

۱۳۹۹ سراسری داخل

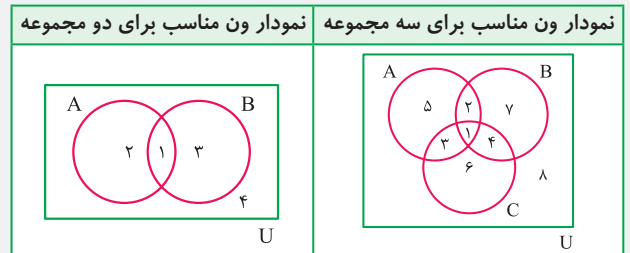
نام درس	دهم	یازدهم	دوازدهم	ترکیبی	آسان	متوسط	سخت
ریاضیات	۳	۱۳	۱۱	۱۳	۴	۲۴	۱۲
فیزیک	۷	۱۰	۱۷	۱	۴	۲۵	۶
شیمی	۹	۷	۱۰	۴	۳	۲۱	۶

ریاضی

۱- گزینه ۴

درس نامه ۱ بعضی وقتها یک عبارت مجموعه‌ای (نسبتاً طولانی به ما می‌دهند و می‌گویند، این عبارت با کدام مجموعه برابر است (یا کدام گزینه درست است). برای حل کردن این سؤالات کارهای زیر را انجام می‌دهیم:

الف) می‌بینیم عبارت صورت سؤال چند مجموعه دارد (معمولاً یا ۲ تا یا ۳ تا). در ادامه مطابق جدول زیر نمودار ون مناسب را می‌کشیم و قسمت‌های مختلفش را شماره‌گذاری می‌کنیم:



ب) حالا عبارت صورت سؤال را برحسب شماره‌ها بازنویسی می‌کنیم. مثلاً در حالتی که سه مجموعه داشته باشیم، طبق جدول بالا به جای A ، مجموعه $\{1, 2, 3, 5\}$ و در حالتی که دو مجموعه داشته باشیم به جای A ، $\{1, 2\}$ را می‌نویسیم.

۲ حواستان باشد اگر در سؤال شرطی برای مجموعه‌ها داشته باشیم، باید نمودار ون را طوری رسم کنیم که شرط رعایت شود. برای مثال اگر در سؤالی دو مجموعه داشته باشیم و سؤال بخواهد $A \subseteq B$ باشد، باید کل A را داخل B بکشیم؛ این جوری:

گام ۱ سه مجموعه داریم، پس نمودار ون را به شکل مقابل رسم می‌کنیم:

گام ۲ حالا با استفاده از روش شماره‌گذاری ناحیه‌ها، سؤال را حل می‌کنیم:

$$\begin{aligned}
 & (A - B) \cup ((B \cap C)' \cap ((B' \cup A) - B)) \\
 &= (\{1, 2, 4, 8\} - \{1, 2, 3, 5, 6\}) \cup (\{5, 6\}' \cap ((\{2, 3, 5, 6\}' \cup \{1, 2, 4, 8\}) - \{1, 2, 3, 5, 6\})) \\
 &= \{1, 4\} \cup (\{1, 2, 3, 4, 7, 8\} \cap (\{1, 4, 7, 8\} \cup \{1, 2, 4, 8\})) \\
 &= \{1, 4\} \cup (\{1, 2, 3, 4, 7, 8\} \cap \{1, 4, 7, 8\}) = \{1, 4, 7, 8\} \\
 & \quad \{1, 4, 7, 8\} \text{ همان } \{2, 3, 5, 6\}' \text{ است؛ بنابراین می‌توانیم بگوییم مجموعه داده شده با } B' \text{ برابر است.}
 \end{aligned}$$

مشاوره جبر مجموعه‌ها جزء سؤالات پرتکرار در کنکور سراسری است که با روش شماره‌گذاری ناحیه‌ها به راحتی حل می‌شوند. به همین خاطر پیشنهاد می‌کنیم حتماً روی این مبحث وقت کافی بگذارید.

۲- گزینه ۳

درس نامه ۱ اگر $A \times B = B \times A$ باشد، در این صورت یا یکی از A و B تهی هستند یا $A = B$ (یا $A = \emptyset$ یا $B = \emptyset$) $A \times B = B \times A \Rightarrow$ **۲** دو مجموعه وقتی برابرند که تک تک اعضایشان مساوی هم باشند.

گام ۱ چون $A \times B = B \times A$ است، پس طبق مورد (۱) درس‌نامه یا باید یکی از A و B تهی باشند یا $A = B$ باشد. واضح است که $A = \{x+2, 1, 4, y\}$ و $B = \{5, 7, z, t-1\}$ هیچ‌کدام نمی‌توانند تهی باشند، بنابراین $A = B$ است:

$$\{5, 7, z, t-1\} = \{x+2, 1, 4, y\} \quad (*)$$

گام ۲ برای برقراری رابطه $(*)$ باید تک‌تک اعضای دو مجموعه برابر باشند. با عدد ۵ در مجموعه سمت چپ شروع می‌کنیم. ۵ که نمی‌تواند با ۱ و ۴ برابر باشد، پس یا با $x+2$ برابر است یا با y :

گام ۳ بررسی حالت $x+2=5$: در این حالت $x=3$ می‌شود و رابطه $(*)$ به این صورت درمی‌آید:

$$\{5, 7, z, t-1\} = \{1, 4, y\} \Rightarrow \{y, z, t-1\} = \{1, 4, y\}$$

حالا می‌توانیم بگوییم y مجبور است برابر با 1 باشد:

$$\{y, z, t-1\} = \{1, 4, y\} \Rightarrow \{z, t-1\} = \{1, 4, y\}$$

برای برقراری رابطه بالا هم دو حالت داریم:

$$\begin{cases} z=1 \\ t-1=4 \Rightarrow t=5 \end{cases} \quad \text{یا} \quad \begin{cases} z=4 \\ t-1=1 \Rightarrow t=2 \end{cases}$$

تا این‌جا دوتا مجموعه به صورت $\{(x, y), (z, t)\}$ پیدا شد:

$$\{(3, 7), (1, 5)\}, \{(3, 7), (4, 2)\}$$

گام ۴ بررسی حالت $y=5$: در این حالت هم رابطه $(*)$ این‌جوری می‌شود:

$$\{5, 7, z, t-1\} = \{x+2, 1, 4, 5\} \Rightarrow \{y, z, t-1\} = \{x+2, 1, 4, 5\}$$

این‌جا واضح است که 7 باید با $x+2$ برابر باشد، پس $x=5$ شده و تساوی بالا به این صورت درمی‌آید:

$$\{y, z, t-1\} = \{1, 4, 5\} \Rightarrow \{z, t-1\} = \{1, 4, 5\}$$

برای برقراری رابطه بالا هم دو حالت داریم:

$$\begin{cases} z=1 \\ t-1=4 \Rightarrow t=5 \end{cases} \quad \text{یا} \quad \begin{cases} z=4 \\ t-1=1 \Rightarrow t=2 \end{cases}$$

این‌جا هم دوتا مجموعه به صورت $\{(x, y), (z, t)\}$ پیدا شد:

$$\{(5, 5), (1, 5)\}, \{(5, 5), (4, 2)\}$$

بنابراین در کل $2+2=4$ مجموعه به صورت $\{(x, y), (z, t)\}$ وجود دارد.

۳- گزینه ۳

درس نامه ۱ باقی‌مانده تقسیم چندجمله‌ای $p(x)$ بر $ax+b$ برابر $p(-\frac{b}{a})$ است.

۲ برای به دست آوردن باقی‌مانده تقسیم چندجمله‌ای‌ها وقتی مقسوم‌علیه از درجه ۲ است، به این صورت عمل می‌کنیم که ابتدا الگوریتم تقسیم را می‌نویسیم و به جای باقی‌مانده قرار می‌دهیم $ax+b$. حالا به جای x ، ریشه‌های مقسوم‌علیه را قرار می‌دهیم و با حل دستگاه دو معادله - دو مجهول، a و b را محاسبه می‌کنیم.

برای مثال فرض کنید باقی‌مانده تقسیم $x^6 + 2x^5 - 3$ بر $x^2 - 1$ را می‌خواهیم. ابتدا الگوریتم تقسیم را می‌نویسیم و به جای باقی‌مانده قرار می‌دهیم $ax+b$:

$$x^6 + 2x^5 - 3 = (x^2 - 1)q(x) + ax + b$$

حالا به جای x ، ریشه‌های $x^2 - 1$ یعنی 1 و -1 را قرار می‌دهیم:

$$x^6 + 2x^5 - 3 = (x^2 - 1)q(x) + ax + b \begin{cases} \xrightarrow{x=1} 0 = a + b \\ \xrightarrow{x=-1} -4 = -a + b \end{cases}$$

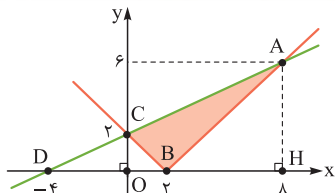
حل دستگاه $\rightarrow a=2, b=-2$

بنابراین باقی‌مانده برابر $2x - 2$ می‌شود.

۳ برای حل معادله درجه دوم $ax^2 + bx + c = 0$ ، دو حالت خاص داریم:

الف) اگر $a+b+c=0$ باشد، ریشه‌ها $x=1$ و $x=\frac{c}{a}$ هستند.

ب) اگر $a+c=b$ باشد، ریشه‌ها $x=-1$ و $x=-\frac{c}{a}$ هستند.



گام ۷ نمودار توابع $y_1 = |x-2|$ و $y_2 = \frac{1}{4}x + 2$ را رسم می‌کنیم: (برای رسم نمودار $y_1 = |x-2|$ ، نمودار $y = |x|$ را دو واحد به سمت راست می‌بریم.)

گام ۸ سؤال مساحت ناحیه محدود به دو نمودار را می‌خواهد که طبق شکل بالا برابر می‌شود با مساحت مثلث ABC. برای محاسبه مساحت این مثلث، کافی است مساحت مثلث BCD را از مساحت مثلث ABD کم کنیم. BCD مثلثی به قاعده $BD = 6$ و ارتفاع $OC = 2$ است، پس مساحت آن برابر $\frac{1}{2} \times 6 \times 2 = 6$ می‌شود. ABD هم مثلثی به قاعده $BD = 6$ و ارتفاع $AH = 6$ است؛ بنابراین مساحت آن $\frac{1}{2} \times 6 \times 6 = 18$ است. در نتیجه مساحت مثلث ABC برابر می‌شود با: $S_{ABC} = S_{ABD} - S_{BCD} = 18 - 6 = 12$

گزینه ۱

درس‌نامه برای تابع وارون‌پذیر f داریم: $f^{-1}(f(x)) = x$ و $f(f^{-1}(x)) = x$. بنابراین برای محاسبه $f^{-1}(20)$ ، کافی است معادله $f(x) = 20$ را حل کنیم که جوابش همان خواسته ما، یعنی $f^{-1}(20)$ می‌شود.

گام ۱ ابتدا باید حاصل $f^{-1}(20)$ را به دست آوریم که طبق درس‌نامه، برای به دست آوردن آن کافی است معادله $f(x) = 20$ را حل کنیم:

$$f(x) = 20 \Rightarrow x + \sqrt{x} = 20 \xrightarrow{\text{حس}} x = 16$$

البته می‌توانیم معادله را به روش تشریحی هم حل کنیم:

$$x + \sqrt{x} = 20 \Rightarrow \sqrt{x} = 20 - x \xrightarrow{\text{توان ۲}} x = (20 - x)^2 \Rightarrow x = 400 - 40x + x^2 \Rightarrow x^2 - 41x + 400 = 0 \Rightarrow (x - 16)(x - 25) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 16 \\ x = 25 \end{cases}$$

$x = 25$ ، غیر قابل قبول است، چون در تساوی (*) صدق نمی‌کند؛ پس $x = 16$ و نتیجه $f^{-1}(20) = 16$ است.

گام ۲ حالا داریم: $g^{-1}(f^{-1}(20)) = g^{-1}(16)$

برای محاسبه $g^{-1}(16)$ ، معادله $g(x) = 16$ را حل می‌کنیم:

$$g(x) = 16 \Rightarrow \frac{9x+6}{1-x} = 16 \Rightarrow 9x+6 = 16-16x \Rightarrow 25x = 10 \Rightarrow x = \frac{10}{25} = \frac{2}{5}$$

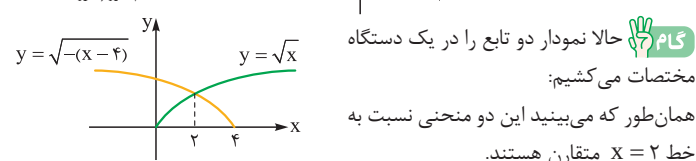
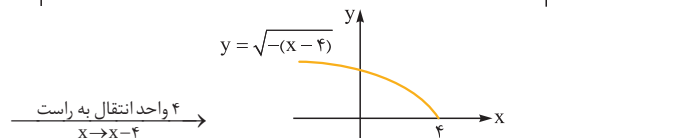
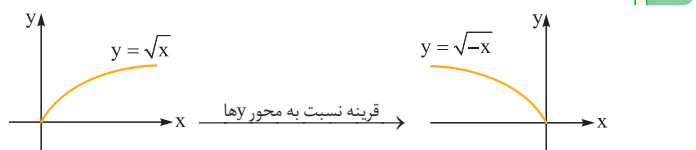
بنابراین جواب برابر $\frac{2}{5}$ است.

گزینه ۳

گام ۱ نمودار تابع $y = \sqrt{x}$ را بلدیم:



گام ۲ حالا کارهایی را که سؤال گفته روی نمودار $y = \sqrt{x}$ انجام می‌دهیم:



گام ۳ حالا نمودار دو تابع را در یک دستگاه مختصات می‌کشیم: همان‌طور که می‌بینید این دو منحنی نسبت به خط $x = 2$ متقارن هستند.

گام ۴ باقی‌مانده تقسیم $p(x)$ بر $x-1$ و $2x+1$ به ترتیب ۵ و ۸ است، پس طبق مورد (۱) درس‌نامه داریم: $p(1) = 8$ ، $p(-\frac{1}{2}) = 5$

گام ۵ باقی‌مانده تقسیم $p(x)$ بر $2x^2 - x - 1$ را می‌خواهیم، پس الگوریتم تقسیم را می‌نویسیم و به جای باقی‌مانده قرار می‌دهیم $ax + b$:

$$p(x) = (2x^2 - x - 1)q(x) + ax + b \quad (*)$$

چون مجموع ضرایب معادله $2x^2 - x - 1 = 0$ صفر است؛ پس طبق مورد (۳) درس‌نامه ریشه‌هایش می‌شود $x = 1$ و $x = -\frac{1}{2}$ و بنابراین در تساوی (*): $x = \frac{c}{a} = \frac{-1}{2}$ و $x = 1$ را جای‌گذاری می‌کنیم (مورد (۲) درس‌نامه):

$$p(x) = (2x^2 - x - 1)q(x) + ax + b \begin{cases} x=1 \rightarrow p(1) = a + b \\ x=-\frac{1}{2} \rightarrow p(-\frac{1}{2}) = -\frac{1}{4}a + b \end{cases}$$

حالا $a + b = 8$ و $p(-\frac{1}{2}) = 5$ را در تساوی‌های بالا جای‌گذاری می‌کنیم:

$$\begin{cases} a + b = 8 \\ -\frac{1}{4}a + b = 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a + b = 8 \\ -a + 4b = 20 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a + b = 8 \\ 3b = 12 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = 6 \end{cases}$$

طرفین دو تساوی را از هم کم می‌کنیم تا مقدار a به دست بیاید:

$$a - (-\frac{1}{4}a) = 8 - 5 \Rightarrow \frac{5}{4}a = 3 \Rightarrow a = \frac{12}{5}$$

$a = 2$ را در تساوی $a + b = 8$ جای‌گذاری می‌کنیم تا مقدار b هم مشخص شود:

$$2 + b = 8 \Rightarrow b = 6$$

بنابراین باقی‌مانده، برابر $ax + b = 2x + 6$ می‌شود.

تیزبازی الگوریتم تقسیم به صورت زیر است:

$$p(x) = (2x^2 - x - 1)q(x) + \underbrace{r(x)}_{\text{باقی‌مانده}}$$

با جای‌گذاری $x = 1$ داریم:

$$p(1) = 0 + r(1) \xrightarrow{p(1)=8} r(1) = 8$$

بنابراین مقدار باقی‌مانده به ازای $x = 1$ باید برابر ۸ شود که فقط در (*) این اتفاق می‌افتد.

گزینه ۴

استراتژی ابتدا با توجه به اتحاد مربع دوجمله‌ای، در تابع $y_1 = \sqrt{x^2 - 4x + 4}$ رادیکال را از بین برده و آن را تبدیل به قدرمطلق می‌کنیم. بعد با به دست آوردن نقاط تقاطع دو تابع و رسم نمودار آن‌ها، جواب به سادگی حاصل می‌شود.

درس‌نامه ۱

۲ اگر $k > 0$ باشد، برای رسم $f(x-k)$ ، تابع $f(x)$ را k واحد به سمت راست و برای رسم $f(x+k)$ ، تابع $f(x)$ را k واحد به سمت چپ می‌بریم.

۳ برای به دست آوردن طول نقطه تقاطع دو تابع، کافی است ضابطه‌های آن‌ها را با هم برابر قرار دهیم، بعد برای به دست آوردن عرض نقطه تقاطع، طول نقطه (یا نقاط) به دست آمده را درون یکی از توابع قرار می‌دهیم.

۴ $| \text{cloud} | = \square \Rightarrow \begin{cases} \text{cloud} = \square \\ \text{cloud} = -\square \end{cases}$

گام ۱ به جای $x^2 - 4x + 4$ می‌نویسیم $(x-2)^2$ تا رادیکال به قدرمطلق تبدیل شود:

$$y_1 = \sqrt{x^2 - 4x + 4} = \sqrt{(x-2)^2} = |x-2|$$

گام ۲ به کمک مورد (۳) و (۴) درس‌نامه، مختصات نقاط تقاطع $y_1 = |x-2|$ و $y_2 = \frac{1}{4}x + 2$ را به دست می‌آوریم:

$$y_1 = y_2 \Rightarrow |x-2| = \frac{1}{4}x + 2 \Rightarrow \begin{cases} x-2 = \frac{1}{4}x + 2 \\ x-2 = -\frac{1}{4}x - 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{3}{4}x = 4 \Rightarrow x = \frac{16}{3} \\ \frac{3}{4}x = 0 \Rightarrow x = 0 \end{cases}$$

طول نقاط تقاطع دو تابع، $x = 0$ و $x = \frac{16}{3}$ شد. حالا با جای‌گذاری این مقادیر در $y_1 = |x-2|$ یا $y_2 = \frac{1}{4}x + 2$ ، عرض نقاط برخورد را هم به دست می‌آوریم. (ما این‌جا در ضابطه اول جای‌گذاری می‌کنیم):

$$y_1 = |x-2| \begin{cases} x=0 \rightarrow y=2 \\ x=\frac{16}{3} \rightarrow y=6 \end{cases}$$

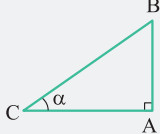
بنابراین، مختصات نقاط تقاطع دو تابع، $A(8, 6)$ و $C(0, 2)$ است.



۷- گزینه ۴

استراتژی با توجه به این که $\sin \hat{C} = \frac{5}{13}$ است، فرض می‌کنیم $AH = 5x$ و $AC = 13x$ باشد. حالا با استفاده از قضیه فیثاغورس در مثلث ACH ، مقدار x و ارتفاع AH حاصل می‌شود.

درس‌نامه ۱ در هر مثلث قائم‌الزاویه داریم:

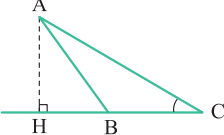


$$\sin \alpha = \frac{\text{مقابل}}{\text{وتر}} = \frac{AB}{BC} \quad \tan \alpha = \frac{\text{مقابل}}{\text{مجاور}} = \frac{AB}{AC}$$

$$\cos \alpha = \frac{\text{مجاور}}{\text{وتر}} = \frac{AC}{BC} \quad \cot \alpha = \frac{\text{مجاور}}{\text{مقابل}} = \frac{AC}{AB}$$

۲ اگر $\frac{a}{b} = \frac{a}{b}$ باشد، می‌توانیم فرض کنیم $\text{cloud} = ax$ و $\square = bx$ ؛ برای مثال $\begin{cases} a = 3x \\ b = 5x \end{cases}$ اگر $\frac{a}{b} = \frac{3}{5}$ باشد، داریم:

گام ۲ در مثلث ACH داریم:



$$\sin \hat{C} = \frac{5}{13} \Rightarrow \frac{AH}{AC} = \frac{5}{13}$$

$$\xrightarrow{\text{مورد (۲) درس‌نامه}} \begin{cases} AH = 5x \\ AC = 13x \end{cases}$$

گام ۳ حالا در مثلث ACH از قضیه فیثاغورس استفاده می‌کنیم:

$$AH^2 + CH^2 = AC^2 \xrightarrow{\substack{AH=5x, AC=13x \\ CH=9}} 25x^2 + 81 = 169x^2$$

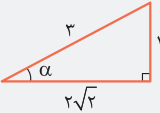
$$\Rightarrow 144x^2 = 81 \Rightarrow x^2 = \frac{81}{144} = \frac{9}{16} \Rightarrow x = \frac{3}{4}$$

بنابراین طول ارتفاع AH برابر $\frac{15}{4} = 3\frac{3}{4}$ می‌شود.

۸- گزینه ۳

درس‌نامه ۱ علامت نسبت‌های مثلثاتی،

در دایره مثلثاتی به صورت مقابل‌اند:
۲ وقتی یکی از نسبت‌های مثلثاتی (فرقی ندارد کدام) را داشته باشیم، می‌توانیم با رسم یک مثلث قائم‌الزاویه و استفاده از فیثاغورس، مقدار عددی مابقی نسبت‌ها را هم به دست آوریم و برای فهمیدن علامت آن نسبت‌ها، از دایره مثلثاتی کمک بگیریم.
 برای مثال اگر $\sin \alpha = \frac{1}{3}$ در ربع دوم باشد، ضلع مقابل به زاویه α را برابر ۱ و وتر را برابر ۳ در نظر می‌گیریم. حالا به کمک فیثاغورس، طول ضلع سوم $2\sqrt{2}$ می‌شود:



$$\xrightarrow{\text{ربع دوم}} \begin{cases} \cos \alpha = \frac{\text{مجاور}}{\text{وتر}} = -\frac{2\sqrt{2}}{3} \\ \tan \alpha = \frac{\text{مقابل}}{\text{مجاور}} = -\frac{1}{2\sqrt{2}} \\ \cot \alpha = \frac{\text{مجاور}}{\text{مقابل}} = -2\sqrt{2} \end{cases}$$

۳ برای به دست آوردن نسبت‌های مثلثاتی، وقتی زاویه داخل کمان بزرگ باشد از نکات زیر استفاده می‌کنیم:

(الف) برای $\tan$ و $\cot$ می‌توانیم هر مضرب صحیح دلخواهی از π را اضافه یا کم کنیم.
(ب) برای $\sin$ و $\cos$ ، اگر مضرب زوجی از π را اضافه و کم کنیم، اتفاقی نمی‌افتد، اما اگر مضرب فردی از π را اضافه یا کم کنیم، نسبت قرینه می‌شود.

۴ نسبت‌های مثلثاتی مجموع یا تفاضل دو کمان به صورت زیرند:

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin \alpha \cdot \cos \beta \pm \cos \alpha \cdot \sin \beta$$

$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos \alpha \cdot \cos \beta \mp \sin \alpha \cdot \sin \beta$$

گام ۱ ابتدا با استفاده از مورد (۳) درس‌نامه، $\cos(\frac{11\pi}{4} + \alpha)$ را ساده می‌کنیم:

$$\cos(\frac{11\pi}{4} + \alpha) = \cos(\frac{12\pi}{4} - \frac{\pi}{4} + \alpha) = \cos(3\pi - \frac{\pi}{4} + \alpha)$$

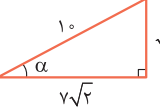
مضرب فرد

$$= -\cos(-\frac{\pi}{4} + \alpha) = -\cos(\alpha - \frac{\pi}{4})$$

گام ۲ حالا $-\cos(\alpha - \frac{\pi}{4})$ را با استفاده از نسبت‌های مثلثاتی مجموع و تفاضل دو زاویه، ساده می‌کنیم:

$$-\cos(\alpha - \frac{\pi}{4}) = -(\cos \alpha \cdot \cos \frac{\pi}{4} + \sin \alpha \cdot \sin \frac{\pi}{4}) = -\frac{\sqrt{2}}{2} \cos \alpha - \frac{\sqrt{2}}{2} \sin \alpha \quad (*)$$

گام ۳ باید مقدار $\cos \alpha$ را محاسبه کنیم. برای همین، با توجه به این که $\sin \alpha = \frac{\sqrt{2}}{10}$ است، مثلثی قائم‌الزاویه رسم می‌کنیم و ضلع مقابل به زاویه α را برابر $\sqrt{2}$ و وتر را برابر ۱۰ در نظر می‌گیریم. با کمک قضیه فیثاغورس، طول ضلع سوم $\sqrt{98} = 7\sqrt{2}$ می‌شود:



$$\xrightarrow{\cos \alpha = \frac{\text{مجاور}}{\text{وتر}}} \cos \alpha = \frac{7\sqrt{2}}{10} = -\frac{7\sqrt{2}}{10}$$

گام ۴ در آخر با جای‌گذاری $\sin \alpha = \frac{\sqrt{2}}{10}$ و $\cos \alpha = -\frac{7\sqrt{2}}{10}$ در تساوی (*)، جواب را به دست می‌آوریم:

$$-\frac{\sqrt{2}}{2} \cos \alpha - \frac{\sqrt{2}}{2} \sin \alpha = -\frac{\sqrt{2}}{2} \times (-\frac{7\sqrt{2}}{10}) - \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{10} = \frac{7}{10} - \frac{1}{10} = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$$

۹- گزینه ۲

درس‌نامه ۱ برای عوض کردن نسبت‌های مثلثاتی، کافی است زاویه آن‌ها را متمم کنیم، یعنی:

$$\sin \alpha = \cos(\frac{\pi}{2} - \alpha) \quad \cos \alpha = \sin(\frac{\pi}{2} - \alpha)$$

$$\tan \alpha = \cot(\frac{\pi}{2} - \alpha) \quad \cot \alpha = \tan(\frac{\pi}{2} - \alpha)$$

۲ برای حل معادلات مثلثاتی از روابط زیر استفاده می‌کنیم:

$$\sin \text{cloud} = \sin \square \Rightarrow \begin{cases} \text{cloud} = 2k\pi + \square \\ \text{cloud} = 2k\pi + (\pi - \square) \end{cases}$$

$$\cos \text{cloud} = \cos \square \Rightarrow \text{cloud} = 2k\pi \pm \square$$

$$\tan \text{cloud} = \tan \square \Rightarrow \text{cloud} = k\pi + \square$$

گام ۱ $\tan x$ را به طرف دیگر معادله می‌بریم:

$$\tan(3x) \cdot \tan(x) = 1 \Rightarrow \tan(3x) = \frac{1}{\tan(x)}$$

نکته می‌دانیم $\tan \alpha \cdot \cot \alpha = 1$ است، پس:

$$\frac{1}{\tan \alpha} = \cot \alpha, \quad \frac{1}{\cot \alpha} = \tan \alpha$$

طبق نکته بالا می‌توانیم در تساوی $\tan(3x) = \frac{1}{\tan(x)}$ به جای $\frac{1}{\tan(x)}$ بنویسیم:

$$\tan(3x) = \cot(x) \quad \text{یا} \quad \cot(3x) = \tan(x)$$

گام ۲ حالا طبق مورد (۱) درس‌نامه، به جای $\cot x$ قرار می‌دهیم $\tan(\frac{\pi}{2} - x)$ و معادله مثلثاتی حاصل را حل می‌کنیم:

$$\tan(3x) = \tan(\frac{\pi}{2} - x) \Rightarrow 3x = k\pi + (\frac{\pi}{2} - x)$$

بنابراین مجموع جواب‌های این معادله برابر است با:

$$\frac{9\pi}{8} + \frac{11\pi}{8} + \frac{13\pi}{8} + \frac{15\pi}{8} = \frac{48\pi}{8} = 6\pi$$

مشاوره معادلات مثلثاتی جزء پای ثابت‌های کنکورهای سراسری است که معمولاً برای حل سؤالات آن، باید به ساده‌سازی نسبت‌های مثلثاتی و فرمول‌های نسبت‌های دوالغایی مسلط باشید.



گزینه ۳ - ۱۰

استراتژی

باید اعضای چند دسته دیگر را هم بنویسیم تا بتوانیم الگویی برای بزرگ‌ترین عضو هر دسته پیدا کنیم. با پیدا کردن این الگو می‌توانیم بزرگ‌ترین و کوچک‌ترین عدد دسته بیستم را به دست بیاوریم. بعد کافی است میانگین عضو اول و عضو آخر دسته بیستم را در تعداد اعضای آن دسته (یعنی ۲۰) ضرب کنیم تا مجموع اعداد آن دسته حاصل شود.

درس‌نامه ۱ الگوی مثلثی: به الگوی زیر، الگوی مثلثی می‌گوییم که جمله عمومی

$$a_n = \frac{n(n+1)}{2} \text{ آن است: } ۱, ۳, ۶, ۱۰, ۱۵, \dots$$

۲ برای پیدا کردن مجموع تعدادی عدد متوالی، کافی است میانگین بزرگ‌ترین و کوچک‌ترین عدد را در تعداد اعداد ضرب کنیم.

گام ۱

اعضای چند دسته دیگر را هم می‌نویسیم:

$$\{1\}, \{2, 3\}, \{4, 5, 6\}, \{7, 8, 9, 10\}, \{11, 12, 13, 14, 15\}, \dots$$

دسته پنجم دسته چهارم دسته سوم دسته دوم دسته اول
با توجه به دسته‌های بالا، متوجه می‌شویم که آخرین عضو دسته‌ها تشکیل الگوی مثلثی

می‌دهند؛ پس آخرین عدد دسته n م برابر $a_n = \frac{n(n+1)}{2}$ می‌شود (مورد (۱) درس‌نامه).

۳ آخرین عضو دسته بیستم برابر $a_{20} = \frac{20 \times 21}{2} = ۲۱۰$ است. آخرین عضو دسته ۱۹م

هم برابر $a_{19} = \frac{۱۹ \times ۲۰}{2} = ۱۹۰$ است، پس اولین عضو دسته بیستم، $۱۹۰ + ۱ = ۱۹۱$ می‌شود؛ بنابراین دسته بیستم به این صورت شد: $\{۱۹۱, ۱۹۲, ۱۹۳, \dots, ۲۱۰\}$ دسته بیستم

۴ تعداد اعضای این دسته ۲۰ تا است (چون طبق گفته سؤال، تعداد اعضای هر دسته، برابر شماره آن دسته است)، حالا با توجه به مورد (۲) درس‌نامه، مجموع اعضای آن را به دست می‌آوریم: تعداد اعضا $\times$ میانگین عضو اول و آخر = مجموع اعضای دسته بیستم

$$= \frac{۱۹۱ + ۲۱۰}{2} \times ۲۰ = \frac{۴۰۱}{2} \times ۲۰ = ۴۰۱۰$$

گزینه ۱۱ - ۱۱

درس‌نامه ۱ بعضی از قوانین لگاریتم را در زیر ببینید:

الف) می‌توانیم از طرفین یک تساوی، در مبنای دلخواه، لگاریتم بگیریم:

$$\square = \square \Leftrightarrow \log_a \square = \log_a \square$$

$$\text{پ) } \log_a a = ۱ \quad \text{ب) } \log_c \frac{a}{b} = \log_c a - \log_c b$$

$$\text{ث) } \log_{b^n} a^m = \frac{m}{n} \log_b a \quad \text{ت) } \log_a ۱ = ۰$$

۲ برای از بین بردن توان در یک تساوی نمایی، کافی است از طرفینش در مبنای دلخواه (مبنای لگاریتم دو طرف باید یکسان باشد) لگاریتم بگیریم تا توان تبدیل به ضریب شود:

$$a^x = b^y \xrightarrow{\text{لگاریتم در مبنای } c} \log_c a^x = \log_c b^y \Rightarrow x \log_c a = y \log_c b$$

گام ۱

این عنصر، در هر مدت زمان ۳۰ روزه، $\frac{1}{10}$ جرم باقی‌مانده را از دست می‌دهد؛ یعنی

جرم آن $\frac{9}{10}$ برابر می‌شود. بنابراین می‌توانیم بگوییم پس از گذشت t روز، کل جرمش $(\frac{9}{10})^t$

برابر می‌شود. مقدار ماده اولیه این عنصر ۲۴ گرم است، پس بعد از گذشت t روز، $۲۴ \times (\frac{9}{10})^t$ گرم از این ماده باقی می‌ماند. حالا برای این که بفهمیم پس از گذشت چند روز، ۸ گرم از این

ماده باقی می‌ماند، باید معادله مقابل را حل کنیم:

گام ۲

ابتدا معادله را ساده‌تر می‌کنیم:

$$۲۴ \times (\frac{9}{10})^{\frac{t}{30}} = ۸ \Rightarrow (\frac{9}{10})^{\frac{t}{30}} = \frac{۸}{۲۴} = \frac{1}{3} \Rightarrow (\frac{9}{10})^{\frac{t}{30}} = \frac{1}{3}$$

طبق مورد (۲) درس‌نامه، از دو طرف در مبنای ۱۰ لگاریتم می‌گیریم تا توان تبدیل به ضریب شود:

$$(\frac{9}{10})^{\frac{t}{30}} = \frac{1}{3} \xrightarrow{\text{درس‌نامه الف}} \log_{10} (\frac{9}{10})^{\frac{t}{30}} = \log_{10} (\frac{1}{3})$$

$$\xrightarrow{\text{درس‌نامه ا-ث}} \frac{t}{30} \log_{10} \frac{9}{10} = \log_{10} \frac{1}{3}$$

$$\xrightarrow{\text{درس‌نامه ا-ب}} \frac{t}{30} (\log_{10} ۹ - \log_{10} ۱۰) = \underbrace{\log_{10} ۱ - \log_{10} ۳}_{=}$$



$$\log_{10} ۹ = \log_{10} 3^2 = 2 \log_{10} 3 \rightarrow \frac{t}{30} (2 \log_{10} 3 - 1) = -\log_{10} 3$$

حالا کافی است به جای $\log_{10} 3$ قرار دهیم $\frac{0}{48}$:

$$\frac{t}{30} (2 \times \frac{0}{48} - 1) = -\frac{0}{48} \Rightarrow \frac{t}{30} \times (-\frac{1}{24}) = -\frac{0}{48} \Rightarrow t = ۳۶$$

بنابراین پس از گذشت ۳۶ روز، ۸ گرم از این ماده باقی می‌ماند.

گزینه ۱۲ - ۱۲

استراتژی

کافی است به این نکته توجه کنید که حاصل ۲^{1-2x} در $x \rightarrow +\infty$ برابر صفر می‌شود.

درس‌نامه ۱ برای محاسبه حد در بی‌نهایت توابع نمایی به شکل $y = a^x$ داریم:

الف) اگر $a > ۱$ باشد، نمودار تابع نمایی به شکل مقابل است که با توجه به آن، حاصل حد a^x در $-\infty$ برابر صفر می‌شود:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} ۳^{۴+2x} = ۳^{-\infty} = ۰ \quad \text{برای مثال:}$$

ب) اگر $۰ < a < ۱$ باشد، نمودار تابع نمایی به شکل مقابل است که با توجه به آن، حاصل حد a^x در $+\infty$ برابر صفر می‌شود:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (\frac{1}{3})^{n+2} = (\frac{1}{3})^{+\infty} = ۰ \quad \text{برای مثال:}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} ۲^{1-2n} = ۲^{-\infty} = ۰ \quad \text{با توجه به درس‌نامه داریم:}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{۲^{2n+1} - \overbrace{۲^{1-2n}}^{\text{صفر}}}{۲^{2n+1} + \overbrace{۳ \times ۲^{1-2n}}^{\text{صفر}}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{۲^{2n+1}}{۲^{2n+1}} = ۱ \quad \text{بنابراین:}$$

گزینه ۲ - ۱۳

استراتژی

اول $x = ۱$ را جای‌گذاری می‌کنیم تا ببینیم با چه نوع حدی طرف هستیم. با این جای‌گذاری می‌بینیم که با $\frac{0}{0}$ طرفیم، پس هوییتال می‌زنیم.

درس‌نامه ۱ یکی از سریع‌ترین روش‌ها برای رفع ابهام صفرصفرم، استفاده از قاعده

هوییتال است، به این صورت که اگر $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{0}{0}$ باشد، داریم (به جای صورت مشتق آن

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} \xrightarrow{\text{Hop}} \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)} \quad \text{و به جای مخرج هم مشتق آن را قرار می‌دهیم:}$$

۲ مشتق تابع $\sqrt{u}$ به صورت $\frac{u'}{2\sqrt{u}}$ است.

با جای‌گذاری $x = ۱$ به صفرصفرم می‌رسیم، پس هوییتال می‌زنیم:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x - 7\sqrt{x} + 5}{2x - \sqrt{3x} + 1} \xrightarrow{\text{Hop}} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2 - 7 \times \frac{1}{2\sqrt{x}}}{2 - \frac{3}{2\sqrt{3x} + 1}} = \frac{2 - \frac{7}{2}}{2 - \frac{3}{4}} = \frac{-\frac{3}{2}}{\frac{5}{4}} = -\frac{6}{5} = -۱\frac{1}{5}$$

مشاوره

رفع ابهام صفرصفرم جزء پای ثابت‌های کنکورهای سراسری است که در حالت غیرمثلثاتی (در حالتی که شامل نسبت‌های مثلثاتی نباشد)، ساده‌ترین و سریع‌ترین روش برای حل سؤالات آن، استفاده از هوییتال است.

گزینه ۱۴ - ۱۴

استراتژی

ابتدا ضابطه تابع را ساده‌تر بنویسید، سپس حد راست و چپ در نقاط مرزی را با هم برابر قرار دهید.

درس‌نامه ۱ برای حل نامعادلات قدرمطلق داریم:

$$|x| < a \xrightarrow{a>0} -a < x < a$$

$$|x| > a \xrightarrow{a>0} x > a \text{ یا } x < -a$$



بنابراین تا این جا ضابطه تابع به صورت $f(x) = \frac{-2x^2 + 3x}{2x^2 + bx + c}$ می شود.

گام ۱۵ از $x = -2$ و $x = 1$ مجانب های قائم f هستند، پس طبق مورد (۴) درس نامه، مخرج f به

از $x = -2$ و $x = 1$ برابر صفر می شود:

$$2x^2 + bx + c \begin{cases} x=1 \rightarrow 2+b+c=0 \\ x=-2 \rightarrow 8-2b+c=0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} b+c=-2 \\ -2b+c=-8 \end{cases} \xrightarrow{\text{تفاضل}} 3b=6 \Rightarrow b=2$$

حالا $b=2$ را در تساوی $b+c=-2$ جای گذاری می کنیم تا مقدار c هم پیدا شود:

$$2+c=-2 \Rightarrow c=-4$$

پس ضابطه f برابر است با:

$$f(x) = \frac{-2x^2 + 3x}{2x^2 + 2x - 4}$$

گام ۱۶ در آخر مقدار $f(-1)$ را محاسبه می کنیم:

$$f(-1) = \frac{-2-3}{2-2-4} = \frac{-5}{-4} = \frac{5}{4} = 1\frac{1}{4}$$

۱۶- گزینه ۲

استراتژی از دو طرف معادله $g(x) = f(\sqrt{1+\tan^2 x})$ مشتق بگیرید و به جای x قرار دهید $\frac{\pi}{3}$.

درس نامه ۱ فرمول مشتق تعدادی از توابع را در جدول زیر ببینید:

تابع	فرمول مشتق
عدد ثابت	۰
$\sqrt{u}$	$\frac{u'}{2\sqrt{u}}$
$\tan x$	$1 + \tan^2 x$
$\cos x$	$-\sin x$
$\frac{1}{f}$	$-\frac{f'}{f^2}$
u^n	$nu'u^{n-1}$
$f(g(x))$	$g'(x) \cdot f'(g(x))$

$$1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$$

۲ در ربع اول دایره مثلثاتی، تمام نسبت ها مثبت هستند.

۳ فرض می کنیم $h(x) = \sqrt{1+\tan^2 x}$ باشد، در این صورت می توانیم

$$g(x) = f(\sqrt{1+\tan^2 x}) \Rightarrow g(x) = f(h(x))$$

بنویسیم:

حالا به کمک مورد (۱) درس نامه از طرفین تساوی بالا مشتق می گیریم:

$$g'(x) = h'(x) \cdot f'(h(x))$$

$$g'(\frac{\pi}{3}) = h'(\frac{\pi}{3}) \cdot f'(h(\frac{\pi}{3})) \quad (*)$$

گام ۱۷ مقدار $h(\frac{\pi}{3})$ را محاسبه می کنیم:

$$h(x) = \sqrt{1+\tan^2 x} \Rightarrow h(\frac{\pi}{3}) = \sqrt{1+\tan^2 \frac{\pi}{3}}$$

$$\xrightarrow{\tan \frac{\pi}{3} = \sqrt{3}} \sqrt{1+3} = 2 \Rightarrow h(\frac{\pi}{3}) = 2$$

$$f'(h(\frac{\pi}{3})) = f'(2) \quad (۱)$$

بنابراین:

گام ۱۸ از تابع $h(x)$ مشتق می گیریم:

$$h(x) = \sqrt{1+\tan^2 x} \Rightarrow h'(x) = \frac{2 \tan x \cdot (1+\tan^2 x)}{2\sqrt{1+\tan^2 x}}$$

حالا مقدار $h'(\frac{\pi}{3})$ را به دست می آوریم:

$$h'(\frac{\pi}{3}) = \frac{\sqrt{3}(1+3)}{\sqrt{1+3}} = \frac{\sqrt{3} \times 4}{2} = 2\sqrt{3} \quad (۲)$$

۲ تابع f در $x=a$ به شرطی پیوسته است که حد راست، حد چپ و مقدار آن در $x=a$

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = f(a)$$

برابر باشد، یعنی:

۳ اگر یک تابع چندضابطه ای بخواهد همواره پیوسته باشد، باید در تمام نقاط مرزی اش (نقاطی که ضابطه تابع در آن ها عوض می شود) پیوسته باشد.

گام ۱۹ ابتدا به کمک مورد (۱) درس نامه، دامنه تابع را ساده تر می نویسیم:

$$|x-1| < 1 \Rightarrow -1 < x-1 < 1 \Rightarrow 0 < x < 2$$

$$|x-1| \geq 1 \Rightarrow \begin{cases} x-1 \geq 1 \Rightarrow x \geq 2 \\ x-1 \leq -1 \Rightarrow x \leq 0 \end{cases}$$

بنابراین می توانیم ضابطه تابع را به صورت ساده تر زیر بنویسیم:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + ax + b & x \leq 0 \\ (x-1)[x] & 0 < x < 2 \\ x^2 + ax + b & x \geq 2 \end{cases}$$

گام ۲۰ برای این که تابع f همواره پیوسته باشد، باید در نقاط مرزی اش، یعنی در $x=0$ و $x=2$ پیوسته باشد. (مورد (۳) درس نامه)

برای این که f در $x=0$ پیوسته باشد، باید حد راست، حد چپ و مقدار آن در $x=0$ برابر شوند. حالا با توجه به این که مقدار f در $x=0$ و حد چپ آن در $x=0$ برابرند، کافی است حد چپ و راست را با هم برابر قرار دهیم:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0^+} (x-1)[x] = \lim_{x \rightarrow 0^-} x^2 + ax + b$$

$$\xrightarrow{[0^-]=0} 0 = 0 + (a \times 0) + b \Rightarrow b = 0$$

گام ۲۱ برای این که f در $x=2$ پیوسته باشد، باید حد راست، حد چپ و مقدار آن در $x=2$ برابر شوند، حالا با توجه به این که مقدار f در $x=2$ و حد راست آن در $x=2$ برابرند، کافی است حد چپ و راست را با هم برابر قرار دهیم:

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 2^+} x^2 + ax + b = \lim_{x \rightarrow 2^-} (x-1)[x]$$

$$\xrightarrow{[2^-]=1} 4 + 2a + b = (2-1) \times 2 \Rightarrow 4 + 2a = 2 \Rightarrow 2a = -2 \Rightarrow a = -1$$

قبلاً شد صفر

۱۵- گزینه ۱

استراتژی مجانب افقی تابع، $y=-1$ است؛ پس حد در بی نهایت آن، -1 می شود که با توجه به آن، مقدار a حاصل می شود. از طرفی $x=-2$ و $x=1$ مجانب های قائم اند، پس به ازای آن ها مخرج تابع صفر شده و با توجه به آن، مقدار b و c نیز حاصل می شود. در آخر محاسبه $f(-1)$ هم بسیار ساده است.

درس نامه ۱ اگر $y=k$ مجانب افقی تابع f باشد، حاصل حد در بی نهایت تابع

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = k$$

برابر k می شود، یعنی:

۲ هم ارزی پرتوان، برای محاسبه حد در بی نهایت یک تابع کسری (مثلاً $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)}$)، کافی

است در صورت و مخرج، فقط جمله با بزرگ ترین توان را نگه دارید و بقیه جملات را حذف کنید. برای مثال:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\Delta x^3 - 1 \circ x^2 + 3}{\sqrt{x^3} + 2x - 5} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\Delta x^3}{\sqrt{x^3}} = \frac{\Delta}{\sqrt{1}}$$

۳ حاصل حد در بی نهایت یک تابع کسری، فقط در حالتی برابر یک عدد حقیقی ناصفر می شود که بزرگ ترین توان x در صورت و مخرج با هم برابر باشند. (درجه صورت و مخرج مساوی باشد).

۴ اگر $x=k$ مجانب قائم تابع کسری $y = \frac{f(x)}{g(x)}$ باشد، حاصل $g(k)$ برابر صفر، ولی $f(k) \neq 0$ می شود. ($x=k$ ، ریشه مخرج هست، ولی ریشه صورت نیست).

گام ۲۲ مجانب افقی تابع $y=-1$ است؛ پس حاصل حد در بی نهایت f برابر -1 می شود؛ دقت کنید حاصل حد در بی نهایت تابع، برابر یک عدد حقیقی ناصفر شده، پس درجه صورت و مخرج باید برابر باشند. درجه صورت برابر 2 است، پس درجه مخرج هم باید برابر 2 باشد که

نتیجه می شود $a \neq 0$ است):

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = -1 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-2x^2 + 3x}{ax^2 + bx + c} = -1$$

$$\xrightarrow{\text{هم ارزی پرتوان}} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-2x^2}{ax^2} = -1 \Rightarrow -\frac{2}{a} = -1 \Rightarrow a = 2$$



گزینه ۳ - ۱۸

درس نامه ۱ معادله خط مماس بر منحنی f در نقطه‌ای به طول $x = \alpha$ واقع بر آن به صورت زیر است:
 $y - f(\alpha) = f'(\alpha)(x - \alpha)$
 فرمول مشتق بعضی از توابع را در زیر ببینید:

تابع	فرمول مشتق
عدد ثابت	صفر
ax^n	anx^{n-1}
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$
$\frac{f}{g}$	$\frac{f'g - fg'}{g^2}$

گام ۱ ابتدا مشتق تابع f را به دست می‌آوریم:

$$f(x) = \frac{\Delta x - 4}{\sqrt{x}} \Rightarrow f'(x) = \frac{\Delta \times \sqrt{x} - (\Delta x - 4) \times \frac{1}{2\sqrt{x}}}{(\sqrt{x})^2}$$

$$f'(4) = \frac{\Delta \times 2 - 16 \times \frac{1}{4}}{(2)^2} = \frac{\Delta - 4}{4}$$

بنابراین $f'(4)$ برابر است با:

$$f(x) = \frac{\Delta x - 4}{\sqrt{x}} \Rightarrow f(4) = \frac{\Delta - 4}{\sqrt{4}} = \frac{\Delta - 4}{2}$$

گام ۲ حالا به کمک مورد (۱) درس نامه، معادله خط مماس بر f در $x = 4$ را می‌نویسیم:

$$y - f(4) = f'(4)(x - 4) \Rightarrow y - \frac{\Delta - 4}{2} = \frac{\Delta - 4}{4}(x - 4) \Rightarrow y = \frac{\Delta - 4}{4}x + 2$$

گام ۳ برای این که ببینیم این خط محور y ها را با کدام عرض قطع می‌کند، کافی است به جای x قرار دهیم صفر:

$$y = \frac{\Delta - 4}{4}x + 2 \xrightarrow{x=0} y = 2$$

(البته می‌توانستیم این‌طور هم بگوییم که این خط در عرض از مبدأش محور y ها را قطع می‌کند که عرض از مبدأ آن ۲ است.)

گزینه ۴ - ۱۹

استراتژی ابتدا مجموع و حاصل ضرب ریشه‌های معادله $2x^2 + 3x - 1 = 0$ را به دست آورید، بعد با استفاده از فرمول $\tan(\alpha + \beta)$ جواب حاصل می‌شود.

درس نامه ۱ در معادله درجه دوم $ax^2 + bx + c = 0$ با شرط $\Delta > 0$ داریم:

$$\alpha + \beta = -\frac{b}{a} \quad (P) \quad \alpha\beta = \frac{c}{a} \quad (S) \quad \text{مجموع ریشه‌ها}$$

$$\tan(\alpha \pm \beta) = \frac{\tan \alpha \pm \tan \beta}{1 \mp \tan \alpha \cdot \tan \beta}$$

گام ۱ ریشه‌های معادله $2x^2 + 3x - 1 = 0$ ، $\tan \alpha$ و $\tan \beta$ هستند. مجموع و حاصل ضرب ریشه‌های این معادله را به دست می‌آوریم:

$$\tan \alpha + \tan \beta = -\frac{3}{2} \quad \tan \alpha \cdot \tan \beta = -\frac{1}{2}$$

گام ۲ حالا مقدار $\tan(\alpha + \beta)$ را به کمک مورد (۲) درس نامه، محاسبه می‌کنیم:

$$\tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \cdot \tan \beta} = \frac{-\frac{3}{2}}{1 - (-\frac{1}{2})} = \frac{-\frac{3}{2}}{\frac{3}{2}} = -1$$

گزینه ۱ - ۲۰

درس نامه ۱ برای پیدا کردن طول نقاط اکسترم نسبی تابع f مشتق f' را حساب می‌کنیم. با پیدا کردن ریشه‌های f' ، آن را تعیین علامت می‌کنیم. هر جا f' تغییر علامت بدهد، آن نقطه، اکسترم نسبی f است (به شرطی که در D_f باشد).

گام ۱ با جای گذاری روابط (۱) و (۲) در تساوی (*) داریم:

$$g'(\frac{\pi}{3}) = h'(\frac{\pi}{3})f'(h(\frac{\pi}{3})) \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3}f'(\frac{\pi}{3}) \Rightarrow f'(\frac{\pi}{3}) = \frac{1}{4}$$

روش گام ۲ به جای $1 + \tan^2 x$ قرار می‌دهیم:

$$1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x} \Rightarrow \sqrt{1 + \tan^2 x} = \sqrt{\frac{1}{\cos^2 x}} = \frac{1}{|\cos x|}$$

حالا دقت کنید $g'(\frac{\pi}{3})$ را داریم و $\frac{\pi}{3}$ در ربع اول دایره مثلثاتی است، پس $\cos x > 0$ و

$$g(x) = f(\frac{1}{\cos x}) \quad \text{بنابراین:} \quad \frac{1}{\cos x} = \frac{1}{\cos x}$$

$$g'(x) = -\frac{\sin x}{\cos^2 x} f'(\frac{1}{\cos x})$$

گام ۳ از دو طرف معادله بالا مشتق می‌گیریم:

گام ۴ به جای x قرار می‌دهیم $\frac{\pi}{3}$:

$$g'(\frac{\pi}{3}) = \frac{\sin \frac{\pi}{3}}{\cos^2 \frac{\pi}{3}} f'(\frac{1}{\cos \frac{\pi}{3}}) \Rightarrow \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{4}} = -\frac{\sqrt{3}}{2} f'(\frac{1}{\frac{1}{2}}) \Rightarrow \frac{1}{4} = 2f'(\frac{1}{2}) \Rightarrow f'(\frac{1}{2}) = \frac{1}{4}$$

گزینه ۴ - ۱۷

استراتژی معادله $\frac{f(6) - f(5)}{6 - 5} = f'(x)$ را حل کنید.

درس نامه ۱ آهنگ تغییر متوسط تابع f در بازه $[a, b]$ برابر است با:

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

۲ آهنگ تغییر لحظه‌ای تابع f در $x = \alpha$ برابر است با: $f'(\alpha)$

۳ مشتق بعضی توابع را در زیر ببینید:

تابع	فرمول مشتق
عدد ثابت	۰
ax^n	anx^{n-1}
$\sqrt{u}$	$\frac{u'}{2\sqrt{u}}$

گام ۱ طبق مورد (۱) درس نامه، آهنگ متوسط تغییر f در بازه $[5, 6]$ برابر است با:

$$\frac{f(6) - f(5)}{6 - 5} = \frac{\sqrt{21 - 6^2} + 4(6) - \sqrt{21 - 5^2} + 4(5)}{1} = \sqrt{9} - \sqrt{16} = 3 - 4 = -1$$

گام ۲ ضابطه مشتق f را به دست می‌آوریم:

$$f(x) = \sqrt{21 - x^2} + 4x \Rightarrow f'(x) = \frac{-2x + 4}{2\sqrt{21 - x^2} + 4x} = \frac{-x + 2}{\sqrt{21 - x^2} + 4x}$$

گام ۳ حالا کافی است معادله $f'(x) = -1$ را حل کنیم تا ببینیم در کدام نقطه، آهنگ متوسط تغییر f در بازه $[5, 6]$ (که برابر -1 است)، با آهنگ تغییر لحظه‌ای f (که برابر $f'(x)$ است) برابر می‌شود:

$$f'(x) = -1 \Rightarrow \frac{-x + 2}{\sqrt{21 - x^2} + 4x} = -1 \xrightarrow{\times (-1)} \frac{x - 2}{\sqrt{21 - x^2} + 4x} = 1$$

$$\Rightarrow \sqrt{21 - x^2} + 4x = x - 2 \xrightarrow{(*)} 21 - x^2 + 4x = x^2 - 4x + 4$$

$$\Rightarrow 2x^2 - 8x - 17 = 0 \xrightarrow{\Delta = 200} \begin{cases} x = \frac{4 + \sqrt{200}}{2} \\ x = \frac{4 - \sqrt{200}}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2 + \frac{5\sqrt{2}}{2} \\ x = 2 - \frac{5\sqrt{2}}{2} \end{cases}$$

$x = 2 - \frac{5\sqrt{2}}{2}$ غیر قابل قبول است چون در (*) صدق نمی‌کند؛ بنابراین جواب برابر $2 + \frac{5\sqrt{2}}{2}$ می‌شود.

**گام ۴ (محاسبه x به کمک فرمول‌های درس‌نامه)**

همان‌طور که در درس‌نامه گفتیم در دوزنقه گام قبل رابطه $\frac{EF-AB}{CD-EF} = \frac{AE}{ED}$ برقرار است. از طرفی طبق فرمول (۱) درس‌نامه، تساوی $\frac{AE}{ED} = \frac{h_1}{h_2}$ را هم داریم. حالا با ترکیب

$$\frac{EF-AB}{CD-EF} = \frac{h_1}{h_2} \Rightarrow \frac{x-5}{9-x} = \frac{h_1}{h_2} \quad (**)$$

دو تساوی قبلی می‌توانیم بنویسیم: **گام ۵ (محاسبه خواسته سؤال):** همان‌طور که می‌بینید، سمت راست تساوی‌های (*) و (**) با هم برابر است، پس سمت چپ آن‌ها هم باید برابر باشد:

$$\frac{x+9}{5+x} = \frac{x-5}{9-x} \Rightarrow \frac{(x+5)(x-5)}{5+x} = \frac{(9+x)(9-x)}{9-x}$$

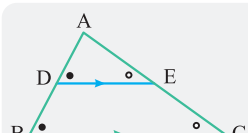
اتحاد مزدوج اتحاد مزدوج

$$\Rightarrow x^2 - 25 = 81 - x^2 \Rightarrow 2x^2 = 106 \Rightarrow x^2 = 53 \Rightarrow x = \sqrt{53}$$

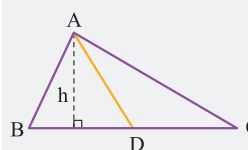
مشاوره قضیه تالس در دوزنقه و نتایج آن، در کنکور بسیار مهم هستند. فرمول‌های درس‌نامه این سؤال را حتماً بلد باشید.

۲۲- گزینه ۳

استراتژی اول نسبت مساحت مثلث GFA به مساحت GED و بعد نسبت مساحت دوزنقه ABCD به مساحت مثلث GCD را حساب کنید. در نهایت ببینید که مساحت هر کدام از مثلث‌های GED و GCD چه کسری از مساحت مثلث GEC هستند.



درس‌نامه ۱ در شکل روبه‌رو اگر $DE \parallel BC$ باشد، می‌توانیم بگوییم مثلث ADE با مثلث ABC متشابه است:



۲ نسبت مساحت‌های دو مثلث متشابه برابر است با مجذور نسبت تشابه آن‌ها.

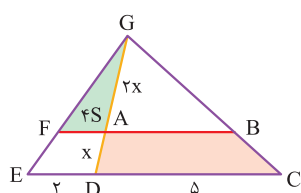
۳ اگر دو مثلث دارای یک ارتفاع برابر باشند، نسبت مساحت‌های آن‌ها برابر است با نسبت قاعده‌های نظیر آن ارتفاع مشترک. مثلاً در شکل روبه‌رو مثلث‌های ABD، ADC و ABC همگی در ارتفاع به طول h

$$\frac{S_{ABD}}{S_{ADC}} = \frac{BD}{CD}, \quad \frac{S_{ABD}}{S_{ABC}} = \frac{BD}{BC}, \dots$$

مشترک‌اند، پس می‌توانیم بنویسیم:

گام ۱ (محاسبه $\frac{S_{GFA}}{S_{GED}}$)

قبل از هر چیز، دقت کنید که سؤال گفته $DG = 3DA$ ، پس می‌توانیم فرض کنیم $DA = x$ ، $DG = 3x$ و در نتیجه $AG = 3x - x = 2x$. به دلیل موازی بودن FA



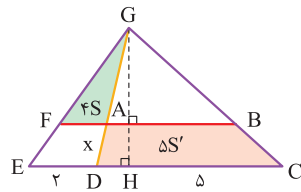
با ED، دو مثلث GFA و GED با نسبت $\frac{GA}{GD} = \frac{2}{3}$ متشابه‌اند، پس داریم:

$$\frac{S_{GFA}}{S_{GED}} = \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{4}{9} \Rightarrow \begin{cases} S_{GFA} = 4S \\ S_{GED} = 9S \end{cases}$$

گام ۲ (محاسبه S_{ABCD})

به دلیل موازی بودن AB با DC، دو مثلث GAB و GDC هم با نسبت $\frac{GA}{GD} = \frac{2}{3}$ متشابه‌اند، پس داریم:

$$\frac{S_{GAB}}{S_{GDC}} = \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{4}{9} \Rightarrow \begin{cases} S_{GAB} = 4S' \\ S_{GDC} = 9S' \end{cases} \Rightarrow S_{ABCD} = 9S' - 4S' = 5S'$$



گام ۳ (پیدا کردن رابطه بین S و S' و محاسبه خواسته سؤال):

همان‌طور که در شکل مقابل می‌بینید؛ دو مثلث GED و GDC در ارتفاع GH مشترک‌اند، پس طبق مورد (۳) درس‌نامه نسبت مساحتشان برابر می‌شود با:

$$\frac{S_{GED}}{S_{GDC}} = \frac{ED}{DC} \Rightarrow \frac{S_{GED}}{S_{GDC}} = \frac{2}{5} \Rightarrow \frac{4S}{9S'} = \frac{2}{5} \Rightarrow \frac{S}{S'} = \frac{9}{10}$$

$$\frac{S_{AGE}}{S_{ABCD}} = \frac{4S}{5S'} = \frac{4}{5} \left(\frac{S}{S'}\right) = \frac{4}{5} \times \frac{9}{10} = \frac{36}{50} = \frac{18}{25} = 72\%$$

پس داریم:

۲ فاصله نقطه $A(x_0, y_0)$ از خط $ax + by + c = 0$ برابر است با:

$$AH = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

گام ۱ f' را حساب می‌کنیم:

$$f(x) = x + \sqrt{4x - x^2} \Rightarrow f'(x) = 1 + \frac{4 - 2x}{2\sqrt{4x - x^2}} = 1 + \frac{2 - x}{\sqrt{4x - x^2}}$$

$$= \frac{\sqrt{4x - x^2} + 2 - x}{\sqrt{4x - x^2}}$$

برای تعیین علامت f' باید ریشه‌های صورت را پیدا کنیم (مخرج در دامنه تابع همواره مثبت است).

$$\sqrt{4x - x^2} + 2 - x = 0 \Rightarrow \sqrt{4x - x^2} = x - 2$$

(*)

$$\xrightarrow{\text{توان } 2} 4x - x^2 = x^2 - 4x + 4 \Rightarrow 2x^2 - 8x + 4 = 0 \xrightarrow{\div 2} x^2 - 4x + 2 = 0$$

$$\Delta = 8 \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{4 + \sqrt{8}}{2} = 2 + \sqrt{2} \quad \checkmark \\ x = \frac{4 - \sqrt{8}}{2} = 2 - \sqrt{2} \quad \text{در (*) صدق نمی‌کند.} \end{cases}$$

در $x = 2 + \sqrt{2}$ در $D_f = (0, 4)$ قرار دارد و تنها نقطه‌ای است که f' در آن تغییر علامت می‌دهد؛ بنابراین طول نقطه اکسترمم نسبی همان $x = 2 + \sqrt{2}$ است. حالا با جای‌گذاری آن در f ، عرض نقطه اکسترمم را به دست می‌آوریم:

$$f(x) = x + \sqrt{4x - x^2} \xrightarrow{x=2+\sqrt{2}} y = 2 + \sqrt{2} + \sqrt{8 + 4\sqrt{2} - 4 - 2 - 4\sqrt{2}} = 2 + \sqrt{2} + \sqrt{2} = 2 + 2\sqrt{2}$$

پس مختصات نقطه اکسترمم نسبی $(2 + \sqrt{2}, 2 + 2\sqrt{2})$ است.

دقت کنید که سؤال از ما نقطه ماکزیمم نسبی را می‌خواست، ما دیدیم که این تابع فقط یک اکسترمم نسبی دارد، پس این اکسترمم نسبی باید ماکزیمم نسبی باشد.

گام ۲ فاصله نقطه $(2 + \sqrt{2}, 2 + 2\sqrt{2})$ از نیمساز ناحیه اول یعنی $x - y = 0$ (یا همان $y = x$) را با کمک مورد (۲) درس‌نامه محاسبه می‌کنیم:

$$\frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{|1 \times (2 + \sqrt{2}) - 1 \times (2 + 2\sqrt{2}) + 0|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = 1$$

۲۱- گزینه ۲

استراتژی اول شکل مسئله را رسم کنید، بعد مساحت دو قسمت ایجادشده را (که هر کدامشان یک دوزنقه هستند) با هم مساوی قرار دهید؛ این‌طوری به رابطه‌ای می‌رسید که نسبت ارتفاع‌ها در آن دیده می‌شود. در آخر نسبت ارتفاع‌ها را به کمک فرمول‌های درس‌نامه حساب کنید و در معادله اول جای‌گذاری کنید.

درس‌نامه مطابق شکل، EF با قاعده‌های دوزنقه موازی و AK ارتفاع آن است، داریم:

$$1) \frac{AE}{ED} = \frac{BF}{FC} = \frac{AH}{HK}$$

$$2) \frac{EF - AB}{CD - EF} = \frac{AE}{ED}$$

گام ۱ (رسم شکل مناسب و تحلیل سؤال):

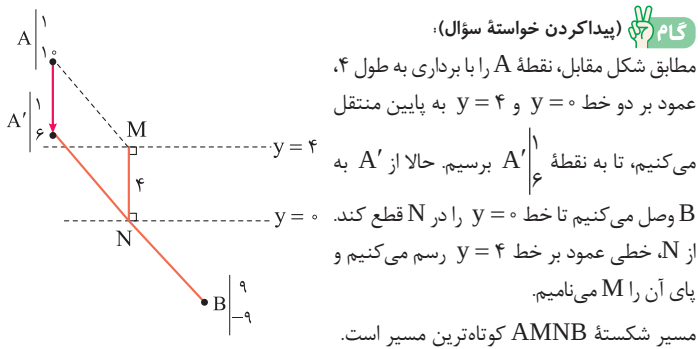
مطابق شکل، EF موازی با قاعده‌های دوزنقه است و مساحت آن را به دو قسمت مساوی تقسیم کرده، یعنی:

$$S(ABFE) = S(CDEF) \Rightarrow \frac{1}{2} \left(\frac{AB + EF}{2} \right) \cdot h_1 = \frac{1}{2} \left(\frac{EF + CD}{2} \right) \cdot h_2$$

$$\Rightarrow (\Delta + x) \cdot h_1 = (x + 9) \cdot h_2 \Rightarrow \frac{x + 9}{\Delta + x} = \frac{h_1}{h_2} \quad (**)$$

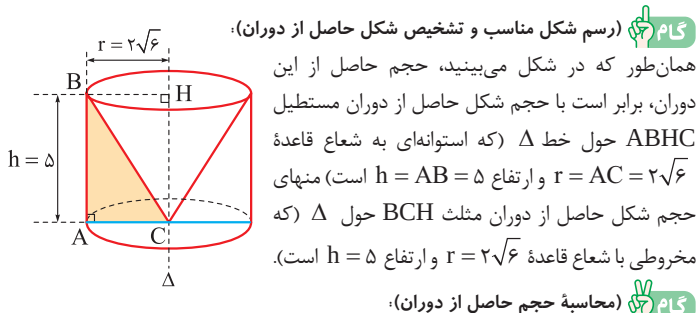
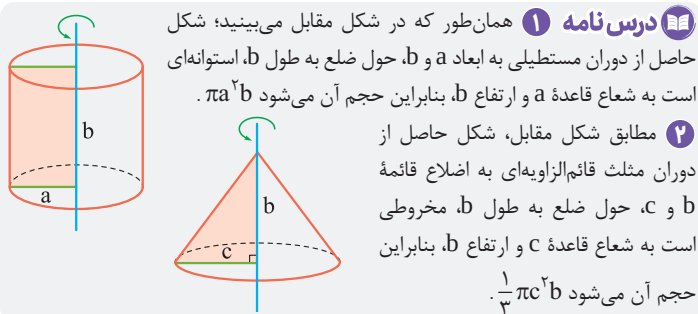


پیدا کردن خواسته سوال



همان‌طور که در قسمت (۲) درس‌نامه گفتیم، طول مسیر شکسته AMNB برابر است با $A'B + MN = \sqrt{(9-1)^2 + (-9-1)^2} + 4 = \sqrt{8^2 + 10^2} + 4 = \sqrt{164} + 4 = 2\sqrt{41} + 4 = 17 + 4 = 21$

گزینه ۴



(محاسبه حجم حاصل از دوران):
با توجه به این که $V_{\text{استوانه}} = \pi r^2 h$ و $V_{\text{مخروط}} = \frac{1}{3} \pi r^2 h$ است، داریم:
 $V_{\text{استوانه}} - V_{\text{مخروط}} = \pi r^2 h - \frac{1}{3} \pi r^2 h = \frac{2}{3} \pi r^2 h = \frac{2}{3} \pi (2\sqrt{6})^2 (5) = \frac{2}{3} \pi \times 24 \times 5 = 80\pi$

گزینه ۴

با توجه به مثلث متساوی‌الساقین موجود در شکل و زاویه‌های ظلی و محاطی، زاویه‌های برابر با هم را در شکل پیدا کنید.

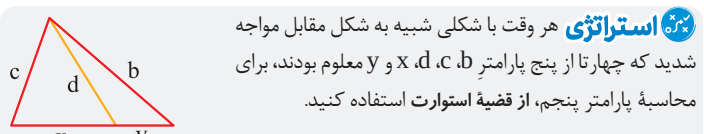
در هر دایره، اندازه هر زاویه ظلی (α در شکل ۱) و همچنین اندازه هر زاویه محاطی (β در شکل ۲)، برابر است با نصف اندازه کمان روبه‌روی آن‌ها:

شکل (۱)	شکل (۲)
$\alpha = \frac{1}{2} \widehat{AB}$	$\beta = \frac{1}{2} \widehat{AC}$

مشاوره

سؤال‌هایی از این دست که ترکیبی از «نسبت مساحت‌های مثلث‌های هم‌ارتفاع» و «نسبت تشابه مثلث‌های متشابه» و گاهی اوقات «قضیه تالس» هستند، بسیار در کنکور پرتکرار بوده‌اند و این سؤال، یکی از دشوارترین آن‌ها است.

گزینه ۱



درس‌نامه

طبق قضیه استوارت در شکل مقابل، داریم:
 $AB^2 \cdot CD + AC^2 \cdot BD = BC(AD^2 + BD \cdot CD)$

همان‌طور که در شکل زیر می‌بینید، از پنج پارامتر AB, AD, BC, CD, AC چهارتایشان را داریم، پس طبق استراتژی برای محاسبه پنجمی ($AD = x$) باید در مثلث ABD قضیه استوارت استفاده کنیم:

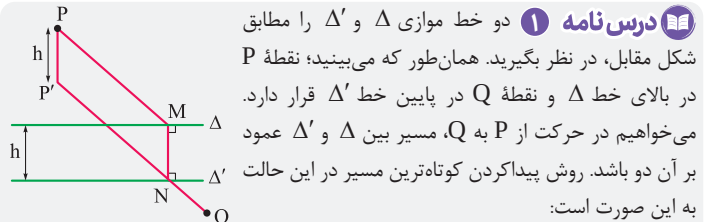
$$\begin{aligned} BD(AC^2 + BC \cdot CD) &= AD^2 \cdot BC + AB^2 \cdot CD \\ \Rightarrow 12(7^2 + 4 \times 8) &= x^2 \times 4 + 9^2 \times 8 \\ \Rightarrow 12 \times 81 &= 4x^2 + 81 \times 8 \Rightarrow 4x^2 = 12 \times 81 - 81 \times 8 \\ \Rightarrow x^2 &= \frac{81(12-8)}{4} \Rightarrow x^2 = 81 \Rightarrow x = 9 \end{aligned}$$

مشاوره

قضیه استوارت فرمول سختی دارد، اما می‌بینید که صرفاً با حفظ‌بودن فرمول آن، می‌توانید سؤال را حل کنید، پس سختی فرمول، باعث نشود که آن را حفظ نکنید.

گزینه ۱

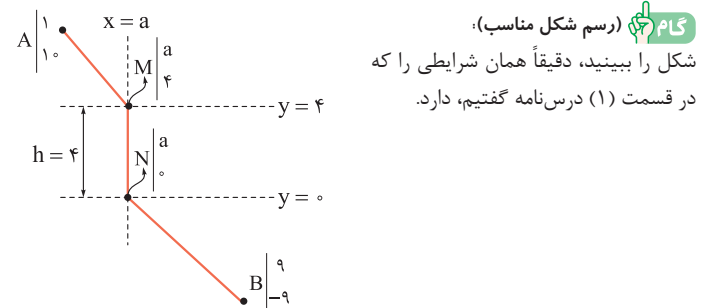
شکل را که بکشید، یاد یکی از مسائل کوتاه‌ترین مسیر می‌افتید که در کتاب درسی هم مشابه آن را داریم (همان مسئله‌ای که می‌گفت می‌خواهیم بین دو شهر که در طرفین یک رودخانه هستند، جاده بسازیم. (صفحه ۵۵ کتاب درسی هندسه ۲).



الف) P را به اندازه فاصله بین دو خط Δ و Δ' در راستای عمود بر آن‌ها، به پایین منتقل می‌کنیم تا P' به دست آید.

ب) از P' به Q وصل می‌کنیم تا Δ' را در N قطع کند و از N هم عمودی بر Δ رسم کرده و پای آن را M می‌نامیم. مسیر PMNQ، همان مسیر مورد نظر است.

۲) چون چهارضلعی PMNP' متوازی‌الاضلاع است، می‌توانیم بگوییم طول مسیر شکسته PMNQ برابر با $P'Q + MN$ است.



گام ۴ (محاسبه خواسته سؤال):

حالا با نوشتن قضیه کسینوسها در مثلث BCD، به یک معادله بر حسب X می‌رسیم:

$$BD^2 = BC^2 + CD^2 - 2BC \cdot CD \cdot \cos \hat{C}$$

$$\Rightarrow 6^2 = 4^2 + x^2 - 2(4)(x)\left(-\frac{1}{4}\right) \Rightarrow x^2 + 4x = 51$$

چون $x+2$ را می‌خواهیم، به جای $x^2 + 4x$ می‌نویسیم $(x+2)^2 - 4$:

$$(x+2)^2 - 4 = 51 \Rightarrow (x+2)^2 = 55 \Rightarrow x+2 = \sqrt{55}$$

۲۸- گزینه ۱

❖ شفاف‌سازی منظور از «کوچک‌ترین دایره گذرا بر دو نقطه $A(2,5)$ و $B(-4,1)$ » دایره‌ای به قطر AB است.

❖ استراتژی اول به کمک «شفاف‌سازی» مرکز و شعاع دایره را به دست می‌آوریم؛ بعد با داشتن مرکز و شعاع معادله دایره را می‌نویسیم. در آخر به جای Yهای معادله دایره، صفر می‌گذاریم تا نقطه‌های برخورد دایره با محور Xها به دست بیاید.

❖ درس‌نامه ۱ همان‌طور که در شکل مقابل می‌بینید، کوچک‌ترین دایره‌ای که از دو نقطه A و B می‌گذرد، دایره‌ای به قطر AB است.

❖ معادله دایره‌ای به مرکز $O(\alpha, \beta)$ و شعاع r، به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 = r^2$$

❖ هر وقت می‌خواستید محل برخورد یک منحنی مثل f را با محور Xها پیدا کنید، در معادله منحنی f، y را صفر بگذارید و معادله حاصل را حل کنید. برای پیدا کردن محل برخورد f با محور Yها هم باید x را صفر بگذارید.

❖ گام ۴ (به دست آوردن مرکز و شعاع دایره): طبق مورد (۱) درس‌نامه، کوچک‌ترین دایره‌ای که از دو نقطه $A(2,5)$ و $B(-4,1)$ می‌گذرد، دایره‌ای به قطر AB است؛ ببینید: حالا می‌توانیم بگوییم:

❖ مرکز دایره O، وسط AB است:

$$O = \frac{A+B}{2} = \frac{(2,5) + (-4,1)}{2} = \frac{(-2,6)}{2} = (-1,3)$$

❖ $2r = AB$

$$2r = AB \Rightarrow 2r = \sqrt{(-4-2)^2 + (1-5)^2} \Rightarrow 2r = \sqrt{36+16}$$

$$\Rightarrow 2r = \sqrt{52} = 2\sqrt{13} \Rightarrow r = \sqrt{13}$$

❖ گام ۴ (نوشتن معادله دایره): حالا که مرکز و شعاع دایره را داریم، می‌توانیم به کمک مورد (۲) درس‌نامه، معادله‌اش را بنویسیم:

$$\begin{cases} O(-1,3) \\ r = \sqrt{13} \end{cases} \Rightarrow (x-(-1))^2 + (y-3)^2 = (\sqrt{13})^2 \Rightarrow (x+1)^2 + (y-3)^2 = 13$$

❖ گام ۴ (پیدا کردن خواسته سؤال): در آخر طبق مورد (۳) درس‌نامه، به جای Y در معادله دایره، صفر می‌گذاریم تا محل برخورد دایره با محور Xها پیدا شود:

$$(x+1)^2 + \underbrace{(0-3)^2}_9 = 13 \Rightarrow (x+1)^2 = 4 \Rightarrow x+1 = \pm 2$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x+1=2 \Rightarrow x=1 \\ x+1=-2 \Rightarrow x=-3 \end{cases}$$

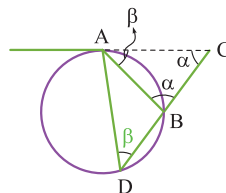
بنابراین دایره مورد نظر، محور Xها را با طول‌های ۱ و -۳ قطع می‌کند.

۲۹- گزینه ۳

❖ استراتژی اول شعاع دایره به قطر FF' را حساب می‌کنیم تا وضعیتش نسبت به بیضی مشخص شود؛ این‌جوری می‌توانیم یک شکل درست برای مسئله بکشیم.

بعد با توجه به این‌که M روی بیضی قرار دارد طول MF و MF' را بر حسب یک پارامتر می‌نویسیم. در ادامه نوع مثلث MFF' را مشخص می‌کنیم تا به دنبالش بتوانیم خواسته مسئله را به دست بیاوریم.

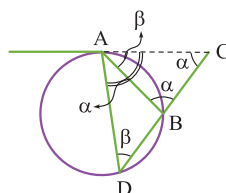
گام ۴ (پیدا کردن زاویه‌های برابر در شکل):



مثلث ABC طبق گفته سؤال متساوی‌الساقین است، پس زاویه‌های مجاور به قاعده آن را α در نظر می‌گیریم و زاویه دیگر آن را β . (شکل مقابل را ببینید). زاویه $\hat{CAB} = \beta$ یک زاویه ظلی است، پس طبق درس‌نامه، این زاویه برابر می‌شود با:

$$\beta = \frac{1}{2}\widehat{AB} \Rightarrow \widehat{AB} = 2\beta$$

زاویه ADB یک زاویه محاطی است؛ پس داریم: $\widehat{ADB} = \frac{1}{2}\widehat{AB} \Rightarrow \widehat{ADB} = \frac{1}{2}(2\beta) = \beta$ (این زاویه را با رنگ سبز به شکل اضافه می‌کنیم).



گام ۴ (اثبات متساوی‌الساقین بودن مثلث ACD):

به مثلث‌های ABC و ADC در شکل مقابل نگاه کنید. بیاید مجموع زوایای داخلی این دو مثلث را مساوی هم بگذاریم (چون این مجموع در هر دو مثلث 180° است، حق داریم این کار را انجام بدهیم):

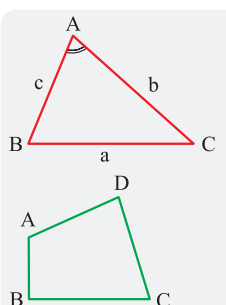
مجموع زاویه‌های داخلی مثلث ADC = مجموع زاویه‌های داخلی مثلث ABC

$$\Rightarrow \beta + \alpha + \alpha = \widehat{DAC} + \alpha + \beta \Rightarrow \widehat{DAC} = \alpha$$

البته می‌توانستیم این‌طور هم بگوییم که چون دو زاویه از مثلث ABC با دو زاویه از مثلث ACD برابر است ($\hat{CAB} = \hat{CDA} = \beta$ و $\hat{C} = \hat{C} = \alpha$)، پس زاویه سوم آن‌ها هم با مساوی می‌شوند، یعنی $\widehat{DAC} = \widehat{ADC} = \alpha$. حالا می‌توانیم بگوییم در مثلث ADC دو زاویه α داریم، پس این مثلث متساوی‌الساقین است؛ بنابراین $DA = DC$.

۲۷- گزینه ۲

❖ استراتژی اول در چهارضلعی داده‌شده، قطر روبه‌روی زاویه 60° را رسم می‌کنیم تا بتوانیم طولش را با استفاده از قضیه کسینوسها در مثلثی که زاویه 60° دارد، محاسبه کنیم. بعد، از محاطی بودن چهارضلعی استفاده می‌کنیم تا زاویه رو به 60° در آن مشخص شود. در آخر به کمک قضیه کسینوسها در مثلث بالایی خواسته مسئله را به دست می‌آوریم.



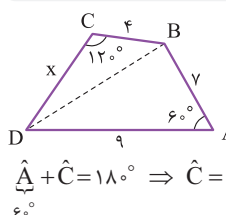
❖ درس‌نامه ۱ طبق قضیه کسینوسها، بین طول اضلاع مثلث ABC و زاویه A در شکل مقابل، رابطه زیر برقرار است:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \hat{A}$$

❖ در هر چهارضلعی محاطی، زوایای مقابل به هم، مکمل‌اند؛ این یعنی اگر چهارضلعی ABCD در شکل مقابل محاطی باشد، می‌توانیم دو رابطه زیر را بنویسیم:

$$\hat{A} + \hat{C} = 180^\circ, \quad \hat{B} + \hat{D} = 180^\circ$$

❖ شفاف‌سازی «چهارضلعی قابل محاط در یک دایره است.» یعنی این چهارضلعی محاطی است.



❖ گام ۴ (تحلیل سؤال و افزودن پاره‌خط مناسب به شکل): طبق شفاف‌سازی، چهارضلعی ABCD در شکل مقابل، محاطی است. پس طبق مورد (۲) درس‌نامه زاویه‌های A و C که روبه‌روی هم هستند، مکمل‌اند:

$$\hat{A} + \hat{C} = 180^\circ \Rightarrow \hat{C} = 120^\circ$$

حالا اگر قطر BD را رسم کنیم، به کمک قضیه کسینوسها در مثلث ABD، می‌توانیم طول BD را حساب کنیم. اگر در مثلث BCD هم از قضیه کسینوسها استفاده کنیم، به معادله‌ای می‌رسیم که تنها مجهول آن X است.

گام ۴ (محاسبه طول BD):

به کمک قضیه کسینوسها در مثلث ABD، طول BD را حساب می‌کنیم:

$$BD^2 = AB^2 + AD^2 - 2AB \cdot AD \cdot \cos \hat{A}$$

$$\Rightarrow BD^2 = 7^2 + 9^2 - 2 \times 7 \times 9 \times \left(-\frac{1}{2}\right) = 49 + 81 + 63 \Rightarrow BD^2 = 193$$



۳ اعدادی مضرب دو عدد a و b هستند که مضرب ک.م.م آن‌ها باشند، برای مثال اعدادی مضرب ۶ و ۹ هستند که مضرب $۱۸ = [۶, ۹]$ باشند.

۴ $n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$

۱۴۱ قرار است به تصادف یک عدد طبیعی دورقمی انتخاب کنیم پس $n(S) = \{۱۰, ۱۱, ۱۲, \dots, ۹۹\}$. مجموعه اعداد طبیعی دورقمی مضرب ۳ را A و مجموعه اعداد طبیعی دورقمی مضرب ۵ را B در نظر می‌گیریم. سؤال احتمال این که عدد انتخابی، مضرب ۳ یا ۵ باشد را می‌خواهد که برابر می‌شود با:

$$P = \frac{n(A \cup B)}{n(S)}$$

۱۴۲ طبق مورد (۴) درس‌نامه $n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$ است، حالا مقدار هر کدام از $n(A)$ ، $n(B)$ و $n(A \cap B)$ را محاسبه می‌کنیم:

♦ $n(A)$: تعداد اعداد مضرب ۳ در مجموعه $\{۱۰, ۱۱, \dots, ۹۹\}$ را می‌خواهیم که طبق مورد (۲) درس‌نامه برابر می‌شود با:

$$n(A) = \left\lfloor \frac{۹۹}{۳} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{۹}{۳} \right\rfloor = ۳۳ - ۳ = ۳۰$$

♦ $n(B)$: باز هم طبق مورد (۲) درس‌نامه داریم:

$$n(B) = \left\lfloor \frac{۹۹}{۵} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{۹}{۵} \right\rfloor = ۱۹ - ۱ = ۱۸$$

♦ $n(A \cap B)$: یعنی اعدادی که هم مضرب ۳ و هم مضرب ۵ اند. طبق مورد (۳) درس‌نامه این اعداد مضرب $[۳, ۵] = ۱۵$ هستند و تعدادشان برابر است با:

$$n(A \cap B) = \left\lfloor \frac{۹۹}{۱۵} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{۹}{۱۵} \right\rfloor = ۶ - ۰ = ۶$$

بنابراین $n(A \cup B) = ۳۰ + ۱۸ - ۶ = ۴۲$ بنابراین ۴۲ عدد دورقمی داریم که مضرب ۳ یا ۵ هستند.

۱۴۳ تعداد اعداد دورقمی ۹۰ تا است، پس احتمال این که یک عدد مضرب ۳ یا ۵ باشد برابر $\frac{۴۲}{۹۰} = \frac{۷}{۱۵}$ است.

۳۴ - گزینه ۱

۱ درس‌نامه فضای نمونه‌ای پرتاب n تاس، ۶^n عضو دارد. برای مثال فضای نمونه‌ای پرتاب ۳ تاس، $۶^۳ = ۲۱۶$ عضو دارد.

۲ اگر n تاس همگن را پرتاب کنیم، در نیمی از حالات مجموع اعداد رو شده تاس‌ها زوج و در نیمی دیگر، مجموع اعداد رو شده تاس‌ها فرد است.

۱۴۴ فضای نمونه‌ای پرتاب ۳ تاس، $۶^۳ = ۲۱۶$ عضو دارد. طبق مورد (۲) درس‌نامه، در نیمی از این حالات مجموع اعداد رو شده فرد می‌شود، پس تعداد کل حالات $۱۰۸ = \frac{۲۱۶}{۲}$ تا است.

۱۴۵ ما حالاتی را می‌خواهیم که جمع اعداد رو شده فرد و حداقل یکی از تاس‌ها ۲ باشد. دقت کنید مجموع اعداد رو شده ۳ تاس زمانی فرد می‌شود که یا هر ۳ تا فرد باشند (که این حالت به درد ما نمی‌خورد چون می‌خواهیم حداقل یکی از تاس‌ها زوج (عدد ۲) باشد) یا یکی از تاس‌ها فرد و دو تاس دیگر زوج باشند، پس سه حالت داریم:

$$\begin{cases} ۲, ۲, ۲ \Rightarrow ۳ \times \frac{۳!}{۳!} = ۹ & \text{جایگشت دو تا تکراری کدام عدد فرد} \\ ۲, ۴, ۴ \Rightarrow ۳ \times \frac{۳!}{۲!} = ۱۸ & \text{جایگشت کدام عدد فرد} \\ ۲, ۶, ۶ \Rightarrow ۳ \times \frac{۳!}{۲!} = ۱۸ & \text{جایگشت کدام عدد فرد} \end{cases}$$

$$۹ + ۱۸ + ۱۸ = ۴۵$$

بنابراین تعداد حالات‌های مطلوب می‌شود: ۴۵ حالت مطلوب داریم، پس جواب برابر است با:

$$\frac{۴۵}{۱۰۸} = \frac{۵}{۱۲}$$

۳۵ - گزینه ۲

۱۴۶ ۳ ظرف داریم و می‌خواهیم از یک ظرف دو مهره انتخاب کنیم، پس احتمال انتخاب هر ظرف $\frac{۱}{۳}$ است.

۱۴۷ حالا اگر از ظرف اول ۲ مهره انتخاب کنیم، احتمال این که حداقل یکی از دو مهره سیاه باشد صفر است، چون این ظرف اصلاً مهره سیاه ندارد.

۲ طرفین یک تساوی ماتریسی را می‌توانیم در یک ماتریس دلخواه ضرب کنیم. چیزی که این‌جا اهمیت دارد این است که ماتریس مورد نظر را باید از یک سمت در طرفین تساوی ضرب کنیم. مثلاً اگر بخواهیم ماتریس C را در طرفین تساوی $A = B$ ضرب کنیم، یا باید بنویسیم $AC = BC$ (هر دو طرف را از راست تو ضرب کردیم) یا $CA = CB$ (هر دو طرف را از چپ تو ضرب کردیم)؛ اما در حالت کلی هیچ‌وقت نمی‌توانیم بنویسیم $AC = CB$.

۳ $AA^{-1} = A^{-1}A = I$

۱۴۸ (حذف ماتریس سمت چپ X): اول طرفین تساوی $\begin{bmatrix} ۲ & ۳ \\ ۴ & ۵ \end{bmatrix} X \begin{bmatrix} ۲ & -۱ \\ -۴ & ۳ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۴ & ۰ \\ ۰ & ۸ \end{bmatrix}$ را از سمت چپ در

ضرب می‌کنیم تا ماتریس قرمز سمت چپ X حذف شود:

$$\begin{bmatrix} ۲ & ۳ \\ ۴ & ۵ \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} ۲ & ۳ \\ ۴ & ۵ \end{bmatrix} X \begin{bmatrix} ۲ & -۱ \\ -۴ & ۳ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۲ & ۳ \\ ۴ & ۵ \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} ۴ & ۰ \\ ۰ & ۸ \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow X \begin{bmatrix} ۲ & -۱ \\ -۴ & ۳ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۲ & ۳ \\ ۴ & ۵ \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} ۴ & ۰ \\ ۰ & ۸ \end{bmatrix}$$

۱۴۹ (حذف ماتریس سمت راست X): حالا تساوی بالا را از سمت راست در $\begin{bmatrix} ۲ & -۱ \\ -۴ & ۳ \end{bmatrix}^{-1}$ ضرب می‌کنیم تا ماتریس آبی سمت راست X هم حذف شود:

$$X \begin{bmatrix} ۲ & -۱ \\ -۴ & ۳ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ۲ & -۱ \\ -۴ & ۳ \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} ۲ & ۳ \\ ۴ & ۵ \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} ۴ & ۰ \\ ۰ & ۸ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ۲ & -۱ \\ -۴ & ۳ \end{bmatrix}^{-1}$$

$$\Rightarrow X = \begin{bmatrix} ۲ & ۳ \\ ۴ & ۵ \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} ۴ & ۰ \\ ۰ & ۸ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ۲ & -۱ \\ -۴ & ۳ \end{bmatrix}^{-1} \quad (*)$$

۱۵۰ (به دست آوردن خواسته سؤال): در ادامه $\begin{bmatrix} ۲ & ۳ \\ ۴ & ۵ \end{bmatrix}^{-1}$ و $\begin{bmatrix} ۲ & -۱ \\ -۴ & ۳ \end{bmatrix}^{-1}$ را به کمک مورد (۱) درس‌نامه حساب می‌کنیم:

$$\begin{bmatrix} ۲ & -۱ \\ -۴ & ۳ \end{bmatrix}^{-1} = \frac{۱}{(۲)(۳) - (-۱)(-۴)} \begin{bmatrix} ۳ & ۱ \\ ۴ & ۲ \end{bmatrix} = \frac{۱}{۲} \begin{bmatrix} ۳ & ۱ \\ ۴ & ۲ \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} ۲ & ۳ \\ ۴ & ۵ \end{bmatrix}^{-1} = \frac{۱}{(۲)(۵) - (۳)(۴)} \begin{bmatrix} ۵ & -۳ \\ -۴ & ۲ \end{bmatrix} = -\frac{۱}{۲} \begin{bmatrix} ۵ & -۳ \\ -۴ & ۲ \end{bmatrix}$$

در آخر با جای‌گذاری موارد بالا در تساوی $(*)$ ، ماتریس X را به دست می‌آوریم:

$$X = \left(-\frac{۱}{۲} \begin{bmatrix} ۵ & -۳ \\ -۴ & ۲ \end{bmatrix}\right) \begin{bmatrix} ۴ & ۰ \\ ۰ & ۸ \end{bmatrix} \left(\frac{۱}{۲} \begin{bmatrix} ۳ & ۱ \\ ۴ & ۲ \end{bmatrix}\right) = -\frac{۱}{۴} \begin{bmatrix} ۵ & -۳ \\ -۴ & ۲ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ۴ & ۰ \\ ۰ & ۸ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ۳ & ۱ \\ ۴ & ۲ \end{bmatrix}$$

$$= -\frac{۱}{۴} \begin{bmatrix} ۲۰ & -۲۴ \\ -۱۶ & ۱۶ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ۳ & ۱ \\ ۴ & ۲ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -۵ & ۶ \\ ۴ & -۴ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ۳ & ۱ \\ ۴ & ۲ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۹ & \bullet \\ \bullet & \bullet \end{bmatrix}$$

تنها گزینه‌ای که درایه سطر اول و ستون اولش ۹ است، ماتریس $\begin{bmatrix} ۹ & ۷ \\ -۴ & -۴ \end{bmatrix}$ در (۳) است، پس این گزینه صحیح است.

۳۲ - گزینه ۲

بدترین حالت این است که حداکثر ۳ کتاب هم‌موضوع داشته باشیم، یعنی ۳ کتاب ادبی، ۲ کتاب هنر (کلاً ۲ تا کتاب هنر داریم) و ۳ کتاب ریاضی برداریم که می‌شود $۳ + ۲ + ۳ = ۸$ کتاب. حالا با انتخاب کتاب نهم، مطمئن هستیم که حداقل ۴ کتاب هم‌موضوع داریم.

۳۳ - گزینه ۳

۱ درس‌نامه تعداد اعداد طبیعی مضرب k در مجموعه $\{۱, ۲, ۳, \dots, n\}$ برابر است با: $\left\lfloor \frac{n}{k} \right\rfloor$

۲ تعداد اعداد طبیعی مضرب k در مجموعه $\{m, m+۱, m+۲, \dots, n\}$ برابر است با:

تعداد مضرب k های $\{۱, ۲, \dots, m-۱\}$ و تعداد مضرب k های $\{۱, ۲, \dots, n\}$

$$\left\lfloor \frac{n}{k} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{m-۱}{k} \right\rfloor$$



درس نامه ۱ اگر عدد صحیح a را بر عدد طبیعی b تقسیم کنیم و خارج قسمت و باقی مانده را به ترتیب با q و r نمایش دهیم، الگوریتم تقسیم به صورت زیر می شود:

$$a = bq + r \quad (0 \leq r < b)$$

شرط باقی مانده باقی مانده خارج قسمت مقسوم علیه مقسوم

۲ اگر عدد a مضرب b باشد، $a \equiv 0 \pmod{b}$ می شود.

گام ۱ عدد مورد نظر را a در نظر می گیریم. به گفته سؤال باقی مانده تقسیم a بر 430 برابر با مجذور باقی مانده است، پس قضیه تقسیم به این صورت می شود:

$$a = 430q + r \quad (0 \leq r < 430)$$

باقی مانده (r) مقسوم علیه (b)

گام ۲ حالا شرط تقسیم را می نویسیم تا مقادیر قابل قبول برای q را به دست بیاوریم:

$$0 \leq r < 430 \Rightarrow 0 \leq 430q + r < 430 \Rightarrow 0 \leq q < 1 \dots \Rightarrow q \in \{0, 1, 2, \dots, 429\}$$

گام ۳ می خواهیم a مضرب 9 باشد، پس طبق مورد (۲) درس نامه $a \equiv 0 \pmod{9}$ می شود:

$$a \equiv 0 \pmod{9} \Rightarrow 430q + r \equiv 0 \pmod{9} \Rightarrow 7q + r \equiv 0 \pmod{9}$$

حاصل ضرب q و 7 باید مضرب 9 باشد. $q(7) \equiv 0 \pmod{9} \Rightarrow q \equiv 0 \pmod{9}$

گام ۴ برای این که حاصل ضرب q و 7 مضرب 9 باشد، 3 حالت داریم:

- حالت اول: q مضرب 9 باشد که در بین مقادیر q ، 9 و 18 را داریم که این گونه اند، یعنی 2 مقدار.
- حالت دوم: $q + 7$ مضرب 9 باشد که در بین مقادیر q ، 2 ، 11 و 20 را داریم که این گونه اند، یعنی 3 مقدار.
- حالت سوم: q مضرب 3 و $q + 7$ مضرب 3 باشد، یعنی: دو همنهشتی مقابل نمی توانند هم زمان برقرار باشند (نمی شود که q هم بر 3 بخش پذیر باشد، هم نباشد!) پس این حالت امکان ندارد.

بنابراین q می تواند 2 ، 9 ، 11 ، 18 و 20 باشد، پس 5 جواب هم برای a داریم.

۳۸ - گزینه ۳

شفاف سازی «عدد $2^n - 1$ بر عدد 217 بخش پذیر است.»؛ یعنی $2^n - 1 \equiv 0 \pmod{217}$ و در نتیجه $2^n \equiv 1 \pmod{217}$ است.

استراتژی چون 217 عدد بزرگی است، آن را به دو عدد نسبت به هم اول 7 و 31 می شکنیم. این جوری به جای بررسی همنهشتی $2^n \equiv 1 \pmod{217}$ باید دو همنهشتی ساده تر $2^n \equiv 1 \pmod{7}$ و $2^n \equiv 1 \pmod{31}$ را حل کنیم.

درس نامه اگر طرفین دو همنهشتی یکسان ولی پیمانه هایشان متفاوت باشد، می توانیم به کمک قانون مقابل آن ها را به یک همنهشتی تبدیل کنیم:

$$\begin{cases} a \equiv b \pmod{m} \\ a \equiv b \pmod{n} \end{cases} \Rightarrow a \equiv b \pmod{[m,n]}$$

گام ۱ طبق استراتژی باید دو معادله $2^n \equiv 1 \pmod{7}$ و $2^n \equiv 1 \pmod{31}$ را حل کنیم. با همنهشتی $2^n \equiv 1 \pmod{7}$ شروع می کنیم. باید کوچک ترین توانی از 2 را پیدا کنیم که به پیمانه 7 یا 1 یا -1 همنهشت باشد:

$$2^3 \equiv 1 \pmod{7} \quad (2^3 \equiv 1 \pmod{7})$$

گام ۲ حالا می رویم به سراغ $2^n \equiv 1 \pmod{31}$. کوچک ترین توانی از 2 را پیدا می کنیم که به پیمانه 31 ، 1 یا -1 همنهشت باشد:

$$2^5 \equiv 1 \pmod{31} \quad (2^5 \equiv 1 \pmod{31})$$

گام ۳ حالا سعی می کنیم طرفین همنهشتی های (*) و (**) را یکسان کنیم:

$$\begin{cases} 2^{17} \equiv 1 \pmod{7} \\ 2^{17} \equiv 1 \pmod{31} \end{cases} \Rightarrow 2^{17} \equiv 1 \pmod{217}$$

اگر از ظرف دوم 2 مهره انتخاب کنیم، احتمال این که حداقل یکی از دو مهره سیاه باشد 1 است، چون همه مهره های این ظرف سیاه است.

و در آخر اگر از ظرف سوم 2 مهره انتخاب کنیم، برای محاسبه احتمال این که حداقل یکی از دو مهره سیاه باشد، به صورت زیر عمل می کنیم:

به $36 = \binom{9}{2}$ حالت می توانیم 2 مهره از این ظرف انتخاب کنیم که در $6 = \binom{4}{2}$ تای آن ها (انتخاب دو مهره از بین 4 مهره سفید) هر دو مهره سفیدند، پس طبق اصل متمم، در $36 - 6 = 30$ حالت حداقل یکی از دو مهره سیاه اند؛ بنابراین احتمالی که به دنبالش هستیم $\frac{30}{36} = \frac{5}{6}$ است.

گام ۴ حالا نمودار درختی را رسم می کنیم:

- انتخاب ظرف اول: دو مهره انتخاب کنیم و حداقل یکی سیاه باشد. $\frac{1}{3}$
- انتخاب ظرف دوم: دو مهره انتخاب کنیم و حداقل یکی سیاه باشد. $\frac{1}{3}$
- انتخاب ظرف سوم: دو مهره انتخاب کنیم و حداقل یکی سیاه باشد. $\frac{5}{6}$

$$\left(\frac{1}{3} \times 0\right) + \left(\frac{1}{3} \times 1\right) + \left(\frac{1}{3} \times \frac{5}{6}\right) = \frac{11}{18}$$

بنابراین جواب برابر است با:

۳۶ - گزینه ۳

استراتژی اول با توجه به نمودار میله ای، جدول فراوانی داده ها را رسم می کنیم؛ میانگین موزون داده ها را محاسبه می کنیم.

درس نامه ۱ در نمودار میله ای فراوانی، ارتفاع هر میله برابر فراوانی داده است.

۲ اگر مطابق جدول زیر، فراوانی داده های $x_1, x_2, \dots, x_n$ به ترتیب برابر با $f_1, f_2, \dots, f_n$ باشند:

داده ها	x_1	x_2	...	x_n
فراوانی	f_1	f_2	...	f_n

میانگین این داده ها که با $\bar{x}$ نمایش می دهیم، از رابطه زیر به دست می آید:

$$\bar{x} = \frac{x_1 f_1 + x_2 f_2 + \dots + x_n f_n}{f_1 + f_2 + \dots + f_n}$$

۳ اگر همه داده ها را با عددی ثابت مثل a جمع کنیم، میانگین هم با a جمع می شود و اگر همه داده ها را منهای a کنیم، میانگین هم منهای a می شود؛ بنابراین وقتی داده ها بزرگ اند می توانیم همه را منهای عددی ثابت مثل a کنیم، میانگین داده های جدید را به دست آورده و با آن عدد ثابت، یعنی a جمع کنیم تا جواب حاصل شود.

گام ۱ با توجه به نمودار میله ای، جدول فراوانی زیر را رسم می کنیم:

داده ها	7	12	13	17	19
فراوانی	12	18	35	10	25

گام ۲ داده ها بزرگ اند و محاسبه میانگین، محاسبات زیادی دارد. برای همین طبق مورد (۳) درس نامه، اول از همه داده ها 13 واحد کم می کنیم تا به جدول زیر برسیم:

داده ها	-6	-1	0	4	6
فراوانی	12	18	35	10	25

حالا میانگین داده های بالا را به دست می آوریم:

$$\bar{x}_{جدید} = \frac{-6 \times 12 - 1 \times 18 + 0 \times 35 + 4 \times 10 + 6 \times 25}{12 + 18 + 35 + 10 + 25} = \frac{100}{100} = 1$$

در آخر 13 واحدی که از داده ها کم کردیم را به میانگین داده های جدید اضافه می کنیم تا میانگین داده های واقعی مشخص شود:

$$\bar{x}_{واقعی} = 1 + 13 = 14$$

۳۷ - گزینه ۲

استراتژی ابتدا الگوریتم تقسیم را بنویسید و فرض کنید خارج قسمت q است که در این صورت باقی مانده q^2 می شود. حالا با نوشتن شرط باقی مانده، مقادیر قابل قبول برای q به دست می آیند، در آخر با بررسی حالاتی که عدد مورد نظر مضرب 9 است، جواب حاصل می شود.



فیزیک

گزینه ۳ - ۴۱

درس نامه ویژگی مغناطیسی مواد

اتم‌ها خاصیت مغناطیسی دارند.

دوقطبی‌های مغناطیسی به طور کاتوره‌ای سمت‌گیری کرده‌اند.

در حضور میدان مغناطیسی خارجی قوی، دوقطبی‌های مغناطیسی آن‌ها

به مقدار مختصری در راستای خط‌های میدان مغناطیسی منظم می‌شوند.

پارامغناطیس در حضور میدان‌های مغناطیسی قوی، خاصیت مغناطیسی ضعیف و موقت

پیدا می‌کند.

مثال: پلاتین، اورانیم، آلومینیم، سدیم، اکسیژن و اکسید نیتروژن

همان‌طور که در درس‌نامه گفتیم، مواد پارامغناطیسی در حضور میدان‌های مغناطیسی قوی

خاصیت مغناطیسی ضعیف و موقت پیدا می‌کنند.

مشاوره مطالب حفظی کتاب درسی، سابقه مطرح‌شدن در کنکور را دارند و غالباً

سؤالات راحتی هستند، پس کتاب درسی را حتماً مطالعه کنید.

گزینه ۴ - ۴۲

استراتژی در مسائل واپاشی، عدد جرمی قبل از فرایند با مجموع عدد جرمی‌ها پس

از فرایند و همچنین عدد اتمی قبل از فرایند با مجموع عدد اتمی‌ها پس از فرایند را برابر با

یکدیگر قرار بدهید و مجهول‌ها را پیدا کنید.

درس نامه ۱ پروتوهای α ، ذرات باردار مثبت از جنس هسته اتم هلیوم (${}^4_2\text{He}$) هستند و فرایند واپاشی α به صورت روبه‌رو است:

$A_Z X \rightarrow A_{Z-2} Y + {}^4_2\text{He}$

تعداد نوترون‌های هسته، برابر با اختلاف عدد جرمی و عدد اتمی آن است.

عدد اتمی $N = A - Z \rightarrow$ عدد نوترون‌ها

عدد جرمی

گام ۱ پروتوهای α ، ذرات باردار مثبت از جنس هسته اتم هلیوم (${}^4_2\text{He}$) هستند، پس

فرایند این واپاشی را به صورت روبه‌رو بازنویسی می‌کنیم. ${}^{241}_{95}\text{Am} \rightarrow {}^{237}_{93}\text{Np} + {}^4_2\text{He}$

گام ۲ تعداد نوکلئون‌ها قبل از فرایند با تعداد نوکلئون‌ها پس از فرایند یکسان است.

بنابراین می‌توانیم بنویسیم: $95 = Z + 2 \Rightarrow Z = 93$ عدد اتمی

گام ۳ حالا تعداد نوترون‌های نه‌تونیم را با استفاده از اختلاف عدد جرمی و عدد اتمی آن

به دست می‌آوریم. $N = A - Z \xrightarrow{Z=93} N = 237 - 93 = 144$

تله اگر تعداد پروتون‌ها (عدد اتمی) را با تعداد نوترون‌ها اشتباه بگیرید، شما را

شکار خواهد کرد.

گزینه ۳ - ۴۳

شفاف‌سازی جابه‌جایی متحرک در ثانیه سوم ($2 \leq t < 3$) حرکت برابر صفر

است؛ یعنی متحرک در لحظه $t' = 2/\Delta s$ تغییر جهت می‌دهد.

استراتژی نمودار سرعت - زمان متحرک را رسم کنید سپس با استفاده از مساحت

محصور بین نمودار سرعت - زمان و محور زمان، مسافت طی‌شده توسط متحرک را در بازه

زمانی خواسته‌شده به دست بیاورید.

درس نامه ۱ شتاب متوسط، اگر سرعت

متحرکی در لحظه t_1 برابر با v_1 و در لحظه t_2 برابر با

v_2 باشد، آن‌گاه شتاب متوسط آن از رابطه مقابل به

دست می‌آید.

در حرکت با شتاب ثابت بر روی خط راست، شتاب متحرک در هر لحظه با شتاب متوسط آن

در هر بازه زمانی، یکسان است.

همان‌طور که می‌بینید طرفین دو همنهشتی به‌دست‌آمده یکسان ولی پیمانه‌هایشان متفاوت است، پس طبق درس‌نامه می‌توانیم آن‌ها را به یک همنهشتی تبدیل کنیم:

$${}^{217}_{15}\text{k} \equiv 1 \Rightarrow {}^{217}_{15}\text{k} \equiv 1 \quad {}^{217}_{15}\text{k} \equiv 1 \Rightarrow {}^{217}_{15}\text{k} \equiv 1$$

گام ۱ با مقایسه همنهشتی بالا با همنهشتی ${}^{217}_{15}\text{k} \equiv 1$ ، نتیجه می‌گیریم که $n = 15k$.

به دنبال تعداد اعداد دورقمی n هستیم، پس تعداد جواب‌های نامعادله $10 \leq n < 100$ را

پیدا می‌کنیم:

$$10 \leq n < 100 \xrightarrow{n=15k} 10 \leq 15k < 100 \Rightarrow 0/... \leq k < 6/... \Rightarrow k = 1, 2, 3, 4, 5, 6$$

بنابراین مسئله ۶ جواب دارد.

گزینه ۴ - ۳۹

این گراف را به دو صورت می‌توانیم رسم کنیم که در هر دو

حالت، ۶ دور داریم:

حالت اول: اگر گراف به شکل مقابل باشد، دورهای گراف

عبارت‌اند از:

$afbea, afbda, afbca, aebda, aebca, adbca$

البته می‌توانستیم تعداد دورهای این گراف را به کمک نکته زیر هم محاسبه کنیم:

نکته اگر در گرافی با مرتبه p ، دو رأس از درجه

$2-p$ و رئوس دیگر از درجه ۲ باشند به شرطی که

دو رأس از درجه $2-p$ مجاور نباشند، نمودار گراف به

شکل مقابل می‌شود:

در این گراف فقط دورهایی به طول ۴ داریم که در همه این دورها، دو رأس بالایی و پایینی (رئوس

a و b) و ۲ رأس از بین رئوس رنگی وجود دارند. برای انتخاب ۲ رأس از بین رئوس رنگی (تعداد

رئوس رنگی $2-p$ تااست) $\binom{2-p}{2}$ حالت داریم، پس تعداد دورها هم $\binom{2-p}{2}$ می‌شود.

با توجه به نکته گفته‌شده، در گراف G ، $\binom{4}{2} = 6$ دور داریم.

حالت دوم: اگر گراف به شکل مقابل باشد، دورهای گراف

عبارت‌اند از:

$aefba, aefbda, aefbca, abda, abca, adbca$

گزینه ۱ - ۴۰

درس نامه ۱ به زیرمجموعه D از رئوس گراف G ، یک مجموعه احاطه‌گر می‌گوییم

هرگاه هر رأس از گراف یا در D باشد یا حداقل با یکی از اعضای D مجاور باشد.

۲ مجموعه احاطه‌گری که با حذف هر کدام از عضوهایش دیگر احاطه‌گر نباشد را یک

مجموعه احاطه‌گر مینیمال می‌نامیم.

گزینه‌ها را بررسی می‌کنیم:

۱ مطابق شکل، با انتخاب رئوس a, e و g ، رأس d

احاطه نمی‌شود، پس این مجموعه اصلاً احاطه‌گر نیست

که بخواهد احاطه‌گر مینیمال باشد.

بررسی سایر گزینه‌ها: **۲** با انتخاب رئوس a, f و

g ، تمام رئوس گراف احاطه می‌شوند، پس این مجموعه

احاطه‌گر هست. حالا اگر رأس a را از مجموعه حذف

کنیم خود رأس a احاطه نمی‌شود. اگر رأس f را حذف

کنیم، رأس‌های d و e احاطه نمی‌شوند و اگر رأس g را

حذف کنیم، h احاطه نمی‌شود، پس با حذف کردن هر

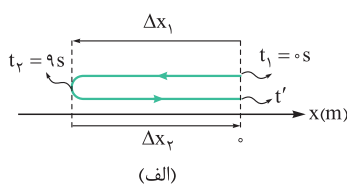
کدام از رئوس، این مجموعه دیگر احاطه‌گر نیست؛ در نتیجه احاطه‌گر مینیمال است.

۳ و **۴** این مجموعه‌ها هم احاطه‌گر مینیمال هستند که بررسی آن‌ها مثل **۲** است.

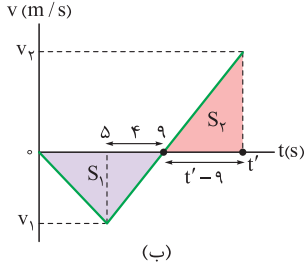
مشاوره احاطه‌گری (درس ۲ گراف) از جمله مباحثی است که در نظام جدید به

کتاب درسی اضافه شده و طراحان، علاقه زیادی به این مبحث دارند، پس لازم است روی

آن وقت کافی بگذارید.



گام ۴ با توجه به نمودار سرعت - زمان، متحرک در بازه زمانی $t_1 = 0$ s تا $t_2 = 9$ s در خلاف جهت محور حرکت می کند و در لحظه $t_2 = 9$ s تغییر جهت داده و در جهت محور X به حرکت خود ادامه می دهد (شکل الف).



گام ۵ هم چنین متحرک در لحظه $t_1 = 0$ s در مکان $x = 0$ m قرار دارد و در لحظه $t' = 9$ s دوباره از این مکان عبور می کند. پس با توجه به شکل (الف)، اندازه جابه جایی متحرک در بازه زمانی $t_1 = 0$ s تا $t_2 = 9$ s برابر با جابه جایی آن در بازه زمانی $t_2 = 9$ s تا $t' = 9$ s و در نتیجه مساحت بین نمودار سرعت - زمان و محور t در این دو بازه زمانی یکدیگر برابر است (شکل ب).

گام ۶ برای این که مساحت های S_1 و S_2 را به دست بیاوریم، به v_1 و v_2 نیاز داریم؛ بنابراین با استفاده از تشابه مثلث ها می توانیم بنویسیم:

$$\frac{v_1}{4} = \frac{v_2}{t' - 9} \Rightarrow v_2 = \frac{t' - 9}{4} v_1$$

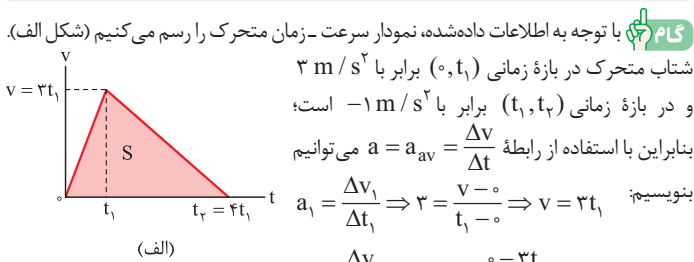
گام ۷ حالا مساحت های S_1 و S_2 را برابر با یکدیگر قرار می دهیم و t' را پیدا می کنیم.

$$S_1 = S_2 \Rightarrow \frac{9v_1}{2} = \frac{(t' - 9)v_2}{2} \Rightarrow \frac{9v_1}{2} = \frac{(t' - 9)}{2} \cdot \frac{(t' - 9)}{4} v_1$$

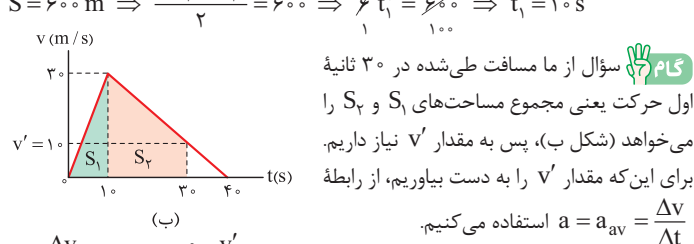
$$\Rightarrow (t' - 9)^2 = 36 \Rightarrow t' - 9 = \pm 6 \Rightarrow \begin{cases} t' = 15 \text{ s} \\ t' = 3 \text{ s} \end{cases} \xrightarrow{t' > 9 \text{ s}} t' = 15 \text{ s}$$

۴۵ - گزینه ۴

استراتژی سؤال را دوباره بخوانید! سؤال انگار به شما نحوه رسم نمودار سرعت - زمان متحرک را می گوید. بهترین روش برای حل این جور سؤال ها، رسم نمودار سرعت - زمان متحرک است.



گام ۲ با توجه به این که مسافت طی شده در کل مسیر 600 m است، پس مساحت محصور بین نمودار سرعت - زمان متحرک و محور t نیز برابر با 600 m است؛ بنابراین می توانیم بنویسیم:

$$S = 600 \text{ m} \Rightarrow \frac{(4t_1)(3t_1)}{2} = 600 \Rightarrow t_1^2 = 100 \Rightarrow t_1 = 10 \text{ s}$$


گام ۴ در آخر خواسته سؤال یعنی مجموع مساحت های S_1 و S_2 را محاسبه می کنیم.

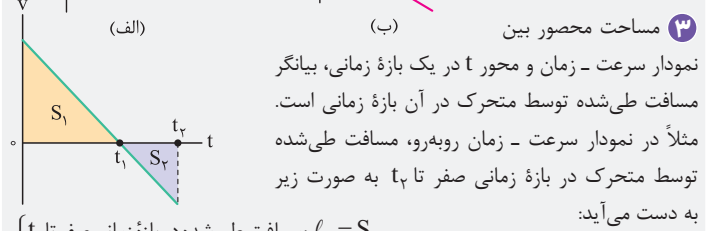
$$\ell = S_1 + S_2 = \frac{10 \times 30}{2} + \frac{(30 + 10)(20)}{2} = 150 + 400 = 550 \text{ m}$$

۴۶ - گزینه ۲

درس نامه ۱ انرژی جنبشی؛ انرژی جنبشی جسمی با جرم m که با تندy در حال حرکت است، از رابطه زیر به دست می آید:

جرم (kg) $K = \frac{1}{2} m v^2 \rightarrow (\text{m/s})$ تندy

۲ شیب نمودار سرعت - زمان در هر لحظه، بیانگر شتاب متحرک در آن لحظه است. نمودار سرعت - زمان متحرکی که با شتاب ثابت بر روی خط راست حرکت می کند، به صورت یک خط راست است (شکل های الف و ب).

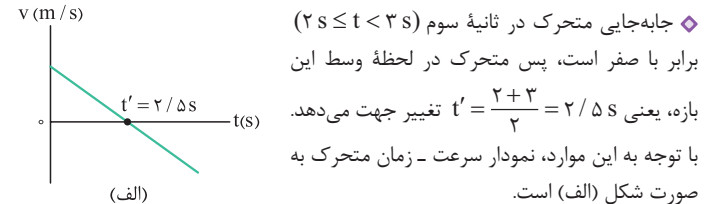


$$\begin{cases} \ell_1 = S_1 & \text{مسافت طی شده در بازه زمانی صفر تا } t_1 \\ \ell_2 = S_2 & \text{مسافت طی شده در بازه زمانی } t_1 \text{ تا } t_2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \ell = \ell_1 + \ell_2 = S_1 + S_2$$

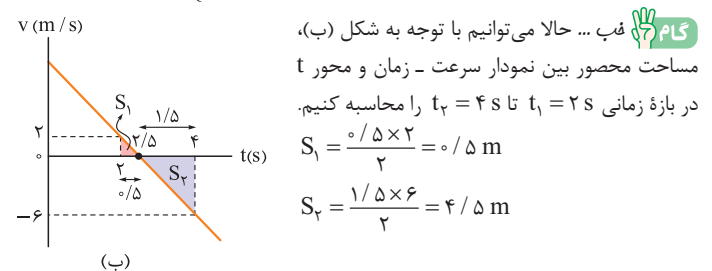
گام ۴ برای این که مسافت طی شده در بازه زمانی داده شده را به دست بیاوریم، بهترین کار رسم نمودار سرعت - زمان متحرک است. برای رسم نمودار سرعت - زمان این متحرک، به نکات زیر توجه کنید.

♦ شتاب متحرک ثابت و علامت آن منفی است، پس نمودار سرعت - زمان آن به صورت یک خط راست با شیب منفی است.



گام ۵ برای این که مسافت طی شده توسط متحرک در بازه زمانی $t_1 = 2 \text{ s}$ تا $t_2 = 4 \text{ s}$ را پیدا کنیم، به مساحت محصور بین نمودار سرعت - زمان و محور t در این بازه زمانی نیاز داریم. پس ابتدا سرعت متحرک در لحظه های $t_1 = 2 \text{ s}$ و $t_2 = 4 \text{ s}$ را به دست می آوریم.

$$a = a_{av} = \frac{\Delta v}{\Delta t} \Rightarrow \begin{cases} a = \frac{v_2/5 - v_2}{t_2/5 - t_2} \Rightarrow -4 = \frac{0 - v_2}{2/5 - 2} \Rightarrow v_2 = 2 \text{ m/s} \\ a = \frac{v_4 - v_2/5}{t_4 - t_2/5} \Rightarrow -4 = \frac{v_4 - 0}{4 - 2/5} \Rightarrow v_4 = -6 \text{ m/s} \end{cases}$$

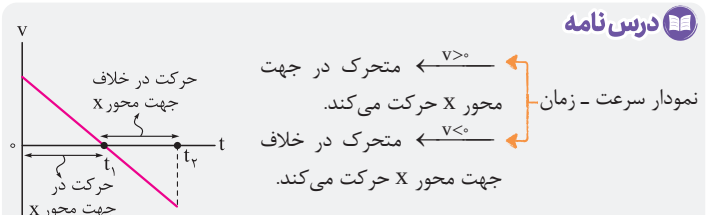


گام ۷ مسافت طی شده توسط متحرک در بازه زمانی $t_1 = 2 \text{ s}$ تا $t_2 = 4 \text{ s}$ برابر با مجموع مساحت های S_1 و S_2 است؛ بنابراین می توانیم بنویسیم:

$$\ell = S_1 + S_2 = \frac{S_1 = 0/5 \text{ m}}{S_2 = 4/5 \text{ m}} \rightarrow \ell = 0/5 + 4/5 = 5 \text{ m}$$

۴۴ - گزینه ۱

درس نامه





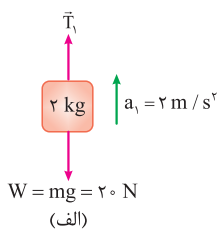
نکته در مثلث قائم‌الزاویه، اگر یکی از ضلع‌ها مضربی از Δk و ضلع دیگر مضربی از $12k$ باشد، آن‌گاه وتر این مثلث مضربی از $13k$ است.

با توجه به نکته بالا، مقدار f_D را سریع‌تر می‌توانستیم به دست بیاوریم.

$$\begin{cases} 12k = 4/8 \\ 13k = 5/2 \end{cases} \Rightarrow k = 0/4 \text{ و } f_D = \Delta k \xrightarrow{k=0/4} f_D = 2 \text{ N}$$

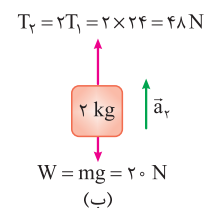
مشاوره تمام مسائل، مثال‌ها، تمرین‌ها و ... کتاب درسی را جدی بگیرید! مثلاً این سؤال مشابه مثال ۲-۲ کتاب درسی‌تان است.

گزینه ۲ - ۴۹



گام ۱ قانون دوم نیوتون را برای حالت اول می‌نویسیم تا نیروی کشش طناب در حالت اول (T_1) را به دست بیاوریم (شکل الف).

$$F_{\text{net},1} = ma_1 \Rightarrow T_1 - mg = ma_1$$

$$\Rightarrow T_1 - 20 = 2 \times 2 \Rightarrow T_1 = 24 \text{ N}$$


گام ۲ با توجه به شکل (ب)، قانون دوم نیوتون را برای حالت دوم می‌نویسیم تا شتاب جسم در این حالت را به دست بیاوریم (هواستون باشد که در این حالت نیروی کشش طناب، دو برابر شده است).

$$F_{\text{net},2} = ma_2 \Rightarrow T_2 - mg = ma_2$$

$$\xrightarrow{T_2 = 48 \text{ N}} 48 - 20 = 2a_2 \Rightarrow a_2 = 14 \text{ m/s}^2$$

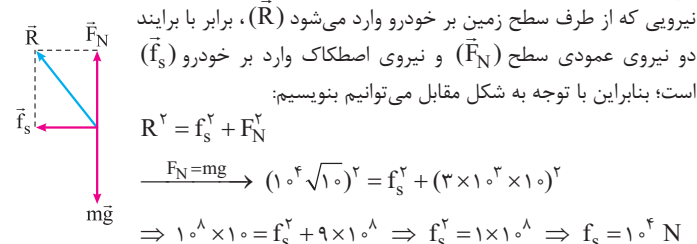
گام ۳ در آخر خواسته سؤال، یعنی نسبت $\frac{a_2}{a_1}$ را پیدا می‌کنیم.

$$\frac{a_2}{a_1} = \frac{14}{2} = 7$$

تله اگر ۴ را انتخاب کرده‌اید، سخت در اشتباه هستید! چرا فکر می‌کنید اگر نیروی کشش طناب دو برابر شود، شتاب حرکت جسم هم دو برابر می‌شود؟!

گزینه ۲ - ۵۰

شفاف‌سازی نیروی اصطکاک وارد بر خودرو، نیروی مرکزگرا را تأمین می‌کند.



در این‌جا نیروی اصطکاک وارد بر خودرو (f_s)، نیروی مرکزگرای وارد بر خودرو (F_c) را تأمین می‌کند؛ پس $F_c = f_s = 10^4 \text{ N}$ است.

گزینه ۱ - ۵۱

استراتژی ابتدا انرژی مکانیکی نوسانگر را محاسبه کنید سپس انرژی جنبشی نوسانگر در نقطه مورد نظر را با استفاده از اختلاف انرژی مکانیکی و انرژی پتانسیل نوسانگر به دست بیاورید و در آخر بزرگی سرعت نوسانگر را با کمک رابطه $K = \frac{1}{2}mv^2$ محاسبه کنید.

درس‌نامه انرژی مکانیکی سامانه جرم - فنر برابر با مجموع انرژی جنبشی و انرژی پتانسیل آن است و از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$\begin{aligned} \text{دامنه (m)} \quad \text{انرژی پتانسیل (J)} \quad \text{انرژی مکانیکی (J)} \\ \uparrow \quad \uparrow \quad \uparrow \\ E = K + U = \frac{1}{2}kA^2 \\ \downarrow \quad \downarrow \\ \text{ثابت فنر (N/m)} \quad \text{انرژی جنبشی (J)} \end{aligned}$$

۲ سرعت متوسط متحرک در سقوط آزاد، سرعت ثانویه (m/s) و سرعت اولیه (m/s)

$$v_{\text{av}} = \frac{v_1 + v_2}{2}$$

گام ۱ با استفاده از انرژی جنبشی گلوله در لحظه برخورد به زمین، سرعت برخورد آن را محاسبه می‌کنیم.

$$K = \frac{1}{2}mv^2 \xrightarrow{K=24/2 \text{ J}, m=0/1 \text{ kg}} 24/2 = \frac{1}{2}(0/1)v^2 \Rightarrow v^2 = 48 \Rightarrow v = 22 \text{ m/s}$$

گام ۲ گلوله با شتاب ثابت 10 m/s^2 حرکت می‌کند؛ پس با استفاده از رابطه $a = a_{\text{av}} = \frac{\Delta v}{\Delta t}$ می‌توانیم سرعت آن را یک ثانیه قبل از برخورد به زمین (v') به دست بیاوریم.

$$a = a_{\text{av}} = \frac{\Delta v}{\Delta t} \Rightarrow 10 = \frac{22 - v'}{1} \Rightarrow v' = 12 \text{ m/s}$$

گام ۳ در آخر سرعت متوسط گلوله در ثانیه آخر را محاسبه می‌کنیم.

$$v_{\text{av}} = \frac{v + v'}{2} \xrightarrow{v=22 \text{ m/s}, v'=12 \text{ m/s}} v_{\text{av}} = \frac{12 + 22}{2} = 17 \text{ m/s}$$

گزینه ۳ - ۴۷

درس‌نامه

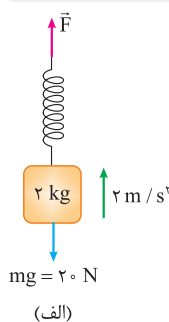
قانون دوم نیوتون	اندازه نیروی کشسانی فنر	نیروی اصطکاک جنبشی
شتاب (m/s^2) نیروی خالص (N) $F_{\text{net}} = ma$ جرم (kg)	ثابت فنر (N/m) $F_e = k\Delta\ell$ تغییر طول فنر (m)	ضریب اصطکاک جنبشی بین جسم و سطح $f_k = \mu_k F_N$ نیروی عمودی سطح (N)

گام ۱ در حالت اول، جسم را با شتاب ثابت رو به بالا می‌بریم؛ پس با توجه به شکل (الف) و با استفاده از قانون دوم نیوتون می‌توانیم بنویسیم:

$$F_{\text{net}} = ma \Rightarrow F - mg = ma$$

$$\xrightarrow{F=k\Delta\ell, a=2 \text{ m/s}^2} \frac{F=k\Delta\ell, a=2 \text{ m/s}^2}{\Delta\ell=0/22-0/3=0/12 \text{ m}} \Rightarrow 0/12k = 20 + 2 \times 2$$

$$\Rightarrow 0/12k = 24 \Rightarrow k = 200 \text{ N/m}$$



گام ۲ در حالت دوم جسم را با شتاب ثابت بر روی سطح افقی به حرکت درمی‌آوریم؛ بنابراین با توجه به شکل (ب) و با استفاده از قانون دوم نیوتون، ضریب اصطکاک جنبشی جسم را با سطح افقی می‌توانیم به دست بیاوریم.

$$F_{\text{net}} = ma \Rightarrow F - f_k = ma$$

$$\xrightarrow{F=k\Delta\ell, f_k=\mu_k F_N} \mu_k F_N = k\Delta\ell - ma$$

$$\xrightarrow{F_N=20 \text{ N}, k=200 \text{ N/m}, a=2 \text{ m/s}^2} \frac{F_N=20 \text{ N}, k=200 \text{ N/m}, a=2 \text{ m/s}^2}{\Delta\ell=0/22-0/3=0/12 \text{ m}, m=2 \text{ kg}} \Rightarrow 20\mu_k = 200 \times 0/06 - 2 \times 2$$

$$\Rightarrow 20\mu_k = 8 \Rightarrow \mu_k = 0/4$$

گزینه ۳ - ۴۸

گام ۱ ابتدا جرم جسم را به سادگی به دست می‌آوریم.

$$W = mg \Rightarrow 4/8 = m \times 10 \Rightarrow m = 0/48 \text{ kg}$$

گام ۲ با توجه به شکل مقابل، برآیند دو نیروی عمود بر هم مقاومت هوا (f_D) و وزن توپ (W) برابر با F_{net} است؛ بنابراین با استفاده از رابطه فیثاغورس می‌توانیم بنویسیم:

$$F_{\text{net}}^2 = f_D^2 + W^2 \Rightarrow f_D^2 = (ma)^2 - W^2 \Rightarrow f_D^2 = \left(\frac{4/8}{10} \times \frac{6/8}{6}\right)^2 - \left(\frac{4/8}{10}\right)^2$$

$$\Rightarrow f_D^2 = (0/4 \times 13)^2 - (0/4 \times 12)^2$$

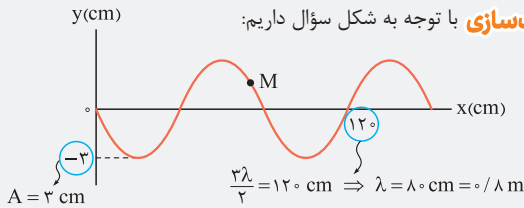
$$\Rightarrow f_D^2 = (0/4)^2 (13^2 - 12^2) = (0/4)^2 (25) \Rightarrow f_D = 0/4 \times 5 = 2 \text{ N}$$

۵۴ - گزینه ۲



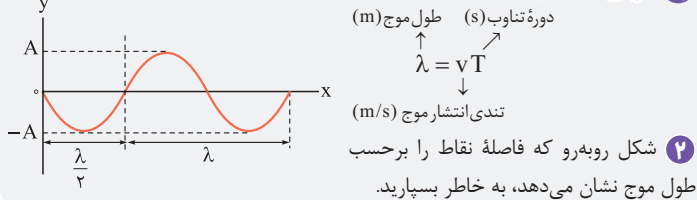
شفاف سازی

با توجه به شکل سؤال داریم:

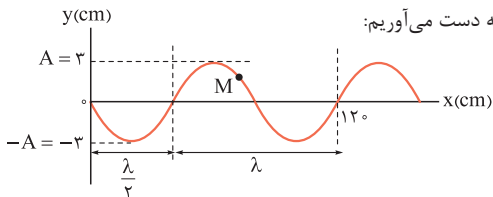


استراتژی در مسائل نوسان، زمان‌ها را برحسب دوره تناوب نوسانگر به دست بیاورید و با توجه به آن، مسئله را حل کنید.

درس نامه ۱ رابطه بین تندی انتشار موج، دوره تناوب موج و طول موج



گام ۱ با توجه به نمودار $y-x$ (جابه‌جایی برحسب مکان) موج، طول موج (λ) و دامنه موج (A) را به دست می‌آوریم:



$$\frac{3\lambda}{2} = 120 \Rightarrow \lambda = 80 \text{ cm} = 0.8 \text{ m}$$

$$-A = -3 \text{ cm} \Rightarrow A = 3 \text{ cm}$$

گام ۲ دوره تناوب موج را محاسبه می‌کنیم (توجه کنید که دوره تناوب موج برابر با دوره تناوب هر یک از ذرات طناب است).

گام ۳ حالا باید مسافتی را که ذره M در بازه زمانی $t_1 = 0.1 \text{ s}$ تا $t_2 = 0.5 \text{ s}$ طی می‌کند، به دست بیاوریم. برای این کار باید بازه زمانی را برحسب دوره تناوب (T) بنویسیم.

$$\Delta t = t_2 - t_1 = 0.4 \text{ s} \Rightarrow \frac{\Delta t}{T} = \frac{0.4}{0.8} = \frac{1}{2} \Rightarrow \Delta t = \frac{T}{2}$$

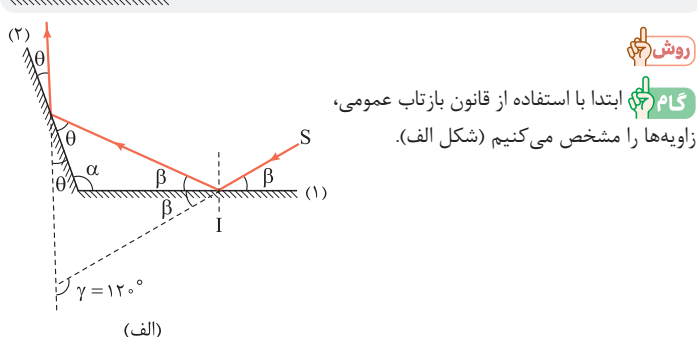
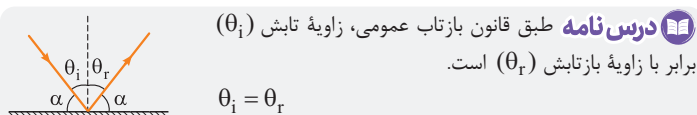
نکته مسافتی که هر ذره از طناب در مدت زمان $\frac{T}{2}$ طی می‌کند، دو برابر دامنه نوسان ($2A$) است.

با توجه به نکته بالا، مسافتی که ذره M در بازه زمانی $t_1 = 0.1 \text{ s}$ تا $t_2 = 0.5 \text{ s}$ طی می‌کند، برابر با $\ell = 2A = 2 \times 3 = 6 \text{ cm}$ است.

۵۵ - گزینه ۴



شفاف سازی

زاویه γ همان زاویه انحراف است.

گام ۱ محاسبه انرژی مکانیکی نوسانگر:

$$E = \frac{1}{2} k A^2 \xrightarrow[k = \Delta N / \text{cm} = 500 \text{ N/m}]{A = 4 \text{ cm} = 0.04 \text{ m}} E = \frac{1}{2} \times 500 \times (0.04)^2$$

$$= \frac{1}{2} \times 500 \times 16 \times 10^{-4} = 0.4 \text{ J}$$

گام ۲ محاسبه انرژی جنبشی نوسانگر در نقطه مورد نظر:

$$E = K + U \xrightarrow[U = 0.4 \text{ J}]{E = 0.4 \text{ J}} 0.4 = K + 0.2 \Rightarrow K = 0.2 \text{ J}$$

گام ۳ محاسبه تندی نوسانگر در نقطه مورد نظر:

$$K = \frac{1}{2} m v^2 \xrightarrow[m = 1 \text{ kg}]{K = 0.2 \text{ J}} 0.2 = \frac{1}{2} \times 1 \times v^2 \Rightarrow v^2 = 0.4$$

$$\Rightarrow v = \sqrt{0.4} \text{ m/s} = 20 \sqrt{10} \text{ cm/s}$$

۵۲ - گزینه ۳



درس نامه ۱ دوره تناوب نوسانگر، مدت زمان انجام یک نوسان کامل.

$$T = \frac{t}{n} \rightarrow \begin{matrix} \text{زمان (s)} \\ \text{تعداد نوسان} \end{matrix}$$

دوره تناوب آونگ ساده (s)

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{L}{g}} \rightarrow \begin{matrix} \text{طول آونگ (m)} \\ \text{شتاب گرانش (m/s^2)} \end{matrix}$$

۲ دوره تناوب آونگ ساده:

گام ۱ ابتدا دوره تناوب آونگ ساده را در حالت اول (T_1) و حالت دوم (T_2) محاسبه می‌کنیم:

$$T = \frac{t}{n} \Rightarrow \begin{cases} T_1 = \frac{92}{40} = \frac{9}{4} \text{ s} \\ T_2 = \frac{92}{45} = \frac{8}{9} \text{ s} \end{cases}$$

گام ۲ حالا طول آونگ ساده در حالت‌های (۱) و (۲) را به دست می‌آوریم.

$$T_1 = 2\pi \sqrt{\frac{L_1}{g}} \xrightarrow[g = \pi^2 \text{ m/s}^2]{T_1 = \frac{9}{4} \text{ s}} \frac{9}{4} = 2\pi \sqrt{\frac{L_1}{\pi^2}} \Rightarrow \sqrt{L_1} = \frac{9}{2}$$

$$\Rightarrow L_1 = 0.81 \text{ m} = 81 \text{ cm}$$

$$T_2 = 2\pi \sqrt{\frac{L_2}{g}} \xrightarrow[g = \pi^2 \text{ m/s}^2]{T_2 = \frac{8}{9} \text{ s}} \frac{8}{9} = 2\pi \sqrt{\frac{L_2}{\pi^2}} \Rightarrow \sqrt{L_2} = \frac{8}{3}$$

$$\Rightarrow L_2 = 0.64 \text{ m} = 64 \text{ cm}$$

گام ۳ در آخر تغییر طول آونگ را محاسبه می‌کنیم: $L_2 - L_1 = 64 - 81 = -17 \text{ cm}$ یعنی طول آونگ ساده را باید ۱۷ cm کاهش بدهیم.

۵۳ - گزینه ۲



شفاف سازی شخصی که در فاصله d_1 از چشمه صوت قرار دارد، صدا را ۱۸ dB بلندتر می‌شنود؛ پس تراز شدت صوت شخصی که در فاصله d_2 قرار دارد، ۱۸ dB بیشتر از تراز شدت صوت شخصی است که در فاصله d_2 قرار دارد؛ یعنی: $\beta_1 - \beta_2 = 18 \text{ dB}$.

درس نامه رابطه اختلاف تراز شدت دو صوت برحسب فاصله از چشمه صوت

$$\begin{matrix} \text{فاصله از چشمه در حالت دوم (m)} \\ \uparrow \\ \text{تراز شدت صوت در فاصله } d_1 \text{ از چشمه (dB)} \\ \beta_1 - \beta_2 = 10 \log \left(\frac{d_2}{d_1} \right)^2 \\ \downarrow \\ \text{تراز شدت صوت در فاصله } d_2 \text{ از چشمه (dB)} \\ \text{فاصله از چشمه در حالت اول (m)} \end{matrix}$$

کافی است داده‌ها را در رابطه زیر جای‌گذاری کنیم و نسبت $\frac{d_2}{d_1}$ را به دست بیاوریم.

$$\beta_1 - \beta_2 = 10 \log \left(\frac{d_2}{d_1} \right)^2 \xrightarrow[\beta_1 - \beta_2 = 18 \text{ dB}]{\beta_1 - \beta_2 = 18 \text{ dB}} 18 = 10 \log \left(\frac{d_2}{d_1} \right)^2$$

$$\Rightarrow \frac{18}{10} = \log \left(\frac{d_2}{d_1} \right)^2 \Rightarrow 3 \log 2 = \log \frac{d_2}{d_1} \Rightarrow \log 8 = \log \frac{d_2}{d_1} \Rightarrow \frac{d_2}{d_1} = 8$$



بنابراین طول موج این خط تقریباً برابر با 396 nm است (۱) و (۲) پرا. با توجه به این که گستره طول موج نور مرئی از حدود 400 nm (بنفش) تا حدود 750 nm (نور قرمز) است، پس طول موج این خط در ناحیه امواج فرابنفش قرار دارد.

تیزبازی ناحیه طیف چهار خط اول طیف گسیلی اتم هیدروژن در رشته بالمر (یعنی $n=3, n=4, n=5, n=6$) مربوط به ناحیه مرئی و ناحیه طیف مابقی خطها در این رشته مربوط به ناحیه فرابنفش است؛ بنابراین با توجه به این که $n=7$ است، پس ناحیه طیف این خط مربوط به امواج فرابنفش است. به این ترتیب، (۱) و (۳) حذف می‌شوند. تفاوت بین (۲) و (۴) در طول موج این خط طیفی است. طول موج 433 nm در گستره طول موج نور مرئی است و مربوط به فرابنفش نیست. پس (۲) نیز حذف می‌شود و تمام!

تله اگر به جای $n=7$ ، عدد $n=5$ را لحاظ می‌کردید، خوشحال و خندان (۱) را به عنوان پاسخ انتخاب می‌کردید.

۵۸- گزینه ۱

درس‌نامه در اثر فوتوالکتریک، بیشینه انرژی جنبشی فوتوالکترن‌های فلز از رابطه زیر به دست می‌آید.

$$K_{\max} = h \frac{c}{\lambda} - W_0$$

ثابت پلانک (eV.s) h ، درخا (m/s) c ، تابع کار فلز (eV) W_0 ، طول موج فوتون (m) λ

گام ۱ ابتدا بیشینه انرژی جنبشی فوتوالکترن‌های فلزهای A و B را محاسبه می‌کنیم.

$$K_{\max} = h \frac{c}{\lambda} - W_0 \Rightarrow \begin{cases} K_{\max(A)} = h \frac{c}{\lambda} - W_0 \\ K_{\max(B)} = h \frac{c}{\lambda} - W_0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} K_{\max(A)} = \frac{4 \times 10^{-15} \times 3 \times 10^8}{150 \times 10^{-9}} - 4/5 = 3/5 \text{ eV} \\ K_{\max(B)} = \frac{4 \times 10^{-15} \times 3 \times 10^8}{150 \times 10^{-9}} - 3 = 5 \text{ eV} \end{cases}$$

گام ۲ حالا برای این که ببینیم بیشینه انرژی جنبشی فوتوالکترن‌های فلز A چند درصد کم‌تر از بیشینه انرژی جنبشی فوتوالکترن‌های B است، به صورت زیر عمل می‌کنیم:

$$\frac{K_{\max(A)} - K_{\max(B)}}{K_{\max(B)}} \times 100 = \frac{3/5 - 5}{5} \times 100 = -\frac{1/5}{5} \times 100 = -\frac{1}{5} \times 100 = -20\%$$

۵۹- گزینه ۴

درس‌نامه نیمه‌عمر، اگر تعداد هسته‌های مادر اولیه در یک نمونه پرتوزا N_0 باشد، تعداد هسته‌های پرتوزای باقی‌مانده پس از مدت زمان t از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$N = \frac{N_0}{2^n}, \quad n = \frac{t}{T_{1/2}}$$

تعداد هسته‌های اولیه، مدت زمان (s) t ، نیمه‌عمر (s) $T_{1/2}$ ، تعداد هسته‌های باقی‌مانده، تعداد نیمه‌عمرهای سپری شده

گام ۱ ابتدا تعداد نیمه‌عمرهای سپری شده را محاسبه می‌کنیم.

$$n = \frac{t}{T_{1/2}} = \frac{22 \text{ روز}}{5.5 \text{ روز}} = 4$$

گام ۲ حالا می‌توانیم تعداد هسته‌های باقی‌مانده را برحسب تعداد هسته‌های اولیه به دست بیاوریم.

$$N = \frac{N_0}{2^n} \xrightarrow{n=4} N = \frac{N_0}{2^4} = \frac{N_0}{16}$$

گام ۳ بنابراین تعداد هسته‌های واپاشی شده برابر با $\frac{15N_0}{16}$ است که این مقدار را برحسب درصد می‌نویسیم.

$$N_{\text{واپاشی‌شده}} = \frac{15N_0}{16}$$

$$\xrightarrow{\text{برحسب درصد}} \frac{N_{\text{واپاشی‌شده}}}{N_0} \times 100 = \frac{15}{16} \times 100 = 93.75\%$$

گام ۱ با توجه به این که زاویه خارجی یک مثلث برابر با مجموع دو زاویه داخلی غیرمجاور آن است، می‌توانیم بنویسیم (شکل ب):

$$\gamma = \alpha + \beta + \theta = \alpha + \beta + \theta \quad (1)$$

گام ۲ حالا از مجموع زوایای داخلی مثلث که برابر با 180° است، استفاده می‌کنیم و مقدار $\beta + \theta$ را به دست می‌آوریم (شکل پ):

$$\alpha + \beta + \theta = 180^\circ \Rightarrow \beta + \theta = 180^\circ - \alpha \quad (2)$$

گام ۳ در آخر رابطه (۲) را در رابطه (۱) جای گذاری می‌کنیم:

$$\gamma = \alpha + \beta + \theta = \alpha + (180^\circ - \alpha) = 180^\circ$$

با توجه به این رابطه، مقدار γ هنگامی تغییر می‌کند که مقدار α (یعنی زاویه بین دو آینه) تغییر کند؛ بنابراین چون زاویه α تغییر نکرده است، پس مقدار γ هم تغییر نمی‌کند و ثابت می‌ماند.



نکته زاویه انحراف یک پرتو پس از دو برخورد متوالی به دو آینه متقاطع، به زاویه تابش اولیه بستگی ندارد و فقط وابسته به زاویه بین دو آینه است.

با توجه به نکته بالا، زاویه γ به زاویه α بستگی ندارد و با تغییر زاویه α ثابت می‌ماند.

تله اگر (۲) را انتخاب کردید، سخت در اشتباه هستید! واقعاً چرا فکر می‌کنید با افزایش زاویه α ، زاویه γ هم به همان اندازه افزایش می‌یابد؟

۵۶- گزینه ۲

درس‌نامه در تار مرتعش دو انتها بسته، اختلاف دو بسامد تشدید متوالی برابر با بسامد هماهنگ اول (f_1) است.

$$f_{(n+1)} - f_n = f_1$$

گام ۱ سؤال به ما دو بسامد تشدید متوالی را داده است؛ پس با استفاده از اختلاف آن‌ها، مقدار f_1 را به دست می‌آوریم.

$$f_1 = f_{n+1} - f_n \Rightarrow f_1 = 500 - 375 = 125 \text{ Hz}$$

گام ۲ حالا بسامد تشدید بعد از 750 Hz را محاسبه می‌کنیم:

$$f_1 = f_{n+1} - f_n \Rightarrow f_{n+1} = f_n + f_1 \Rightarrow f_{n+1} = 750 + 125 = 875 \text{ Hz}$$

مشاوره مبحث بسامدهای تشدید تار، جزء مباحث پرتکرار کنکورهای اخیر است. این مبحث ساده را از دست ندهید!

۵۷- گزینه ۴

شفاف‌سازی عدد کوانتومی پنجمین خط طیف اتم هیدروژن در رشته بالمر ($n'=2$) برابر با $n=7$ است.

درس‌نامه ۱ طول موج خط‌های طیف گسیلی اتم هیدروژن در هر رشته، از رابطه زیر به دست می‌آید.

$$\frac{1}{\lambda} = R \left(\frac{1}{n'^2} - \frac{1}{n^2} \right), \quad n > n'$$

ثابت ریدبرگ، در این رابطه، طول موج (λ) برحسب نانومتر (nm) است.

۲ اگر بخواهیم عدد کوانتومی (n) خط طیف گسیلی اتم هیدروژن در هر رشته (n') را با استفاده از شماره خط طیفی آن رشته به دست بیاوریم، به صورت زیر عمل می‌کنیم.

$$n = n' + \text{شماره خط طیفی}$$

مثلاً عدد کوانتومی (n) پنجمین خط طیف گسیلی اتم هیدروژن در رشته بالمر ($n'=2$) برابر است با:

$$n = 2 + 5 = 7$$

۳ گستره طول موج نور مرئی از حدود 400 nm (نور بنفش) تا حدود 750 nm (نور قرمز) است.

با توجه به درس‌نامه، عدد کوانتومی (n) پنجمین خط طیف اتم هیدروژن در رشته بالمر ($n'=2$)، برابر با 7 ($n=2+5=7$) است. طول موج این خط را با استفاده از معادله ریدبرگ به دست می‌آوریم.

$$\frac{1}{\lambda} = R \left(\frac{1}{n'^2} - \frac{1}{n^2} \right) \xrightarrow{R=1.1 \times 10^7 \text{ (nm)}^{-1}, n'=2, n=7} \frac{1}{\lambda} = 1.1 \times 10^7 \left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{7^2} \right)$$

$$= \frac{1.1}{1000} \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{49} \right) \Rightarrow \lambda = \frac{1000 \times 4 \times 49}{45} \approx 396 \text{ nm}$$

۶۰- گزینه ۴

$$|\Delta V| = Ed \xrightarrow{E=1.5 \times 10^6 \text{ N/C}, d=3 \times 10^{-2} \text{ cm}} \Delta V = -1.5 \times 10^4 \text{ V}$$

$$\Rightarrow \Delta V = -3 \times 10^4 \text{ V}$$

گام ۲ تغییر انرژی پتانسیل الکتریکی ذره بین دو نقطه A و B را به دست می‌آوریم.

$$\Delta V = \frac{\Delta U}{q} \xrightarrow{q=-5 \mu\text{C} = -5 \times 10^{-6} \text{ C}, \Delta V = -3 \times 10^4 \text{ V}} \Delta U = -5 \times 10^{-6} \times (-3 \times 10^4)$$

$$\Rightarrow \Delta U = 0.15 \text{ J}$$

تله اگر هنگام عددگذاری، علامت بار یا علامت اختلاف پتانسیل الکتریکی را اشتباه بذارید، در کمین نشسته است.

۶۲- گزینه ۱

درس نامه ۱ انرژی ذخیره‌شده در خازن: در این رابطه، همه کمیت‌ها را می‌توانیم با پیشوند میکرو به کار ببریم.

$$U = \frac{Q^2}{2C} \leftarrow \text{انرژی (J)}$$

۲ تغییر انرژی خازن وقتی ظرفیت آن ثابت بماند اما بار آن تغییر کند: بار الکتریکی خازن در حالت دوم

$$U_2 - U_1 = \frac{1}{2C} (Q_2^2 - Q_1^2)$$

ظرفیت

برای یک خازن با ظرفیت معین، وقتی از یک صفحه خازن بار همان‌بار آن صفحه جدا شده و به صفحه مقابل منتقل شود، بار الکتریکی و انرژی خازن کاهش می‌یابد اما اگر از یک صفحه خازن بار همان‌بار آن صفحه جدا شده و به صفحه مقابل منتقل شود، بار الکتریکی و انرژی خازن افزایش می‌یابد.

۳ رابطه اختلاف پتانسیل دو سر خازن با بار الکتریکی و ظرفیت آن:

$$V = \frac{Q}{C} \leftarrow \text{اختلاف پتانسیل ظرفیت}$$

گام ۱ اختلاف انرژی ذخیره‌شده در خازن را بین دو حالت می‌نویسیم.

$$U_2 - U_1 = \frac{1}{2C} (Q_2^2 - Q_1^2) \xrightarrow{U_2 - U_1 = -28/5 \text{ J}, C = 12 \mu\text{F}} -28/5 = \frac{Q_2^2 - Q_1^2}{2 \times 12}$$

$$\Rightarrow (Q_2 - Q_1)(Q_2 + Q_1) = -57 \times 12$$

چون از صفحه منفی بار منفی گرفته شده و به صفحه مثبت منتقل شده است، بار کل خازن و انرژی آن کاهش یافته است. یعنی:

$$Q_2 - Q_1 = -6 \mu\text{C} \Rightarrow -6(Q_2 + Q_1) = -57 \times 12 \Rightarrow Q_2 + Q_1 = 114 \mu\text{C}$$

گام ۲ با حل یک دستگاه ساده، مقادیر Q_1 و Q_2 را به دست می‌آوریم.

$$\left. \begin{aligned} Q_2 - Q_1 &= -6 \mu\text{C} \\ Q_2 + Q_1 &= 114 \mu\text{C} \end{aligned} \right\} \Rightarrow 2Q_2 = 108 \Rightarrow Q_2 = 54 \mu\text{C}$$

$$54 + Q_1 = 114 \Rightarrow Q_1 = 60 \mu\text{C}$$

گام ۳ اختلاف پتانسیل بین دو صفحه خازن در حالت اول را پیدا می‌کنیم:

$$V_1 = \frac{Q_1}{C} \xrightarrow{Q_1 = 60 \mu\text{C}, C = 12 \mu\text{F}} V_1 = \frac{60}{12} = 5 \text{ V}$$

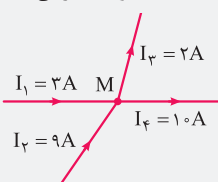
مشاوره این تست بر اساس یکی از تمرین‌های کتاب درسی طراحی شده و مشابه آن در کنکور ۱۴۰۰ رشته ریاضی و کنکور ۱۳۹۷ رشته تجربی نیز آمده است.

۶۳- گزینه ۳

درس نامه ۱ تعریف مقاومت الکتریکی: نسبت اختلاف پتانسیل دو سر یک رسانا به جریان الکتریکی عبوری از آن.

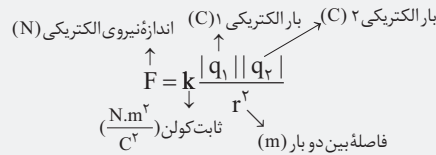
$$R = \frac{V}{I} \leftarrow \text{مقاومت الکتریکی (}\Omega\text{)}$$

۲ قاعده انشعاب: مجموع جریان‌هایی که به هر نقطه انشعاب (گره) وارد می‌شوند برابر با مجموع جریان‌هایی است که از آن نقطه انشعاب خارج می‌شوند؛ مثلاً در شکل مقابل، جریان $I_1 + I_2 = 12 \text{ A}$ به گره M وارد شده و جریان $I_3 + I_4 = 12 \text{ A}$ از آن خارج شده است.

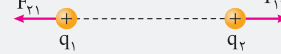


شفاف‌سازی علامت منفی در رابطه $q_1 = -\frac{9}{4}q_2$ ، ناهمنام بودن بارهای q_1 و q_2 را نشان می‌دهد.

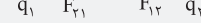
درس نامه ۱ قانون کولن:



۲ دو بار الکتریکی همنام یکدیگر را دفع می‌کنند.



۳ دو بار الکتریکی ناهمنام یکدیگر را جذب می‌کنند.



گام ۱ نیروی الکتریکی خالص وارد بر هر یک از بارها صفر است؛ پس نیروی الکتریکی خالص وارد بر بار q_2 نیز صفر است؛ یعنی نیروی الکتریکی‌ای که بار q_1 بر q_2 وارد می‌کند (F_{12})، هم‌اندازه نیروی الکتریکی‌ای است که بار q_3 بر q_2 وارد می‌کند (F_{32}). بنابراین با استفاده از قانون کولن می‌توانیم بنویسیم:

$$F_{12} = F_{32} \Rightarrow k \frac{|q_1||q_2|}{(x+r)^2} = k \frac{|q_3||q_2|}{x^2} \xrightarrow{|q_1| = \frac{9}{4}|q_2|} \frac{9}{4} \frac{|q_2|^2}{(x+r)^2} = \frac{|q_2|^2}{x^2}$$

$$\Rightarrow (x+r)^2 = \frac{9}{4}x^2 \xrightarrow{\text{جذر}} x+r = \frac{3}{2}x \Rightarrow \frac{x}{r} = 2$$

(۱) و (۲) پر!

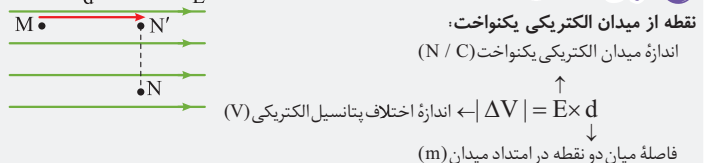
گام ۲ بارهای q_1 و q_2 ناهمنامند (اگر نمی‌دونی چرا، شفاف‌سازی رو بفون!)؛ پس بار q_1 ، بار q_2 را جذب می‌کند. برای این که نیروی الکتریکی خالص وارد بر بار q_2 صفر شود، بار q_3 نیز باید بار q_2 را جذب کند؛ پس دو بار q_2 و q_3 ناهمنامند (۳) پر!؛ از طرفی چون نیروی الکتریکی خالص وارد بر بار q_2 صفر است، پس نیروی الکتریکی‌ای که بار q_1 بر بار q_2 وارد می‌کند (F_{12})، هم‌اندازه نیروی الکتریکی‌ای است که بار q_3 بر بار q_2 وارد می‌کند (F_{32})؛ بنابراین با استفاده از قانون کولن می‌توانیم بنویسیم:

$$F_{12} = F_{32} \Rightarrow k \frac{|q_1||q_2|}{r^2} = k \frac{|q_3||q_2|}{x^2} \xrightarrow{|q_1| = \frac{9}{4}|q_2|, x = 2r} \frac{9}{4} \frac{|q_2|^2}{r^2} = \frac{|q_3|^2}{4r^2}$$

$$\Rightarrow \left| \frac{q_3}{q_2} \right| = 9 \xrightarrow{\frac{q_3}{q_2} < 0} \frac{q_3}{q_2} = -9$$

۶۱- گزینه ۱

درس نامه ۱ اندازه اختلاف پتانسیل الکتریکی بین دو



۲ اختلاف پتانسیل الکتریکی بین دو نقطه از میدان الکتریکی:

تغییر انرژی پتانسیل الکتریکی (J) $\Delta V = \frac{\Delta U}{q} \leftarrow$ اختلاف پتانسیل الکتریکی (V) بار الکتریکی (C)

هواستون باشه! توی این رابطه باید بار q رو با علامتش بذارین.

گام ۲ با توجه به نکته زیر، اختلاف پتانسیل الکتریکی بین دو نقطه A و B در میدان الکتریکی یکنواخت را محاسبه می‌کنیم.

نکته با حرکت در جهت میدان الکتریکی، پتانسیل الکتریکی کاهش می‌یابد ($\Delta V < 0$) و با حرکت در خلاف جهت میدان الکتریکی، پتانسیل الکتریکی افزایش می‌یابد ($\Delta V > 0$) اما با حرکت در جهت عمود بر میدان الکتریکی، پتانسیل الکتریکی تغییر نمی‌کند ($\Delta V = 0$).

$$\frac{R_1 = 5 \Omega, R_2 = 20 \Omega}{R_2 = 4 \Omega} \rightarrow R'_{eq} = \frac{5 \times 20}{5 + 20} + 4 = 8 \Omega$$

$$I' = \frac{\varepsilon}{R'_{eq} + r} = \frac{18 \text{ V}}{8 \Omega + 1 \Omega} \rightarrow I' = \frac{18}{9} = 2 \text{ A}$$

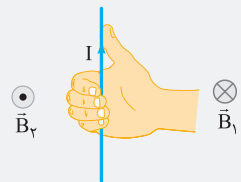
گام ۳ اختلاف پتانسیل الکتریکی دو سر مقاومت R_1 با اختلاف پتانسیل الکتریکی دو سر مقاومت معادل R_1 و R_2 برابر است؛ بنابراین می‌توانیم بنویسیم:

$$V_{R_1} = V_{R_1, 2} \rightarrow \frac{V_{R_1} = V_1}{V_{R_1, 2} = R_{1, 2} I'} \rightarrow V_1 = R_{1, 2} I' \rightarrow \frac{R_{1, 2} = 4 \Omega}{I' = 2 \text{ A}} \rightarrow V_1 = 4 \times 2 = 8 \text{ V}$$

بنابراین اختلاف پتانسیل دو سر مقاومت $R_1 = 5 \Omega$ با بستن کلید از ۹ V به ۸ V می‌رسد و در نتیجه یک ولت کاهش می‌یابد.

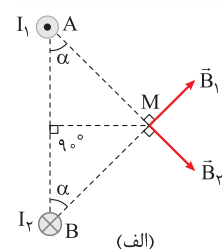
۶۵- گزینه ۱

درس‌نامه برای تشخیص جهت میدان مغناطیسی در اطراف سیم راست، انگشت شست دست راست را در جهت جریان قرار می‌دهیم، جهت خم شدن چهار انگشت دست راست، جهت میدان مغناطیسی را نشان می‌دهد. بزرگی میدان مغناطیسی با فاصله از سیم راست حامل جریان رابطه عکس دارد ($B_2 > B_1$).



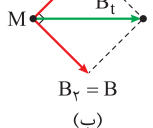
گام ۱ ابتدا نکته زیر را بخوانید.

نکته بردارهای میدان مغناطیسی حاصل از سیم‌های (۱) و (۲) در نقطه M، عمود بر خطی است که سیم (۱) و (۲) را به نقطه M وصل می‌کند. به عبارت دیگر، B_1 عمود بر خط AM و B_2 عمود بر خط BM است.



با توجه به نکته بالا، جهت میدان مغناطیسی ناشی از سیم‌های (۱) و (۲) در نقطه M را در شکل (الف) مشخص کردیم.

گام ۲ با توجه به این که از سیم‌های (۱) و (۲) جریان‌های یکسان عبور می‌کند و در فاصله یکسان از نقطه M قرار دارند (ساق‌های مثلث متساوی‌الساقین هستند)، پس اندازه میدان‌های مغناطیسی B_1 و B_2 با هم برابر هستند. براینده میدان‌های مغناطیسی B_1 و B_2 را به دست می‌آوریم (شکل ب). همان‌طور که در شکل (ب) می‌بینید، میدان مغناطیسی خالص در نقطه M در جهت محور X است.



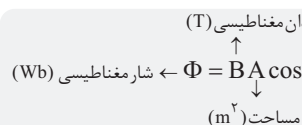
۶۶- گزینه ۲

درس‌نامه مقاومت نوری (LDR): نوعی مقاومت است که مقاومت الکتریکی آن به نور تابیده شده به آن بستگی دارد. نوعی از این مقاومت‌ها از جنس نیم‌رسانای خالص مانند سیلیسیم هستند که با افزایش شدت نور تابیده‌شده، از مقاومت آن‌ها کاسته می‌شود. همان‌طور که در درس‌نامه گفتیم، LDR نوعی مقاومت است که مقاومت الکتریکی آن به نور تابیده‌شده به آن بستگی دارد، به طوری که با افزایش شدت نور تابیده‌شده به آن، مقاومت الکتریکی آن کاهش می‌یابد.

مشاوره خط به خط کتاب درسی را بخوانید، چون ممکن است سؤال ساده‌ای مانند این سؤال بیاید و مجبور شوید از آن عبور کنید!

۶۷- گزینه ۴

درس‌نامه شار مغناطیسی عبوری از پیکه، زاویه بین نیم‌خط عمود بر سطح حلقه با بردار میدان مغناطیسی $\Phi = B A \cos \theta$ ← شار مغناطیسی (Wb) مساحت (m^2) θ زاویه بین نیم‌خط عمود بر سطح حلقه و بردار میدان مغناطیسی است. این زاویه (θ) متمم زاویه بین بردار میدان مغناطیسی با سطح حلقه است.



۳ انرژی الکتریکی مصرفی در مقاومت R: اختلاف پتانسیل (V) زمان (s) $U = V I t$ ← انرژی الکتریکی (J) جریان الکتریکی (A)

۴ در مقاومت‌های موازی، اختلاف پتانسیل دو سر مقاومت‌ها با هم برابر است.

$V_1 = V_2 \Rightarrow R_1 I_1 = R_2 I_2$

گام ۱ مقاومت‌های R_1 و R_2 موازی هستند. پس اختلاف پتانسیل دو سر آن‌ها یکسان است و می‌توانیم بنویسیم:

$V_1 = V_2 \xrightarrow{V=RI} R_1 I_1 = R_2 I_2$

$\frac{R_1 = 10 \Omega}{R_2 = 5 \Omega} \rightarrow 10 I_1 = 5 I_2 \Rightarrow I_2 = 2 I_1$

گام ۲ قاعده انشعاب در گره M:

$I = I_1 + I_2 + I_3 \xrightarrow{I = 4 \text{ A}, I_2 = 2 I_1, I_3 = 1/6 \text{ A}} 4 = I_1 + 1/6 + 2 I_1$

$\Rightarrow 2/4 = 3 I_1 \Rightarrow I_1 = 0/8 \text{ A}$

گام ۳ محاسبه اختلاف پتانسیل دو سر مقاومت R_1 :

$V_1 = R_1 I_1 \xrightarrow{R_1 = 10 \Omega, I_1 = 0/8 \text{ A}} V_1 = 10 \times 0/8 = 8 \text{ V}$

گام ۴ محاسبه انرژی مصرفی در مقاومت R:

$U_2 = V_2 I_2 t \xrightarrow{V_2 = V_1 = 8 \text{ V}, I_2 = 1/6 \text{ A}, t = 25 \text{ min} = 25 \times 60 = 1500 \text{ s}} U_2 = 8 \times 1/6 \times 1500$

$= 19200 \text{ J} = 19/2 \text{ kJ}$

۶۴- گزینه ۳

شفاف‌سازی وقتی کلید k باز است، مقاومت 20Ω از مدار خارج می‌شود و دو مقاومت 5Ω و 4Ω به صورت متوالی به یکدیگر وصل می‌شوند. هم‌چنین وقتی کلید k بسته (وصل) می‌شود، مقاومت‌های 5Ω و 20Ω به صورت موازی به هم وصل می‌شوند و مقاومت معادل آن‌ها با مقاومت 4Ω به صورت متوالی وصل می‌شود.

درس‌نامه ۱ مقاومت معادل دو مقاومت متوالی R_1 و R_2 :

$R_{eq} = R_1 + R_2$

۲ مقاومت معادل دو مقاومت موازی R_1 و R_2 :

$R_{eq} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$

۳ جریان الکتریکی خروجی از باتری:

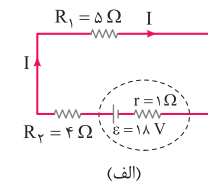
نیروی محرکه مولد (V) $I = \frac{\varepsilon}{R_{eq} + r}$ ← جریان الکتریکی (A) مقاومت درونی مولد (Ω) مقاومت معادل خارجی مدار (Ω)

گام ۱ در حالتی که کلید k باز است، مقاومت 20Ω از مدار خارج می‌شود. مقاومت معادل و جریان مدار را در این حالت محاسبه می‌کنیم (شکل الف).

$R_{eq} = R_1 + R_2$

$\frac{R_1 = 5 \Omega}{R_2 = 4 \Omega} \rightarrow R_{eq} = 5 + 4 = 9 \Omega$

$I = \frac{\varepsilon}{R_{eq} + r} = \frac{18 \text{ V}}{9 \Omega + 1 \Omega} \rightarrow I = \frac{18}{10} \Rightarrow I = 1/8 \text{ A}$

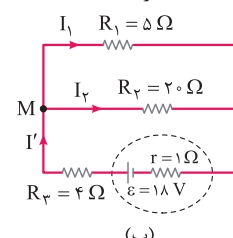


گام ۲ اختلاف پتانسیل الکتریکی دو سر مقاومت R_1 در حالت کلید باز:

$V_1 = R_1 I \xrightarrow{R_1 = 5 \Omega, I = 1/8 \text{ A}} V_1 = 5 \times 1/8 = 9 \text{ V}$

گام ۳ در حالتی که کلید k بسته است، مقاومت 20Ω وارد مدار می‌شود و به صورت موازی به مقاومت R_1 وصل می‌شود. مقاومت معادل و جریان مدار را در این حالت محاسبه می‌کنیم (شکل ب).

$R'_{eq} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} + R_3$





گام ۱ از طرفی، فشار هوا ۷۶ سانتی متر جیوه است ($P_0 = 76 \text{ cmHg}$). این فشار را بر حسب پاسکال محاسبه می‌کنیم.
 $P = \rho gh \Rightarrow P_0 = 13600 \times 10 \times 0.76 = 103360 \text{ Pa}$

گام ۲ حالا فشار کل در کف ظرف را محاسبه می‌کنیم.
 $P_{\text{ته لوله}} = P_0 + P_{\text{مایع}} = 103360 + 5440 = 108800 \text{ Pa}$
 فشار ناشی از هوا (P_0) برابر با ۷۶ cmHg یعنی تقریباً 10^5 پاسکال است. بنابراین فشار در ته لوله که ناشی از آب، جیوه و هوا است، باید عددی بزرگ‌تر از 10^5 باشد و تنها گزینه‌ای که این ویژگی را دارد، (۴) است.

۷۰- گزینه ۳

شفاف‌سازی فشار پیمانه‌ای گاز (P_g) یعنی: $P_g = P_{\text{گاز}} - P_0$
درس‌نامه به اختلاف فشار مطلق گاز و فشار جو، فشار پیمانه‌ای (P_g) می‌گوییم.
 فشار هوا $\rightarrow P_g = P_{\text{مطلق}} - P_0 \leftarrow$ فشار پیمانه‌ای

گام ۱ فشار در مرز مشترک بین دو مایع (نقطه A) با هم برابر است؛ بنابراین می‌توانیم بنویسیم:
 $P_{\text{آب}} + P_{\text{روغن}} = P_0 + P_{\text{گاز}}$

گام ۲ فشار ستون روغن را بر حسب میلی‌متر جیوه به دست می‌آوریم.
 $P_{\text{روغن}} = P_{\text{جیوه}} \Rightarrow \rho_{\text{روغن}} \times h_{\text{روغن}} = \rho_{\text{جیوه}} \times h_{\text{جیوه}}$
 $\frac{h_{\text{روغن}} = 680 \text{ mm}}{\rho_{\text{روغن}}} \rightarrow \frac{0.8 \times 680}{13} = \frac{13}{6} \times h_{\text{جیوه}}$
 $\Rightarrow h_{\text{جیوه}} = \frac{0.8 \times 680}{13 \times \frac{13}{6}} = 40 \text{ mmHg}$
گام ۳ فشار ستون آب را بر حسب میلی‌متر جیوه به دست می‌آوریم:
 $P_{\text{آب}} = P_{\text{جیوه}} \Rightarrow \rho_{\text{آب}} \times h_{\text{آب}} = \rho_{\text{جیوه}} \times h_{\text{جیوه}}$
 $\frac{h_{\text{آب}} = 680 \text{ mm}}{1 \times 680} = \frac{13}{6} \times h_{\text{جیوه}} \Rightarrow h_{\text{جیوه}} = \frac{680}{13 \times \frac{13}{6}} = 50 \text{ mmHg}$
گام ۴ با توجه به رابطه‌ای که در گام اول به دست آوردیم، فشار پیمانه‌ای گاز را محاسبه می‌کنیم.
 $P_{\text{گاز}} + P_{\text{روغن}} = P_0 + P_{\text{آب}} \Rightarrow P_{\text{گاز}} - P_0 = P_{\text{آب}} - P_{\text{روغن}}$
 $P_{\text{گاز}} - P_0 = 50 - 40 = 10 \text{ mmHg}$
 فشار پیمانه‌ای گاز

۷۱- گزینه ۱

شفاف‌سازی وقتی مقاومت هوا ناچیز است، یعنی انرژی مکانیکی جسم پایسته است.

درس‌نامه ۱ انرژی پتانسیل گرانشی: اگر جسمی با جرم m در ارتفاع h نسبت به سطح زمین قرار بگیرد، آن‌گاه انرژی پتانسیل گرانشی آن از رابطه مقابل به دست می‌آید (مبدأ انرژی پتانسیل گرانشی را سطح زمین فرض کردیم).
۲ انرژی مکانیکی: به مجموع انرژی جنبشی و انرژی پتانسیل جسم، انرژی مکانیکی می‌گوییم.
 $E = K + U \rightarrow$ انرژی پتانسیل (J)
 اگر از نیروهای اتلافی (مثل نیروی مقاومت هوا) صرف نظر کنیم، انرژی مکانیکی جسم پایسته می‌ماند.
 $E_1 = E_2 \Rightarrow K_1 + U_1 = K_2 + U_2$
 مقاومت هوا ناچیز است؛ پس انرژی مکانیکی توپ پایسته است. بنابراین می‌توانیم بنویسیم (مبدأ انرژی پتانسیل گرانشی را سطح زمین در نظر گرفتیم):

$$E_1 = E_2 \Rightarrow K_1 + U_1 = K_2 + U_2 \Rightarrow \frac{1}{2}mv_1^2 + mgh_1 = \frac{1}{2}mv_2^2 + mgh_2$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} \times 26 + 10 \times h_1 = \frac{1}{2} \times 25 + 10 \times 3 \Rightarrow 10h_1 = 24/5 \Rightarrow h_1 = 2/45 \text{ m}$$

با جای‌گذاری داده‌ها در رابطه زیر، شار مغناطیسی عبوری از حلقه را به دست می‌آوریم.
 $\Phi = BA \cos \theta$
 $\frac{B = 4 \times 10^{-3} \text{ T}, A = 200 \times 10^{-4} \text{ m}^2}{\theta = 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ} \rightarrow \Phi = 4 \times 10^{-3} \times 200 \times 10^{-4} \times \cos 30^\circ$
 $= 4\sqrt{3} \times 10^{-5} \text{ Wb}$

تله اگر زاویه 60° را به عنوان زاویه بین نیم‌خط عمود بر سطح حلقه و بردار میدان مغناطیسی در نظر بگیریم، (۲) منتهی شماس.

۶۸- گزینه ۳

درس‌نامه ۱ معادله جریان متناوب سینوسی بر حسب زمان: بیشینه جریان (A)

$I = I_m \sin\left(\frac{2\pi}{T}t\right)$
 دوره تناوب (s)
۲ نمودار جریان متناوب سینوسی در یک دوره:

شفاف‌سازی

 $I_m = 5\sqrt{2} \text{ A} \Rightarrow -I_m = -5\sqrt{2} \text{ A} \Rightarrow I_m = 5\sqrt{2} \text{ A}$
 $\frac{\Delta T}{4} = \frac{1}{40} \Rightarrow T = \frac{1}{40} \text{ s}$

گام ۱ به کمک نمودار، دوره تناوب را به دست می‌آوریم.
 $T + \frac{T}{4} = \frac{1}{40} \Rightarrow \frac{\Delta T}{4} = \frac{1}{40}$
 $\Rightarrow T = \frac{1}{40} \text{ s}$

گام ۲ معادله جریان متناوب سینوسی بر حسب زمان را می‌نویسیم سپس جریان عبوری از القاگر در $t = \frac{1}{40} \text{ s}$ را به دست می‌آوریم.

$$I = I_m \sin\left(\frac{2\pi}{T}t\right) \xrightarrow{\substack{I_m = 5\sqrt{2} \text{ A} \\ T = \frac{1}{40} \text{ s}}} I = 5\sqrt{2} \sin\left(\frac{2\pi}{\frac{1}{40}}t\right)$$

$$= 5\sqrt{2} \sin(800\pi t) \xrightarrow{t = \frac{1}{40} \text{ s}} I = 5\sqrt{2} \sin\left(\frac{800\pi}{40}\right)$$

$$= 5\sqrt{2} \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = 5\sqrt{2} \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 5 \text{ A}$$

۶۹- گزینه ۴

درس‌نامه ۱ نیرویی که به طور عمود بر سطح وارد می‌شود، فشار ایجاد می‌کند. نسبت اندازه این نیرو به سطحی که بر آن وارد می‌شود، فشار می‌گوییم.

$$\text{نیروی عمودی (N)} \rightarrow P = \frac{F_{\perp}}{A} \rightarrow \text{مساحت (m}^2\text{)}$$

۲ فشار مایع در عمق h از سطح آزاد:
 چگالی مایع (kg/m^3)
 $P = \rho gh \rightarrow$ عمق (m)
 شتاب گرانش (m/s^2)

گام ۱ فشار در ته لوله، ناشی از فشار حاصل از آب، جیوه و هواست. ابتدا فشار ناشی از گرم جیوه و ۱۳۶ گرم آب در انتهای کف ظرف را به دست می‌آوریم.
 $P_{\text{جیوه و آب}} = P_{\text{آب}} + P_{\text{جیوه}} = \frac{(m_{\text{آب}} + m_{\text{جیوه}})g}{A} = \frac{(136 + 136) \times 10^{-3} \times 10}{\Delta \times 10^{-4}} = 5440 \text{ Pa}$



گام ۱ مجموع جرم آب (m) و جرمی از یخ که ذوب شده (m') برابر ۵۲۰ g است، حالا جرم m را به دست می‌آوریم.

$$m' + m = 520 \rightarrow \frac{m'}{1} = \frac{520}{1} \rightarrow m' = 520 - m$$

$$\Rightarrow \frac{12}{1} m = 520 \Rightarrow m = \frac{1 \times 520}{12} = 43.3 \text{ g}$$

گزینه ۲۴

درس‌نامه با توجه به معادله حالت گاز کامل (PV = nRT)، برای مقایسه دو حالت مختلف، رابطه کلی زیر را در نظر بگیرید و هر کمیتی را که در سؤال ثابت فرض شده بود، از طرفین این رابطه حذف کنید.

$$\frac{P_1 V_1}{n_1 T_1} = \frac{P_2 V_2}{n_2 T_2}$$

حجم
فشار
تعداد مول
دما (K)

گام ۱ در فرایند اول، فشار ثابت است. با جای‌گذاری داده‌ها در رابطه زیر، حجم گاز در حالت دوم را به دست می‌آوریم.

$$\frac{P_1 V_1}{T_1} = \frac{P_2 V_2}{T_2} \Rightarrow \frac{V_1}{T_1} = \frac{V_2}{T_2} \Rightarrow \frac{V_2}{(47 + 273)} = \frac{V_1}{(17 + 273)}$$

$$\Rightarrow \frac{V_2}{320} = \frac{V_1}{290} \Rightarrow V_2 = \frac{9}{4} L$$

گام ۲ در فرایند دوم، دما ثابت است. فشار گاز در پایان این مرحله (حالت سوم) را محاسبه می‌کنیم.

$$\frac{P_1 V_1}{T_1} = \frac{P_2 V_2}{T_2} \Rightarrow P_1 V_1 = P_2 V_2 \Rightarrow \frac{P_1}{V_2} = \frac{P_2}{V_1} \Rightarrow \frac{P_1}{290} = \frac{P_2}{9} \Rightarrow P_2 = \frac{290 \times P_1}{9}$$

$$\Rightarrow P_2 = \frac{2 \times 10^5}{9} = 2.22 \times 10^5 \text{ Pa}$$

تیزبازی با توجه به این‌که در مرحله دوم، تغییرات حجم به صورت درصد بیان شده است، نیازی به محاسبه حجم در گام اول نبود و فقط کافی بود گام دوم را بنویسیم.

گزینه ۲۵

درس‌نامه کار محیط بر روی دستگاه، فشار مطلق گاز (Pa)

$$W = -P \Delta V$$

تغییر حجم دستگاه (گاز)

در فرایند هم‌حجم، $W = 0$ است.

گام ۱ فرایند AB به صورت یک خط راست است که امتداد آن از مبدأ نمودار (P-T) ی مربوط به گاز آرمانی می‌گذرد؛ پس فرایند AB، هم‌حجم است. بنابراین کار انجام‌شده روی گاز در این فرایند صفر است (۳) و (۴) برآید.

گام ۲ با جای‌گذاری داده‌ها در رابطه زیر، کار انجام‌شده روی گاز در فرایند BC را به دست می‌آوریم.

$$W = -P \Delta V \xrightarrow{\text{فرایند هم‌فشار}} W_{BC} = -nR \Delta T$$

$$= -1 \times 8 \times (750 - 450) = -2400 \text{ J}$$

شیمی

گزینه ۲۶

عبارت‌های اول و دوم درست‌اند.

بررسی عبارت‌ها:

دارای یک پروتون و یک الکترون است و جرم آن حدود $1.6 \times 10^{-27} \text{ kg}$ است.

نکته تعیین شماره دوره و گروه عناصرها با استفاده از عدد اتمی گازهای نجیب؛ تعیین شماره دوره؛ کافی است عدد اتمی عنصر مورد نظر را بین عدد اتمی دو گاز نجیب قرار دهیم، شماره دوره عنصر با شماره دوره گاز نجیب بعد از آن یکسان است.

عدد اتمی : ۱۱۸ ۸۶ ۵۴ ۳۶ ۱۸ ۱۰ ۲

دوره ۷ دوره ۶ دوره ۵ دوره ۴ دوره ۳ دوره ۲ دوره ۱ گازهای نجیب

گزینه ۲۷

درس‌نامه ۱ چگالی: نسبت جرم به حجم ماده را چگالی آن ماده می‌گوییم.

$$\rho = \frac{m}{V}$$

جرم (kg) →
حجم (m³) →

۲ توان متوسط: آهنگ انجام کار را توان متوسط می‌نامیم. مدت زمان انجام کار (s) →

۳ بازده: نسبت انرژی خروجی به انرژی ورودی سامانه را بازده می‌نامیم.

$$Ra = \frac{E_{\text{خروجی}}}{E_{\text{ورودی}}} = \frac{P_{\text{خروجی}}}{P_{\text{ورودی}}}$$

۴ قضیه کار - انرژی جنبشی: کار کل انجام‌شده بر روی جسم در یک جابه‌جایی معین (کار نیروی خالص وارد بر جسم) برابر با تغییرات انرژی جنبشی جسم است.

۵ کار نیروی وزن: اگر جسمی در راستای قائم به اندازه h جابه‌جا شود، کار نیروی وزن از رابطه زیر به دست می‌آید.

$$W_{mg} = \pm mgh \rightarrow (m) \text{ جابه‌جایی در راستای قائم}$$

جرم (kg) حرکت به سمت پایین
جابه‌جایی در راستای قائم (m) شتاب گرانش (m/s²) حرکت به سمت بالا

گام ۱ ابتدا با استفاده از قضیه کار - انرژی جنبشی، کار انجام‌شده توسط پمپ را به دست می‌آوریم (دقت کنید تندی ابتدا و انتهای حرکت پمپ آب صفر است).

$$W_t = \Delta K \xrightarrow{\Delta K = 0} W_{mg} + W_{\text{پمپ}} = 0$$

$$\Rightarrow -mgh + W_{\text{پمپ}} = 0 \xrightarrow{m = \rho V} W_{\text{پمپ}} = \rho Vgh$$

$$\xrightarrow{\rho = 10^3 \text{ kg/m}^3, V = 2 \text{ m}^3, g = 10 \text{ m/s}^2, h = 24 \text{ m}} W_{\text{پمپ}} = 10^3 \times 2 \times 10 \times 24 = 4.8 \times 10^5 \text{ J}$$

گام ۲ حالا توان پمپ را محاسبه می‌کنیم.

گام ۳ در آخر بازده پمپ را به دست می‌آوریم و تمام!

$$Ra = \frac{P_{\text{خروجی}}}{P_{\text{ورودی}}} = \frac{P_{\text{پمپ}}}{P_{\text{ورودی}}} = \frac{12 \times 10^3 \text{ W}}{20 \times 10^3 \text{ W}} = 0.6$$

برحسب درصد → $Ra = 0.6 \times 100 = 60\%$

گزینه ۲۸

درس‌نامه ۱ طبق قانون پایستگی انرژی، جمع جبری گرماهای مبادله‌شده تا رسیدن به حالت تعادل، برابر با صفر است.

$$Q_1 + Q_2 + \dots = 0$$

گرمای ویژه (J/kg·K یا J/kg·°C)

۲ گرمای لازم برای تغییر دما: تغییر دما (K یا °C) →

$$Q = mc \Delta \theta \rightarrow (K \text{ یا } ^\circ C)$$

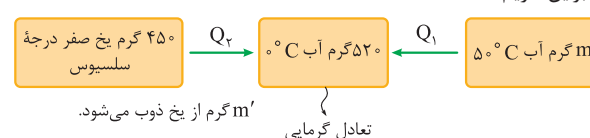
جرم (kg)

۳ گرمای لازم برای تغییر حالت از جامد به مایع: $Q = mL_F$

$$Q = mL_F$$

گرمای نهان ذوب (J/kg)

گام ۱ گرمایی که جسم سرد می‌گیرد با گرمایی که جسم گرم از دست می‌دهد، برابر است؛ بنابراین داریم:



$$Q_1 = m_1 c_{\text{آب}} \Delta \theta_1 = m \times 4200 \times (0 - 50) = -50 \times 4200 \text{ m}$$

$$Q_2 = m' c_{\text{یخ}} \Delta \theta_2 = m' \times 2100 \times (0 - 50) = -50 \times 2100 m'$$

$$Q_1 + Q_2 = 0 \Rightarrow -50 \times 4200 m + 50 \times 2100 m' = 0 \Rightarrow m' = \frac{1}{2} m$$



در این یون، ۳ لایه (لایه‌های اول تا سوم) از الکترون پر شده است. هاستون باشه آله گفته بود
پند لایه اشغال شده، باید می‌گفتم ۱۵۴!

مشاوره می‌دانیم که ژرمانیم، شبه‌فلز است و فقط می‌تواند پیوندهای اشتراکی تشکیل دهد و یون تک‌اتمی پایدار ندارد. تو این مشاوره خواستیم بهتون یگیم که تو سؤال‌های کنکور، سوتی علمی هم ممکنه وجود داشته باشه ولی شما بهش کاری نداشته باشید و همون طور که سؤال رو داده، حلش کنید.

۷۹- گزینه ۲

گام ۱ ابتدا شمار مول الکترون‌های مبادله‌شده برای تشکیل هر مول AlF_3 و Al_2O_3 را حساب می‌کنیم:

نکته شمار الکترون‌های مبادله‌شده در تشکیل هر واحد فرمولی از ترکیب یونی برابر شمار (زیروند) $\times$ قدرمطلق = شمار (زیروند) $\times$ بار = شمار e است با:

شمار کاتیون $\times$ بار کاتیون = شمار مول e مبادله‌شده در تشکیل هر مول Al_2O_3
 $= 3 \times 2 = 6 \text{ mole}^-$

AlF_3 = شمار مول e مبادله‌شده در تشکیل هر مول AlF_3
 $= 3 \times 1 = 3 \text{ mole}^-$

گام ۲ حالا حساب می‌کنیم که به ازای مبادله $3/0 \times 10^{24}$ الکترون، چند گرم از هر ترکیب یونی به دست می‌آید و نسبت جرمی خواسته‌شده رو به دست می‌آید:

تیزبازی در این‌جا چون نسبت جرم AlF_3 به Al_2O_3 را از ما خواسته و نه جرم هر کدام را، می‌توانیم $3/0 \times 10^{24}$ را اصلاً وارد محاسبات نکنیم و مول e را a در نظر بگیریم.

$$\frac{\text{جرم } AlF_3}{\text{جرم } Al_2O_3} = \frac{a \text{ mole}^- \times \frac{1 \text{ mol } AlF_3}{3 \text{ mole}^-} \times \frac{84 \text{ g } AlF_3}{1 \text{ mol } AlF_3}}{a \text{ mole}^- \times \frac{1 \text{ mol } Al_2O_3}{6 \text{ mole}^-} \times \frac{102 \text{ g } Al_2O_3}{1 \text{ mol } Al_2O_3}} = \frac{84 \times 1}{1 \times 102} = \frac{84}{102} = \frac{28}{34} = \frac{14}{17}$$

تیزبازی می‌شه یه پور ریگه هم سؤال رو حل کرد! دیدیم که به ازای تشکیل هر مول AlF_3 و Al_2O_3 به ترتیب ۳ و ۶ مول الکترون مبادله می‌شود؛ پس می‌شه فهمید که به ازای مبادله مول برابر الکترون، تعداد مول AlF_3 تولیدی دو برابر Al_2O_3 تولیدشده خواهد بود؛ بنابراین:

$$\frac{\text{جرم } AlF_3}{\text{جرم } Al_2O_3} = \frac{\text{جرم مولی } AlF_3 \times \text{مول } AlF_3}{\text{جرم مولی } Al_2O_3 \times \text{مول } Al_2O_3} = 2 \times \frac{84}{102} = \frac{168}{102} = \frac{14}{17}$$

۸۰- گزینه ۴

نکته نام و فرمول شیمیایی تمام آنیون‌هایی که باید بلد باشیم؛ در جدول زیر آمده است:

نام آنیون	فرمول آنیون
فلوئورید، کلرید، برمید و یدید (هالیدها)	F^- , Cl^- , Br^- , I^-
اکسید، سولفید	O^{2-} و S^{2-}
نیتريد، فسفید	N^{3-} و P^{3-}
نیتريت، هیدروکسید	NO_2^- , OH^-
سیانید، پرمنگنات	CN^- , MnO_4^-
استات (اتانوات)	CH_3COO^-
هیدروژن کربنات	HCO_3^-
(آنیون‌های چنداتمی با بار -۱)	
کربنات، سولفات (آنیون‌های چنداتمی با بار -۲)	CO_3^{2-} و SO_4^{2-}
فسفات	PO_4^{3-}
سیلیکات	SiO_4^{4-}

نماد یون فسفات به صورت PO_4^{3-} است؛ بنابراین با توجه به فرمول داده‌شده $(X_3(PO_4)_2)$ ، نماد کاتیون X به صورت X^{2+} است. با توجه به فرمول یون‌های سولفید (S^{2-}) و نیتريد (N^{3-})، اولاً ① و ④؛ ثانیاً فرمول شیمیایی سولفید و نیتريد X به صورت XS و X_3N_4 است، پس ② هم پُر!

تعیین شماره گروه: ① اگر عدد اتمی عنصر مورد نظر یک یا دو واحد بیشتر از عدد اتمی یکی از گازهای نجیب باشد، شماره گروه عنصر به ترتیب برابر ۱ یا ۲ است:

$$1 = 19 - 18 \Rightarrow X: 19 \Rightarrow \text{شماره گروه عنصر } X = 1$$

② عنصرهایی که در دو ردیف در پایین جدول قرار دارند (عنصرهای ۵۷ تا ۷۰ و ۸۹ تا ۱۰۲ جدول) را می‌توان متعلق به گروه ۳ دانست.

③ برای بقیه عنصرها که عدد اتمی آن‌ها بیش از ۲ واحد از عدد اتمی گاز نجیب قبل از خود بیشتر است، باید اختلاف عدد اتمی عنصر و گاز نجیب هم‌دوره‌اش را از عدد ۱۸ کم کنیم:

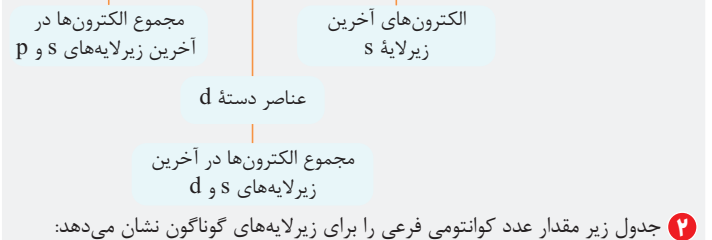
$$11 = (47 - 54) - 18 \Rightarrow \text{شماره گروه} = 47 \Rightarrow A$$

عنصرهایی با عدد اتمی ۱۷ و ۳۵ هر دو در گروه ۱۷ قرار دارند، زیرا عدد اتمی آن‌ها یک واحد کم‌تر از گازهای نجیب Ar_{18} و Kr_{36} (عنصرهای گروه ۱۸) است (آله شک دارین، می‌تونید از آرایش الکترونی استفاده کنید). از طرفی عنصرهای X_{35} و Y_{37} هر دو در دوره چهارم قرار دارند (عنصرهایی با عددهای اتمی ۱۹ تا ۳۶ در دوره چهارم قرار دارند).

④ در دوره سوم، نماد شیمیایی شش عنصر دوحرفی است:
 $_{11}Na, _{12}Mg, _{13}Al, _{14}Si, _{15}P, _{16}S, _{17}Cl, _{18}Ar$
 خواص فیزیکی عنصرهای هم‌گروه که یکسان نیست. تازه خواص شیمیایی عناصر هم‌گروه، مشابه هم است نه یکسان!

۷۷- گزینه ۱

نکته ① تعیین الکترون‌های ظرفیت عناصر دسته‌های s، p و d تناوبی



② جدول زیر مقدار عدد کوانتومی فرعی را برای زیرلایه‌های گوناگون نشان می‌دهد:

نوع زیرلایه	s	p	d	f
مقدار l	۰	۱	۲	۳

آرایش الکترونی کروم به صورت مقابل است:

$$_{24}Cr: [_{18}Ar] 3d^5 4s^1$$

در این اتم، یک الکترون موجود در زیرلایه $4s$ دارای $n+l$ برابر ۴ ($4+0=4$) و ۵ الکترون موجود در زیرلایه $3d$ دارای $n+l$ برابر ۵ ($3+2=5$) هستند.

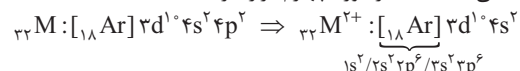
تیزبازی آله به گزینه‌ها دقت کنی، مقدار a برابر با ۱ یا ۲ هستش. می‌دونیم که اتم کروم، در آخرین زیرلایه s خودش دارای ۱ الکترونه. پس ② و ③ حذف می‌شن. هم‌چنین مجموع $n+l$ برای الکترون موجود در زیرلایه $4s$ برابر با ۴ است. پس ④ هم حذف می‌شه. طبق گزینه‌ها اصلاً لازم نیست زیرلایه $3d^5$ رو بررسی کنیم!

۷۸- گزینه ۱

با توجه به عدد جرمی یون $^{72}M^{2+}$ و اطلاعات داده‌شده، خواهیم داشت:

$$\begin{cases} p = 0 / \lambda n \\ n + p = 72 \end{cases} \Rightarrow n + 0 / \lambda n = 72 \Rightarrow 1 / \lambda n = 72 \Rightarrow n = 40, p = Z = 32$$

M عنصری با عدد اتمی ۳۲ (همان Ge_{32}) است که مانند عنصر A_{36} در دوره چهارم قرار دارد. (عنصرهایی با عدد اتمی ۱۹ تا ۳۶ در دوره چهارم قرار دارند.)





برای قسمت دوم، چون صحبت از لیتر و ppm شده و چگالی را هم نداره، ppm را معادل میلی گرم حل شونده بر لیتر محلول در نظر می گیریم.

☆ **نکته** جمع بندی فرمول های ppm: غلظت محلول ها بر حسب ppm را می توان با استفاده از فرمول های زیر محاسبه کرد:

فرمول های ppm

- ۱) $\text{ppm} = \frac{\text{جرم حل شونده}}{\text{جرم محلول}} \times 10^6$ (برای همه محلول ها)
- ۲) $\text{ppm} = \frac{\text{جرم حل شونده (mg)}}{\text{جرم محلول (kg)}} \times 10^6$ (برای همه محلول ها)
- ۳) $\text{ppm} = \frac{\text{جرم حل شونده (mg)}}{\text{جرم حلال (kg)}} \times 10^6$ (برای محلول های بسیار رقیق)
- ۴) $\text{ppm} = \frac{\text{جرم حل شونده (mg)}}{\text{حجم محلول (L)}} \times 10^6$ (برای محلول های بسیار رقیق که حلال آن ها آب است).

پس ابتدا جرم HNO_3 لازم برای تولید ۰/۲ مول NO_3^- را به دست می آوریم:

$$\frac{\text{مول}}{\text{ضریب}} = \frac{\text{جرم}}{\text{جرم مولی} \times \text{ضریب}} \Rightarrow \frac{0.2}{1} = \frac{y}{63 \times 1} \Rightarrow y = 12.6 \text{ g HNO}_3$$

حالا از فرمول ppm، حجم محلول رو به دست میاریم:

$$\text{ppm} = \frac{\text{میلی گرم حل شونده}}{\text{لیتر محلول}} \Rightarrow 5000 = \frac{12.6 \times 1000}{V} \Rightarrow V = \frac{12.6 \times 1000}{5000} = \frac{12.6}{5} = 2.52 \text{ L}$$

☆ **مشاوره** در کنکورهای یکی دو سال اخیر، طراحان کنکور علاقه زیادی به واکنش های طولانی و موازنه اون ها پیدا کردند. تا می تونی روی موازنه واکنش ها کار کن تا دقت و سرعتت بره بالا!



۸۳- گزینه ۱

☆ **نکته** مهم ترین ترکیب های یونی نامحلول (رسوب هایی) که باید بلد باشین، عبارتند از:

رنگ رسوب	فرمول شیمیایی رسوب
سفید	AgCl
سفید	BaSO_4
سفید	$\text{Ca}_3(\text{PO}_4)_2$
سفید	$\text{Mg}(\text{OH})_2$
سبز	$\text{Fe}(\text{OH})_2$
قرمز (آجری)	$\text{Fe}(\text{OH})_3$

معادله موازنه شده واکنش به صورت زیر است:



با توجه به فرمول درصد جرمی (۱۰۰ × جرم حل شونده / جرم محلول = درصد جرمی) می توان دریافت که در ۲۰۰ گرم محلول ۱۰ درصد جرمی سدیم سولفات، ۲۰ گرم (۲۰ × ۱۰۰ / ۱۰۰ = ۲۰) سدیم سولفات وجود دارد، بنابراین:

$$\frac{\text{جرم}}{\text{جرم مولی} \times \text{ضریب}} = \frac{\text{جرم}}{\text{جرم مولی} \times \text{ضریب}} \Rightarrow \frac{10}{142 \times 1} = \frac{x}{233 \times 1} \Rightarrow x = \frac{2330}{142} \approx 16.41 \text{ g BaSO}_4$$

☆ **بررسی سایر گزینه ها:** فرآورده محلول در آب، همان NaCl است:

$$\frac{\text{جرم}}{\text{جرم مولی} \times \text{ضریب}} = \frac{\text{مول}}{\text{ضریب}} \Rightarrow \frac{10}{142 \times 1} = \frac{y}{58.5 \times 2} \Rightarrow y = \frac{20}{71} < 1$$

$$\frac{\text{جرم}}{\text{جرم مولی} \times \text{ضریب}} = \frac{\text{تعداد ذره}}{\text{عدد آووگادرو} \times \text{ضریب}} \Rightarrow \frac{10}{142 \times 1} = \frac{Z}{6.02 \times 10^{23} \times 1} \Rightarrow Z = \frac{10 \times 6.02 \times 10^{23}}{142} \approx 4.24 \times 10^{22}$$

دیدید که اصلاً نیازی به بررسی قسمت آخر سؤال نیست! ولی بدانید و آگاه باشید که با توجه به نماد کاتیون $X (X^{2+})$ می تواند هم متعلق به گروه دوم و هم متعلق به گروه ۸ جدول، مثلاً فلز آهن یا کاتیون Fe^{2+} باشد.



۸۱- گزینه ۳

بیاید اول شمار مول های گاز بوتن (C_4H_{10}) را بساییم!

$$\text{C}_4\text{H}_{10} \text{ مولی } = 58 \text{ g.mol}^{-1} = 4(12) + 10(1)$$

$$11/2 \text{ g C}_4\text{H}_{10} \times \frac{1 \text{ mol C}_4\text{H}_{10}}{58 \text{ g C}_4\text{H}_{10}} = 0.2 \text{ mol C}_4\text{H}_{10}$$

حالا بریم سراغ مقایسه شمار اتم های سازنده گازهای اکسیژن و بوتن در ظرف ها:

$$\frac{\text{شمار اتم ها در ظرف (II)}}{\text{شمار اتم ها در ظرف (I)}} = \frac{0.2 \text{ mol C}_4\text{H}_{10} \times \frac{12 \text{ mol atom}}{1 \text{ mol C}_4\text{H}_{10}} \times \frac{N_A \text{ atom}}{1 \text{ mol atom}}}{0.24 \text{ mol O}_2 \times \frac{2 \text{ mol atom}}{1 \text{ mol O}_2} \times \frac{N_A \text{ atom}}{1 \text{ mol atom}}} = \frac{2.4}{2.88} = \frac{5}{6}$$

☆ **بررسی سایر گزینه ها:**

☆ **نکته** قانون ترکیبی گازها، حجم یک گاز مطابق رابطه مقابل، به سه کمیت فشار، دما و شمار مول های آن وابسته است:

$$V \propto \frac{nT}{P} \Rightarrow \begin{cases} \text{ثابت } T \text{ و } n: V \propto \frac{1}{P} \\ \text{ثابت } P \text{ و } n: V \propto T \\ \text{ثابت } T \text{ و } P: V \propto n \\ \text{ثابت } T \text{ و } V: n \propto P \end{cases}$$

درسته - زیرا مول گاز در ظرف I (O_2) بیشتر از مول گاز در ظرف II (C_4H_{10}) است.

$$V \propto \frac{nT}{P} \Rightarrow \text{ثابت } T \text{ و } V: n \propto P$$

۲) با توجه به معادله موازنه شده واکنش، برای این که ۰/۲ مول گاز بوتن به طور کامل مصرف شود، به ۱/۲ × ۶ = ۳/۲ مول گاز اکسیژن نیاز است، در حالی که ما فقط ۰/۲۴ مول گاز اکسیژن داریم!

۴) اگر در دما و فشار یکسان، مول دو یا چند گاز با هم برابر باشد، حجم آن ها نیز با هم برابر خواهد بود.

$$\text{CO} \text{ مول: } 12/32 \text{ g CO} \times \frac{1 \text{ mol CO}}{28 \text{ g CO}} = 0.44 \text{ mol CO}$$



۸۲- گزینه ۲

اول باید واکنش را موازنه کنیم:

☆ **روش ۱)** به منظور موازنه اتم های ید، ضریب I_2 را برابر ۱ و ضریب HIO_3 را برابر ۲ در نظر می گیریم و برای بقیه ترکیب ها از ضرایب مجهول استفاده می کنیم. با توجه به موازنه اتم نیتروژن، ضرایب HNO_3 و NO_2 را یکسان و برابر a و ضریب H_2O را b فرض می کنیم.

$$\underline{1} \text{I}_2 + \underline{a} \text{HNO}_3 \rightarrow \underline{2} \text{HIO}_3 + \underline{a} \text{NO}_2 + \underline{b} \text{H}_2\text{O}$$

$$\text{موازنه H: } a = 2 + 2b \Rightarrow a - 2b = 2 \Rightarrow a = 1$$

$$\text{موازنه O: } 3a = 6 + 2a + b \Rightarrow a - b = 6 \Rightarrow b = 4$$

☆ **روش ۲)** به روش اکسایش - کاهش واکنش را موازنه می کنیم. عدد اکسایش ید از صفر در I_2 به +۵ در HIO_3 رسیده است. با توجه به این که در سمت چپ دو اتم ید داریم، تغییر عدد اکسایش آن را در ۲ ضرب کرده و ضریب HNO_3 قرار می دهیم. عدد اکسایش N از

$$+5 \text{ در } \text{HNO}_3 \text{ به } +4 \text{ در } \text{NO}_2 \text{ رسیده؛ یعنی } 1 \text{ واحد تغییر کرده است؛ پس ضریب } \text{I}_2 \text{ را برابر } 1 \text{ قرار می دهیم:}$$

$$\underline{1} \text{I}_2 + \underline{1} \text{HNO}_3 \rightarrow \underline{1} \text{HIO}_3 + \underline{1} \text{NO}_2 + \underline{1} \text{H}_2\text{O}$$

به منظور موازنه ید، ضریب HIO_3 باید برابر با ۲ و به منظور موازنه نیتروژن، ضریب NO_2 باید برابر با ۱ باشد. در آخر به کمک موازنه هیدروژن یا اکسیژن، ضریب H_2O باید ۴ باشد.

خلاصه این که معادله موازنه شده این پوراست:



بریم سراغ حل قسمت اول سؤال، (برای NO_2 کسر مربوط به مول و برای I_2 کسر مربوط به جرم را می نویسیم):

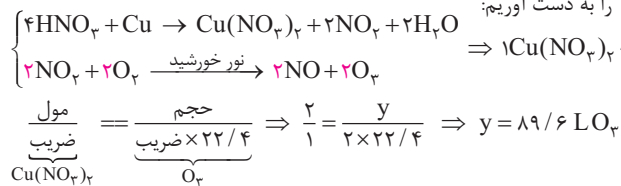
$$\frac{\text{مول}}{\text{ضریب}} = \frac{\text{جرم}}{\text{جرم مولی} \times \text{ضریب}} \Rightarrow \frac{0.2}{1} = \frac{x}{1 \times 254} \Rightarrow x = 50.8 \text{ g I}_2$$



$$\frac{\text{درصد خلوص} \times \text{جرم ناخالص}}{100} = \frac{\text{مول}}{\text{ضریب}} \Rightarrow \frac{63 \times \frac{80}{100}}{4 \times 63} = \frac{x}{1}$$

$$\Rightarrow x = \frac{80}{4} = 2 \text{ mol Cu(NO}_3)_2$$

برای قسمت دوم سؤال، جهت برابری ضریب NO_3 (ماده مشترک) در دو واکنش، واکنش دوم را در عدد ۲ ضرب می‌کنیم تا بتوانیم به طور مستقیم از روی مول تولیدی $\text{Cu(NO}_3)_2$ ، حجم O_2 را به دست آوریم:



۸۶- گزینه ۳

به ثانیه و ساعت در این سؤال خیلی دقت کنید. اول مقدار اتانول تولیدی در هر ثانیه را حساب می‌کنیم: **روش ۱** استفاده از کسر تناسب: در این روش، بازده درصدی در کسر مربوط به واکنش دهنده ضرب می‌شود.

$$\frac{\text{بازده درصدی} \times \text{جرم}}{100} = \frac{\text{جرم}}{\text{جرم مولی} \times \text{ضریب}} \Rightarrow \frac{14 \times \frac{80}{100}}{1 \times 28} = \frac{x}{1 \times 46}$$

$$\Rightarrow x = 40 \times 46 \text{ g} = 40 \times 46 \times 10^{-6} \text{ ton} = 184 \times 10^{-5} \text{ ton}$$

روش ۲ استفاده از کسر تبدیل:

$$1400 \text{ g C}_7\text{H}_8 \times \frac{1 \text{ mol C}_7\text{H}_8}{94 \text{ g C}_7\text{H}_8} \times \frac{1 \text{ mol C}_7\text{H}_8\text{OH}}{1 \text{ mol C}_7\text{H}_8} \times \frac{46 \text{ g C}_7\text{H}_8\text{OH}}{1 \text{ mol C}_7\text{H}_8\text{OH}} \times \frac{1 \text{ ton C}_7\text{H}_8\text{OH}}{10^6 \text{ g C}_7\text{H}_8\text{OH}} \times \frac{80 \text{ ton C}_7\text{H}_8\text{OH}}{100 \text{ ton C}_7\text{H}_8\text{OH}} = 184 \times 10^{-5} \text{ ton C}_7\text{H}_8\text{OH}$$

خب! این مقدار برای یک ثانیه بود؛ پس جرم اتانول تولیدشده در هر ساعت که معادل $3600 \times 184 \times 10^{-5} = 36 \times 184 \times 10^{-3} = 6.624 \text{ ton}$ ثانیه (۶۰ × ۶۰ = ۳۶۰۰) است، برابر است با:

۸۷- گزینه ۴

درس‌نامه جدول زیر، فرمول عمومی و تعداد اتم‌های کربن در ساده‌ترین عضو ۴ دسته از هیدروکربن‌ها را نشان می‌دهد.

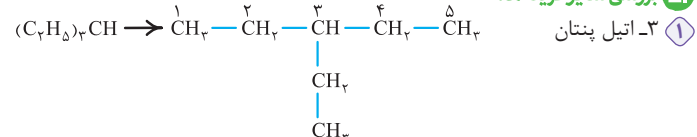
نام خانواده	فرمول عمومی هیدروکربن	حداقل تعداد اتم کربن
آلکان	$\text{C}_n\text{H}_{2n+2}$	۱
آلکن	C_nH_{2n}	۲
آلکین	$\text{C}_n\text{H}_{2n-2}$	۲
سیکلوآلکان	C_nH_{2n}	۳

به ترکیب‌هایی که فرمول مولکولی یکسان ولی فرمول ساختاری متفاوت دارند، ایزومر یا هم‌پار می‌گویند. با توجه به فرمول عمومی یکسان آلکن‌ها و سیکلوآلکان‌ها (C_nH_{2n})، این دو ترکیب در شمار اتم‌های کربن یکسان، ایزومر یکدیگرند.

با توجه به این‌که اولین عضو خانواده آلکین‌ها (C_2H_2)، دو اتم کربن دارد. ششمین عضو آن‌ها دارای ۷ اتم کربن است و فرمول مولکولی آن C_7H_{12} می‌باشد. از طرفی ششمین عضو خانواده آلکان‌ها، C_6H_{14} است:

$$\text{C}_7\text{H}_{12} = 12 - 2 = 10 \text{ g} - \text{جرم مولی H} - \text{جرم مولی C} = \text{جرم مولی C}_6\text{H}_{14} - \text{جرم مولی C}_7\text{H}_{12}$$

بررسی سایر گزینه‌ها:



۴ یکی از فراورده‌ها (BaSO_4) رسوب است و در آب حل نمی‌شود.

مشاوره ماشاء الله هرگز ننه واسه خوردن به سواله! هواسه باشه سر جلسه کنکور، تو دور اول این مدل سؤال‌های وقت‌گیر رو حل نکنی و بذاریشون واسه دور دوم.

۸۴- گزینه ۳

عبارت‌های اول تا سوم درست‌اند.

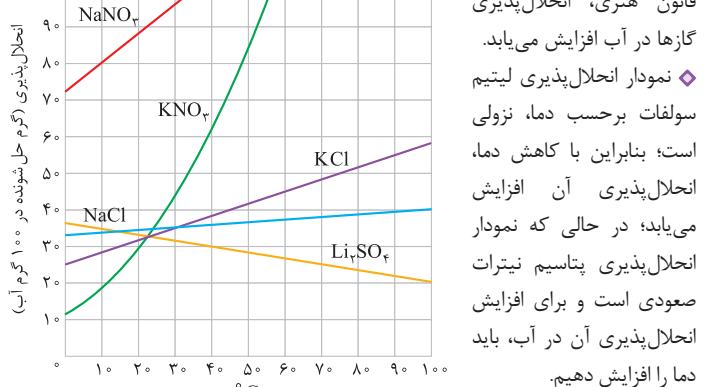
بررسی عبارت‌ها:

نکته در حد اطلاعات کنکور، بدانید و آگاه باشید که اگر با افزایش دما، انحلال پذیری یک ماده در آب کاهش یابد، انحلال آن ماده در آب، گرماده است.

♦ با افزایش دمای آب، انحلال‌پذیری گازها در آب کاهش می‌یابد؛ بنابراین انحلال گازها در آب، گرماده است.

♦ انحلال برخی از مواد آلی مانند استیک اسید (CH_3COOH) در آب، به صورت یونی - مولکولی است؛ یعنی در اثر انحلال این مواد در آب شماری از مولکول‌های حل‌شده آن‌ها در آب، به یون تبدیل می‌شوند (یونیده می‌شوند) و بنابراین محلول آن‌ها رسانای جریان برق است.

♦ با افزایش دمای آب، انحلال‌پذیری گازها در آب کاهش و با افزایش فشار گاز، براساس قانون هنری، انحلال‌پذیری گازها در آب افزایش می‌یابد.

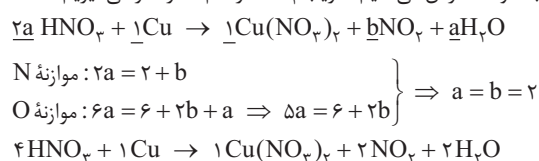


۸۵- گزینه ۳

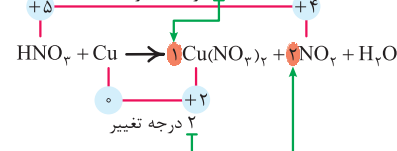
استراتژی ابتدا معادله واکنش‌ها را موازنه کن و برای قسمت اول سؤال از طریق اطلاعات داده‌شده در مورد HNO_3 ، مول تولیدی $\text{Cu(NO}_3)_2$ را به دست بیاور. برای قسمت دوم سؤال، کافیست که با ضرب کردن معادله‌ها در عدد مناسب، ضریب ماده مشترک در دو واکنش (NO_2) را برابر کنی، این‌طوری مستقیم می‌تونی از روی مول تولیدی $\text{Cu(NO}_3)_2$ ، حجم O_2 را به دست بیاوری.

معادله واکنش مس با نیتریک اسید متأسفانه به روش وارسی موازنه نمی‌شود و باید از روش‌های دیگری مانند ضرایب استفاده کنیم.

روش ۱ ضرایب Cu و $\text{Cu(NO}_3)_2$ را برابر ۱ و با توجه به موازنه اتم هیدروژن، ضرایب H_2O و HNO_3 را به ترتیب a و ۲a فرض می‌کنیم. ضریب NO_2 را هم b در نظر می‌گیریم:



روش ۲ به روش اکسایش - کاهش واکنش را موازنه می‌کنیم. اول محاسبه تغییر عدد اکسایش اتم‌ها:



با توجه به این‌که در سمت راست معادله، عدد اکسایش برخی از اتم‌های N تغییر کرده و عدد اکسایش برخی از آن‌ها تغییر نکرده، موازنه را باید از سمت راست و از اتم N که عدد اکسایش آن تغییر کرده، شروع کنیم. به این ترتیب ضریب Cu و HNO_3 در سمت چپ، به ترتیب برابر با ۱ و ۴ خواهد بود و در آخر، ضریب H_2O هم باید برابر ۲ باشد.



بریم سراغ حل قسمت اول سؤال:



تیزبازی اگر به گزینه‌ها دقت کنید، عددهای مربوط به قسمت دوم سؤال کاملاً با هم فرق دارند. اتفاقاً قسمت دوم سؤال خیلی آسونه. به ازای مصرف ۴ مول آمونیاک در واکنش دوم، ۲ مول گاز N_2 تولید می‌شود؛ پس به ازای مصرف ۱ مول آمونیاک، ۰/۵ مول گاز نیتروژن باید تولید بشه پس جواب (۳) است و تمام! به همین سادگی!

بیا بید ببینم قسمت اول سؤال چه طور حل می‌شه؛
روش استفاده از کسر تناسب:

نکته در حل مسائل استوکیومتری ΔH به روش تناسب، باید در یک طرف تناسب، مقدار ΔH واکنش و گرمای مبادله‌شده در شرایط مد نظر سؤال (Q) را به صورت کسر $\frac{Q}{|\Delta H|}$ وارد کنیم.

$$(II) \text{ در واکنش } \frac{\text{جرم}}{\text{جرم مولی} \times \text{ضریب}} = \frac{Q}{|\Delta H|} \Rightarrow \frac{1}{4 \times 17} = \frac{Q}{1530} \Rightarrow Q = \frac{90}{4}$$

$$(I) \text{ در واکنش } \frac{\text{جرم}}{\text{جرم مولی} \times \text{ضریب}} = \frac{Q}{|\Delta H|} \Rightarrow \frac{x}{1 \times 76} = \frac{90}{1075}$$

$$\Rightarrow x = \frac{90 \times 76}{4 \times 1075} = \frac{684}{430} \Rightarrow 1 < \frac{684}{430} < 2 \xrightarrow{\text{گزینه (۱) یا (۳)}} x = 1/59 \text{ g CS}_2$$

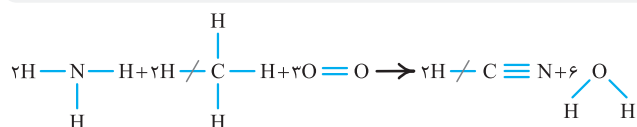
روش استفاده از کسر تبدیل:

$$1 \text{ g NH}_3 \times \frac{1 \text{ mol NH}_3}{17 \text{ g NH}_3} \times \frac{1530 \text{ kJ}}{4 \text{ mol NH}_3} = x \text{ g CS}_2 \times \frac{1 \text{ mol CS}_2}{76 \text{ g CS}_2} \times \frac{1075 \text{ kJ}}{1 \text{ mol CS}_2}$$

$$\Rightarrow x = \frac{1530 \times 76}{4 \times 1075} = \frac{684}{430} \Rightarrow 1 < \frac{684}{430} < 2 \xrightarrow{\text{گزینه (۱) یا (۳)}} x = 1/59 \text{ g CS}_2$$

۹۰- گزینه ۳

نکته مجموع آنتالپی پیوندها - مجموع آنتالپی پیوندها = ΔH (واکنش) در مواد فراورده در مواد واکنش‌دهنده



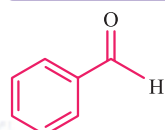
$$\Delta H = [6\Delta H(N-H) + 6\Delta H(C-H) + 3\Delta H(O=O)] - [2\Delta H(C \equiv N) + 12\Delta H(O-H)]$$

$$\Rightarrow \Delta H = [(6 \times 390) + (6 \times 414) + (3 \times 495)] - [(2 \times 880) + (12 \times 463)]$$

تیزبازی (تکنیک محاسباتی): در این جا تکنیک رقم سمت راست (یعنی انجام عملیات ضرب، جمع و تفریق فقط بر روی یکان اعداد) دردی از ما دور نمی‌کند! چون در دو (۳) و (۴) یکان عدد داده‌شده یکسان است. خب در این مورد برای این که محاسبات راحت‌تری داشته باشیم، می‌توانیم مضارب ۶ را جداگانه حساب کنیم: $12 \times 463 = 6 \times 2 \times 463 = 6 \times 926$
 $\Delta H = 6(390 + 414 - 926) + (3 \times 495) - (2 \times 880)$
 $= -732 + 1485 - 1760 = -1007 \text{ kJ}$

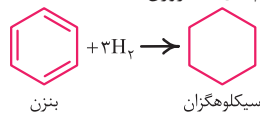
مشاوره راستش بچه‌ها طراح تو این سؤال به سوتی نگارشی - علمی ریز داده. می‌دونیم که در محاسبه ΔH واکنش به کمک آنتالپی‌های پیوند، همه مواد باید به حالت گاز باشند، اما طراح در این سؤال، حالت فیزیکی H_2O رو به اشتباه مایع (l) داده. خواستیم بهتون بگیم که تو کنکور سوتی نگارشی، علمی و ... وجود داره ولی شما بهش کاری نداشته باشید و با چشم‌پوشی از خطا، سؤالو حل کنید.

۹۱- گزینه ۲



بنزالدهید، ترکیبی آروماتیک با فرمول مولکولی C_7H_6O است.

هیچتا هم مانند ترکیب داده‌شده، یک آلکان ۷ کربنی است؛ پس این دو ترکیب ایزومر یا هم‌پارند. C_nH_{2n} سیکلوآلکان‌ها با آلکان‌های هم‌کربن خود، ایزومرند و فرمول مولکولی آن‌ها C_nH_{2n} است. در این ترکیب‌ها، شمار اتم‌های کربن، نصف شمار اتم‌های هیدروژن است.



۸۸- گزینه ۴

شفاف‌سازی در ساختارهای سه‌بعدی یا فضایی مولکول‌ها و ترکیب‌ها، زاویه قرارگیری اتم‌ها نسبت به یکدیگر همانند ساختار واقعی آن‌ها است؛ بنابراین برای نشان‌دادن این ساختارهای سه‌بعدی روی صفحه دو بعدی کاغذ، بعضی از پیوندها (خطوط) روی یکدیگر قرار می‌گیرند. مثلاً در ساختار فضایی ترکیب‌های آلی، نباید تصور کنید که در تقاطع هر دو خطی، لزوماً اتم کربن وجود دارد و باید دید سه‌بعدی به ساختارها داشته باشید. معمولاً در این ساختارها برای جلوگیری از ایجاد اشتباه در شمارش اتم‌های کربن، در تقاطع خطوط فاقد اتم کربن، کمی فضای خالی ایجاد می‌کنند (X). متأسفانه در این سؤال، این موضوع رعایت نشده! پی‌بگیم! به شکل‌های روبه‌رو دقت کنید:

با توجه به ساختارها، فرمول مولکولی ترکیب (I)، $C_{11}H_{14}O$ و فرمول مولکولی ترکیب (II)، $C_{11}H_{16}O$ است، حالا بریم سراغ بررسی گزینه‌ها: ۱) تفاوت جرم مولی دو ترکیب $C_{11}H_{14}O$ و $C_{11}H_{16}O$ ، درجرم ۲ مول ۲ اتم H بوده و برابر با ۲ گرم است. X
۲) ترکیب (II) دارای یک پیوند دوگانه کربن - کربن است؛ در نتیجه هر مول از آن با ۱ مول برم به طور کامل واکنش داده و به ترکیب سیر شده تبدیل می‌شود؛ بنابراین:

$$1 \text{ mol } C_{11}H_{16}O \sim 1 \text{ mol Br}_2$$

$$\frac{\text{جرم}}{\text{جرم مولی} \times \text{ضریب}} = \frac{\text{جرم}}{\text{جرم مولی} \times \text{ضریب}}$$

$$\frac{x}{1 \times 160} = \frac{4}{1 \times 152} \Rightarrow x = \frac{4 \times 160}{152} = 4 \text{ g Br}_2 \quad X$$

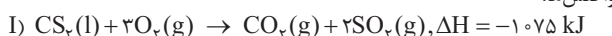
چون فرمول مولکولی دو ترکیب یکسان نیست؛ در نتیجه هم‌پار (ایزومر) نیستند. X
ترکیب (I)، یک عامل کتون ($C=O$) و در ترکیب (II)، یک عامل اتری ($C-O-C$) وجود دارد.

معادله موازنه‌شده سوختن کامل ترکیب (I) به صورت زیر است:
 $C_{11}H_{14}O + 13O_2 \rightarrow 11CO_2 + 7H_2O$
 $\frac{\text{جرم}}{\text{جرم مولی} \times \text{ضریب}} = \frac{\text{جرم}}{\text{جرم مولی} \times \text{ضریب}}$
 $\frac{x}{1 \times 152} = \frac{11 \times 44}{11 \times 44} \Rightarrow x = 11 \times 152 = 1672 \text{ g}$
 $y = \frac{13 \times 32 \times 1}{152} = 27.63 \text{ g}$
 $LO_2 = (11 \times 1/12) + (3 \times 1/12) = 11/2 + 3/4 = 14/56$ ✓

مشاوره ساختارهای سه‌بعدی ترکیب‌های آلی برای اولین بار در کنکور ۹۹ رشته ریاضی مطرح شدند. این ساختارها، تیپ جدید سؤالات کنکور هستند و باید تمرین کنید تا بتوانید فرمول مولکولی این ترکیب‌ها را بنویسید.

۸۹- گزینه ۳

اول موازنه واکنش‌ها:





برای قسمت اول سؤال که به حلش نیازی نبود، به صورت زیر عمل می‌کنیم:

$$a = \Delta n(\text{CO}_2) \begin{cases} t = 3^\circ = 3 \times 10^{-2} - 2 / 5 \times 10^{-2} = 0 / 5 \times 10^{-2} = 0 \times 10^{-2} = 0 \times 10^{-2} \\ t = 2^\circ \end{cases}$$

$$t = 5^\circ \text{ s} : \text{CO}_2 \text{ جرم} = 65 / 98 - 64 / 5 = 1 / 48 \text{ g} \xrightarrow{+44(\text{CO}_2 \text{ مولی})} 3 / 36 \times 10^{-2} \text{ mol}$$

$$c = \Delta n(\text{CO}_2) \begin{cases} t = 5^\circ = 3 / 36 \times 10^{-2} - 3 / 25 \times 10^{-2} = 1 / 1 \times 10^{-2} \\ t = 4^\circ \end{cases}$$

$$\frac{c}{a} = \frac{1 / 1 \times 10^{-2}}{0 \times 10^{-2}} = 0 / 22$$

۹۳- گزینه ۴

عبارت‌های (آ)، (پ)، (ت) و (ث) درست‌اند.

بررسی عبارت نادرست: (ب) سهم بیشتر لیاف تولیدی در جهان مربوط به لیاف ساختگی است.

تله شاید خیلی‌ها تون در نگاه اول، عبارت (آ) رو به دلیل این که به جای پلی‌استیرن گفته استیرن، غلط بگیرند! اما سازمان سنجش این عبارت رو درست گرفته و چون پلی‌استیرن هم از استیرن تهیه می‌شه، در واقع ماده اولیه برای تولید طرف‌های یکبارمصرف را همون استیرن در نظر گرفته است! گاهی دیدگاه طراح‌ها مختلف و متفاوت، کاریشم نمی‌شه کرد. ولی کاش دوستان طراح، حداقل این‌گونه عبارت‌ها رو در سؤال‌های کدام گزینه درست یا نادرست است بیارند که بشه راحت‌تر در موردشون تصمیم گرفت!

۹۴- گزینه ۱

استراتژی برای قسمت اول سؤال کافیست که با استفاده از استوکیومتری واکنش، بین جرم CuA_2 و حجم و غلظت NaOH ، روابط استوکیومتری رو بنویسی و جرم مولی CuA_2 و از اون، جرم مولی A^- رو به دست بیاری و با توجه به گزینه‌ها ببینی جرم مولی A^- برابر جرم مولی یون CH_3COO^- هست یا NO_3^- . قسمت دوم سؤال هم که خیلی راحت! یه استوکیومتری ساده‌ست.

اگر جرم مولی نمک CuA_2 را a در نظر بگیریم، خواهیم داشت:



روش استفاده از کسر تناسب:

$$\frac{\text{جرم}}{\text{جرم مولی} \times \text{ضریب}} = \frac{\text{حجم} \times \text{غلظت مولی}}{\text{ضریب}} \Rightarrow \frac{4 / 55}{1 \times a} = \frac{0 / 5 \times 0 / 1}{2}$$

$$\Rightarrow (\text{CuA}_2 \text{ جرم مولی}) a = 182 \text{ g.mol}^{-1}$$

روش استفاده از کسر تبدیل:

$$0 / 1 \text{ L NaOH(aq)} \times \frac{0 / 5 \text{ mol NaOH}}{1 \text{ L NaOH(aq)}} \times \frac{1 \text{ mol CuA}_2}{2 \text{ mol NaOH}} \times \frac{a \text{ g CuA}_2}{1 \text{ mol CuA}_2} = 4 / 55 \Rightarrow (\text{CuA}_2 \text{ جرم مولی}) a = 182 \text{ g.mol}^{-1}$$

$$\text{CuA}_2 \text{ جرم مولی} = \text{Cu جرم مولی} + 2 \times \text{A جرم مولی} = 182$$

$$\Rightarrow \text{A جرم مولی} = \frac{182 - 64}{2} = 59 \text{ g.mol}^{-1}$$

حالا باید ببینیم جرم مولی کدام یون از یون‌های استات (CH_3COO^-) یا نیترات (NO_3^-) برابر با ۵۹ است: CH_3COO^- جرم مولی $= 2(12) + 3 + 2(16) = 59$ ✓

$$\text{NO}_3^- \text{ جرم مولی} = 14 + 3(16) = 62 \quad \times$$

قسمت دوم هم که کاری نداره!

روش استفاده از کسر تناسب:

$$\frac{\text{جرم}}{\text{جرم مولی} \times \text{ضریب}} = \frac{\text{حجم} \times \text{غلظت مولی}}{\text{ضریب}} \Rightarrow \frac{x}{1 \times 98} = \frac{0 / 5 \times 0 / 1}{2}$$

$$\Rightarrow x = 2 / 45 \text{ g Cu(OH)}_2$$

روش استفاده از کسر تبدیل:

$$0 / 1 \text{ L NaOH(aq)} \times \frac{0 / 5 \text{ mol NaOH}}{1 \text{ L NaOH(aq)}} \times \frac{1 \text{ mol Cu(OH)}_2}{2 \text{ mol NaOH}} \times \frac{98 \text{ g Cu(OH)}_2}{1 \text{ mol Cu(OH)}_2} = 2 / 45 \text{ g}$$

نکته برای به دست آوردن تعداد اتم‌های هیدروژن در یک ترکیب آلی می‌توان از فرمول زیر استفاده کرد:

$$\begin{aligned} \text{تعداد پیوندهای (} 2n + 2 \text{)} - \text{تعداد اتم‌های H در دوگانه و حلقه‌ها} &= \text{ترکیبی با n اتم کربن} \\ \text{تعداد اتم‌های N (} 1 \times \text{)} + \text{تعداد اتم‌های هالوژن (} 1 \times \text{)} - \text{تعداد پیوندهای سه‌گانه (} 4 \times \text{)} &= \end{aligned}$$

ترکیب داده‌شده در سؤال، ۱۰ اتم کربن و ۲ پیوند دوگانه دارد؛ بنابراین فرمول مولکولی آن $\text{C}_{10}\text{H}_{18}\text{O}$ است.

تیزبازی در واکنش سوختن کامل ترکیب آلی اکسیژن‌دار، ضریب CO_2 برابر با تعداد کربن‌ها و ضریب H_2O ، نصف تعداد اتم‌های هیدروژن در ترکیب است. با این ترفند نیازی به نوشتن واکنش سوختن نیست.

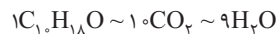
اگر مول بنزآلدئید را برابر با x مول و مول $\text{C}_{10}\text{H}_{18}\text{O}$ را برابر با y مول در نظر بگیریم، می‌توان نوشت:

گام ۱ در واکنش سوختن کامل بنزآلدئید می‌توان به هم‌ارزی زیر رسید:



مطابق با رابطه بالا، به ازای سوختن کامل x مول بنزآلدئید، $7x$ مول CO_2 و $3x$ مول H_2O تولید می‌شود.

گام ۲ در واکنش سوختن کامل $\text{C}_{10}\text{H}_{18}\text{O}$ هم می‌توان به هم‌ارزی زیر رسید:



مطابق با رابطه بالا، به ازای سوختن کامل y مول بنزآلدئید، $10y$ مول CO_2 و $9y$ مول H_2O تولید می‌شود.

گام ۳ مجموع مول گاز CO_2 در دو واکنش، برابر با $9/4$ مول و مجموع مول H_2O در دو واکنش برابر با $7/8$ مول است. بر این اساس می‌توان نوشت:

$$\begin{aligned} \begin{cases} \text{CO}_2 \text{ مول} \Rightarrow 9/4 = 7x + 10y \xrightarrow{\times(9)} 84/6 = 63x + 90y \\ \text{H}_2\text{O} \text{ مول} \Rightarrow 7/8 = 3x + 9y \xrightarrow{\times(-10)} -78 = -30x - 90y \end{cases} \\ \hline 33x = 6/6 \\ \Rightarrow x = 0/2 \text{ mol}, y = 0/8 \text{ mol} \end{aligned}$$

$$100 \times \frac{\text{مول بنزآلدئید}}{\text{مجموع مول دو ترکیب}} = \text{درصد مولی بنزآلدئید}$$

$$= \frac{x}{x+y} \times 100 = \frac{0/2}{0/2 + 0/8} \times 100 = 20\%$$

۹۲- گزینه ۳

گام ۱ جرم مخلوط واکنش در آغاز واکنش ($t = 0^\circ \text{ s}$)، برابر با $65/98$ گرم است. در واکنش داده‌شده، تنها فراورده گازی CO_2 است، در نتیجه کاهش جرم مخلوط به دلیل خروج گاز CO_2 است. بر این اساس، در هر لحظه باید مجموع جرم مخلوط واکنش (باقی‌مانده) با جرم کربن دی‌اکسید خارج‌شده براساس قانون پایستگی جرم برابر با $65/98$ شود.

تیزبازی اگر به گزینه‌ها دقت کنید، مقدار قسمت دوم سؤال در هر گزینه متفاوت؛ در نتیجه نیازی به حل قسمت اول سؤال نداریم. مقدار b ، سرعت متوسط تولید کربن دی‌اکسید رو در بازه زمانی 3° تا 4° ثانیه نشون می‌ده. خب کافیست مول کربن دی‌اکسید رو در این دو لحظه به دست بیارید و در فرمول سرعت جای‌گذاری کنید.

گام ۲ پس بریم سراغ قسمت دوم؛ جرم و مول CO_2 را در ثانیه‌های 3° و 4° به دست می‌آوریم:

$$t = 3^\circ \text{ s} : \text{CO}_2 \text{ جرم} = 65 / 98 - 64 / 66 = 1 / 32 \text{ g}$$

$$\xrightarrow{+44(\text{CO}_2 \text{ مولی})} 3 \times 10^{-2} \text{ mol}$$

$$t = 4^\circ \text{ s} : \text{CO}_2 \text{ جرم} = 65 / 98 - 64 / 55 = 1 / 43 \text{ g} \xrightarrow{+44} 3 / 25 \times 10^{-2} \text{ mol}$$

گام ۳ به دست آوردن b :

$$b = \bar{R}(\text{CO}_2) \begin{cases} t = 4^\circ = \frac{\Delta n(\text{CO}_2)}{\Delta t} \\ t = 3^\circ \end{cases} = \frac{(3 / 25 \times 10^{-2} - 3 \times 10^{-2}) \text{ mol}}{1 \text{ s}} = 2 / 5 \times 10^{-4} \text{ mol.s}^{-1}$$

جواب (۳) می‌شه و تمام!



۹۷- گزینه ۲

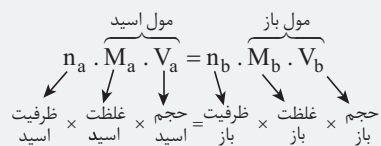
عبارت‌های (ب) و (ت) درست‌اند.

(آ) نه! کی گفته؟! مثلاً NH_3 در ساختار خود یون هیدروکسید ندارد ولی با حل شدن در آب، غلظت یون هیدروکسید را افزایش داده و باز آرنیوس محسوب می‌شود.

(ب) با توجه به تعریف اسید و باز آرنیوس، وجود آب برای این مدل ضروری!

(پ)

نکته برای حل مسائل خنثی‌شدن اسید و باز، از رابطه زیر استفاده می‌کنیم:



۵/۰ مول سولفوریک اسید (H_2SO_4) با ۱ مول سدیم هیدروکسید خنثی می‌شود.

$$n_a \cdot M_a \cdot V_a = n_b \cdot M_b \cdot V_b \Rightarrow 2 \times 5/0 = 1 \times \text{NaOH} \Rightarrow \text{NaOH} = 10 \text{ mol}$$

مول اسید طرفیت $\times$ مول اسید طرفیت $\times$ مول باز طرفیت $\times$ مول باز طرفیت
 اسید باز

(ت) درست! زیرا HNO_3 یک اسید قوی و HCN یک اسید ضعیف است.

تیزبازی با مشخص شدن نادرستی عبارت (آ) و (۳) پُر!

بنابراین فقط با بررسی عبارت (ب) که عبارت درستیه و نیاز به حساب و کتاب نداره، جواب تست به راحتی مشخص می‌شه که می‌شه (۲) و تمام!

۹۸- گزینه ۱

نکته استراتژی ابتدا غلظت محلول که برحسب گرم بر لیتر است را به مول بر لیتر تبدیل کن، تا این‌جا کار غلظت اولیه (M) اسید را داری. از روی pH هم غلظت یون هیدرونیوم را به دست بیار. با داشتن این موارد به آسانی می‌تونی درصد یونش و ثابت یونش اسید را به دست بیاری.

گام اول غلظت محلول را که برحسب گرم بر لیتر داده شده است، به مول بر لیتر تبدیل می‌کنیم:

$$M = \frac{0/2 \text{ g}}{L} \times \frac{1 \text{ mol}}{20 \text{ g}} = 0/01 \text{ mol.L}^{-1}$$

گام غلظت یون هیدرونیوم را در محلول، به کمک pH به دست می‌آوریم:

$$[\text{H}^+] = 10^{-\text{pH}} = 10^{-4/22} = 10^{-4} \times 10^{0/22} = 6 \times 10^{-5} \text{ mol.L}^{-1}$$

تیزبازی اگر به گزینه‌ها دقت کنید، می‌بینید که مقدار قسمت دوم سؤال در هر گزینه متفاوت؛ در نتیجه نیازی به حل قسمت اول سؤال و محاسبه K_a نداریم.

گام درصد یونش

$$\frac{[\text{H}^+]}{M} \times 100 = \frac{6 \times 10^{-5}}{0/01} \times 100 = 0/6$$

جواب می‌شه (۱)، برای قسمت اول سؤال و محاسبه K_a هم، داریم:

$$K_a = \frac{[\text{H}^+]^2}{M - [\text{H}^+]} = \frac{[\text{H}^+]^2}{M}$$

$$\Rightarrow K_a = \frac{6 \times 10^{-5} \times 6 \times 10^{-5}}{0/01} = \frac{36 \times 10^{-10}}{10^{-2}} = 3/6 \times 10^{-7}$$

۹۹- گزینه ۱

درس‌نامه موازنه به روش تغییر عدد اکسایش، به طور کلی برای موازنه واکنش‌های اکسایش - کاهش، ابتدا تغییر عدد اکسایش اتم‌ها را حساب می‌کنیم، سپس مقدار تغییر عدد اکسایش گونه کاهنده را ضریب گونه اکسنده و مقدار تغییر عدد اکسایش گونه اکسنده را ضریب گونه کاهنده قرار می‌دهیم و در آخر، با توجه به ضرایبی که معلوم هستند، ضرایب بقیه گونه‌ها را تعیین می‌کنیم. موازنه باشه که اگر عنصری که عدد اکسایش آن تغییر کرده است، دارای زیروند باشد، باید تغییر عدد اکسایش آن را در زیروندش ضرب کنیم و سپس جابه‌جایی تغییر عدد اکسایش‌ها را انجام بدهیم.

۹۵- گزینه ۴

نکته ویتامین C در آب محلول بوده و ویتامین‌های A، E، D و K در آب حل نمی‌شوند و محلول در چربی هستند.

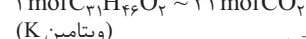
ویتامین C در آب حل می‌شود اما ویتامین K در آب نامحلول است؛ بنابراین جامد جمع‌شده روی کاغذ صافی همان ویتامین K است.

$$\text{جرم ویتامین K} = 0/45 \text{ g}$$

$$\text{جرم ویتامین C} = 1/05 - 0/45 = 0/6 \text{ g}$$

نکته ضریب CO_2 در معادله واکنش سوختن کامل یک ترکیب آلی، با تعداد اتم‌های کربن آن ماده برابر است.

ویتامین K دارای ۳۱ اتم کربن است؛ پس از سوختن کامل هر مول از آن ۳۱ مول CO_2 تولید می‌شود:



(ویتامین K)

$$\frac{\text{جرم مول}}{\text{جرم مولی} \times \text{ضریب}} = \frac{\text{مول}}{\text{ضریب}} \Rightarrow \frac{0/45}{1 \times 450} = \frac{x}{31} \Rightarrow x = 31 \times 10^{-3} = 0/31 \text{ mol CO}_2$$

۹۶- گزینه ۱

نکته استراتژی ابتدا به کمک فرمول رقیق‌سازی محلول‌ها، جرم آب تولیدشده در واکنش را به دست بیار و بعد به کمک آن و معادله واکنش اسید چرب با باز، جرم MOH خالص مصرف‌شده را حساب کن! و در آخر به کمک جرم کل MOH خالص و جرم MOH خالص مصرف‌شده، جرم باقی‌مانده این باز را پیدا کن و به کمک واکنش آن با محلول HCl، غلظت اسید را به دست بیار!

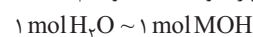
گام برای محاسبه جرم MOH خالص شرکت‌کرده در واکنش، ابتدا باید جرم آب تشکیل‌شده را به دست آوریم. آب تشکیل‌شده توانسته غلظت یک محلول را $1/25$ (۱/۲۵) برابر کند. بنابراین:

$$\frac{M_1 V_1}{\text{غلظت}} = \frac{M_2 V_2}{\text{رقیق}} \Rightarrow M_1 V_1 = \frac{1}{4} M_2 V_2 \Rightarrow V_2 = 4 V_1$$

$$\Rightarrow \text{حجم آب اضافه‌شده} = V_2 - V_1 = 4 V_1 - V_1 = 3 V_1$$

$$(g) \text{ جرم آب} = 3 \times 4/1 = 12/4 \text{ g}$$

گام حالا باید از روی جرم H_2O تولیدی در واکنش، جرم MOH خالص مصرفی در واکنش رو به دست بیاریم. با توجه به معادله واکنش اسید چرب و MOH خواهیم داشت:



$$\frac{\text{جرم}}{\text{جرم مولی} \times \text{ضریب}} = \frac{\text{جرم}}{\text{جرم مولی} \times \text{ضریب}} \Rightarrow \frac{12/4}{1 \times 18} = \frac{x}{1 \times 40}$$

$$\Rightarrow x = 32 \text{ g (جرم MOH خالص مصرفی در واکنش)}$$

$$\text{جرم کل MOH خالص} = 75 \times \frac{67}{100} - \frac{67 \times 3}{100} = 75 \times \frac{2}{3} = 50 \text{ g}$$

نکته بهتره این چندتا کسر معروف رو بشناسید:

$$\frac{1}{4} = 0/25, \frac{1}{4} = 0/25, \frac{1}{8} = 0/125, \frac{1}{16} = 0/0625, \frac{3}{4} = 0/75$$

$$\frac{1}{3} = 0/33, \frac{2}{3} = 0/67$$

$$\text{درصد MOH خالص شرکت‌کرده} = \frac{32}{50} \times 100 = 64\%$$

گام برای قسمت دوم سؤال، جرم باقی‌مانده MOH خالص برابر با $50 - 32 = 18$ گرم است. هر مول MOH با یک مول HCl خنثی می‌شود، بنابراین داریم:



$$\frac{\text{جرم}}{\text{جرم مولی} \times \text{ضریب}} = \frac{(\frac{g}{L}) \times (L)}{\text{جرم مولی} \times \text{ضریب}} \Rightarrow \frac{18}{1 \times 40} = \frac{(\frac{g}{L}) \times 36/5}{1 \times 36/5}$$

$$\Rightarrow (\frac{g}{L}) \text{ HCl} = \frac{18 \times 36/5 \times 5}{36} = 32/18 = 33 \text{ g.L}^{-1}$$



۱۰۲- گزینه ۲

عبارت‌های اول و چهارم درست‌اند. بیاید همه عبارت‌ها را بررسی کنیم:

♦ در فصل سوم شیمی دهم می‌خوانیم که گشتاور دوقطبی آب از هیدروژن سولفید (H_2S) بیشتر است. اتین (C_2H_2) هم که ناقطبی است و گشتاور دوقطبی کم‌تری از آب دارد.

♦ گستره دمایی مایع بودن $NaCl$ بیشتر از HF است و در فناوری تولید برق از انرژی خورشیدی مناسب‌تر (به عنوان منبع ذخیره انرژی گرمایی) است.

♦ در SO_3 ، S بار جزئی مثبت و اتم‌های اکسیژن بار جزئی منفی دارند؛ زیرا خاصیت نافلزی گوگرد از اکسیژن کم‌تر است.

♦ هر چهار یون Na^+ ، F^- ، Mg^{2+} و O^{2-} هم‌الکترون هستند. در یون‌های هم‌الکترون، آنیون با بار بیشتر (O^{2-})، بیشترین شعاع یونی و کاتیون با بار بیشتر (Mg^{2+})، کم‌ترین شعاع یونی را دارد.

۱۰۳- گزینه ۲

عبارت‌های اول و چهارم درست‌اند. عبارت‌های اول و چهارم که بررسی نمی‌فوان، بریم سراغ بقیه عبارت‌ها؛ عبارت دوم؛ فقط الکترون‌های ظرفیت، دریای الکترونی را می‌سازند نه همه الکترون‌های یک اتم! عبارت سوم؛ عدد اکسایش که یک خاصیت شیمیایی است، ربطی به دریای الکترونی ندارد. از طرفی مثلاً فلزهای گروه دوم، ۲ الکترون ظرفیت دارند که در به وجود آمدن دریای الکترونی آن‌ها نقش دارد اما این عنصرها، فقط یک نوع عدد اکسایش در ترکیب‌هایشان دارند.

عبارت پنجم؛ براساس مدل دریای الکترونی، ساختار فلزها آرایش منظمی از کاتیون‌ها در سه بعد است که در فضای میان آن‌ها، سست‌ترین الکترون‌ها، یعنی الکترون‌های ظرفیت، دریای الکترونی را ساخته‌اند. در این مدل کاتیون‌های فلزی رو داریم که در مکان‌های ثابت جای دارند، نه اتم‌های فلزی! و جاذبه قوی بین الکترون‌های ظرفیتی و کاتیون‌های فلزی است نه هسته اتم‌های فلز!

❶ **تله** در عبارت پنجم، طراح خیلی زیرکانه، عبارت را طوری طرح کرده که اگر درست‌ه‌ولی باید مواظبتون باشه که ما در مدل دریای الکترونی، اتم فلز را نداریم، کاتیون داریم و الکترون‌های ظرفیت.

۱۰۴- گزینه ۴

عبارت‌های (ب) و (پ) درست‌اند.

(آ) با توجه به معادله واکنش و اطلاعات داده‌شده، با مصرف ۲ مول NO ، ۱ مول N_2 تولید و ۱۸۰ کیلوژول انرژی آزاد می‌شود؛ بنابراین داریم:

$$2NO \rightarrow N_2 + O_2 + 180 \text{ kJ} \Rightarrow \frac{Q}{\Delta H} = \frac{x}{2} = \frac{Q}{180} \Rightarrow \begin{cases} x = 0.125 \text{ mol} \\ Q = 22.5 \text{ kJ} \end{cases}$$

(ب) علامت ΔH در واکنش‌های گرماده، منفی است و سطح انرژی فرآورده‌ها پایین‌تر از واکنش‌دهنده‌ها است. (پ) مگه شک داریم؟! (ت) تفاوت سطح انرژی واکنش‌دهنده‌ها و فرآورده‌ها همان ΔH است که با به کار بردن کاتالیزگر هم تغییری نمی‌کنه.

❶ **تله** عبارت (پ) این سؤال می‌تونه شما رو به دام بندازه، این عبارت درست است ولی اگر ذکر می‌شد که کاتالیزگر با افزایش سرعت می‌تواند مقدار فرآورده‌ها را افزایش دهد! به نظر تون بازم درست بود؟ قطعاً فیر. چون کاتالیزگر فقط سرعتو زیاد می‌کنه کاری به مقدار فرآورده تولیدشده نداره.

❷ **مشاوره** بهترین راه حل سؤالی موردی که گزینه‌هاش مشفه، اینه که اول سراغ عبارت‌های آسون‌تر و غیرمماسباتی برید. در این سؤال اگر کمی تسلط داشته باشید، سریع متوجه درست بودن عبارت (ب) می‌شید؛ پس ❶ و ❷ را رد می‌کنید. بین (پ) و (ت) هم عبارتی رو بررسی کنید که براتون آسون‌تره.

۱۰۵- گزینه ۴

$$g \text{ مقدار آلاینده‌ها در نبود مبدل} = 6 + 1/66 + 1/3 = 8/69$$

$$g \text{ مقدار آلاینده‌ها در مجاورت مبدل} = 0/6 + 0/6 + 0/4 = 0/7$$

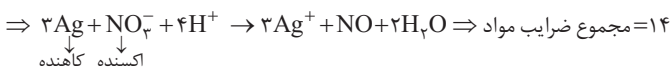
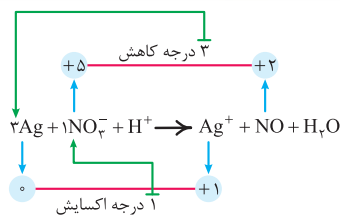
$$g \text{ کاهش جرم آلاینده‌ها به ازای یک کیلومتر} = 8/69 - 0/7 = 7/99$$

$$8 \times 10^5 \text{ خودرو} \times \frac{50 \text{ km}}{1 \text{ خودرو}} \times \frac{7/99 \text{ g}}{1 \text{ km}} \times \frac{1 \text{ ton}}{10^6 \text{ g}} = 319/6 \text{ ton}$$

$$\Rightarrow \text{پاسخ کمی کم‌تر از } 320 \text{ است.} \Rightarrow 320 \text{ ton}$$

$$\frac{\text{جرم CO}}{\text{جرم کل آلاینده‌ها}} \times 100 = \frac{0/6}{0/7} \times 100 = 85/71 \%$$

گام ۱ ابتدا موازنه معادله واکنش:



گام ۲ در این واکنش اکسایش یافته و کاهنده است در حالی که NO_3^- کاهش یافته و اکسند محسوب می‌شود. شمار الکترون‌های مبادله‌شده در این واکنش براساس معادله موازنه‌شده را می‌توان برحسب کاهنده یا اکسند محاسبه کرد. این‌جا کاهنده را Ag است!

❶ **نکته** اگر بخواهیم تعداد مول الکترون‌های مبادله‌شده را براساس معادله موازنه‌شده به دست آوریم؛ از فرمول زیر استفاده می‌کنیم:

$$\text{تعداد اکسند (یا کاهنده)} \times \text{ضریب اکسند (یا کاهنده)} = \text{شمار اتم‌ها در تعداد اکسند (یا کاهنده)}$$

$$e^- \text{ شمار مبادله‌شده} = 3 \times 1 \times 1 = 3$$

به ازای هر مول NO_3^- ، ۳ مول الکترون مبادله می‌شود. $\Rightarrow$ ضریب NO_3^- برابر با یک است.

۱۰۰- گزینه ۲

درس نامه پتانسیل استاندارد نیم سلول‌ها

گونه کاهنده $\rightarrow ne^- + \text{گونه اکسند}$ نیم‌واکنش کاهش

پتانسیل کاهش استاندارد نیم سلول E°

E° منفی‌تر $\leftarrow$ تمایل گونه سمت راست (گونه کاهنده) به از دست دادن الکترون (اکسیدشدن) بیشتر است.

در نتیجه:

E° مثبت‌تر $\leftarrow$ تمایل گونه سمت چپ (گونه اکسند) به گرفتن الکترون (کاهش یافتن) بیشتر است.

مقایسه قدرت کاهش یافتن یا اکسندگی $\leftarrow$ نگاه به چپ‌ها

مقایسه قدرت اکسیدشدن یا کاهندگی $\leftarrow$ نگاه به راستی‌ها

❶ در واکنش‌های اکسایش - کاهش که به طور طبیعی (خودبه‌خودی) انجام می‌شوند، کاهنده قوی‌تر و اکسند قوی‌تر با هم واکنش می‌دهند و اکسند ضعیف‌تر و کاهنده ضعیف‌تر تشکیل می‌دهند و E° واکنش (سلول گالوانی حاصل) از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$(کوچک‌تر) E^\circ - (بزرگ‌تر) E^\circ = E^\circ \text{ (واکنش)} = \text{emf سلول گالوانی}$$

$$E^\circ \text{ بزرگ‌تر} \Rightarrow E^\circ = -0.74 \text{ V} \Rightarrow \text{کاهنده ضعیف‌تر} \quad \text{اکسند قوی‌تر}$$

$$E^\circ \text{ کوچک‌تر} \Rightarrow E^\circ = -1.72 \text{ V} \Rightarrow \text{کاهنده قوی‌تر} \quad \text{اکسند ضعیف‌تر}$$

هر چه E° نیم‌واکنشی منفی‌تر باشد، گونه سمت راست آن کاهنده قوی‌تری است؛ بنابراین در این‌جا باید بگوییم قدرت کاهندگی Cr از Ce^{3+} بیشتر است.

$$3Ce^{3+} + Cr \rightarrow 3Ce^{4+} + Cr$$

$$E^\circ \text{ (واکنش)} = E^\circ \text{ (کوچک‌تر)} - E^\circ \text{ (بزرگ‌تر)} = -0.74 - (-1.72) = 0.98 \text{ V}$$

۱۰۱- گزینه ۳

❶ **نکته** اگر نیم‌واکنش‌ها را از E° بیشتر به E° کم‌تر مرتب کنیم، گونه سمت راست پایین‌تر (کاهنده قوی‌تر) می‌تواند با گونه سمت چپ بالاتر (اکسند قوی‌تر) واکنش دهد.

گام ۲ اول تحلیل هر واکنش: M در سری الکتروشیمیایی پایین‌تر از Hg قرار دارد؛ واکنش اول Sn در سری الکتروشیمیایی بالاتر از M قرار دارد؛ واکنش دوم M در سری الکتروشیمیایی بالاتر از Mg قرار دارد؛ واکنش سوم Mn در سری الکتروشیمیایی پایین‌تر از M قرار دارد؛ واکنش چهارم

Hg	$\rightarrow -0.14 \text{ V}$
Sn	$\rightarrow -0.14 \text{ V}$
M	$\rightarrow -1.18 \text{ V}$
Mn	$\rightarrow -1.18 \text{ V}$
Mg^{2+}	$\rightarrow -1.18 \text{ V}$

❶ **گام ۳** بنابراین ترتیب فلزها در سری الکتروشیمیایی این‌طور است:

E° آن باید بین -0.14 و -1.18 ولت باشد:

پس می‌تواند -0.4 ولت باشد.