طولانی به ما می‌دهند و می‌گویند، این عبارت با کدام مجموعه برابر است (یا کدام گزینه درست است). برای حل کردن این سؤالات کارهای زیر را انجام می‌دهیم:

الف) می‌بینیم عبارت صورت سؤال چند مجموعه دارد (معمولاً ۲ تا ۳ تا). در ادامه مطابق جدول زیر، نمودار و مناسب را می‌کشیم و قسمت‌های مختلفش را شماره‌گذاری می‌کنیم:



ب) حالا عبارت صورت سؤال را برحسب شماره‌ها بازنویسی می‌کنیم، مثلاً در حالتی که سه مجموعه داشته باشیم، طبق جدول بالا به جای A، مجموعه {۱، ۲، ۳، ۵} و در حالتی که دو مجموعه داشته باشیم به جای A، {۱، ۲} را می‌نویسیم.

۲) حواستان باشد اگر در سؤال، شرطی برای مجموعه‌ها داشته باشیم، باید نمودار و ن را طوری رسم کنیم که شرط رعایت شود. برای مثال اگر در سؤالی دو مجموعه داشته باشیم و سؤال بخواهد $A \subseteq B$ باشد، در نمودار و ن باید کل A را داخل B بگذاریم؛ این جوری:

گام ۱ مجموعه مرجع $A \cup B$ است، پس نمودار و ن را به صورت مقابل در نظر می‌گیریم:

گام ۲ اول مجموعه C را برحسب شماره‌ها می‌نویسیم:

$$C = (A - B) \cup (B - A) = (\{1, 2\} - \{2, 3\}) \cup (\{2, 3\} - \{1, 2\}) = \{1, 3\}$$

گام ۳ حالا که C را برحسب شماره‌ها داریم، می‌توانیم کل عبارت صورت سؤال را هم برحسب شماره‌ها بنویسیم:

$$((A' - B)' \cap C)' = B \Rightarrow ((A' - B)' \cap \{1, 3\})' = \{2, 3\} \Rightarrow (\{2, 3\} \cap \{1, 3\})' = \{2, 3\}$$

نکته یادتان باشد که در دنیای مجموعه‌ها $\emptyset' = U$ است.

طبق نکته بالا به جای $\emptyset'$ می‌توانیم بنویسیم $U = \{1, 2, 3\}$:

$$(\{1, 2, 3\} \cap \{1, 3\})' = \{2, 3\} \Rightarrow (\{1, 3\})' = \{2, 3\} \Rightarrow \{2\} = \{2, 3\} \quad (*)$$

گام ۴ از تساوی $\{2\} = \{2, 3\}$ نتیجه می‌گیریم که ناحیه ۳ نباید وجود داشته باشد، پس نمودار و ن به صورت مقابل می‌شود:

همان‌طور که می‌بینید، کل مجموعه B درون مجموعه A قرار گرفته؛ این یعنی $B \subseteq A$ است.

مشاوره جبر مجموعه‌ها جزء سؤالات پرتکرار در کنکور سراسری است که با شماره‌گذاری ناحیه‌ها به راحتی حل می‌شوند؛ به همین خاطر پیشنهاد می‌کنیم حتماً روی این مبحث وقت کافی بگذارید.



۲۱- گزینه ۳

استراتژی ابتدا با توجه به این که میانه ۱۳/۵ است، محدوده‌ای برای a پیدا می‌کنیم، سپس با توجه به این که اختلاف چارک اول و سوم ۱۷ است، مقدار a را به دست می‌آوریم. در آخر بعد از کوچک کردن داده‌های داخل جدول، واریانس را حساب می‌کنیم.

درسنامه ۱ میانه: برای پیدا کردن میانه، اول داده‌ها را از کوچک به بزرگ می‌نویسیم. در ادامه اگر تعداد داده‌ها فرد باشد، میانه برابر با داده وسط و اگر تعداد داده‌ها زوج باشد، میانه برابر با میانگین دو داده وسط می‌شود.

درسنامه ۱ جدول ارزش n گزاره 2^n سطر (حالت) دارد. مثلاً جدول ارزش ۳ گزاره p، q و r، $2^3 = 8$ سطر (حالت) دارد؛ ببینید:

p	q	r
د	د	د
د	د	ن
د	ن	د
د	ن	ن
ن	د	د
ن	د	ن
ن	ن	د
ن	ن	ن

۲) جدول ارزش گزاره‌های $p \vee q$ (همون $p \vee q$) و $p \Rightarrow q$ (همون $p \Rightarrow q$) به صورت زیر هستند:

p	q	$p \vee q$
د	د	د
د	ن	د
ن	د	د
ن	ن	ن

p	q	$p \Rightarrow q$
د	د	د
د	ن	ن
ن	د	د
ن	ن	د

گام ۱ ابتدا به کمک موردهای (۱) و (۲) درسنامه جدول ارزش گزاره $p \Rightarrow (q \vee r)$ را رسم می‌کنیم:

p	q	r	$q \vee r$	$p \Rightarrow (q \vee r)$
د	د	د	د	د
د	د	ن	د	د
د	ن	د	د	د
د	ن	ن	ن	ن
ن	د	د	د	د
ن	د	ن	د	د
ن	ن	د	د	د
ن	ن	ن	ن	د

گام ۲ با توجه به جدول ارزش گزاره‌ها، در ۷ سطر ارزش $p \Rightarrow (q \vee r)$ درست است (این سطرها را رنگی کردیم)، پس تعداد کل حالت‌ها ۷ تا است.

گام ۳ برای پیدا کردن تعداد حالت‌های مطلوب باید ببینیم در چند سطر $p \Rightarrow (q \vee r)$ درست ولی r نادرست است. همان‌طور که در جدول بالا می‌بینید در ۳ سطر مشخص شده با (*) این اتفاق می‌افتد، بنابراین تعداد حالت‌های مطلوبمان ۳ تا است. در نتیجه احتمال مورد نظر برابر می‌شود با:

$$P = \frac{\text{تعداد حالت‌های مطلوب}}{\text{تعداد کل حالت‌ها}} = \frac{3}{7}$$

مشاوره در کنکورهای جدید، ردپای احتمال در بقیه فصل‌های گسسته از جمله نظریه اعداد، منطق گزاره‌ها و ... دیده می‌شود. به همین خاطر پیشنهاد می‌کنیم، فصل احتمال را حتماً بخوانید (حداقل مفاهیم اولیه‌اش را بلد باشید).



صورت سؤال گفته اول به همه داده‌ها ۴ واحد اضافه کنید؛ بعد واریانس را به دست آورید. اما طبق مورد (۵) درس‌نامه می‌دانیم این کار تأثیری روی مقدار واریانس ندارد، پس نه تنها ۴ واحد به همه داده‌ها اضافه نمی‌کنیم، بلکه برای راحتی محاسبات، مطابق جدول زیر از همه داده‌ها ۱۵ واحد کم می‌کنیم و واریانس داده‌های حاصل را به دست می‌آوریم:

داده	-۴	-۳	-۲	-۱	۱۳	۱۵	۱۶
فراوانی	۳	۲	۶	۳	۲	۱	۵

محاسبه $\bar{x}$:

$$\bar{x} = \frac{(-4 \times 3) + (-3 \times 2) + (-2 \times 6) + (-1 \times 3) + (13 \times 2) + (15 \times 1) + (16 \times 5)}{22} = \frac{88}{22} = 4$$

محاسبه واریانس (σ^2):

$$\sigma^2 = \frac{3(-4-4)^2 + 2(-3-4)^2 + 6(-2-4)^2 + 3(-1-4)^2 + 2(13-4)^2 + 1(15-4)^2 + 5(16-4)^2}{22} \\ = \frac{192 + 98 + 216 + 75 + 162 + 121 + 720}{22} = \frac{1584}{22} = 72$$

مشاوره در چند سال اخیر، اکثر سؤالات آمار توصیفی و استنباطی واقعاً سخت شده‌اند، چون هم محاسباتی، هم خلاقانه و ترکیبی هستند.



۲۲- گزینه ۲

نکته برای این‌که یک عدد طبیعی، مربع کامل باشد، باید توان عامل‌های اول در تجزیه‌اش عددی زوج باشند.

گام ۱ عدد مورد نظر را x در نظر می‌گیریم. طبق صورت سؤال، در مرحله اول x باید مضرب ۱۸ باشد، پس فرض می‌کنیم $x = 18k$. در مرحله دوم x باید مربع کامل هم باشد، پس k را باید طوری در نظر بگیریم که $18k$ مربع کامل شود. برای مربع کامل شدن عدد $18k = 2 \times 3^2 \times k$ ، طبق نکته بالا k باید طوری باشد که هم توان عامل ۲ را زوج کند، هم توان خودش زوج باشد، پس $k = 2 \times A^2$ است؛ این‌جوری x برابر می‌شود با: $x = 2^2 \times 3^2 \times 2 \times A^2 = 2^3 \times 3^2 \times A^2 = 36A^2$

گام ۲ سؤال به دنبال تعداد اعداد شمرقی x است، پس باید تعداد جواب‌های طبیعی نامعادله $10^4 \leq x < 10^5$ را به دست بیاوریم:

$$10^4 \leq x < 10^5 \xrightarrow{x=36A^2} 10^4 \leq 36A^2 < 10^5 \times 10 \\ \sqrt{\quad} \rightarrow 10^2 \leq 6A < 10^2 \times \sqrt{10} \xrightarrow{\sqrt{10} \approx 3.16} 100 \leq 6A < 316 \\ \Rightarrow 16/... \leq A < 52/... \xrightarrow{A \text{ عددی طبیعی است}} A = 17, 18, 19, \dots, 52$$

بنابراین $36 = 17 + 1 + 52$ مقدار طبیعی برای A و در نتیجه ۳۶ تا جواب برای مسئله وجود دارد.



۲۳- گزینه ۳

استراتژی اگر اعداد را به صورت صعودی مرتب کنیم، هر ۱۲ تا ۱۲ تا که جلو برویم، دو رقم دوم یکی زیاد می‌شود، پس ابتدا باید بفهمیم چند تا ۱۲ تا ۱۲ تا جلو برویم که به ۱۰۰ آمین عدد نزدیک شویم و سپس، یکی یکی جلو برویم تا به ۱۰۰ آمین عدد برسیم. بیا ۱۳ عدد اول این مجموعه را بنویسیم:

$$10701, 10702, 10703, \dots, 10712, 10801$$

عد ۱۲

همان‌طور که می‌بینید هر ۱۲ تا عددی که از ۱۰۷۰۱ جلوتر برویم، یکی به دو رقم دوم اضافه می‌شود و دو رقم سمت راست دوباره ۰۱ می‌شود. برای رسیدن به صدمین عدد باید ۹۹ تا از ۱۰۷۰۱ جلوتر برویم. اول $8 \times 12 = 96$ عدد جلو می‌رویم تا به عدد ۱۰۷۰۱ برسیم، بعد $10701 + 8 = 10709$ نای دیگر هم جلو می‌رویم تا به عدد ۱۱۵۰۴ برسیم. پس صدمین عضو مجموعه شد: ۱۱۵۰۴. همان‌طور که می‌بینید دو رقم دوم این عدد ۱۵ است، پس سن صدمین عضو این مجموعه هم ۱۵ می‌شود.

۲ چارک‌های اول، دوم و سوم به صورت زیر تعریف می‌شوند:

♦ چارک دوم (Q_2): چارک دوم همان میانه است.

♦ چارک اول (Q_1): چارک اول، میانه داده‌های قبل از چارک دوم است.

♦ چارک سوم (Q_3): چارک سوم، میانه داده‌های بعد از چارک دوم است.

۳ اگر مطابق جدول زیر، فراوانی داده‌های $x_1, x_2, \dots, x_n$ به ترتیب برابر با $f_1, f_2, \dots, f_n$ باشند:

داده	x_1	x_2	x_3	...	x_n
فراوانی	f_1	f_2	f_3	...	f_n

میانگین این داده‌ها که با $\bar{x}$ نشان می‌دهیم از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$\bar{x} = \frac{f_1 x_1 + f_2 x_2 + \dots + f_n x_n}{f_1 + f_2 + \dots + f_n}$$

۴ اگر مطابق جدول زیر، داده‌های x_1 تا x_n به ترتیب دارای فراوانی f_1 تا f_n باشند:

داده	x_1	x_2	...	x_n
فراوانی	f_1	f_2	...	f_n

واریانس، از دو فرمول زیر محاسبه می‌شود:

$$\sigma^2 = \frac{f_1(x_1 - \bar{x})^2 + f_2(x_2 - \bar{x})^2 + \dots + f_n(x_n - \bar{x})^2}{f_1 + \dots + f_n}$$

$$\sigma^2 = \frac{f_1 x_1^2 + f_2 x_2^2 + \dots + f_n x_n^2}{f_1 + \dots + f_n} - \bar{x}^2$$

۵ اگر همه داده‌ها با عددی ثابت جمع شوند یا عددی ثابت از همه کم شود، واریانس تغییر نمی‌کند. بنابراین هر وقت در محاسبه واریانس، با داده‌های بزرگی روبه‌رو شدیم که محاسباتمان را سخت می‌کرد، می‌توانیم اول از همه آن‌ها یک عدد ثابت را کم کنیم (یا اگر داده‌ها عددی منفی بزرگی بودند، یک عدد ثابت را بهشان اضافه کنیم)، بعد واریانس را حساب کنیم.

گام ۱ اول داده‌ها را از کوچک به بزرگ می‌نویسیم:

$$\underbrace{11, 11, 11}_{f_1=3}, \underbrace{12, 12}_{f_2=2}, \underbrace{13, 13, 13, 13, 13}_{f_3=5}, \underbrace{14, 14}_{f_4=2}, \underbrace{28, 28}_{f_5=2}, \underbrace{31, 31, 31, 31, 31}_{f_6=5}$$

داده ۱

همان‌طور که می‌بینید تعداد داده‌ها زوج است، پس طبق مورد (۱) درس‌نامه، میانه برابر با میانگین دو داده وسط، یعنی داده‌های ۱۱ام و ۱۲ام می‌شود. از طرفی سؤال می‌گوید میانه ۱۳/۵ است، پس می‌توانیم بنویسیم:

$$13/5 = \frac{\text{داده ۱۱ام} + \text{داده ۱۲ام}}{2} \Rightarrow 27 = \text{داده ۱۱ام} + \text{داده ۱۲ام}$$

حالا باید محدوده a را طوری در نظر بگیریم که رابطه (*) برقرار بشود. اگر $a < 14$ باشد، دقیقاً ۱۲ داده قبل از داده ۱۴ قرار می‌گیرند. پس یکی از داده‌های ۱۱ام یا ۱۲ام حتماً عدد ۱۳ می‌شود. این یعنی برای برقراری رابطه (*) داده دیگر باید ۱۴ باشد که امکان ندارد، چون عدد ۱۴ تازه از داده ۱۱ام شروع می‌شود و قبلیش وجود ندارد. بنابراین $a \geq 14$ است.

گام ۲ طبق مورد (۲) درس‌نامه می‌دانیم چارک اول (Q_1) برابر با میانه داده‌های قبل از میانه، یعنی داده‌های قبل از ۱۳/۵ می‌شود. بنابراین باید میانه ۱۱ داده زیر را به دست بیاوریم که چون تعداد داده‌ها عددی فرد است، میانه برابر می‌شود با داده وسط، یعنی داده ششم.

$$11, 11, 11, 12, 12, 13, 13, 13, 13, 13, 13$$

داده ششم

همان‌طور که می‌بینید داده وسط برابر ۱۳ است، پس $Q_1 = 13$.

گام ۳ به گفته سؤال اختلاف چارک اول از سوم ۱۷ است، بنابراین می‌توانیم بنویسیم:

$$Q_3 - Q_1 = 17 \xrightarrow{Q_1=13} Q_3 = 30$$

طبق مورد (۲) درس‌نامه

$= 30 = \text{میانه داده‌های بعد از میانه}$

۱۳/۵

از تساوی بالا نتیجه می‌گیریم که میانه ۱۱ داده زیر ۳۰ است؛ بنابراین داده وسط یعنی داده ششم باید ۳۰ باشد:

در نتیجه a چاره‌ای ندارد جز این‌که مساوی ۳۰ باشد، پس $a = 30$.

گام ۴ با توجه به این‌که $a = 30$ شد، جدول داده‌ها به صورت زیر می‌شود:

داده	۱۱	۱۲	۱۳	۱۴	۲۸	۳۰	۳۱
فراوانی	۳	۲	۶	۳	۲	۱	۵



گام ۳ خارج قسمت ۳ واحد بیشتر از باقی مانده است، پس به جای q قرار می دهیم $r + 3$ و $a - 9$ را نیز به دست می آوریم:

$$a = 11q + r \xrightarrow{q=r+3} a = 11r + 33 + r \Rightarrow a = 12r + 33 \Rightarrow a - 9 = 12r + 24$$

گام ۴ می خواهیم $a - 9$ مضرب ۲۴ باشد:

$$24 \mid a - 9 \Rightarrow 24 \mid 12r + 24 \left\{ \begin{array}{l} \text{تفاضل} \\ 24 \mid 12r \end{array} \right. \xrightarrow{\div 12} 2 \mid r \Rightarrow r = 2t \Rightarrow r \text{ زوج است.}$$

در بین ۱۱ مقدار صحیح برای t ، ۶ مقدار زوج داریم، پس جواب $\frac{6}{11}$ می شود.



گزینه ۳ - ۲۶

استراتژی اول باید ببینیم کوچک ترین عدد فاکتوریلی مضرب ۳۶ کدام است تا مقدار m پیدا شود؛ بعد به دنبال توان کوچکی از m بگردیم که باقی مانده آن بر ۱۵ برابر ± 1 شود. این جوری می توانیم باقی مانده تقسیم m^{123} را بر ۱۵ به دست بیاوریم.

درس نامه ۱ در حالت کلی اگر $a \equiv b$ باشد، نتیجه می گیریم $a - b$ ، $m \mid a - b$ ، حالا اگر $a \equiv 0$ باشد، $m \mid a$ و در نتیجه a مضرب m می شود.

۲ طرفین یک هم نهشتی را می توانیم در یک عدد صحیح ضرب کنیم:

$$a \equiv b \Rightarrow ac \equiv bc$$

طرفین یک هم نهشتی را می توانیم به توان یک عدد طبیعی برسانیم:

$$a \equiv b \Rightarrow a^n \equiv b^n$$

۳ برای به دست آوردن باقی مانده تقسیم عدد a^n بر m ، ابتدا باید به دنبال توان کوچکی از a باشیم که به پیمانه m با ۱ یا -1 هم نهشت باشد. در ادامه با ضرب و توان رسانی مناسب، باقی مانده تقسیم a^n بر m را پیدا می کنیم. مثلاً برای محاسبه باقی مانده تقسیم 3^{100} بر ۲۶، ابتدا به دنبال توان کوچکی از ۳ می گردیم که باقی مانده آن بر ۲۶ برابر ± 1 شود:

$$3^2 \equiv 1 \pmod{26} \quad \text{حالا با ضرب و توان رسانی مناسب طرفین هم نهشتی} \quad 3^{26} \equiv 1 \pmod{26} \quad \text{باقی مانده تقسیم} \quad 3^{100} \pmod{26} \quad \text{را پیدا می کنیم:}$$

$$3^{26} \equiv 1 \xrightarrow{\times 3} 3^{27} \equiv 3 \xrightarrow{\times 3} 3^{28} \equiv 9 \xrightarrow{\times 3} 3^{29} \equiv 1 \xrightarrow{\times 3} 3^{30} \equiv 3 \xrightarrow{\times 3} 3^{31} \equiv 9 \xrightarrow{\times 3} 3^{32} \equiv 1 \xrightarrow{\times 3} 3^{33} \equiv 3 \xrightarrow{\times 3} 3^{34} \equiv 9 \xrightarrow{\times 3} 3^{35} \equiv 1 \xrightarrow{\times 3} 3^{36} \equiv 3 \xrightarrow{\times 3} 3^{37} \equiv 9 \xrightarrow{\times 3} 3^{38} \equiv 1 \xrightarrow{\times 3} 3^{39} \equiv 3 \xrightarrow{\times 3} 3^{40} \equiv 9 \xrightarrow{\times 3} 3^{41} \equiv 1 \xrightarrow{\times 3} 3^{42} \equiv 3 \xrightarrow{\times 3} 3^{43} \equiv 9 \xrightarrow{\times 3} 3^{44} \equiv 1 \xrightarrow{\times 3} 3^{45} \equiv 3 \xrightarrow{\times 3} 3^{46} \equiv 9 \xrightarrow{\times 3} 3^{47} \equiv 1 \xrightarrow{\times 3} 3^{48} \equiv 3 \xrightarrow{\times 3} 3^{49} \equiv 9 \xrightarrow{\times 3} 3^{50} \equiv 1 \xrightarrow{\times 3} 3^{51} \equiv 3 \xrightarrow{\times 3} 3^{52} \equiv 9 \xrightarrow{\times 3} 3^{53} \equiv 1 \xrightarrow{\times 3} 3^{54} \equiv 3 \xrightarrow{\times 3} 3^{55} \equiv 9 \xrightarrow{\times 3} 3^{56} \equiv 1 \xrightarrow{\times 3} 3^{57} \equiv 3 \xrightarrow{\times 3} 3^{58} \equiv 9 \xrightarrow{\times 3} 3^{59} \equiv 1 \xrightarrow{\times 3} 3^{60} \equiv 3 \xrightarrow{\times 3} 3^{61} \equiv 9 \xrightarrow{\times 3} 3^{62} \equiv 1 \xrightarrow{\times 3} 3^{63} \equiv 3 \xrightarrow{\times 3} 3^{64} \equiv 9 \xrightarrow{\times 3} 3^{65} \equiv 1 \xrightarrow{\times 3} 3^{66} \equiv 3 \xrightarrow{\times 3} 3^{67} \equiv 9 \xrightarrow{\times 3} 3^{68} \equiv 1 \xrightarrow{\times 3} 3^{69} \equiv 3 \xrightarrow{\times 3} 3^{70} \equiv 9 \xrightarrow{\times 3} 3^{71} \equiv 1 \xrightarrow{\times 3} 3^{72} \equiv 3 \xrightarrow{\times 3} 3^{73} \equiv 9 \xrightarrow{\times 3} 3^{74} \equiv 1 \xrightarrow{\times 3} 3^{75} \equiv 3 \xrightarrow{\times 3} 3^{76} \equiv 9 \xrightarrow{\times 3} 3^{77} \equiv 1 \xrightarrow{\times 3} 3^{78} \equiv 3 \xrightarrow{\times 3} 3^{79} \equiv 9 \xrightarrow{\times 3} 3^{80} \equiv 1 \xrightarrow{\times 3} 3^{81} \equiv 3 \xrightarrow{\times 3} 3^{82} \equiv 9 \xrightarrow{\times 3} 3^{83} \equiv 1 \xrightarrow{\times 3} 3^{84} \equiv 3 \xrightarrow{\times 3} 3^{85} \equiv 9 \xrightarrow{\times 3} 3^{86} \equiv 1 \xrightarrow{\times 3} 3^{87} \equiv 3 \xrightarrow{\times 3} 3^{88} \equiv 9 \xrightarrow{\times 3} 3^{89} \equiv 1 \xrightarrow{\times 3} 3^{90} \equiv 3 \xrightarrow{\times 3} 3^{91} \equiv 9 \xrightarrow{\times 3} 3^{92} \equiv 1 \xrightarrow{\times 3} 3^{93} \equiv 3 \xrightarrow{\times 3} 3^{94} \equiv 9 \xrightarrow{\times 3} 3^{95} \equiv 1 \xrightarrow{\times 3} 3^{96} \equiv 3 \xrightarrow{\times 3} 3^{97} \equiv 9 \xrightarrow{\times 3} 3^{98} \equiv 1 \xrightarrow{\times 3} 3^{99} \equiv 3 \xrightarrow{\times 3} 3^{100} \equiv 9$$

گام ۴ ابتدا $36 \equiv (10 - m)!$ را ساده تر می نویسیم:

$$(10 - m)! \equiv 36 \Rightarrow (10 - m)! \equiv 0 \Rightarrow 36 \mid (10 - m)!$$

بنابراین می خواهیم $(10 - m)!$ مضرب ۳۶ باشد.

گام ۴ بیشترین مقدار m مد نظر است، پس به دنبال کوچک ترین عدد فاکتوریلی ای هستیم که مضرب ۳۶ باشد، یعنی باید حداقل دوتا عامل ۲ و دوتا عامل ۳ داشته باشد که این عدد ۶! است، پس:

گام ۴ حالا باقی مانده $4^{123} = 4^{122} \cdot 4$ بر ۱۵ را می خواهیم، پس طبق مورد (۳) درس نامه ابتدا به دنبال توانی از ۴ می گردیم که باقی مانده تقسیم آن بر ۱۵ برابر ± 1 شود:

$$4^2 \equiv 1 \pmod{15} \quad \text{حالا با ضرب و توان رسانی مناسب، در هم نهشتی بالا را به} \quad 4^{123} \pmod{15} \quad \text{تبدیل می کنیم تا باقی مانده تقسیم} \quad 4^{123} \pmod{15} \quad \text{پیدا شود:}$$

$$4^{123} \equiv 4 \pmod{15} \xrightarrow{\times 4} 4^{124} \equiv 1 \xrightarrow{\times 4} 4^{125} \equiv 4 \xrightarrow{\times 4} 4^{126} \equiv 1 \xrightarrow{\times 4} 4^{127} \equiv 4 \xrightarrow{\times 4} 4^{128} \equiv 1 \xrightarrow{\times 4} 4^{129} \equiv 4 \xrightarrow{\times 4} 4^{130} \equiv 1 \xrightarrow{\times 4} 4^{131} \equiv 4 \xrightarrow{\times 4} 4^{132} \equiv 1 \xrightarrow{\times 4} 4^{133} \equiv 4 \xrightarrow{\times 4} 4^{134} \equiv 1 \xrightarrow{\times 4} 4^{135} \equiv 4 \xrightarrow{\times 4} 4^{136} \equiv 1 \xrightarrow{\times 4} 4^{137} \equiv 4 \xrightarrow{\times 4} 4^{138} \equiv 1 \xrightarrow{\times 4} 4^{139} \equiv 4 \xrightarrow{\times 4} 4^{140} \equiv 1 \xrightarrow{\times 4} 4^{141} \equiv 4 \xrightarrow{\times 4} 4^{142} \equiv 1 \xrightarrow{\times 4} 4^{143} \equiv 4 \xrightarrow{\times 4} 4^{144} \equiv 1 \xrightarrow{\times 4} 4^{145} \equiv 4 \xrightarrow{\times 4} 4^{146} \equiv 1 \xrightarrow{\times 4} 4^{147} \equiv 4 \xrightarrow{\times 4} 4^{148} \equiv 1 \xrightarrow{\times 4} 4^{149} \equiv 4 \xrightarrow{\times 4} 4^{150} \equiv 1 \xrightarrow{\times 4} 4^{151} \equiv 4 \xrightarrow{\times 4} 4^{152} \equiv 1 \xrightarrow{\times 4} 4^{153} \equiv 4 \xrightarrow{\times 4} 4^{154} \equiv 1 \xrightarrow{\times 4} 4^{155} \equiv 4 \xrightarrow{\times 4} 4^{156} \equiv 1 \xrightarrow{\times 4} 4^{157} \equiv 4 \xrightarrow{\times 4} 4^{158} \equiv 1 \xrightarrow{\times 4} 4^{159} \equiv 4 \xrightarrow{\times 4} 4^{160} \equiv 1 \xrightarrow{\times 4} 4^{161} \equiv 4 \xrightarrow{\times 4} 4^{162} \equiv 1 \xrightarrow{\times 4} 4^{163} \equiv 4 \xrightarrow{\times 4} 4^{164} \equiv 1 \xrightarrow{\times 4} 4^{165} \equiv 4 \xrightarrow{\times 4} 4^{166} \equiv 1 \xrightarrow{\times 4} 4^{167} \equiv 4 \xrightarrow{\times 4} 4^{168} \equiv 1 \xrightarrow{\times 4} 4^{169} \equiv 4 \xrightarrow{\times 4} 4^{170} \equiv 1 \xrightarrow{\times 4} 4^{171} \equiv 4 \xrightarrow{\times 4} 4^{172} \equiv 1 \xrightarrow{\times 4} 4^{173} \equiv 4 \xrightarrow{\times 4} 4^{174} \equiv 1 \xrightarrow{\times 4} 4^{175} \equiv 4 \xrightarrow{\times 4} 4^{176} \equiv 1 \xrightarrow{\times 4} 4^{177} \equiv 4 \xrightarrow{\times 4} 4^{178} \equiv 1 \xrightarrow{\times 4} 4^{179} \equiv 4 \xrightarrow{\times 4} 4^{180} \equiv 1 \xrightarrow{\times 4} 4^{181} \equiv 4 \xrightarrow{\times 4} 4^{182} \equiv 1 \xrightarrow{\times 4} 4^{183} \equiv 4 \xrightarrow{\times 4} 4^{184} \equiv 1 \xrightarrow{\times 4} 4^{185} \equiv 4 \xrightarrow{\times 4} 4^{186} \equiv 1 \xrightarrow{\times 4} 4^{187} \equiv 4 \xrightarrow{\times 4} 4^{188} \equiv 1 \xrightarrow{\times 4} 4^{189} \equiv 4 \xrightarrow{\times 4} 4^{190} \equiv 1 \xrightarrow{\times 4} 4^{191} \equiv 4 \xrightarrow{\times 4} 4^{192} \equiv 1 \xrightarrow{\times 4} 4^{193} \equiv 4 \xrightarrow{\times 4} 4^{194} \equiv 1 \xrightarrow{\times 4} 4^{195} \equiv 4 \xrightarrow{\times 4} 4^{196} \equiv 1 \xrightarrow{\times 4} 4^{197} \equiv 4 \xrightarrow{\times 4} 4^{198} \equiv 1 \xrightarrow{\times 4} 4^{199} \equiv 4 \xrightarrow{\times 4} 4^{200} \equiv 1$$



گزینه ۴ - ۲۷

استراتژی اول با توجه به این که $\frac{10}{X_f}$ باید عددی طبیعی باشد، مقادیر قابل قبول X_f را پیدا می کنیم. در ادامه این X_f های قابل قبول را در معادله جای گذاری و تعداد جواب های هر معادله را به دست می آوریم و با هم جمع می کنیم.

درس نامه تعداد جواب های صحیح و نامنفی معادله $x_1 + x_2 + \dots + x_k = n$ ، برابر است با:

$$\binom{n+k-1}{k-1}$$

گام ۴ باید طبیعی باشد، پس X_f می تواند ۱، ۲، ۵ یا ۱۰ باشد.



گزینه ۳ - ۲۴

درس نامه ۱ منظور از $\overline{abc}$ یک عدد سه رقمی است که رقم یکانش c ، دهگان b و صدگان a است. این عدد را به صورت زیر بسط می دهیم:

$$\overline{abc} = 10^2 a + 10 b + c \quad (1 \leq a \leq 9, 0 \leq b, c \leq 9)$$

۲ اگر طرفین یک هم نهشتی به پیمانه m ، بر عدد صحیحی مثل $a \neq 0$ بخش پذیر باشند، می توانیم a را از طرفین هم نهشتی ساده کنیم؛ اما باید حواسمان باشد که پیمانه را هم بر (a, m) تقسیم کنیم؛ یعنی:

$$ax \equiv ay \xrightarrow{\div a} x \equiv y \quad (a, m) = d$$

۳ در هم نهشتی می توانیم مضارب صحیح پیمانه را به طرفین هم نهشتی اضافه یا کم کنیم. با این کار اعداد داخل هم نهشتی را می توانیم کوچک یا بزرگ کنیم:

$$a \equiv b \Leftrightarrow a \pm mq \equiv a \pm mk$$

۴ هر هم نهشتی مثل $a \equiv b$ را می توانیم به یک تساوی تبدیل کنیم؛ ببینید:

$$a \equiv b \Leftrightarrow a = mk + b$$

گام ۴ عدد $\overline{aba}$ را بسط و به پیمانه ۱۲ هم نهشت با صفر قرار می دهیم:

$$\overline{aba} \equiv 0 \pmod{12} \Rightarrow 10^2 a + 10 b + a \equiv 0 \pmod{12} \Rightarrow 10^3 a + 10^2 b \equiv 0 \pmod{12}$$

$$\Rightarrow 5a + 10b \equiv 0 \pmod{12} \Rightarrow 5a \equiv -10b \pmod{12} \xrightarrow{\div 5} a \equiv -2b \pmod{12} \quad (*)$$

گام ۴ چون $\overline{aba}$ مضرب ۱۲ است، پس می توانیم بگوییم a عددی زوج است. اگر بخواهیم $\overline{aba}$ بزرگ ترین بشود، باید $a = 8$ باشد؛ در این صورت با توجه به رابطه $(*)$ داریم:

$$a \equiv -2b \pmod{12} \xrightarrow{a=8} -2b \equiv 8 \pmod{12} \xrightarrow{\div 2} -b \equiv 4 \pmod{6} \Rightarrow -b \equiv 4 \pmod{6}$$

$$\xrightarrow{\times (-1)} b \equiv -4 \pmod{6} \Rightarrow b \equiv 2 \pmod{6} \Rightarrow b = 6k + 2$$

$$\xrightarrow{0 \leq b \leq 9} b = 2 \Rightarrow \max(\overline{aba}) = 882$$

و اگر بخواهیم $\overline{aba}$ کم ترین بشود، باید $a = 2$ باشد؛ در این صورت باز هم به کمک رابطه $(*)$ می توانیم بنویسیم:

$$a \equiv -2b \pmod{12} \xrightarrow{a=2} -2b \equiv 2 \pmod{12} \xrightarrow{\div 2} -b \equiv 1 \pmod{6} \Rightarrow -b \equiv 1 \pmod{6}$$

$$\xrightarrow{\times (-1)} b \equiv -1 \pmod{6} \Rightarrow b \equiv 5 \pmod{6} \Rightarrow b = 6k + 5$$

$$\xrightarrow{0 \leq b \leq 9} b = 5 \Rightarrow \min(\overline{aba}) = 252$$

بنابراین میانگین بیشترین و کم ترین مقدار $\overline{aba}$ برابر $570 = \frac{882 + 252}{2}$ است.



گزینه ۲ - ۲۵

استراتژی ابتدا الگوریتم تقسیم را می نویسیم، سپس با توجه به این که خارج قسمت ۳ واحد بیشتر از باقی مانده است، به جای خارج قسمت « $r + 3$ » را قرار می دهیم. (r) باقی مانده (است). در آخر با توجه به شرط باقی مانده و مقادیر قابل قبول برای r ، تعداد کل حالات و تعداد حالاتی که $a - 9$ مضرب ۲۴ می شود را محاسبه می کنیم.

درس نامه ۱ اگر در تقسیم عدد صحیح a به عدد طبیعی b ، خارج قسمت را q و باقی مانده را r نمایش دهیم، الگوریتم تقسیم به شکل $a = bq + r$ می شود. در این تقسیم باید $0 \leq r < b$ باشد که به آن شرط تقسیم می گوئیم. **۲** اگر $ax \mid bx$ و $x \neq 0$ باشد، می توانیم نتیجه بگیریم $a \mid b$. **۳** اگر $a \mid b$ ، آن گاه $b = aq$ می شود. **۴** اگر $a \mid b$ و $a \mid c$ ، آن گاه $a \mid b \pm c$.

گام ۴ عدد a را به ۱۱ تقسیم می کنیم و خارج قسمت را q و باقی مانده را r نمایش می دهیم:

$$a = 11q + r, \quad 0 \leq r < 11$$

r عددی صحیح است و می تواند برابر ۱۱ مقدار ۰، ۱، ۲، ... و ۱۰ باشد، پس تعداد کل حالات ۱۱ تا است.



۳۰- گزینه ۱

درس نامه ۱ کسینوس زاویه‌ای که بردار $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ با محورهای x ، y و z می‌سازد، از این رابطه‌ها محاسبه می‌شود:

$$\cos \alpha = \frac{a_1}{|\vec{a}|} \quad \text{زاویه با محور } x \text{ ها}$$

$$\cos \beta = \frac{a_2}{|\vec{a}|} \quad \text{زاویه با محور } y \text{ ها}$$

$$\cos \gamma = \frac{a_3}{|\vec{a}|} \quad \text{زاویه با محور } z \text{ ها}$$

۲ ضرب خارجی دو بردار $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ و $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$ به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{pmatrix}$$

هواست به این منطبق باشد

۳ اندازه بردار $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ برابر است با:

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$$

گام ۱ (محاسبه α): به گفته سؤال بردار $\vec{a} = (-1, \alpha, 1)$ با محور z زاویه 45° می‌سازد، پس طبق قسمت (۱) درس‌نامه می‌توانیم بنویسیم:

$$\cos 45^\circ = \frac{1}{|\vec{a}|} \Rightarrow \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{\sqrt{(-1)^2 + \alpha^2 + 1^2}}$$

$$\Rightarrow \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{\sqrt{\alpha^2 + 2}} \xrightarrow{\text{توان ۲}} \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{\alpha^2 + 2} \Rightarrow \alpha^2 + 2 = 2 \Rightarrow \alpha^2 = 0 \Rightarrow \alpha = 0$$

پس بردار $\vec{a}$ به این صورت می‌شود:

گام ۲ (پیدا کردن بردار $\vec{a} \times \vec{b}$): حالا به کمک قسمت (۲) درس‌نامه بردار $\vec{a} \times \vec{b}$ را به دست می‌آوریم:

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} 0 \cdot 1 - 1 \cdot 2 \\ 1 \cdot 2 - 0 \cdot 2 \\ 0 \cdot 2 - 1 \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{a} \times \vec{b} = \left(-\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{1}{3}\right) = -\frac{1}{3}(2, -2, 1)$$

گام ۳ (محاسبه خواسته سؤال): حالا که بردار $\vec{a} \times \vec{b}$ را داریم، می‌توانیم به کمک قسمت (۱) درس‌نامه، کسینوس زاویه این بردار را با محور z حساب کنیم:

$$\cos \gamma = \frac{-\frac{1}{3}}{\sqrt{\left(-\frac{2}{3}\right)^2 + \left(\frac{2}{3}\right)^2 + \left(-\frac{1}{3}\right)^2}} = \frac{-\frac{1}{3}}{\frac{\sqrt{3}}{3}} = -\frac{1}{\sqrt{3}}$$

۳۱- گزینه ۱

درس نامه ۱ انتقال، شیب خط را تغییر نمی‌دهد.

۲ در مثلث قائم‌الزاویه، طول میانه وارد بر وتر، نصف وتر است.

۳ در دو مثلث متشابه، نسبت مساحت‌ها برابر است با مجذور نسبت تشابه.

گام ۱ (رسم شکل مناسب و تحلیل سؤال): شکل مسئله به صورت زیر است، در این شکل مثلث $TB'C'$ انتقال یافته مثلث ABC در انتقال با بردار $\vec{AT}$ است. طبق مورد (۱) درس‌نامه، انتقال، شیب خطوط را تغییر نمی‌دهد، این یعنی اضلاع مثلث ABC و TKL موازی هستند، بنابراین مثلث TKL و ABC متشابه‌اند.

گام ۲ (محاسبه طول بردار انتقال): در مثلث قائم‌الزاویه ABC ، میانه وارد بر وتر $AM = \frac{1}{2}AC = 4$ است. فرض می‌کنیم $TM = x$ باشد، در این صورت طول بردار انتقال $\vec{AT}$ می‌شود، $4 - x$.

به گفته سؤال مساحت مثلث TKL ، $\frac{1}{16}$ مساحت مثلث ABC است، پس طبق مورد (۳) درس‌نامه می‌توانیم بنویسیم:

$$\frac{S_{\triangle TKL}}{S_{\triangle ABC}} = \left(\frac{x}{AM}\right)^2 \Rightarrow \frac{1}{16} = \left(\frac{x}{4}\right)^2 \xrightarrow{\sqrt{\quad}} \frac{1}{4} = \frac{x}{4} \Rightarrow x = 1$$

بنابراین طول بردار انتقال $\vec{AT}$ برابر می‌شود با:

$$AT = 4 - x = 4 - 1 = 3$$

گام ۳ حالا معادله را بر اساس مقادیر x حالت‌بندی می‌کنیم:

$$\begin{cases} x_4 = 1 \Rightarrow x_1 + x_2 + x_3 = 10 \Rightarrow \begin{pmatrix} 10+3-1 \\ 3-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ 2 \end{pmatrix} = 66 \\ x_4 = 2 \Rightarrow x_1 + x_2 + x_3 = 5 \Rightarrow \begin{pmatrix} 5+3-1 \\ 3-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 2 \end{pmatrix} = 21 \\ x_4 = 5 \Rightarrow x_1 + x_2 + x_3 = 2 \Rightarrow \begin{pmatrix} 2+3-1 \\ 3-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} = 6 \\ x_4 = 10 \Rightarrow x_1 + x_2 + x_3 = 1 \Rightarrow \begin{pmatrix} 1+3-1 \\ 3-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} = 3 \end{cases}$$

بنابراین تعداد جواب‌های معادله اصلی برابر است با: $66 + 21 + 6 + 3 = 96$

۲۸- گزینه ۲

درس نامه گرافی همبند است که بین هر دو رأس دلخواه آن یک مسیر وجود داشته باشد. یک گراف از مرتبه p و اندازه q برای همبند شدن حداقل « $p-1$ » یال لازم دارد.

گام ۱ طبق درس‌نامه برای این که گرافی از مرتبه ۷ همبند باشد، حداقل ۶ یال لازم دارد. بنابراین حداقل اندازه گراف برابر ۶ است.

گام ۲ حالا باید بررسی کنیم که آیا می‌توانیم گرافی از مرتبه ۷ رسم کنیم که هم همبند باشد و هم بزرگ‌ترین درجه رئوسش ۳ باشد ($\Delta = 3$) یا نه که جواب مثبت است:

بنابراین جواب ۶ می‌شود.

۲۹- گزینه ۴

بسته استراتژی ابتدا سطر سوم و ستون سوم را کامل کنید، سپس به اعداد ۳ درون جدول توجه کنید و در آخر به خانه سطر دوم و ستون پنجم دقت کنید تا مربع کامل شود.

درس نامه به جدولی $n \times n$ که درون خانه‌های آن اعداد ۱ تا n طوری قرار گرفته باشند که در هیچ سطر و هیچ ستونی عدد تکراری وجود نداشته باشد، مربع لاتین می‌گویند. دو مربع لاتین 3×3 و 4×4 را هم برای نمونه ببینید:

۱	۲	۳
۳	۱	۲
۲	۳	۱

۱	۲	۳	۴
۲	۱	۴	۳
۴	۳	۱	۲
۳	۴	۲	۱

گام ۱ **پر کردن خانه‌های قرمز رنگ:** با توجه به این که در هیچ سطر و ستونی از مربع لاتین عدد تکراری نداریم، خانه‌های قرمز رنگ مطابق شکل مقابل، به راحتی با اعداد ۲ و ۴ پر می‌شوند.

پر کردن خانه سبز رنگ: همان‌طور که می‌بینید خانه سبز رنگ با اعداد ۱، ۲، ۳ و ۴ هم سطر و ستون است، پس چاره‌ای ندارد جز این که برابر با ۵ باشد.

گام ۲ حالا خوب به a نگاه کنید. همان‌طور که می‌بینید a با اعداد ۱، ۲، ۳ و ۵ هم سطر و ستون است، پس a چاره‌ای ندارد جز این که برابر با ۴ باشد. همین‌جا گزینه صحیح خودش را لو می‌دهد؛ چون تنها گزینه‌ای که در آن $a = 4$ است، **۴** است. اما اگر مقدار b را هم می‌خواهید، کافی است مربع لاتین را به صورت زیر پر کنیم. همان‌طور که می‌بینید b با عددهای ۱، ۲، ۳، ۴ و ۵ هم سطر و ستون است، پس فقط می‌تواند برابر با ۱ باشد.

	۴	۳	۵	
	۳	۱	۴	
۴	۲	۵	۱	۳
	۱	۴	۲	
فقط می‌تواند ۱ باشد	b	۵	۲	۳

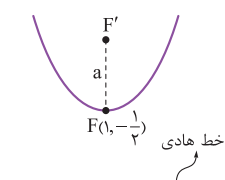


گام ۳ (پیدا کردن مختصات رأس و کانون سهمی): اول به کمک معادله سهمی مختصات رأس و پارامتر سهمی را به دست می‌آوریم:

$$(x-1)^2 - 12y = 6 \Rightarrow (x-1)^2 = 12y + 6$$

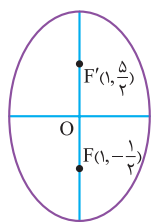
$$\Rightarrow (x-1)^2 = 12(y + \frac{1}{2}) \Rightarrow \begin{cases} 4a = 12 \Rightarrow a = 3 \\ F(1, -\frac{1}{2}) \end{cases}$$

چون ضریب y مثبت است، پس دهانه سهمی رو به بالا و نمودارش این شکلی است:



با توجه به شکل، برای به دست آوردن مختصات کانون کافی است، به عرض رأس سهمی، $a = 3$ واحد اضافه کنیم:

$$F'(1, -\frac{1}{2} + 3) = (1, \frac{5}{2})$$



گام ۳ (محاسبه خواسته سوال): بیضی با کانون‌های F' و F به صورت مقابل است:

طبق قسمت (۲) درس‌نامه، مختصات مرکز بیضی می‌شود:

$$O = \frac{F + F'}{2} = \frac{(1, -\frac{1}{2}) + (1, \frac{5}{2})}{2} = \frac{(2, 2)}{2} = (1, 1)$$

نکته: فاصله نقطه $A(a, b)$ از مبدأ مختصات $(O(0, 0))$ برابر می‌شود با:

$$OA = \sqrt{a^2 + b^2}$$

بنابراین طبق نکته بالا، فاصله نقطه $O(1, 1)$ از مبدأ مختصات برابر $\sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$ است.

گزینه ۳۴

استراتژی: مساحت مثلث AND ، با معلوم بودن AD و ارتفاع وارد بر آن، قابل محاسبه است. حالا کافی است مساحت دو مثلث AFM و DEM را محاسبه کرده و از مساحت مثلث AND کم کنیم.

درس‌نامه ۱ یکی از حالت‌های تشابه دو مثلث، برابری دو زاویه از آن‌هاست. مثلاً در شکل مقابل که $DE \parallel BC$ است، دو مثلث ABC و ADE متشابه‌اند، چون به دلیل قضیه موازی - مورب داریم: $\hat{B} = \hat{D}$ و $\hat{C} = \hat{E}$

۲ در دو مثلث متشابه، نسبت مساحت‌ها برابر با مربع نسبت تشابه است، نسبت تشابه هم می‌دانیم همان نسبت دو ضلع متناظر است.

گام ۳ (محاسبه مساحت مثلث AND): همان‌طور که در شکل زیر می‌بینید، طول ارتفاع وارد بر ضلع $AD = 6$ در مثلث AND ، برابر با اندازه طول مستطیل $ABCD$ است، پس:

$$S_{\triangle AND} = \frac{1}{2} AD \cdot NP = \frac{1}{2} \times 6 \times 8 = 24$$

گام ۳ (محاسبه مساحت دو مثلث AFM و DEM): مطابق شکل مقابل، چون $BN \parallel AM$ ، پس طبق قسمت (۱) درس‌نامه، مثلث‌های AMF و FBN متشابه‌اند. بنابراین نسبت ارتفاع‌های متناظرشان برابر با نسبت تشابه‌شان است:

$$\frac{FI}{FT} = \frac{AM}{BN} \Rightarrow \frac{x}{8-x} = \frac{2}{1} \Rightarrow x = 16 - 2x \Rightarrow x = \frac{16}{3}$$

با همین استدلال در دو مثلث متشابه ECN و EMD هم داریم:

$$\frac{EH}{EK} = \frac{MD}{NC} \Rightarrow \frac{y}{8-y} = \frac{4}{5} \Rightarrow 5y = 32 - 4y \Rightarrow y = \frac{32}{9}$$

مشاوره: در کنکور، معمولاً سؤال‌های سخت هندسه پایه ترکیبی هستند، این سؤال هم سؤال نسبتاً سختی است که در آن، خواص مثلث‌های قائم‌الزاویه و تشابه از هندسه ۱ با ویژگی‌های انتقال از هندسه ۲ ترکیب شده است.

گزینه ۳۲

درس‌نامه ۱ در دنیای ماتریس‌ها، ترتیب ضرب کردن مهم است؛ بنابراین برای محاسبه ضربی مثل ABC دو راه داریم:

(الف) اول AB را حساب کنیم؛ بعد حاصلش را در C ضرب کنیم: $ABC = (AB) \times C$

(ب) اول BC را حساب کنیم؛ بعد A را در حاصلش ضرب کنیم: $ABC = A \times (BC)$

۲ هر وقت تمام درایه‌های حاصل از ضرب دو ماتریس، مثل A و B را نمی‌خواستید و هدفشان پیدا کردن یک سطر یا ستون یا درایه‌ای خاص بود؛ از رابطه‌های زیر استفاده کنید:

$$AB \text{ سطر } i \text{ از ماتریس } A \times \text{ سطر } j \text{ از ماتریس } B$$

$$AB \text{ از ماتریس } A \times \text{ ستون } j \text{ از ماتریس } B$$

$$AB \text{ سطر } i \text{ از ماتریس } A \times \text{ درایه } ij \text{ واقع در سطر } i \text{ و ستون } j \text{ از ماتریس } B$$

گام ۳ (محاسبه ضرب دو ماتریس سمت چپ): طبق مورد (۱) درس‌نامه باید حواسمان به ترتیب ضرب کردن باشد. اول ضرب دو ماتریس سمت چپ را انجام می‌دهیم:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 7 & 8 & 4 \\ 3 & 2 & 5 \\ 6 & 9 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 13 & 17 & 7 \\ 3 & 2 & 5 \\ 3 & 7 & -2 \end{bmatrix}$$

گام ۳ (پیدا کردن خواسته سوال): حالا به کمک مورد (۲) درس‌نامه، سطر سوم ماتریس

$$A = \begin{bmatrix} 13 & 17 & 7 \\ 3 & 2 & 5 \\ 3 & 7 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$BC \text{ سطر سوم} = [B \text{ سطر سوم}] \times C = [3 \quad 7 \quad -2] \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} = [7 \quad 1 \quad -5]$$

بنابراین مجموع درایه‌های سطر سوم ماتریس A برابر $7 + 1 - 5 = 3$ است.

گزینه ۲

درس‌نامه ۱ اگر در سهمی x^2 وجود داشته باشد، دهانه‌اش یا رو به بالاست یا رو به پایین. در چنین سهمی‌هایی اگر مختصات رأس سهمی به صورت $A(h, k)$ و پارامتر سهمی a باشد، معادله سهمی مطابق جدول زیر نوشته می‌شود:

شکل	دهانه سهمی	معادله سهمی
	رو به بالا	$(x-h)^2 = 4a(y-k)$
	رو به پایین	$(x-h)^2 = -4a(y-k)$

۲ فاصله‌های مهم بیضی را در جدول زیر ببینید:

شکل	فاصله‌های مهم
	قطر بزرگ: $AA' = 2a$
	قطر کوچک: $BB' = 2b$
	فاصله کانونی: $FF' = 2c$
	مرکز بیضی: $O = \frac{F + F'}{2}$



گام ۱ (تعیین وضعیت دو دایره): طبق شفاف‌سازی، دو دایره مماس‌داخل‌اند (قسمت ۱) درس‌نامه. در این حالت طبق قسمت (۲) درس‌نامه، طول خط‌المركزین (فاصله مرکز دو دایره) برابر با $|R - r|$ است. بنابراین:

$$|a^2 - 2 - (6a - 1)| = 6 \Rightarrow |a^2 - 6a - 1| = 6 \Rightarrow a^2 - 6a - 1 = \pm 6$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a^2 - 6a - 7 = 0 \Rightarrow (a+1)(a-7) = 0 \Rightarrow \begin{cases} a = -1 \\ a = 7 \end{cases} \text{ غلط} \\ a^2 - 6a + 5 = 0 \Rightarrow (a-1)(a-5) = 0 \Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ a = 5 \end{cases} \text{ غلط} \end{cases}$$

گام ۲ (محاسبه خواسته سؤال): این‌جا باید حواسمان باشد که به ازای $a = 1$ ، طول شعاع یک دایره (دایره به شعاع $a^2 - 2$) و به ازای $a = -1$ طول هر دو شعاع منفی می‌شوند؛ پس این مقادیر قابل قبول نیستند. در نتیجه میانگین مقادیر ممکن برای a برابر $\frac{5+7}{2} = 6$ است.

فیزیک

۴۱ - گزینه ۱

درس‌نامه در جدول زیر همه آن‌چه که باید دربارهٔ واپاشی‌های β^+ و β^- بدانید را آورده‌ایم.

نام واپاشی	بتای منفی (β^-)	بتای مثبت (β^+)
معادله واپاشی	${}_Z^AX \rightarrow {}_{Z+1}^AY + {}_0^{-1}e^- + \bar{\nu}_e$	${}_Z^AX \rightarrow {}_{Z-1}^AY + {}_0^{+1}e^+ + \nu_e$
جنس پرتوها	الکترون	پوزیترون
نوع بار الکتریکی پرتوها	منفی	مثبت
برد	متوسط	متوسط
میزان نفوذپذیری	متوسط (با ورقه‌های سربی حدود ۱ mm) / ضخامت حدود ۱ mm (متوقف می‌شوند).	متوسط (با ورقه‌های سربی حدود ۱ mm) / ضخامت حدود ۱ mm (متوقف می‌شوند).
جرم	سبک	سبک
نمونه	هستهٔ دختر: ${}_{91}^{234}\text{Pa}$ (پروتکتینیم) هستهٔ مادر: ${}_{90}^{234}\text{Th}$ (توریم) پروتون: ${}_1^1\text{H}$ نیوترون: ${}_0^1\text{n}$ الکترون: ${}_0^{-1}e^-$	هستهٔ دختر: ${}_{52}^{124}\text{Te}$ (تلوریم) هستهٔ مادر: ${}_{53}^{124}\text{I}$ (ید) پوزیترون: ${}_0^{+1}e^+$

- ۱- متداول‌ترین نوع واپاشی در هسته‌هاست.
- ۲- در این نوع واپاشی یک نوترون در هستهٔ مادر به یک پوزیترون تبدیل می‌شود.
- ۳- هستهٔ دختر ۱ پروتون بیشتر و ۱ نوترون کمتر از هستهٔ مادر دارد.
- ۴- عدد اتمی ۱ واحد افزایش، عدد نوترونی ۱ واحد کاهش و عدد جرمی ثابت می‌ماند.
- ۵- الکترون گسیل‌شده در واپاشی β^- ، در هستهٔ مادر وجود ندارد و همچنین یکی از الکترون‌های مداری اتم نیست.
- ۶- جرم پوزیترون با جرم الکترون برابر و بار الکتریکی آن‌ها مخالف یکدیگر است.
- ۷- اغلب هسته‌ها پس از واپاشی α یا β در حالت برانگیخته قرار می‌گیرند و سپس طی واپاشی γ به حالت پایه می‌رسند.
- ۸- طبق درس‌نامهٔ بالا در درستی عبارت‌های (الف) و (ب) شککی نیست، و اما علت نادرستی عبارت‌های (پ) و (ت):
- ۹- (پ) در واقع اغلب هسته‌ها پس از واپاشی بتا در حالت برانگیخته قرار می‌گیرند و سپس با واپاشی γ در حالت پایدار قرار می‌گیرند.

بنابراین مساحت مثلث CON می‌شود: $S_{\Delta CON} = \frac{1}{2} ON \cdot CN = \frac{1}{2} (3)(3\sqrt{3}) = \frac{9}{2}\sqrt{3}$

گام ۲ (محاسبه خواسته سؤال): در نهایت داریم:

$$S(OMNC) = S_{\Delta MON} + S_{\Delta CON} = \frac{9}{4}\sqrt{3} + \frac{9}{2}\sqrt{3} = \frac{9}{4}\sqrt{3} + \frac{18}{4}\sqrt{3} = \frac{27}{4}\sqrt{3}$$

۳۹ - گزینه ۴

استراتژی اول محل برخورد قطر‌ها را پیدا می‌کنیم تا مرکز دایره مشخص شود، بعد با توجه به این که خط $4x + 3y + 5 = 0$ بر دایره مماس است، شعاع را حساب می‌کنیم. در آخر با داشتن شعاع و مرکز، خواسته سؤال را پیدا می‌کنیم.

درس‌نامه ۱ قطرهای دایره در مرکز دایره همدیگر را قطع می‌کنند.

۲ مطابق شکل مقابل، اگر خط d بر دایره مماس باشد؛ در این صورت فاصلهٔ مرکز دایره از خط d برابر با شعاع دایره است:

$OH = r$

۳ نزدیک‌ترین و دورترین فاصلهٔ یک نقطه دلخواه مثل A از یک دایره مثل $C(O, r)$ رابطه‌های زیر محاسبه می‌شوند:

$$\text{نزدیک‌ترین فاصله} = |OA - r|, \quad \text{دورترین فاصله} = OA + r$$

۴ فاصلهٔ نقطهٔ $A(x_0, y_0)$ از خط $ax + by + c = 0$ برابر است با:

$$AH = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

گام ۱ (پیدا کردن مرکز دایره): طبق مورد (۱) درس‌نامه، قطرهای $x + y = 1$ و $x - y = 3$ در مرکز دایره همدیگر را قطع می‌کنند؛ پس با حل دستگاه زیر مختصات مرکز به دست می‌آید:

$$\begin{cases} x + y = 1 \\ x - y = 3 \end{cases} \xrightarrow{+} 2x = 4 \Rightarrow x = 2 \xrightarrow{\text{جای‌گذاری}} 2 + y = 1 \Rightarrow y = -1$$

بنابراین نقطهٔ $O(2, -1)$ مرکز دایره است.

گام ۲ (محاسبه شعاع دایره): به گفتهٔ سؤال، خط $4x + 3y + 5 = 0$ بر دایره مماس است، پس طبق مورد (۲) درس‌نامه، فاصلهٔ مرکز دایره از این خط برابر با شعاع دایره است، طبق مورد (۴) درس‌نامه داریم:

$$OH = r = \frac{|4(2) + 3(-1) + 5|}{\sqrt{4^2 + 3^2}} = \frac{|10|}{\sqrt{25}} = \frac{10}{5} = 2$$

گام ۳ (محاسبه خواسته سؤال): حالا که مرکز و شعاع دایره را داریم، می‌توانیم به کمک مورد (۳) درس‌نامه، نزدیک‌ترین فاصلهٔ نقطهٔ $M(4, -2)$ از دایره را پیدا کنیم:

$$\text{نزدیک‌ترین فاصله} = |OM - r| = |\sqrt{(4-2)^2 + (-2-(-1))^2} - 2| = |\sqrt{5} - 2| = \sqrt{5} - 2$$

مثبت

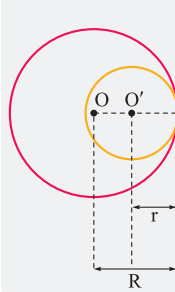
۴۰ - گزینه ۳

شفاف‌سازی «دو دایره فقط یک مماس مشترک دارند»، یعنی دو دایره مماس‌داخل‌اند.

استراتژی اول وضعیت دو دایره را به کمک تعداد مماس‌مشترک‌ها مشخص می‌کنیم، بعد شرط آن وضعیت را اعمال می‌کنیم تا از معادلهٔ ایجادشده، مقادیر قابل قبول a به دست آید.

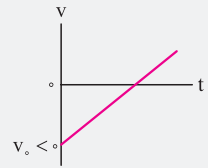
درس‌نامه ۱ دو دایره مماس‌داخل‌اند، اگر و فقط اگر تنها یک مماس مشترک داشته باشند.

۲ دو دایرهٔ $C(O, R)$ و $C'(O', R')$ مماس‌داخل‌اند، اگر و فقط اگر $OO' = |R - r|$.





دوم، جهت شتاب (علامت a) یا نوع حرکت (از نظر تند یا کند شونده بودن) که براساس آن جهت، شیب نمودار معلوم می‌شود و ما می‌فهمیم که باید نمودار را به سمت محور t بکشیم یا از آن دور کنیم. مثلاً اگر در حرکتی سرعت اولیه در خلاف جهت محور x باشد، نمودار سرعت - زمان از زیر محور t شروع می‌شود و اگر این حرکت در ابتدا کندشونده باشد، باید نمودار به محور t نزدیک شود.

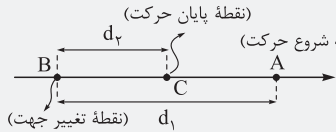


(الف)

پس نمودار سرعت - زمان این حرکت، شبیه شکل (الف) است.

۲ محاسبه مسافت و جابه‌جایی در حرکتی که تغییر جهت دارد:

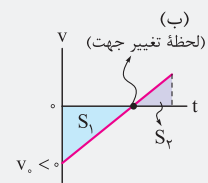
فرض کنید در یک حرکت شتاب ثابت، مثل شکل (ب)، متحرک ابتدا طول d_1 را در خلاف جهت محور x می‌پیماید و سپس تغییر جهت داده و طول d_2 را در جهت محور x برمی‌گردد. (البته d_2 می‌تونه مساوی یا بزرگ‌تر از d_1 هم باشه).



در این صورت اندازه جابه‌جایی $(|\Delta x|)$ و مسافت طی شده (l) برابر می‌شوند با:

$$|\Delta x| = |d_2 - d_1|$$

$$l = d_1 + d_2$$



(ب)

با توجه به مورد (۱) درس‌نامه، نمودار این حرکت به صورت شکل (پ) است. در این شکل، مساحت S_1 برابر d_1 و مساحت S_2 برابر d_2 است؛ پس جابه‌جایی و مسافت برحسب S_1 و S_2 به این صورت است:

$$|\Delta x| = |S_2 - S_1|$$

$$l = S_1 + S_2$$

★ **نکته** اگر جابه‌جایی (Δx) و مسافت (l) را بدهند و شما بخواهید d_1 و d_2 (یا همان S_1 و S_2 در نمودار سرعت - زمان) را حساب کنید، فقط باید رابطه‌های بالا را به صورت یک دستگاه دو معادله دو مجهول بنویسید.

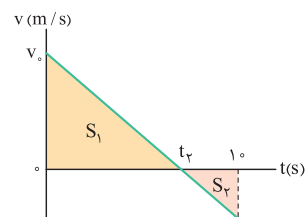
۳ **تندی متوسط** (s_{av}) و **سرعت متوسط** (v_{av}) از روابط زیر به دست می‌آیند:

$$s_{av} = \frac{l}{\Delta t} \rightarrow \text{مسافت پیموده‌شده} \div \text{مدت}$$

$$v_{av} = \frac{\Delta x}{\Delta t} \rightarrow \text{جابه‌جایی} \div \text{مدت}$$

گام ۱ رسم نمودار $v-t$

(۱) سرعت اولیه متحرک در جهت مثبت محور x ($v_0 > 0$) و از آنجا که متحرک تغییر جهت داده، در ابتدا حرکت کندشونده است؛ یعنی نمودار سرعت - زمان از v_0 به محور t نزدیک می‌شود.



(الف)

(۲) همچنین از آنجایی که متحرک تغییر جهت داده، نمودار، محور t را در لحظه t_1 قطع می‌کند.

(۳) موضوع دیگری که در رسم نمودار باید به آن توجه کنیم، این است که با توجه به مثبت بودن علامت سرعت متوسط، مساحت بالای محور t (S_1) از مساحت زیر محور t (S_2) بزرگ‌تر است. با این توضیحات، نمودار $v-t$ این حرکت مطابق شکل (الف) است.

گام ۲ محاسبه S_1 و S_2

تندی متوسط و سرعت متوسط این حرکت را داریم؛ پس می‌توانیم بنویسیم:

$$s_{av} = \frac{l}{\Delta t} \rightarrow \frac{l = S_1 + S_2}{8/5} \Rightarrow \frac{S_1 + S_2}{10} \Rightarrow S_1 + S_2 = 85$$

$$v_{av} = \frac{\Delta x}{\Delta t} \rightarrow \frac{\Delta x = S_1 - S_2}{7/5} \Rightarrow \frac{S_1 - S_2}{10} \Rightarrow S_1 - S_2 = 75$$

$$\begin{cases} S_1 + S_2 = 85 \\ S_1 - S_2 = 75 \end{cases} \xrightarrow{\text{حل دستگاه}} S_1 = 80 \text{ m}, S_2 = 5 \text{ m}$$

گام ۳ محاسبه لحظه t_1 در نمودار

۴ **یادآوری** در مثلث‌های متشابه، نسبت مساحت‌های دو مثلث، برابر با مجذور نسبت اضلاع متناظر است.

حالا به کمک یادآوری بالا و با توجه به مثلث‌های متشابه S_1 و S_2 در شکل (الف)، لحظه t_1 را حساب می‌کنیم:

$$\left(\frac{t_1}{10 - t_1}\right)^2 = \frac{S_1}{S_2} \Rightarrow \left(\frac{t_1}{10 - t_1}\right)^2 = \frac{80}{5} \Rightarrow \frac{t_1}{10 - t_1} = 4$$

$$\Rightarrow t_1 = 40 - 4t_1 \Rightarrow 5t_1 = 40 \Rightarrow t_1 = 8 \text{ s}$$

(ت) در واپاشی β^+ ، یکی از پروتون‌های درون هسته مادر به یک نوترون و یک پوزیترون تبدیل می‌شود.

📌 **مشاوره** برای موفقیت در کنکور باید خط به خط کتاب درسی را بلد باشید، مثلاً این سؤال از متن کتاب درسی طراحی شده است. **یه پیژ دیگه!** در سؤالات چندموردی (الف، ب و ...) ابتدا سراغ عبارتهایی بروید که کاملاً بلد هستید و با استفاده از آن‌ها، گزینه‌های نادرست را حذف کنید.

۴۲ - گزینه ۲

📌 **شفاف‌سازی** در مدتی که متحرک در خلاف جهت محور حرکت می‌کند: در بازه زمانی‌ای که نمودار سرعت - زمان زیر محور t قرار دارد.

درس‌نامه

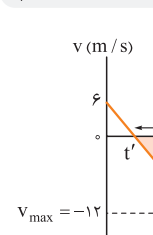
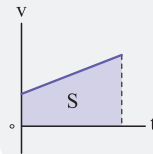
۱ **تندی متوسط:**

$$s_{av} = \frac{l}{\Delta t} \rightarrow \text{مسافت پیموده‌شده}$$

۲ در نمودار سرعت - زمان، مساحت محصور بین نمودار و محور t برابر با مسافت پیموده‌شده توسط متحرک (l) است.

برای مثال برای نمودار بالا داریم:

$$l = S$$



گام ۱ در شکل روبه‌رو در مدت Δt

(یعنی t' تا 20 s) متحرک در خلاف

جهت محور x حرکت کرده است.

پس برای محاسبه مسافتی که متحرک

در این مدت پیموده، مساحت S را

برحسب Δt به دست می‌آوریم:

$$l = S = \text{مساحت مثلث رنگی} = \frac{\Delta t \times 12}{2} = 6\Delta t$$

گام ۲ اطلاعاتمان را در رابطه تندی متوسط قرار می‌دهیم و به جواب می‌رسیم:

$$s_{av} = \frac{l}{\Delta t} = \frac{6\Delta t}{\Delta t} = 6 \text{ m/s}$$

همان‌گونه که در رنگ‌بازی درآوریم و اصلاً لحظه t' رو حساب نکردیم؛ چون توگام دوم ساده می‌شد. با دانستن نکته پرتکرار زیر، این تست را در کم‌تر از 20 s جواب می‌دهیم.

★ **نکته** اگر نمودار در بازه زمانی‌ای که می‌خواهیم تندی متوسط یا اندازه سرعت متوسط را حساب کنیم، به شکل مثلث باشد، کافی است بدون در نظر گرفتن Δt ، مقدار $\frac{|v_{\max}|}{2}$ را به دست بیاوریم. ($v_{\max}$ همان سرعت متحرک در رأس مثلث است).

📌 **تیزبازی** در این تست سرعت متحرک در رأس مثلث رنگی 12 m/s است؛ پس تندی متوسط در بازه زمانی Δt برابر 6 m/s است.

۴۳ - گزینه ۴

📌 **شفاف‌سازی** ۱ از آنجایی که تندی متوسط از اندازه سرعت متوسط بیشتر است، می‌فهمیم که متحرک حتماً در طول مسیر حرکتش تغییر جهت داده است. ۲ هم‌چنین از این‌که متحرک در طول مسیرش تغییر جهت داده، می‌فهمیم که نوع حرکت در ابتدا کندشونده است و پس از تغییر جهت، تندشونده می‌شود. ۳ از مثبت بودن علامت سرعت متوسط درمی‌یابیم که متحرک مسافت بیشتری را در جهت مثبت محور x رفته و مسافت کم‌تری را در خلاف جهت برگشته است.

📌 **استراتژی** بهترین روش حل این تست، رسم نمودار سرعت - زمان است. بعد از رسم نمودار و مشخص کردن مساحت‌های مورد نظر، با نوشتن چند تناسب مساحت‌ها و مربع اضلاع متناظر در مثلث‌های متشابه، به جواب تست می‌رسیم.

درس‌نامه ۱ رسم نمودار سرعت - زمان در حرکت با شتاب ثابت:

برای این‌که بتوانیم برای یک حرکت با شتاب ثابت نمودار سرعت - زمان رسم کنیم، باید حداقل دو چیز را از این حرکت بدانیم:

اول: جهت سرعت اولیه (علامت v_0) که با آن می‌فهمیم نمودارمان را از کجای محور v شروع کنیم.

تیزبازی اگر حرکت را در بازه صفر تا $t_1 = 3$ s برعکس کنیم، سرعت اولیه در حرکت برعکس، صفر می‌شود و می‌توانیم رابطه $\Delta x = \frac{1}{2}at^2 + v_0 t$ را به صورت $\Delta x = \frac{1}{2}at^2$ بنویسیم. حالا کافی است رابطه $\Delta x = \frac{1}{2}at^2$ را برای بازه‌های $t_0 = 0$ تا $t_1 = 3$ s و $t_1 = 3$ s تا $t_2 = 8$ s، به صورت نسبتی بنویسیم:

$$\frac{|\Delta x_{(0,3s)}|}{|\Delta x_{(3s,8s)}|} = \left(\frac{|\Delta t_{(0,3s)}|}{|\Delta t_{(3s,8s)}|}\right)^2 \Rightarrow \frac{|\Delta x_{(0,3s)}|}{|\Delta x_{(3s,8s)}|} = \left(\frac{3}{5}\right)^2 = \frac{9}{25}$$

به جای $|\Delta x_{(0,3s)}|$ و $|\Delta x_{(3s,8s)}|$ از اعداد متناظرشان یعنی ۹ و ۲۵ استفاده می‌کنیم و نسبت خواسته‌شده را به دست می‌آوریم:

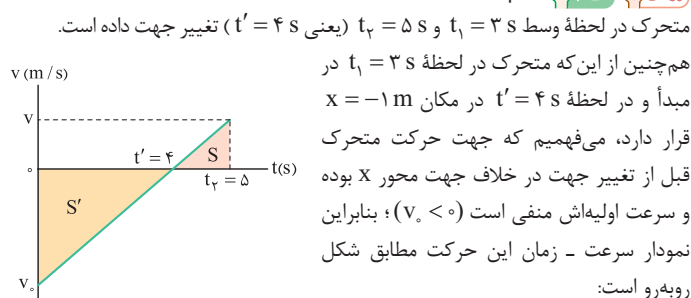
$$\frac{\Delta x_{(0,8s)}}{\ell_{(0,8s)}} = \frac{-|\Delta x_{(0,3s)}| + |\Delta x_{(3s,8s)}|}{|\Delta x_{(0,3s)}| + |\Delta x_{(3s,8s)}|} = \frac{-9 + 25}{9 + 25} = \frac{16}{34} = \frac{8}{17}$$

۴۵ - گزینه ۳

شفاف‌سازی ۱ لحظه‌های $t_1 = 3$ s و $t_2 = 5$ s نسبت به لحظه تغییر جهت متقارن‌اند؛ یعنی متحرک در لحظه $t' = \frac{3+5}{2} = 4$ s تغییر جهت می‌دهد.

۲ متحرک در لحظه‌های $t_1 = 3$ s و $t_2 = 5$ s در مبدأ ($x = 0$) بوده و در مکان $x = -1$ m تغییر جهت داده است؛ پس متحرک در بازه $t_1 = 3$ s تا $t' = 4$ s به اندازه ۱ m رفته و در بازه $t' = 4$ s تا $t_2 = 5$ s به اندازه ۱ m برگشته است.

روش گام ۱ رسم نمودار سرعت - زمان:



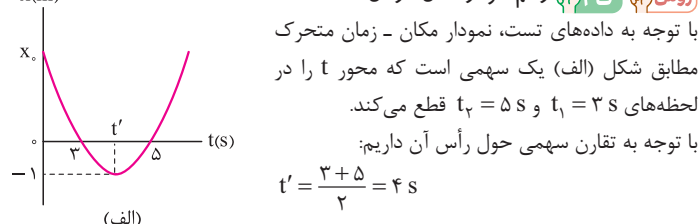
گام ۱ محاسبه مسافت طی‌شده در بازه صفر تا ۴ s (مساحت S') در نمودار سرعت - زمان: مسافتی که متحرک در بازه $t' = 4$ s تا $t_2 = 5$ s پیموده ۱ m است؛ پس در نمودار سرعت - زمان بالا مساحت S هم برابر ۱ واحد است. حالا با توجه به تشابه مثلث‌ها در این نمودار، می‌توانیم مساحت S' را حساب کنیم. تناسب مساحت‌ها و مربع اضلاع متناظر را برای مثلث‌های S و S' می‌نویسیم:

$$\frac{S'}{S} = \left(\frac{t' - t_1}{t_2 - t_1}\right)^2 \Rightarrow \frac{S'}{1} = \left(\frac{4 - 3}{5 - 4}\right)^2 \Rightarrow S' = 16 \text{ m}$$

گام ۲ محاسبه تندی متوسط در بازه صفر تا ۵ s:

مسافت طی‌شده برابر با مجموع مساحت‌های محصور بین نمودار و محور t است؛ یعنی $S_{av} = \frac{\ell}{\Delta t} = \frac{S' + S}{\Delta t} = \frac{16 + 1}{5} = \frac{17}{5} \text{ m/s}$ ؛ پس داریم:

روش گام ۱ رسم نمودار مکان - زمان:



$$t' = \frac{3+5}{2} = 4 \text{ s}$$

گام ۲ $t_1 = 3$ s و $t_2 = 5$ s ریشه‌های این سهمی هستند؛ پس معادله آن باید به این صورت باشد:

که k یک عدد ثابت و فعلاً نامعلوم است. برای تعیین k داریم:

$$\left. \begin{aligned} t' &= 4 \text{ s} \\ x' &= -1 \text{ m} \end{aligned} \right\} \Rightarrow -1 = k(4-3)(4-5) \Rightarrow k = 1$$

$$x = (t-3)(t-5) = t^2 - 8t + 15$$

پس داریم:

گام ۱ محاسبه مسافت طی‌شده در ۲ ثانیه اول: مسافت طی‌شده در ۲ ثانیه اول برابر مساحت S' در شکل (ب) است. این بار تناسب مساحت‌ها و مجذور اضلاع متناظر را برای مثلث‌های متشابه S_1 و S'' در شکل (ب) می‌نویسیم و به پاسخ تست می‌رسیم:

$$\begin{aligned} \frac{S''}{S_1} &= \left(\frac{t_2 - t_1}{t_1}\right)^2 \xrightarrow{S''=S_1-S'} \frac{S''}{S_1=8} = \left(\frac{6}{8}\right)^2 \Rightarrow \frac{8-S'}{8} = \frac{9}{16} \\ \Rightarrow 8-S' &= 4.5 \Rightarrow S' = 3.5 \xrightarrow{\ell_{(0,2s)}=S'} \ell_{(0,2s)} = 3.5 \text{ m} \end{aligned}$$

۴۴ - گزینه ۳

استراتژی از روی نمودار مکان - زمان، نمودار سرعت - زمان را رسم می‌کنیم و با یک تناسب مساحت‌ها و مربع اضلاع متناظر در مثلث‌های متشابه، به جواب می‌رسیم.

درس‌نامه رسم نمودار سرعت - زمان از روی نمودار مکان - زمان در حرکت شتاب ثابت:

دانستن دو چیز از نمودار مکان - زمان کافی است تا ما بتوانیم نمودار سرعت - زمان یک حرکت شتاب ثابت را رسم کنیم: **۱** شیب خط مماس بر نمودار مکان - زمان در لحظه $t_0 = 0$ که همان سرعت اولیه است. مثلاً در نمودار $x-t$ شکل (الف) این شیب مثبت است؛ یعنی $v_0 > 0$ است.

۲ لحظه اکسترمم در نمودار مکان - زمان، همان لحظه‌ای است که سرعت صفر می‌شود و متحرک تغییر جهت می‌دهد؛ پس در این لحظه نمودار سرعت - زمان محور t را قطع می‌کند. مثلاً در نمودار $x-t$ شکل (الف) لحظه t' لحظه صفرشدن سرعت است. حالا اگر مانند شکل (ب) یک خط راست از نقطه v_0 روی محور v به نقطه t' روی محور t بکشیم، نمودار سرعت - زمان را رسم کرده‌ایم.

گام ۱ رسم نمودار سرعت - زمان:

در نمودار مکان - زمان داده‌شده در تست (شکل الف) می‌بینیم که شیب خط مماس بر نمودار در لحظه صفر، منفی بوده و متحرک در لحظه $t = 3$ s تغییر جهت داده است؛ پس مطابق شکل (ب) نمودار سرعت - زمان از پایین محور t شروع شده ($v_0 < 0$) و در لحظه $t = 3$ s محور t را قطع می‌کند.

گام ۲ محاسبه نسبت مساحت‌های S_1 و S_2 :

با توجه به تشابه مثلث‌ها در شکل (ب)، به کمک تناسب مساحت‌ها و مربع اضلاع متناظر، نسبت $\frac{S_1}{S_2}$ را پیدا می‌کنیم:

$$\frac{S_1}{S_2} = \left(\frac{t_1}{t_2 - t_1}\right)^2 \Rightarrow \frac{S_1}{S_2} = \left(\frac{3}{8-3}\right)^2 = \frac{9}{25} \Rightarrow S_1 = \frac{9}{25} S_2$$

گام ۳ محاسبه نسبت اندازه جابه‌جایی به مسافت طی‌شده در بازه صفر تا ۸ s:

با توجه به نمودار سرعت - زمان شکل (ب)، جابه‌جایی برابر $\Delta x = S_2 - S_1$ و مسافت طی‌شده برابر $\ell = S_2 + S_1$ است؛ پس داریم:

$$\frac{\Delta x}{\ell} = \frac{S_2 - S_1}{S_2 + S_1} = \frac{S_2 - \frac{9}{25} S_2}{S_2 + \frac{9}{25} S_2} = \frac{1 - \frac{9}{25}}{1 + \frac{9}{25}} = \frac{\frac{16}{25}}{\frac{34}{25}} = \frac{16}{34} = \frac{8}{17}$$

می‌توانستیم به جای S_1 و S_2 اعداد متناظرشان یعنی ۹ و ۲۵ را قرار دهیم و سریع‌تر به پاسخ برسیم، این‌طوری:

$$\frac{\Delta x}{\ell} = \frac{25 - 9}{25 + 9} = \frac{16}{34} = \frac{8}{17}$$

مشاوره فوتبالی‌ها به اصطلاحی دارن که میگن فلان بازی می‌کنه؛ یعنی وقتی صاحب توپه، فقط به توپ زیر پاش نگاه نمی‌کنه و حواسش به اطراف خودش و هم‌تیمی‌هاش هست. شما هم موقع تست‌زدن باید سربالا باشید! یعنی غرق خواسته تست و محاسباتتون نشید و حواستون به گزینه‌ها هم باشه! مثلاً در این تست هر گزینه شامل دو عدد است که عدد اول تمام گزینه‌ها با هم فرق دارد؛ پس اصلاً نیازی به محاسبه عدد دوم هر گزینه نیست، پس یادتان باشد که همیشه نیم‌نگاهی به گزینه‌ها داشته باشید، شاید گزینه درست را سریع‌تر و آسان‌تر و کم‌دردتر پیدا کنید.

۴۷- گزینه ۴

شفاف‌سازی نخ پاره می‌شود: نیروی $F = 15 \text{ N}$ قطع می‌شود.

استراتژی حرکت جسم از دو مرحله تشکیل شده است؛ قبل از پاره شدن و بعد از پاره شدن نخ. ۱ در هر مرحله با اعمال قانون دوم نیوتون شتاب جسم را به دست می‌آوریم. ۲ به کمک فرمول‌های حرکت با شتاب ثابت، جابه‌جایی جسم را در هر مرحله حساب می‌کنیم.

درس‌نامه ۱ قانون دوم نیوتون: $F_{\text{net}} = ma$

ضرب اصطکاک جنبشی

$$f_k = F_N \mu_k$$

اندازه نیروی عمودی سطح

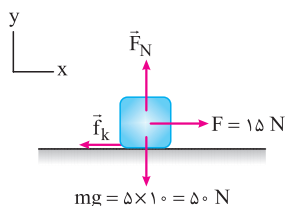
رابطه مستقل از شتاب در حرکت با شتاب ثابت:

$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v_2 - v_1}{t_2 - t_1}$$

سرعت اولیه سرعت ثانویه
انتهای بازه زمانی ابتدای بازه زمانی
بازه زمانی $\Delta x = \frac{v_1 + v_2}{2} \Delta t \rightarrow$ جابه‌جایی

هنگام استفاده از روابط بالا، حواستان به علامت‌های v_1 و v_2 باشد.

گام ۱ ابتدا نیروهای وارد بر جسم و شتاب آن را در مرحله اول حرکتش (قبل از پاره شدن نخ) تعیین می‌کنیم:



تعادل در راستای محور y :

$$F_N = mg \Rightarrow F_N = 50 \text{ N}$$

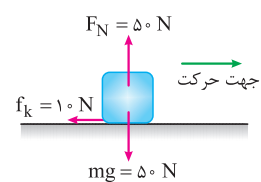
$$f_k = F_N \mu_k = 50 \times 0.2 = 10 \text{ N}$$

حرکت در راستای محور x :

$$F_{\text{net}(1)} = ma_1 \Rightarrow F - f_k = ma_1$$

$$\Rightarrow 15 - 10 = 5 \times a_1 \Rightarrow a_1 = 1 \text{ m/s}^2$$

گام ۲ حالا همین کار را در مرحله دوم (بعد از پاره شدن نخ) انجام می‌دهیم. حواستان



باشد که در این مرحله دیگر خبری از نیروی نخ

($F = 15 \text{ N}$) نیست و تنها نیروی افقی وارد بر

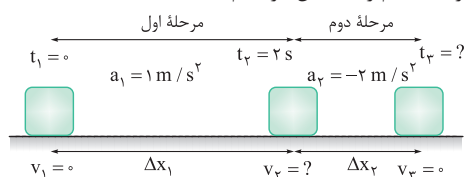
جسم، نیروی اصطکاک جنبشی است که در خلاف

جهت حرکت جسم به آن وارد می‌شود:

$$F_{\text{net}(2)} = ma_2 \Rightarrow -f_k = ma_2$$

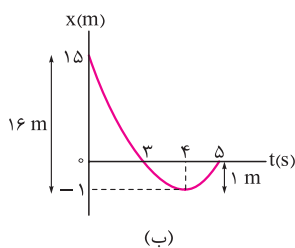
$$\Rightarrow 0 - 10 = 5a_2 \Rightarrow a_2 = -2 \text{ m/s}^2$$

گام ۳ در شکل زیر مسیر حرکت جسم را مشخص کرده‌ایم.



به کمک رابطه $a = \frac{\Delta v}{\Delta t}$ و v_2 و t_2 را حساب می‌کنیم:

$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t} \Rightarrow \begin{cases} \text{مرحله اول: } a_1 = \frac{v_2 - v_1}{t_2 - t_1} \Rightarrow 1 = \frac{v_2 - 0}{2 - 0} \Rightarrow v_2 = 2 \text{ m/s} \\ \text{مرحله دوم: } a_2 = \frac{v_3 - v_2}{t_3 - t_2} \Rightarrow -2 = \frac{0 - 2}{t_3 - 2} \Rightarrow t_3 = 3 \text{ s} \end{cases}$$



یعنی مکان اولیه متحرک (x_0) برابر 15 m است.

گام ۱ با توجه به شکل (ب)، مسافت طی شده توسط متحرک و تندی متوسط آن در بازه زمانی صفر تا 5 s برابر است با:

$$\ell = 16 + 1 = 17 \text{ m}$$

$$s_{\text{av}} = \frac{\ell}{\Delta t} = \frac{17}{5} \text{ m/s}$$

تیزبازی اگر حرکت را در بازه صفر تا $t' = 4 \text{ s}$ برعکس کنیم، سرعت اولیه در حرکت

برعکس، صفر می‌شود و می‌توانیم رابطه $\Delta x = \frac{1}{2}at'^2 + v_0 t'$ را به صورت $\Delta x = \frac{1}{2}at'^2$ بنویسیم.

حالا کافی است رابطه $\Delta x = \frac{1}{2}at'^2$ را برای بازه‌های $t_0 = 0$ تا $t' = 4 \text{ s}$ و $t' = 4 \text{ s}$ تا $t_1 = 5 \text{ s}$ به صورت نسبتی بنویسیم:

$$\frac{|\Delta x_{(0,4s)}|}{|\Delta x_{(4s,5s)}|} = \left(\frac{|\Delta t_{(0,4s)}|}{|\Delta t_{(4s,5s)}|} \right)^2$$

$$\frac{|\Delta x_{(4s,5s)}| = 1 \text{ m}}{\Delta x_{(0,4s)}} = \left(\frac{4}{1} \right)^2 \Rightarrow \ell_{(0,4s)} = 16 \text{ m}$$

$$s_{\text{av}(0,5s)} = \frac{\ell_{(0,4s)} + \ell_{(4s,5s)}}{\Delta t} = \frac{16 + 1}{5} = \frac{17}{5} \text{ m/s}$$

۴۶- گزینه ۴

استراتژی با یک تست سراسر نسبتی سروکار داریم. داده‌ها و خواسته‌های مسئله

چه چیزهایی است؟

داده اول: نمودار نیروی کشسانی برحسب تغییر طول فنر برای سه فنر

داده دوم: میزان افزایش طول فنر S_p به ازای یک نیروی مشخص

خواسته تست: میزان افزایش طول فنرهای S_1 و S_p به ازای همان نیرو

خب حالا چکار کنیم؟ ابتدا با توجه به داده اول، ثابت فنر هر یک از فنرها را به دست

می‌آوریم؛ سپس به سراغ داده دوم می‌رویم و از رابطه $F_e = kx$ به طور نسبتی استفاده

می‌کنیم. یک بار برای دو فنر S_1 و S_p و یک بار هم برای دو فنر S_p و S_3 .

درس‌نامه مطابق شکل زیر، نمودار اندازه نیروی کشسانی فنر برحسب تغییر طول

فنر نسبت به حالت عادی آن، به صورت خط راست مبدأگذر است.



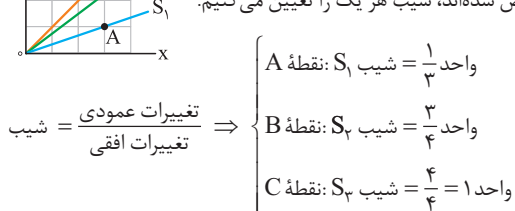
❖ شیب این نمودار برابر با ثابت فنر است.

❖ هرچه شیب نمودار بیشتر باشد، ثابت فنر بزرگ‌تر است.

گام ۱ در درس‌نامه دیدیم که شیب نمودار ($F_e - x$) نشان‌دهنده

ثابت فنر است؛ بنابراین با توجه به نقاط A ، B و C که روی

نمودارهای روبه‌رو مشخص شده‌اند، شیب هر یک را تعیین می‌کنیم.



تغییرات عمودی
تغییرات افقی

$$\Rightarrow \begin{cases} \text{نقطه } A: \text{شیب } S_1 = \frac{1}{3} \text{ واحد} \\ \text{نقطه } B: \text{شیب } S_p = \frac{3}{4} \text{ واحد} \\ \text{نقطه } C: \text{شیب } S_3 = \frac{4}{4} = 1 \text{ واحد} \end{cases}$$

گام ۲ از آنجایی که به هر سه فنر نیروی یکسانی وارد شده است، طبق رابطه

$$F_e = kx \Rightarrow x = \frac{F_e}{k}$$

$$\frac{x_2}{x_1} = \frac{k_1}{k_2} = \frac{S_1}{S_2} \Rightarrow \frac{4}{x_1} = \frac{3}{\frac{4}{3}} \Rightarrow \frac{4}{x_1} = \frac{4}{9} \Rightarrow x_1 = 9 \text{ cm}$$

(همین‌جا گزینه درست لو رفت.)

$$\frac{x_3}{x_2} = \frac{k_2}{k_3} = \frac{S_2}{S_3} \Rightarrow \frac{x_3}{\frac{4}{3}} = \frac{3}{4} \Rightarrow x_3 = 3 \text{ cm}$$



گزینه ۴۹

درس نامه اگر متحرکی با تندی ثابت v روی محیط دایره‌ای به شعاع r در حرکت باشد، دوره تناوب و اندازه شتاب مرکزگرای جسم از روابط زیر به دست می‌آیند:

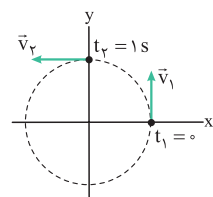
$$T = \frac{2\pi r}{v}, a_c = \frac{v^2}{r}$$

$$T = \frac{2\pi r}{v} = \frac{2 \times \pi \times 2}{10\pi} = 4s$$

گام ۱ ابتدا دوره حرکت را حساب می‌کنیم:

گام ۲ از آن جایی که دوره حرکت $T = 4s$ است، در

هر ثانیه $(\Delta t = 1s = \frac{T}{4})$ متحرک یک ربع دایره را طی می‌کند؛ یعنی مسیری به شکل مقابل:



از آن جایی که تندی متحرک ثابت و برابر $10\pi \text{ m/s}$ است، داریم:

$$\vec{v}_1 = 10\pi \vec{j}, \vec{v}_2 = -10\pi \vec{i}$$

در نتیجه شتاب متوسط متحرک برابر است با:

$$\vec{a}_{av} = \frac{\vec{v}_2 - \vec{v}_1}{t_2 - t_1} = \frac{(-10\pi)\vec{i} - 10\pi\vec{j}}{1-0} = -10\pi\vec{i} - 10\pi\vec{j} (\text{m/s}^2)$$

که اندازه آن برابر است با:

$$a_{av} = \sqrt{(-10\pi)^2 + (-10\pi)^2} = 10\pi\sqrt{2} \text{ m/s}^2$$

گام ۳ حالا اندازه شتاب مرکزگرای متحرک را حساب می‌کنیم:

$$a_c = \frac{v^2}{r} = \frac{10\pi \times 10\pi}{2} = 50\pi^2 \text{ m/s}^2$$

گام ۴ خواسته مسئله برابر است با:

$$\frac{a_{av}}{a_c} = \frac{10\pi\sqrt{2}}{50\pi^2} = \frac{2\sqrt{2}}{5\pi}$$

گزینه ۵۰

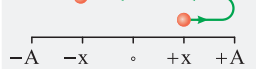
درس نامه ۱ در حرکت هماهنگ ساده:

بسامد زاویه‌ای دایره نوسان

$$x = A \cos(\omega t) \text{ و } \omega = \frac{2\pi}{T}$$

دوره نوسان $\rightarrow \frac{T}{4}$

گام ۱ نوسانگر در مدت $\frac{T}{4}$ (دوره) مسیری به شکل زیر طی می‌کند. در این مسیر:



اولاً: مکان نوسانگر قرینه می‌شود؛ یعنی از مکان x به مکان $-x$ می‌رسد.

ثانیاً: نوسانگر مسافتی برابر با $2A$ طی می‌کند. (A: دامنه نوسان)

$$s_{av} = \frac{\ell}{\Delta t}$$

۲ تندی متوسط:

گام ۲ ابتدا با توجه به معادله مکان - زمان داده شده، دوره تناوب نوسانگر را حساب می‌کنیم:

$$x = 0.2 \cos\left(\frac{\pi}{4}t\right) : \omega = \frac{\pi}{4} \text{ rad/s} \Rightarrow \frac{2\pi}{T} = \frac{\pi}{4} \Rightarrow T = 8s$$

گام ۳ مدت بازه زمانی داده شده یعنی $t_1 = \frac{1}{12}s$ تا $t_2 = \frac{25}{12}s$ ، برابر

$$t_2 - t_1 = \frac{25}{12} - \frac{1}{12} = \frac{24}{12} = 2s$$

یعنی نصف دوره است.

می‌دانیم در هر بازه زمانی به اندازه نصف دوره،

نوسانگر مسافتی به اندازه دو برابر دامنه را طی می‌کند (با طی مسیری به شکل بالا):

$$\ell = 2A = 2 \times 0.2 = 0.4 \text{ m} = 4 \text{ cm}$$

بنابراین داریم:

$$s_{av} = \frac{\ell}{\Delta t} = \frac{4}{2} = 2 \text{ cm/s}$$

روش

نکته اگر در حرکت هماهنگ ساده، دوره نوسانگر برابر T و دامنه نوسان آن برابر A باشد، تندی متوسط نوسانگر در بازه زمانی $\Delta t = n\left(\frac{T}{4}\right)$ از رابطه $s_{av} = 4 \frac{A}{T}$ به دست می‌آید.

(n: یک عدد صحیح)

از نکته بالا استفاده می‌کنیم. بازه زمانی داده شده نصف دوره است؛ بنابراین در این بازه زمانی:

$$s_{av} = 4 \frac{A}{T} = 4 \times \frac{2}{4} = 2 \text{ cm/s}$$

مشاوره بررسی تست‌های کنکورهای اخیر نشان می‌دهد که بازه زمانی نیم‌دوره

($\Delta t = \frac{T}{2}$) از تیپ‌های پرتکرار این موضوع است؛ بنابراین نکته‌های گفته شده درباره این

موضوع در درس‌نامه بالا را کاملاً جدی بگیرید.

حالا به کمک رابطه مستقل از شتاب، جابه‌جایی متحرک را در هر مرحله حساب می‌کنیم:

$$\Delta x_1 = \frac{v_1 + v_2}{2} \Delta t_1 = \frac{0 + 2}{2} \times 2 = 2 \text{ m}$$

$$\text{مرحله اول}$$

$$\Delta x_2 = \frac{v_2 + v_3}{2} \Delta t_2 = \frac{2 + 0}{2} \times 1 = 1 \text{ m}$$

$$\Delta x_{\text{کل}} = \Delta x_1 + \Delta x_2 = 2 + 1 = 3 \text{ m}$$

در نتیجه:

تیزبازی می‌توانستیم گام سوم را سریع‌تر برداریم. در مرحله اول شتاب جسم

$a_1 = 1 \text{ m/s}^2$ است؛ بنابراین سرعت جسم ۱ واحد ۱ واحد افزایش می‌یابد و بعد از ۲ s به

2 m/s می‌رسد. در مرحله دوم شتاب جسم $a_2 = -2 \text{ m/s}^2$ است، یعنی سرعت جسم

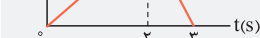
۲ واحد ۲ واحد کم می‌شود؛ بنابراین یک ثانیه زمان

لازم است تا تندی جسم از 2 m/s به صفر برسد. در

نتیجه نمودار سرعت - زمان متحرک از لحظه شروع

حرکت تا توقف به شکل مقابل است.

محاسبه جابه‌جایی کل متحرک به کمک این نمودار کار



ساده‌ای است:

$$\Delta x_{\text{کل}} = \text{مساحت زیر نمودار} = \frac{2 \times 3}{2} = 3 \text{ m}$$

مشاوره مشابه این تست را سال‌های قبل هم در کنکور داشتیم (همین تست، فقط

با عددهای متفاوت)، کنکورهای سال ۹۹ و ۸۷ در درس فیزیک این اتفاق زیاد می‌افتد؛ پس

تسلط بر تست‌های کنکور سال‌های قبل را جدی بگیرید.

گزینه ۲۸

درس نامه اگر طول فنر کشیده‌ای تغییر کند، اندازه نیروی کشسانی فنر هم تغییر

می‌کند. بین تغییر طول فنر (Δx) و تغییر نیروی کشسانی فنر (ΔF_e) رابطه زیر برقرار

$$\Delta F_e = k \Delta x$$

است:

روش **گام ۱** در حالت اول شتاب آسانسور رو به پایین است (با جهت

حرکت آسانسور کاری نداریم و فقط جهت شتاب برایمان مهم است). پس:

$$F_{\text{net}(1)} = ma_1 \Rightarrow mg - F_{e(1)} = ma_1$$

$$\Rightarrow F_{e(1)} = mg - ma_1$$

گام ۲ در حالت دوم آسانسور به صورت کندشونده در حال حرکت

به سمت پایین است، پس در این حالت شتاب جسم به سمت بالاست؛

بنابراین:

$$F_{\text{net}(2)} = ma_2 \Rightarrow F_{e(2)} - mg = ma_2$$

$$\Rightarrow F_{e(2)} = mg + ma_2$$

گام ۳ با توجه به نتایج دو گام قبلی، $F_{e(2)} - F_{e(1)}$ را حساب می‌کنیم:

$$F_{e(2)} - F_{e(1)} = (mg + ma_2) - (mg - ma_1)$$

$$= ma_2 + ma_1 = (5 \times 1) + (5 \times 2) = 15 \text{ N}$$

گام ۴ در درس‌نامه رابطه $\Delta F_e = k \Delta x$ را دیدیم. با توجه به این رابطه:

$$\Delta F_e = k \Delta x \Rightarrow 15 = 2000 \times \Delta x \Rightarrow \Delta x = \frac{15}{2000} \text{ m} \xrightarrow{\frac{1}{2000} \text{ m} = 1 \text{ cm}} \Delta x = \frac{15}{2} = 7.5 \text{ cm}$$

روش

نکته الف) اگر تغییر نیروی خالص وارد بر جسم برابر ΔF_{net} و تغییر شتاب ناشی

از آن برابر Δa باشد، از قانون دوم نیوتون می‌توانیم نتیجه بگیریم:

ب) اگر تغییر نیروی کشسانی فنری به ثابت k برابر ΔF_e و تغییر طول فنر حاصل از آن

$$\Delta F_e = k \Delta x$$

برابر Δx باشد، داریم:

در نتیجه اگر با تغییر نیروی کشسانی فنر، نیروی خالص وارد بر جسم و در نتیجه شتاب آن

$$k \Delta x = m \Delta a$$

تغییر کند، داریم:

در حالت اول شتاب جسم 2 m/s^2 و رو به بالا و در حالت دوم شتاب جسم 1 m/s^2 و رو

به پایین است؛ بنابراین اندازه تغییرات شتاب جسم 3 m/s^2 است. در نتیجه داریم:

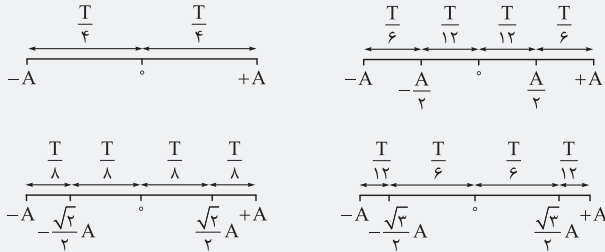
$$k \Delta x = m \Delta a \Rightarrow 2000 \times \Delta x = 5 \times 3 \Rightarrow \Delta x = \frac{15}{2000} \text{ m} = 7.5 \text{ cm}$$



۵۲- گزینه ۲

استراتژی ۱ به کمک نمودار داده شده و تحلیل مسیر حرکت نوسانگر، دوره تناوب آن را به دست می آوریم. **۲** به سراغ محاسبه انرژی مکانیکی نوسانگر می رویم.

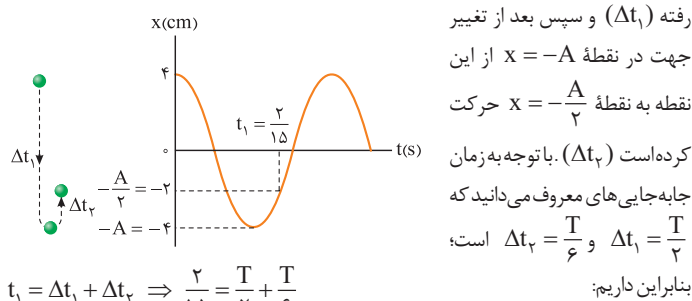
درس نامه ۱ در تست های حرکت هماهنگ ساده، مکان ها و جابه جایی های مشخص شده در شکل های زیر بسیار پرتکرارند. زمان لازم برای طی این جابه جایی ها را (بر حسب دوره) به خاطر بسپارید:



۲ برای محاسبه انرژی مکانیکی نوسانگر، روابط زیر را بلد باشید:

$$E = \frac{1}{2} m \omega^2 A^2 = \frac{1}{2} \pi^2 m A^2 f^2$$

گام ۱ همان طور که در شکل می بینید، نوسانگر در مدت t_1 ابتدا از $x = A$ به $x = -A$



$$t_1 = \Delta t_1 + \Delta t_2 \Rightarrow \frac{2}{15} = \frac{T}{2} + \frac{T}{6}$$

$$\Rightarrow \frac{2}{15} = \frac{3T}{6} + \frac{T}{6} \Rightarrow \frac{2}{15} = \frac{4T}{6} \Rightarrow T = \frac{1}{5} s$$

گام ۲ حالا انرژی مکانیکی نوسانگر را به دست می آوریم:

$$E = \frac{1}{2} \pi^2 m A^2 f^2 \quad \frac{f}{T} = \frac{1}{5} = 0.2 \text{ Hz}, A = 4 \text{ cm} = 4 \times 10^{-2} \text{ m}$$

$$E = \frac{1}{2} \pi^2 \times 10 \times (4 \times 10^{-2})^2 \times (0.2)^2 = 4 \times 10^{-2} = \frac{4}{100} = \frac{1}{25} \text{ J}$$

۵۳- گزینه ۴

درس نامه ۱ بسامد هماهنگ n ام موج ایستاده تشکیل شده در یک تار دو انتها بسته به طول L ، از رابطه زیر به دست می آید:

$$f_n = \frac{nv}{2L}$$

در این رابطه v تندی انتشار موج عرضی در تار است که از رابطه زیر به دست می آید:

$$v = \sqrt{\frac{FL}{m}} \quad \text{جرم تار} \rightarrow m$$

۲ به بسامد هماهنگ اول ($n=1$)، بسامد اصلی می گوئیم. با توجه به رابطه $f_n = \frac{nv}{2L}$ واضح است که بسامد هماهنگ n ام، n برابر بسامد اصلی است؛ یعنی:

$$f_n = \frac{nv}{2L} \xrightarrow{n=1} f_1 = \frac{v}{2L}$$

$$f_n = \frac{nv}{2L} \Rightarrow f_n = n f_1$$

گام ۱ همان طور که در درس نامه دیدید، بسامد هماهنگ n ام یک تار دو انتها بسته، n برابر بسامد هماهنگ اول آن است ($f_n = n f_1$)؛ بنابراین داریم:

$$375 \text{ Hz} = f_1 + f_2 = f_1 + 2f_1 = 3f_1 \Rightarrow f_1 = \frac{375}{3} = 125 \text{ Hz}$$

۵۱- گزینه ۳

استراتژی یکی از رایج ترین تیپ های تست در فصل ۳ فیزیک دوازدهم، مربوط به تصویر لحظه ای از یک موج عرضی است که در آن ها، درباره چگونگی حرکت یکی از ذرات محیط پرسشی مطرح می کنند. برای این تست ها به ترتیب گام های زیر را طی می کنیم:

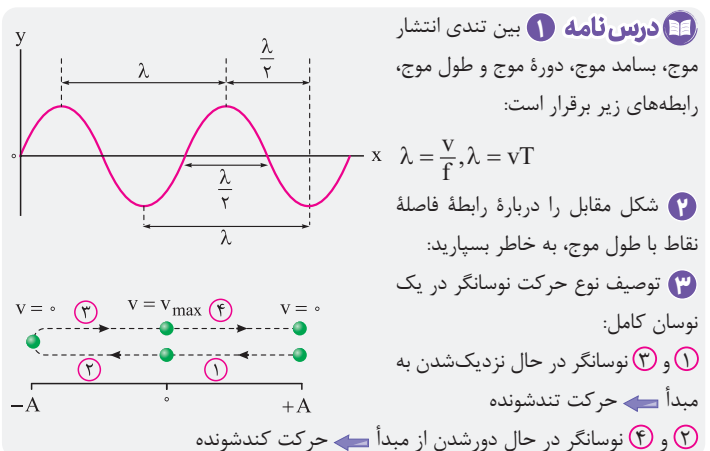
گام ۱ با توجه به تصویر لحظه ای داده شده از موج عرضی، طول موج را حساب می کنیم.

گام ۲ به کمک رابطه $\lambda = vT$ ، دوره موج را به دست می آوریم.

گام ۳ از این جا به بعد با داشتن دوره، با حرکت هماهنگ ساده ذره مورد نظر از محیط سروکار داریم. اغلب لازم است بازه زمانی داده شده را با دوره (T) مقایسه کرده و با توجه به نتیجه این مقایسه، مسیر حرکت ذره را تجسم کنیم.

گام ۴ با دانستن مسیر حرکت ذره مورد نظر، خواسته تست را حساب می کنیم. مسافت طی شده توسط ذره، جابه جایی ذره، تندی یا سرعت متوسط آن و نوع حرکت ذره از سوژه های پرتکرار در این تست ها هستند.

در پاسخ این تست نمونه ای از این چهار گام را قرار است ببینید.



درس نامه ۱ بین تندی انتشار

موج، بسامد موج، دوره موج و طول موج، رابطه های زیر برقرار است:

$$\lambda = \frac{v}{f}, \lambda = vT$$

۲ شکل مقابل را درباره رابطه فاصله نقاط با طول موج، به خاطر بسپارید:

۳ توصیف نوع حرکت نوسانگر در یک نوسان کامل:

۱ و **۳** نوسانگر در حال نزدیک شدن به مبدأ $\leftarrow$ حرکت تندشونده

۲ و **۴** نوسانگر در حال دور شدن از مبدأ $\rightarrow$ حرکت کندشونده

گام ۱ با توجه به تصویر داده شده از موج داریم:

$$\lambda + \frac{\lambda}{2} = 30 \Rightarrow \lambda = 20 \text{ cm} = 0.2 \text{ m}$$

گام ۲ دوره تناوب نوسان ذرات طناب برابر است با:

$$\lambda = vT \Rightarrow 0.2 = 10 \times T \Rightarrow T = \frac{2}{100} s$$

گام ۳ می خواهیم درباره وضعیت نوسانی نقاط A و B ، $\Delta t = t_2 - t_1 = \frac{9}{400} s$ بعد

از لحظه t_1 اطلاعاتی به دست بیاوریم. برای این کار ابتدا رابطه Δt با T را پیدا می کنیم:

$$\frac{\Delta t}{T} = \frac{\frac{9}{400}}{\frac{2}{100}} = \frac{9}{8} \Rightarrow \Delta t = \frac{9}{8} T$$

گام ۴ حالا موقعیت هر ذره را بعد از مدت $\frac{9}{8} T$ روی پاره خط نوسانی خودش مشخص می کنیم. از آن جایی که هر ذره بعد از سپری شدن مدت T به همان مکان بازمی گردد، کافی است بازه زمانی $\frac{9}{8} T - T = \frac{1}{8} T$ را در نظر بگیریم. در این مدت:

الف ذره B کمی پایین تر از مکان فعلی و در حال حرکت به سمت پایین خواهد بود:

در این لحظه ذره B در حال دور شدن از مبدأ و حرکت آن کندشونده است. (نادرستی **۱** و **۴**)

ب موقعیت ذره A هم به شکل روبه رو خواهد بود.

در این شکل تندی ذره A بیشینه نیست (نادرستی **۲**) و حرکت ذره A چون در حال نزدیک شدن به مبدأ است، تندشونده است. (درستی **۳**)



گام ۴ بیشینه انرژی جنبشی فوتوالکترون‌های گسیل شده را به دست می‌آوریم.

$$K_{\max} = hf - hf_0 = 4/125 \times 10^{-19} - 4 \times 1.5 \times 10^{-19} = 4/125 \times 10^{-19} - 6 \times 10^{-19} = -5.2 \times 10^{-19} \text{ J}$$

تبدیل به eV

$$= 4/125 \times 10^{-19} - 4 \times 10^{-19} = 0.125 \times 10^{-19} = \frac{1}{8} \times 10^{-19} \text{ J}$$

گام ۵ به کمک رابطه انرژی جنبشی، بیشینه تندی فوتوالکترون‌ها ($v_{\max}$) را محاسبه می‌کنیم:

$$K_{\max} = \frac{1}{2} m_e v_{\max}^2 \Rightarrow \frac{1}{8} \times 10^{-19} = \frac{1}{2} \times 9 \times 10^{-31} \times v_{\max}^2$$

$$\Rightarrow v_{\max}^2 = \frac{1}{4} \times 10^{-12} \Rightarrow v_{\max} = \frac{1}{2} \times 10^{-6} \text{ m/s}$$

مشاوره مبحث بیشینه انرژی جنبشی فوتوالکترون‌ها، پای ثابت تست‌های کنکور است و تقریباً هر سال یک تست از آن می‌آید. برای حل تست‌های این مبحث کافیت ۲ رابطه‌ای که در درس‌نامه گفتیم و رابطه $f = \frac{c}{\lambda}$ را بلد باشید.



گزینه ۴ - ۵۶

درس‌نامه درباره مدل اتمی بور، جدول زیر را باید بلد باشید.

مواردی که مدل اتمی بور در آن‌ها ناموفق است.	مواردی که مدل اتمی بور در آن‌ها موفق است.
(۱) علت تفاوت شدت خط‌های طیف گسیلی اتم‌های هیدروژن گونه (۲) برای اتم‌های دارای دو الکترون و بیشتر از آن به کار نمی‌آید.	(۱) ارائه تصویری از چگونگی حرکت الکترون به دور هسته (۲) تبیین پایداری اتم (۳) توجیه طیف گسیلی و جذبی اتم‌های هیدروژن گونه (۴) محاسبه انرژی یونش و طول موج‌های طیف خطی اتم‌های هیدروژن گونه (۵) تبیین پدیده فلئورسانسی (۶) نتیجه‌گیری معادله ریدبرگ برای طیف خطی گاز هیدروژن اتمی

با توجه به جدولی که در درس‌نامه آوردیم، مدل بور نمی‌تواند متفاوت بودن شدت خط‌های طیف گسیلی را توضیح دهد. مثلاً نمی‌تواند توضیح دهد که در طیف گسیلی گاز هیدروژن اتمی چرا شدت خط قرمز با شدت خط آبی متفاوت است.

مشاوره در فصل فیزیک اتمی، خط به خط متن کتاب درسی مهم است. اگر به این موضوع توجه نکنید، در کنکور تان تست‌های ساده‌ای مانند این تست را از دست می‌دهید.



گزینه ۳ - ۵۷

درس‌نامه اگر تعداد هسته‌های مادر اولیه در یک نمونه پرتوزا N_0 باشد، پس از گذشت زمان t ، تعداد هسته‌های پرتوزای باقی‌مانده از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$N = \frac{N_0}{2^n} \quad n = \frac{t}{T_{1/2}}$$

تعداد نیمه‌عمرهای سپری شده n

گام ۱ ابتدا تعداد نیمه‌عمرهای سپری شده را به دست می‌آوریم:

$$n = \frac{t}{T_{1/2}} = \frac{2292}{573} = 4$$

گام ۲ حالا ببینیم مقدار کربن ۱۴ این زغال چند درصد مقدار اولیه کربن ۱۴ آن است:

$$N = \frac{N_0}{2^n} \xrightarrow{n=4} N = \frac{N_0}{2^4} = \frac{N_0}{16}$$

$$\xrightarrow{\text{برحسب درصد}} \frac{N}{N_0} = \frac{1}{16} \times 100 = 6.25\%$$

مشاوره در فصل فیزیک هسته‌ای مانند فصل فیزیک اتمی، متن، مثال‌ها، تمرین‌ها و ... کتاب درسی بسیار مهم است و به صورت مستقیم از آن‌ها در کنکور تست می‌آید. همین تست از تمرین‌های آخر فصل گرفته شده است. باور کنید جواب دادن به تست‌های این فصل راحت‌تر از جواب‌دادن به آن‌هاست.

گام ۱ حالا تندی موج در این تار را حساب می‌کنیم:

$$f_n = \frac{nv}{L} \xrightarrow[n=1, f_1=125 \text{ Hz}]{L=40 \text{ cm}=0.4 \text{ m}} 125 = \frac{1 \times v}{0.4} \Rightarrow v = 100 \text{ m/s}$$

گام ۲ در نهایت، نیروی کشش تار را به دست می‌آوریم:

$$v = \sqrt{\frac{FL}{m}} \xrightarrow[m=10 \text{ g}=10^{-2} \text{ kg}]{v=100} 100 = \sqrt{\frac{F \times 0.4}{10^{-2}}}$$

$$\Rightarrow 10^4 = \frac{F \times 0.4}{10^{-2}} \Rightarrow F = \frac{10^4 \times 10^{-2}}{0.4} = 250 \text{ N}$$

مشاوره در سال‌های اخیر یکی از تست‌های کنکور، سهم مبحث موج ایستاده تشکیل شده در تار است. این مبحث اصلاً دشوار نیست و دانستن فرمول‌های آن برای حل تست کافی است. یادتان باشد که در کنکور تان نباید این تست را از دست دهید.



گزینه ۱ - ۵۴

درس‌نامه ۱ در شکل روبه‌رو پرتوی نوری

به طور مایل از محیط (۱) به ضریب شکست n_1 وارد محیط (۲) به ضریب شکست n_2 شده است. در این شکل روابط مهم زیر برقرار است:

$$\frac{\sin \theta_2}{\sin \theta_1} = \frac{v_2}{v_1} = \frac{\lambda_2}{\lambda_1} = \frac{n_1}{n_2}$$

در رابطه بالا، λ طول موج نور و v تندی انتشار نور است. حواستان باشد که θ_1 و θ_2 نسبت به خط عمود بر مرز سنجیده می‌شوند.

۲ با ورود مایل پرتوی نور از هوا به یک محیط شفاف:

تندی انتشار و طول موج نور کاهش می‌یابد. $\diamond$ بسامد نور تغییر نمی‌کند.

$\diamond$ پرتوی نور به خط عمود نزدیک می‌شود.

گام ۱ نور از هوا وارد یک محیط شفاف شده؛ پس به

خط عمود نزدیک می‌شود. از آن‌جا که در تست گفته شده که نور در هنگام ورود به محیط (۲)، 16° از راستای اولیه منحرف می‌شود، مطابق شکل روبه‌رو داریم:

$$\theta_2 = \theta_1 - 16^\circ = 53^\circ - 16^\circ = 37^\circ$$

گام ۲ می‌دانیم $\frac{\sin \theta_2}{\sin \theta_1} = \frac{\lambda_2}{\lambda_1}$ است؛ پس λ_1 به صورت زیر به دست می‌آید:

$$\frac{\sin 37^\circ}{\sin 53^\circ} = \frac{\lambda_2}{\lambda_1} \xrightarrow[\lambda_2 = \lambda_1 - \frac{1}{4} \times 10^{-6} \text{ m}]{\lambda_1 = \frac{1}{4} \times 10^{-6} \text{ m}} \frac{\lambda_1 - \frac{1}{4} \times 10^{-6}}{\lambda_1} = \frac{\sin 37^\circ}{\sin 53^\circ}$$

$$\Rightarrow \frac{\lambda_1 - \frac{1}{4} \times 10^{-6}}{\lambda_1} = \frac{3}{4} \Rightarrow \frac{\lambda_1 - \frac{1}{4} \times 10^{-6}}{\lambda_1} = \frac{3}{4} \Rightarrow 4\lambda_1 - \frac{1}{4} \times 10^{-6} = 3\lambda_1 \Rightarrow \lambda_1 = \frac{1}{4} \times 10^{-6} \text{ m}$$

گام ۳ حالا به کمک رابطه $v = \lambda f$ بسامد نور را حساب می‌کنیم:

$$v_1 = \lambda_1 f \Rightarrow 3 \times 10^8 = \frac{1}{4} \times 10^{-6} \times f \Rightarrow f = 6 \times 10^{14} \text{ Hz}$$



گزینه ۲ - ۵۵

درس‌نامه ۱ در اثر فوتوالکتریک، انرژی جنبشی سریع‌ترین فوتوالکترون‌های

گسیل شده از سطح فلز، از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$K_{\max} = hf - hf_0 \quad (h = 6.6 \times 10^{-34} \text{ J.s} \approx 4 \times 10^{-15} \text{ eV.s})$$

بسامد آستانه فوتوالکتریک

انرژی فوتون فرودی

$\diamond$ الکترون ولت (eV) یکای متداول انرژی در فیزیک اتمی و هسته‌ای است. تبدیل eV به J

و برعکس به این صورت انجام می‌شود:

$$\text{eV} \xrightarrow{\times 1.6 \times 10^{-19}} \text{J} \xrightarrow{\div 1.6 \times 10^{-19}} \text{eV}$$

۲ انرژی جنبشی ذره‌ای به جرم m که با تندی ثابت v در حال حرکت است، از رابطه زیر

$$K = \frac{1}{2} mv^2$$

به دست می‌آید:



۵۸- گزینه ۲

استراتژی

برای این که میدان الکتریکی خالص در نقطه A برابر صفر شود، لازم است که: ۱) برابندی میدانهای الکتریکی حاصل از بارهای q_1 و q_2 در نقطه A ($\vec{E}_1, \vec{E}_2$) در خلاف جهت میدان الکتریکی حاصل از بار q_3 در این نقطه ($\vec{E}_3$) باشد. برای این منظور، اولاً بارهای q_1 و q_2 را یکسان در نظر بگیرید، تا $\vec{E}_1, \vec{E}_2$ در امتداد $\vec{E}_3$ قرار بگیرد و ثانیاً این بارها با بار q_3 ناهمنام باشند تا $\vec{E}_1, \vec{E}_2$ در خلاف جهت $\vec{E}_3$ باشد.

۲) اندازه $\vec{E}_1, \vec{E}_2$ و $\vec{E}_3$ را برابر قرار دهید.

درس نامه اندازه میدان الکتریکی در فاصله r از بار نقطه‌ای q رابطه زیر به دست می‌آید:

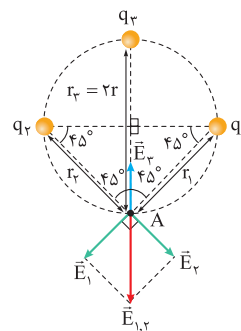
$$E = k \frac{|q|}{r^2} \quad (k = 9 \times 10^9 \frac{N.m^2}{C^2})$$

گام ۱ در شکل زیر، با فرض $q_1 = q_2 > 0$ و $q_3 < 0$ ، بردارهای میدان حاصل از بارها در نقطه A را رسم کردیم. اندازه $\vec{E}_1, \vec{E}_2$ را به دست می‌آوریم:

$$r_1 = r_2 = \sqrt{r^2 + r^2} = \sqrt{2}r$$

$$\begin{cases} q_1 = q_2 \\ r_1 = r_2 \end{cases} \Rightarrow E_1 = E_2 = k \frac{|q_1|}{r_1^2} = k \frac{|q_1|}{(\sqrt{2}r)^2} = \frac{1}{2} k \frac{|q_1|}{r^2}$$

$\vec{E}_1$ و $\vec{E}_2$ بر هم عمودند؛ بنابراین:



$$E_{1,2} = \sqrt{E_1^2 + E_2^2} \xrightarrow{E_1=E_2} E_{1,2} = \sqrt{2}E_1$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2} k \frac{|q_1|}{r^2}$$

اندازه $\vec{E}_3$ هم برابر است با:

$$E_3 = k \frac{|q_3|}{r_3^2} = k \frac{|q_3|}{(r)^2} = \frac{1}{4} k \frac{|q_3|}{r^2}$$

گام ۲ $E_{1,2}$ و E_3 را برابر قرار می‌دهیم:

$$E_{1,2} = E_3 \Rightarrow \frac{\sqrt{2}}{2} k \frac{|q_1|}{r^2} = \frac{1}{4} k \frac{|q_3|}{r^2} \Rightarrow \frac{|q_3|}{|q_1|} = 2\sqrt{2}$$

۵۹- گزینه ۳

درس نامه

۱) اگر روی سطحی به مساحت A ، بار الکتریکی Q توزیع شده باشد، چگالی سطحی بار از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$\sigma = \frac{Q}{A}$$

۲) اصل پایستگی بار الکتریکی: اگر دو جسم رسانا را با هم تماس دهیم (به شرط آن که تبادل بار فقط بین دو جسم انجام شود)، جمع جبری بارهای دو جسم قبل از تماس، برابر با جمع جبری بارهای دو جسم بعد از تماس است.

گام ۱ دو کره فلزی یکسانند؛ بنابراین پس از تماس با یکدیگر، بار الکتریکی آنها برابر می‌شود. طبق اصل پایستگی بار الکتریکی، بار کره‌ها پس از تماس برابر است با:

$$q'_A + q'_B = q_A + q_B \xrightarrow{q'_A=q'_B} 2q'_A = q_A + q_B$$

$$\Rightarrow q'_A = q'_B = \frac{q_A + q_B}{2} = \frac{20 + (-4)}{2} = 8 \mu C$$

گام ۲ تغییر چگالی سطحی بار کره A به صورت زیر به دست می‌آید:

$$\Delta\sigma_A = \frac{\Delta q_A}{A} = \frac{q'_A - q_A}{4\pi r^2} = \frac{8 - 20}{4 \times 3 \times (0.05)^2} = \frac{-12}{12 \times 25 \times 10^{-4}} = -400 \frac{\mu C}{m^2}$$

۶۰- گزینه ۱

درس نامه

دقت اندازه‌گیری ابزارهای رقمی (دیجیتال) برابر با ارزش مکانی آخرین رقمی است که ابزار می‌خواند. برای مثال: $5/10 \downarrow s \Rightarrow$ دقت اندازه‌گیری $= 0/001 s$ آخرین رقمی که ابزار می‌خواند.

نام ابزار نشان داده شده، ریزسنج است. دقت اندازه‌گیری این وسیله رقمی (دیجیتال) برابر است با: $20/083 \downarrow mm \Rightarrow$ دقت اندازه‌گیری $= 0/001 mm$ آخرین رقمی که ابزار می‌خواند.

تله توجه داشته باشید که در ابزارهای رقمی، دقت اندازه‌گیری برابر با ارزش مکانی آخرین رقم خوانده‌شده توسط دستگاه است، نه آخرین رقم خوانده‌شده توسط دستگاه! در این تست با این اشتباه، راهتان به **۳** ختم می‌شود.

مشاوره باز هم تستی از تمرین‌های آخر فصل در کتاب درسی! نکته جالب در این تست، خواستی نام وسیله اندازه‌گیری بود که تا آن زمان کم‌تر کسی این پیش‌بینی را می‌کرد. همین تست نشان می‌دهد که باید کلمه به کلمه کتاب درسی را خوب یاد بگیرید.

۶۱- گزینه ۲

استراتژی در نوع متداولی از تست‌ها، مقداری بار از یکی از صفحات خازن جدا کرده و به صفحه دیگر منتقل می‌کنیم و به واسطه این کار، انرژی ذخیره‌شده در خازن تغییر می‌کند. حل این تست‌ها دو مرحله دارد:

مرحله (۱): تعیین بار ثانویه خازن (Q_2) برحسب بار اولیه آن (Q_1) (در درس‌نامه زیر پلنگی مناسبه Q_2 رو توضیح داریم).

مرحله (۲): با داشتن ΔU ، C و Q_2 و به کمک رابطه $\frac{1}{2}C(Q_2^2 - Q_1^2) = \Delta U$ ، Q_1 به دست می‌آید.

اگر خواسته تست V_1 و U_1 باشد، از Q_1 برای محاسبه آن‌ها کمک می‌گیریم.

درس نامه ۱) اگر از یکی از صفحات خازنی که بار اولیه آن Q_1 است، بار q جدا شود و به صفحه دیگر منتقل شود، بار ثانویه خازن از رابطه زیر به دست می‌آید:

جدا شدن بار از صفحه منفی: $Q_2 = Q_1 + q$

جدا شدن بار از صفحه مثبت: $Q_2 = Q_1 - q$

توجه داشته باشید که در رابطه بالا، q باید با علامتش قرار داده شود.

۲) انرژی ذخیره‌شده در خازنی به ظرفیت C که بار الکتریکی آن Q است، از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$U = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C}$$

گام ۱ با جداکردن 3 mC بار الکتریکی از صفحه منفی و انتقال آن به صفحه مثبت، بار صفحه مثبت و در نتیجه بار ثانویه خازن برابر می‌شود با: $Q_2 = Q_1 + 3 = q + 3 \text{ (mC)}$

گام ۲ به کمک رابطه انرژی ذخیره‌شده در خازن می‌توان نوشت:

$$U = \frac{Q_2^2}{2C} \Rightarrow U_2 - U_1 = \frac{1}{2C} (Q_2^2 - Q_1^2)$$

$$\frac{U_2 - U_1 + 4/5 \text{ (J)}}{Q_2 = q + 3 \text{ (mC)}} \Rightarrow 4/5 = \frac{1}{2 \times 5 \times 10^{-6}} [(q+3)^2 - q^2] \times (10^{-3})^2$$

$$\Rightarrow 4/5 = \frac{1}{10} (q^2 + 6q + 9 - q^2) \Rightarrow 4/5 = \frac{1}{10} (6q + 9) \Rightarrow 6q + 9 = 45$$

$$\Rightarrow 6q = 36 \Rightarrow q = 6 \text{ mC}$$

۶۲- گزینه ۱

درس نامه ۱) مدار شکل روبه‌رو شامل باتری‌های $\mathcal{E}_1$ و $\mathcal{E}_2$ ($\mathcal{E}_1 > \mathcal{E}_2$) است که در جهت‌های مخالف بسته شده‌اند. در مورد این مدار باید موارد زیر را بدانید:

♦ تعیین جهت جریان عبوری از مدار به عهده باتری $\mathcal{E}_1$ (که نیروی محرکه الکتریکی بزرگ‌تری دارد) است.

♦ مقدار جریان عبوری از مدار برابر است با:

$$I = \frac{\mathcal{E}_1 - \mathcal{E}_2}{R_{eq} + r_1 + r_2}$$

♦ باتری $\mathcal{E}_1$ تولیدکننده انرژی است: $V_1 = \mathcal{E}_1 - r_1 I$ اختلاف پتانسیل دو سر باتری $\mathcal{E}_1$

♦ توان تولیدی باتری $\mathcal{E}_1$: $P_{\mathcal{E}_1} = V_1 I = \mathcal{E}_1 I - r_1 I^2$

♦ باتری $\mathcal{E}_2$ مصرف‌کننده انرژی است: $V_2 = \mathcal{E}_2 + r_2 I$ اختلاف پتانسیل دو سر باتری $\mathcal{E}_2$

♦ توان مصرفی باتری $\mathcal{E}_2$: $P_{\mathcal{E}_2} = V_2 I = \mathcal{E}_2 I + r_2 I^2$

♦ توان مصرفی هر یک از مقاومت‌های خارجی: $P_1 = R_1 I^2$, $P_2 = R_2 I^2$

♦ اصل پایستگی انرژی برای توان‌های تولیدی و مصرفی در یک مدار: $P_{\mathcal{E}_1} = P_{\mathcal{E}_2} + P_1 + P_2$



تیزبازی با قطع کلید k_1 ، جریان عبوری از مدار قطع می‌شود و ولت‌سنج V_p ، صفر را نشان می‌دهد، چون:
 $V_p = V_{L_p} = R_{L_p} I \xrightarrow{I=0} V_p = 0$ (رد ۱ و ۳)
 ولت‌سنج V به دو سر مجموعه ولت‌سنج‌های V_1 و V_p متصل است؛ پس:
 $V = V_1 + V_p \xrightarrow{V_p=0} V = V_1$
 طبق رابطه بالا اگر ولت‌سنج V بخواهد صفر را نشان دهد، ولت‌سنج V_1 هم صفر را نشان می‌دهد و (رد ۱ و ۳) جواب تست می‌شود؛ پس ولت‌سنج V عدد صفر را نشان نمی‌دهد (رد ۴)

گزینه ۴



نکته مطابق شکل زیر، اگر دو سر یک مقاومت با سیم (بدون مقاومت) به یکدیگر متصل شود، از این مقاومت جریانی عبور نمی‌کند و این مقاومت اصطلاحاً اتصال کوتاه شده و از مدار حذف می‌شود. در این حالت همه جریانی ورودی به گره، از سیم عبور خواهد کرد.

در حالت اول مقاومت مقاومت متغیر برابر صفر است؛ بنابراین کل جریان عبوری از مدار از شاخه مقاومت متغیر عبور کرده و مقاومت 6Ω اتصال کوتاه می‌شود. از طرفی دو سر باتری با سیم بدون مقاومت به یکدیگر متصل هستند و اختلاف پتانسیل الکتریکی دو سر باتری در این حالت برابر صفر خواهد بود:

در حالت دوم، مقاومت معادل مدار برابر است با:

$$R_{eq} = \frac{6 \times 18}{6 + 18} = 4.5 \Omega$$

یا $R_{eq} = \frac{\text{مقاومت بزرگتر}}{n+1} = \frac{18}{3+1} = 4.5 \Omega$ (بنابراین: $18 = 3 \times 6$)
 و جریان کل عبوری از مدار (جریان عبوری از باتری) برابر است با:

$$I = \frac{\mathcal{E}}{R_{eq} + r} = \frac{12}{4.5 + 1.5} = 2 \text{ A}$$

اختلاف پتانسیل دو سر باتری در صورت زیر به دست می‌آید:

$$V_p = \mathcal{E} - rI = 12 - (1.5 \times 2) = 9 \text{ V}$$

بنابراین اختلاف پتانسیل دو سر باتری از صفر به 9 V می‌رسد.

گزینه ۴

درس‌نامه ۱ قانون دوم نیوتون:
 $F_{net} = ma$
 اگر ذره باردار q با سرعت $\vec{v}$ در میدان مغناطیسی $\vec{B}$ حرکت کند (به شرط آن که جهت حرکت آن با میدان مغناطیسی موازی نباشد)، بر آن نیروی مغناطیسی وارد خواهد شد که اندازه آن از رابطه مقابل به دست می‌آید:
 $F = |q| v B \sin \theta$
 در رابطه بالا θ زاویه بین جهت حرکت بار الکتریکی (بردار $\vec{v}$) و جهت میدان مغناطیسی (بردار $\vec{B}$) است.

که کمک قانون دوم نیوتون، اندازه نیروی مغناطیسی وارد بر ذره α را به دست می‌آوریم:

$$F = ma = 6.68 \times 10^{-27} \times 4 \times 10^5 = 2.672 \times 10^{-22} \text{ N}$$



نکته پرتوهای α ، ذرات باردار مثبت از جنس هسته اتم هلیوم (${}^4_2\text{He}$) است که شامل ۲ پروتون و ۲ نوترون است:

بزرگی میدان مغناطیسی به صورت مقابل محاسبه می‌شود:

$$F = |q| v B \sin \theta \Rightarrow 2.672 \times 10^{-22} = 2 \times 1.6 \times 10^{-19} \times 500 \times B \times \sin 90^\circ$$

$$\Rightarrow B = \frac{2.672 \times 10^{-22}}{3.2 \times 10^{-16}} = 8.35 \times 10^{-7} \text{ T} \xrightarrow{10^{-4} \text{ T} = 1 \text{ G}} B = 0.835 \text{ G}$$

گزینه ۴

شفاف‌سازی بزرگی نیروی خالص وارد بر آن بیشینه شود: نیروهای الکتریکی و مغناطیسی هم‌جهت باشند.

۲ اگر مطابق شکل روبه‌رو، دو مقاومت R_1 و R_2 به صورت موازی به هم متصل باشند:
 مقاومت معادل این دو مقاومت:

$$R_{eq} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$$

اگر مقاومت بزرگ‌تر، n برابر مقاومت کوچک‌تر باشد:

نسبت جریان عبوری از مقاومت‌ها برابر با وارون نسبت مقاومت‌ها است:

$$\frac{I_1}{I_2} = \frac{R_2}{R_1}$$

قاعده انشعاب (اصل پایستگی بار الکتریکی):

$$I = I_1 + I_2$$

نسبت توان مصرفی مقاومت‌ها برابر با وارون نسبت مقاومت‌ها است:

$$\frac{P_1}{P_2} = \frac{R_2}{R_1}$$

روش گام ۱ با توجه به این که $\mathcal{E}_1 > \mathcal{E}_2$ است، باتری $\mathcal{E}_2$ مصرف‌کننده انرژی است و اختلاف پتانسیل دو سر آن از رابطه $V_p = \mathcal{E}_p + r_p I$ به دست می‌آید؛ بنابراین جریان کل عبوری از مدار برابر است با:

$$V_p = \mathcal{E}_p + r_p I \xrightarrow{\substack{V_p = 3/5 \text{ V} \\ \mathcal{E}_p = 3 \text{ V}, r_p = 1 \Omega}} 3/5 = 3 + (1 \times I) \Rightarrow I = 0.5 \text{ A}$$

گام ۲ مقاومت معادل مدار به صورت زیر به دست می‌آید:

$$I = \frac{\mathcal{E}_1 - \mathcal{E}_2}{R_{eq} + r_1 + r_2} \Rightarrow 0.5 = \frac{4 - 3}{R_{eq} + 1 + 1} \Rightarrow R_{eq} + 2 = 1 \Rightarrow R_{eq} = 1 \Omega$$

دو مقاومت R و $4R$ موازی‌اند؛ بنابراین:

$$R_{eq} = \frac{R \times 4R}{R + 4R} \Rightarrow 1 = \frac{4R^2}{5R} \Rightarrow 40R = 4R^2 \Rightarrow R = 10 \Omega$$

یا $R_{eq} = \frac{\text{مقاومت بزرگتر}}{n+1} \Rightarrow 1 = \frac{4R}{4+1} \Rightarrow R = 10 \Omega$ (بنابراین: $4R = 4 \times R$)

گام ۳ مقاومت‌های R و $4R$ موازی‌اند؛ بنابراین نسبت جریان عبوری از آن‌ها برابر وارون نسبت مقاومت‌ها است و می‌توان نوشت:

$$\frac{I_R}{I_{4R}} = \frac{4R}{R} = 4 \xrightarrow{I = I_R + I_{4R}} 0.5 = I_R + \frac{1}{4} I_R = \frac{5}{4} I_R \Rightarrow I_R = 0.4 \text{ A}$$

توان مصرفی مقاومت R برابر است با:

$$P_R = R I_R^2 = 10 \times (0.4)^2 = 1.6 \text{ W}$$

روش گام ۱ مانند گام اول روش اول.

توان مصرفی باتری $\mathcal{E}_2$ برابر است با:

$$P_p = V_p I = 3/5 \times 0.5 = 1/10 \text{ W}$$

توان تولیدی باتری $\mathcal{E}_1$ برابر است با:

$$P_1 = \mathcal{E}_1 I - r_1 I^2 = 4 \times 0.5 - 1 \times (0.5)^2 = 2 - 0.25 = 1.75 \text{ W}$$

توان مصرفی در مجموعه مقاومت‌های R و $4R$ به صورت زیر به دست می‌آید:

$$P = P_1 - P_p = 1.75 - 1/10 = 1.65 \text{ W}$$

گام ۴ دو مقاومت R و $4R$ موازی‌اند؛ بنابراین:

$$P = \frac{V^2}{R} \xrightarrow{V_R = V_{4R}} \frac{P_R}{P_{4R}} = \frac{4R}{R} = 4$$

توان مصرفی در مجموعه دو مقاومت، برابر مجموع توان مصرفی هر یک از آن‌ها است:

$$P = P_R + P_{4R} \Rightarrow 2 = P_R + \frac{P_R}{4} = \frac{5}{4} P_R \Rightarrow P_R = \frac{8}{5} = 1.6 \text{ W}$$

گزینه ۲

شفاف‌سازی ولت‌سنج‌ها آرمانی هستند: جریانی از آن‌ها عبور نمی‌کند.

گام ۱ با قطع کلید k_1 ، جریان عبوری از مدار صفر می‌شود، چون شاخه شامل k_1 قطع و به دلیل آرمانی بودن ولت‌سنج‌ها، اجازه عبور جریان داده نمی‌شود.
 در این حالت ولت‌سنج V_p عدد صفر و ولت‌سنج V_1 اختلاف پتانسیل دو سر مولد را نشان می‌دهد، زیرا:

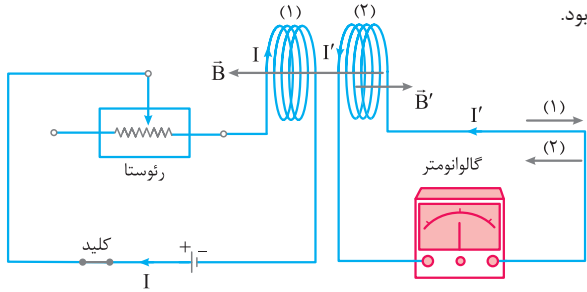
$$V_p = V_{L_p} \Rightarrow V_p = R_{L_p} I \xrightarrow{I=0} V_p = 0$$

$$V_1 = V_{L_p} + \mathcal{E} \xrightarrow{V_{L_p}=0} V_1 = \mathcal{E}$$

گام ۲ ولت‌سنج V به صورت مستقیم به دو سر مولد متصل است؛ بنابراین نیروی محرکه مولد را نشان می‌دهد:

با افزایش جریان عبوری از سیم‌لوله (۱)، اندازه میدان مغناطیسی حاصل از سیم‌لوله (۱) و در نتیجه شار مغناطیسی عبوری از سیم‌لوله‌های (۱) و (۲) افزایش می‌یابد؛ بنابراین طبق قانون لنز، جهت میدان مغناطیسی القایی در داخل سیم‌لوله (۲) ($\vec{B}'$) باید در خلاف جهت یعنی به طرف راست باشد.

گام ۲ به کمک قاعده دست راست، جریان القایی (I') در هر دو حالت در جهت (۲) خواهد بود.

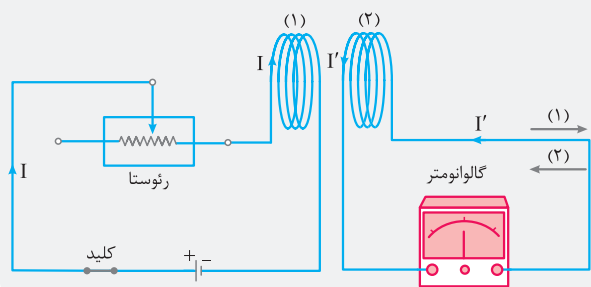


برای فهمیدن تیزبازی این تست، ابتدا نکته زیر رو بخونید.

نکته با تغییر جریان عبوری از سیم‌لوله (۱) (I)، جهت جریان القایی در سیم‌لوله (۲) (I') به صورت زیر تعیین می‌شود:

الف) اگر I در حال افزایش باشد، I و I' روی حلقه‌های دو سیم‌لوله، در خلاف جهت یکدیگرند.
ب) اگر I در حال کاهش باشد، I و I' روی حلقه‌های دو سیم‌لوله، هم‌جهت‌اند.

تیزبازی در هر دو حالت یعنی هنگام وصل کلید و هنگام کاهش مقاومت رثوستا، جریان عبوری از سیم‌لوله (۱) (I) در حال افزایش است؛ بنابراین در هر دو حالت، جهت جریان القایی روی حلقه‌های سیم‌لوله (۲) (I') در خلاف جهت جریان روی حلقه‌های سیم‌لوله (۱) است. مطابق شکل زیر، جهت I' در هر دو حالت در جهت (۲) است.



تله در تست‌هایی که با تعیین جهت جریان القایی سروکار دارید، هرگونه اشتباه در تشخیص چگونگی تغییر شار مغناطیسی و همچنین استفاده از دست اشتباهی برای تعیین جهت جریان القایی، به راحتی شما را در تله گزینه‌های نادرست می‌اندازد.

۶۸ - گزینه ۲

درس‌نامه ۱ اندازه میدان مغناطیسی در داخل سیم‌لوله:

$$B = \mu_0 \frac{NI}{\ell} \rightarrow \begin{matrix} \uparrow \\ \text{تعداد حلقه‌های سیم‌لوله} \\ \text{جریان عبوری از سیم‌لوله} \\ \text{طول سیم‌لوله} \end{matrix}$$

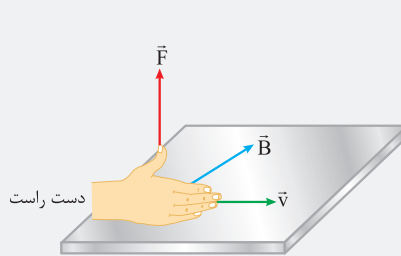
$$L = \mu_0 \frac{N^2 A}{\ell} \rightarrow \begin{matrix} \uparrow \\ \text{تعداد حلقه‌های سیم‌لوله} \\ \text{سطح مقطع سیم‌لوله} \\ \text{طول سیم‌لوله} \end{matrix}$$

$$U = \frac{1}{2} LI^2 \rightarrow \begin{matrix} \uparrow \\ \text{ضریب القاوری سیم‌لوله} \\ \text{جریان عبوری از سیم‌لوله} \end{matrix}$$

درس‌نامه ۱ تعیین جهت نیروی الکتریکی وارد بر ذره باردار در میدان الکتریکی:

علامت بار ذره	جهت نیروی الکتریکی وارد بر ذره
مثبت	هم‌جهت با میدان الکتریکی
منفی	در خلاف جهت میدان الکتریکی

قاعده دست راست برای تعیین جهت نیروی مغناطیسی وارد بر ذره باردار متحرک در میدان مغناطیسی:

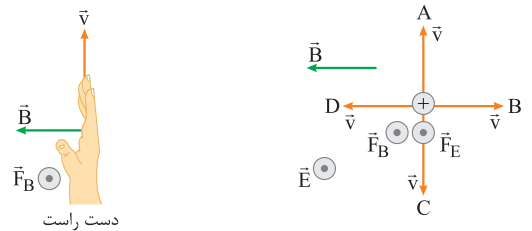


طبق این قاعده، اگر چهار انگشت دست راست را طوری در جهت بردار سرعت ذره ($\vec{v}$) قرار دهیم که بردار میدان مغناطیسی ($\vec{B}$) از کف دست خارج شود، شست دست، جهت نیروی مغناطیسی وارد بر ذره با بار مثبت را نشان می‌دهد. (شکل مقابل را ببینید.)

نکته اگر بار ذره منفی باشد، این قاعده را با دست چپ اجرا می‌کنیم.

علامت بار ذره	جهت نیروی مغناطیسی وارد بر ذره
مثبت	قاعده دست راست
منفی	قاعده دست راست را با دست چپ اجرا می‌کنیم.

بار ذره مثبت است؛ بنابراین نیروی الکتریکی وارد بر آن هم‌جهت با میدان الکتریکی یعنی برون‌سو است. برای این‌که نیروی خالص وارد بر ذره بیشینه شود، باید نیروی مغناطیسی وارد بر ذره، هم‌جهت با نیروی الکتریکی وارد بر آن یعنی برون‌سو باشد. حالا مطابق شکل زیر و به کمک قاعده دست راست، جهت بردار سرعت ذره، در جهت A تعیین می‌شود.



تله چشم‌انتظار شماسه؛ اگر به جای استفاده از دست راستان از دست چپتان استفاده کنید.

۶۷ - گزینه ۴

درس‌نامه ۱ قانون لنز: با تغییر شار مغناطیسی عبوری از یک سیم‌لوله (یا حلقه یا پیچه)، میدان مغناطیسی القایی در داخل سیم‌لوله به وجود می‌آید که جهت آن طبق جدول زیر تعیین می‌شود:

چگونگی تغییر شار مغناطیسی	جهت میدان مغناطیسی القایی
افزایش	در خلاف جهت میدان مغناطیسی اصلی
کاهش	هم‌جهت با میدان مغناطیسی اصلی

قاعده دست راست برای تعیین جهت جریان القایی:

اگر شست دست راست را در جهت میدان مغناطیسی القایی در داخل سیم‌لوله قرار دهیم، جهت خم شدن چهار انگشت، جهت جریان القایی در حلقه‌های سیم‌لوله را نشان می‌دهد (شکل مقابل).

گام ۱ مطابق شکل زیر و به کمک قاعده دست راست، جهت میدان مغناطیسی سیم‌لوله (۱) در داخل سیم‌لوله‌های (۱) و (۲) ($\vec{B}$)، به طرف چپ تعیین می‌شود.

گام ۲ هم هنگام وصل کلید و هم هنگام کاهش مقاومت رثوستا، جریان عبوری از سیم‌لوله (۱) افزایش می‌یابد.



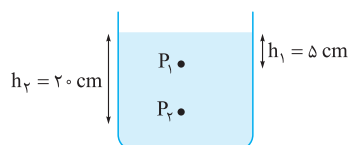
۷۱- گزینه ۳

چگالی مایع فشار هوا

درس نامه فشار در عمق h از سطح آزاد یک مایع:

$$P = P_0 + \rho gh$$

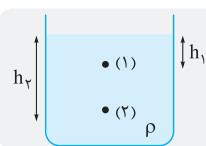
توجه داشته باشید که در تست‌ها، واژه‌های فشار، فشار کل و فشار مطلق معادل یکدیگرند.



روش فشار در عمق ۵ سانتی متری و ۲۰ سانتی متری را می‌دانیم؛ پس با توجه به شکل، دو بار رابطه فشار را برای این دو نقطه می‌نویسیم تا با حل دو معادله - دو مجهول، فشار هوا (P_0) را حساب کنیم:

$$\begin{aligned} P_1 &= P_0 + \rho gh_1 \Rightarrow 100 \times 10^3 = P_0 + \rho \times 100 \times \frac{5}{100} \\ &\quad \times 4 \quad 400 \times 10^3 = 4P_0 + 2\rho \quad (I) \\ P_2 &= P_0 + \rho gh_2 \Rightarrow 106 \times 10^3 = P_0 + \rho \times 100 \times \frac{20}{100} \\ &\quad \times 4 \quad 424 \times 10^3 = 4P_0 + 8\rho \quad (II) \\ (II) - (I) &\Rightarrow (424 - 400) \times 10^3 = 4P_0 - 4P_0 + 8\rho - 2\rho \\ &\quad 24 \times 10^3 = 6\rho \Rightarrow \rho = 4 \times 10^3 \text{ kg/m}^3 \end{aligned}$$

روش



نکته در شکل روبه‌رو، اختلاف فشار بین دو نقطه (۱) و (۲)، از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$P_2 - P_1 = \rho g(h_2 - h_1) \Rightarrow \Delta P = \rho g \Delta h$$

گام به کمک اختلاف فشار بین دو نقطه (۱) و (۲)، چگالی مایع (ρ) را حساب می‌کنیم:

$$\begin{aligned} P_2 - P_1 &= \rho g(h_2 - h_1) \Rightarrow 106 \times 10^3 - 100 \times 10^3 = \rho \times 100 \times (20 - 5) \times 10^{-2} \\ \Rightarrow \rho &= \frac{6 \times 10^3}{1/5} = 4 \times 10^3 \text{ kg/m}^3 \end{aligned}$$

گام حالا با جای‌گذاری مقدار چگالی در رابطه فشار برای یکی از نقاط، فشار هوا را حساب می‌کنیم:

$$\begin{aligned} P_1 &= P_0 + \rho gh_1 \Rightarrow 100 \times 10^3 = P_0 + 4 \times 10^3 \times 100 \times \frac{5}{100} \\ P_0 &= 100 \times 10^3 - 2 \times 10^3 = 98 \times 10^3 \text{ Pa} \xrightarrow{10^3 \text{ Pa} = 1 \text{ kPa}} P_0 = 98 \text{ kPa} \end{aligned}$$

تیزبازی در عمق ۵ cm، فشار ۱۰۰ kPa و در عمق ۲۰ cm، فشار ۱۰۶ kPa است؛ بنابراین به ازای هر ۵ cm افزایش عمق، فشار ۲ kPa زیاد شده است. حالا اگر از عمق ۵ cm به سطح مایع (که فشار توی اون‌ها برابر فشار هواست)، برویم، عمق ۵ cm کاهش و در نتیجه فشار باید ۲ kPa کم شود؛ یعنی فشار هوا برابر با ۹۸ kPa - ۲ = ۹۶ kPa است.

۷۲- گزینه ۴

درس نامه ۱ رابطه بین مقیاس‌های دماهی فارنهایت و سلسیوس: $F = \frac{9}{5}\theta + 32$

دمای ثانویه جرم جسم

۲ گرمای لازم برای تغییر دما:

$$Q = mc(\theta_f - \theta_i)$$

دمای اولیه گرمای ویژه جسم

گرمای نهان ذوب جسم

$$Q = mL_F$$

جرم جسم

۳ گرمای لازم برای تغییر حالت از جامد به مایع:

گام باید ببینیم ۵۰ درجه فارنهایت، چند درجه سلسیوس است:

$$F = \frac{9}{5}\theta + 32 \Rightarrow 50 = \frac{9}{5}\theta + 32 \Rightarrow \frac{9}{5}\theta = 18 \Rightarrow \theta = \frac{5}{9} \times 18 = 10^\circ \text{C}$$

گام نسبت ضریب القاوری دو سیم‌لوله را به دست می‌آوریم:

$$L \propto \frac{N^2 A}{\ell} \Rightarrow \frac{L_A}{L_B} = \left(\frac{N_A}{N_B}\right)^2 \left(\frac{A_A}{A_B}\right) \left(\frac{\ell_B}{\ell_A}\right) = \left(\frac{2}{1}\right)^2 \times (1)^2 \times \left(\frac{1}{2}\right) = 2$$

گام نسبت انرژی ذخیره‌شده در سیم‌لوله A به انرژی ذخیره‌شده در سیم‌لوله B برابر است با:

$$U \propto LI^2 \Rightarrow \frac{U_A}{U_B} = \frac{L_A}{L_B} \times \left(\frac{I_A}{I_B}\right)^2 = 2 \times 1^2 = 2$$

گام نسبت اندازه میدان مغناطیسی در داخل سیم‌لوله A به اندازه میدان مغناطیسی در داخل سیم‌لوله B به صورت زیر به دست می‌آید:

$$B \propto \frac{NI}{\ell} \Rightarrow \frac{B_A}{B_B} = \frac{N_A}{N_B} \times \frac{I_A}{I_B} \times \frac{\ell_B}{\ell_A} = 2 \times 1 \times \frac{1}{2} = 1$$

۶۹- گزینه ۴

درس نامه ۱ انرژی جنبشی جسمی به جرم m و تندی v، از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$K = \frac{1}{2}mv^2$$

۲ کار نیروی وزن جسم برابر با منفی تغییر انرژی پتانسیل گرانشی جسم است:

$$W_{mg} = -\Delta U = -mg\Delta h$$

در رابطه بالا اگر جسم از سطح زمین دور شود، $\Delta h > 0$ و اگر جسم به سطح زمین نزدیک شود، $\Delta h < 0$ است.

۳ انرژی مکانیکی جسم برابر با مجموع انرژی جنبشی و انرژی پتانسیل جسم است:

$$E = K + U \Rightarrow \Delta E = \Delta K + \Delta U$$

گام کار نیروی وزن برابر است با:

$$W_{mg} = -mg\Delta h = -60 \times 10^3 \times 600 \times 10^{-3} = -3.6 \times 10^4 \text{ J}$$

گام تغییرات انرژی مکانیکی به صورت زیر به دست می‌آید:

$$\Delta E = \Delta K + \Delta U = \frac{1}{2}m(v_f^2 - v_i^2) + \Delta U \xrightarrow{\Delta U = -W_{mg} = 3.6 \times 10^4 \text{ J}}$$

$$\begin{aligned} \Delta E &= \frac{1}{2} \times 60 \times 10^3 \times ((2 \times 10^2)^2 - 10^2) + 3.6 \times 10^4 \\ &= 3 \times 10^4 \times 3 \times 10^2 + 3.6 \times 10^4 = 9.36 \times 10^4 \text{ J} \end{aligned}$$

تیزبازی چون ارتفاع هواپیما از سطح زمین زیاد شده است، کار نیروی وزن منفی است (رد ۱ و ۳). با نگاهی به ۲ و ۴ می‌فهمیم که $W_{mg} = -3.6 \times 10^4 \text{ J}$ و در نتیجه $\Delta U = 3.6 \times 10^4 \text{ J}$ است.

از طرفی انرژی جنبشی هواپیما نیز افزایش یافته است ($\Delta K > 0$)؛ بنابراین تغییر انرژی مکانیکی حتماً از ΔU بیشتر است، چون:

$$\Delta E = \Delta K + \Delta U \xrightarrow[\Delta K > 0]{\Delta U = 3.6 \times 10^4 \text{ J}} \Delta E > 3.6 \times 10^4 \text{ J} \quad (\text{رد } 2)$$

۷۰- گزینه ۱

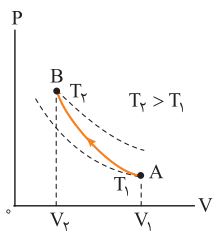
درس نامه به اختلاف فشار مطلق گاز درون مخزن و فشار هوای محیط، فشار پیمانه‌ای گفته می‌شود.

در شکل مقابل برای به دست آوردن فشار پیمانه‌ای گاز موجود در مانومتر، از هم‌فشاری نقاط هم‌تراز A و B کمک می‌گیریم:

$$P_A = P_B \Rightarrow P = P_0 + \rho gh \Rightarrow \underbrace{P - P_0}_{P_g} = \rho gh \quad (P_g \text{ فشار پیمانه‌ای})$$

به کمک هم‌فشاری نقاط هم‌تراز A و B در شکل زیر، فشار پیمانه‌ای گاز (P_g) را حساب می‌کنیم:

$$\begin{aligned} P_A &= P_B \\ \Rightarrow P_g + \rho_1 gh_1 &= \rho_2 gh_2 + P_0 \\ \Rightarrow P_g - P_0 &= \rho_2 gh_2 - \rho_1 gh_1 \\ \Rightarrow P_g - P_0 &= 1000 \times 10 \times 0.9 - 1200 \times 10 \times 0.5 \\ &= 3000 \text{ Pa} \end{aligned}$$



عبارت‌ها را به ترتیب بررسی می‌کنیم:
(الف)، (ب) و (پ):

روش ۱) مطابق شکل روبه‌رو، نمودار فرایند بی‌دررو AB بین دو نمودار هم‌دمای T_1 و T_2 قرار دارد. از روی نمودار مشخص است که $T_2 > T_1$ و بنابراین در فرایند AB، دما و در نتیجه انرژی درونی گاز افزایش می‌یابد.

ΔT	ΔU	W	ΔV
-	-	-	+
+	+	+	-

نکته ۱) در فرایند بی‌دررو، با توجه به مختلف‌العلامت بودن ΔV و W، رابطه $\Delta U = W$ و تناسب $\Delta U \propto \Delta T$ ، می‌توانیم جدول مقابل را بنویسیم:

در فرایند AB حجم گاز کاهش یافته است؛ یعنی $\Delta V < 0$ است، بنابراین با توجه به جدولی که در نکته بالا گفتیم: (دما و انرژی درونی گاز افزایش می‌یابد) $\Delta T > 0$ و $\Delta U > 0 \Rightarrow \Delta V < 0$ پس (الف) درست و (ب) و (پ) نادرست است.

(ت) و (ث): در فرایند بی‌دررو مبادله گرما نداریم ($Q = 0$)؛ بنابراین کار انجام‌شده روی گاز، برابر با تغییر انرژی درونی گاز است:
پس (ت) نادرست و (ث) درست است.

گزینه ۳ - ۷۵

درس‌نامه ۱) انرژی درونی مقدار معینی گاز کامل متناسب با حاصل‌ضرب فشار در حجم گاز است:

۲) فشار پیمانه‌ای گاز: اختلاف فشار (مطلق) گاز و فشار هوا. به زبان ریاضی: $P_g = P - P_0$

گام ۱) ابتدا باید دید که اگر فشار پیمانه‌ای گاز، ۲ برابر شود؛ فشار (مطلق) گاز چند پاسکال می‌شود:

$$P'_g = 2P_g = 2 \times 5 \times 10^4 = 10^5 \text{ Pa}$$

$$\begin{cases} P'_g = P' - P_0 \Rightarrow P' = P'_g + P_0 = 10^5 + 10^5 = 2 \times 10^5 \text{ Pa} \\ P_g = P - P_0 \Rightarrow P = P_g + P_0 = 5 \times 10^4 + 10^5 = 1.5 \times 10^5 \text{ Pa} \end{cases}$$

گام ۲) انرژی درونی گاز متناسب با PV است؛ یعنی:

$$\frac{U'}{U} = \frac{P'V'}{PV} \Rightarrow \frac{U'}{U} = \frac{2 \times 10^5 \times 2V}{1.5 \times 10^5 \times V} \Rightarrow \frac{U'}{U} = \frac{4}{3} \Rightarrow U' = \frac{4}{3} \times 6000 = 8000 \text{ J}$$

تیزبازی ۱) طبق رابطه $P = P_g + P_0$ ، ۲ برابر شدن فشار پیمانه‌ای گاز، فشار گاز افزایش می‌یابد، ولی به ۲ برابر مقدار اولیه نمی‌رسد. (آنگاه P_0 هم ۲ برابر می‌شود، فشار گاز ۲ برابر می‌شود، حال که P_0 تغییر نکرده، فشار گاز زیاد می‌شود ولی ۲ برابر نمی‌شود!)

از طرفی حجم گاز ۲ برابر می‌شود؛ بنابراین طبق تناسب $U \propto PV$ ، انرژی درونی بیشتر از ۲ برابر و کم‌تر از ۴ برابر می‌شود؛ یعنی:

$$2U < U' < 4U \xrightarrow{U=6000 \text{ J}} 12000 \text{ J} < U' < 24000 \text{ J}$$

فقط ۳) این شرایط را دارد.

تله ۱) اگر فشار پیمانه‌ای گاز را با فشار گاز اشتباه بگیرید، به این نتیجه می‌رسید که انرژی درونی ۴ برابر می‌شود و گزینه نادرست ۴) را انتخاب می‌کنید.

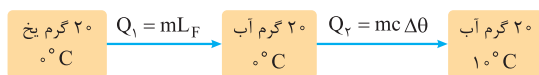
شیمی

گزینه ۲ - ۷۶

شفاف‌سازی ۱) $^{15}_8\text{O}$ ، $^{35}_{15}\text{X}$ و $^{21}_{11}\text{E}$ به ترتیب همان عنصرهای $^{15}_8\text{P}$ ، $^{35}_{17}\text{Br}$ و $^{21}_{11}\text{Sc}$ هستند.

استراتژی ۱) اول باید خیلی سریع عنصرهای A، M، E و X را از روی عدد اتمی اون‌ها شناسایی کنی و فرمول شیمیایی ترکیب‌های داده‌شده در گزینه‌ها رو با نماد شیمیایی اصلی اتم‌های آن‌ها بنویسی. حالا از اون‌جا که سؤال از ما گزینه‌ای رو خواسته که فرمول دو ترکیب داده‌شده در اون نادرست باشه، خیلی راحت و بدون این‌که ذهنت رو درگیر فرمول‌های ناشناخته کنی، با پیدا کردن یک فرمول صحیح آشنا در هر گزینه، اون رو رد کن و جواب تست رو پیدا کن.

گام ۱) طرحواره گرمایی تبدیلی یخ 0°C به آب 10°C را مطابق شکل رسم می‌کنیم و با توجه به آن، گرمای لازم برای این فرایند را حساب می‌کنیم:



$$Q = Q_1 + Q_2 = mL_F + mc\Delta\theta = m(L_F + c\Delta\theta)$$

$$= 20(336 + 4/2 \times 10) \Rightarrow Q = 7560 \text{ J}$$

دقت کنید که در این تست چون جرم برحسب گرم و آب c و L_F برحسب $\frac{\text{J}}{\text{g} \cdot ^\circ\text{C}}$ و $\frac{\text{J}}{\text{g}}$ بودند، نیازی به تبدیل واحد نداشتیم.

تله ۱) همیشه دقت کنید که داده‌ها و خواسته تست برحسب چه یکایی است. در این تست اگر دمای نهایی آب را به جای 50°F ، 50°C در نظر بگیرید، به ۱) می‌رسید که نادرست است.

گزینه ۲ - ۷۳

درس‌نامه ۱) قانون گازهای کامل:

$$PV = nRT$$

تعداد مول گاز
فشار گاز برحسب پاسکال (Pa)
دمای گاز برحسب کلوین (K)
حجم گاز برحسب مترمکعب (m^3)

$$R \approx 8 \frac{\text{J}}{\text{mol} \cdot \text{K}}$$

ثابت عمومی گازها

♦ در این رابطه، P فشار مطلق گاز است. (نه فشار پیمانه‌ای)
♦ در این رابطه، T حتماً باید برحسب کلوین باشد. (نه سلسیوس و نه فارنهایت)

♦ شکل نسبتی این رابطه برای دو گاز به صورت روبه‌رو است:

$$\frac{P_1 V_1}{n_1 T_1} = \frac{P_2 V_2}{n_2 T_2}$$

رابطه بین مقیاس‌های دمایی کلوین و سلسیوس:

$$T = 273 + \theta$$

گام ۱) در حالت اول، حجم دو گاز برابر است. به کمک شکل نسبتی قانون گازهای کامل، نسبت تعداد مول‌های دو گاز را به دست می‌آوریم:

$$\frac{P_1 V_1}{n_1 T_1} = \frac{P_2 V_2}{n_2 T_2} \xrightarrow{V_1=V_2} \frac{2}{n_1 \times (273 + 27)} = \frac{5}{n_2 \times (273 + 227)}$$

$$\Rightarrow \frac{2}{n_1 \times 300} = \frac{5}{n_2 \times 500} \Rightarrow \frac{n_1}{n_2} = \frac{2}{3}$$

گام ۲) در حالت دوم، پس از رسیدن به حالت تعادل، دو گاز، هم‌دمای و هم‌فشار می‌شوند؛ بنابراین با توجه به شکل زیر:

$$\frac{P'_1 V'_1}{n_1 T'_1} = \frac{P'_2 V'_2}{n_2 T'_2} \xrightarrow{T'_1=T'_2} \frac{P'_1}{T'_1} = \frac{P'_2}{T'_2} \Rightarrow \frac{P'_1}{P'_2} = 1$$

$$\xrightarrow{V=Ah} \frac{Ah'_1}{n_1} = \frac{Ah'_2}{n_2}$$

$$\Rightarrow \frac{h'_1}{h'_2} = \frac{n_1}{n_2} = \frac{2}{3}$$

$$h'_2 + h'_1 = 40 \text{ cm} \Rightarrow h'_2 + \frac{2}{3}h'_2 = 40 \Rightarrow h'_2 = \frac{40}{5/3} = 24 \text{ cm}$$

پیستون ۴ cm - ۲۰ = ۲۴ جا به جا می‌شود.

گزینه ۱ - ۷۴

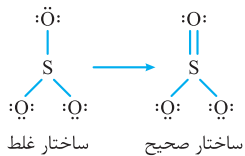
درس‌نامه ۱) در فرایند بی‌دررو:

(الف) گرمای مبادله‌شده برابر صفر است: $Q = 0$
(ب) تغییر انرژی درونی گاز برابر با کاری است که محیط روی گاز انجام می‌دهد: $\Delta U = W$
(پ) مطابق شکل روبه‌رو نمودار P-V این فرایند بین دو نمودار هم‌دمای قرار دارد.

۲) انرژی درونی مقدار معینی گاز کامل متناسب با دمای مطلق گاز است:

$$U \propto T$$

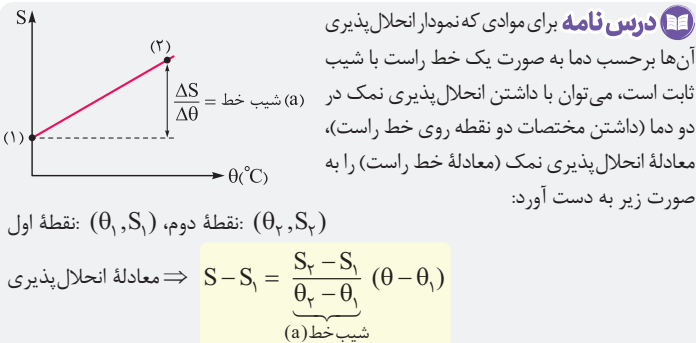
۲۵



(پ) اتم گوگرد در ساختار رسم شده، ۸ تایی نشده است!

۸۳- گزینه ۲

شفاف سازی وقتی سؤال می‌گه نسبت انحلال پذیری نمک A به نمک B در دمای °C برابر ۱ است، یعنی انحلال پذیری دو نمک در این دما، با هم برابر است.



گام ۱ ابتدا انحلال پذیری نمک A در دماهای °C و °C ۴۰ را حساب می‌کنیم:

$$S_A = 0.97\theta + 35 \Rightarrow \begin{cases} \theta = 0^\circ\text{C} \Rightarrow S = 35 \\ \theta = 40^\circ\text{C} \Rightarrow S = (0.97 \times 40) + 35 = 73.8 \end{cases}$$

گام ۲ حالا با توجه به نسبت انحلال پذیری نمک A به B که در سؤال داده شده، انحلال پذیری نمک B را در دو دمای گفته شده به دست آورده و معادله انحلال پذیری نمک B رو می‌نویسیم:

انحلال پذیری نمک B در دماهای °C و °C ۴۰ به ترتیب برابر با ۳۵ و ۳۰ (۳۰ = $\frac{73.8}{2}$) است؛ بنابراین معادله انحلال پذیری نمک B این‌طور است:

$$S - S_1 = \frac{S_2 - S_1}{\theta_2 - \theta_1} (\theta - \theta_1) \Rightarrow S - 35 = \frac{30 - 35}{40 - 0} (\theta - 0) \Rightarrow S_B = \frac{-1}{8}\theta + 35$$

گام ۳ با توجه به برابری حجم محلول هر دو نمک، نسبت غلظت مولار محلول سیر شده آن‌ها در دمای °C ۵۰، برابر با نسبت تعداد مول آن‌ها است:

$$S_A(\theta = 50^\circ\text{C}) = (0.97 \times 50) + 35 = 83.5 \text{ g}$$

$$\Rightarrow \text{تعداد مول A} = \frac{\text{جرم نمک A}}{\text{جرم مولی نمک A}} = \frac{83.5}{330}$$

$$S_B(\theta = 50^\circ\text{C}) = \left(\frac{-1}{8} \times 50\right) + 35 = 28.75$$

$$\Rightarrow \text{تعداد مول B} = \frac{\text{جرم نمک B}}{\text{جرم مولی نمک B}} = \frac{28.75}{110}$$

$$\frac{B}{A} = \frac{\text{غلظت مولار محلول سیر شده B}}{\text{غلظت مولار محلول سیر شده A}} = \frac{\text{تعداد مول B}}{\text{تعداد مول A}} = \frac{28.75}{83.5} = \frac{3 \times 28.75}{83.5}$$

تکنیک محاسباتی: برای از بین بردن اعشار در مخرج، کسر را در $\frac{2}{2}$ ضرب می‌کنیم:

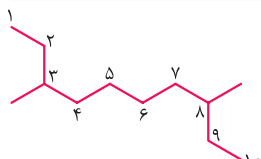
$$\frac{3 \times 28.75}{83.5} \times \frac{2}{2} = \frac{3 \times 57.5}{167} = \frac{172.5}{167} \xrightarrow{\text{با توجه به گزینه‌ها}} \frac{172.5}{167} > 1 \Rightarrow \text{گزینه ۲}$$

۸۴- گزینه ۲

عبارت‌های (پ) و (ت) درست‌اند.

نکته در نام‌گذاری آلکان‌های شاخه‌دار، زنجیری که بیشترین تعداد اتم‌های کربن را دارد، به عنوان زنجیر اصلی انتخاب می‌کنیم.

(آ) نام ترکیب داده شده، ۳، ۸ - دی‌متیل دکان است.



مشاوره تفاوت مقادیر داده شده در گزینه‌ها کم بوده و اعداد به هم نزدیک‌اند؛ بنابراین در این مورد و موارد مشابه اصلاً ریسک نکنید و محاسباتون رو با خیال راحت و بدون زدن کردن اعداد و اعمال تقریب، انجام بدید. مثلاً این‌جا اگر عدد ۱۱ رو به تقریب ۱۰ در نظر بگیرید، باید گزینه کم‌تر از ۶۷/۲ رو انتخاب کنید، که ۱، ۲ و ۳ رو شامل می‌شه و نمی‌شه بینشون قطعی انتخاب کرد.

$$\frac{32 \times 21}{11} = \frac{(32 \times 20) + (32 \times 1)}{10} = \frac{640 + 32}{10} = \frac{672}{10} \Rightarrow 67.2 \Rightarrow \text{گزینه ۳ یا ۲}$$

۸۱- گزینه ۱

استراتژی جرم نمونه ناخالص اولیه رو ۱۰۰ گرم فرض کن و حساب کن که با اضافه شدن چند گرم آب به ۱۰ گرم آب اولیه، درصد جرمی اون به ۲۰ درصد می‌رسه. دقت کن که با جذب رطوبت، هم جرم آب موجود در نمک افزایش پیدا می‌کنه و هم جرم کل نمونه. حالا با داشتن جرم آب اضافه شده، می‌تونی جرم کل نمونه جدید و در نتیجه درصد جرمی نهایی Na_2SO_4 رو به راحتی حساب کنی. قسمت دوم سؤال هم که مسئله استوکیومتری درصد خلوص! باید حساب کنی با مصرف ۳۵/۵ گرم Na_2SO_4 با خلوص ۸۸٪ در واکنش، چند گرم $\text{BaSO}_4(s)$ تشکیل می‌شه.

برای قسمت اول سؤال، جرم نمونه ناخالص را ۱۰۰ گرم در نظر می‌گیریم؛ در نتیجه این نمونه شامل ۱۰ گرم آب خواهد بود. اگر جرم رطوبت یا آب جذب شده را X گرم در نظر بگیریم، خواهیم داشت:

$$\frac{\text{جرم آب}}{\text{جرم کل نمونه}} \times 100 \Rightarrow \frac{1}{100+X} \times 100 = \frac{10+X}{100+X} \times 100$$

$$\Rightarrow 100 + X = 50 + 5X \Rightarrow 50 = 4X \Rightarrow X = 12.5 \text{ g}$$

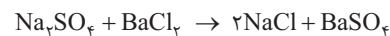
فب! در نمونه نهایی، ۸۸ گرم نمک Na_2SO_4 در ۱۱۲/۵ گرم مخلوط وجود دارد:

$$\text{درصد نهایی } \text{Na}_2\text{SO}_4 = \frac{88}{112.5} \times 100 = \frac{70.4}{9}$$

$$\frac{70.4}{9} \Rightarrow \text{گزینه ۱ یا ۳} \rightarrow \text{گزینه ۱ بزرگ‌تر از ۷۸ است. با توجه به گزینه‌ها } 78 \times 9 = 702$$

تذکره: با توجه به نزدیکی اعداد در گزینه‌ها، این‌جا مجاز به زدن کردن اعداد و استفاده از تقریب نیستیم و باید محاسبات رو کامل انجام بدیم!

بریم سراغ قسمت دوم؛ با توجه به معادله واکنش داریم:



روش استفاده از کسر تناسب:

$$\frac{\text{درصد خلوص} \times \text{جرم ناخالص}}{100} = \frac{\text{جرم}}{\text{جرم مولی} \times \text{ضریب}} \Rightarrow \frac{35.5 \times \frac{88}{100}}{1 \times 142} = \frac{x}{1 \times 233}$$

$$\frac{35.5 \times 88}{100} = \frac{x}{233} \Rightarrow x = \frac{35.5 \times 88}{100} \times \frac{233}{142}$$

$$\Rightarrow x = \frac{(20 \times 233) + (2 \times 233)}{100} = \frac{4660 + 466}{100} = 51.26 \text{ g BaSO}_4$$

روش استفاده از کسر تبدیل:

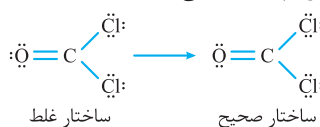
$$35.5 \text{ g Na}_2\text{SO}_4 \times \frac{88}{100} \times \frac{1 \text{ mol Na}_2\text{SO}_4}{142 \text{ g Na}_2\text{SO}_4} \times \frac{1 \text{ mol BaSO}_4}{1 \text{ mol Na}_2\text{SO}_4} \times \frac{233 \text{ g BaSO}_4}{1 \text{ mol BaSO}_4} = 51.26 \text{ g BaSO}_4$$

$$\times \frac{233 \text{ g BaSO}_4}{1 \text{ mol BaSO}_4} = 51.26 \text{ g BaSO}_4$$

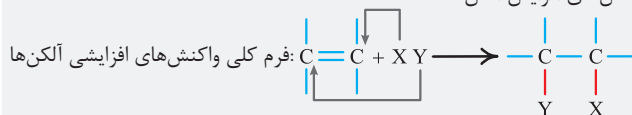
۸۲- گزینه ۳

ساختارهای (آ) و (ت) درست‌اند.

بررسی موارد نادرست: (ب) اتم اکسیژن در ساختار رسم شده، ۱۰ تایی شده است!



♦ هیدروکربن‌های سیرنشده به دلیل داشتن پیوندهای دوگانه یا سه‌گانه کربن - کربن واکنش‌پذیری بیشتری از آلکان‌ها دارند و در واکنش‌های شیمیایی گوناگون شرکت می‌کنند. مثال: واکنش‌های افزایش آلکن‌ها

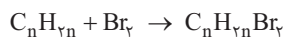


در این واکنش‌ها، ماده XY به اتم‌های کربن پیوند دوگانه اضافه شده و فراورده سیرشده‌ای تولید می‌کند (پیوند دوگانه «C=C» به پیوند یگانه «C-C» تبدیل می‌شود).

عبارت‌های دوم، سوم و چهارم درست‌اند.

♦ گاز متان که واکنش‌پذیری ناچیزی دارد! گاز اتن سنگ بنای صنایع پتروشیمی است.

♦ هر مول آلکن با ۱ مول برم (Br_۲) به طور کامل واکنش می‌دهد:



$$\frac{1 \text{ mol Br}_2}{1 \text{ mol آلکن}} \times \frac{160 \text{ g Br}_2}{1 \text{ mol Br}_2} = 40 \text{ g Br}_2$$

♦ در آلکن‌ها (C=C) دو اتم کربنی که در پیوند دوگانه شرکت دارند، هر کدام به سه اتم دیگر متصل‌اند.

♦ دومین عضو خانواده آلکان‌ها، C_۲H_۶ و دومین عضو خانواده آلکین‌ها، C_۲H_۲ است.

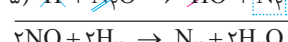
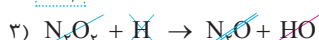
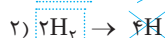
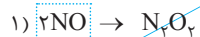
$$\frac{\text{جرم مولی C}_2\text{H}_6}{\text{جرم مولی C}_2\text{H}_2} = \frac{30}{26} = 1.15$$

بچه‌ها حواستون باشه که n^{امین} عضو خانواده آلکین‌ها، n+۱ اتم کربن دارد (مثلاً دومین عضو این خانواده، ۳ اتم کربن دارد).



۸۷- گزینه ۴

♦ **گام ۱** ابتدا باید معادله واکنش کلی را از جمع واکنش‌های (۱) تا (۵) به دست آوریم:

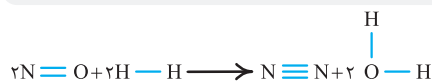


♦ **گام ۲** حالا با استفاده از آنتالپی‌های پیوند، آنتالپی واکنش کلی را به دست می‌آوریم:

♦ **نکته** برای تعیین آنتالپی واکنش‌های گازی با استفاده از آنتالپی پیوندها، از فرمول زیر استفاده می‌کنیم:

$$\Delta H_{\text{واکنش}} = \left[\text{مجموع آنتالپی پیوندها} \right] - \left[\text{مجموع آنتالپی پیوندها} \right]$$

در مواد فراورده در مواد واکنش‌دهنده



$$\Delta H = [2\Delta H(\text{N} \equiv \text{O}) + 2\Delta H(\text{H} - \text{H})] - [4\Delta H(\text{O} - \text{H}) + \Delta H(\text{N} \equiv \text{N})]$$

$$= [(2 \times 607) + (2 \times 436)] - [(4 \times 463) + 944] = 2086 - 2796 = -710 \text{ kJ}$$



۸۸- گزینه ۲

درس‌نامه

در یک گروه از بالا به پایین

شعاع اتمی عنصرها افزایش می‌یابد.

خصلت فلزی و واکنش‌پذیری فلزها افزایش می‌یابد.

خصلت نافلزی و واکنش‌پذیری نافلزها کاهش می‌یابد.

در یک دوره از چپ به راست

شعاع اتمی عنصرها کاهش می‌یابد.

خصلت فلزی و واکنش‌پذیری فلزها کاهش می‌یابد.

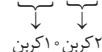
خصلت نافلزی و واکنش‌پذیری نافلزها افزایش می‌یابد.

(ب)

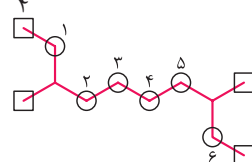
♦ **نکته** فرمول عمومی آلکان‌ها، C_nH_{۲n+۲} و فرمول عمومی آلکین‌ها، C_nH_{۲n-۲} است. آلکان داده‌شده، یک آلکان ۱۲ کربنی است؛ در نتیجه فرمول آن C_{۱۲}H_{۲۶} می‌باشد. فرمول مولکولی پروپین (آلکین ۳ کربنی) C_۳H_۴ است:

$$\frac{\text{جرم مولی C}_{12}\text{H}_{26}}{\text{جرم مولی C}_3\text{H}_4} = \frac{(12 \times 12) + (26 \times 1)}{(3 \times 12) + (4 \times 1)} = \frac{170}{40} = 4.25$$

(پ) ۳ - اتیل دکان هم مانند ترکیب داده‌شده، یک آلکان ۱۲ کربنی است.



(ت) گروه‌های CH_۳ - سر زنجیر اصلی و سر شاخه‌های فرعی هیدروکربنی هستند، ولی گروه‌های -CH_۲ - در میانه زنجیر اصلی قرار دارند. در ترکیب داده‌شده، ۶ گروه CH_۳ و ۴ گروه CH_۲ وجود دارد:



۶ گروه CH_۳

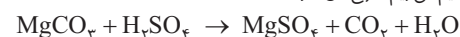
۴ گروه CH_۲

♦ **تیزبازی** خیلی سریع می‌تونی عبارت (آ) رو رد کنی چون در نام‌گذاری آلکان‌ها، شاخه ۲- اتیل نداریم. با مشخص شدن نادرستی عبارت (آ)، ① و ③ پر. بین ② و ④، فقط با بررسی عبارت (ب) می‌تونی گزینه صحیح رو پیدا کنی، بدون این که بخوای عبارت‌های (پ) و (ت) رو بررسی کنی.



۸۵- گزینه ۱

♦ **استراتژی** قسمت اول سؤال، جرم H_۲SO_۴ را در ۱۰۰ میلی‌لیتر محلول آن و قسمت دوم، غلظت مولار اسید را می‌خواهد. خب برای قسمت اول، باید غلظت مولار اسید رو داشته باشی تا مول و بعدش جرم اسید رو بتونی به دست بیاری؛ پس ابتدا به کمک استوکیومتری واکنش، از جرم MgCO_۳ استفاده کن و مول H_۲SO_۴ مصرفی و غلظت مولی محلول اون رو حساب کن، سپس برای قسمت اول سؤال، خیلی راحت با داشتن غلظت مولی و حجم محلول، خواسته سؤال رو به دست بیار. فوشیفاته معادله موازنه است و مستقیم می‌ریم سراغ حل سؤال:



ابتدا قسمت دوم سؤال:

♦ **روش** استفاده از کسر تناسب:

$$\frac{\text{جرم}}{\text{جرم مولی} \times \text{ضریب}} = \frac{\text{حجم (L)} \times \text{غلظت مولی}}{\text{ضریب}} \Rightarrow \frac{21 \times 10^{-3} \times 100}{1 \times 84} = \frac{x \times 10^{-3} \times 100}{1}$$

$$\Rightarrow x = \frac{21}{84} = 0.25 \text{ mol.L}^{-1}$$

♦ **روش** استفاده از کسر تبدیل:

$$210 \times 10^{-3} \text{ g MgCO}_3 \times \frac{1 \text{ mol MgCO}_3}{84 \text{ g MgCO}_3} \times \frac{1 \text{ mol H}_2\text{SO}_4}{1 \text{ mol MgCO}_3} = 2.5 \times 10^{-3} \text{ mol H}_2\text{SO}_4$$

$$\text{غلظت مولی} = \frac{2.5 \times 10^{-3} \text{ mol}}{10^{-3} \text{ L}} = 2.5 \text{ mol.L}^{-1}$$

و اما قسمت اول سؤال:

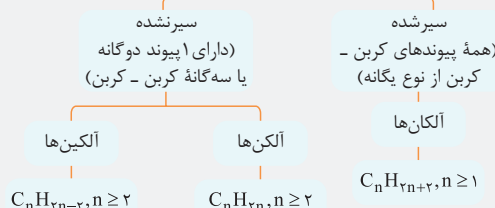
$$\frac{100}{1000} \text{ L محلول} \times \frac{0.25 \text{ mol H}_2\text{SO}_4}{1 \text{ L محلول}} \times \frac{98 \text{ g H}_2\text{SO}_4}{1 \text{ mol H}_2\text{SO}_4} = 2.45 \text{ g H}_2\text{SO}_4$$

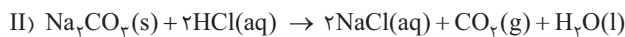


۸۶- گزینه ۳

درس‌نامه

هیدروکربن‌های زنجیری





♦ از سوختن یک مول اتانول، ۲ مول گاز CO_2 تولید می‌شود: $2 \times 22/4 = 44/8 \text{ L}$

★ **نکته** در حل مسائل بازده درصدی به کمک کسر تناسب، باید این کمیت را به شکل «بازده درصدی» حتماً در صورت کسر مربوط به واکنش‌دهنده ضرب کنیم:

♦ برای واکنش دوم داریم:

$$\frac{\text{بازده درصدی} \times \text{جرم مولی} \times \text{ضریب}}{100} = \frac{\text{جرم مولی} \times \text{ضریب}}{100} \Rightarrow \frac{7/5 \times \frac{x}{100}}{1 \times 18} = \frac{60/75}{1 \times 18}$$

$$x = \frac{100 \times 60/75}{7/5 \times 9} = \frac{60 \times 75}{7 \times 9} = 90$$

♦ جرم $\text{C}_2\text{H}_5\text{OH}$ و Na_2CO_3 (واکنش‌دهنده‌های کربن‌دار) در دو واکنش را m گرم

در نظر می‌گیریم:

$$\frac{\text{جرم مولی} \times \text{ضریب}}{\text{جرم مولی} \times \text{ضریب}} = \frac{\text{جرم مولی} \times \text{ضریب}}{\text{جرم مولی} \times \text{ضریب}} \Rightarrow \frac{1 \times 18}{1 \times 18} = \frac{x}{y} \Rightarrow \frac{x}{y} = \frac{18}{y}$$

$$\frac{1 \times 18}{1 \times 18} = \frac{y}{1 \times 18} \Rightarrow \frac{y}{18} = \frac{18}{18} \Rightarrow y = 18$$

★ **نکته** در حل مسائل درصد خلوص به کمک کسر تناسب، باید این کمیت را به شکل «درصد خلوص» در کسر مربوط به ماده مورد نظر ضرب کنیم.

♦ برای واکنش دوم داریم:

$$\frac{\text{درصد خلوص} \times \text{جرم مولی} \times \text{ضریب}}{100} = \frac{\text{جرم مولی} \times \text{ضریب}}{100} \Rightarrow \frac{100 \times \frac{x}{100}}{1 \times 18} = \frac{1/5}{2 \times 18}$$

$$\Rightarrow x = \frac{1/5 \times 18}{1} = 3.6$$

🗨 **مشاوره** این سؤال چندموردی که همه موارد آن نیاز به محاسبات استوکیومتری دارد، بسیار وقت‌گیر است. حتماً سر جلسه کنکور، این سؤال و سؤال‌های مشابه وقت‌گیر رو توی دور اول، حل کن و پندار برای دور آخر، آگه زمان داشتی.

۹۱- گزینه ۱

🔍 **استراتژی** اول به کمک سرعت مصرف KClO_3 و مقدار مول مصرفی اون، زمان لازم برای مصرف کامل این ماده رو به دست بیار. بعد به کمک معادله موازنه‌شده واکنش ببین به ازای مصرف ۱ مول KClO_3 چند مول O_2 تولید می‌شه. با داشتن مول O_2 تولیدی و حجم ظرف، غلظت نهایی O_2 رو به دست بیار و ببین تو کدوم نمودار، غلظت پایانی O_2 برابر این مقدار شده.

برای قسمت اول سؤال، باید ببینیم چند ثانیه طول می‌کشد تا ۱ مول KClO_3 به طور کامل تجزیه شود:

$$1 \text{ mol KClO}_3 \times \frac{1 \text{ s}}{1 \text{ mol KClO}_3} = 1 \text{ s}$$

تا این‌جا (۳) و (۴) پرا! برای قسمت دوم سؤال، با توجه به معادله واکنش، به ازای مصرف ۱ مول KClO_3 ، $\frac{1}{5}$ مول O_2 تولید می‌شود:

$$1 \text{ mol KClO}_3 \times \frac{3 \text{ mol O}_2}{2 \text{ mol KClO}_3} = 1/5 \text{ mol O}_2$$

با توجه به این که حجم ظرف ۵ لیتر است، غلظت O_2 پس از ۱۰ ثانیه برابر با $\frac{1/5}{5} = 0.02$ مول بر لیتر خواهد بود؛ یعنی ① و تمام!

۹۲- گزینه ۳

عبارت‌های (ب) و (پ) درست‌اند.

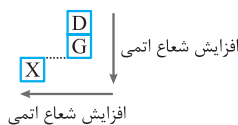
عبارت‌های اول و سوم درست‌اند. ببینید همه عبارت‌ها را بررسی کنیم:

♦ در یک گروه از بالا به پایین، خصلت فلزی افزایش و در یک دوره، از چپ به راست، خصلت فلزی کاهش می‌یابد.



♦ D و G هر دو نافلزند. در نافلزها با افزایش شعاع اتمی، خصلت نافلزی و تمایل به گرفتن الکترون کاهش می‌یابد.

♦ با توجه به روند تغییر شعاع اتمی در جدول دوره‌ای، شعاع اتمی X از شعاع اتمی هر دو عنصر D و G بزرگ‌تر است.



♦ در یک دوره از چپ به راست، شعاع اتمی کاهش می‌یابد؛ یعنی شعاع اتمی Z از شعاع اتمی X کوچک‌تر است و همین بس برای تارستی این عبارت!

۸۹- گزینه ۱

$$Q = mc\Delta\theta \Rightarrow 24/6 \times 1000 = 0.5 \times 1000 \times c \times (39 - 19)$$

$$\Rightarrow c = \frac{24/6}{0.5 \times 20} = \frac{24/6}{10} = 2/46 \text{ J.g}^{-1} \cdot \text{C}^{-1}$$

🗨 **گام ۳** معادله موازنه‌شده تبدیل O_2 به O_3 به صورت زیر است:



🗨 **روش ۱** استفاده از کسر تناسب:

$$\frac{\text{جرم مولی} \times \text{ضریب}}{\text{O}_2} = \frac{Q}{|\Delta H|} \Rightarrow \frac{x}{3 \times 32} = \frac{24/6}{295} \Rightarrow x = \frac{3 \times 32 \times 24/6}{295}$$

$$\frac{24/6}{295} = \frac{100}{4} \Rightarrow \frac{3 \times 32 \times 100}{295} = \frac{300 \times 8}{295} \Rightarrow \frac{300}{295} = 1 \Rightarrow 8 \text{ g O}_2$$

تکنیک محاسباتی: در ابتدای محاسبات عدد $24/5$ را 25 در نظر گرفتیم و با این تقریب، کسر را کمی بزرگ‌تر کردیم. می‌دانیم که کسر $\frac{300}{295}$ کمی بزرگ‌تر از ۱ است. حالا اگر با تقریب این کسر را ۱ در نظر بگیریم، به جبران تقریب اولیه، کسر را کمی کوچک‌تر کرده‌ایم؛ بنابراین عدد مورد نظر نزدیک ۸ است.

🗨 **روش ۲** استفاده از کسر تبدیل:

$$24/6 \text{ kJ} \times \frac{3 \text{ mol O}_2}{295 \text{ kJ}} \times \frac{32 \text{ g O}_2}{1 \text{ mol O}_2} = \frac{24/6 \times 3 \times 32}{295} = \frac{300 \times 8}{295} = 8 \text{ g O}_2$$

🔍 **تیزبازی** برای قسمت اول سؤال، بدون محاسبه هم می‌شد فهمید که مقدار عددی گرمای ویژه اتانول $2/46$ است، نه $24/6$! آگه یادتون باشه در جدول ابتدای فصل ۲ کتاب درسی شیمی ۲، گرمای ویژه برخی مواد خالص آورده شده بود. با توجه به جدول، گرمای ویژه آب ($4/2 \text{ J.g}^{-1} \cdot \text{C}^{-1}$) بیشتر از سایر مواد از جمله اتانول بود؛ بنابراین گرمای ویژه اتانول باید کم‌تر از عدد $4/2$ باشد که می‌شه $2/46$.

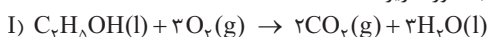
گرمای ویژه برخی مواد خالص در 25°C و 1 atm

ماده	گرمای ویژه ($\text{J.g}^{-1} \cdot \text{C}^{-1}$)	ماده	گرمای ویژه ($\text{J.g}^{-1} \cdot \text{C}^{-1}$)
آب	۴/۱۸۴	آلومینیم	۰/۹۰۰
سدیم کلرید	۰/۸۵۰	نقره	۰/۲۳۶
اتانول	۲/۴۳۰	طلا	۰/۱۲۸
کربن دی‌اکسید	۰/۸۴۰	اکسیژن	۰/۹۲۰

۹۰- گزینه ۴

همه عبارت‌های داده‌شده درست‌اند.

معادله موازنه‌شده واکنش‌ها به صورت زیر است:



**درس نامه از نوع ریاضی: تابع لگاریتم و تابع نمایی به صورت زیر با یکدیگر در ارتباط اند.**

$$\log_a x = b \Leftrightarrow a^b = x$$

(تابع نمایی) (تابع لگاریتم)

می‌دانید که اگر لگاریتم در مبنا یا پایه 10 ($a = 10$) باشد، پایه لگاریتم نوشته نمی‌شود:

$$\log 100 = \log_{10} 100 = 2 \Leftrightarrow 10^2 = 100$$

تابع نمایی

توصیه ایمنی: با توجه به فصل ۱ شیمی ۳ دانستن لگاریتم ۲، ۳، ۵ و ۷ برای شما لازم و ضروری است:

$$\begin{aligned} \diamond \log 2 &= 0.3 \Leftrightarrow 10^{0.3} = 2 & \diamond \log 3 &= 0.48 \Leftrightarrow 10^{0.48} = 3 \\ \diamond \log 5 &= 0.7 \Leftrightarrow 10^{0.7} = 5 & \diamond \log 7 &= 0.85 \Leftrightarrow 10^{0.85} = 7 \end{aligned}$$

در 20° ثانیه آغازی، لگاریتم غلظت A ، از 0.85 به 0.3 تغییر کرده است.

$$\log[A] = 0.85 \Rightarrow [A] = 10^{0.85} \xrightarrow{10^{0.85} = 7} = 7$$

$$\log[A] = 0.3 \Rightarrow [A] = 10^{0.3} \xrightarrow{10^{0.3} = 2} = 2$$

$$\bar{R}(A) \Big|_{t=0}^{t=20s} = -\frac{(2-7) \text{ mol.L}^{-1}}{20s} = 0.25 \text{ mol.L}^{-1}.s^{-1}$$

نکته سرعت متوسط واکنش از تقسیم سرعت متوسط تولید یا مصرف یک ماده شرکت کننده در واکنش بر ضریب استوکیومتری آن در معادله موازنه شده، به دست می‌آید.



$$\begin{aligned} \bar{R}_{\text{واکنش}} &= \frac{\bar{R}(A)}{a} = \frac{\bar{R}(B)}{b} = \frac{\bar{R}(C)}{c} = \frac{\bar{R}(D)}{d} \\ &= \frac{-\Delta n_A}{a \Delta t} = \frac{-\Delta n_B}{b \Delta t} = \frac{\Delta n_C}{c \Delta t} = \frac{\Delta n_D}{d \Delta t} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \bar{R}(\text{واکنش}) = \frac{\bar{R}(A)}{2} = \frac{0.25}{2} \text{ mol.L}^{-1}.s^{-1}$$

در بازه 13 تا 20 ثانیه، لگاریتم غلظت A از 0.48 به 0.3 رسیده است:

$$\log[A] = 0.48 \Rightarrow [A] = 10^{0.48} \xrightarrow{10^{0.48} = 3} = 3$$

$$\log[A] = 0.3 \Rightarrow [A] = 10^{0.3} \xrightarrow{10^{0.3} = 2} = 2$$

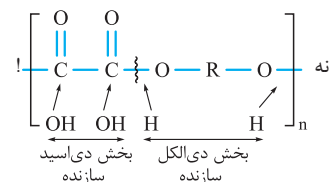
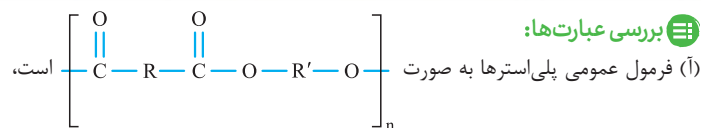
$$\bar{R}(A) \Big|_{t=13s}^{t=20s} = -\frac{2-3}{7s} = \frac{1}{7} \text{ mol.L}^{-1}.s^{-1}$$

و در آخر، خواسته سؤال:

$$\begin{aligned} \bar{R}(\text{واکنش}) \Big|_{t=0}^{t=20s} &= \frac{0.25}{2} = \frac{7 \times 0.25}{2} = 0.875 \\ \bar{R}(A) \Big|_{t=13s}^{t=20s} &= \frac{1}{7} \end{aligned}$$

۹۵- گزینه ۴**درس نامه مقایسه اسید قوی و ضعیف:**

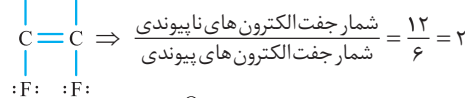
اسید	قوی (HA)	ضعیف (HX)
میزان یونش در آب	تقریباً به طور کامل یونش می‌یابد. ($\alpha \approx 1$)	به طور جزئی یونش می‌یابد. ($\alpha < 1$)
گونه‌های موجود در محلول آبی	فقط یون‌های آبپوشیده	یون‌های آبپوشیده و مولکول‌های اسید یونیده نشده
نمای ذره‌ای محلول آبی		



دقت کنید که بخش مربوط به دی‌اسید سازنده پلی‌استر در ساختار داده شده در سؤال، یک

اسید ویژه (اگزالیک اسید) $(\text{HO}-\text{C}(=\text{O})-\text{C}(=\text{O})-\text{OH})$ است؛ بنابراین فرمول عمومی برای این بخش نوشته نشده است.

(ب) مونومر سازنده تفلون، C_2F_4 است.



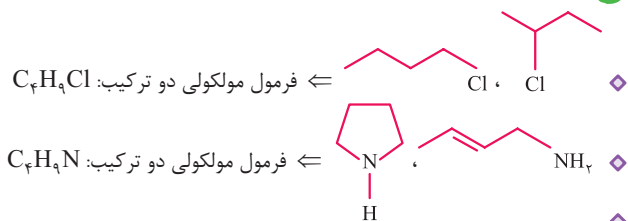
(پ) ناخن و پوست بدن، جزء پلی‌آمیدها با گروه عاملی $-\text{C}(=\text{O})-\text{N}-$ هستند.

(ت) با توجه به تمرین‌های دوره‌های فصل ۳ شیمی یازدهم، میانگین جرم مولی پلی‌اتن به مقدار کاتالیزگرهای مورد استفاده در واکنش پلیمری شدن اتن، بستگی دارد.

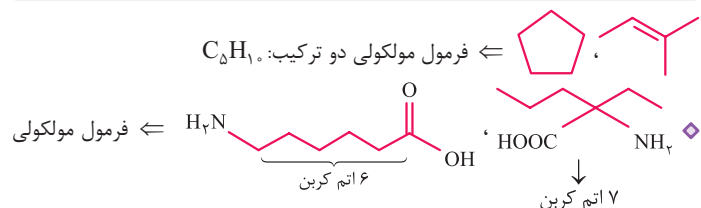
تیزبازی با مشخص شدن نادرستی عبارت (آ)، ۱ و ۲؛ زیرا حالا با بررسی عبارت (ب) می‌تونی بین ۳ و ۴، گزینه صحیح رو پیدا کنی، بدون این که نیاز باشد موارد (پ) و (ت) رو بررسی کنی.

۹۳- گزینه ۳

نکته به موادی که فرمول مولکولی یکسان، اما ساختار متفاوتی دارند، هم‌پار (ایزومر) می‌گویند. در همه موارد به جز مورد آخر، فرمول مولکولی دو ترکیب داده شده، یکسان است و دو ترکیب، ایزومر یا هم‌پار به حساب می‌آیند.

بررسی همه موارد:

نکته آلکن‌ها و سیکلوالکان‌ها فرمول عمومی یکسانی (C_nH_{2n}) دارند؛ بنابراین در شمار اتم‌های کربن یکسان، ایزومر یکدیگرند.



یکسانی نداشته و هم‌پار یکدیگر نیستند.

۹۴- گزینه ۴

استراتژی نمودار داده شده، همان نمودار غلظت - زمان است که به جای غلظت در اون، از $\log[\text{غلظت}]$ استفاده شده و فقط کافیست بلد باشی با استفاده از قوانین لگاریتم و بعضی لگاریتم‌های خاص، $\log[A]$ رو به $[A]$ تبدیل کنی. اول باید سرعت متوسط مصرف ماده A رو در دو بازه زمانی خواسته شده به دست بیاری. بعد با توجه به ضریب استوکیومتری A در معادله واکنش و سرعت مصرف A در بازه $20-0$ ، سرعت واکنش رو در این بازه حساب کنی و نهایتاً نسبت سرعت‌های خواسته شده رو به دست بیاری و تمام!

(b) همه گروه‌های عاملی که در کتاب درسی شیمی ۲ می‌خوانید! رو در جدول زیر براتون آوردیم:

نام خانواده	فرمول ساختاری و نام عاملی	نام خانواده	فرمول ساختاری و نام عاملی
(۱) آلدهیدها	$\begin{array}{c} \text{O} \\ \parallel \\ \text{—C—H} \end{array}$ آلدهیدی	(۲) کتون‌ها	$\begin{array}{c} \text{O} \\ \parallel \\ \text{—C—} \end{array}$ کربونیل
(۳) الکل‌ها	—OH هیدروکسیل	(۴) اترها	—O— اتری
(۵) کربوکسیلیک اسیدها	$\begin{array}{c} \text{O} \\ \parallel \\ \text{—C—OH} \end{array}$ کربوکسیل	(۶) استرها	$\begin{array}{c} \text{O} \\ \parallel \\ \text{—C—O—} \end{array}$ استری
(۷) آمین‌ها	$\begin{array}{c} \text{R—N—R''} \\ \\ \text{R'} \end{array}$ آمینی، حداقل یکی از گروه‌های R، R' و R'' گروه هیدروکربنی‌اند.	(۸) آمیدها	$\begin{array}{c} \text{O} \\ \parallel \\ \text{—C—N—} \\ \\ \text{ } \end{array}$ آمیدی

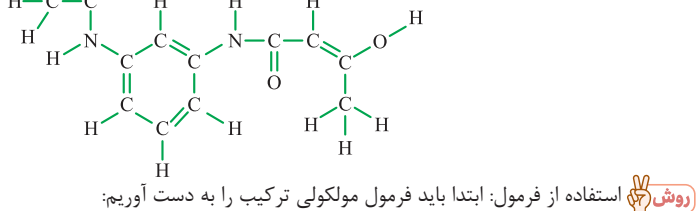
ترکیب داده‌شده دارای گروه عاملی هیدروکسیل (OH) و گروه عاملی آمیدی ($\begin{array}{c} \text{O} \\ \parallel \\ \text{—C—N—} \\ | \\ \text{H} \end{array}$) است. البته در این ترکیب، گروه عاملی آمینی (R—N—R') هم وجود دارد. در واحد

تکرار شونده پلی‌آمیدها، گروه عاملی آمیدی وجود دارد؛ بنابراین درست‌ترین گزینه، ۲ است.

بررسی سایر گزینه‌ها: ۱) ترکیب داده‌شده، دارای ۱۲ اتم کربن و ۳ اتم اکسیژن است:

$$\frac{\text{شمار اتم‌های کربن}}{\text{شمار اتم‌های اکسیژن}} = \frac{۱۲}{۳} = ۴$$

در ترکیب داده‌شده، ۲۸ پیوند یگانه و ۵ پیوند دوگانه وجود دارد:



$$\text{تعداد پیوندهای دوگانه} = (۲ \times ۶) - (۲ \times ۱) = ۱۰$$

$$\text{تعداد پیوندهای یگانه} = (۲۸ - ۱۰) = ۱۸$$

البته از روی شکل هم می‌تونید شمار اتم‌های H رو بشمارید؛ بنابراین فرمول ترکیب داده‌شده، $\text{C}_{12}\text{H}_{16}\text{O}_4\text{N}_2$ است.

$$\frac{\text{شمار کل پیوندهای کووالانسی}}{\text{در ترکیب}} = \frac{(۱۲ \times ۴) + (۱۶ \times ۱) + (۳ \times ۲) + (۲ \times ۳)}{۲} = \frac{۷۶}{۲} = ۳۸$$

از ۳۸ پیوند کووالانسی، ۱۰ تای آن‌ها به صورت ۵ پیوند دوگانه و بقیه ۲۸ به صورت پیوند یگانه هستند.

$$\frac{\text{شمار پیوندهای یگانه}}{\text{شمار پیوندهای دوگانه}} = \frac{۲۸}{۵} = ۵.۶$$

۴) هر اتم نیتروژن دارای یک جفت الکترون ناپیوندی و هر اتم اکسیژن دارای ۲ جفت الکترون ناپیوندی است:

$$\frac{\text{شمار اتم‌های هیدروژن}}{\text{شمار جفت الکترون‌های ناپیوندی}} = \frac{۱۶}{۸} = ۲$$

اسید	قوی (HA)	ضعیف (HX)
نمودار یونش	پیش از یونش: HA پس از یونش: H ⁺ A ⁻	پیش از یونش: HX پس از یونش: HX H ⁺ X ⁻
رسانایی الکتریکی محلول آبی	رسانایی قوی (لامپ کاملاً روشن در مدار الکتریکی)	رسانایی ضعیف (لامپ نیمه‌روشن در مدار الکتریکی)
ثابت یونش	بسیار بزرگ: HCl, H ₂ SO ₄ , HI, HBr, HNO ₃	یک عدد مشخص: HF > HNO ₂ > HCOOH > CH ₃ COOH > H ₂ CO ₃ > HCN
سرعت واکنش با یک فلز در شرایط یکسان	سریع‌تر	آهسته‌تر
خاصیت اسیدی محلول و غلظت یون هیدرونیوم در محلول در غلظت اولیه یکسان	بیشتر	کم‌تر
pH در غلظت اولیه یکسان	کم‌تر	بیشتر
غلظت اولیه اسید در pH و دمای یکسان	کم‌تر	بیشتر

همه عبارت‌های داده‌شده درست‌اند.

بررسی عبارت‌ها: ۱) می‌دانیم که HCl یک اسید قوی و HF یک اسید ضعیف است؛ بنابراین برای این که pH دو محلول با هم برابر باشد، باید غلظت مولی محلول HCl کم‌تر از محلول HF باشد. با توجه به یکسان بودن حجم محلول‌ها نتیجه می‌گیریم که شمار مول‌های HCl اولیه باید کم‌تر از شمار مول‌های HF اولیه باشد.

۲) HCl برخلاف HF به طور کامل در آب یونیده می‌شود و در محلول آن، خبری از مولکول نیست. با توجه به برابر بودن pH محلول‌ها، غلظت H⁺ و در نتیجه غلظت آنیون حاصل از یونش اسیدها با هم برابر است. به دلیل برابر بودن غلظت یون‌ها در دو محلول، رسانایی الکتریکی آن‌ها نیز با هم برابر است.

۳) گفتیم که غلظت یون‌ها در دو محلول با هم برابر است. از طرفی در محلول HCl (I)، برخلاف محلول HF (II)، مولکول اسید اولیه وجود ندارد؛ بنابراین مجموع شمار گونه‌ها در محلول (I) کم‌تر است.

۹۶- گزینه ۲

درس‌نامه a) می‌توانید برای تعیین تعداد اتم‌های هیدروژن موجود در یک ترکیب آلی و تعداد پیوندهای اشتراکی در آن، از فرمول‌های زیر نیز استفاده کنید:

۱) تعداد اتم‌های هیدروژن در ترکیب آلی با n اتم کربن

$$\text{تعداد پیوندهای سه‌گانه} = (۴ \times \text{تعداد پیوندهای دوگانه}) - (۲ \times \text{تعداد اتم‌های هیدروژن}) - (۲ \times \text{تعداد اتم‌های کربن})$$

$$\text{تعداد پیوندهای اشتراکی در یک ترکیب آلی} = \frac{(۴ \times \text{تعداد اتم‌های کربن}) - (۲ \times \text{تعداد اتم‌های هیدروژن}) - (۲ \times \text{تعداد اتم‌های کربن})}{۲}$$

$$\text{تعداد پیوندهای اشتراکی} = \frac{(۳ \times \text{تعداد اتم‌های N}) + (۲ \times \text{تعداد اتم‌های O}) + (۱ \times \text{تعداد اتم‌های H}) + (۴ \times \text{تعداد اتم‌های C})}{۲}$$

۱- و ۲- البته H_2SO_4 و H_2CO_3 جزء اسیدهای دپروتون‌دار هستند و فقط مرحله اول یونش H_2SO_4 ، ثابت یونش بزرگی دارد.

قسمت اول: $\text{pH}(\text{HA}) = \text{pH}(\text{HD}) \Rightarrow [\text{H}^+](\text{HA}) = [\text{H}^+](\text{HD})$

$$\begin{aligned} \frac{[\text{H}^+]}{[\text{HA}]} = M\alpha &\rightarrow [\text{HA}]_{\text{اولیه}} \times \frac{12}{100} = [\text{HD}]_{\text{اولیه}} \times \frac{2}{100} \Rightarrow \frac{[\text{HD}]_{\text{اولیه}}}{[\text{HA}]_{\text{اولیه}}} = \frac{12}{2} \\ \times \frac{4}{4} &\rightarrow \frac{48}{100} = 4/10 \end{aligned}$$

قسمت دوم: $[\text{HA}]_{\text{اولیه}} = M = 0.005$

$$\frac{[\text{H}^+]}{[\text{HA}]} = M\alpha \rightarrow [\text{H}^+] = 0.005 \times \frac{12}{100} = 6 \times 10^{-4} \text{ mol.L}^{-1}$$

$$\text{pH} = -\log[\text{H}^+] = -\log(6 \times 10^{-4}) = 4 - \log 6 = 4 - (\log 2 + \log 3)$$

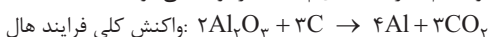
$$= 4 - (0.3 + 0.48) = 4 - 0.78 = 3.22$$



گزینه ۴ - ۱۰۰

همه عبارت‌های داده‌شده درست‌اند.

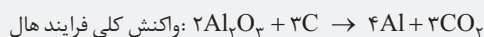
بررسی عبارت‌ها: $\diamond$ در فرایند هال (فرایند برقکافت Al_2O_3 مذاب در سلول الکترولیتی برای تولید فلز آلومینیم) گاز گلخانه‌ای CO_2 نیز تولید می‌شود:

 $\diamond$ مگه شک داریم؟! $\diamond$ بله! مثلاً در سلول هال، کاتد و آنود، هر دو از جنس گرافیت هستند.

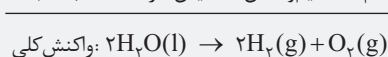
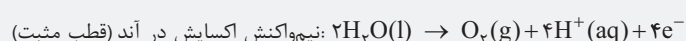
$\diamond$ قوی‌ترین عنصرهای اکسند (عنصرهایی که تمایل به گرفتن الکترون و کاهش یافتن دارند)، نافلزهایی مانند فلوئور و اکسیژن هستند که در سمت راست جدول تناوبی، با فوش‌کرده‌اند!

$\diamond$ تولید فلز آلومینیم در سلول هال و تولید گاز هیدروژن در برقکافت آب، نمونه‌هایی از کاربردهای برقکافت است.

نکته $\star$ فرایند هال (فرایند برقکافت Al_2O_3 مذاب به منظور تولید فلز آل) و فرایند برقکافت آب (به منظور تولید گازهای O_2 و H_2) به صورت زیر هستند:

(برقکافت Al_2O_3 مذاب)

برقکافت آب:



گزینه ۳ - ۱۰۱

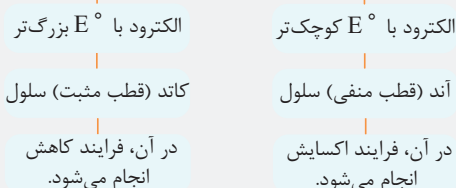
عبارت‌های اول تا سوم درست‌اند.

$\diamond$ سوزاندن گاز هیدروژن در موتور درون‌سوز، بازدهی نزدیک به ۲۰ درصد دارد، در حالی که اکسایش آن در سلول سوختی، بازده را تا سه برابر (یعنی حدود ۶۰ درصد) افزایش می‌دهد.

$\diamond$ در سلول‌های گالوانی، واکنش‌ها به طور خودبخودی انجام می‌شوند و در آن‌ها، فرآورده‌ها از واکنش‌دهنده‌ها پدیدارترند.



در سلول گالوانی



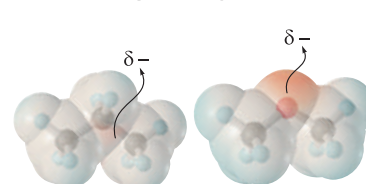
با توجه به E° ‌های داده‌شده، E° فلز منگنز کمتر از پلاتین است و نقش آند را دارد؛ بنابراین در آن اکسایش انجام می‌گیرد.

تله $\star$ تو نگاه اول و خوانش سریع، عبارت چهارم این تست درسته ولی این عبارت رو باید تو ذهنت تحلیل کنی.



گزینه ۱ - ۹۷

پروپان (C_3H_8) ناقطبی و دی‌متیل اتر (CH_3OCH_3) قطبی است. با توجه به این که جرم مولی این دو مولکول به هم نزدیک است، مادهٔ قطبی یعنی دی‌متیل اتر نقطهٔ جوش بالاتری دارد. هر چه نقطهٔ جوش ماده‌ای بالاتر باشد، در شرایط یکسان، آسان‌تر به مایع تبدیل می‌شود؛ بنابراین دی‌متیل اتر، آسان‌تر و پروپان، دشوارتر به مایع تبدیل می‌شود.



پروپان (ناقطبی)

دی‌متیل اتر (قطبی)

بررسی سایر گزینه‌ها: $\diamond$ از آن جا کهخاصیت نافلز O از C و خصلت نافلز C از H بیشتر است، در دی‌متیل اتر، اتممرکزی (O) بار جزئی منفی و در پروپانهم، اتم مرکزی (کربن وسطی) نسبت به H

های متصل به آن، بار جزئی منفی دارد.

نقشهٔ پتانسیل الکتروستاتیکی، تراکم بار الکتریکی روی اتم‌های سازندهٔ یک گونه را نشان

می‌دهد. دی‌متیل اتر، قطبی و پروپان، ناقطبی است؛ یعنی توزیع بار الکتریکی در مولکول

دی‌متیل اتر متقارن نبوده، ولی در پروپان متقارن است؛ بنابراین نقشهٔ پتانسیل الکتروستاتیکی

آن‌ها متفاوت است. $\diamond$ پروپان، ناقطبی است و در میدان الکتریکی جهت‌گیری نمی‌کند.

گزینه ۴ - ۹۸

همهٔ عبارت‌های داده‌شده درست‌اند.

ابتدا باید غلظت مولی محلول حاصل را حساب کنیم و بعد بریم سراغ عبارت‌ها:

$$\text{KOH مول} = 0.7 \text{ g} \times \frac{1 \text{ mol}}{56 \text{ g}} = \frac{1}{80} \text{ mol} = 1/25 \times 10^{-2} \text{ mol}$$

$$[\text{KOH}] = \frac{1/25 \times 10^{-2} \text{ mol}}{1/25 \times 10^{-3} \text{ L}} = 0.1 \text{ mol.L}^{-1}$$

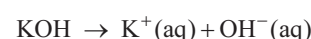
$\diamond$ در ۲۵۰ میلی‌لیتر از محلول مورد نظر، $2/5 \times 10^{-2} = 0.25 \times 10^{-2}$ مول KOH وجود دارد. از طرفی هر مول KOH با ۱ مول HCl به طور کامل خنثی می‌شود؛ پس این عبارت درسته!

$\diamond$ در محلول باز قوی KOH ، غلظت OH^- با غلظت محلول برابر است؛ بنابراین خواهیم داشت:

$$[\text{OH}^-] = M.n.\alpha \xrightarrow[n=1 \text{ و } \alpha=1]{\text{KOH در محلول}} [\text{OH}^-] = M = 10^{-1}$$

$$\frac{[\text{OH}^-]}{[\text{H}^+]} = \frac{10^{-1}}{10^{-14}} = \frac{10^{-2}}{10^{-14}} = 10^{12}$$

$\diamond$ به ازای هر مول KOH ، ۲ مول یون (K^+ و ۱ مول OH^-) در آب ایجاد می‌شود:



$$\text{یون} = 0.1 \text{ mol} = \frac{50}{1000} \text{ L} \times \frac{1 \text{ mol KOH}}{1 \text{ L محلول}} \times \frac{2 \text{ mol یون}}{1 \text{ mol KOH}}$$

$\diamond$ با اضافه کردن ۱/۴ گرم پتاسیم هیدروکسید به محلول، مول KOH سه برابر می‌شود (زیرا جرم آن از ۷/۷ به ۲/۱ گرم می‌رسد). با توجه به این که هر مول KOH ، ۱ مول OH^- ایجاد می‌کند، می‌توان گفت مول OH^- و در نتیجه غلظت مولی آن سه برابر خواهد شد (حجم ثابت بوده!).

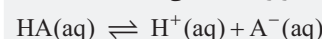
مشاوره $\star$ این سؤال چندموردی که همهٔ موارد آن نیاز به محاسبه دارد، کمی وقت‌گیر

است؛ بنابراین توصیه می‌کنیم که سر جلسهٔ کنکور، این سؤال رو توی دور اول حل نکنی و بذاریش برای دور بعد.



گزینه ۱ - ۹۹

نکته $\star$ در اسیدهای ضعیف (HA)، یونش اسید به صورت کامل انجام نمی‌شود و غلظت یون‌های حاصل از یونش اسید (A^- و H^+) از رابطهٔ زیر به دست می‌آید:



$$[\text{A}^-] = [\text{H}^+] = M.\alpha \rightarrow \text{درجهٔ یونش} = \frac{\text{غلظت اولیهٔ اسید (پیش از یونش)}}{100}$$



فرمول آنیون	نام آنیون
CO_3^{2-} و SO_4^{2-}	کربنات، سولفات (آنیون‌های چندانی با بار ۲-)
PO_4^{3-}	فسفات
SiO_4^{4-}	سیلیکات

نسبت شمار آنیون به کاتیون (همان نسبت بار کاتیون به بار آنیون) در کروم (III) سولفید (Cr_2S_7) برابر با $\frac{3}{7}$ است.

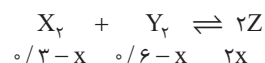
- اسکاندیم اکسید: Sc_2O_3 ✓
- کلسیم فسفات: $\text{Ca}_3(\text{PO}_4)_2$ ✓
- آلومینیم سولفات: $\text{Al}_2(\text{SO}_4)_3$ ✓
- گالیم کربنات: $\text{Ga}_2(\text{CO}_3)_3$ ✓
- روی سیلیکات: Zn_2SiO_4 ✓
- آهن (III) نیترات: $\text{Fe}(\text{NO}_3)_3$ ✓

گزینه ۱ - ۱۰۴

ابتدا به کمک شکل (A)، ثابت تعادل واکنش را حساب می‌کنیم. توجه: با توجه به این که شمار مول‌های گازی در دو سمت معادله واکنش برابر است، می‌توانیم حجم ظرف را در محاسبات وارد نکنیم:

$$K = \frac{[\text{Z}]^2}{[\text{X}_2][\text{Y}_2]} = \frac{(4 \times 0/1)^2}{(2 \times 0/1)(2 \times 0/1)} = \frac{4^2}{2 \times 2} = 4$$

اگر بخواهیم سؤال را به صورت تشریحی حل کنیم، باید این پوری بنویسیم: در شکل (ب)، $\frac{0}{3}$ مول X_2 و $\frac{0}{6}$ مول Y_2 در ظرف واکنش وجود دارد:



$$K = \frac{(2x)^2}{(0/3 - x)(0/6 - x)} = 4 \Rightarrow \frac{4x^2}{0/18 - 0/9x + x^2} = 4$$

$$\Rightarrow x^2 - 0/9x + 0/18 = x^2 \Rightarrow 0/9x = 0/18 \Rightarrow x = 0/2$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \text{X}_2 \text{ تعادلی} = 0/3 - 0/2 = 0/1 \\ \text{Y}_2 \text{ تعادلی} = 0/6 - 0/2 = 0/4 \\ \text{Z تعادلی} = 2(0/2) = 0/4 \end{cases}$$

تیزبازی می‌تونیم بعد از محاسبه ثابت تعادل واکنش، عددهای داده‌شده در گزینه‌ها رو در رابطه ثابت تعادل قرار بدیم و ببینیم با کدوم اعداد، به عدد ثابت تعادل (یعنی ۴) می‌رسیم:

$$\textcircled{1} K = \frac{(0/4)^2}{0/4 \times 0/1} = 4 \quad \textcircled{2} K = \frac{(0/1)^2}{0/4 \times 0/1} = 0/25$$

$$\textcircled{3} K = \frac{(0/3)^2}{0/3 \times 0/2} = 1/5 \quad \textcircled{4} K = \frac{(0/2)^2}{0/3 \times 0/2} = \frac{2}{3}$$

گزینه ۱ - ۱۰۵

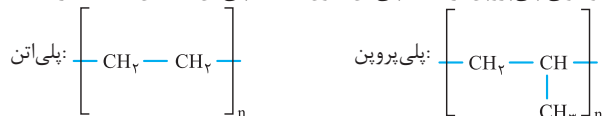
ترفتالیک اسید $(\text{HOOC}-\text{C}_6\text{H}_4-\text{COOH})$ ، دی‌اسید سازنده PET است.

بررسی سایر گزینه‌ها: $\textcircled{2}$ ترفتالیک اسید، برخلاف پارازیلین $(\text{H}_3\text{C}-\text{C}_6\text{H}_4-\text{CH}_3)$ ، قطبی است و انحلال‌پذیری بیشتری در آب دارد.

توجه: پارازیلین یک هیدروکربن آروماتیک است. هیدروکربن‌ها، مولکول‌های ناقطبی دارند.

$\textcircled{3}$ اتیلن گلیکول $(\text{CH}_2-\text{CH}_2)$ در نفت خام وجود ندارد. به همین دلیل که از اکسایش اتن برای تولید آن استفاده می‌شود.

$\textcircled{4}$ زنجیره مولکولی پلی‌پروپن برخلاف پلی‌اتن بدون شاخه (پلی‌اتن سنگین)، شاخه‌دار است:

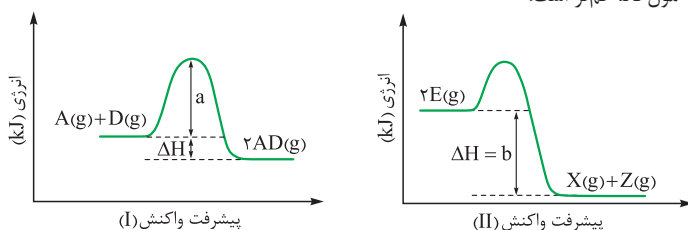


اتم فلزهایی که در واکنش‌های اکسایش - کاهش شرکت می‌کنند، همواره اکسایش می‌یابند، اما **یون‌های فلزی** شرکت‌کننده در این گونه واکنش‌ها لزوماً کاهش نمی‌یابند؛ مثلاً در فرایند زنگ‌زدن آهن طی واکنش: $\text{Fe}(\text{OH})_2(\text{s}) + \text{O}_2(\text{g}) + 2\text{H}_2\text{O}(\text{l}) \rightarrow 2\text{Fe}(\text{OH})_3(\text{s})$ یون‌های Fe^{2+} به Fe^{3+} اکسایش می‌یابند.

مشاوره ساده‌ترین راه برای بررسی درستی یا نادرستی عبارتهای دانشی و تحلیلی، مانند عبارت چهارم این سؤال، اینست که تو ذهن‌تون چندتا مثال رو چک کنید و ببینید مورد نقضی براش پیدا می‌کنید، یا نه!

گزینه ۴ - ۱۰۲

با توجه به نمودارهای داده‌شده، مقدار $|\Delta H|$ واکنش (I)، یعنی گرمای آزادشده به ازای تشکیل ۲ مول AD، از مقدار $|\Delta H|$ واکنش (II)، یعنی گرمای آزادشده به ازای تشکیل ۱ مول X، کم‌تر است.



بررسی سایر گزینه‌ها: $\textcircled{1}$ انرژی فعال‌سازی واکنش (I) برابر با a و انرژی فعال‌سازی واکنش (II) کم‌تر از a است؛ بنابراین با تأمین a kJ انرژی، هر دو واکنش انجام می‌شوند. $\textcircled{2}$ به ازای مصرف ۲ مول E، b کیلوژول گرما آزاد می‌شود؛ بنابراین به ازای مصرف ۱ مول از آن، $\frac{b}{2}$ کیلوژول گرما آزاد می‌شود. $\textcircled{3}$ درست! زیرا اختلاف سطح انرژی واکنش‌دهنده‌ها و فرآورده‌ها در واکنش (II) بیشتر است.

گزینه ۲ - ۱۰۳

نکته مهم‌ترین کاتیون‌ها و آنیون‌هایی که باید بلد باشیم، در جدول زیر آمده است:

نام کاتیون	فرمول کاتیون
لیتیم، سدیم، پتاسیم، روبیدیم، سزیم (کاتیون‌های گروه ۱)	$\text{Li}^+, \text{Na}^+, \text{K}^+, \text{Rb}^+, \text{Cs}^+$
منیزم، کلسیم، استرانسیم، باریم (کاتیون‌های گروه ۲)	$\text{Mg}^{2+}, \text{Ca}^{2+}, \text{Sr}^{2+}, \text{Ba}^{2+}$
آلومینیم و گالیم (کاتیون‌های گروه ۱۳)	Al^{3+} و Ga^{3+}
روی، کادمیم، اسکاندیم و نقره (کاتیون فلزهای واسطه تک‌ظرفیتی)	$\text{Zn}^{2+}, \text{Cd}^{2+}, \text{Sc}^{3+}, \text{Ag}^+$
آهن، کروم و وانادیم (II) و (III) و مس (I) و (II) (کاتیون فلزهای واسطه چندظرفیتی)	Fe^{2+} و Fe^{3+} / Cr^{2+} و Cr^{3+} / V^{2+} و V^{3+} / Cu^+ و Cu^{2+}
آمونیم	NH_4^+

نام آنیون	فرمول آنیون
فلوئورید، کلرید، برمید و یدید (هالیدها)	$\text{F}^-, \text{Cl}^-, \text{Br}^-, \text{I}^-$
اکسید، سولفید	O^{2-} و S^{2-}
نیتريد، فسفید	N^{3-} و P^{3-}
نیترات، هیدروکسید، سیانید، پرمنگنات، استات (تانوات)، هیدروژن کربنات (آنیون‌های چندانی با بار ۱-)	$\text{NO}_3^-, \text{OH}^-, \text{CN}^-, \text{MnO}_4^-, \text{CH}_3\text{COO}^-$ و HCO_3^-