



گروه آزمایشی علوم ریاضی و فنی

آزمون ماز | پایه یازدهم



آخر نیم سال دوم $\frac{4}{8}$



ویژه دانش آموزان پایه یازدهم

دفترچه پاسخ

پنجشنبه ۲۴ اردیبهشت ماه ۱۴۰۵

✓ پاسخنامه سریع؛ برای بررسی فوری بعد از آزمون

✓ تحلیل تمام گزینه‌های هر سؤال؛ برای بررسی سؤالاتی که پاسخ نادرست داده‌اید

✓ نکات و درسنامه‌های آموزشی؛ برای یادگیری کامل مباحث هر سؤال

✓ مشاوره تستی؛ برای یادگیری انواع روش‌های حل تست

✓ استراتژی آزمون؛ برای یادگیری مدیریت زمان و مدیریت جلسه آزمون

دِرس	مَسْئُول دِرس	طِراحان	وِیرا سِتانان
ریاضیات	حسین شفیع زاده سید جواد نظری مهرداد کیوان	امیر حسین شریفیان - حسن محمد بیگی علیرضا شریف خطیبی	ندا فرهختی مائده بادان فیروز - حمیدرضا ولی پور یزدان نیک قدم - فؤاد خیر آبادی علی اسدی
فیزیک	حسین عبدوی نژاد محمد جواد سورچی	حسین عبدوی نژاد محمد جواد سورچی	مروارید شاه حسینی علیرضا ملک حسینی
شیمی	علی ترابی	علی ترابی - پرهام تیزپا - فرهنگ امیری طاها حق بین - عالیہ میرزایی	محمد مهدی معظمی فرهنگ امیری - معید ابری محمد دارابی جم امیر علی حسینی فرد

تیم اجرایی و تولید آزمون

نازنین امیری

مائده بادان فیروز

زهره جعفری

مروارید شاه حسینی

مدیر تولید آزمون: محدثه شیخعلی



یک تیم با بیش از ۵۰۰ نفر در حال کار هستند تا آزمون‌های ماز با حداکثر کیفیت حاضر بشن و به شما کمک کنن و مسیر موفقیت رو براتون ساده‌تر کنن. همیشه از نظرات و کامنت‌های خوبتون انرژی می‌گیریم. مرسی که همراهمون هستین. راستی! حتماً در نظر سنجی آزمون شرکت کنین و نظرات و پیشنهاداتتون رو برامون بنویسین.

دکتر رسول خنجری

مدیریت بحران

در روزهای کنکور هم مثل بقیه روزهای زندگی، ممکنه یه اتفاق غیرمنتظره بیفته، از مریض شدن و دعوا تو خونه تا یه نگرانی الکی که یهو می ریزه روی سرت. اگه نتونی این فشارها رو جمع و جور کنی، ممکنه زحمات یک سالت هدر بره. پس باید بلد باشی تو بحران، هم ذهن، هم حالت روحی و هم عملکردت رو کنترل کنی.

اما به نکته خیلی مهم درباره خود ذهن:

فکر کردن یکی از سخت ترین کارهای دنیاست. وقتی داری درس می خونی، ذهن باید انرژی خرج کنه و این برات سنگینه، پس یواشکی دنبال راهی می گرده که از فشار فرار کنه؛ به این می گن مکانیسم دفاعی. این مکانیسم معمولاً منتظر یه فرصت کوچیکه مثل یه کم خستگی، یه سردرد خفیف یا بی حوصله از خواب بیدار شدن. همون لحظه ذهن شروع می کنه زمزمه کردن:

«بیخیال... تو نمی رسی...» «حالا امروز نفوذنی چی میشه؟» «این همه موندن، اصلاً ولش کن...»

نه اینکه واقعاً نتونی، ذهن فقط دنبال اینه که قانعت کنه دست از مسئولیت برداری تا خودش «استراحت» کنه. اینجا دقیقاً باید حواست رو جمع کنی. چون این ناامیدی همون مکانیسم دفاعیه که می خواد گولت بزنه. وقتی بفهمی این صداها از کجا میان، دیگه راحت تسلیمش نمی شی.

حالا جدا از روان شناسی، به تصویر واضح تر:

تصور کن توی مسابقه دو، خیلی نزدیک خط پایانی ولی یه دفعه نفس کم میاری یا حس می کنی نمی تونی و می ایستی؛ همون لحظه بقیه ازت رد می شن. کنکور هم همینه، خیلی ها درست در لحظات آخر کم میارن. پس باید به خودت بگی: «آنگه الان با بزنم، دارم راه رو برای بقیه باز می کنم که رد بشن از من». خیلی وقتا ذهن می گه: «وای چقدر وقت کمه... نفوذم، امسال دیگه ولش کن!». درحالی که اصل کنکور این نیست که همه کتاب ها رو «خورده باشی». اصلش اینه تست درست بیشتری بزنی و جمع بندی و مدیریت داشته باشی. یعنی کیفیت تست زنی و جمع بندی از حجم درس های خونده شده مهم تره.

پس بچسب به ادامه راه و تا آخر پیرانرژی برو 😊

ولی فرض کنیم بحران واقعاً پیش اومد.

اتفاقات بد ضرر دارن و نمی شه انکارش کرد؛ اما اگه تو از نظر روحی هم بریزی به هم، ضررش چند برابر می شه. پس انتخاب با توه؛

از این اتفاق علیه خودت استفاده می کنی یا به نفع خودت؟

همیشه یک اتفاق می تونه دو نفر رو به دو مسیر کاملاً متفاوت ببره.

یکی می گه: «خلان مشکل برام پیش اومد، دیگه نتونستم زندگی مو جمع کنم.»

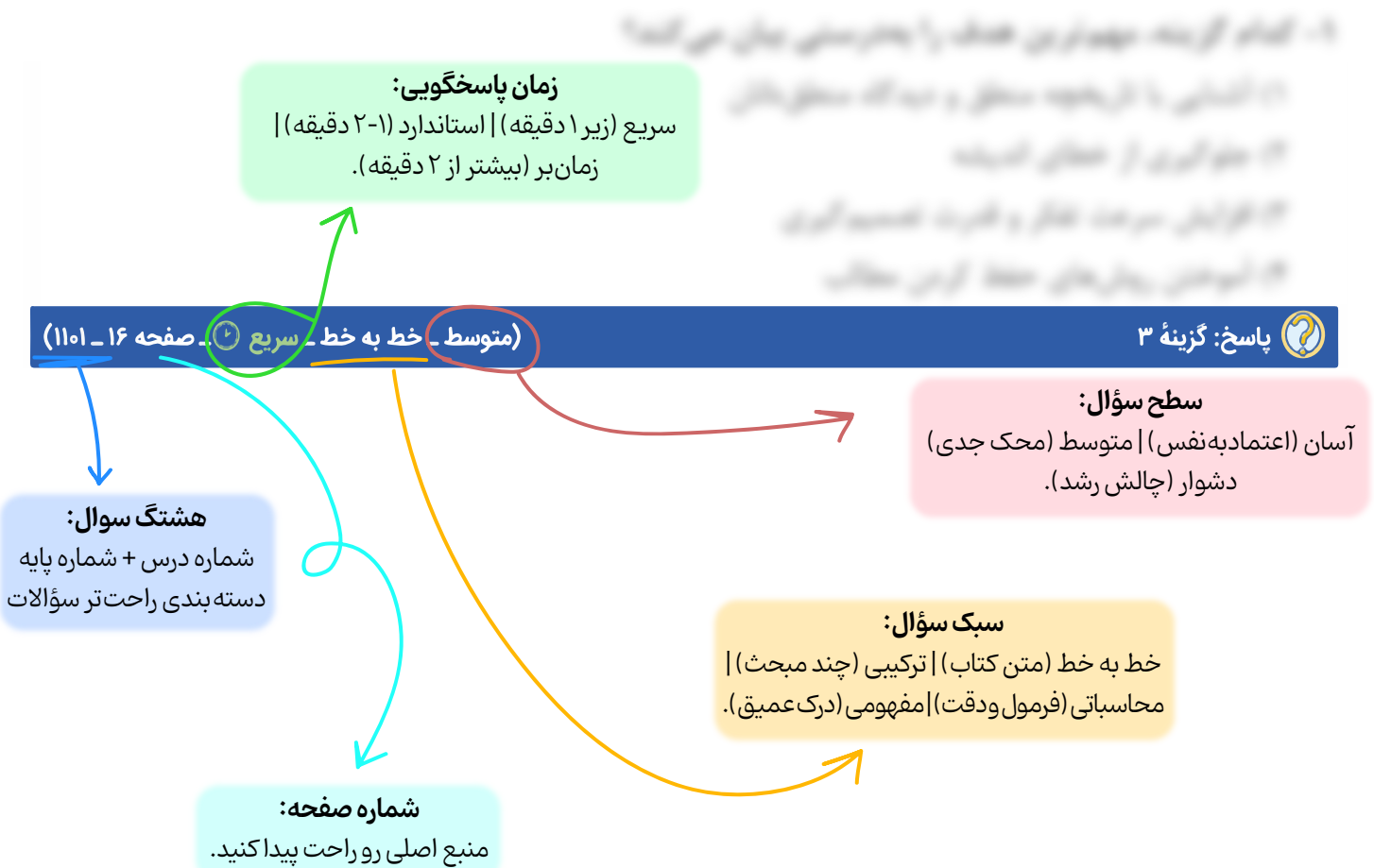
ولی یکی دیگه می گه: «همون مشکل باعث شد بفهمم باید قوی تر بشم و زندگیمو بسازم.»

این تفاوت «تصادف» نیست؛ تصمیم آدمه.

مثلاً یکی از رتبه های تک رقمی سال ۱۳۹۰، دو سه ماه قبل کنکور یه اتفاق خیلی سنگین برات افتاد، ولی می گفت همون اتفاق باعث شد بیشتر بجنگه؛ چون فهمیده بود پشت و پناهی جز خودش نداره. آخرشم با تلاش ادامه داد و شد رتبه ۱. تو هم همین طوری باید نگاه کنی:

بحران همیشه هست؛ مهم اینه از دلش قدرت دبیاری، نه اینکه بزاری لهت کنه 😊

راهنمای پاسخنامه آزمون‌ها



یادتون باشه:

- ✓ هر سؤال یک فرصت یادگیری، نه یک مانع.
- ✓ پاسخنامه فقط جواب نیست؛ یک کارگاه آموزشی کامله.
- ✓ با هر آزمون و مرور این پاسخنامه، یک پله بالاتر می‌رید و یک قدم به رؤیایون نزدیک‌تر می‌شید.
- ✓ موفقیت فقط برای کسانی که با برنامه و انگیزه حرکت می‌کنن. شما همون آدمید.



برای دیدن پاسخنامه ویدئویی آزمون
QRcode بالا را اسکن کنید!
یا بر روی لینک زیر کلیک کنید!
پاسخنامه ویدئویی

بودجه بندی
این آزمون

حسابان ۱: حد و پیوستگی (کل فصل ۵)، صفحه های ۱۱۳ تا ۱۵۱
هندسه ۲: روابط طولی در مثلث (کل فصل ۳)، صفحه های ۵۹ تا ۷۴
آمار و احتمال: آمار و توصیفی (درس ۲ و ۳)، آمار استنباطی (کل فصل ۴)، صفحه های ۸۰ تا ۱۲۱

سهم در
کنکور

حسابان ۱: این مباحث در مجموع ۳ تست از ۱۰ تست کنکور را پوشش داده است.
هندسه ۲: این مباحث در مجموع ۲ تست از ۴ تست کنکور را پوشش داده است.
آمار و احتمال: این مباحث در مجموع ۱ تست از ۴ تست کنکور را پوشش داده است.

۱- به ازای چه مقادیری از m بازه $(2m-1, m^2-2m)$ یک همسایگی نقطه ۳ است؟

(۴) $m > 3$ (۳) $m < -1$ (۲) $2 < m < 3$ (۱) $-1 < m < 2$

آسان - مفهومی/محاسباتی - سریع (۶) - حسابان ۱ صفحه ۱۱۸ - ۱۱۰۵

پاسخ: گزینه ۳

باید $3 \in (2m-1, m^2-2m)$ باشد، یعنی:

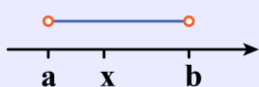
$$2m-1 < 3 < m^2-2m$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2m-1 < 3 \Rightarrow 2m < 4 \Rightarrow m < 2 & (1) \\ m^2-2m > 3 \Rightarrow m^2-2m-3 > 0 \Rightarrow (m+1)(m-3) > 0 \xrightarrow{\text{تعیین علامت}} m < -1 \text{ یا } m > 3 & (2) \end{cases}$$

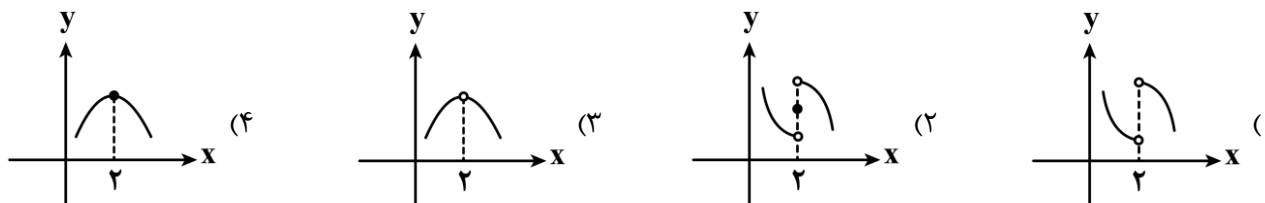
از اشتراک (۱) و (۲) خواهیم داشت: $m < -1$

همسایگی

بازه باز (a, b) را یک همسایگی از نقطه x می‌گوییم اگر شامل x ($x \in (a, b)$) باشد.



۲- کدام یک از گزینه‌ها نمودار تابعی است که در همسایگی نقطه ۲ تعریف شده اما در این نقطه فاقد حد است؟



آسان - مفهومی - سریع (۶) - حسابان ۱ صفحه ۱۲۴ - ۱۱۰۵

پاسخ: گزینه ۲

بررسی گزینه‌ها:

۱ در نقطه ۲ تعریف نشده، پس در همسایگی ۲ نیز تعریف نشده است، زیرا بازه بازی حول ۲ وجود ندارد که ۲ عضوی از آن باشد.
۲ در همسایگی نقطه ۲ تعریف شده و در این نقطه فاقد حد است، زیرا شاخه‌های سمت راست و چپ تابع در ۲ به عدد منحصر به فردی نزدیک نمی‌شوند.

۳ در نقطه ۲ دارای حد است. (اما همسایگی ۲ وجود ندارد).

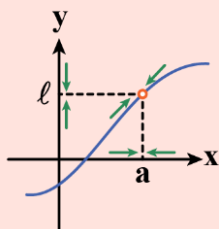
۴ در نقطه ۲ دارای حد است. (همسایگی ۲ وجود دارد).

حد تابع در یک نقطه

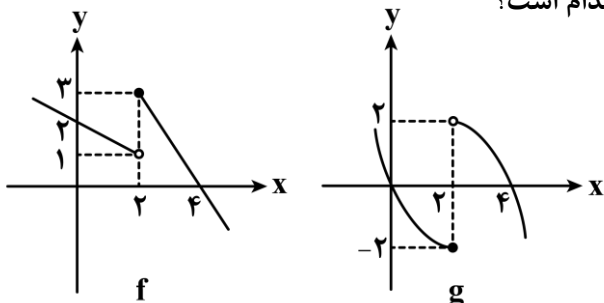
گوییم تابع f در $x = a$ حدی برابر با ℓ دارد اگر همسایگی از a وجود داشته باشد که با نزدیک شدن مقادیر x به a در این همسایگی، مقادیر $f(x)$ به ℓ نزدیک شوند. به عبارت دیگر در این همسایگی وقتی از چپ و راست به a نزدیک شویم مقادیر $f(x)$ به عدد منحصر به فرد ℓ نزدیک شوند.

توجه!

خود $x = a$ در حد مهم نیست، x ها به a نزدیک می‌شوند و لزوماً به خود a نمی‌رسند!



۳- نمودار توابع f و g مطابق شکل هستند. حد تابع $2f - g$ در نقطه $x = 2$ کدام است؟



(۱) صفر

(۲) ۲

(۳) ۴

(۴) وجود ندارد.

(آسان - مفهومی - سریع) - حسابان ۱ صفحه ۱۲۴ - ۱۱۰۵

پاسخ: گزینه ۳

حد چپ و راست دو تابع را در $x = 2$ به دست می‌آوریم:

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = 3 \\ \lim_{x \rightarrow 2^+} g(x) = 2 \end{cases} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 2^+} (2f - g)(x) = 2 \times 3 - 2 = 4$$

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = 1 \\ \lim_{x \rightarrow 2^-} g(x) = -2 \end{cases} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 2^-} (2f - g)(x) = 2 \times 1 - (-2) = 4$$

بنابراین:

$$\lim_{x \rightarrow 2} (2f - g)(x) = 4$$

حد راست و چپ

۱. **حد راست:** فرض کنید f در یک همسایگی راست از a تعریف شده باشد، اگر مقادیر x از سمت راست به a نزدیک شوند ($x > a$) و مقادیر f به ℓ_1 نزدیک شوند، آن‌گاه می‌گوییم حد راست f در $x = a$ برابر با ℓ_1 است و می‌نویسیم:

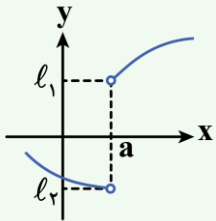
$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \ell_1$$

۲. **حد چپ:** فرض کنید f در یک همسایگی چپ از a تعریف شده باشد، اگر مقادیر x از سمت چپ به a نزدیک شوند ($x < a$) و مقادیر f به ℓ_2 نزدیک شوند، آن گاه می‌گوییم حد چپ f در $x = a$ برابر با ℓ_2 است و می‌نویسیم:

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \ell_2$$

شرط وجود حد تابع

واضح است که تابع f در $x = a$ حد دارد اگر و تنها اگر **حد چپ و راست** f در $x = a$ **موجود و با هم برابر** باشند.



$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow a^+} (f) = \ell_1 \\ \lim_{x \rightarrow a^-} (f) = \ell_2 \end{cases} \xrightarrow{\ell_1 \neq \ell_2} x = a \text{ در } f \text{ فاقد حد دارد}$$

قضایای حد

اگر $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \ell_1$ و $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = \ell_2$ باشد، آن گاه:

- ۱) $\lim_{x \rightarrow a} (f + g) = \ell_1 + \ell_2$
- ۲) $\lim_{x \rightarrow a} (f - g) = \ell_1 - \ell_2$
- ۳) $\lim_{x \rightarrow a} (kf) = k\ell_1$
- ۴) $\lim_{x \rightarrow a} (fg) = \ell_1 \times \ell_2$
- ۵) $\lim_{x \rightarrow a} \left(\frac{f}{g}\right) = \frac{\ell_1}{\ell_2}; \ell_2 \neq 0$

موارد بالا برای حدود یک طرفه هم برقرار است.



۴- کدام گزینه همواره صحیح است؟

- (۱) اگر تابع $g - f$ در $x = a$ دارای حد باشد، $f + g$ نیز در $x = a$ دارای حد است.
- (۲) اگر تابع $g \cdot f$ در $x = a$ فاقد حد باشد، $f - g$ نیز در $x = a$ فاقد حد است.
- (۳) اگر تابع f در $x = a$ دارای حد و تابع g در $x = a$ فاقد حد باشد، $f + g$ در $x = a$ حد ندارد.
- (۴) اگر f در $x = a$ حد نداشته باشد، $|f|$ در $x = a$ حد ندارد.

(آسان - مفهومی - استاندارد) - حسابان ۱ صفحه ۱۴۰ - ۱۱۰۵

پاسخ: گزینه ۳

بررسی گزینه‌های نادرست:

$$f(x) = \frac{1}{x} \text{ و } g(x) = 1 + \frac{1}{x}$$

① مثال نقض:

بنابراین $(g - f) = 1$ در $x = 0$ حدی برابر با ۱ دارد اما $f + g = \frac{2}{x} + 1$ در $x = 0$ حد ندارد.

$$f(x) = \frac{1}{x} \text{ و } g(x) = 1 + \frac{1}{x}$$

② مثال نقض:

$$f \times g = \frac{1}{x} \left(1 + \frac{1}{x}\right) = \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} \text{ و } f - g = -1$$

$f \times g$ در $x=0$ فاقد حد است ولی $f - g$ در $x=0$ حدی برابر (-1) دارد.

مثال نقض: ۴

$$f(x) = \begin{cases} 1 & x \geq 0 \\ -1 & x < 0 \end{cases}$$

چون حد چپ و راست f در $x=0$ با هم برابر نیستند پس f در $x=0$ حد ندارد اما $|f(x)|=1$ در هر نقطه‌ای از جمله $x=0$ حدی برابر با ۱ دارد.

نکته‌های طلایی!

۱) اگر f و g در $x=a$ حد داشته باشند، $f+g$ ، $f-g$ ، $f \times g$ و $\frac{f}{g}$ به شرط آن که $\lim_{x \rightarrow a} g \neq 0$ در $x=a$ **حد دارند**.

۲) اگر f در $x=a$ **حد داشته باشد** و g در $x=a$ **حد نداشته باشد**، $f+g$ و $f-g$ در $x=a$ **حد ندارند** اما $f \times g$ و $\frac{f}{g}$ می‌توانند **حد داشته باشند یا نداشته باشند**.



۵- اگر $f(2x+1) = \frac{x^2+1}{x+2}$ باشد، حاصل $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ کدام است؟

- ۱) $\frac{1}{2}$ ۲) $\frac{2}{3}$ ۳) $\frac{3}{2}$ ۴) ۲

(آسان - مفهومی/محاسباتی - سریع) - حسابان ۱ صفحه ۱۳۲ - ۱۱۰۵

پاسخ: گزینه ۱

روش اول

با در نظر گرفتن $2x+1=t$ داریم:

$$x = \frac{t-1}{2} \Rightarrow f(t) = \frac{\left(\frac{t-1}{2}\right)^2 + 1}{\left(\frac{t-1}{2}\right) + 2} = \frac{(t-1)^2 + 4}{2(t-1) + 8} \Rightarrow f(x) = \frac{(x-1)^2 + 4}{2(x-1) + 8}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)^2 + 4}{2(x-1) + 8} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$$

روش دوم

اگر بخواهیم $1 \rightarrow 2x+1$ باید $x \rightarrow 0$ میل کند، پس می‌نویسیم:

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} f(2x+1) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2+1}{x+2} = \frac{1}{2}$$

حد ترکیب توابع

اگر $f(g(x))$ داده شده باشد و $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ موردنظر باشد باید x را بیابیم که $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = a$ ، در این صورت:

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(g(x))$$

و یا $g(x)=t$ را در نظر بگیریم و ضابطه تابع f را بر حسب t بنویسیم و حد تابع f را در $x=a$ بیابیم.



۶- توابع f و g در $x=2$ دارای حد هستند. اگر $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x+2f(x)}{g(x)-1} = -4$ و $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - g(x)}{\frac{x}{2} - 2f(x)} = -1$ باشند، حد تابع $f+g$ در نقطه $x=2$ کدام است؟

۴ (۴)

-۴ (۳)

۲ (۲)

-۲ (۱)

(متوسط - محاسباتی - استاندارد) - حسابان ۱ صفحه ۱۳۲ - ۱۱۰۵

پاسخ: گزینه ۲

فرض کنیم حد f در $x=2$ برابر L_1 و حد g در $x=2$ برابر L_2 باشد، بنابراین داریم:

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x+2f(x)}{g(x)-1} = -4 \Rightarrow \frac{2+2L_1}{L_2-1} = -4 \Rightarrow 2+2L_1 = -4L_2+4$$

$$\Rightarrow 2L_1+4L_2=2 \Rightarrow L_1+2L_2=1 \quad (1)$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - g(x)}{\frac{x}{2} - 2f(x)} = -1 \Rightarrow \frac{4-L_2}{1-2L_1} = -1 \Rightarrow 4-L_2 = -1+2L_1 \Rightarrow 2L_1+L_2=5 \quad (2)$$

از حل دستگاه دو معادله دو مجهول (۱) و (۲) خواهیم داشت:

$$L_1=3 \text{ و } L_2=-1$$

بنابراین:

$$\lim_{x \rightarrow 2} (f+g)(x) = \lim_{x \rightarrow 2} f(x) + \lim_{x \rightarrow 2} g(x) = L_1 + L_2 = 3-1=2$$



۷- حد تابع $f(x) = 5 \sin \frac{x}{2} + k \cos x$ در نقطه $x=\pi$ با حد تابع $g(x) = \frac{\sin 2x}{k \cos x}$ در نقطه $x=\frac{\pi}{2}$ برابر است. مجموع مقادیر ممکن برای k کدام است؟

۵ (۴)

۴ (۳)

۳ (۲)

۲ (۱)

(متوسط - محاسباتی - استاندارد) - حسابان ۱ صفحه ۱۴۲ - ۱۱۰۵

پاسخ: گزینه ۴

ابتدا حد تابع f را در $x=\pi$ می‌یابیم:

$$\lim_{x \rightarrow \pi} f(x) = \lim_{x \rightarrow \pi} \left(5 \sin \frac{x}{2} + k \cos x \right) = 5 \sin \frac{\pi}{2} + k \cos \pi = 5 \times 1 + k(-1) = 5-k$$

در ادامه حد تابع g را در $x=\frac{\pi}{2}$ می‌یابیم:

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} g(x) = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\sin 2x}{k \cos x} \stackrel{0}{=} \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{2 \sin x \cancel{\cos x}}{k \cancel{\cos x}} = \frac{2 \sin \frac{\pi}{2}}{k} = \frac{2 \times 1}{k} = \frac{2}{k}$$

بنابراین داریم:

$$5-k = \frac{2}{k} \Rightarrow k^2 - 5k + 2 = 0$$

$$-\frac{b}{a} = -\frac{-5}{1} = 5$$

چون $\Delta > 0$ است، پس دو مقدار برای k به دست می‌آید که مجموع آن‌ها برابر است با:

رفع ابهام حد

اگر در محاسبه حد تابع کسری f در $x=a$ ، حد صورت و حد مخرج برابر با صفر شوند به حالت مبهم $\frac{0}{0}$ می‌رسیم پس باید عامل صفرکننده را در صورت و مخرج حذف کنیم و دوباره عمل حدگیری را انجام دهیم.

در توابع مثلثاتی، استفاده از روابط مثلثاتی زیر در تجزیه و حذف عامل صفرکننده مفید است:

$$۱) \sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

$$۲) \sin 2x = 2 \sin x \cos x$$

$$۳) \cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = 2 \cos^2 x - 1 = 1 - 2 \sin^2 x$$



۸- اگر $f(x) = \frac{3}{1+ax}$ داشته باشیم $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{3x} = -1$ ، حد تابع $g(x) = \frac{af(x)-2}{x-2}$ در نقطه $x=2$ کدام است؟

$$\frac{3}{4} \quad (۴)$$

$$-\frac{3}{4} \quad (۳)$$

$$\frac{4}{3} \quad (۲)$$

$$-\frac{4}{3} \quad (۱)$$

(متوسط - محاسباتی - استاندارد) - حسابان ۱ صفحه ۱۴۱ - ۱۱۰۵

پاسخ: گزینه ۱

ابتدا مقدار a را می‌یابیم:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{3x} = -1 &\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{3} = -1 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = -3 \\ \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1} \frac{3}{1+ax} = -3 &\Rightarrow \frac{3}{1+a} = -3 \Rightarrow 1+a = -1 \Rightarrow a = -2 \end{aligned}$$

بنابراین ضابطه تابع به صورت $f(x) = \frac{3}{1-2x}$ بوده و داریم:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2} g(x) &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{af(x)-2}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{-2 \times \frac{3}{1-2x} - 2}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{-6 - 2 + 4x}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{4x - 8}{(x-2)(1-2x)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{4(x-2)}{(x-2)(1-2x)} = \frac{4}{1-2 \times 2} = -\frac{4}{3} \end{aligned}$$

رفع ابهام (حذف عامل صفر کننده)

اگر حد تابع گویای f در $x=a$ برابر با $\frac{0}{0}$ شود، به کمک تجزیه از طریق فاکتورگیری یا اتحادها در صورت و مخرج عامل صفرکننده یعنی $(x-a)$ را حذف می‌کنیم.



۹- مقدار a چقدر باشد تا تابع با ضابطه $f(x) = \frac{|x-1|}{x-1} + a[-x]$ در نقطه $x=1$ دارای حد باشد؟ ([] نماد جزء صحیح است.)

$$-2 \quad (۴)$$

$$2 \quad (۳)$$

$$-1 \quad (۲)$$

$$1 \quad (۱)$$

(متوسط - محاسباتی - استاندارد) - حسابان ۱ صفحه ۱۳۲ - ۱۱۰۵

پاسخ: گزینه ۳

بررسی سریع:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) \\ \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1^+} \left(\frac{x-1}{x-1} + a(-2) \right) &= \lim_{x \rightarrow 1^-} \left(\frac{-(x-1)}{x-1} + a(-1) \right) \\ \Rightarrow 1-2a &= -1-a \Rightarrow a = 2 \end{aligned}$$

باید حد چپ و راست تابع f در $x = 1$ برابر باشند.

وقتی $x \rightarrow 1^+$ داریم:

$$x > 1 \Rightarrow \begin{cases} x - 1 > 0 \Rightarrow |x - 1| = x - 1 \\ -x < -1 \Rightarrow [-x] = -2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \left(\frac{x-1}{x-1} + a(-2) \right) = 1 - 2a$$

وقتی $x \rightarrow 1^-$ داریم:

$$x < 1 \Rightarrow \begin{cases} x - 1 < 0 \Rightarrow |x - 1| = -(x - 1) \\ -x > -1 \Rightarrow [-x] = -1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \left(\frac{-(x-1)}{x-1} + a(-1) \right) = -1 - a$$

اکنون داریم:

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) \Rightarrow 1 - 2a = -1 - a \Rightarrow a = 2$$



۱۰- حد تابع $y = \frac{2 - \sqrt{x+1}}{2x^2 - x - 15}$ در نقطه $x = 3$ کدام است؟

$$-\frac{1}{44} \quad (4)$$

$$-\frac{1}{22} \quad (3)$$

$$\frac{1}{44} \quad (2)$$

$$\frac{1}{22} \quad (1)$$

(متوسط - محاسباتی - استاندارد) - حسابان ۱ صفحه ۱۴۲ - ۱۱۰۵

پاسخ: گزینه ۴

حد تابع در $x = 3$ برابر ۰ است. برای رفع ابهام صورت و مخرج را در مزدوج صورت ضرب می‌کنیم:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 3} \left(\frac{2 - \sqrt{x+1}}{2x^2 - x - 15} \times \frac{2 + \sqrt{x+1}}{2 + \sqrt{x+1}} \right) &= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\overbrace{4 - (x+1)}^{3-x}}{(x-3)(2x+5)(2+\sqrt{x+1})} \\ &= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{-\cancel{(x-3)}}{\cancel{(x-3)}(2x+5)(2+\sqrt{x+1})} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{-1}{(2x+5)(2+\sqrt{x+1})} = \frac{-1}{11 \times 4} = -\frac{1}{44} \end{aligned}$$

رفع ابهام رادیکالی

اگر حد تابع گویای f در $x = a$ برابر با ۰ شود، و در صورت یا مخرج عبارت رادیکالی داشته باشیم، به کمک ضرب کردن صورت و مخرج در مزدوج عبارت رادیکالی، عامل صفرکننده یعنی $(x - a)$ را حذف می‌کنیم.



۱۱- حد تابع $f(x) = \frac{\sqrt{x-1}-1}{x-4}$ در نقطه $x = 4$ کدام است؟

$$\frac{1}{16} \quad (4)$$

$$\frac{1}{8} \quad (3)$$

$$\frac{1}{4} \quad (2)$$

$$\frac{1}{2} \quad (1)$$

(متوسط - محاسباتی - استاندارد) - حسابان ۱ صفحه ۱۴۲ - ۱۱۰۵

پاسخ: گزینه ۳

حد صورت و مخرج در $x = 4$ هر دو برابر صفر است، پس عبارت را در مزدوج صورت ضرب و تقسیم می‌کنیم.

$$\lim_{x \rightarrow 4} \left(\frac{\sqrt{\sqrt{x}-1}-1}{x-4} \times \frac{\sqrt{\sqrt{x}-1}+1}{\sqrt{\sqrt{x}-1}+1} \right) = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{\overbrace{\sqrt{x}-1}^{\sqrt{x}-2}}{(x-4)\underbrace{(\sqrt{\sqrt{x}-1}+1)}_2} \times \frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}+2}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 4} \frac{\cancel{x-4}}{(\cancel{x-4})(2)\underbrace{(\sqrt{x}+2)}_4} = \frac{1}{2 \times 4} = \frac{1}{8}$$



۱۲- حد تابع $y = \frac{\sin(2x + \frac{\pi}{3})}{\pi - 3x}$ در نقطه $x = \frac{\pi}{3}$ کدام است؟

(۱) $\frac{2}{3}$ (۲) $-\frac{2}{3}$ (۳) ۲ (۴) -۲

(متوسط - محاسباتی - استاندارد) حسابان ۱ صفحه ۱۴۳ - ۱۱۰۵

پاسخ: گزینه ۱

با فرض $x - \frac{\pi}{3} = t$ داریم:
 اکنون تابع داده شده را براساس متغیر جدید بازنویسی می کنیم:

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin(2(t + \frac{\pi}{3}) + \frac{\pi}{3})}{\pi - 3(t + \frac{\pi}{3})} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin(2t + \pi)}{-3t}$$

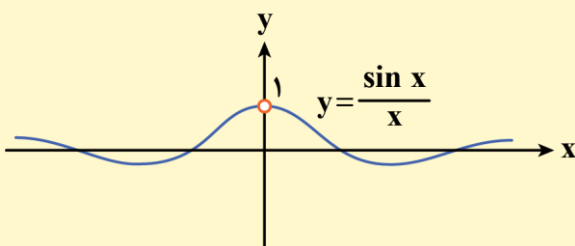
از آن جا که $\sin(2t + \pi) = -\sin 2t$ داریم:

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{-\sin 2t}{-3t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin 2t}{2t} \times \frac{2}{3} = 1 \times \frac{2}{3} = \frac{2}{3}$$

دقت داریم که حاصل $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin 2t}{2t}$ برابر با ۱ است.

یک حد مهم!

در کتاب به یک حد خاص و مهم اشاره شده که حاصل آن را از روی نمودار به دست می آوریم:



$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

در نتیجه:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a \sin x}{bx} = \frac{a}{b}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin ax}{x} = a$$

دقت! 

دقت کنید که **کمان جلوی سینوس** و **مخرج** باید **دقیقا یک چیز** باشند تا بتوانیم نتیجه بگیریم که وقتی هر دو به صفر میل می کنند حاصل حد برابر با ۱ است.

$$\lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\sin \theta}{\theta} = 1$$

بنابراین بسیاری از اوقات لازم است با ضرب و تقسیم کردن کسر در یک عدد مخرج را دقیقا مشابه کمان جلوی سینوس کنیم.



۱۳- اگر $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + 3x - 10}{\sqrt{x-a} - 1} = \frac{1}{b}$ باشد، مقدار $\frac{a}{b}$ کدام است؟

۱/۲۸ (۴)

۲۸ (۳)

۱/۱۴ (۲)

۱۴ (۱)

(متوسط - محاسباتی - استاندارد) - حسابان ۱ صفحه ۱۴۲ - ۱۱۰۵

پاسخ: گزینه ۱ 

چون حد صورت در $x=2$ برابر صفر است، حد مخرج نیز باید برابر صفر باشد، چون در غیر این صورت حاصل حد برابر صفر خواهد شد ولی $\frac{1}{b}$ نمی تواند برابر صفر باشد، بنابراین داریم:

$$\lim_{x \rightarrow 2} (\sqrt{x-a} - 1) = 0 \Rightarrow \sqrt{2-a} - 1 = 0 \Rightarrow \sqrt{2-a} = 1 \Rightarrow 2-a = 1 \Rightarrow a = 1$$

اکنون به محاسبه حاصل حد می پردازیم:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{x^2 + 3x - 10}{\sqrt{x-1} - 1} \times \frac{\sqrt{x-1} + 1}{\sqrt{x-1} + 1} \right) &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)(x+5)(\sqrt{x-1} + 1)}{\cancel{x-1} - 1} \\ &= (2+5)(\sqrt{2-1} + 1) = 7 \times 2 = 14 \Rightarrow \frac{1}{b} = 14 \Rightarrow b = \frac{1}{14} \end{aligned}$$

بنابراین داریم:

$$\frac{a}{b} = \frac{1}{\frac{1}{14}} = 14$$

قلقش رو یاد بگیر! 

اگر حاصل حد در یک تابع کسری عددی **غیر صفر** باشد:

۱) اگر حد صورت برابر با **صفر** باشد، در این صورت **حد مخرج هم باید برابر با صفر باشد**.

۲) اگر **حد مخرج** برابر با **صفر** باشد، **حد صورت هم باید برابر با صفر باشد**.



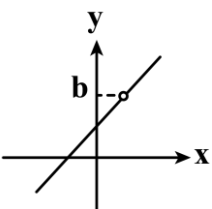
۱۴- نمودار تابع $f(x) = \frac{2x^2 - 3x - 2}{x-a}$ مطابق شکل است. $a+b$ کدام است؟

۷/۲ (۲)

۷ (۴)

-۷/۲ (۱)

-۷ (۳)



(متوسط - مفهومی/محاسباتی - استاندارد) - حسابان ۱ صفحه ۱۴۱ - ۱۱۰۵

پاسخ: گزینه ۴ 

تابع در $x=a$ تعریف نشده است، اما با توجه به نمودار در تمام نقاط دارای حد است، پس حد تابع در $x=a$ باید برابر با b باشد، چون حد مخرج در $x=a$ صفر است، پس **حد صورت در $x=a$ باید صفر باشد**، چون در غیر این صورت تابع در این نقطه فاقد حد خواهد بود.

$$\lim_{x \rightarrow a} (2x^2 - 3x - 2) = 0 \Rightarrow 2a^2 - 3a - 2 = 0 \Rightarrow (a-2)(2a+1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} a = -\frac{1}{2} \text{ غ قق} \\ a = 2 \end{cases}$$

با توجه به نمودار، a مثبت است، بنابراین $a = 2$ قابل قبول است، پس ضابطه تابع به صورت $f(x) = \frac{2x^2 - 3x - 2}{x - 2}$ می باشد. اکنون به محاسبه حد تابع در $x = 2$ می پردازیم تا b نیز به دست آید:

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = b \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x^2 - 3x - 2}{x - 2} = b \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)(2x+1)}{x-2} = b \Rightarrow b = 5$$

بنابراین:

$$a + b = 2 + 5 = 7$$



اگر f تابعی کسری باشد و نمودار f در $x = a$ دارای **حفره** باشد، آن گاه $x = a$ ریشه **مشترک صورت و مخرج** در ضابطه f است.



۱۵- پیوستگی تابع f با ضابطه زیر، در نقاط ۱ و ۲ چگونه است؟ ([] نماد جزء صحیح است.)

$$f(x) = \begin{cases} \left[\frac{x}{2} \right] + 1 & x > 2 \\ \sin\left(\frac{\pi}{2}x\right) + \cos(2\pi x) & 1 \leq x \leq 2 \\ \frac{x^2 - 1}{x^2 - x} & x < 1 \end{cases}$$

(۱) در هر دو نقطه پیوسته است.
 (۲) در هر دو نقطه ناپیوسته است.
 (۳) در $x = 1$ پیوسته و در $x = 2$ ناپیوسته است.
 (۴) در $x = 2$ پیوسته و در $x = 1$ ناپیوسته است.

(متوسط - محاسباتی - زمان بر) - حسابان ۱ صفحه ۱۴۶ - ۱۱۰۵

پاسخ: گزینه ۳

حد چپ و راست و مقدار تابع را در نقاط $x = 1$ و $x = 2$ محاسبه می کنیم:

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^2 - 1}{x^2 - x} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{(x-1)(x+1)}{x(x-1)} = \frac{1+1}{1} = 2 \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \left(\sin \frac{\pi}{2}x + \cos 2\pi x \right) = \sin \frac{\pi}{2} + \cos 2\pi = 1 + 1 = 2 \\ f(1) = \sin \frac{\pi}{2} + \cos 2\pi = 1 + 1 = 2 \end{cases}$$

پس تابع در $x = 1$ پیوسته است.

چون $x > 2$ ، پس $\frac{x}{2} > 1$ و بنابراین $\left[\frac{x}{2} \right] = 1$ است.

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} \left(\left[\frac{x}{2} \right] + 1 \right) = \left[1^+ \right] + 1 = 2 \\ \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} \left(\sin \frac{\pi}{2}x + \cos 2\pi x \right) = \sin \pi + \cos 4\pi = 0 + 1 = 1 \\ f(2) = \sin \pi + \cos 4\pi = 0 + 1 = 1 \end{cases}$$

پس تابع در $x = 2$ حد ندارد و ناپیوسته است.

تابع f را در $x = a$ پیوسته می‌گوییم اگر **حد تابع** در $x = a$ با **مقدار تابع** در این نقطه **برابر** باشد، به عبارت دیگر:

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = f(a)$$

در این صورت وقتی روی نمودار f در همسایگی $x = a$ حرکت می‌کنیم، نمودار دارای **جهش** یا **حفره نیست** و بدون برداشتن قلم می‌توان روی نمودار حرکت کرد.



۱۶- به ازای چه مقداری از a تابع $f(x) = \begin{cases} \frac{a \sin^2 x}{\cos x - 1} & x > 0 \\ \left[\frac{2}{x+1} \right] & x \leq 0 \end{cases}$ در نقطه $x = 0$ پیوسته است؟ ([] نماد جزء صحیح است.)

(۱) $-\frac{1}{2}$ (۲) $\frac{1}{2}$ (۳) -1 (۴) 1

(متوسط - محاسباتی - استاندارد) - حسابان ۱ صفحه ۱۴۶ - ۱۱۰۵

پاسخ: گزینه ۳

باید **حد چپ و راست و مقدار تابع** در $x = 0$ برابر باشند، برای محاسبه حد راست داریم:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{a \sin^2 x}{\cos x - 1} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{a(1 - \cos^2 x)}{\cos x - 1} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{a(1 - \cos x)(1 + \cos x)}{-(1 - \cos x)} = -2a$$

برای محاسبه حد چپ داریم:

$$x \rightarrow 0^- \Rightarrow x < 0 \Rightarrow 0 < x+1 < 1 \Rightarrow \frac{1}{x+1} > 1 \Rightarrow \frac{2}{x+1} > 2 \Rightarrow \left[\frac{2}{x+1} \right] = 2$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \left[\frac{2}{x+1} \right] = 2$$

مقدار تابع در $x = 0$ نیز از ضابطه دوم به دست می‌آید:

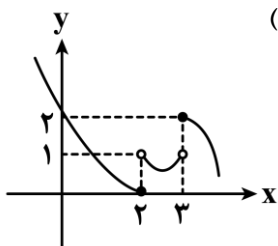
$$f(0) = \left[\frac{2}{0+1} \right] = 2$$

$$-2a = 2 \Rightarrow a = -1$$

بنابراین داریم:



۱۷- نمودار تابع f مطابق شکل زیر است. حاصل $\lim_{x \rightarrow 2^-} \left[f\left(\frac{2x-1}{x-1}\right) \right]$ کدام است؟ ([] نماد جزء صحیح است.)



(۱) ۲

(۲) ۱

(۳) صفر

(۴) وجود ندارد.

(سخت - مفهومی - زمان‌بر) - حسابان ۱ صفحه ۱۲۴ - ۱۱۰۵

پاسخ: گزینه ۲

بررسی سریع:

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} \left[f\left(\frac{2x-1}{x-1}\right) \right] = \lim_{x \rightarrow 2^-} \left[f(3^+) \right] = \lim_{x \rightarrow 2^-} [2^-] = \lim_{x \rightarrow 2^-} 1 = 1$$

عبارت $\frac{2x-1}{x-1}$ را به صورت زیر ساده می کنیم:

$$\frac{2x-1}{x-1} = \frac{2x-2+1}{x-1} = 2 + \frac{1}{x-1}$$

وقتی $x \rightarrow 2^-$ داریم:

$$x < 2 \Rightarrow 0 < x-1 < 1 \Rightarrow \frac{1}{x-1} > 1 \Rightarrow 2 + \frac{1}{x-1} > 3$$

پس $\frac{2x-1}{x-1} \rightarrow 3^+$ و با توجه به نمودار $f\left(\frac{2x-1}{x-1}\right) \rightarrow 2^-$ و در نتیجه:

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} \left[f\left(\frac{2x-1}{x-1}\right) \right] = \lim_{x \rightarrow 2^-} [2^-] = \lim_{x \rightarrow 2^-} 1 = 1$$

قلیش رو یاد بگیر! (یک قلیخ خیلی حیاتی)

برای محاسبه $\lim_{x \rightarrow a} [f(x)]$ اگر $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \ell$ باشد، آن گاه:

(۱) اگر $\ell \notin \mathbb{Z}$ ، آن گاه: $\lim_{x \rightarrow a} [f(x)] = [\ell]$

(۲) اگر $\ell \in \mathbb{Z}$ ، آن گاه باید ببینیم مقادیر f با مقادیر **بزرگتر** از ℓ به ℓ نزدیک می شوند یا مقادیر **کوچکتر** از ℓ . به عبارت دیگر، اگر:

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow a} f(x) = \ell^+ \Rightarrow \lim_{x \rightarrow a} [f(x)] = [\ell^+] = \ell \\ \lim_{x \rightarrow a} f(x) = \ell^- \Rightarrow \lim_{x \rightarrow a} [f(x)] = [\ell^-] = \ell - 1 \end{cases}$$



۱۸- تابع با ضابطه $f(x) = \frac{a[\sin \pi x] + 1}{a + [-2x]}$ در نقطه $x=1$ دارای حد است. مجموع مقادیر ممکن برای a کدام است؟ ([] نماد جزء صحیح

است.)

(۴) ۲

(۳) -۲

(۲) ۱

(۱) -۱

(سخت - محاسباتی - زمان بر) - حسابان ۱ صفحه ۱۳۲ - ۱۱۰۵

پاسخ: گزینه ۴

بررسی سریع:

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow 1^+} [\sin \pi x] = [0^-] = -1 \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} [-2x] = [(-2)^-] = -3 \end{cases} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \frac{-a+1}{a-3}$$

$$\Rightarrow \frac{1-a}{a-3} = \frac{1}{a-2} \Rightarrow a^2 - 2a - 1 = 0 \Rightarrow -\frac{b}{a} = 2$$

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow 1^-} [\sin \pi x] = [0^+] = 0 \\ \lim_{x \rightarrow 1^-} [-2x] = [(-2)^+] = -2 \end{cases} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \frac{1}{a-2}$$

برای آن که تابع در $x=1$ دارای حد باشد، می بایست حد چپ و راست موجود و مساوی باشند.

وقتی $x \rightarrow 1^+$ داریم $\pi x \rightarrow \pi^+$ ، با توجه به نمودار تابع $y = \sin \alpha$ وقتی $\alpha \rightarrow \pi^+$ ، تابع با مقادیر کمتر از صفر به صفر نزدیک می شود و

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} [\sin \pi x] = [0^-] = -1$$

در نتیجه جزء صحیح آن برابر -۱ است.

همچنین وقتی $x \rightarrow 1^+$ ، $-2x \rightarrow (-2)^- = -3$ و در نتیجه $\lim_{x \rightarrow 1^+} [-2x] = [(-2)^-] = -3$ ، بنابراین داریم:

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \frac{a(-1) + 1}{a + (-3)} = \frac{-a + 1}{a - 3}$$

وقتی $x \rightarrow 1^-$ داریم $\pi x \rightarrow \pi^-$ ، با توجه به نمودار تابع $y = \sin \alpha$ وقتی $\alpha \rightarrow \pi^-$ تابع با مقادیر بیشتر از صفر به صفر نزدیک می شود و

در نتیجه جزء صحیح آن برابر صفر است.

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} [\sin \pi x] = [0^+] = 0$$

همچنین $-2x \rightarrow (-2)^+ = -2$ و در نتیجه $\lim_{x \rightarrow 1^-} [-2x] = [(-2)^+] = -2$ ، بنابراین داریم:

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \frac{a \times 0 + 1}{a + (-2)} = \frac{1}{a - 2}$$

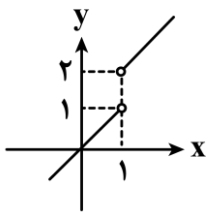
اکنون داریم:

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) \Rightarrow \frac{1-a}{a-3} = \frac{1}{a-2} \Rightarrow a-3 = -a^2 + 3a - 2 \Rightarrow a^2 - 2a - 1 = 0$$

چون $\Delta > 0$ است، پس معادله دارای دو جواب حقیقی است که مجموع آن ها برابر ۲ $-\frac{b}{a} = -\frac{-2}{1} = 2$ می باشد.



۱۹- اگر $f(x) = a[x] + [-x]$ و نمودار تابع g مطابق شکل باشد، به ازای چه مقداری از a ، تابع $f \circ g$ در $x=1$ دارای حد است؟



- ۱ (۱)
۲ (۲)
۳ (۳)
۴ (۴)

(سخت - محاسباتی - زمان بر) - حسابان ۱ صفحه ۱۲۴ - ۱۱۰۵

پاسخ: گزینه ۱

بررسی سریع:

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} (f \circ g)(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (f \circ g)(x) \Rightarrow \lim_{t \rightarrow 2^+} f(t) = \lim_{t \rightarrow 1^-} f(t)$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 2^+} (a[t] + [-t]) = \lim_{t \rightarrow 1^-} (a[t] + [-t]) \Rightarrow a[2^+] + [(-2)^-] = a[1^-] + [(-1)^+] \Rightarrow 2a - 3 = -1$$

$$\Rightarrow a = 1$$

حد راست و حد چپ $f \circ g$ را در $x=1$ مساوی هم قرار می دهیم.

با توجه به نمودار g ، اگر x با مقادیر بیشتر از ۱ به ۱ نزدیک شود، g با مقادیر بیشتر از ۲ به ۲ نزدیک می شود، بنابراین داریم:

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} (f \circ g)(x) = \lim_{t \rightarrow 2^+} f(t) = \lim_{x \rightarrow 2^+} (a[t] + [-t]) = a[2^+] + [(-2)^-] = a \times 2 + (-3) = 2a - 3$$

دقت کنید که وقتی $t \rightarrow 2^+$ داریم $-t \rightarrow -2^-$ و در نتیجه: $[-t] = -3$

حال اگر x با مقادیر کمتر از ۱ به ۱ نزدیک شود، g با مقادیر کمتر از ۱ به ۱ نزدیک می شود، بنابراین داریم:

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} (f \circ g)(x) = \lim_{t \rightarrow 1^-} f(t) = \lim_{t \rightarrow 1^-} (a[t] + [-t]) = a[1^-] + [(-1)^+] = a \times 0 + (-1) = -1$$

دقت کنید که وقتی $t \rightarrow 1^-$ داریم $-t \rightarrow (-1)^+$ و در نتیجه: $[-t] = -1$

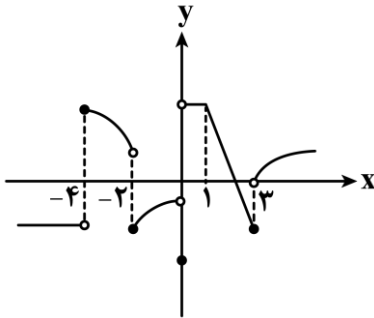
پس برای آن که fog در $x=1$ دارای حد باشد می بایست حد چپ و راست آن در $x=1$ برابر باشند. بنابراین:

$$2a - 3 = -1 \Rightarrow a = 1$$



۲۰- نمودار تابع f مطابق شکل است. این تابع بر کدام یک از بازه های زیر پیوسته است؟

- (۱) $[-4, -2]$
- (۲) $[-2, 0]$
- (۳) $[0, 1]$
- (۴) $[1, 3]$



(آسان - مفهومی - سریع) - حسابان ۱ صفحه ۱۴۹ - ۱۱۰۵

پاسخ: گزینه ۴

بررسی گزینه ها:

۱

نادرست است، چون تابع در $x = -2$ پیوستگی چپ ندارد.

۲

نادرست است، چون تابع در صفر پیوستگی چپ ندارد.

۳

نادرست است، چون تابع در صفر پیوستگی راست ندارد.

۴

درست است، چون تابع در تمام نقاط بازه $(1, 3)$ پیوسته است و در $x = 1$ پیوستگی راست و در $x = 3$ پیوستگی چپ دارد.

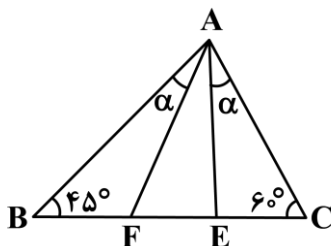
پیوستگی در بازه

۱) تابع f در بازه (a, b) پیوسته است اگر در تمام نقاط درونی بازه پیوسته باشد.

۲) تابع f در بازه $[a, b]$ پیوسته است اگر در (a, b) پیوسته و در a پیوستگی راست و در b پیوستگی چپ داشته باشد، یعنی:

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = f(a)$$

$$\lim_{x \rightarrow b^-} f(x) = f(b)$$



۲۱- در شکل مقابل، $\sqrt{2}BF = 3EC$ است. نسبت $\frac{AF}{AE}$ برابر کدام است؟

$$\frac{\sqrt{6}}{2} \quad (۲)$$

$$\frac{\sqrt{6}}{3} \quad (۴)$$

$$\frac{\sqrt{3}}{3} \quad (۱)$$

$$\sqrt{3} \quad (۳)$$

(متوسط - محاسباتی - استاندارد) - هندسه ۲ صفحه ۶۳ - ۱۱۰۳

پاسخ: گزینه ۳

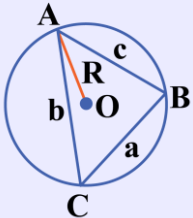
از قضیه سینوس ها استفاده کرده و می نویسیم:

$$\left. \begin{array}{l} \triangle ABF: \frac{AF}{\sin 45^\circ} = \frac{BF}{\sin \alpha} \\ \triangle AEC: \frac{AE}{\sin 60^\circ} = \frac{EC}{\sin \alpha} \end{array} \right\} \xrightarrow{\text{تقسیم}} \frac{\frac{AF}{\sin 45^\circ}}{\frac{AE}{\sin 60^\circ}} = \frac{\frac{BF}{\sin \alpha}}{\frac{EC}{\sin \alpha}} \Rightarrow \frac{AF \times \sin 60^\circ}{AE \times \sin 45^\circ} = \frac{BF}{EC} \quad (۱)$$

از طرف دیگر، از فرض $\sqrt{2}BF = EC = 3$ نتیجه می گیریم $\frac{BF}{EC} = \frac{3}{\sqrt{2}}$ ، بنابراین:

$$(1) \Rightarrow \frac{AF \times \frac{\sqrt{3}}{2}}{AE \times \frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{3}{\sqrt{2}} \Rightarrow \frac{AF}{AE} = \sqrt{3}$$

قضیه سینوس ها در مثلث



$$\frac{a}{\sin \hat{A}} = \frac{b}{\sin \hat{B}} = \frac{c}{\sin \hat{C}} = 2R$$

شعاع دایره محیطی مثلث می باشد



۲۲- در مثلث قائم الزاویه ای با اضلاع قائمه به طول $2\sqrt{2}$ و $3\sqrt{2}$ طول نیمساز زاویه قائمه برابر کدام است؟

(۴) $\frac{7}{2}\sqrt{2}$

(۳) $1/8$

(۲) $\frac{5}{2}\sqrt{2}$

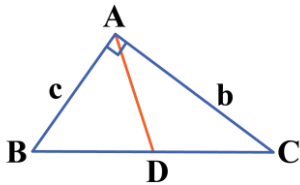
(۱) $2/4$

(آسان - خطبه خط - سریع) - هندسه ۲ صفحه ۷۴ - ۱۱۰۳

پاسخ: گزینه ۱

روش اول

در مثلث ABC، اگر AD نیمساز زاویه A باشد، آن گاه طول نیمساز AD از رابطه زیر به دست می آید.



$$AD = \frac{2bc}{b+c} \cos \frac{\hat{A}}{2} \xrightarrow{\hat{A}=90^\circ} AD = \frac{2(3\sqrt{2})(2\sqrt{2})}{3\sqrt{2}+2\sqrt{2}} \cos 45^\circ \Rightarrow AD = \frac{24}{5\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{24}{10} = \frac{12}{5}$$

روش دوم

$$AB^2 + AC^2 = BC^2 \Rightarrow (2\sqrt{2})^2 + (3\sqrt{2})^2 = BC^2 \Rightarrow BC = \sqrt{26}$$

$$\frac{BD}{DC} = \frac{AB}{AC} = \frac{2\sqrt{2}}{3\sqrt{2}} = \frac{2}{3} \xrightarrow{\text{ترکیب نسبت در مخرج}} \frac{BD}{\underbrace{BD+DC}_{BC=\sqrt{26}}} = \frac{2}{3+2} \Rightarrow BD = \frac{2\sqrt{26}}{5}$$

$$\frac{BD}{DC} = \frac{2}{3} \Rightarrow \frac{\frac{2\sqrt{26}}{5}}{DC} = \frac{2}{3} \Rightarrow DC = \frac{3\sqrt{26}}{5}$$

می دانیم که $\frac{BD}{DC} = \frac{2}{3}$ است، پس:

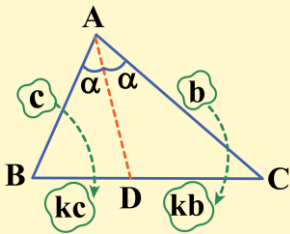
حال با استفاده از فرمول محاسبه طول نیمساز داریم:

$$AD^2 = AB \times AC - BD \times DC$$

$$AD^2 = (2\sqrt{2})(3\sqrt{2}) - \left(\frac{2\sqrt{26}}{5}\right)\left(\frac{3\sqrt{26}}{5}\right) = 12 - \frac{6 \times 26}{25} = \frac{144}{25} \Rightarrow AD = \sqrt{\frac{144}{25}} = \frac{12}{5} = \frac{12}{5}$$

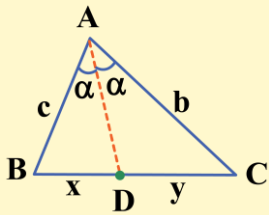
قضیه نیمسازها و طول نیمساز

قضیه نیمسازها: در هر مثلث، نیمساز یک زاویه داخلی، ضلع مقابل به آن زاویه را به نسبت اضلاع مجاورش تقسیم می‌کند.



$$\frac{DB}{DC} = \frac{AB}{AC}$$

در هر مثلث، مربع اندازه هر نیمساز داخلی، برابر است با حاصل ضرب اندازه‌های دو ضلع مجاور منهای حاصل ضرب اندازه‌های دو پاره‌خط که روی ضلع سوم ایجاد شده است، به عبارت دیگر، اگر در شکل زیر، AD نیمساز زاویه A باشد، آن‌گاه رابطه طول نیمساز به صورت زیر خواهد بود:



$$AD^2 = bc - xy$$

اگر سه ضلع مثلث را داشته باشیم، برای استفاده از رابطه بالا، ابتدا به کمک قضیه نیمساز، طول پاره‌خط‌ها (یعنی x و y) را به دست می‌آوریم، سپس به سراغ طول نیمساز می‌رویم.

محاسبه‌ای دیگر برای طول نیمساز

در مثلث ABC، اگر دو ضلع و زاویه بین آن‌ها معلوم باشد، طول نیمساز وارد بر ضلع سوم از رابطه $d_a = \cos \frac{\hat{A}}{2} \times \frac{2bc}{b+c}$ قابل محاسبه است که در این رابطه d_a طول نیمساز زاویه A است.

$d_a = \cos \frac{\hat{A}}{2} \times \frac{2bc}{b+c}$	سه حالت خاص مهم در محاسبه طول نیمساز		
	$\hat{A} = 60^\circ$	$\hat{A} = 90^\circ$	$\hat{A} = 120^\circ$
	$d_a = \sqrt{3} \times \frac{bc}{b+c}$	$d_a = \sqrt{2} \times \frac{bc}{b+c}$	$d_a = \frac{bc}{b+c}$



۲۳- اندازه دو ضلع مثلثی برابر ۳ و ۳/۵ و مساحت آن $\frac{\sqrt{5}}{4}$ است. اندازه کوچک‌ترین ضلع این مثلث برابر با کدام می‌تواند باشد؟

(۴) $\frac{\sqrt{29}}{2}$

(۳) $\frac{3\sqrt{3}}{2}$

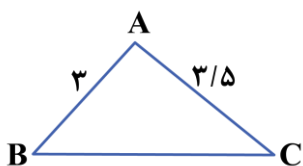
(۲) $\frac{3\sqrt{7}}{4}$

(۱) $\frac{\sqrt{57}}{4}$

(متوسط - ترکیبی - استاندارد) - هندسه ۲ صفحه ۶۵ - ۱۱۰۳

پاسخ: گزینه ۴

در شکل مقابل، مساحت مثلث ABC برابر $\frac{7\sqrt{5}}{4}$ است. پس:



$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} AB \times AC \times \sin \hat{A} \Rightarrow \frac{7}{4} \sqrt{5} = \frac{1}{2} (3) \left(\frac{3}{5}\right) \sin \hat{A} \xrightarrow{4 \times} 7\sqrt{5} = 9 \sin \hat{A} \Rightarrow \sin \hat{A} = \frac{\sqrt{5}}{3}$$

$$\cos \hat{A} = \pm \sqrt{1 - \sin^2 A} = \pm \sqrt{1 - \frac{5}{9}} = \pm \sqrt{\frac{4}{9}} = \pm \frac{2}{3}$$

در نتیجه:

از آن جا که کوچک ترین ضلع این مثلث مورد نظر است، پس $\cos \hat{A} = +\frac{2}{3}$ را انتخاب می کنیم تا زاویه $\hat{A}$ حاده باشد، اکنون با استفاده از قضیه کسینوس ها می نویسیم:

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB \times AC \cos \hat{A} \Rightarrow BC^2 = 3^2 + \left(\frac{5}{3}\right)^2 - 2(3)\left(\frac{5}{3}\right)\left(\frac{2}{3}\right)$$

$$\Rightarrow BC^2 = 9 + \frac{25}{9} - 10 = \frac{29}{9} \Rightarrow BC = \frac{\sqrt{29}}{3}$$

یادآوری از حسابان!

کسینوس زوایای منفرجه که بزرگتر از ۹۰ درجه هستند منفی است.

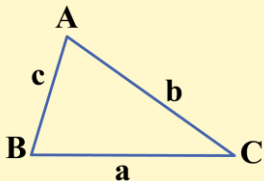
یادآوری از هندسه!

قضیه ضلع برتر: ضلع روبه رو به زاویه بزرگتر، بزرگتر است از ضلع روبه رو به زاویه کوچکتر.
قضیه زاویه برتر: زاویه روبه رو به ضلع بزرگتر، بزرگتر است از زاویه روبه رو به ضلع کوچکتر.

رفع ابهام!

طبق قضیه ضلع برتر چون کوچکترین ضلع مثلث را می خواستیم و می دانیم که طول ضلع و اندازه زاویه با هم رابطه مستقیم دارند، (هرچه زاویه بزرگتر، ضلع بزرگتر و برعکس) پس از بین دو مقدار ممکن برای کسینوس، حالتی را انتخاب می کنیم که زاویه کوچکتری بدهد.

قضیه کسینوس ها در مثلث



$$\begin{cases} a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \hat{A} \\ b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos \hat{B} \\ c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \hat{C} \end{cases}$$



۲۴- مثلث به اضلاع ۱۲، ۱۷ و ۲۵ را به وسیله نیمساز زاویه کوچکتر به دو مثلث تقسیم کرده ایم. مساحت مثلث کوچکتر ایجاد شده برابر کدام است؟

$$\frac{255}{7} \quad (4)$$

$$\frac{270}{7} \quad (3)$$

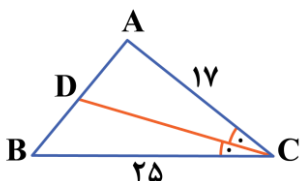
$$\frac{240}{7} \quad (2)$$

$$\frac{255}{14} \quad (1)$$

(سخت - ترکیبی - زمان بر) - هندسه ۲ صفحه ۷۲ - ۱۱۰۳

پاسخ: گزینه ۴

در مثلث ABC با فرض $AB = 12$ ، $AC = 17$ و $BC = 25$ ، ضلع AB کوچکترین ضلع است، پس زاویه $\hat{C}$ کوچکترین زاویه این مثلث است.



اگر CD نیمساز این زاویه کوچکتر باشد، آن گاه با استفاده از قضیه نیمساز می نویسیم:

$$\frac{AD}{DB} = \frac{AC}{BC} = \frac{17}{25} \xrightarrow{\text{ترکیب درمخرج}} \frac{AD}{\underbrace{DB + AD}_{AB}} = \frac{17}{25 + 12} \Rightarrow \frac{AD}{AB} = \frac{17}{42} \Rightarrow \frac{AD}{12} = \frac{17}{42} \Rightarrow AD = \frac{34}{7}$$

دو مثلث ADC و ABC دارای ارتفاع مشترک از رأس C هستند، پس نسبت مساحت‌های آن‌ها برابر نسبت قاعده‌های نظیر آن‌ها می‌باشد.

$$\frac{S_{\triangle ADC}}{S_{\triangle ABC}} = \frac{AD}{AB}$$

یعنی:

اکنون با استفاده از قضیه هرون مساحت مثلث ABC را به دست می‌آوریم.

$$P_{\triangle ABC} = \frac{17 + 12 + 25}{2} = 27$$

$$S_{\triangle ABC} = \sqrt{P(P-a)(P-b)(P-c)} = \sqrt{27(27-25)(27-17)(27-12)} = \sqrt{27 \times 2 \times 10 \times 15}$$

$$= \sqrt{9 \times 15^2 \times 4} = 3 \times 15 \times 2 = 90$$

بنابراین:

$$\frac{S_{\triangle ADC}}{S_{\triangle ABC}} = \frac{AD}{AB} \Rightarrow \frac{S_{\triangle ADC}}{90} = \frac{7}{12} \Rightarrow S_{\triangle ADC} = \frac{90 \times 7}{12} = \frac{255}{2}$$

رابطه هرون

اگر a, b, c طول اضلاع مثلث و $P = \frac{a+b+c}{2}$ نصف محیط مثلث باشد، مساحت مثلث از رابطه زیر که **رابطه هرون** نامیده می‌شود، به دست می‌آید:

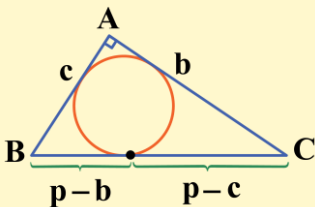
$$S = \sqrt{P(P-a)(P-b)(P-c)}$$

توجه!

توجه داشته باشید که در بیشتر مواقع و در مثلث‌هایی که اندازه اضلاع مثلث اعداد رادیکالی نباشند، از رابطه هرون برای محاسبه مساحت مثلث استفاده می‌کنیم.

هرون در مثلث قائم‌الزاویه

در مثلث قائم‌الزاویه که در آن رابطه فیثاغورس $a^2 = b^2 + c^2$ برقرار است داریم:



$$S = P(P-a) = (P-b)(P-c)$$

۱) اگر محیط و اندازه وترش معلوم باشد:

$$S = P(P-a)$$

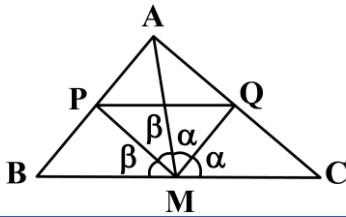
۲) اگر قطعه‌های ایجاد شده توسط دایره محاطی روی وتر معلوم باشد:

$$S = (P-b)(P-c)$$



۲۵- در مثلث ABC ، میانه AM و نیمسازهای دو زاویه $\hat{A}MB$ و $\hat{A}MC$ رسم شده‌اند. اگر $AB=4$ ، $AC=7$ و $BC=9$ باشد، حاصل

$\sqrt{MP^2 + MQ^2}$ برابر کدام است؟



$$\frac{63}{16} \quad (2)$$

$$\frac{\sqrt{63}}{2} \quad (4)$$

$$\frac{63}{4} \quad (1)$$

$$\frac{\sqrt{63}}{4} \quad (3)$$

(سخت - مفهومی - زمان بر ۵) - هندسه ۲ صفحه ۷۰ - ۱۱۰۳

پاسخ: گزینه ۲

با استفاده از قضیه نیمسازها می‌نویسیم:

$$\left. \begin{array}{l} \triangle AMB: MP \text{ نیمساز} \Rightarrow \frac{AP}{BP} = \frac{AM}{BM} \quad (1) \\ \triangle AMC: MQ \text{ نیمساز} \Rightarrow \frac{AQ}{QC} = \frac{AM}{MC} \end{array} \right\} \xrightarrow{BM=MC} \frac{AP}{BP} = \frac{AQ}{QC} \xrightarrow{\text{عکس تالس}} PQ \parallel BC$$

از طرف دیگر:

$$2\alpha + 2\beta = 180^\circ \Rightarrow \alpha + \beta = 90^\circ \Rightarrow \hat{PMQ} = 90^\circ \Rightarrow MP^2 + MQ^2 = PQ^2 \quad (2)$$

یعنی خواسته سؤال $\sqrt{MP^2 + MQ^2}$ برابر با همان طول PQ است.

$$\triangle ABC: PQ \parallel BC \xrightarrow{\text{تعمیم تالس}} \frac{PQ}{BC} = \frac{AP}{AB} \quad (3)$$

اکنون برای به دست آوردن AP به کمک قضیه میانه‌ها ابتدا طول AM و سپس به کمک قضیه نیمسازها اندازه AP را پیدا می‌کنیم.

$$\triangle ABC: AM \text{ میانه} \xrightarrow{\text{قضیه میانه‌ها}} AB^2 + AC^2 = 2AM^2 + \frac{BC^2}{2} \Rightarrow 4^2 + 7^2 = 2AM^2 + \frac{9^2}{2}$$

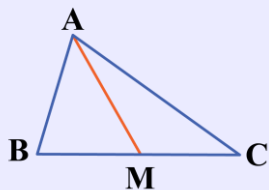
$$\Rightarrow 2AM^2 = 16 + 49 - \frac{81}{2} \Rightarrow 2AM^2 = \frac{49}{2} \Rightarrow AM^2 = \frac{49}{4} \Rightarrow AM = \frac{7}{2}$$

$$(1) \xrightarrow{BM = \frac{BC}{2} = \frac{9}{2}} \frac{AP}{PB} = \frac{\frac{7}{2}}{\frac{9}{2}} = \frac{7}{9} \xrightarrow{\text{ترکیب درمخرج}} \frac{AP}{AB} = \frac{7}{16} \Rightarrow \frac{AP}{4} = \frac{7}{16} \Rightarrow AP = \frac{7}{4}$$

بنابراین:

$$(3) \Rightarrow \frac{PQ}{9} = \frac{\frac{7}{4}}{4} \Rightarrow \frac{PQ}{9} = \frac{7}{16} \Rightarrow PQ = \frac{63}{16} \xrightarrow{(2)} \sqrt{MP^2 + MQ^2} = \frac{63}{16}$$

محاسبه طول میانه‌ها در مثلث



$$2AM^2 + \frac{BC^2}{2} = AC^2 + AB^2$$

۲۶- اگر $x_i = 1, 3, 5, 7, 9$ داده‌هایی آماری باشند، ضریب تغییرات داده‌های $y_i = 15x_i + 9$ کدام است؟ ($\sqrt{2} = 1/4$)

$$\frac{1}{2} \quad (۴)$$

$$\frac{\sqrt{15}}{2} \quad (۳)$$

$$\frac{7}{10} \quad (۲)$$

$$\frac{\sqrt{15}}{5} \quad (۱)$$

پاسخ: گزینه ۴

(متوسط - مفهومی - استاندارد) - آمار و احتمال صفحه ۹۰ - ۱۱۰۳

می‌دانیم که تأثیر ضرب یا تقسیم و جمع یا تفریق داده‌ها با عددی دلخواه بر میانگین و انحراف معیار را می‌توان به صورت مستقیم به دست آورد. پس برای سادگی و کار با اعداد کوچک‌تر ابتدا با همان داده‌های x_i میانگین و انحراف معیار را محاسبه می‌کنیم و سپس تأثیر ضریب ۱۵ و جمع کردن با ۹ را بر آن‌ها اعمال می‌کنیم.

$$\bar{x}(x_i) = \frac{1+3+5+7+9}{5} = 5$$

$$\sigma^2(x_i) = \frac{(1-5)^2 + (3-5)^2 + (5-5)^2 + (7-5)^2 + (9-5)^2}{5} = 8$$

$$\sigma(x_i) = \sqrt{8} = 2\sqrt{2} = 2 \times 1/4 = 2/8$$

حال می‌دانیم که میانگین داده‌های y_i با ۱۵ برابر کردن میانگین داده‌های x_i و جمع با ۹ به دست می‌آید. پس:

$$\Rightarrow \bar{x}(y_i) = (15 \times 5) + 9 = 84$$

از طرفی جمع کردن داده‌ها با ۹ بر انحراف معیار تأثیری ندارد اما ضرب کردن آن‌ها در ۱۵ انحراف معیار را نیز ۱۵ برابر می‌کند، پس:

$$\Rightarrow \sigma(y_i) = 15 \times 2/8 = 42$$

$$\Rightarrow CV(y_i) = \frac{\sigma(y_i)}{\bar{x}(y_i)} = \frac{42}{84} = \frac{1}{2}$$

پس ضریب تغییرات داده‌های y_i به صورت زیر است:

اثر تغییرات روی داده‌ها در مشخصه‌های عددی مربوط به داده‌ها

۱) اگر همه داده‌ها با مقداری ثابت جمع شوند واریانس تغییری نمی‌کند.

۲) اگر داده‌ها k برابر شوند، واریانس k^2 برابر می‌شود.

۳) اگر داده‌ها k برابر شوند، انحراف معیار $|k|$ برابر می‌شود.

۴) اگر داده‌ها با عددی جمع شوند یا عددی از آن‌ها کم شود، یا در عددی ضرب یا بر آن تقسیم شوند، همین تغییرات روی میانگین هم اعمال می‌شوند:

$$\forall 1 \leq i \leq n, k \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R} ; x'_i = kx_i + b \Rightarrow \bar{x}_{\text{جدید}} = k\bar{x}_{\text{اولیه}} + b$$

۲۷- در یک آمارگیری از ۱۸ روستا واقع در استان خراسان جنوبی، تعداد دانش‌آموزانی که میانگین نمره درس ریاضی آن‌ها در مقطع

متوسطه اول، کمتر از ۱۲ است، به دست آمده. میانگین داده‌های داخل جعبه در نمودار جعبه‌ای کدام است؟

۵۷، ۵۶، ۵۶، ۵۳، ۵۲، ۴۶، ۴۵، ۴۵، ۴۴، ۴۰، ۴۰، ۳۹، ۳۸، ۳۸، ۳۷، ۳۵، ۳۴، ۳۱

$$۴۲/۳۷۵ \quad (۴)$$

$$۴۲/۱۲۵ \quad (۳)$$

$$۴۱/۳۷۵ \quad (۲)$$

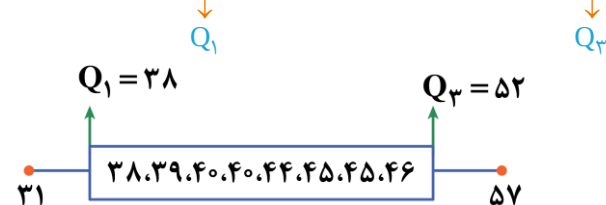
$$۴۱/۱۲۵ \quad (۱)$$

(متوسط - محاسباتی - استاندارد) - آمار و احتمال صفحه ۹۲ - ۱۱۰۳

پاسخ: گزینه ۳

تعداد کل داده‌ها ۱۸ تا است. در بین ۹ داده اول، میانه Q_1 است و در بین ۹ داده دوم میانه، Q_3 است. (توجه داریم که به محاسبه دقیق Q_2 نیازی نداریم.)

(۳۱، ۳۴، ۳۵، ۳۷، ۳۸، ۳۸، ۳۹، ۴۰، ۴۰، ۴۴، ۴۵، ۴۵، ۴۶، ۵۲، ۵۳، ۵۶، ۵۶، ۵۷)



برای راحتی محاسبات، از همه داده‌های داخل نمودار جعبه‌ای ۴۰ را کم می‌کنیم.

$$-2, -1, 0, 0, 4, 5, 5, 6 \Rightarrow \bar{x} = \frac{-2-1+0+0+4+5+5+6}{8} = \frac{17}{8} = 2/125$$

$$\Rightarrow \bar{x}_{\text{واقعی}} = 2/125 + 40 = 42/125$$

قلقلش رو یاد بگیر!

برای آسان‌تر شدن محاسبات در زمان محاسبه میانگین می‌توانیم عددی ثابت را از همه داده‌ها کم کنیم و سپس میانگین داده‌های جدید را محاسبه کنیم. در نهایت برای رسیدن به میانگین داده‌های اولیه باید عدد کم شده را به میانگین به‌دست آمده اضافه کنیم.



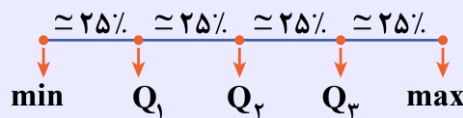
میان

میان (Q_۲): ابتدا تمام داده‌ها را به ترتیب صعودی یا نزولی مرتب می‌کنیم:

اگر تعداد داده‌ها فرد بود $\Leftarrow$ داده وسط = میان = Q_۲
 اگر تعداد داده‌ها زوج بود $\Leftarrow$ میانگین دو داده وسط = میان = Q_۲

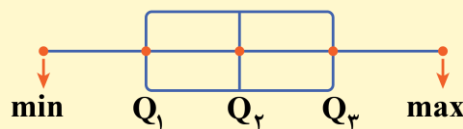
چارک‌ها در داده‌های آماری

نیمی از داده‌ها قبل از میان و نیم دیگری از داده‌ها بعد از میان هستند. **میانۀ نیمۀ اول داده‌ها** همان **چارک اول** (Q_۱) و **میانۀ نیمۀ دوم** داده‌ها همان **چارک سوم** (Q_۳) را نشان می‌دهد. با مشخص کردن چارک اول، دوم (میان) و سوم داده‌ها، تقریباً ۲۵٪ داده‌ها در هر یک از چهار محدوده زیر قرار می‌گیرند.



نمودار جعبه‌ای

مطابق شکل زیر، روی **دو ضلع مستطیل** در نمودار جعبه‌ای، **چارک‌های اول و سوم** قرار می‌گیرند و عدد وسط در **مرکز مستطیل**، همان **میان** است. همچنین در ابتدا و انتهای نمودار جعبه‌ای، **کمترین** و **بیشترین** داده، درج می‌شوند.



دامنه میان‌چارکی داده‌ها

به اختلاف Q_۳ و Q_۱ دامنه میان‌چارکی داده‌ها می‌گویند.

$$IQR = Q_3 - Q_1$$



۲۸- انحراف از میانگین تعدادی داده آماری به صورت ۳, ۴, ۵, x, y و میانگین داده‌ها برابر با یکی از داده‌ها است. اگر کوچک‌ترین داده برابر ۶ باشد، میانۀ داده‌ها کدام است؟

۲۲ (۴)

۲۱ (۳)

۱۸ (۲)

۱۷ (۱)

(سخت - مفهومی - استاندارد) - آمار و احتمال صفحه ۸۸ - ۱۱۰۳

پاسخ: گزینه ۳

مجموع انحراف از میانگین داده‌ها همیشه صفر است، پس:

$$3 + 4 + 5 + x + y = 0 \Rightarrow x + y = -12$$

چون یکی از داده‌ها خود میانگین است، پس یکی از انحراف از میانگین‌ها صفر است، بنابراین یکی از بین x و y باید صفر باشد. فرقی ندارد که کدام را صفر در نظر بگیریم. اگر $x = 0$ باشد، بنابراین $y = -12$. پس انحراف از میانگین‌ها به صورت زیر هستند:

$-12, 0, 3, 4, 5$

واضح است که -12 مربوط به کوچک‌ترین انحراف از میانگین این داده‌هاست زیرا کوچک‌ترین داده وقتی از میانگین کم می‌شود، کوچک‌ترین انحراف از میانگین را هم دارد. از طرفی می‌دانیم که کوچک‌ترین داده برابر ۶ است، پس:

$$6 - \bar{x} = -12 \Rightarrow \bar{x} = 18$$

بنابراین داده‌ها عبارتند از:

$$-12 + 18, 0 + 18, 3 + 18, 4 + 18, 5 + 18$$

$$6, 18, 21, 22, 23 \Rightarrow \text{میانگین} = 21$$

مجموع انحراف از میانگین داده‌ها



همواره برای هر مجموعه‌ای از داده‌ها، **مجموع انحراف از میانگین داده‌ها برابر صفر** است.

$$(x_1 - \bar{x}) + (x_2 - \bar{x}) + \dots + (x_n - \bar{x}) = (x_1 + x_2 + \dots + x_n) - (\underbrace{\bar{x} + \bar{x} + \dots + \bar{x}}_{n \text{ تا}}) = n\bar{x} - n\bar{x} = 0$$

$$(x_1 - \bar{x}) + (x_2 - \bar{x}) + \dots + (x_n - \bar{x}) = 0$$

قلقلش رو یاد بگیر!



وقتی یکی از داده‌ها برابر با میانگین است، یکی از انحراف از میانگین‌ها **صفر** می‌شود.



۲۹- برای بررسی ضعف دروس اختصاصی از ۶ کلاس دوازدهم مدرسه‌ای، ۲ کلاس را انتخاب و تمام دانش‌آموزان آن دو کلاس را مورد بررسی قرار می‌دهیم. در این تحقیق از کدام روش نمونه‌گیری استفاده کرده‌ایم؟

(۴) سامانمند

(۳) تصادفی

(۲) خوشه‌ای

(۱) طبقه‌ای

(آسان - خطبه‌خط - سریع) - آمار و احتمال صفحه ۹۹ - ۱۱۰۴

پاسخ: گزینه ۲

چون از بین ۶ شاخه، ۲ شاخه انتخاب و تمام اجزاء آن مورد بررسی قرار گرفته این نمونه‌گیری **خوشه‌ای** نام دارد.

روش‌های نمونه‌گیری



روش‌های **نمونه‌گیری تصادفی (احتمالی)** عبارتند از:

(۱) **نمونه‌گیری تصادفی ساده:** در این روش از الگوی خاصی استفاده نمی‌شود و هر کدام از اعضای جامعه، با **احتمال برابر** ممکن است در نمونه انتخاب شوند.

یه نمونه باحال ببین!



قرعه‌کشی بین افراد شرکت‌کننده در یک مسابقه

(۲) **نمونه‌گیری خوشه‌ای:** طبق ویژگی‌های اعضای جامعه، جامعه دارای خوشه‌هایی مجزا است که خود این خوشه‌ها از نظر تعداد لزوماً با هم برابر **نیستند**. ابتدا از بین **خوشه‌ها تعدادی خوشه انتخاب می‌شود** و **اعضای خوشه‌های انتخاب شده** اعضای نمونه را تشکیل می‌دهند.

یه نمونه باحال ببین!



برای انتخاب یک نمونه از شهروندان تهران، مناطق مختلف شهر را به منزله خوشه‌ها در نظر می‌گیریم. سپس تعدادی از مناطق شهرداری از بین ۲۲ منطقه را انتخاب کرده و در نهایت تمام شهروندان مناطق انتخاب‌شده را به عنوان نمونه معرفی می‌کنیم.

(۳) **نمونه‌گیری طبقه‌ای:** در این روش ابتدا بر اساس یک معیار، جامعه به طبقاتی مجزا تقسیم می‌شود. سپس از هر طبقه یک نمونه تصادفی ساده انتخاب می‌شود. (پس احتمال انتخاب اعضای هم طبقه با هم مساوی است.)

یه نمونه باحال ببین!

در یک شرکت ۵ مدیر، ۱۵ کارمند و ۳۰ کارگر وجود دارد. طبقات را مدیران، کارمندان و کارگران در نظر می‌گیریم. حال برای انتخاب یک نمونه ۱۰ تایی از این شرکت از طبقه مدیران ۱، از طبقه کارمندان ۳ و از طبقه کارگران ۶ نفر به تصادف انتخاب می‌کنیم.

توجه!

نسبت نمونه‌گیری در کلیه طبقات با نسبت نمونه‌گیری در کل جامعه یکسان و برابر است. بنابراین تعداد نمونه در هر طبقه متناسب با بزرگی آن طبقه است.

۴) نمونه‌گیری سامانمند (سیستماتیک): این روش نوعی نمونه‌گیری طبقه‌ای است که در آن تعداد اعضای تمام طبقات با هم برابر است. از طبقه اول به تصادف واحد آماری انتخاب می‌شود و دقیقاً با همان روند از باقی طبقات نیز نمونه‌گیری انجام می‌شود تا نمونه کامل شود.

یه نمونه باحال ببین!

فرض کنید در یک کارخانه ۱۰۰۰ نفر مشغول به کار هستند و یک نمونه ۱۰۰ عضوی از این کارخانه می‌خواهیم. اسامی افراد به صورت لیستی و بر اساس الفبا مرتب شده‌اند. برای اجرای نمونه‌گیری سیستماتیک از ۱۰ شماره اول یک نقطه را برای شروع در نظر می‌گیریم. به عنوان مثال ۶. از شماره ۶ به بعد هر ۱۰ نفر را به ترتیب از لیست انتخاب می‌کنیم، که لیست به صورت انتخاب نفرات ۶، ۱۶، ۲۶، ۳۶، ۴۶ و ... می‌شود و تا زمانی که ۱۰۰ نمونه را جمع آوری نمایید نمونه‌گیری را ادامه می‌دهید.

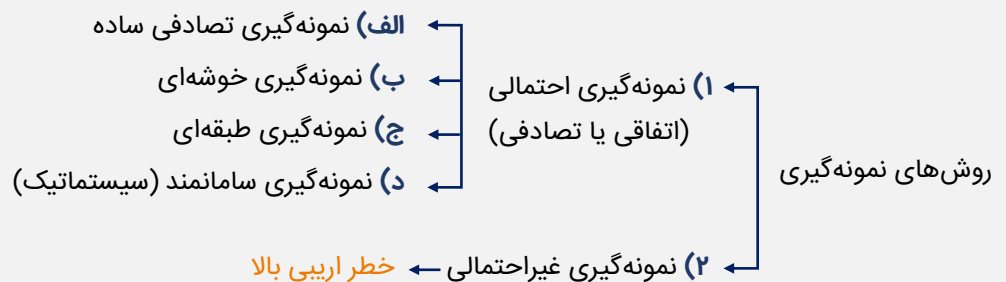
توجه!

در نمونه‌گیری سیستماتیک اعضای هر طبقه لزوماً از نظر ویژگی شبیه به هم نیستند و احتمال اربیی وجود دارد.

نمونه‌گیری غیرتصادفی (نمونه‌گیری غیراحتمالی)

در یک نمونه‌گیری غیر تصادفی، افراد بر اساس معیارهای غیرتصادفی انتخاب می‌شوند و هر فرد شانس یکسان و معین انتخاب شدن در نمونه را ندارد. این نوع از نمونه‌گیری از نظر هزینه و دسترسی آسان‌تر است. اما در آن‌ها خطر اربیی بالاتر می‌باشد. از این روش نمونه‌گیری نمی‌توانید استنباط آماری معتبری را درباره کل جامعه داشته باشید. استفاده از نمونه‌گیری غیرتصادفی چه در مرحله طراحی و چه در مرحله اجرا ساده‌تر از نمونه‌گیری تصادفی است و به زمان و سرمایه کمتری نیاز دارد.

جمع‌بندی روش‌های نمونه‌گیری



۳۰- از جامعه‌ای با واریانس ۲/۲۵، نمونه‌ای ۶۴ عضوی انتخاب کرده‌ایم. طول بازه اطمینان ۹۵ درصدی برای میانگین جامعه کدام است؟

۴) ۰/۸

۳) ۰/۷۵

۲) ۰/۶

۱) ۰/۵

(متوسط - مفهومی - سریع) - آمار و احتمال صفحه ۱۱۶ - ۱۱۴

پاسخ: گزینه ۳

$$\sigma^2 = 2/25 \Rightarrow \sigma = \sqrt{2/25} = 1/5 = \text{انحراف معیار}$$

بنابراین طول بازه اطمینان ۹۵ درصدی برای میانگین جامعه برابر است با:

$$\frac{4\sigma}{\sqrt{n}} = \frac{4 \times 1/5}{\sqrt{64}} = \frac{4 \times 1/5}{8} = 0/75$$

بازه اطمینان ۹۵ درصدی برای پارامتر جامعه

بازه اطمینان بیش از ۹۵ درصد به صورت زیر است:

$$\left[\bar{x} - \frac{2\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{x} + \frac{2\sigma}{\sqrt{n}} \right]$$

که طول بازه اطمینان از روی آن برابر است با:

$$\left(\bar{x} + \frac{2\sigma}{\sqrt{n}} \right) - \left(\bar{x} - \frac{2\sigma}{\sqrt{n}} \right) = \frac{4\sigma}{\sqrt{n}}$$

بازه اطمینان یعنی چه؟

بازه اطمینان ۹۵ درصدی برای برآورد میانگین یک جامعه یعنی این که اگر میانگین جامعه را به طور دقیق حساب کنیم، با احتمال ۹۵ درصد میانگین این جامعه در بازه به دست آمده قرار می گیرد.





برای دیدن پاسخنامه ویدئویی آزمون
بالا را اسکن یا روی آن کلیک کنید! QR Code

مغناطیس + القای الکترومغناطیسی و جریان متناوب

(از میدان مغناطیسی حاصل از سیملوله حامل جریان تا پایان کتاب) - صفحه‌های ۹۹ تا ۱۳۰

بودجه‌بندی

این آزمون

سهم در

کنکور

درمجموع ۳ تست از ۳۵ تست کنکور را پوشش داده است.

۳۱- سیمی به طول L را به دو قسمت با طول‌های $\frac{L}{3}$ و $\frac{2L}{3}$ تقسیم می‌کنیم و با هر قسمت، یک سیملوله آرمانی می‌سازیم. اگر با سیم به طول $\frac{L}{3}$ ، سیملوله A و با سیم به طول $\frac{2L}{3}$ ، سیملوله B را بسازیم، به‌طوری‌که سیم‌ها بدون فاصله در کنار هم قرار گیرند و این دو سیملوله را به‌صورت موازی با هم در یک مدار قرار دهیم، بزرگی میدان مغناطیسی در داخل سیملوله A چند برابر بزرگی میدان مغناطیسی در داخل سیملوله B است؟

$$\frac{3}{2} \quad (۴)$$

$$۲ \quad (۳)$$

$$\frac{1}{2} \quad (۲)$$

$$۱ \quad (۱)$$

(متوسط - محاسباتی - استاندارد) - صفحه ۱۰۰ - ۱۱۰۳

پاسخ: گزینه ۳

گام اول

نسبت مقاومت الکتریکی دو سیملوله را به‌دست می‌آوریم:

$$R = \frac{\rho L}{A} \Rightarrow \frac{R_A}{R_B} = \frac{L_A}{L_B} \Rightarrow \frac{R_A}{R_B} = \frac{\frac{L}{3}}{\frac{2L}{3}} = \frac{1}{2}$$

گام دوم

نسبت جریان سیملوله‌ها را به‌دست می‌آوریم. با توجه به این‌که دو سیملوله با هم موازی هستند، داریم:

$$V_A = V_B \Rightarrow \frac{I_A}{I_B} = \frac{R_B}{R_A} = 2$$

گام آخر

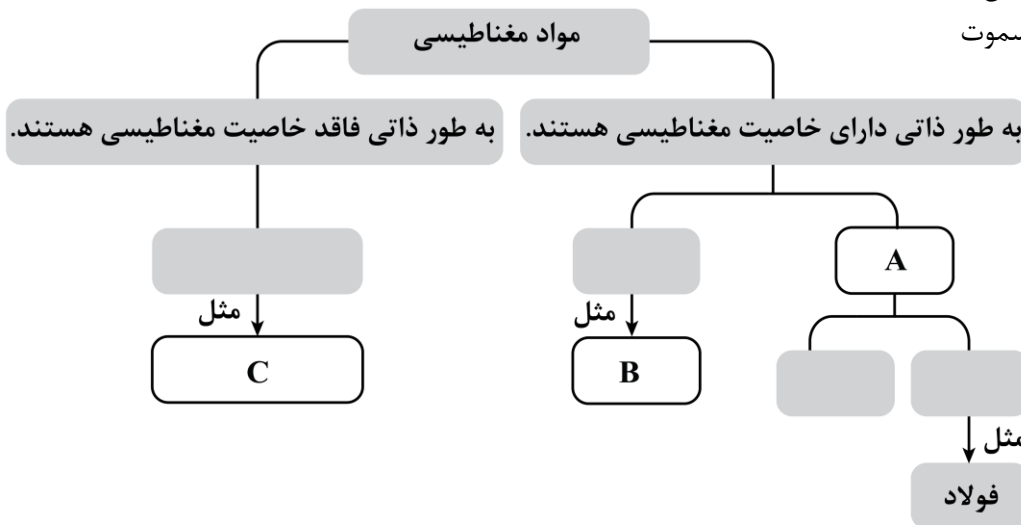
نسبت بزرگی میدان مغناطیسی سیملوله‌ها برابر است با:

$$B = \frac{\mu_0 NI}{\ell} \xrightarrow[\text{کنار هم قرار گرفته‌اند.}]{\text{سیم‌ها بدون فاصله}} B = \frac{\mu_0 NI}{ND} = \frac{\mu_0 I}{D} \Rightarrow \frac{B_A}{B_B} = \frac{I_A}{I_B} \times \frac{D_B}{D_A} \xrightarrow{D_B=D_A} \frac{B_A}{B_B} = \frac{I_A}{I_B} = 2$$



۳۲- در نقشه مفهومی شکل زیر، خانه های A، B و C به ترتیب از راست به چپ در کدام گزینه به درستی آمده اند؟

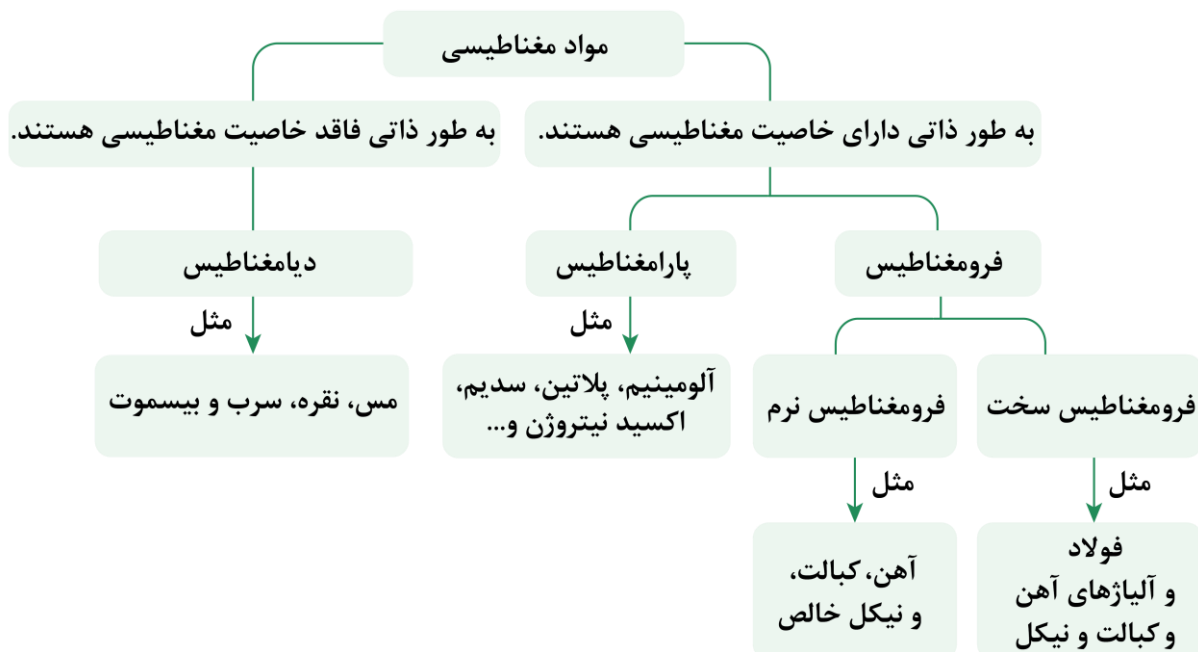
- (۱) فرومغناطیسی - مس - نقره
- (۲) پارامغناطیسی - آلومینیم - پلاتین
- (۳) فرومغناطیسی - آلومینیم - بیسموت
- (۴) پارامغناطیسی - پلاتین - مس



(آسان - خطبه خط - سریع ۵ - صفحه ۱۰۳ - ۱۱۰۳)

پاسخ: گزینه ۳

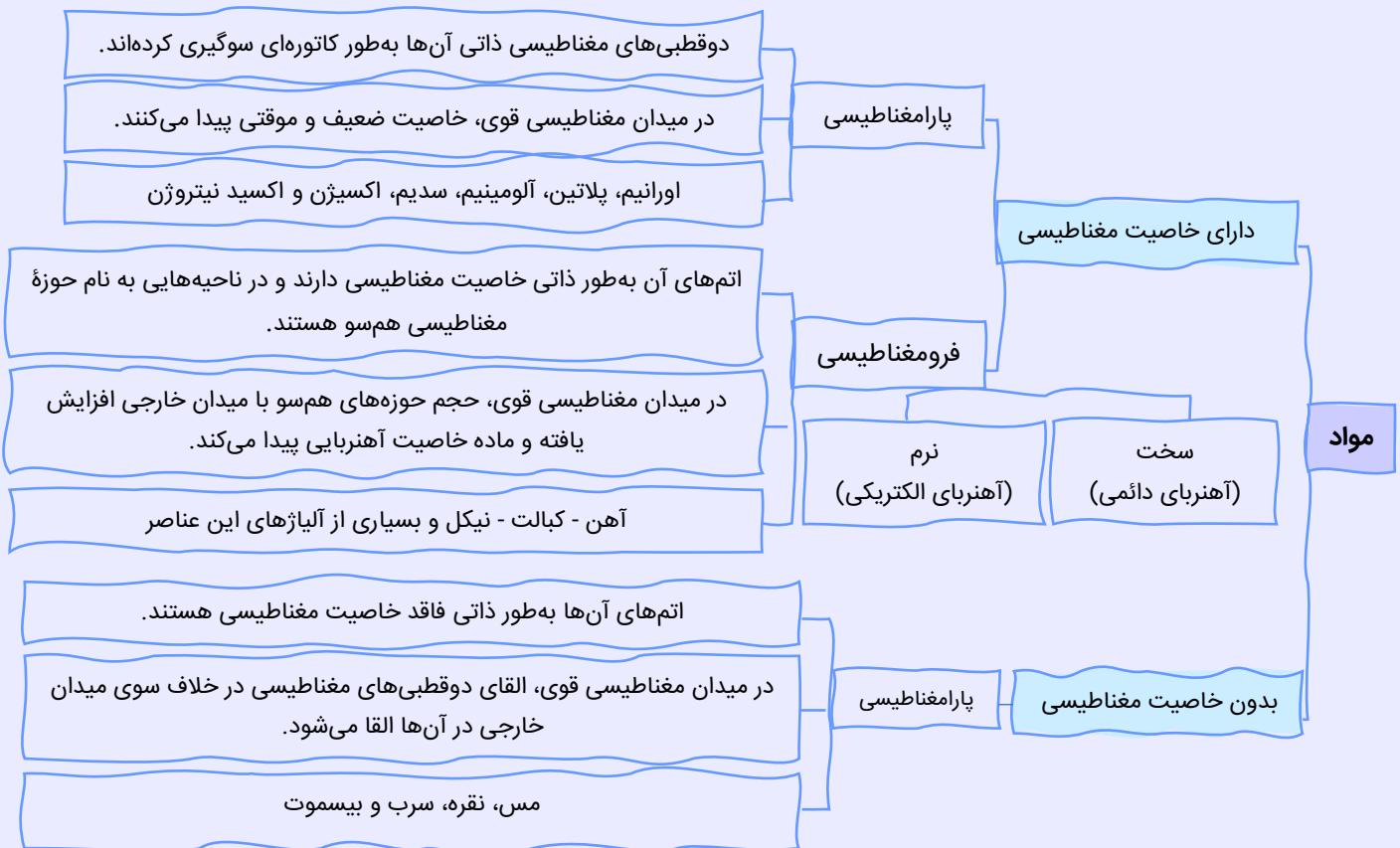
باتوجه به نقشه مفهومی شکل زیر داریم:



بنابراین گزینه (۳) درست است.

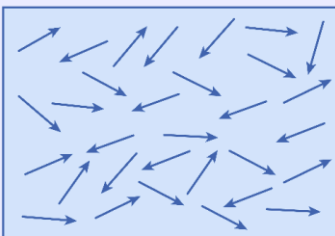
ویژگی‌های مغناطیسی مواد

مواد مغناطیسی، موادی هستند که ذرات سازنده آن‌ها خاصیت مغناطیسی داشته باشند.



مواد پارامغناطیسی

اتم‌های مواد پارامغناطیسی، به‌طور ذاتی خاصیت مغناطیسی دارند، اما دوقطبی‌های مغناطیسی وابسته به آن‌ها، به‌صورت **کاتوره‌ای سمت‌گیری کرده‌اند** و میدان مغناطیسی خالصی ایجاد نمی‌کنند.



جسم پارامغناطیسی
در غیاب میدان مغناطیسی

با قراردادن مواد پارامغناطیسی درون میدان مغناطیسی خارجی قوی، دوقطبی‌های مغناطیسی آن‌ها، مانند عقربه قطب‌نما در نزدیکی آهنربا رفتار می‌کنند و به مقدار مختصری در راستای خط‌های میدان مغناطیسی، منظم می‌شوند. با دورکردن آهنربا از این مواد، دوقطبی‌های مغناطیسی آن‌ها، دوباره به‌طور کاتوره‌ای سوگیری می‌کنند.

به این ترتیب، می‌توان گفت مواد پارامغناطیسی **در حضور میدان‌های مغناطیسی خارجی قوی، خاصیت مغناطیسی ضعیف و موقت پیدا می‌کنند. اورانیم، پلاتین، آلومینیم، سدیم، اکسیژن و اکسید نیتروژن** از جمله مواد پارامغناطیسی‌اند.

یه نمونه باحال

مواد پارامغناطیسی در حضور میدان‌های مغناطیسی قوی چه خاصیت مغناطیسی پیدا می‌کنند؟

- ۱) قوی و موقت ۲) قوی و دائمی ۳) ضعیف و موقت ۴) ضعیف و دائمی

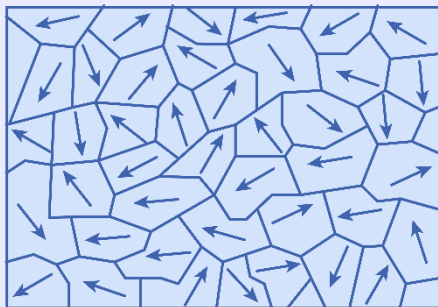
پاسخ تشریحی:

با قراردادن مواد پارامغناطیسی در میدان مغناطیسی خارجی قوی، دوقطبی‌های مغناطیسی آن‌ها به مقدار مختصری در راستای خط‌های میدان، منظم می‌شوند و با حذف میدان خارجی، دوقطبی آن‌ها دوباره به صورت کاتوره‌ای سمت‌گیری می‌کنند.

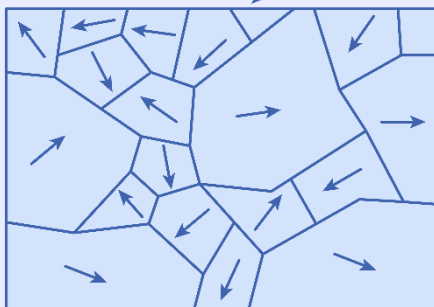
پاسخ: گزینه ۳

مواد فرومغناطیسی

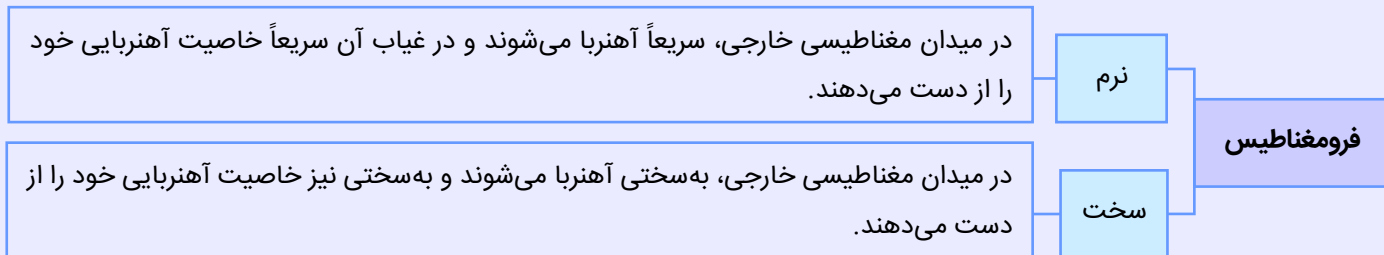
اتم‌های این مواد به صورت ذاتی دارای دوقطبی مغناطیسی هستند. برهم‌کنش‌های قوی بین دوقطبی‌های مغناطیسی در این مواد موجب می‌شود که این دوقطبی‌ها، حتی در نبود میدان مغناطیسی خارجی، در ناحیه‌هایی که حوزه مغناطیسی نامیده می‌شود، همسو می‌شوند.



با قرارگرفتن این مواد در میدان مغناطیسی خارجی، حوزه‌هایی که دوقطبی‌های آن‌ها در جهت میدان مغناطیسی هستند، گسترش می‌یابند و ماده خاصیت مغناطیسی پیدا می‌کند.



مواد فرومغناطیس به دو دسته تقسیم می‌شوند:



موادی مانند آهن، کبالت و نیکل فرومغناطیس نرم هستند و در هسته سیم‌لوله‌ها و ساخت آهنرباهای الکتریکی کاربرد دارند و آلیاژ آن‌ها مانند فولاد و آلیاژهای آهن، کبالت و نیکل فرومغناطیس سخت هستند و در ساخت آهنرباهای دائمی کاربرد دارند.

نکته

در فرومغناطیس نرم برخلاف فرومغناطیس سخت، در اثر حضور و یا حذف میدان مغناطیسی خارجی، حجم حوزه‌های مغناطیسی به سهولت تغییر می‌کنند.

مواد دیامغناطیسی

اتم‌های مواد دیامغناطیس نظیر مس، نقره، سرب و بیسموت به طور ذاتی فاقد خاصیت مغناطیسی‌اند؛ به عبارت دیگر، هیچ یک از اتم‌های این مواد دارای دوقطبی مغناطیسی خالصی نیستند. با این وجود، حضور میدان مغناطیسی خارجی می‌تواند سبب القای دوقطبی‌های مغناطیسی در خلاف جهت میدان خارجی، در این مواد شود (توسط آهنربا دفع می‌شوند).

خاصیت القای مغناطیسی

وقتی که مواد پارامغناطیسی یا فرومغناطیسی در میدان مغناطیسی قرار بگیرند، دوقطبی‌های آن‌ها همانند عقربه مغناطیسی عمل کرده و در جهت میدان قرار می‌گیرند. از این رو بر خاصیت مغناطیسی‌شان افزوده می‌شود و اثر آهنربایی از خود نشان می‌دهند.

اگر این میدان مغناطیسی حذف شود:

در مواد پارامغناطیسی، دوقطبی‌ها به وضعیت اولیه‌شان برمی‌گردند.

در مواد فرومغناطیسی نرم، حوزه‌ها به حالت اولیه برمی‌گردند.

در مواد فرومغناطیسی سخت، حوزه‌ها تقریباً در همان وضعیت باقی می‌مانند و حالت آهنربایی دائم تشکیل می‌دهند.

راهنمای مسیر

مشابه این سؤال توی تمرین‌های کتاب هم هست و احتمال داره توی امتحان تشریحی هم مطرح بشه.



۳۳- سیمی به طول 60 cm را یک‌بار به صورت پیچ‌های تک حلقه در میدان مغناطیسی یکنواختی به بزرگی 150 G عمود بر خطوط میدان قرار می‌دهیم و بار دیگر با همان سیم، پیچ‌های شامل ۳ حلقه مشابه ساخته‌ایم و آن را در میدان مغناطیسی یکنواختی به بزرگی 600 G عمود بر خطوط میدان قرار می‌دهیم. مقدار شار مغناطیسی عبوری از پیچ‌ها چند و بر تغییر می‌کند؟ ($\pi = 3$)

- (۱) $2/5 \times 10^{-4}$ (۲) $2/5 \times 10^{-3}$ (۳) $1/35 \times 10^{-4}$ (۴) $1/35 \times 10^{-3}$

(متوسط - محاسباتی - استاندارد) (صفحه ۱۱۱ - ۱۱۰۴)

پاسخ: گزینه ۱

گام اول

مساحت حلقه‌ها را در دو حالت به دست می‌آوریم. طبق رابطه $L = N \times 2\pi R$ داریم:

حالت اول

$$L = 1 \times 2\pi R \Rightarrow 60 = 6R \Rightarrow R = 10\text{ cm} \Rightarrow A_1 = \pi R^2 = 3 \times 100 = 300\text{ cm}^2$$

حالت دوم

$$L = N \times 2\pi R' \Rightarrow 60 = 18 \times R' \Rightarrow R' = \frac{10}{3}\text{ cm} \Rightarrow A_2 = \pi R'^2 = 3 \times \frac{100}{9} = \frac{100}{3}\text{ cm}^2$$

گام آخر

طبق رابطه شار مغناطیسی داریم:

$$\Phi = AB \cos \theta \Rightarrow \begin{cases} \Phi_1 = 3 \times 10^{-2} \times 150 \times 10^{-4} = 0.045 \times 10^{-2} = 45 \times 10^{-5}\text{ Wb} \\ \Phi_2 = \frac{10^{-2}}{3} \times 600 \times 10^{-4} = 0.02 \times 10^{-2} = 20 \times 10^{-5}\text{ Wb} \end{cases}$$

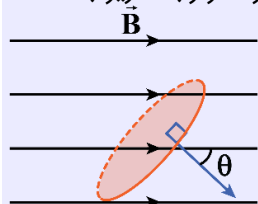
$$\Rightarrow \Phi_2 - \Phi_1 = -2/5 \times 10^{-4}\text{ Wb}$$

تذکر

شار مغناطیسی عبوری از یک پیچ به تعداد حلقه‌های آن پیچ بستگی ندارد.

شار مغناطیسی

شار مغناطیسی عبوری از پیچ رسانایی با سطح مقطع A که در میدان مغناطیسی یکنواختی به بزرگی B قرار دارد، از رابطه زیر به دست می‌آید:



$$\Phi = AB \cos \theta$$

A : مساحت بر حسب متر مربع (m^2)

θ : زاویه خطوط میدان با نیم‌خط عمود بر سطح حلقه

Φ : شار مغناطیسی بر حسب وبر (Wb)

B : اندازه میدان مغناطیسی بر حسب تسلا (T)



- ۱- شار مغناطیسی، کمیتی **نرده‌ای** است.
- ۲- یکای وبر (Wb) معادل $T.m^2$ است.
- ۳- زاویه خطوط میدان مغناطیسی با سطح حلقه (α) متمم زاویه خطوط میدان مغناطیسی با نیم‌خط عمود بر سطح حلقه (θ) است.
 $\theta = 90^\circ - \alpha$
- ۴- **بیشینه شار مغناطیسی** عبوری از یک پیچه هنگامی رخ می‌دهد که **خطوط میدان مغناطیسی، بر سطح پیچه، عمود باشند** ($\Phi_{max} = AB$)
و هنگامی که **سطح پیچه، موازی خطوط میدان مغناطیسی** باشد، شار مغناطیسی عبوری از پیچه، **صفر** است.
- ۵- شار مغناطیسی عبوری از یک پیچه به **تعداد حلقه‌های پیچه بستگی ندارد**.

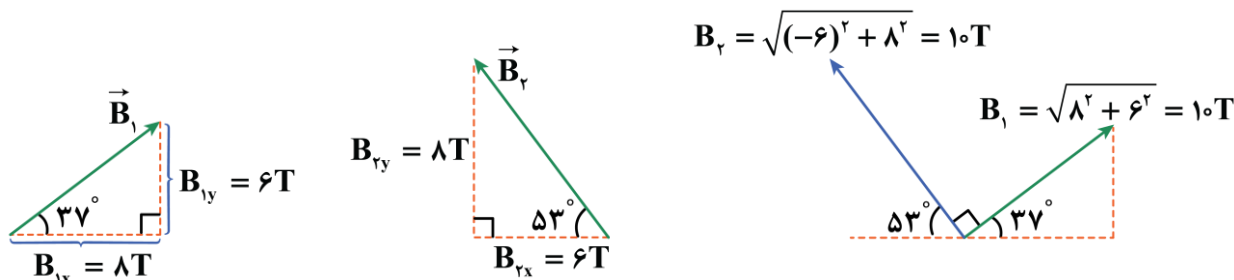


- ۳۴- حلقه‌ای رسانا به مساحت 20 cm^2 عمود بر خطوط میدان مغناطیسی یکنواخت $\vec{B} = 8\vec{i} + 6\vec{j}$ (برحسب SI) قرار دارد. اگر در مدت زمان 0.5 s میدان مغناطیسی به $\vec{B} = -6\vec{i} + 8\vec{j}$ (برحسب SI) برسد، اندازه نیروی محرکه القایی متوسط در حلقه در این مدت چند ولت است؟ ($\sin 37^\circ = 0.6$)
- ۰/۴ (۴) ۰/۰۴ (۳) ۰/۲ (۲) ۰/۰۲ (۱)

(متوسط - محاسباتی - استاندارد) (صفحه ۱۱۳ - ۱۱۰۴)

پاسخ: گزینه ۳

مطابق شکل زیر، با توجه به زاویه میدان مغناطیسی با خط افقی در حالت دوم، درمی‌یابیم که در این حالت، خطوط میدان مغناطیسی، موازی سطح پیچه هستند؛ بنابراین می‌توانیم بنویسیم:



در نهایت طبق قانون القای فاراده می‌توانیم بنویسیم:

$$\begin{cases} \theta_1 = 0^\circ \\ \theta_2 = 90^\circ \end{cases} \Rightarrow |\varepsilon_{av}| = \left| -N \frac{\Delta\Phi}{\Delta t} \right| \Rightarrow |\varepsilon_{av}| = \left| -NAB \frac{\Delta \cos \theta}{\Delta t} \right| = \left| -1 \times 20 \times 10^{-4} \times 10 \times \frac{(0-1)}{0.5} \right| = 0.4 \text{ V}$$

قانون القای فاراده

هرگاه شار مغناطیسی عبوری از یک حلقه رسانا تغییر کند، نیروی محرکه‌ای در حلقه القا می‌شود که بزرگی آن با آهنگ تغییر شار مغناطیسی عبوری از حلقه متناسب است.

تغییر شار مغناطیسی در یک حلقه ← ایجاد نیروی محرکه القایی ← ایجاد جریان القایی

نیروی محرکه القایی متوسط بنابر قانون فاراده برای پیچه یا سیم‌لوله‌ای که از N حلقه مشابه تشکیل شده باشد از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$\varepsilon_{av} = -N \frac{\Delta\Phi}{\Delta t}$$

N: تعداد حلقه

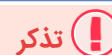
ε_{av} : نیروی محرکه القایی متوسط برحسب ولت (V)

Δt : مدت زمان تغییر شار مغناطیسی عبوری از حلقه برحسب ثانیه (s)

$\Delta\Phi$: تغییر شار مغناطیسی برحسب وبر (Wb)



در این رابطه نیروی محرکه القایی متوسط برحسب **ولت** است که یک ولت، معادل **وبر بر ثانیه** است.



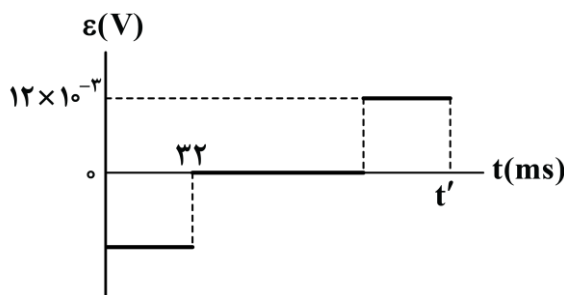
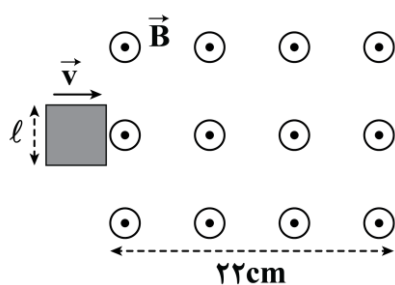
علامت منفی در این رابطه، مخالفت نیروی محرکه القایی متوسط با تغییر شار مغناطیسی عبوری از پیچه را نشان می‌دهد.



تسلط روی مفاهیم اولیه مثلثات و نسبت‌های مثلثاتی خیلی توی فیزیک بهت کمک می‌کنه. یه پیشنهاد بهت میدم. نسبت‌های اضلاع و نسبت‌های مثلثاتی رو توی سه تا مثلث $(۳۰^\circ - ۶۰^\circ - ۹۰^\circ)$ ، $(۳۷^\circ - ۵۳^\circ - ۹۰^\circ)$ و $(۴۵^\circ - ۴۵^\circ - ۹۰^\circ)$ رو همین الان یاد بگیر.



۳۵- مطابق شکل زیر، یک قاب رسانای مربعی شکل با تندی ثابت v وارد میدان مغناطیسی یکنواخت $\vec{B}$ به بزرگی ۶۰۰G می‌شود. اگر نمودار نیروی محرکه القایی متوسط در قاب، از لحظه ورود قاب به میدان تا خروج کامل آن مطابق نمودار داده شده باشد، حداکثر شار مغناطیسی عبوری از قاب بر حسب میکروبر و لحظه t' بر حسب میلی ثانیه، به ترتیب از راست به چپ در کدام گزینه به درستی آمده‌اند؟



(۴) ۱۹۲ و ۱۲۰

(۳) ۱۹۲ و ۸۸

(۲) ۳۸۴ و ۸۸

(۱) ۳۸۴ و ۱۲۰

(سخت - استدلالی - زمان‌بر) - صفحه ۱۱۵ - ۱۱۰۴

پاسخ: گزینه ۱

گام اول

در بازه زمانی $t = 0$ تا $t = ۳۲\text{ms}$ ، قاب در حال ورود به میدان بوده و در لحظه $t = ۳۲\text{ms}$ کاملاً داخل میدان قرار می‌گیرد و داریم:

$$\Delta x = vt \Rightarrow l = v \times ۳۲ \times ۱۰^{-۳} \quad (۱)$$

گام دوم

با توجه به این که قاب با تندی ثابت در حرکت است، لذا داریم:

$$\varepsilon_{\max} = \ell v B \Rightarrow ۱۲ \times ۱۰^{-۳} = \ell v \times ۶۰۰ \times ۱۰^{-۴} \Rightarrow \ell v = ۰/۲ \xrightarrow{(۱)} v \times ۳۲ \times ۱۰^{-۳} \times v = ۰/۲ \Rightarrow v^2 = \frac{۲۵}{۴} \Rightarrow v = \frac{۵}{۲} \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$\ell = v \times ۳۲ \times ۱۰^{-۳} = \frac{۵}{۲} \times ۳۲ \times ۱۰^{-۳} = ۰/۰۸ \text{m}$$

گام سوم

در مدت زمانی که قاب کاملاً داخل میدان است، شار مغناطیسی عبوری از آن بیشینه شده و برابر است با:

$$\Phi_{\max} = BA = B\ell^2 \Rightarrow \Phi_{\max} = ۶۰۰ \times ۱۰^{-۴} \times ۶۴ \times ۱۰^{-۴} = ۳۸۴ \times ۱۰^{-۶} \text{Wb} = ۳۸۴ \mu\text{Wb}$$

گام آخر

در لحظه t' ، قاب به طور کامل از میدان خارج می‌شود و داریم:

$$\Delta x' = vt' \Rightarrow \ell + ۲۲ \times ۱۰^{-۲} = \frac{۵}{۲} t' \Rightarrow ۰/۰۸ + ۰/۲۲ = \frac{۵}{۲} t' \Rightarrow t' = \frac{۰/۳ \times ۲}{۵} = ۰/۱۲ \text{s} \Rightarrow t' = ۱۲۰ \text{ms}$$

سوتی‌های پرتکرار

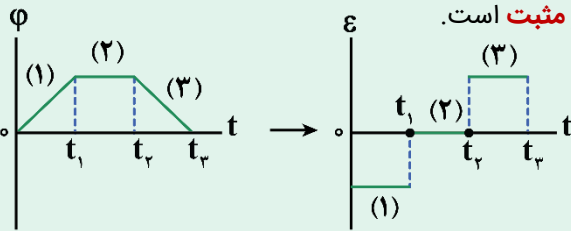
بچه‌ها برای این که قاب کاملاً از میدان خارج شود، باید به اندازه طول ناحیه میدان و طول قاب جابه‌جا شود $(\ell + ۰/۲۲\text{m})$. اگر به اشتباه فقط جابه‌جایی ۲۲cm را مدنظر قرار دهید، در دام گزینه (۲) می‌افتید.

علامت نیروی محرکه القایی در یک پیچه رسانا از روی نمودار شار مغناطیسی بر حسب زمان

۱- اگر شیب خط نمودار $\Phi - t$ ، مثبت باشد، نیروی محرکه القایی، مقداری ثابت و منفی است.

۲- اگر شیب خط نمودار $\Phi - t$ ، صفر باشد، نیروی محرکه القایی، صفر است.

۳- اگر شیب خط نمودار $\Phi - t$ ، منفی باشد، نیروی محرکه القایی، مقداری ثابت و مثبت است.



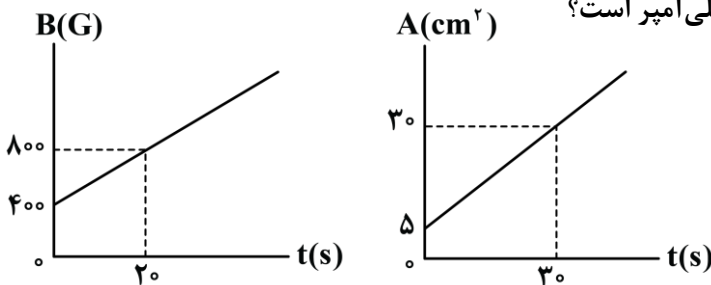
بزرگی نیروی محرکه القایی متوسط و بزرگی جریان القایی متوسط در یک حلقه رسانا متناسب با شیب پاره خط واصل بین دو نقطه از نمودار شار مغناطیسی عبوری از آن حلقه بر حسب زمان است.

اگر شیب نمودار $\Phi - t$ در یک بازه زمانی، ثابت باشد، نیروی محرکه القایی و جریان القایی در تمام لحظات این بازه زمانی، مقدار ثابتی خواهد داشت. این مقدار ثابت برابر با نیروی محرکه القایی متوسط و جریان الکتریکی القایی متوسط در کل آن بازه زمانی است.



۳۶- پیچه‌ای رسانا با 150° حلقه عمود بر خطوط میدان مغناطیسی یکنواختی قرار دارد. نمودار تغییرات بزرگی میدان مغناطیسی بر حسب زمان و مساحت سطح مقطع این پیچه بر حسب زمان، مطابق شکل‌های زیر است. اگر مقاومت این پیچه $2/15\Omega$ باشد، اندازه جریان

القایی متوسط در پیچه در بازه زمانی $t = 0$ تا $t = 6s$ چند میلی آمپر است؟



- (۱) ۰/۵
- (۲) ۱
- (۳) ۱/۵
- (۴) ۲

(سخت - استدلالی - استاندارد) (۱۱۳ - صفحه ۱۱۰۴)

پاسخ: گزینه ۲

گام اول

بزرگی میدان مغناطیسی و مساحت پیچه را با استفاده از نمودار در لحظات $t_1 = 0$ و $t_2 = 6s$ به دست می آوریم:

$$B - t \text{ شیب نمودار} = \frac{\Delta B}{\Delta t} = \frac{800 - 400}{20} = \frac{400}{20} = 20$$

$$B - t \text{ معادله: } B = 20t + 400 \Rightarrow \begin{cases} t_1 = 0 \Rightarrow B_1 = 400G = 4 \times 10^{-2}T \\ t_2 = 6s \Rightarrow B_2 = 1600G = 16 \times 10^{-2}T \end{cases}$$

$$A - t \text{ شیب نمودار} = \frac{\Delta A}{\Delta t} = \frac{30 - 5}{30} = \frac{25}{30} = \frac{5}{6}$$

$$A - t \text{ معادله: } A = \frac{5}{6}t + 5 \Rightarrow \begin{cases} t_1 = 0 \Rightarrow A_1 = 5cm^2 = 5 \times 10^{-4}m^2 \\ t_2 = 6s \Rightarrow A_2 = 55cm^2 = 55 \times 10^{-4}m^2 \end{cases}$$

شار مغناطیسی عبوری از پیچه را در لحظات $t_1 = 0$ و $t_2 = 6 \text{ s}$ حساب می‌کنیم:

$$\Phi = AB \cos \theta \Rightarrow \begin{cases} t_1 = 0 \Rightarrow \Phi_1 = 5 \times 10^{-4} \times 4 \times 10^{-2} \times 1 = 2 \times 10^{-5} \text{ Wb} \\ t_2 = 6 \text{ s} \Rightarrow \Phi_2 = 55 \times 10^{-4} \times 16 \times 10^{-2} = 88 \times 10^{-5} \text{ Wb} \end{cases}$$

با استفاده از رابطه قانون القای فاراده داریم:

$$\varepsilon_{av} = -N \frac{\Delta \Phi}{\Delta t} = 150 \times \frac{(88 \times 10^{-5} - 2 \times 10^{-5})}{6} = -215 \times 10^{-5} \text{ V} = -2/15 \times 10^{-3} \text{ V}$$

جریان القایی متوسط در پیچه برابر است با:

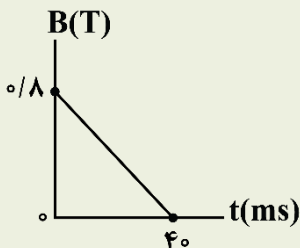
$$|I_{av}| = \frac{|\varepsilon_{av}|}{R} = \frac{2/15 \times 10^{-3}}{2/15} = 10^{-3} \text{ A} = 1 \text{ mA}$$



از روی نمودار بزرگی میدان مغناطیسی بر حسب زمان ($B-t$) هم می‌توان با به دست آوردن شیب نمودار به $(\frac{\Delta B}{\Delta t})$ و در نهایت به ε_{av} رسید.

آزمون سراسری تجربی ۱۳۹۹

پیچه‌ای دارای ۵۰۰ حلقه و مساحت سطح هر حلقه آن 40 cm^2 است و طوری در یک میدان مغناطیسی قرار گرفته است که خط‌های میدان عمود بر سطح حلقه‌های پیچه‌اند. اگر نمودار تغییرات میدان بر حسب زمان به صورت شکل زیر باشد، نیروی محرکه القایی متوسط در پیچه در بازه زمانی $t_1 = 0$ تا $t_2 = 3 \text{ ms}$ چند ولت است؟



- (۱) ۱۲۰
- (۲) ۴۰
- (۳) ۳۰
- (۴) ۱۶

پاسخ تشریحی:

با توجه به ثابت بودن مساحت سطح حلقه و زاویه بین میدان و سطح داریم:

$$\varepsilon_{av} = -N \frac{\Delta \Phi}{\Delta t} = -NA \cos \theta \frac{\Delta B}{\Delta t} \xrightarrow{\cos \theta = 1} \varepsilon_{av} = -NA \frac{\Delta B}{\Delta t}$$

حالا از روی نمودار $B-t$ ، $(\frac{\Delta B}{\Delta t})$ (یعنی شیب نمودار) را به دست می‌آوریم:

$$\text{شیب خط} = \frac{\Delta B}{\Delta t} = \frac{-0.1}{40 \times 10^{-3}} = -2.5 \frac{\text{T}}{\text{s}}$$

$$\varepsilon_{av} = -NA \frac{\Delta B}{\Delta t} \xrightarrow{N=500, A=40 \times 10^{-4} \text{ m}^2, \frac{\Delta B}{\Delta t} = -2.5 \frac{\text{T}}{\text{s}}} \varepsilon_{av} = -500 \times 40 \times 10^{-4} \times (-2.5) = 50 \text{ V}$$

پاسخ: گزینه ۲

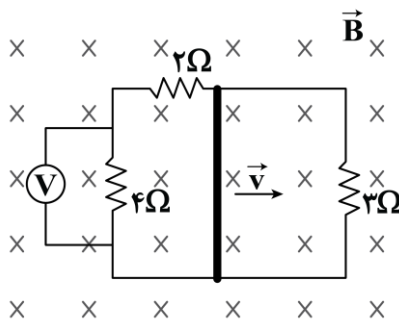
با توجه به روابط مربوط به تغییرات شار مغناطیسی عبوری از پیچهای رسانا، می‌توانیم روابط زیر را برای نیروی محرکه القایی متوسط در پیچه بنویسیم:

$$\varepsilon_{av} = -N \frac{\Delta \Phi}{\Delta t} \begin{cases} B \text{ تغییر کند} \Rightarrow \varepsilon_{av} = -NA \cos \theta \frac{\Delta B}{\Delta t} = -NA \cos \theta \frac{(B_2 - B_1)}{\Delta t} \\ A \text{ تغییر کند} \Rightarrow \varepsilon_{av} = -NB \cos \theta \frac{\Delta A}{\Delta t} = -NB \cos \theta \frac{(A_2 - A_1)}{\Delta t} \\ \theta \text{ تغییر کند} \Rightarrow \varepsilon_{av} = -NBA \frac{\Delta \cos \theta}{\Delta t} = -NBA \frac{(\cos \theta_2 - \cos \theta_1)}{\Delta t} \end{cases}$$

سؤالاتی که توش بیشتر از یکی از پارامترهای A ، B و $\cos \theta$ تغییر می‌کنن به صورت جداگانه Φ_1 و Φ_2 رو به دست بیار بعدش ε_{av} رو حساب کن.



۳۷- در مدار شکل زیر که در یک میدان مغناطیسی یکنواخت عمود بر صفحه به بزرگی 200G قرار دارد، یک میله رسانای 0.5 متری با مقاومت الکتریکی 2Ω با تندی ثابت $40 \frac{\text{cm}}{\text{s}}$ به سمت راست حرکت می‌کند. عددی که ولت‌سنج آرمانی نشان می‌دهد، چند ولت است؟



- (۱) $\frac{1}{250}$
(۲) $\frac{1}{500}$
(۳) $\frac{1}{750}$
(۴) $\frac{1}{1000}$

(سخت - محاسباتی - استاندارد) - صفحه ۱۱۵ - ۱۱۴

پاسخ: گزینه ۳

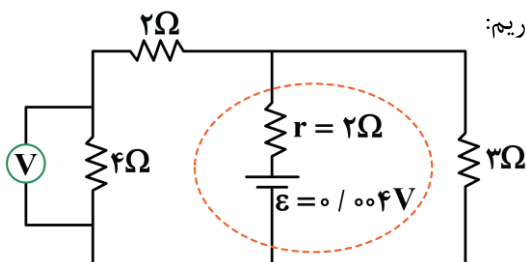
گام اول

نیروی محرکه القایی متوسط را به دست می‌آوریم. توجه داشته باشید وقتی میله با سرعت ثابت حرکت می‌کند، نیروی محرکه القایی مقداری ثابت خواهد بود؛ بنابراین می‌توانیم به جای ε_{av} ، ε قرار دهیم:

$$\varepsilon = B\ell v \Rightarrow \varepsilon = 200 \times 10^{-4} \times 0.5 \times 40 \times 10^{-2} = 0.004\text{V}$$

گام دوم

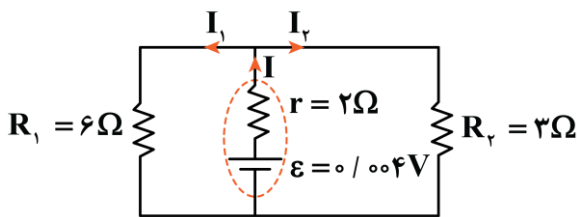
مقاومت معادل مدار و به دنبال آن جریان مدار را به دست می‌آوریم. با توجه به شکل زیر داریم:



$$R_{eq} = (4 + 2) \parallel 3 = \frac{6 \times 3}{6 + 3} = 2\Omega$$

$$I = \frac{\varepsilon}{R_{eq} + r} = \frac{0.004}{2 + 2} = 0.001\text{A}$$

جریان هر شاخه را به دست می آوریم:



$$\frac{I_2}{I_1} = \frac{R_1}{R_2} = \frac{6}{3} = 2 \Rightarrow I_2 = 2I_1$$

$$I = I_1 + I_2 = 3I_1 = 0.001 A \Rightarrow I_1 = \frac{1}{3000} A$$

عددی که ولت سنج نشان می دهد، برابر است با:

$$V = RI \Rightarrow V = 4 \times \frac{1}{3000} = \frac{1}{750} V$$

تذکر

وقتی یک میله تنها (بدون قاب رسانا)، در میدان مغناطیسی، عمود بر خطوط میدان حرکت کند، در میله نیروی محرکه القایی پدید می آید. گویی یک قاب رسانای فرضی وجود دارد!

حرکت میله رسانای عمود بر خطوط میدان مغناطیسی با تندی ثابت

اگر میله فلزی به طول ℓ با تندی ثابت v ، عمود بر خطوط میدان مغناطیسی یکنواختی به بزرگی B حرکت کند، نیروی محرکه القایی متوسط ایجادشده در دو سر میله برابر است با:

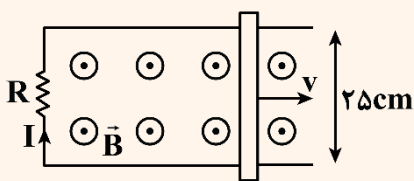
$$\varepsilon_{av} = -B\ell v \Rightarrow |\varepsilon_{av}| = B\ell v$$

ε_{av} : نیروی محرکه القایی متوسط برحسب ولت (V) B : اندازه میدان مغناطیسی برحسب تسلا (T)

v : تندی حرکت میله برحسب متر بر ثانیه ($\frac{m}{s}$) ℓ : طول میله برحسب متر (m)

یه نمونه باحال

در شکل زیر، رسانای U شکل به مقاومت $R = 0.2 \Omega$ در میدان مغناطیسی یکنواخت $B = 0.1 T$ قرار دارد. میله رسانا روی آن با سرعت ثابت v در حرکت است. اگر جریان القایی در میله $I = 0.5 A$ باشد، اندازه سرعت میله چند متر بر ثانیه است؟



۱ (۱)

۴ (۲)

۰/۱ (۳)

۰/۴ (۴)

پاسخ تشریحی:

با داشتن جریان القایی و مقاومت و به کمک قانون اهم می توانیم نیروی محرکه القایی را به دست آوریم:

$$\varepsilon_{av} = I_{av} R \xrightarrow{I=0.5A, R=0.2\Omega} \varepsilon_{av} = 0.5 \times 0.2 = 0.1 V$$

اندازه سرعت میله را به دست می آوریم:

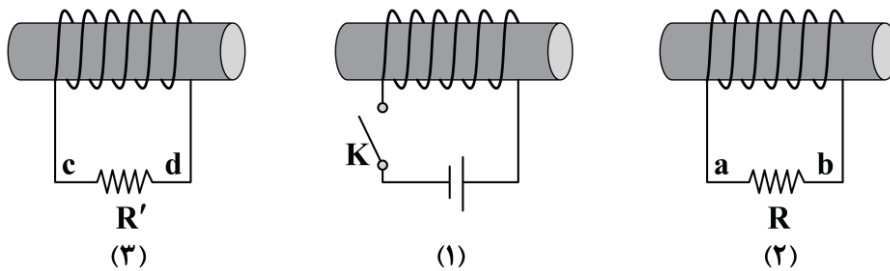
$$|\varepsilon_{av}| = |B\ell v| \Rightarrow 0.1 = 0.1 \times 0.25 \times v \Rightarrow v = 4 \frac{m}{s}$$

پاسخ: گزینه ۲

راهنمای مسیر

می دونی که مدار رو می شه با جاهای مختلف این فصل ترکیب کرد. اینم یه نمونه اش.

۳۸- در مدار نشان داده شده در شکل زیر، در لحظه بستن کلید K، جهت جریان القایی در مقاومت‌های R و R' به ترتیب از راست به



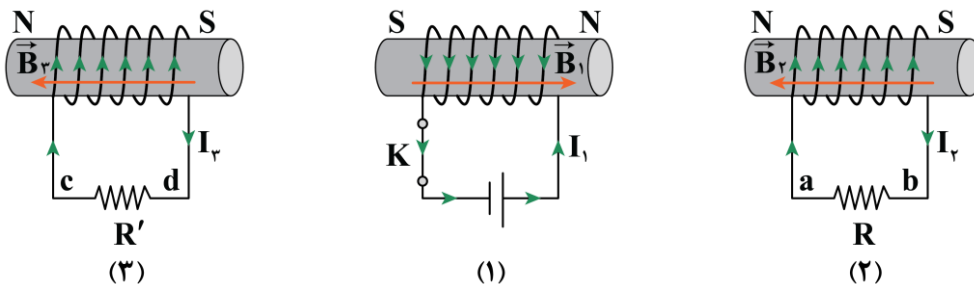
چپ در کدام گزینه به درستی آمده‌اند؟

- (۱) a به b و c به d
- (۲) a به b و d به c
- (۳) b به a و d به c
- (۴) b به a و c به d

(آسان - مفهومی - سریع - صفحه ۱۱۷ - ۱۱۰۴)

پاسخ: گزینه ۳

به محض وصل کردن کلید، جریان الکتریکی و بالطبع میدان مغناطیسی در سیم‌لوله (۱) برقرار می‌شود و باعث افزایش شار مغناطیسی عبوری از سیم‌لوله‌های (۲) و (۳) می‌شود. طبق قانون لنز، باید جریان القایی در سیم‌لوله‌های (۲) و (۳) در جهتی باشند که با افزایش شار مغناطیسی عبوری از سیم‌لوله‌های (۲) و (۳) مخالفت کند. در نتیجه طبق قاعده دست راست، جهت جریان القایی در سیم‌لوله (۲) از b به a و در سیم‌لوله (۳) از d به c می‌شود.



تکنیک

با بستن کلید، میدان مغناطیسی ناشی از سیم‌لوله (۱) در محل سیم‌لوله‌های (۲) و (۳) افزایش می‌یابد و طبق قانون لنز که همیشه ساز مخالفه، باید سیم‌لوله‌های (۲) و (۳) از طرف سیم‌لوله (۱) دفع شوند، بنابراین با تعیین قطب‌های نزدیک سیم‌لوله‌های (۲) و (۳) به سیم‌لوله (۱)، به راحتی می‌توان جهت میدان القایی و جهت جریان القایی را در سیم‌لوله‌های (۲) و (۳) به دست آورد.

قانون لنز

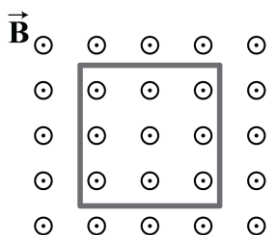
جهت جریان القایی در یک مدار یا پیچه به گونه‌ای است که آثار ناشی از آن (میدان مغناطیسی القایی) با عامل به وجود آورنده جریان القایی (تغییر شار مغناطیسی) مخالفت می‌کند. طبق الگوی زیر داریم:

$$\Delta\Phi: \begin{cases} \Delta\Phi > 0 \Rightarrow B_{\text{القایی}} \text{ خلاف جهت خارجی } B \\ \Delta\Phi < 0 \Rightarrow B_{\text{القایی}} \text{ هم جهت با خارجی } B \end{cases} \Rightarrow \text{استفاده از قاعده دست راست برای تعیین جهت جریان القایی}$$



۳۹- سیم رسانایی به طول ۲m و مقاومت الکتریکی ۱۰Ω را به شکل یک حلقه مربعی شکل درآورده و در مبدأ زمان مطابق شکل زیر،

عمود بر خطوط میدان مغناطیسی یکنواخت و برون‌سویی که معادله آن بر حسب زمان در SI به صورت $B = t^2 - 4t + 2$ است، قرار می‌دهیم. اندازه جریان الکتریکی القایی متوسطی که در سه ثانیه دوم در این حلقه القا می‌شود، چند آمپر و در چه جهتی است؟



(۱) $\frac{1}{8}$ ، ساعتگرد

(۲) $\frac{1}{8}$ ، ابتدا ساعتگرد و سپس پادساعتگرد

(۳) $\frac{13}{120}$ ، ساعتگرد

(۴) $\frac{13}{120}$ ، ابتدا ساعتگرد و سپس پادساعتگرد

ابتدا باید طول ضلع حلقه مربعی و مساحت آن را به دست آوریم. اگر طول سیم را L و طول ضلع مربع را ℓ فرض کنیم داریم:

$$L = \text{محیط حلقه} \Rightarrow L = 4\ell \xrightarrow{L=2m} 2 = 4\ell \Rightarrow \ell = \frac{1}{2}m \xrightarrow{A=\ell^2} A = \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}m^2$$

حالا باید به تحلیل نحوه تغییر میدان مغناطیسی بپردازیم. بچه‌ها رسم نمودار میدان بر حسب زمان الزامی نیست، اما به درک درست شما خیلی کمک می‌کند:

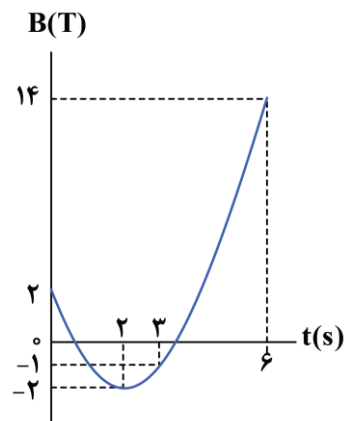
$$B = t^2 - 4t + 2 \Rightarrow \begin{cases} t_{\text{رأس}} = \frac{-b}{2a} = \frac{4}{2} = 2s \Rightarrow B_{\text{رأس}} = (2)^2 - 4(2) + 2 = -2T \\ t = 0 \Rightarrow B = 2T \end{cases}$$

برای بازه زمانی سه ثانیه دوم هم داریم:

$$t_1 = 3s \Rightarrow B_1 = 9 - 12 + 2 = -1T$$

$$t_2 = 6s \Rightarrow B_2 = 36 - 24 + 2 = 14T$$

بچه‌ها در مبدأ زمان، میدان مغناطیسی مثبت و برون سو است. پس در لحظه $t = 3s$ که میدان منفی است، جهت میدان، درون سو شده است و در بازه زمانی $t = 3s$ تا $t = 6s$ ، میدان مغناطیسی ابتدا درون سو و در حال کاهش است که طبق قانون لنز، باید میدان مغناطیسی القایی نیز درون سو باشد و در نتیجه **جهت جریان القایی، ساعتگرد است**، سپس میدان مغناطیسی، مثبت (برون سو) شده و اندازه آن در حال افزایش است، پس طبق قانون لنز باید میدان مغناطیسی القایی باز هم درون سو باشد و در نتیجه **جهت جریان القایی هم چنان ساعتگرد خواهد بود**، پس در سه ثانیه دوم، جهت جریان القایی به صورت ساعتگرد است.



با فرض این که نیم خط عمود بر سطح حلقه، درون سو باشد، داریم:

$$\begin{cases} \Phi_1 = AB_1 \cos \theta_1 \xrightarrow{\theta_1=0^\circ} \Phi_1 = \frac{1}{4} \times 1 \times 1 = \frac{1}{4} \text{ Wb} \\ \Phi_2 = AB_2 \cos \theta_2 \xrightarrow{\theta_2=180^\circ} \Phi_2 = \frac{1}{4} \times 14 \times (-1) = -\frac{14}{4} \text{ Wb} \end{cases} \Rightarrow \Delta\Phi = \Phi_2 - \Phi_1 = -\frac{15}{4} \text{ Wb}$$

اندازه جریان القایی در حلقه برابر است با:

$$|I_{av}| = \left| -\frac{N \Delta\Phi}{R \Delta t} \right| = \left| \frac{-1}{10} \times \frac{-\frac{15}{4}}{3} \right| = \frac{1}{8} A$$

جریان القایی در یک پیچه با تغییر شار مغناطیسی عبوری از آن

اگر نیروی محرکه القایی متوسط در حلقه برابر با $\mathcal{E}_{av}$ و مقاومت الکتریکی حلقه R باشد، اندازه جریان القایی متوسط در حلقه از رابطه زیر

$$I_{av} = \frac{|\mathcal{E}_{av}|}{R} = \left| -\frac{N}{R} \frac{\Delta\Phi}{\Delta t} \right|$$

به دست می آید:

نکات

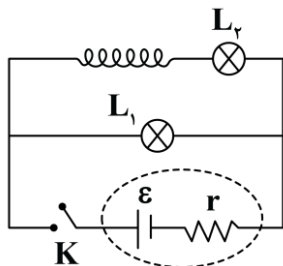
- ۱- هر چه مقاومت الکتریکی پیچه یا مداری که در آن شار مغناطیسی تغییر می کند، بیشتر باشد، جریان کوچک تری در آن القا می شود.
- ۲- هر چه تغییرات شار مغناطیسی عبوری از یک پیچه رسانا سریع تر رخ دهد و همین طور تعداد حلقه های پیچه، بیشتر باشد، بزرگی نیروی محرکه القایی متوسط و جریان القایی متوسط در پیچه بیشتر خواهد بود.

راهنمای مسیر

بچه ها این تیپ سؤالات هم از مهم ترین و پرتکرارترین سؤالات این فصل محسوب می شه. مخصوصاً که میدان مغناطیسی متغیر با زمان می شه و شما باید هم حواستون به نحوه تغییر اندازه میدان و هم تغییر یا عدم تغییر جهت میدان و تأثیر آن بر جهت جریان القایی باشه. لطفاً پاسخنامه این سؤال رو با دقت مطالعه کنید تا چم و خم تحلیل درست این تیپ ها دستتون بیاد.



۴۰- در شکل زیر، اندکی بعد از وصل کلید K نور لامپ های L_1 و L_2 به ترتیب از راست به چپ، چگونه تغییر می کنند؟ (القاگر، آرمانی است.)



- (۱) کاهش - افزایش
- (۲) ثابت - افزایش
- (۳) کاهش - کاهش
- (۴) ثابت - کاهش

(آسان - مفهومی - استاندارد ۱۰ - صفحه ۱۲۱ - ۱۱۰۴)

پاسخ: گزینه ۱

پس از وصل کلید K ، جریان در مدار برقرار می شود. اگر القاگر نبود، هر یک از لامپ ها به طور آنی روشن می شدند و به هر یک جریانی می رسید (طبق تقسیم جریان در مقاومت های موازی). اما به علت وجود القاگر پس از وصل کلید و عبور جریان، یک جریان القایی مخالف ایجاد می شود و به تدریج با ثابت شدن جریان عبوری از آن، این جریان القایی به صفر می رسد؛ در نتیجه جریان عبوری از لامپ L_2 به تدریج افزایش می یابد. از طرفی با توجه به ثابت بودن جریان خروجی از باتری ($I = \frac{\mathcal{E}}{R_{eq} + r}$)، با زیاد شدن جریان عبوری از شاخه بالا (جریان لامپ L_2)، جریان عبوری از لامپ L_1 ، به تدریج کاهش می یابد؛ بنابراین **نور لامپ L_1 کاهش و نور لامپ L_2 افزایش می یابد.**

خودالقایی

القاگر، وسیله ای است که با عبور جریان، میدان مغناطیسی تولید می کند و می تواند درون خود انرژی مغناطیسی ذخیره کند، مانند سیم پیچ و سیموله.

نکته

مقاومت الکتریکی یک القاگر آرمانی، صفر است، بنابراین در القاگر آرمانی، انرژی تلف نمی شود.

خودالقایی: القای نیروی محرکه در اثر تغییر جریان الکتریکی عبوری از یک القاگر.

الگوی زیر به خوبی قانون لنز را در تعیین جریان خودالقایی نشان می دهد:

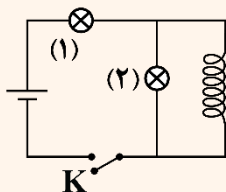
افزایش جریان گذرنده از القاگر ← جهت جریان خودالقایی، مخالف جهت جریان مدار

قانون لنز

کاهش جریان گذرنده از القاگر ← جهت جریان خودالقایی، هم جهت با جریان مدار

یه نمونه باحال

در شکل زیر، یک القاگر آرمانی در مدار قرار گرفته است. با بسته شدن کلید K نور لامپ‌های (۱) و (۲) به ترتیب از راست به چپ، چگونه تغییر می‌کنند؟



- (۱) به تدریج زیاد می‌شود - به تدریج زیاد می‌شود.
 (۲) به تدریج زیاد می‌شود - ابتدا روشن و سپس خاموش می‌شود.
 (۳) بلافاصله به بیشترین مقدار خود می‌رسد - به تدریج زیاد می‌شود.
 (۴) بلافاصله به بیشترین مقدار خود می‌رسد - ابتدا روشن و سپس خاموش می‌شود.

پاسخ تشریحی:

به علت وجود القاگر در مدار، به محض بسته شدن کلید و برقراری جریان، شار مغناطیسی عبوری از القاگر شروع به زیاد شدن می‌کند و همین امر باعث می‌شود که یک نیروی محرکه القایی در القاگر ایجاد شود که با افزایش جریان و در نتیجه شار مغناطیسی مخالفت کند، بنابراین:
 (۱) تا ثابت شدن جریان و از بین رفتن نیروی محرکه القایی، نور لامپ شماره (۱) به تدریج افزایش می‌یابد.
 (۲) لامپ شماره (۲) موازی القاگر آرمانی بسته شده است، پس ابتدا اختلاف پتانسیل دو سر آن برابر با اختلاف پتانسیل القاگر (نیروی محرکه خودالقاوری) شده و روشن می‌شود، پس از ثابت شدن جریان عبوری از القاگر و از بین رفتن نیروی محرکه خودالقاوری، لامپ شماره (۲) دچار اتصال کوتاه شده و خاموش می‌شود. (چون مقاومت القاگر آرمانی، صفر است).

پاسخ: گزینه ۲



۴۱- کدام یک از گزینه‌های زیر، نمی‌تواند مربوط به یکای ضریب القاوری یک القاگر باشد؟

- (۱) $\frac{J}{A^2}$ (۲) $\frac{kg.m^2}{A^2.s^2}$ (۳) $\frac{N.m}{A^2}$ (۴) $\frac{kg.m^2}{C}$

پاسخ: گزینه ۴

(آسان - مفهومی - سریع) - صفحه ۱۲۱ - ۱۱۰۴

به کمک رابطه انرژی ذخیره شده در القاگر ($U = \frac{1}{2} LI^2$) داریم:

$$[U] = [L][I]^2 \Rightarrow J = [L] A^2 \Rightarrow [L] = \frac{J}{A^2}$$

$$\xrightarrow{J=N.m} [L] = \frac{N.m}{A^2} \xrightarrow{N=\frac{kg.m}{s^2}} [L] = \frac{kg.m^2}{A^2.s^2} \xrightarrow{C=A.s} [L] = \frac{kg.m^2}{C^2}$$

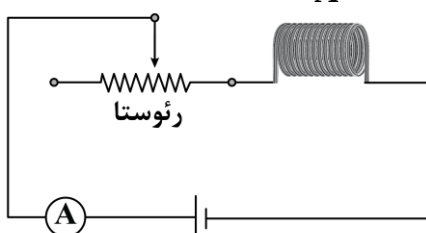


- ۱- ویژگی‌های فیزیکی هر القاگر، توسط ضریب القاوری آن تعیین می‌شود. ضریب القاوری که با نماد L نمایش داده می‌شود، به عواملی همچون **تعداد دور، طول، سطح مقطع القاگر و جنس هسته‌ای که داخل آن قرار می‌گیرد**، بستگی دارد.
 ۲- یکای ضریب القاوری، **هانری (H)** نام دارد.



۴۲- در مدار شکل زیر، سیملوله آرمانی دارای ۲۰۰ حلقه و طول آن ۱۲cm است. اگر ضریب القاوری سیملوله برابر با $8\pi \times 10^{-7} H/m$ و بزرگی

میدان مغناطیسی داخل آن برابر با $50 G$ باشد، انرژی ذخیره شده در سیملوله چند ژول است؟ ($\mu_0 = 12 \times 10^{-7} \frac{T.m}{A}$)



- (۱) ۲۵
 (۲) ۲/۵
 (۳) ۰/۲۵
 (۴) ۲۵۰

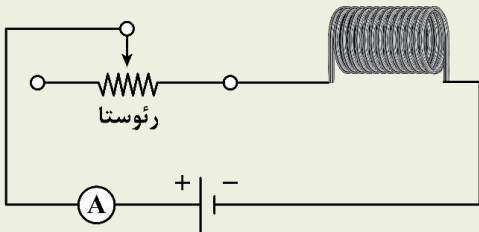
ابتدا به کمک رابطه بزرگی میدان مغناطیسی سیملوله ($B = \mu_0 \frac{NI}{\ell}$)، جریان الکتریکی عبوری از سیملوله را به دست می آوریم:

$$I = \frac{B\ell}{\mu_0 N} = \frac{50 \times 10^{-4} \times 12 \times 10^{-2}}{12 \times 10^{-7} \times 200} = 2/5 A$$

انرژی ذخیره شده در سیملوله برابر است با:

$$U = \frac{1}{2} LI^2 = \frac{1}{2} \times 0/08 \times (2/5)^2 = 0/04 \times 6/25 = 0/25 J$$

در شکل زیر، ضریب القاوری (خودالقای) سیملوله $0/05 H$ است و انرژی ذخیره شده در آن $0/4 J$ است. اگر سیملوله دارای ۱۰۰ حلقه و طولش



۸ cm باشد، میدان مغناطیسی داخل آن چند گاوس است؟ ($\mu_0 = 12 \times 10^{-7} \frac{T.m}{A}$)

(۱) ۶۰

(۲) ۹۰

(۳) ۱۲۰

(۴) ۱۸۰

پاسخ تشریحی:

ابتدا با داشتن انرژی ذخیره شده و ضریب القاوری، جریان گذرنده از سیملوله را به دست می آوریم:

$$U = \frac{1}{2} LI^2 \xrightarrow{U=0/4J, L=0/05H} 0/4 = \frac{1}{2} \times 0/05 \times I^2 \Rightarrow I^2 = 16 \Rightarrow I = 4 A$$

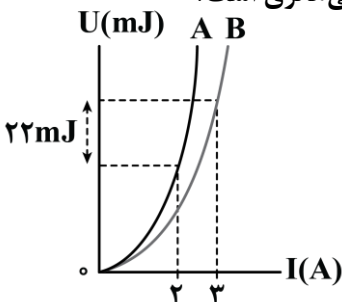
سپس بزرگی میدان مغناطیسی درون سیملوله را به دست می آوریم:

$$B = \frac{\mu_0 NI}{\ell} \xrightarrow{\mu_0=12 \times 10^{-7} \frac{T.m}{A}, N=100, I=4A, \ell=0/08m} B = \frac{12 \times 10^{-7} \times 100 \times 4}{0/08} = 6 \times 10^{-3} T = 60 G$$

پاسخ: گزینه ۱



۴۳- نمودار تغییر انرژی ذخیره شده بر حسب جریان برای دو القاگر A و B مطابق شکل زیر است. اگر ضریب القاوری سیملوله B، ۲۵ درصد کمتر از ضریب القاوری سیملوله A باشد، مجموع ضرایب القاوری دو القاگر A و B چند میلی هانری است؟



(۱) ۱۸

(۲) ۲۸

(۳) ۲۰

(۴) ۳۲

به کمک اطلاعات روی نمودار و با توجه به رابطه انرژی ذخیره شده در یک القاگر ($U = \frac{1}{2} LI^2$) داریم:

$$U_B - U_A = 22 \times 10^{-3} \Rightarrow \frac{1}{2} L_B I_B^2 - \frac{1}{2} L_A I_A^2 = 22 \times 10^{-3} \xrightarrow{I_A = 2A, I_B = 3A} \frac{1}{2} L_B (3)^2 - \frac{1}{2} L_A (2)^2 = 22 \times 10^{-3}$$

$$\Rightarrow \frac{9}{2} L_B - 2 L_A = 22 \times 10^{-3} \xrightarrow{L_B = (1 - \frac{25}{100}) L_A = \frac{3}{4} L_A} \frac{9}{2} \times \frac{3}{4} L_A - 2 L_A = 22 \times 10^{-3}$$

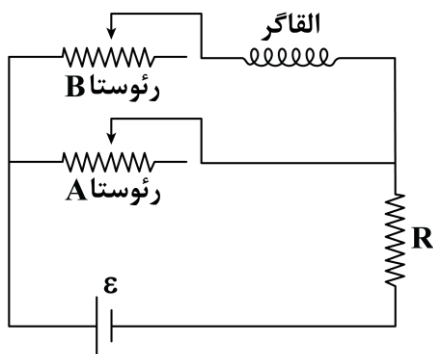
$$\Rightarrow \frac{11}{8} L_A = 22 \times 10^{-3} \Rightarrow L_A = 16 \times 10^{-3} \text{ H} = 16 \text{ mH} \xrightarrow{L_B = \frac{3}{4} L_A} L_B = 12 \text{ mH}$$

بنابراین مجموع ضرایب القاوری دو القاگر A و B برابر است با:

$$L_A + L_B = 16 + 12 = 28 \text{ mH}$$



۴۴- در مدار شکل زیر، با حرکت لغزنده رئوسنای A به سمت راست، القاگر آرمانی (به ترتیب از راست به چپ) راست، القاگر آرمانی و با حرکت لغزنده رئوسنای B به سمت



- (۱) از مدار انرژی می گیرد - به مدار انرژی می دهد
- (۲) به مدار انرژی می دهد - از مدار انرژی می گیرد
- (۳) از مدار انرژی می گیرد - از مدار انرژی می گیرد
- (۴) به مدار انرژی می دهد - به مدار انرژی می دهد

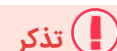
با حرکت لغزنده رئوسنای A به سمت راست، مقاومت الکتریکی شاخه پایین، افزایش و به دنبال آن ولتاژ هر دو شاخه افزایش می یابد، در نتیجه جریان شاخه بالا افزایش یافته و با افزایش جریان عبوری از القاگر، القاگر از مدار انرژی می گیرد.



تذکر

در این حالت، القاگر آرمانی مانند مصرف کننده (R) رفتار می کند.

با حرکت لغزنده رئوسنای B به سمت راست، مقاومت الکتریکی شاخه بالا افزایش می یابد، بنابراین جریان عبوری از همان شاخه که القاگر در آن قرار دارد، کاهش می یابد؛ در نتیجه انرژی ذخیره شده در القاگر کاهش یافته و القاگر به مدار انرژی می دهد.



تذکر

در این حالت، القاگر آرمانی رفتاری مانند باتری آرمانی (ε) از خود نشان می دهد.

مقایسه رفتارهای القاگر و مقاومت الکتریکی

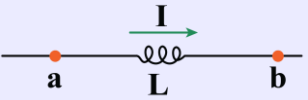
لازم است رفتار مقاومت و القاگر را به لحاظ انرژی اشتباه نگیرید. هنگام عبور جریان از مقاومت، انرژی وارد آن می شود، جریان چه پایا باشد و چه تغییر کند، این انرژی در مقاومت به انرژی گرمایی تبدیل می شود؛ در حالی که در یک القاگر آرمانی (با مقاومت صفر) تنها وقتی انرژی وارد القاگر می شود که جریان در آن افزایش یابد. این انرژی تلف نمی شود؛ بلکه در میدان مغناطیسی القاگر ذخیره شده و هنگام کاهش جریان، آزاد می شود. هنگام عبور جریان پایا از یک القاگر آرمانی (سیم پیچ بدون مقاومت)، انرژی به آن وارد یا از آن خارج نمی شود.



مقاومت با جریان I: انرژی تلف شده است.



مقاومت، قطعه‌ای است که در آن انرژی به‌طور غیرقابل برگشت تلف می‌شود



القاگر با جریان I: انرژی ذخیره شده است.



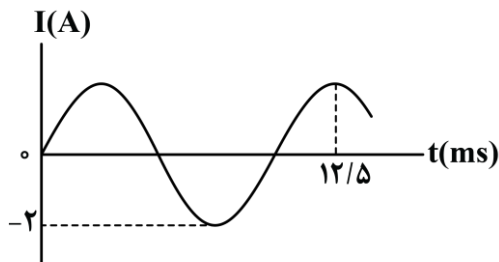
انرژی ذخیره‌شده در القاگر حامل جریان را می‌توان هنگام کاهش جریان، بازیافت.



شاید ظاهر این سؤال و چیزی که ازت می‌پرسد عجیب و غریب باشد ولی در مجموع یک سؤال آموزشی و می‌خواهد ببیند می‌دونی کی القاگر انرژی ذخیره می‌کند و کی انرژی آزاد می‌کند و فرقی با مقاومت چیه!



۴۵- شکل زیر، نمودار جریان متناوب سینوسی را نشان می‌دهد که یک مولد جریان متناوب تولید کرده است. در لحظه $t = \frac{15}{6} \text{ ms}$



جریان الکتریکی چند آمپر است؟

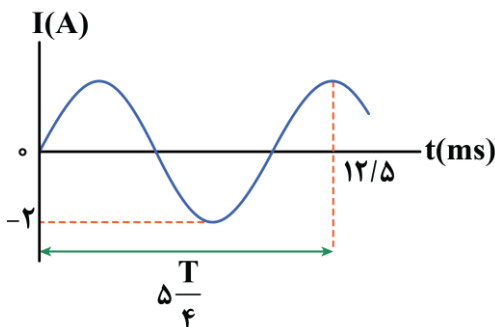
- (۱) $\sqrt{3}$
- (۲) ۱
- (۳) $-\sqrt{3}$
- (۴) -۱

(آسان - استدلالی - استاندارد ۱ - صفحه ۱۲۴ - ۱۱۰۴)

پاسخ: گزینه ۲

کلم اول

ابتدا از اطلاعات روی نمودار کمک می‌گیریم تا معادله جریان متناوب سینوسی را بر حسب زمان به‌دست آوریم:



$$\begin{cases} I_m = 2 \text{ A} \\ \frac{5T}{4} = 12/5 \Rightarrow T = 10 \text{ ms} = 10^{-2} \text{ s} \end{cases}$$

$$\Rightarrow I = I_m \sin\left(\frac{2\pi}{T}t\right) = 2 \sin(200\pi t)$$

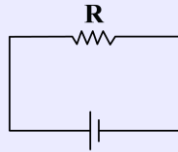
کلم آخر

حالا کافیست لحظه $t = \frac{15}{6} \text{ ms} = \frac{15}{6} \times 10^{-3} \text{ s}$ را در معادله به‌دست آمده جایگذاری کنیم:

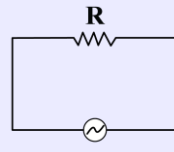
$$I = 2 \sin\left(200\pi \times \frac{15}{6} \times 10^{-3}\right) = 2 \sin\left(\frac{17\pi}{6}\right) \xrightarrow{\frac{17\pi}{6} = \frac{18\pi - \pi}{6} = 3\pi - \frac{\pi}{6}} I = 2 \sin\left(3\pi - \frac{\pi}{6}\right) = 2 \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = 2 \times \frac{1}{2} = 1 \text{ A}$$

جریان متناوب

نوعی جریان القایی است که اندازه و جهت آن با گذشت زمان تغییر می‌کند و تکرار می‌شود. جریان متناوب سینوسی، متداول‌ترین نوع جریان متناوب است.



جریان مستقیم



جریان متناوب

با چرخش پیچه در میدان مغناطیسی، شار مغناطیسی تغییر می‌کند و در نتیجه جریان متناوب ایجاد می‌شود.

نکته

رایج‌ترین روش برای تغییر شار و در نتیجه تولید جریان القایی، تغییر زاویه θ در رابطه شار مغناطیسی است.

دوره تناوب (T):

مدت زمانی که طول می‌کشد که پیچه به طور یکنواخت یک دور کامل بچرخد را دوره تناوب گویند و واحد آن در SI برابر با ثانیه (s) است.

نکته

اگر دوره تناوب یک پیچه برابر با T باشد، پیچه در مدت زمان t به تعداد n دور خواهد چرخید.

$$n = \frac{t}{T}$$

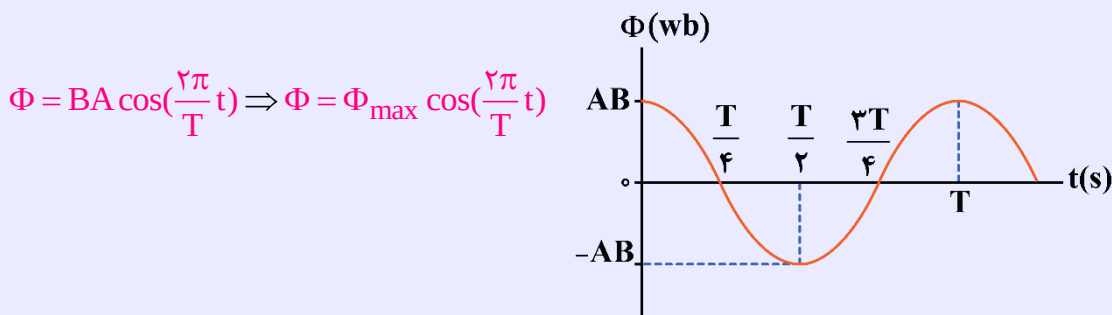
بسامد (f):

به تعداد چرخش پیچه در واحد زمان، بسامد گفته می‌شود و یکای آن در SI برابر با هرتز (Hz) یا یک بر روی ثانیه (s^{-1}) است.

$$\begin{cases} n = \frac{t}{T} \\ f = \frac{n}{t} \end{cases} \Rightarrow f = \frac{1}{T}$$

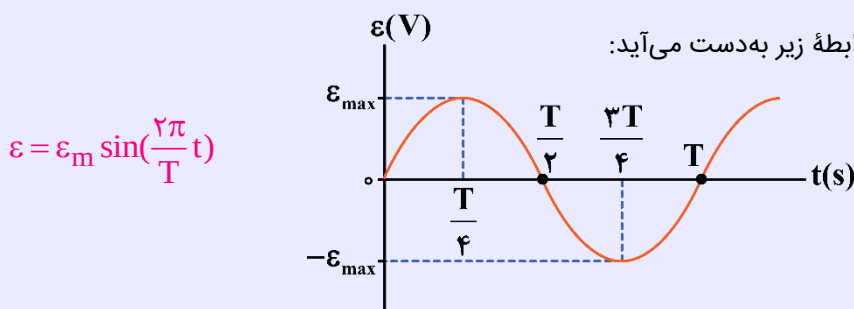
معادله شار متناوب

اگر پیچه‌ای با سطح مقطع A که عمود بر خطوط میدان مغناطیسی $\vec{B}$ قرار دارد، با دوره تناوب T در میدان مغناطیسی بچرخد، شار مغناطیسی که در لحظه t در پیچه القا می‌شود از رابطه زیر به دست می‌آید:



معادله نیروی محرکه متناوب

نیروی محرکه‌ای که در لحظه t در پیچه القا می‌شود، از رابطه زیر به دست می‌آید:



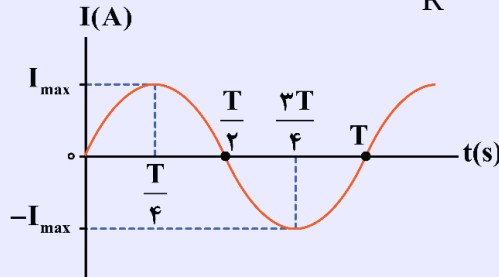


در رابطه بالا ε_m ، بیشینه مقدار نیروی محرکه القایی در پیچه است.

معادله جریان متناوب

اگر مقاومت الکتریکی کل مدار پیچه برابر R باشد، با توجه به رابطه $I = \frac{\varepsilon}{R}$ ، جریانی که در پیچه در لحظه t القا می‌شود از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$I = I_m \sin\left(\frac{2\pi}{T} t\right)$$



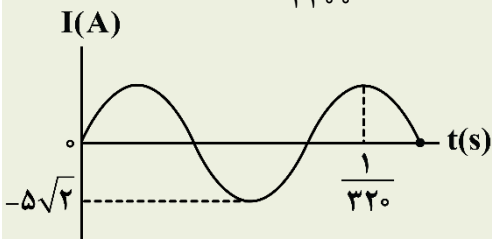
که در این رابطه I_m بیشینه جریان القاشده در پیچه و برابر با $\frac{\varepsilon_m}{R}$ است.



در هر بار چرخش پیچه، شار مغناطیسی، جریان و نیروی محرکه القایی، دو مرتبه بیشینه و دو مرتبه صفر می‌شوند.

آزمون سراسری ریاضی ۱۳۹۹

نمودار تغییرات یک جریان متناوب سینوسی بر حسب زمان به صورت شکل زیر است. اندازه جریان در لحظه $\frac{1}{320}$ ثانیه چند آمپر است؟



(۱) ۲/۵

(۲) $2 / 5\sqrt{2}$

(۳) ۵

(۴) $5\sqrt{2}$

پاسخ تشریحی:

با توجه به نمودار در می‌یابیم که زمان داده شده روی نمودار برابر با $\frac{\Delta T}{4}$ است، پس T برابر است با:

$$\frac{\Delta T}{4} = \frac{1}{320} \Rightarrow T = \frac{1}{400} \text{ s}$$

حال با داشتن T ، معادله جریان متناوب را می‌نویسیم:

$$I = I_m \sin\left(\frac{2\pi t}{T}\right) \xrightarrow{\substack{I_m = 5\sqrt{2} \text{ A} \\ T = \frac{1}{400} \text{ s}}} I = 5\sqrt{2} \sin\left(\frac{2\pi}{\frac{1}{400}} t\right) \Rightarrow I = 5\sqrt{2} \sin(800\pi t)$$

اکنون با داشتن معادله جریان متناوب، جریان را در لحظه $t = \frac{1}{320} \text{ s}$ به دست می‌آوریم:

$$I = 5\sqrt{2} \sin(800\pi t) \xrightarrow{t = \frac{1}{320} \text{ s}} I = 5\sqrt{2} \sin\left(800\pi \times \frac{1}{320}\right) \Rightarrow I = 5\sqrt{2} \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = 5\sqrt{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = 5 \text{ A}$$

پاسخ: گزینه ۳

بچه‌ها استفاده از نمودار سینوسی جریان و پیدا کردن دوره تناوب و در نتیجه معادله جریان - زمان همواره مورد توجه طراحان هست. کافیه یکم روی مثلثات ماجرا مرور کافی داشته باشین تا در حل این تیپ تست‌ها هیچ مشکلی براتون پیش نیاد. راستی این تیپ تست‌ها برای امتحان نهایی هم به شدت مناسب هستند.



۴۶- معادله جریان عبوری از یک سیم‌لوله آرمانی در SI به صورت $I = 4 \sin(300\pi t)$ می‌باشد. اگر بیشینه انرژی ذخیره شده در این سیم‌لوله برابر با 24 mJ باشد، ضریب القاوری این سیم‌لوله چند هانری است؟

(۱) 0.003 H (۲) 3 H (۳) 12 H (۴) 0.012 H

(آسان - محاسباتی - سریع ۵ - صفحه ۱۲۴ - ۱۱۰۴)

پاسخ: گزینه ۱

با توجه به معادله جریان متناوب داده شده، بیشینه جریان عبوری از سیم‌لوله برابر با 4 A است، بنابراین با استفاده از رابطه انرژی ذخیره شده در القاگر، بیشینه انرژی ذخیره شده در القاگر برابر است با:

$$U = \frac{1}{2} LI^2 \Rightarrow 24 \times 10^{-3} = \frac{1}{2} \times L \times 4^2 \Rightarrow L = 0.003 \text{ H}$$



۴۷- در شکل زیر که مربوط به انتقال توان الکتریکی از نیروگاه به منازل مسکونی است، نوع مبدل‌های A و B به ترتیب از راست به چپ در کدام گزینه به درستی آمده‌اند؟

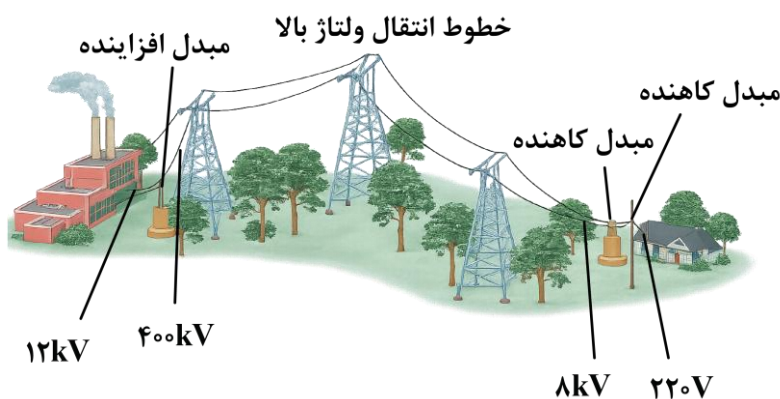


- (۱) کاهنده - کاهنده
- (۲) کاهنده - افزایشنده
- (۳) افزایشنده - کاهنده
- (۴) افزایشنده - افزایشنده

(آسان - خطبه‌خط - سریع ۵ - صفحه ۱۲۶ - ۱۱۰۴)

پاسخ: گزینه ۱

قبل از انتقال توان الکتریکی از نیروگاه‌ها، مبدل‌های افزایشنده، ولتاژ را تا حدود 400 kV افزایش می‌دهند. در انتهای مسیر، مبدل‌های کاهنده، ولتاژ را کاهش می‌دهند تا توان الکتریکی با امنیت بیشتر به محل مصرف برسد.



مبدل‌ها

مبدل‌ها دستگاه‌هایی هستند که ولتاژ متناوب را کاهش یا افزایش می‌دهند.

نکته

برای انتقال توان الکتریکی در فاصله‌های دور باید از ولتاژهای بالا و جریان‌های کم استفاده کنیم. این کار اتلاف توان در خط‌های انتقال را کاهش می‌دهد و در مصرف سیم‌های انتقال صرفه‌جویی می‌شود. تبدیل ولتاژ مورد نیاز با استفاده از مبدل‌ها صورت می‌گیرد.



۴۸- در یک مولد جریان متناوب، در لحظه‌ای که شار مغناطیسی عبوری از پیچه، $\frac{\sqrt{5}}{3}$ برابر حداکثر شار مغناطیسی عبوری از آن است،

اندازه جریان القایی در پیچه، چند برابر بیشینه مقدار آن است؟

- (۱) $\frac{2}{5}$ (۲) $\frac{1}{5}$ (۳) $\frac{1}{3}$ (۴) $\frac{2}{3}$

(سخت - محاسباتی - استاندارد ۱ - صفحه ۱۲۴ - ۱۱۰۴)

پاسخ: گزینه ۴

می‌دانیم که $\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$ است، بنابراین داریم:

$$\begin{cases} I = I_m \sin\left(\frac{2\pi}{T} t\right) \Rightarrow \sin\left(\frac{2\pi}{T} t\right) = \frac{I}{I_m} \Rightarrow \sin^2\left(\frac{2\pi}{T} t\right) = \left(\frac{I}{I_m}\right)^2 \\ \Phi = \Phi_m \cos\left(\frac{2\pi}{T} t\right) \Rightarrow \cos\left(\frac{2\pi}{T} t\right) = \frac{\Phi}{\Phi_m} \Rightarrow \cos^2\left(\frac{2\pi}{T} t\right) = \left(\frac{\Phi}{\Phi_m}\right)^2 \end{cases}$$

$$\sin^2\left(\frac{2\pi}{T} t\right) + \cos^2\left(\frac{2\pi}{T} t\right) = 1 \Rightarrow \left(\frac{\Phi}{\Phi_m}\right)^2 + \left(\frac{I}{I_m}\right)^2 = 1 \xrightarrow{\frac{\Phi}{\Phi_m} = \frac{\sqrt{5}}{3}} \frac{5}{9} + \left(\frac{I}{I_m}\right)^2 = 1 \Rightarrow \left(\frac{I}{I_m}\right)^2 = 1 - \frac{5}{9} = \frac{4}{9} \Rightarrow \left|\frac{I}{I_m}\right| = \frac{2}{3}$$

یه نمونه باحال

معادله جریان متناوب عبوری از یک مقاومت اهمی به صورت $I = 4 \sin\left(\frac{2\pi}{T} t\right)$ است. در لحظه‌ای که اندازه جریان عبوری از مقاومت برابر ۲A باشد، شار گذرنده از مدار چه کسری از شار بیشینه است؟

- (۱) $\frac{1}{2}$ (۲) $\frac{1}{3}$ (۳) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ (۴) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

پاسخ تشریحی: طبق معادله جریان متناوب داریم:

$$I = 4 \sin\left(\frac{2\pi t}{T}\right) \xrightarrow{I=2A} 2 = 4 \times \sin\left(\frac{2\pi t}{T}\right) \Rightarrow \sin\left(\frac{2\pi t}{T}\right) = \frac{1}{2}$$

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \Rightarrow \cos^2 \alpha = 1 - \sin^2 \alpha \Rightarrow \cos^2\left(\frac{2\pi t}{T}\right) = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$

$$\Rightarrow \left|\cos\left(\frac{2\pi t}{T}\right)\right| = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

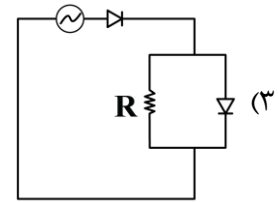
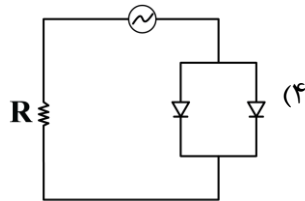
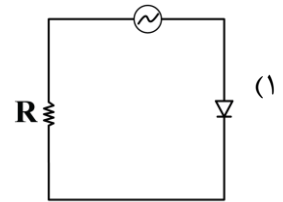
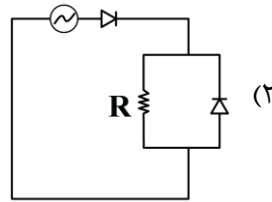
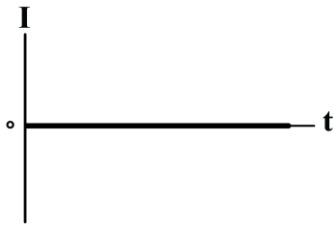
حال به کمک رابطه شار مغناطیسی در جریان متناوب داریم:

$$\Phi = \Phi_m \cos\left(\frac{2\pi t}{T}\right) \Rightarrow \left|\frac{\Phi}{\Phi_m}\right| = \cos\left(\frac{2\pi t}{T}\right) \xrightarrow{\cos\frac{2\pi t}{T} = \frac{\sqrt{3}}{2}} \left|\frac{\Phi}{\Phi_m}\right| = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

پاسخ: گزینه ۴



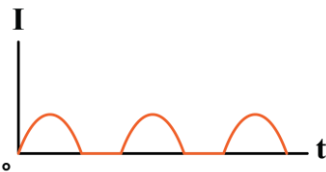
۴۹- نمودار جریان الکتریکی عبوری از مقاومت R بر حسب زمان، مطابق شکل زیر است. کدام یک از مدارهای زیر می تواند مربوط به این نمودار باشد؟



(متوسط - مفهومی - استاندارد) - صفحه ۱۲۶ - ۱۱۰۴

پاسخ: گزینه ۳

می دانیم دیود قطعه ای است که اگر جریان در سوی موافق آن عبور کند، مقاومت آن ناچیز و اگر جریان از سوی مخالف آن عبور کند، مقاومت آن بسیار زیاد است و اجازه عبور جریان را نمی دهد. از طرفی با توجه به مولد جریان متناوب، انتظار داریم که نمودار جریان بر حسب زمان برای گزینه های (۱) و (۲) و (۴) به شکل زیر باشد:



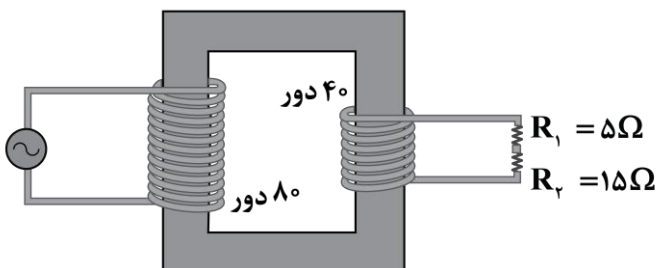
تذکر

در مورد گزینه (۲) با توجه به این که وقتی دیود متوالی با مولد جریان متناوب، جریان را از خودش عبور می دهد، دیود موازی با مقاومت R جریان را عبور نمی دهد، در می یابیم نمودار $I - t$ مقاومت R در آن مانند گزینه های (۱) و (۴) است.

اما در مدار **گزینه (۳)** وقتی که دیود متوالی، با مولد اجازه عبور جریان می دهد، دیود موازی با مقاومت R نیز اجازه عبور جریان می دهد و مقاومتش ناچیز است؛ بنابراین در این حالت مقاومت R اتصال کوتاه شده و از آن جریانی عبور نمی کند؛ پس در هر حالتی جریان عبوری از مقاومت R در این مدار صفر می شود.



۵۰- در شکل زیر، یک مبدل آرمانی به یک منبع جریان متناوب متصل است. اگر معادله نیروی محرکه القایی بر حسب زمان در SI به صورت $\varepsilon = 120 \sin(40\pi t)$ باشد، بیشینه ولتاژ دو سر مقاومت R_1 چند ولت است؟



- (۱) ۱۵
- (۲) ۴۵
- (۳) ۳۰
- (۴) ۶۰

گام اول

با توجه به معادله نیروی محرکه القایی متناوب درمی یابیم که بیشینه ولتاژ ورودی، $120V$ است؛ بنابراین بیشینه ولتاژ خروجی برابر است با:

$$\frac{V_2}{V_1} = \frac{N_2}{N_1} \Rightarrow \frac{V_2}{120} = \frac{40}{80} \Rightarrow V_2 = 60V$$

گام دوم

با توجه به این که مقاومت های R_1 و R_2 متوالی هستند، درمی یابیم که جریان عبوری بیشینه از مقاومت R_1 هم، همان جریان عبوری بیشینه از مقاومت معادل مقاومت های R_1 و R_2 ، یعنی $R_{1,2}$ است و داریم:

$$I_1 = I_2 = I_{1,2} = \frac{V_2}{R_1 + R_2} \Rightarrow I_1 = \frac{60}{5 + 15} = 3A$$

گام آخر

بیشینه ولتاژ دو سر مقاومت R_1 را به دست می آوریم:

$$V_{R_1} = R_1 I_1 = 5 \times 3 = 15V$$





برای دیدن پاسخنامه ویدئویی آزمون
QRcode بالا را اسکن کنید!
یا بر روی لینک زیر کلیک کنید!
پاسخنامه ویدئویی آزمون

پوشاک، نیازی پایان ناپذیر
صفحه‌های ۹۹ تا ۱۲۳

بودجه بندی
این آزمون

مباحث این آزمون در مجموع ۳ تست از ۳۰ تست کنکور را پوشش داده است.

سهم در
کنکور

۵۱- کدام مورد نادرست است؟

- (۱) در الکل سیرشده راست‌زنجیر که نسبت شمار اتم‌های هیدروژن به کربن در آن برابر $2/4$ است، بخش قطبی بر بخش ناقطبی غلبه دارد.
- (۲) شمار اتم‌های هیدروژن در ساده‌ترین کربوکسیلیک اسید دوعاملی و ساده‌ترین کربوکسیلیک اسید یک‌عاملی برابر است.
- (۳) در سنگین‌ترین الکل راست‌زنجیر سیرشده که در آب محلول است، نیروی بین مولکولی غالب، وان‌دروالسی است.
- (۴) با افزایش نقطه جوش در الکل‌های راست‌زنجیر، ویژگی چربی‌دوستی آن‌ها افزایش می‌یابد.

(متوسط - مفهومی - استاندارد) - صفحه ۱۱۴ - ۱۱۰۳

پاسخ: گزینه ۳

سنگین‌ترین الکل سیرشده راست‌زنجیر محلول در آب، ۱-پنتانول است. در الکل‌های محلول در آب، نیروی بین مولکولی غالب میان مولکول‌های الکل از نوع پیوند هیدروژنی است.

بررسی سایر گزینه‌ها:

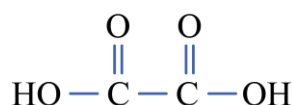
① شمار اتم‌های کربن در یک الکل با فرمول مولکولی $C_nH_{2n+1}OH$ که نسبت شمار اتم‌های هیدروژن به کربن در آن برابر $2/4$ است، برابر است با:

$$\frac{2n+2}{n} = 2/4 \Rightarrow 2/4n = 2n+2 \Rightarrow 0/4n = 2 \Rightarrow n = 5$$

در نتیجه الکل مورد نظر دارای ۵ اتم کربن است.

الکل‌های دارای ۱ تا ۵ اتم کربن قطبی بوده و در آب محلول هستند. در نتیجه الکل مورد نظر نیز قطبی بوده و بخش قطبی بر بخش ناقطبی غالب است.

② فرمول ساختاری ساده‌ترین کربوکسیلیک اسید دوعاملی به صورت زیر است:

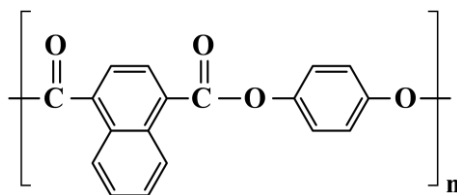


با توجه به ساختار این اسید، فرمول مولکولی آن به صورت $C_2H_4O_4$ است. فورمیک اسید (متانوئیک اسید) با فرمول مولکولی CH_2O_2 ساده‌ترین کربوکسیلیک اسید یک‌عاملی می‌باشد. در نتیجه شمار اتم‌های هیدروژن این دو اسید با یکدیگر برابر است.

④ با افزایش شمار اتم‌های کربن و در نتیجه افزایش جرم مولی در الکل‌ها، نقطه جوش آن‌ها افزایش می‌یابد و از آن‌جا که با افزایش طول زنجیر کربنی در الکل‌ها قطبیت مولکول کاهش می‌یابد؛ با افزایش نقطه جوش در الکل‌ها ویژگی چربی‌دوستی آن‌ها افزایش می‌یابد.



۵۲- در یک مولکول مونومر اسیدی ترکیب زیر، چند اتم هیدروژن وجود دارد؟



۴ (۴)

۶ (۳)

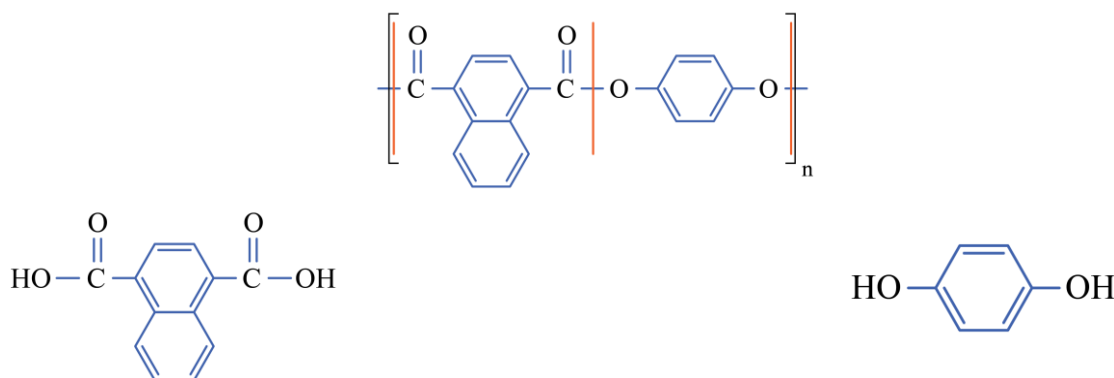
۸ (۲)

۱۰ (۱)

(آسان - مفهومی - سریع) - صفحه ۱۱۹ - ۱۱۰۳

پاسخ: گزینه ۲

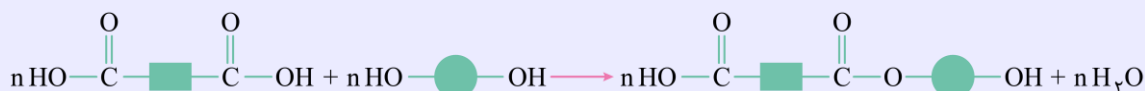
برای مشخص کردن ساختار دی‌اسید و دی‌الکل سازنده این پلیمر، ابتدا پیوندهای استری (پیوند بین اتم کربن گروه استری و اتم اکسیژن) موجود در پلیمر را می‌شکنیم. دو بخش جدا ایجاد می‌شود. به بخشی که به اتم اکسیژن ختم می‌شود، هیدروژن اضافه می‌کنیم و همچنین به بخشی که به اتم کربن ختم می‌شود، OH اضافه می‌کنیم.



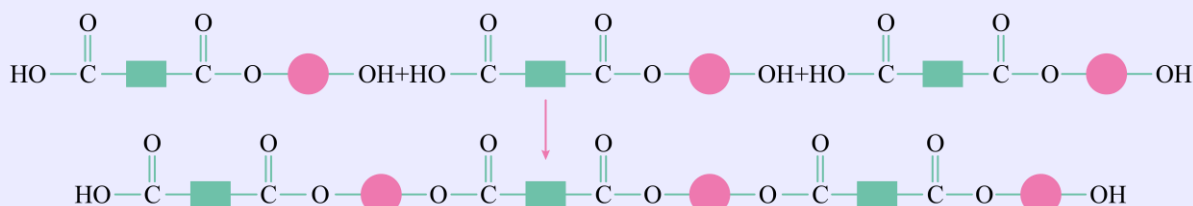
در ساختار دی‌اسید سازنده، ۸ اتم هیدروژن وجود دارد.

تولید پلی‌استر

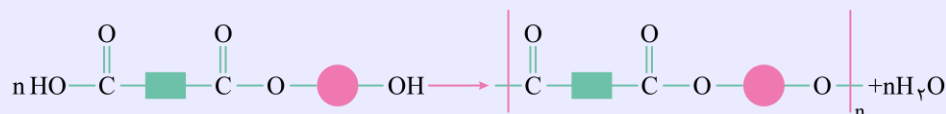
از واکنش یک کربوکسیلیک اسید دو عاملی با یک الکل دو عاملی، یک پلی‌استر تولید می‌شود. در مرحله نخست این واکنش، یکی از گروه‌های هیدروکسیل موجود در الکل و یکی از گروه‌های کربوکسیل موجود در اسید آلی، مطابق معادله زیر با یکدیگر واکنش داده و مولکولی آلی حاوی یک گروه استری، یک گروه هیدروکسیل و یک گروه کربوکسیل تولید می‌کنند. در این واکنش به‌ازای هر مولکول الکل، اسید یا استر، یک مولکول آب نیز تولید می‌گردد.



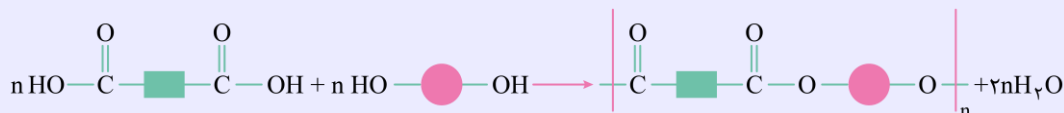
در ادامه، با توجه به وجود گروه هیدروکسیل و کربوکسیل در ساختار فراورده، این دو گروه عاملی در مولکول‌های مجاور با یکدیگر مطابق معادله زیر واکنش استری شدن می‌دهند:



با ادامه یافتن این فرایند، پلیمری به‌وجود می‌آید که به علت وجود گروه عاملی استری در ساختار آن، پلی‌استر نام‌گذاری شده است. واکنش میان استرهای تولیدشده در مرحله اول به‌صورت زیر خلاصه می‌گردد:



پس واکنش کلی تولید پلی‌استر از الکل دو عاملی و کربوکسیل دو عاملی به‌صورت زیر است:



در این واکنش به‌ازای مصرف هر مول اسید دو عاملی یا الکل دو عاملی، دو مول آب تولید می‌شود.

۵۳- در یک واکنش آب کافت، $\frac{30}{6}$ گرم از یک نمونه استر با $\frac{5}{4}$ گرم آب به طور کامل واکنش می دهد، اگر جرم مولی الکل تولید شده با جرم مولی کربوکسیلیک اسید تولید شده برابر باشد، این استر کدام یک از گزینه های زیر است؟ (بخش هیدروکربنی استر را زنجیره سیر شده در نظر بگیرید. $H = 1, C = 12, O = 16: g.mol^{-1}$)

(۱) اتیل متانوات (۲) اتیل اتانوات (۳) پروپیل اتانوات (۴) بوتیل متانوات

(متوسط - محاسباتی - استاندارد) - صفحه ۱۱۹ - ۱۱۰۳

پاسخ: گزینه ۳

واکنش آب کافت استر به صورت زیر است:

الکل + کربوکسیلیک اسید $\rightarrow$ آب + استر

در ابتدا، از آن جا که جرم مولی الکل تولید شده با جرم مولی کربوکسیلیک اسید تولید شده برابر است، فرض می کنیم فرمول مولکولی الکل به صورت $C_nH_{2n+1}OH$ و فرمول مولکولی کربوکسیلیک اسید به صورت $C_{n'}H_{2n'+1}O_2$ است. بنابراین داریم:

$$M_{\text{الکل}} = M_{\text{کربوکسیلیک اسید}} \Rightarrow 12n + 2n + 1 + 17 = 12n' + 2n' + 32 \Rightarrow 14n = 14n' + 14 \Rightarrow n = n' + 1$$

در نتیجه شمار اتم های کربن الکل، یک واحد از شمار اتم های کربن کربوکسیلیک اسید بیشتر است. حال با توجه به اینکه $\frac{5}{4}$ گرم آب که معادل $\frac{0}{3}$ مول آب است، در این واکنش مصرف شده و ضریب استوکیومتری تمام مواد موجود در واکنش برابر است، می توان فهمید که $\frac{0}{3}$ مول اسید و $\frac{0}{3}$ مول الکل در این واکنش تولید شده است. حال از آن جا که جرم مولی الکل با اسید برابر بوده و مقدار (مول) برابری از آن ها نیز در این واکنش تولید شده است، جرم الکل تولید شده با جرم اسید تولید شده برابر خواهد بود. طبق قانون پایستگی جرم، جرم مواد واکنش دهنده با جرم مواد فراورده برابر است. از آن جا که مجموع جرم واکنش دهنده ها (استر به جرم $\frac{30}{6}g$ و آب به جرم $\frac{5}{4}g$) برابر با 36 گرم است و جرم فراورده های تولید شده با یکدیگر برابر است، جرم هر یک از فراورده ها برابر با 18 گرم خواهد بود. حال با توجه به اینکه جرم $\frac{0}{3}$ مول از الکل مورد نظر ($C_nH_{2n+1}OH$) برابر 18 گرم است، داریم:

$$\text{جرم مولی} \times \text{شمار مول} = \text{جرم} \Rightarrow 18 = \frac{0}{3} \times (14n + 18) \Rightarrow 14n + 18 = 60 \Rightarrow 14n = 42 \Rightarrow n = 3$$

در نتیجه الکل مورد نظر پروپانول بوده که دارای ۳ اتم کربن است و از آن جا که شمار اتم های کربن کربوکسیلیک اسید، یک واحد از این شمار در الکل کمتر است، کربوکسیلیک اسید مورد نظر اتانویک اسید بوده که شمار اتم های کربن آن برابر با ۲ اتم کربن است. پس نام استر مورد نظر پروپیل اتانوات است.



۵۴- کدام گزینه در مورد کولار درست است؟

- (۱) نوعی پلی آمید بوده و جزو مواد زیست تخریب ناپذیر است.
- (۲) این ماده در مقایسه با فولاد هم حجم خود پنج برابر مقاوم تر است.
- (۳) در ساختار یکی از مونومرهای سازنده آن، اتم های C, H, O و N وجود دارد.
- (۴) پوشاک دوخته شده از آن بسیار محکم و سنگین بوده و در برابر ضربه، خراش و بریدگی مقاوم است.

(متوسط - خط به خط - استاندارد) - صفحه ۱۲۰ - ۱۱۰۳

پاسخ: گزینه ۱

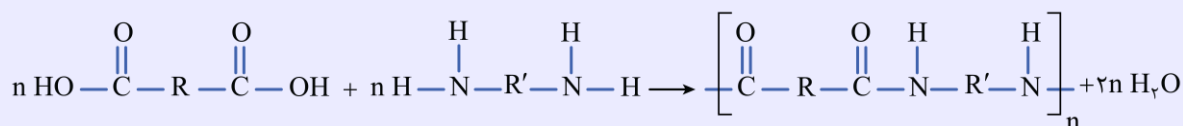
کولار یکی از پلی آمیدهای ساختمانی است و پلیمرهای ساختمانی پلیمرهای زیست تخریب ناپذیر هستند. بر این اساس، کولار یک پلی آمید زیست تخریب ناپذیر است.

بررسی سایر گزینه ها:

- (۲) کولار از فولاد هم جرم (نه حجم) خود پنج برابر مقاوم تر است.
- (۳) مونومرهای سازنده این پلی آمید، یک دی آمین و یک دی اسید است. دی آمین در ساختار خود دارای اتم های C, H و N بوده و دی اسید در ساختار خود دارای اتم های C, H و O است. در نتیجه هیچ کدام از مونومرهای سازنده کولار در ساختار خود، هم اتم نیتروژن و هم اتم اکسیژن ندارند و تنها دارای یکی از این اتم ها هستند.
- (۴) پوشاک دوخته شده از کولار بسیار محکم و سبک (نه سنگین) بوده و در برابر ضربه، خراش و بریدگی مقاوم است.

پلی آمیدها

پلی آمیدها، همانند پلی استرها جزء پلیمرهای تراکمی بوده و برخلاف **پلیمرهای افزایشی**، جرم مولی آنها از مجموع جرم مولی مونومرهای سازنده آنها کمتر است. علت این مسئله این است که به همراه تولید این پلیمرها، آب نیز تولید می شود. برای ساخت پلی آمیدها از واکنش دی اسید با دی آمین بهره می برند. در واقع **دی اسید** و **دی آمین**، مونومرهای سازنده **پلی آمید** به حساب می آیند. واکنش کلی تولید پلی آمید به صورت زیر است:



قسمتی از یک پلی آمید که بین اتمهای نیتروژن از گروه عاملی آمیدی قرار می گیرد، گروه **هیدروکربنی** موجود در ساختار **دی آمین** سازنده پلی آمید را تشکیل می دهد و قسمتی از مولکول پلی آمید که بین اتمهای کربن گروه عاملی آمیدی قرار می گیرد نیز گروه **هیدروکربنی** از مولکول دی اسید سازنده مولکول پلی آمید را تشکیل می دهد.



۵۵- اگر کربوکسیلیک اسید موجود در زهر مورچه و سرکه را به ترتیب اسید مورچه و اسید سرکه بنامیم، درصد جرمی اکسیژن در کمتر و انحلال پذیری در چربی بیشتر است.

- | | |
|----------------------------|-----------------------------|
| (۱) اسید مورچه - اسید سرکه | (۲) اسید سرکه - اسید مورچه |
| (۳) اسید سرکه - اسید سرکه | (۴) اسید مورچه - اسید مورچه |

پاسخ: گزینه ۳

(آسان - مفهومی - سریع ۵ - صفحه ۱۱۱ - ۱۱۰۳)

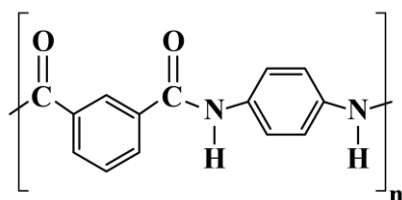
اسید آلی موجود در زهر مورچه **متانوئیک اسید** یا همان **فورمیک اسید** بوده و همچنین اسید آلی موجود در سرکه نیز **اتانوئیک اسید** یا همان **استیک اسید** است. فرمول شیمیایی فورمیک اسید و استیک اسید به ترتیب HCOOH و CH_3COOH می باشد. در ساختار هر دو ماده، دو اتم اکسیژن وجود دارد؛ پس جرم اکسیژن در یک مول از این دو ماده برابر است. اما چون جرم مولی استیک اسید بیشتر از فورمیک اسید بوده، درصد جرمی اکسیژن در استیک اسید کمتر است.

انحلال پذیری یک ماده آلی در آب و چربی، به مقایسه بخش قطبی و ناقطبی بستگی دارد. هر چه بخش **قطبی بزرگ تر** و بخش **ناقطبی کوچک تر** باشد، انحلال پذیری در آب بیشتر و انحلال پذیری در چربی کمتر است. همچنین برعکس هر چه بخش **قطبی کوچک تر** و بخش **ناقطبی بزرگ تر** باشد، انحلال پذیری در چربی، بیشتر و انحلال پذیری در آب کمتر خواهد بود.

بخش قطبی این دو یکسان و بخش ناقطبی استیک اسید **بزرگ تر** بوده و به همین علت انحلال پذیری استیک اسید در چربی بیشتر است.



۵۶- اگر نمونه ای ۳۵۷ گرمی از یک پلی آمید با ساختار زیر در شرایط مناسب با مقدار کافی آب وارد واکنش شود، اختلاف جرم فراورده های تولید شده در این واکنش برابر با چند گرم است؟ ($H = 1, C = 12, N = 14, O = 16: g. mol^{-1}$)

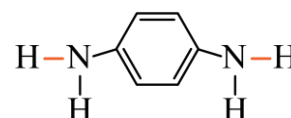
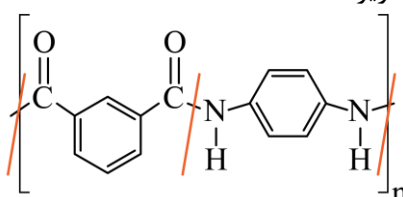
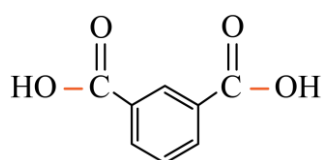


- (۱) ۳۹
(۲) ۷۸
(۳) ۸۷
(۴) ۱۷۴

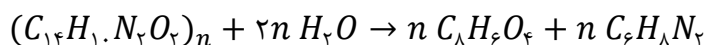
پاسخ: گزینه ۳

(سخت - محاسباتی - زمان بر ۵ - صفحه ۱۱۹ - ۱۱۰۳)

ساختار مونومرهای سازنده این پلی آمید به صورت زیر هستند:



فرمول مولکولی هر واحد تکرارشونده در این پلیمر به صورت $(C_{14}H_{11}.N_2O_2)_n$ است و فرمول مولکولی دی آمین سازنده این پلیمر به صورت $C_6H_8N_2$ و فرمول مولکولی دی اسید سازنده آن به صورت $C_8H_6O_4$ است. معادله واکنش مورد نظر به صورت زیر است:



ابتدا اختلاف جرم دی اسید و دی آمین به ازای یک مول از آن‌ها را حساب می‌کنیم:

$$m_{\text{دی اسید}} - m_{\text{دی آمین}} = 1 \times (8 \times 12 + 6 \times 1 + 4 \times 16) - 1 \times (6 \times 12 + 8 \times 1 + 2 \times 14) = 166 - 108 = 58 \text{ g}$$

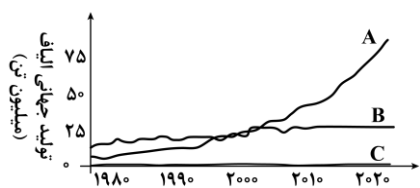
در این واکنش به ازای مصرف ۱ مول پلی آمید، n مول از هر یک از فراورده‌ها تولید می‌شود و اختلاف جرم آن‌ها برابر با $58n$ گرم خواهد بود. حال با توجه به اینکه ۳۵۷ گرم از این پلی آمید در این واکنش مصرف شده است، تفاوت جرمی این دو ماده را به دست می‌آوریم:

$$? \text{ g} = \text{اختلاف جرم فراورده‌ها} \times \frac{1 \text{ mol } (C_{14}H_{11}.N_2O_2)_n}{238n \text{ g } (C_{14}H_{11}.N_2O_2)_n} \times \frac{58n \text{ g}}{1 \text{ mol } (C_{14}H_{11}.N_2O_2)_n} = 87 \text{ g}$$

در نتیجه اختلاف جرم فراورده‌های تولید شده در این واکنش برابر با ۸۷ گرم است.

بخش کلی، اسیدی و آمینی در پلیمرهای تراکمی

قسمتی از یک پلی آمید که بین اتم‌های نیتروژن گروه عاملی آمیدی قرار می‌گیرد، گروه R موجود در ساختار **دی آمین** سازنده **پلی آمید** را تشکیل می‌دهد و قسمتی از مولکول پلی آمید که بین اتم‌های کربن گروه عاملی آمیدی قرار می‌گیرد، گروه R از مولکول **دی اسید** سازنده مولکول **پلی آمید** را تشکیل می‌دهد. قسمتی از یک پلی استر که بین اتم‌های اکسیژن گروه عاملی استری قرار می‌گیرد، گروه R موجود در ساختار **دی الکل** سازنده **پلی استر** را تشکیل می‌دهد و قسمتی از مولکول پلی استر که بین اتم‌های کربن گروه عاملی استری قرار می‌گیرد، گروه R از مولکول **دی اسید** سازنده مولکول **پلی استر** را تشکیل می‌دهد.



۵۷- اگر نمودار زیر روند تولید انواع الیاف را در جهان نشان دهد، کدام گزینه نا درست است؟

- ۱) الیاف موجود در B همانند نشاسته، از بسپارش گلوکز حاصل شده‌اند.
- ۲) پلیمر سازنده الیاف C از واکنش دی آمین‌ها و دی اسیدها به وجود می‌آید.
- ۳) در طبیعت، سرعت واکنش تجزیه الیاف A کمتر از پلیمر به دست آمده از گاز اتن است.
- ۴) پلیمر موجود در A برخلاف مونومرهای سازنده آن، توانایی تشکیل پیوند هیدروژنی را ندارد.

(آسان - خط به خط - استاندارد) - صفحه ۱۲۰ - ۱۱۰۳

پاسخ: گزینه ۳

الیاف A ، B و C به ترتیب الیاف **پلی استر**، پنبه و پشم است. واکنش تجزیه (آبکافت) الیاف پلی استری بسیار کند است. به همین دلیل، لباس تهیه شده از این نوع الیاف برای مدت **طولانی** قابل استفاده است؛ اما پلی اتن که از بسپارش گاز اتن به دست آمده، ساختاری شبیه به آلکان‌ها دارد و سیر شده است و به همین دلیل، به انجام واکنش تمایلی ندارد و پوشاک تهیه شده از آن در طبیعت تجزیه نمی‌شود.

بررسی سایر گزینه‌ها:

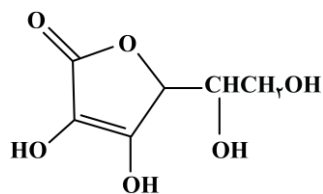
۱) الیاف پنبه از **سلولز** تشکیل شده‌اند. سلولز، مولکولی زنجیر مانند است که از اتصال شمار بسیار زیادی مولکول گلوکز به یکدیگر ساخته می‌شود. دیگر پلیمر ساخته شده از **گلوکز**، نشاسته است.

۲) پلیمر موجود در **الیاف پشمی**، **پلی آمید** بوده که این نوع پلیمر از واکنش دی آمین‌ها با دی اسیدها به وجود می‌آید.

۴) پلی استرها از واکنش دی الکل‌ها با دی اسیدها به وجود می‌آید و دی الکل‌ها به علت داشتن گروه عاملی هیدروکسیل ($-OH$) و دی اسیدها به علت داشتن گروه عاملی کربوکسیل ($-COOH$) توانایی برقراری پیوند هیدروژنی را دارند. این در حالی است که پلی استرها توانایی تشکیل پیوند هیدروژنی را ندارند.



۵۸- به تقریب یک گرم از ماده زیر با چند گرم پروپانویک اسید واکنش می دهد؟ ($H = 1, C = 12, O = 16: g. mol^{-1}$)



۳/۳۶ (۱)

۱/۶۸ (۲)

۱/۲۶ (۳)

۲/۵۲ (۴)

پاسخ: گزینه ۲

متوسط - محاسباتی - زمان بر (۱۱۶ - صفحه ۱۱۰۳)

ابتدا فرمول شیمیایی این ماده را مشخص می کنیم:

شمار اتم های هیدروژن در این ماده برابر است با:

تعداد اتم هالوژن ها - تعداد اتم N + (تعداد پیوند سه گانه) ۴ - (تعداد حلقه + تعداد پیوند دوگانه) ۲ - ۲ + (تعداد اتم C) ۲ = تعداد اتم H

$$m = 2 \times 6 + 2 - 2 \times (1 + 2) = 8$$

پس فرمول شیمیایی این ماده $C_6H_8O_6$ است.

در ساختار این ماده ۴ گروه الکلی وجود دارد، پس هر مول از این ماده با ۴ مول اسید آلی واکنش می دهد. بر این اساس، جرم پروپانویک

اسید مصرف شده در این واکنش را حساب می کنیم:

$$? g C_3H_5COOH = 1 g C_6H_8O_6 \times \frac{1 mol C_6H_8O_6}{176 g C_6H_8O_6} \times \frac{4 mol C_3H_5COOH}{1 mol C_6H_8O_6} \times \frac{74 g C_3H_5COOH}{1 mol C_3H_5COOH} \approx 1/68 g$$

پس در این واکنش به تقریب ۱/۶۸ گرم پروپانویک اسید مصرف می شود.

شمار اتم های هیدروژن در یک ماده آلی

تعداد اتم هالوژن ها - تعداد اتم N + (تعداد پیوند سه گانه) ۴ - (تعداد حلقه + تعداد پیوند دوگانه) ۲ - ۲ + (تعداد اتم C) ۲ = تعداد اتم H



۵۹- کدام گزینه نادرست است؟

(۱) پلیمر سازنده کفی اتو، نقطه ذوب بالایی داشته و مقاومت خوبی در برابر گرما دارد.

(۲) نسبت درصد جرمی اتم کربن به هیدروژن در پلی استیرن برابر با این مقدار در پلی سیانواتن است.

(۳) نسبت شمار اتم ها به شمار عناصر در وینیل کلرید در مقایسه با این نسبت در مونومر تفلون، کمتر است.

(۴) پلیمری که در تهیه نخ دندان نقش دارد همانند پلی استر، در هر واحد تکرارشونده خود دارای ۱۲ جفت الکترون ناپیوندی است.

پاسخ: گزینه ۴

(متوسط - مفهومی - استاندارد (۱۱۵ - صفحه ۱۱۰۳)

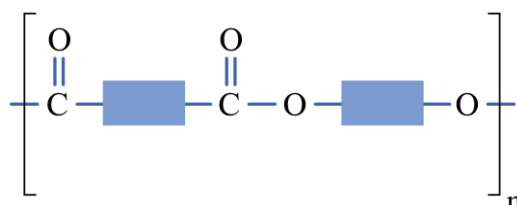
جدول زیر کاربرد برخی از پلیمرها را نشان می دهد:

نام پلیمر	پلی اتن	تفلون	پلی سیانواتن	پلی پروپن	پلی استیرن	پلی وینیل کلرید
کاربرد	لوله پلاستیکی کیسه پلاستیک بطری پلاستیکی	کفی اتو نخ دندان ظروف نجسب	پتو پارچه	سرنگ	ظرف یکبار مصرف	کیسه خون

پلیمری که در تهیه نخ دندان نقش دارد، تفلون است. در هر واحد تکرارشونده این پلیمر ۴ اتم فلوئور وجود دارد که هر یک از آنها

۳ جفت الکترون ناپیوندی دارد، در نتیجه هر واحد تکرارشونده در تفلون دارای ۱۲ جفت الکترون ناپیوندی است. ساختار واحد

تکرارشونده در پلی استرها به صورت زیر است:



با توجه به اینکه در هر واحد تکرارشونده از این پلیمر ۴ اتم اکسیژن وجود دارد و هر اتم اکسیژن دارای ۲ جفت الکترون ناپیوندی است، در هر واحد تکرارشونده پلی استرها ۸ جفت الکترون ناپیوندی وجود دارد.

بررسی سایر گزینه ها:

۱) از پلی تترافلوئورواتن یا همان تفلون برای تولید نخ دندان، کفی اتو و ظروف نجسب استفاده می شود. تفلون خواص ویژه ای دارد که به آن ویژگی های مناسب برای کاربردهای گوناگون می دهد. به عنوان مثال، این ماده نقطه ذوب بالایی داشته و نسبت به گرما مقاوم است و به همین علت از آن به عنوان کفی اتو یا ظروف آشپزخانه استفاده می شود.

۲) فرمول مولکولی پلی استیرن به صورت $(C_8H_8)_n$ و فرمول مولکولی پلی سیانواتن به صورت $(C_4H_3N)_n$ است. از آنجا که نسبت شمار اتم های کربن به هیدروژن در هر دو مولکول برابر با یک بوده، در نتیجه نسبت درصد جرمی اتم کربن به هیدروژن در این دو پلیمر نیز با یکدیگر برابر خواهد بود.

۳) نسبت شمار اتم ها به شمار عناصر در وینیل کلرید با فرمول مولکولی C_2H_3Cl برابر است با:

$$\frac{\text{شمار اتم ها}}{\text{شمار عناصر}} = \frac{6}{3} = 2$$

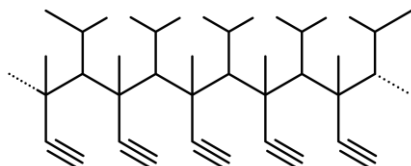
این نسبت در تترافلوئورواتن (مونومر تفلون) با فرمول مولکولی C_2F_4 برابر است با:

$$\frac{\text{شمار اتم ها}}{\text{شمار عناصر}} = \frac{6}{2} = 3$$

در نتیجه نسبت شمار اتم ها به شمار عناصر در وینیل کلرید در مقایسه با این نسبت در مونومر تفلون، کمتر است.



۶۰- هر مول مونومر سازنده ترکیب زیر با چند گرم گاز هیدروژن واکنش می دهد؟ ($H = 1 \text{ g.mol}^{-1}$)



۶ (۴)

۴ (۳)

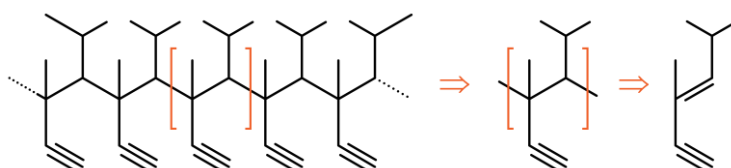
۳ (۲)

۲ (۱)

(آسان - مفهومی - سریع) - صفحه ۱۰۶ - ۱۱۰۳

پاسخ: گزینه ۴

ترکیب مورد نظر یک پلیمر افزایشی است. برای پیدا کردن ساختار مونومرهای سازنده پلیمرهای افزایشی، کافی است که ساختار واحد تکرارشونده پلیمر را به دست آوریم و پس از آن، پیوندهایی که این واحد تکرارشونده را به سایر واحدها متصل می کنند، حذف کنیم. در مرحله آخر، با تبدیل پیوند یگانه میان اتم های کربنی که در زنجیره اصلی پلیمر قرار داشتند به پیوند دوگانه، ساختار مونومر مورد نظر به دست می آید. برای پیدا کردن ساختار واحد تکرارشونده کافی است که دو کربن مجاور بر روی زنجیره اصلی را با تمام شاخه هایی که به این دو متصل است، مشخص کرده و از زنجیره اصلی جدا کنیم. ساختار به دست آمده، واحد تکرارشونده است. در شکل زیر، مراحل توضیح داده شده مشخص شده اند.



در این مونومر، یک پیوند دوگانه و یک پیوند سه گانه وجود دارد که در واکنش با گاز هیدروژن به ترتیب با یک و دو مولکول گاز هیدروژن واکنش خواهند داد. پس هر مول از این ماده در واکنش کامل با ۳ مول گاز هیدروژن (معادل ۶ گرم) به یک ترکیب سیر شده تبدیل می شود.



۶۱- کدام یک از موارد زیر درست هستند؟

- الف - لباس های نخی در محیط گرم و مرطوب در مقایسه با محیط سرد و خشک، زودتر پوسیده می شوند.
 ب - تولید پلیمرهایی که ساختاری شبیه به آلکان ها دارند، به دلیل ماندگاری بالا از نگاه پیشرفت پایدار، مطلوب است.
 ج - لباس های تهیه شده از پارچه های پلی آمیدی برای مدت طولانی قابل استفاده است؛ زیرا استحکام خود را حفظ می کنند.
 د - پلی لاکتیک اسید پلیمری سبز بوده و در طبیعت پس از گذشت چندین سال به آب و گاز کربن دی اکسید تبدیل می شود.
- (۱) «الف» و «ج» (۲) «الف» و «د» (۳) «ب» و «ج» (۴) «ب» و «د»

پاسخ: گزینه ۱

(سخت - خط به خط - زمان ۵ - صفحه ۱۲۱ - ۱۱۰۳)

عبارت های «الف» و «ج» درست هستند.

بررسی موارد:

- (الف) لباس های نخی که جنس آن ها پلی استری یا پلی آمیدی بوده، در محیط گرم و مرطوب (شرایط مناسب) با آب وارد واکنش آبکافت می شوند و به مونومرهای سازنده خود تبدیل می شوند که در اثر شکست پیوندهای موجود در این پلیمرها، استحکام الیاف پارچه کم شده و لباس زودتر پوسیده می شود.
- (ب) پلیمرهایی که ساختاری شبیه به آلکان ها دارند، به انجام واکنش تمایلی ندارند و از این رو پوشاک و پوشش های تهیه شده از این مواد در طبیعت تجزیه نمی شوند. هر چند استفاده از این پلیمرها صرفه اقتصادی دارد، اما از نگاه پیشرفت پایدار، تولید و استفاده از این پلیمرها الگوی مصرفی مطلوبی نیست.
- (ج) تجربه ها نشان می دهد که به طور کلی واکنش آبکافت پلی استرها و پلی آمیدها بسیار کند است. به همین دلیل لباس های تهیه شده از این نوع پارچه ها برای مدت طولانی قابل استفاده است و استحکام خود را حفظ می کنند.
- (د) پلی لاکتیک اسید یک پلیمر سبز است و هرگاه این نوع پلیمرها و کالای ساخته شده از آن ها در طبیعت رها شوند، پس از چند ماه (نه چند سال) توسط جانداران ذره بینی به مولکول های ساده مانند آب و کربن دی اکسید تبدیل می شوند.



- ۶۲- اگر شمار اتم های کربن موجود در ۱ مول پلی استیرین با شمار اتم های هیدروژن موجود در ۲/۵ مول پلی پروپن برابر باشد، نسبت شمار واحد تکرار شونده در این نمونه پلی استیرین به شمار واحد تکرار شونده در این نمونه پلی پروپن کدام است؟
- (۱) ۲/۱۲۵ (۲) ۱/۸۷۵ (۳) ۰/۷۵ (۴) ۰/۵۳

پاسخ: گزینه ۲

(متوسط - محاسباتی - استاندارد ۵ - صفحه ۱۰۶ - ۱۱۰۳)

شمار اتم های کربن در ۱ مول پلی استیرین با فرمول مولکولی $(C_8H_8)_n$ برابر است با:

$$? \text{ mol } C = 1 \text{ mol } (C_8H_8)_n \times \frac{8n \text{ mol } C}{1 \text{ mol } (C_8H_8)_n} = 8n \text{ mol}$$

همچنین شمار اتم های هیدروژن موجود در ۲/۵ مول پلی پروپن با فرمول مولکولی $(C_3H_6)_{n'}$ برابر است با:

$$? \text{ mol } H = 2/5 \text{ mol } (C_3H_6)_{n'} \times \frac{6n' \text{ mol } H}{1 \text{ mol } (C_3H_6)_{n'}} = 15n' \text{ mol}$$

سپس از آن جا که مقدار این دو شمار با یکدیگر برابر است، داریم:

$$8nN_A = 15n'N_A \Rightarrow \frac{n}{n'} = \frac{15}{8} = 1/875$$

در نتیجه نسبت شمار واحد تکرار شونده در نمونه پلی استیرین به شمار واحد تکرار شونده در نمونه پلی پروپن برابر ۱/۸۷۵ است.



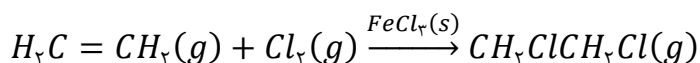
۶۳- در فراورده واکنش گاز کلر و اتن، تفاوت شمار جفت الکترون‌های پیوندی و ناپیوندی برابر بوده و آنتالپی این فراورده از واکنش‌دهنده‌ها است.

(۱) یک - کمتر (۲) یک - بیشتر (۳) دو - بیشتر (۴) دو - کمتر

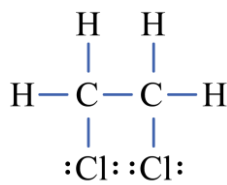
پاسخ: گزینه ۱

(آسان - مفهومی - سریع) - صفحه ۱۲۳ - ۱۱۰۳

واکنش گاز کلر و گاز اتن به صورت زیر است:



فراورده این واکنش ۱، ۲-دی کلرواتان بوده که ساختار آن به صورت زیر است:



در این ماده ۷ جفت الکترون پیوندی و ۶ جفت الکترون ناپیوندی وجود دارد و تفاوت این دو، برابر یک است. همچنین آنتالپی این واکنش منفی بوده و به همین علت می‌توان گفت آنتالپی فراورده کمتر از دو واکنش‌دهنده خواهد بود.



۶۴- با توجه به ساختار زیر، چند مورد از عبارت‌های زیر در مورد این ماده درست است؟

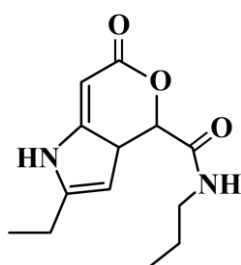
الف - در صورت شکستن پیوند آمیدی در این مولکول، فرمول مولکولی آمین سازنده این ماده به صورت C_7H_9N خواهد بود.

ب - شمار اتم‌های کربنی که به هیچ اتم هیدروژنی متصل نیستند، برابر شمار اتم‌های کربن متصل به نیتروژن است.

ج - می‌تواند در واکنش تشکیل استر همانند واکنش تشکیل آمید شرکت کند.

د - شمار پیوندهای $C-H$ در این مولکول برابر ۱۸ است.

(۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴

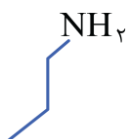


پاسخ: گزینه ۲

(سخت - مفهومی - زمان‌بر) - صفحه ۱۱۹ - ۱۱۰۳

عبارت‌های «الف» و «ب» درست هستند.

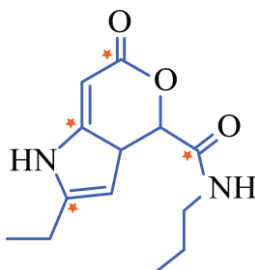
بررسی موارد:



(الف) در صورت شکست پیوند آمیدی در این مولکول، ساختار آمین به دست آمده به صورت مقابل خواهد بود:

فرمول مولکولی ترکیب مورد نظر به صورت C_7H_9N است.

(ب) در ساختار این ماده، اتم‌های کربنی که به هیچ اتم هیدروژنی اتصال ندارند، در شکل زیر مشخص شده‌اند:



در نتیجه ۴ اتم کربن به هیدروژن اتصال ندارند. سپس با توجه به ساختار این مولکول، از آن جا که هر اتم نیتروژن به دو اتم کربن اتصال دارد، در نتیجه ۴ اتم کربن به اتم نیتروژن اتصال دارند. از این رو شمار اتم‌های کربنی که به هیدروژن اتصال ندارند با شمار اتم‌های کربنی که به نیتروژن اتصال دارند، برابر است.

- مولکول مورد نظر به علت داشتن گروه عاملی آمین می تواند در واکنش تشکیل آمید شرکت کند. اما این مولکول گروه عاملی کربوکسیل یا گروه عاملی هیدروکسیل ندارد، در نتیجه نمی تواند در واکنش تشکیل استر شرکت کند.
- در ابتدا باید شمار اتم های هیدروژن این مولکول را محاسبه کنیم:

تعداد اتم هالوژن ها - تعداد اتم N + (تعداد پیوند سه گانه) $4 -$ (تعداد حلقه + تعداد پیوند دو گانه) $2 - 2 +$ (تعداد اتم C) $=$ تعداد اتم H

$$= 2 \times 13 + 2 - 2(4 + 2) + 2 = 18$$

این ترکیب دارای ۱۸ اتم هیدروژن است و از آن جا که دو اتم هیدروژن به نیتروژن اتصال دارند و مابقی اتم های هیدروژن به اتم کربن وصل هستند، پس این مولکول دارای ۱۶ پیوند $C - H$ است.



۶۵- برای متیل اتانوات ایزومر اسیدی و ایزومر استری می توان در نظر گرفت.

(۱) ۱ - ۱ (۲) ۲ - ۱ (۳) ۳ - ۲ (۴) ۴ - ۲

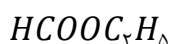
(متوسط - مفهومی - سریع) - صفحه ۱۱۵ - ۱۱۳

پاسخ: گزینه ۱

فرمول شیمیایی متیل اتانوات به صورت زیر است:



برای ترکیب بالا یک ایزومر استری به نام اتیل متانوات و یک ایزومر اسیدی به نام پروپانویک اسید با ساختار زیر وجود دارد:



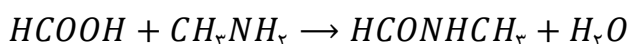
۶۶- کدام یک از مطالب زیر در مورد فراورده واکنش میان ساده ترین آمین و ساده ترین کربوکسیلیک اسید درست است؟

- (۱) این ماده ساده ترین عضو خانواده آمیدها است.
- (۲) در یک نمونه خالص از آن پیوند هیدروژنی وجود ندارد.
- (۳) ۸۰ درصد اتم های هیدروژن در آن، به اتم کربن متصل هستند.
- (۴) درصد جرمی عنصر نیتروژن در این ماده بیشتر از عنصر اکسیژن است.

(متوسط - مفهومی - استاندارد) - صفحه ۱۱۷ - ۱۱۳

پاسخ: گزینه ۳

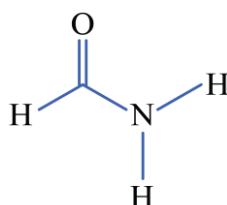
ساده ترین آمین و اسید به ترتیب متیل آمین و فرمیک اسید بوده که هر دو تک کربنه هستند و از واکنش میان این دو، آمیدی دو کربنه حاصل می گردد:



در این ماده ۵ اتم هیدروژن وجود دارد که ۴ مورد از آن به اتم کربن و یک اتم هیدروژن به اتم نیتروژن وصل است. پس ۸۰ درصد اتم های هیدروژن در این ترکیب با اتم کربن پیوند کووالانسی دارند.

بررسی سایر گزینه ها:

ساده ترین عضو خانواده آمیدها ترکیبی با ساختار زیر است:



بد نیست بدانیم که این ترکیب از واکنش متانویک اسید و آمونیاک حاصل می شود.

- (۲) در این ماده اتم هیدروژن متصل به اتم نیتروژن دیده می شود؛ پس در یک نمونه خالص از این ماده، پیوند هیدروژنی وجود دارد.
- (۴) در هر مولکول از این ماده، یک اتم اکسیژن و یک اتم نیتروژن وجود دارد و چون جرم یک اتم نیتروژن کمتر از جرم یک اتم اکسیژن است، پس درصد جرمی نیتروژن در این ترکیب کمتر از عنصر اکسیژن خواهد بود.

پیوند هیدروژنی

به برهم کنش های بین مولکول های سازنده یک ماده، نیروهای بین مولکولی گفته می شود که به دو دسته پیوند هیدروژنی و نیروهای واندروالسی تقسیم بندی می شود. در ساختار همه مواد، نیروی واندروالسی که ناشی از جرم و حجم مولکول است، وجود دارد. اما برای ایجاد پیوند هیدروژنی بین دو مولکول، دو شرط لازم است:

شرط اول) در یکی از مولکول ها، اتم هیدروژن به طور مستقیم (با پیوند اشتراکی) به یکی از سه اتم F ، O و یا N متصل باشد.

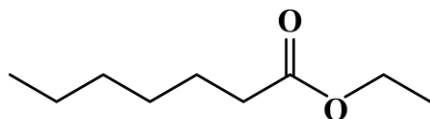
شرط دوم) در مولکول دیگر کافیت فقط یکی از سه اتم F ، O و یا N وجود داشته باشد.

پس در یک ماده وجود پیوندهای کووالانسی $O-H$ ، $N-H$ یا $F-H$ ، نشان از توانایی آن ماده در تشکیل پیوند هیدروژنی دارد. همچنین موادی که در ساختار آنها اتم های O ، N یا F بدون پیوندهای نام برده وجود دارد، اگر چه با مولکول های خود توانایی تشکیل پیوند هیدروژنی را ندارد، اما می تواند با ماده ای که یکی از آن ۳ پیوند کووالانسی را دارد، پیوند هیدروژنی تشکیل دهد. به عنوان مثال، با حل شدن استون در آب، پیوند هیدروژنی میان مولکول های حلال و حل شونده به وجود می آید.



۶۷- ۶۵ گرم از کربوکسیلیک اسید سازنده استری با ساختار زیر، با مقدار کافی اتیل آمین وارد واکنش می شود. اگر پس از گذشت ۹۰ ثانیه، واکنش به طور کامل انجام شود، سرعت متوسط تولید آمید در طی این واکنش به تقریب برابر با چند گرم بر دقیقه بوده است؟

$$(H = 1, C = 12, N = 14, O = 16: g. mol^{-1})$$



$$52/3 \text{ (2)}$$

$$58/3 \text{ (1)}$$

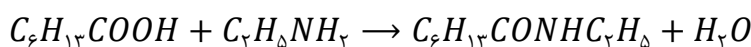
$$26/1 \text{ (4)}$$

$$29/1 \text{ (3)}$$

(سخت - محاسباتی - زمان بر) - صفحه ۱۱۷ - ۱۱۰۳

پاسخ: گزینه ۲

کربوکسیلیک اسید سازنده استر داده شده، هپتانوئیک اسید با فرمول مولکولی $(C_6H_{13}COOH)$ است. حال معادله واکنش هپتانوئیک اسید با اتیل آمین به صورت زیر است:



فرمول مولکولی آمید تولید شده به صورت $C_9H_{19}NO$ است. حال از آن جا که در این واکنش ۶۵ گرم از اسید مصرف شده است، جرم آمید تولید شده را حساب می کنیم:

$$g C_9H_{19}NO = 65 g C_6H_{13}COOH \times \frac{1 \text{ mol } C_6H_{13}COOH}{130 g C_6H_{13}COOH} \times \frac{1 \text{ mol } C_9H_{19}NO}{1 \text{ mol } C_6H_{13}COOH} \times \frac{157 g C_9H_{19}NO}{1 \text{ mol } C_9H_{19}NO} = 78/5 g$$

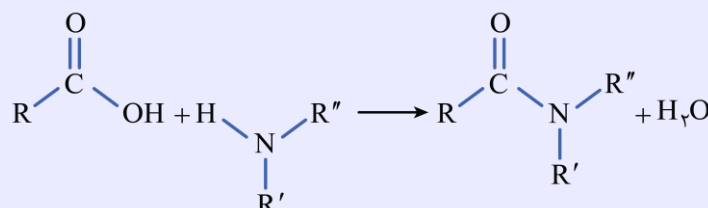
اکنون با توجه به تولید ۷۸/۵ گرم آمید در طی ۹۰ ثانیه، سرعت متوسط تولید آمید در طول این بازه زمانی را به دست می آوریم:

$$\bar{R}_{\text{آمید}} = \frac{\Delta m(\text{آمید})}{\Delta t} = \frac{78/5 g}{90 s \times \frac{1 \text{ min}}{60 s}} \approx 52/3 g. min^{-1}$$

در نتیجه سرعت متوسط تولید آمید در طول بازه زمانی مورد نظر به تقریب برابر ۵۲/۳ گرم بر دقیقه است.

آمیدی شدن

واکنش تولید یک آمید میان کربوکسیلیک اسید سازنده آن و آمین سازنده آن به صورت زیر انجام می گیرد:



توجه: همان طور که در واکنش بالا می بینیم، برای انجام این واکنش باید به اتم نیتروژن موجود در گروه عاملی آمینی حداقل یک اتم هیدروژن متصل باشد.

برای تمرین بیشتر، مثال زیر را حل کنید!

اگر از واکنش ۵۰ گرم از یک کربوکسیلیک اسید با ۶۰ گرم از یک الکل در محیط اسیدی، ۱۰۴ گرم استر تولید شود، از واکنش ۴۵ گرم از آن کربوکسیلیک اسید با مقدار کافی متیل آمین، چند گرم فراورده آلی تولید می‌شود؟

$$(H = 1, C = 12, N = 14, O = 16: g. mol^{-1})$$

$$56/2 \text{ (۴)}$$

$$42/3 \text{ (۳)}$$

$$54/6 \text{ (۲)}$$

$$48/9 \text{ (۱)}$$

پاسخ: گزینه ۱

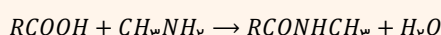
مجموع جرم واکنش‌دهنده‌ها برابر ۱۱۰ گرم و جرم استر تولیدشده برابر ۱۰۴ گرم است؛ پس با توجه به قانون پایستگی جرم، جرم آب تولیدشده برابر ۶ گرم می‌باشد. اگر جرم مولی کربوکسیلیک اسید را برابر x در نظر بگیریم، جرم کربوکسیلیک اسید را با توجه به مقدار آب تولیدشده حساب می‌کنیم:

$$? g RCOOH = 6 g H_2O \times \frac{1 \text{ mol } H_2O}{18 g H_2O} \times \frac{1 \text{ mol } RCOOH}{1 \text{ mol } H_2O} \times \frac{x g RCOOH}{1 \text{ mol } RCOOH} = \frac{x}{3} g$$

پس جرم مولی کربوکسیلیک اسید را به دست می‌آوریم:

$$\frac{x}{3} = 50 \Rightarrow x = 150$$

واکنش این کربوکسیلیک اسید با متیل آمین به صورت زیر است:



ابتدا جرم مولی قسمت R را محاسبه می‌کنیم.

$$\text{جرم مولی کربوکسیلیک اسید} = R + C + 2O + H \Rightarrow 150 = R + 12 + 2 \times 16 + 1 \Rightarrow R = 105$$

حال جرم مولی آمید ($RCONHCH_3$) تولید شده را حساب می‌کنیم:

$$\text{جرم مولی آمید} = R + C + O + N + H + C + 3H \Rightarrow 105 + 12 + 16 + 14 + 1 + 12 + 3 \times 1 = 163$$

در نهایت جرم آمید تولیدشده را حساب می‌کنیم:

$$? g \text{ آمید} = 45 g RCOOH \times \frac{1 \text{ mol } RCOOH}{150 g RCOOH} \times \frac{1 \text{ mol آمید}}{1 \text{ mol } RCOOH} \times \frac{163 g \text{ آمید}}{1 \text{ mol آمید}} = 48/9 g$$

پس مقدار آمید تولیدشده برابر ۴۸/۹ گرم است.



۶۸- واکنش پلیمری شدن اتن در شرایط گوناگون به تولید پلی‌اتن‌هایی با جرم مولی میانگین متفاوت منجر می‌شود. تجربه نشان می‌دهد که جرم مولی میانگین به مقدار کاتالیزگرهای واکنش بستگی دارد. با توجه به جدول زیر، کدام مورد نادرست است؟

پلی‌اتن	شمار مول‌های کاتالیزگر محتوی تیتانیوم (شماره ۱)	شمار مول‌های کاتالیزگر محتوی آلومینیم (شماره ۲)
A	۱	۶
B	۱	۳
C	۱	۰/۵۳
D	۱	۰/۵

۱) پلی‌اتن A در مقایسه با پلی‌اتن C دارای استحکام و چگالی بیشتری است.

۲) پلی‌اتن B بیشترین جرم مولی میانگین را در بین پلی‌اتن‌های نشان داده شده دارد.

۳) پلی‌اتن تولیدشده در نسبت مولی ۱ به ۱۲ کاتالیزگر ۱ به کاتالیزگر ۲، در مقایسه با پلی‌اتن A واحد تکرارشونده بیشتری دارد.

۴) به هنگام تولید پلی‌اتن ممکن است برخی مولکول‌های اتن از کناره‌ها به یکدیگر افزوده شده و زنجیرهای شاخه‌دار تولید شده باشد.

(آسان - حفظی - استاندارد) - صفحه ۱۲۳ - ۱۱۰۳

پاسخ: گزینه ۳

در نسبت مولی ۱ به ۳ کاتالیزگر ۱ به کاتالیزگر ۲، پلی‌اتن با بیشترین جرم مولی میانگین تولید می‌شود و پس از آن با افزایش مقدار کاتالیزگر ۲، جرم مولی میانگین پلی‌اتن تولیدی کاهش می‌یابد. در نتیجه پلی‌اتن تولید شده در نسبت مولی ۱ به ۱۲ کاتالیزگر ۱ به کاتالیزگر ۲ در مقایسه با پلی‌اتن A (نسبت مولی ۱ به ۶ کاتالیزگر ۱ به کاتالیزگر ۲) دارای جرم مولی میانگین کمتری است. بنابراین شمار واحد تکرارشونده در پلی‌اتن مورد نظر در مقایسه با این شمار در پلی‌اتن A کمتر است.

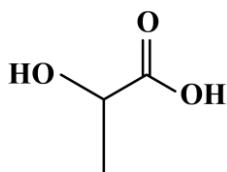
بررسی سایر گزینه ها:

- ۱) پلی اتن A در مقایسه با پلی اتن C دارای جرم مولی میانگین بسیار بیشتری است، در نتیجه پلی اتن A دارای استحکام و چگالی بیشتری است.
- ۲) همان طور که در بالا اشاره شد، در نسبت مولی ۱ به ۳ کاتالیزگر ۱ به ۲ کاتالیزگر ۲ پلی اتن با بیشترین جرم مولی میانگین به دست می آید. در نتیجه پلی اتن B دارای بیشترین جرم مولی میانگین در بین سایر پلی اتن ها خواهد بود.
- ۴) در هنگام تولید پلی اتن سبک یا شاخه دار، برخی مولکول های اتن در شرایطی معین از کناره ها به یکدیگر افزوده شده و زنجیرهای شاخه دار تولید می شود.



۶۹- اگر ساختار لاکتیک اسید به صورت زیر باشد، درصد جرمی هیدروژن در پلی لاکتیک اسید به تقریب برابر چند درصد است؟

$$(H = 1, C = 12, O = 16: g. mol^{-1})$$



$$2/9 \quad (2)$$

$$5/6 \quad (1)$$

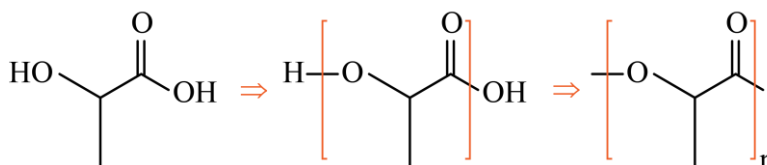
$$8/1 \quad (4)$$

$$6/7 \quad (3)$$

(متوسط - محاسباتی - استاندارد) - صفحه ۱۱۶ - ۱۱۰۳

پاسخ: گزینه ۱

گاهی اوقات به جای تولید پلی استر از دو مولکول متفاوت الکلی و اسیدی، این ماده از بسپارش یک ماده که هم گروه عاملی الکلی و هم گروه عاملی اسیدی دارد، تشکیل می شود. برای مشخص کردن فرمول شیمیایی پلی استر در این حالت، اتم هیدروژن گروه هیدروکسیل و OH گروه اسیدی را از ماده مونومر مورد نظر جدا می کنیم. بخشی که باقی می ماند، واحد تکرارشونده است و با قرار دادن زیروند n برای آن، ساختار پلی استر به دست می آید. (این شرایط برای پلی آمیدها هم وجود دارد، به عنوان مثال آمینواسیدها که یک سر آن اسیدی و سر دیگر آن آمینی است، توانایی تشکیل پلی آمیدهایی به نام پروتئین ها را دارند.)



فرمول شیمیایی این پلیمر $[C_3H_4O_2]_n$ است. پس درصد جرمی هیدروژن را در این ترکیب به دست می آوریم:

$$A = \frac{\text{جرم اتم های هیدروژن}}{\text{جرم مولکول}} \times 100 \Rightarrow A = \frac{4n}{72n} \times 100 \approx 5/6\%$$

بنابراین درصد جرمی هیدروژن در این ترکیب به تقریب برابر ۵/۶ درصد است.

تکنیک | فرمول شیمیایی پلیمرهای تراکمی

یک راه حل سریع برای محاسبه فرمول شیمیایی پلی استر یا پلی آمید آن است که فرمول شیمیایی دو مونومر را جمع زده و ۲ مولکول آب (H_2O) را از آن کم کنیم. (اگر پلی استر یا پلی آمید فقط یک مونومر داشته باشد، تنها باید یک مولکول آب از فرمول شیمیایی مونومر حذف شود). فرمول شیمیایی حاصل معادل واحد تکرارشونده بوده و اگر به آن زیروند n اضافه کنیم، فرمول شیمیایی پلیمر به دست می آید.



۷۰- مخلوطی از ویتامین C و ویتامین K را در یک ظرف حاوی هگزان مایع می‌ریزیم و برای مدتی به شدت هم می‌زنیم. پس از انجام این کار، در محلول مورد نظر مقداری ماده جامد ته‌نشین شده است. با توجه به اطلاعات داده‌شده، کدام مورد نادرست است؟

- (۱) ویتامین ته‌نشین شده دارای گروه عاملی بوده که منشأ بوی خوش شکوفه‌ها است.
- (۲) ویتامین ته‌نشین شده همانند ویتامین A ، یک حلقه کربنی در ساختار خود دارد.
- (۳) ویتامین حل شده همانند ویتامین D ، یک ویتامین محلول در چربی است.
- (۴) ویتامین حل شده، در ساختار خود دارای دو گروه عاملی کربونیل است.

پاسخ: گزینه ۲

(متوسط - مفهومی - استاندارد) - صفحه ۱۱۴ - ۱۱۰۳

از آن‌جا که هگزان یک ترکیب **ناقطبی** بوده، ترکیبات **ناقطبی** می‌توانند در آن حل شوند. با توجه به این موضوع، از آن‌جا که ویتامین K یک ویتامین **ناقطبی** و محلول در چربی بوده می‌تواند در هگزان حل شود، اما ویتامین C به دلیل قطبی بودن نمی‌تواند در هگزان حل شود و ته‌نشین خواهد شد.

ویتامین C (ویتامین ته‌نشین شده) همانند ویتامین A در ساختار خود یک حلقه دارد اما حلقه ویتامین C برخلاف سایر ویتامین‌ها، کربنی نبوده و در آن اتم **اکسیژن** نیز مشارکت دارد.

بررسی سایر گزینه‌ها:

۱) ویتامین C (ویتامین ته‌نشین شده) دارای گروه **عاملی استری** در ساختار خود است که این گروه عاملی منشأ بوی خوش شکوفه‌ها، گل‌ها، عطرها و نیز بو و طعم میوه‌ها است.

۲) ویتامین K (ویتامین حل شده) همانند ویتامین D یک ویتامین **ناقطبی** و محلول در چربی است.

۴) ویتامین K (ویتامین حل شده) در ساختار خود دو گروه عاملی **کربونیل** دارد و کتون محسوب می‌شود.



شب امتحان حوصله نداری دیگه درس بخونی؟! خب درساتو گوش کن!

✓ پادکست های شب امتحان، ویژه مرور و یادگیری
دروس و نکات مهم در لحظات آخر قبل امتحان



اسکن کن!

برای دریافت
روی لینک بزن!
digimaze.org



دیجی ماز