

آزمون آزمایشی خیلی سبز



مرحله نهم

پایه یازدهم

سال تحصیلی ۱۴۰۳-۰۴ تاریخ برگزاری: ۱۵/فروردین/۱۴۰۴

بودجه بندی دروس

حسابان (۱)	آمار و احتمال	هندسه (۲)
فصل ۱ تا ۳ و فصل ۴ (درس ۱ تا ۳) صفحه ۱۰۹ تا ۱۰۹	فصل ۱ و ۲ و فصل ۳ (درس ۱ و ۲) صفحه ۸۶ تا ۸۶	فصل ۱ و ۲ و فصل ۳ (درس ۱) صفحه ۶۳ تا ۶۳
فیزیک (۲)	شیمی (۲)	
فصل ۱ و فصل ۲ و فصل ۳ (تا ابتدای ویژگی های مغناطیسی مواد) صفحه ۱۰۱ تا ۱۰۱	فصل ۱ و فصل ۲ صفحه ۹۸ تا ۹۸	

مواد امتحانی	تعداد سؤال	از شماره	تا شماره	مدت پاسخگویی
حسابان	۲۰	۱	۲۰	۳۰ دقیقه
هندسه	۱۰	۲۱	۳۰	۲۰ دقیقه
آمار و احتمال	۱۰	۳۱	۴۰	۲۰ دقیقه
فیزیک	۲۰	۴۱	۶۰	۳۰ دقیقه
شیمی	۲۰	۶۱	۸۰	۲۰ دقیقه
مجموع	۸۰ سؤال			۱۲۰ دقیقه

این آزمون نمره منفی دارد.

استفاده از ماشین حساب مجاز نیست.

دفتر چه سوالات آزمون های خیلی سبز، از همه نظر (تعداد سؤال ها، زمان پاسخگویی، نوع چینش گزینه ها، نوع صفحه آرایی، فونت سوالات، سایز کلمات و اعداد، جای خالی محل انجام محاسبات و...) در شبیه ترین حالت به دفترچه سوالات کنکور سراسری طراحی می شود.



حسابان یازدهم

۱- اگر $x = a$ جواب معادله $\frac{1}{x} + \sqrt{\frac{x+2}{x}} = 7$ باشد، حاصل $\frac{2+a}{1-a}$ کدام است؟

- (۱) ۳ (۲) ۴ (۳) ۵ (۴) ۶

۲- سهمی به معادله $f(x) = -4x^2 + bx + c$ با رأس $S(1, 16)$ محور x را در دو نقطه قطع می‌کند. خط گذرنده از رأس سهمی و صفر مثبت تابع، با کدام طول خط گذرنده از صفر منفی و عرض از مبدأ نمودار تابع را قطع می‌کند؟

- (۱) $0/4$ (۲) $0/8$ (۳) $0/6$ (۴) $0/2$

۳- اگر مجموعه جواب‌های نامعادله $a < |x-b| < c$ به صورت $(7, 9) \cup (-6, -4)$ باشد، اختلاف جواب‌های معادله $|x-a| + |x-b| = c$ کدام است؟

- (۱) ۷ (۲) $7/5$ (۳) $3/5$ (۴) $1/5$

۴- اگر $f(x) = 2 - |x+3|$ و $g(x) = \sqrt{(x^2 + 6x + 9)(1-x^2)}$ باشد، دامنه تابع $g \circ f$ شامل چند عدد صحیح است؟

- (۱) ۳ (۲) ۵ (۳) ۶ (۴) ۸

۵- اگر $x[x] = 8$ ، مقدار $[-2x]$ کدام است؟ ([] نماد جزء صحیح است.)

- (۱) -4 (۲) ۴ (۳) ۵ (۴) -5

۶- تابع $f(x) = \begin{cases} 2-3x, & x \leq -\frac{3}{2} \\ 2+2mx-x^2, & x > -\frac{3}{2} \end{cases}$ یک‌به‌یک است. حدود m کدام است؟

- (۱) $[-1/5, +\infty)$ (۲) $[-2/25, -1/5]$

- (۳) $[-\sqrt{4/5}, -1/5]$ (۴) $[-\sqrt{4/5}, +\infty)$

۷- در چه تعداد از موارد زیر، توابع f و g مساوی هستند؟ ([] نماد جزء صحیح است.)

(الف) $f(x) = 2^{\log_2 x}$ ، $g(x) = x$ (ب) $f(x) = \left\lfloor \frac{|x|}{|x|+1} \right\rfloor$ ، $g(x) = \left\lfloor \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1} \right\rfloor$

(ج) $f(x) = \sqrt{4x^4 - x^2}$ ، $g(x) = x\sqrt{4x^2 - 1}$ (د) $f(x) = \sqrt{\frac{x-3}{x-1}}$ ، $g(x) = \frac{\sqrt{x-3}}{\sqrt{x-1}}$

- (۱) صفر (۲) ۱ (۳) ۲ (۴) ۳

محل انجام محاسبات



۸- در تابع خطی f ، اگر $f(2) = 3$ و $f(-2) = -5$ باشد، مجموع اعداد طبیعی که در برد تابع $g(x) = \frac{3f(x)-7}{f(x)-3}$ با دامنه $(-\infty, 0] \cup (2, +\infty)$ قرار ندارند، کدام است؟

- (۱) ۱ (۲) ۳ (۳) ۵ (۴) ۶

۹- اگر f و g دو تابع خطی با شیب مثبت باشند به طوری که $\left(\frac{f^{-1} \circ g}{g^{-1} \circ f}\right)(x) = \frac{9x+6}{x-m}$ ، مقدار m کدام است؟

- (۱) ۱ (۲) -۱ (۳) ۲ (۴) -۲

۱۰- تابع f با ضابطه $f(x) = -2x + a$ مفروض است. اگر معادله $f(x)f^{-1}(x) = (f^{-1} - f)(x)$ یک جواب داشته باشد، مجموع مقادیر قابل قبول برای a کدام است؟

- (۱) -۱۰ (۲) ۱۰ (۳) ۹ (۴) -۹

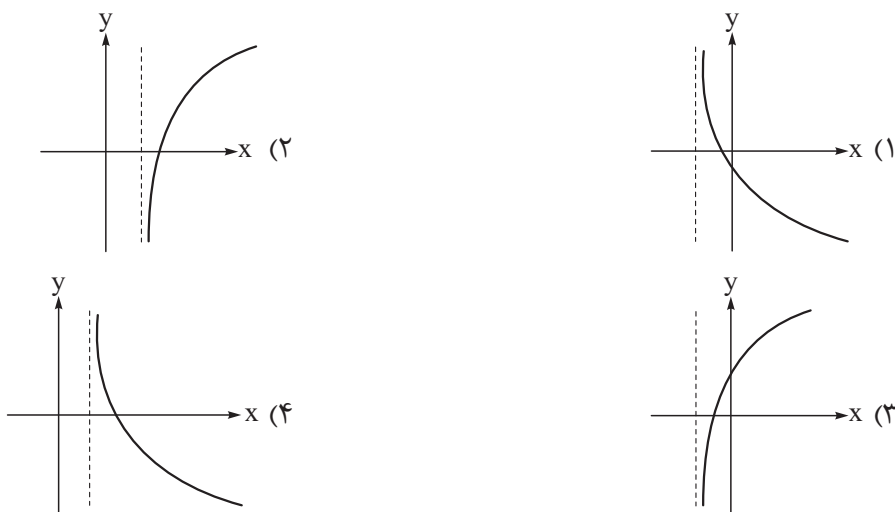
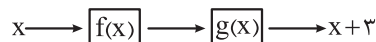
۱۱- نمودار تابع $f(x) = \log_2(ax+8) - 2$ محور طول‌ها را در نقطه A و محور عرض‌ها را در نقطه B قطع می‌کند. اگر نسبت طول نقطه A به عرض نقطه B برابر ۸ باشد، حاصل $[f(-30)]$ کدام است؟ ([] نماد جزء صحیح است.)

- (۱) صفر (۲) ۱ (۳) ۲ (۴) -۱

۱۲- مقدار x از معادله $\log_6(2 \log_3(20 + \log_3 x)) = 1$ کدام است؟

- (۱) ۲۵۶ (۲) ۶۴ (۳) ۳۲ (۴) ۱۲۸

۱۳- با توجه به ماشین زیر، اگر $g(x) = 2^{x-1} + 1$ باشد، نمودار تابع f کدام گزینه می‌تواند باشد؟



محل انجام محاسبات



۱۴- اگر $f(\log_3(x+2)) = x+1$ و $g^{-1}(\log_6(x+6)) = 3x+2$ ، آنگاه حاصل $\frac{\log 7}{\log 3}$ کدام است؟

(۱) $f^{-1}(5) \times g(5)$ (۲) $f^{-1}(5) + g^{-1}(2)$ (۳) $f^{-1}(4) + g(5)$ (۴) $g^{-1}(2) + f^{-1}(4)$

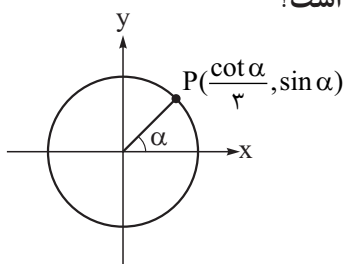
۱۵- اگر $x = a$ جواب معادله $\log_2\left(\frac{2^{x-15}}{64}\right) = 1-x$ باشد، مقدار $\left[\frac{a}{7}\right]$ کدام است؟ ([] نماد جزء صحیح است.)

(۱) ۶ (۲) ۵ (۳) ۴ (۴) ۷

۱۶- رأس ساعت $3:00:00$ ، عقربه‌های ثانیه‌شمار، دقیقه‌شمار و ساعت‌شمار شروع به حرکت می‌کنند و در مجموع با هم 73300° حرکت کرده‌اند، زمان کنونی کدام است؟

(۱) $6:40'$ (۲) $5:40'$ (۳) $6:20'$ (۴) $4:50'$

۱۷- در شکل زیر، نقطه P روی دایره مثلثاتی قرار دارد. حاصل $\sin\left(\frac{27\pi}{4} + \alpha\right)$ کدام است؟



(۱) $\frac{2\sqrt{2}}{3}$ (۲) $-\frac{2\sqrt{2}}{3}$ (۳) $\frac{\sqrt{2}}{3}$ (۴) $-\frac{\sqrt{2}}{3}$

۱۸- اگر $x \in [0, 2\pi]$ باشد، مجموعه جواب‌های نامعادله $\frac{\sin^2(10\pi - x) - \cos^2(13\pi + x)}{\sin(8\pi + x) - \cos(x - 11\pi)} > 0$ کدام است؟

(۱) $(0, \frac{\pi}{4})$ (۲) $(\frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4})$ (۳) $(\frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}) - \left\{\frac{3\pi}{4}\right\}$ (۴) $(\frac{3\pi}{4}, \frac{7\pi}{4})$

۱۹- حاصل عبارت $(\tan(44^\circ) + \frac{1}{\sin(-17^\circ)})(\sin 26^\circ - 1)$ کدام است؟

(۱) $\sin 1^\circ$ (۲) $\cos 1^\circ$ (۳) $\tan 1^\circ$ (۴) $\cot 1^\circ$

۲۰- معادله $x - 10 \sin x = 0$ دارای چند جواب است؟

(۱) ۱ (۲) ۳ (۳) ۵ (۴) ۷

محل انجام محاسبات

هندسه یازدهم

۲۱- کدام گزینه در مورد تبدیل طولیا همواره درست است؟

- (۱) جهت شکل‌ها را حفظ می‌کند.
 (۲) شیب خط‌ها را حفظ می‌کند.
 (۳) اندازه زاویه‌ها را حفظ می‌کند.
 (۴) حداقل یک نقطه ثابت تبدیل دارد.

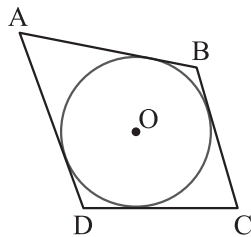
۲۲- در مثلث ABC ، $\hat{A} = 75^\circ$ ، $\hat{B} = 60^\circ$ و $AB = 2\sqrt{2}$ است. مجموع فواصل نقطه هم‌رسی عمود منصف‌های مثلث ABC از سه رأس آن کدام است؟

- (۱) ۶ (۲) $3\sqrt{2}$ (۳) ۹ (۴) $4\sqrt{2}$

۲۳- اگر شعاع دایره محاطی داخلی مثلث متساوی‌الساقینی برابر ۳ و طول ارتفاع وارد بر قاعده آن برابر ۸ باشد، طول هر کدام از ارتفاع‌های وارد بر ساق‌های این مثلث کدام است؟

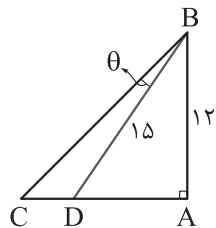
- (۱) ۶ (۲) $7/2$ (۳) $8/4$ (۴) $9/6$

۲۴- در شکل زیر، چهارضلعی $ABCD$ محیطی و O مرکز دایره محاطی آن است. اگر محیط این چهارضلعی ۴۴، طول AB برابر ۱۲ و $AD \parallel BC$ باشد، حاصل $OC^2 + OD^2$ کدام است؟



- (۱) ۸۱ (۲) ۱۰۰ (۳) ۱۴۴ (۴) ۱۶۹

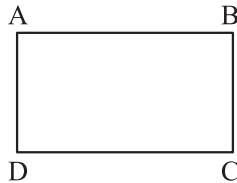
۲۵- در شکل زیر، اگر مثلث ABC قائم‌الزاویه متساوی‌الساقین باشد، آن‌گاه مقدار $\sin \theta$ کدام است؟



- (۱) $\frac{1}{5}$ (۲) $\frac{1}{3}$ (۳) $\frac{\sqrt{3}}{15}$ (۴) $\frac{\sqrt{2}}{10}$

۲۶- طول مستطیل $ABCD$ برابر با ۷ و عرض آن برابر با ۴ است. این مستطیل را نسبت به ضلع CD بازتاب می‌دهیم

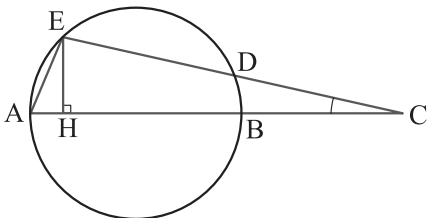
تا چهارضلعی $A'B'C'D'$ پدید آید. چهارضلعی جدید را حول نقطه B' به اندازه 90° در جهت حرکت عقربه‌های ساعت دوران می‌دهیم تا چهارضلعی $A''B''C''D''$ حاصل شود، طول پاره خط AA'' کدام است؟



- (۱) $2\sqrt{10}$ (۲) $5\sqrt{2}$ (۳) $5\sqrt{3}$ (۴) $3\sqrt{10}$

محل انجام محاسبات

۲۷- در شکل زیر، AB قطر دایره است. از نقطه C روی امتداد AB ، قاطع CDE را چنان رسم کرده‌ایم که $\widehat{ACE} = 18^\circ$ و طول وتر DE دو برابر طول EH است. اندازه زاویه $\widehat{AEH}$ چند درجه است؟



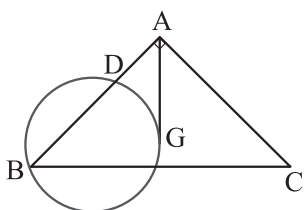
(۱) ۳۶

(۲) ۳۲

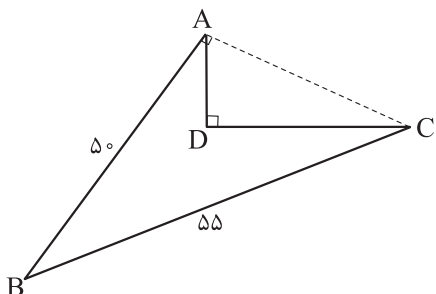
(۳) ۲۷

(۴) ۲۴

۲۸- در مثلث قائم‌الزاویه ABC ($\widehat{A} = 90^\circ$)، نقطه هم‌رسی میانه‌ها است. دایره‌ای از رأس B می‌گذرد که در نقطه G بر AG مماس است و ضلع AB را در نقطه D قطع می‌کند. اگر $AD = 4$ و $BD = 5$ باشد، طول ضلع AC کدام است؟

(۱) $9\sqrt{3}$ (۲) $12\sqrt{3}$ (۳) $6\sqrt{3}$ (۴) $8\sqrt{3}$

۲۹- مطابق شکل زیر، زمینی به شکل چهارضلعی $ABCD$ در اختیار داریم، به طوری که مثلث ABC در رأس A قائم‌الزاویه است. اگر $\widehat{BAD} = 15^\circ$ باشد و بخواهیم بدون تغییر در تعداد اضلاع و محیط این زمین، مساحت آن را تا حد ممکن افزایش دهیم، میزان این افزایش مساحت چه قدر است؟

(۱) $131/25$ (۲) $132/5$ (۳) $133/75$

(۴) ۱۳۵

۳۰- کم‌ترین مقدار محیط دوزنقه‌هایی به طول قاعده‌های ۲۵ و ۵ و مساحت $112/5$ که در قاعده بزرگ‌تر مشترک هستند، کدام است؟

(۴) ۶۵

(۳) ۶۰

(۲) ۵۵

(۱) ۵۰

محل انجام محاسبات

آمار و احتمال

۳۱- اگر گزاره p درست، q گزاره نادرست و r گزاره دلخواه باشد، گزاره $(p \Rightarrow r) \Leftrightarrow (r \wedge q)$ هم‌ارز منطقی کدام گزاره است؟

- (۱) r (۲) T (۳) $\sim r$ (۴) F

۳۲- اگر گزاره‌های p و q به تصادف انتخاب شوند، با کدام احتمال ارزش گزاره $(p \Rightarrow \sim q) \vee (q \Leftrightarrow \sim p)$ درست است؟

- (۱) $\frac{1}{4}$ (۲) $\frac{1}{2}$ (۳) $\frac{3}{4}$ (۴) صفر

۳۳- برای سه مجموعه ناتهی A ، B و C می‌دانیم $(x \in A) \Rightarrow ((x \notin B) \vee (x \in C))$ ، $\forall x$ ، در این صورت کدام نتیجه‌گیری الزاماً درست است؟

$$A \cap B = A \cap B \cap C \quad (۲) \quad A \cap B \cap C = \emptyset \quad (۱)$$

$$A \cup C = B \cup C \quad (۴) \quad (A - B) \cup (B - A) = A \cup B \quad (۳)$$

۳۴- در مدرسه‌ای ۶۰ درصد دانش‌آموزان در رشته تجربی و ۴۰ درصد دانش‌آموزان در رشته ریاضی تحصیل می‌کنند. در این مدرسه، $\frac{1}{3}$ دانش‌آموزان رشته تجربی و $\frac{1}{x}$ دانش‌آموزان رشته ریاضی، معدل بالای ۱۸ کسب کرده‌اند. اگر دانش‌آموزی به تصادف از این مدرسه انتخاب کنیم و معدل او بالای ۱۸ باشد، احتمال آن که این فرد دانش‌آموز رشته تجربی باشد برابر $\frac{1}{3}$ است. مقدار x کدام است؟

- (۱) ۴ (۲) ۳ (۳) ۲ (۴) ۱

۳۵- در جریان یک مسابقه، بازیکن A دو پنالتی می‌زند. این بازیکن با احتمال ۸۰ درصد پنالتی اول را گل می‌کند که در این صورت احتمال گل شدن پنالتی دوم ۷۰ درصد است. اگر این بازیکن پنالتی اول را گل نکند، احتمال گل شدن پنالتی دوم ۵۰ درصد است. با چه احتمالی وضعیت گل شدن دو پنالتی مشابه است؟

- (۱) $0/34$ (۲) $0/56$ (۳) $0/66$ (۴) $0/9$

۳۶- یک تاس به گونه‌ای ساخته شده است که احتمال وقوع هر عدد اول، چهار برابر احتمال وقوع هر عدد غیراول است. در دو بار پرتاب این تاس، احتمال این که حداقل یک بار عدد زوج مشاهده شود چه قدر است؟

- (۱) $0/16$ (۲) $0/52$ (۳) $0/64$ (۴) $0/92$

۳۷- تعدادی داده آماری داریم. فراوانی دسته اول برابر ۱ است. اگر به این دسته دو داده اضافه کنیم و فراوانی مابقی دسته‌ها را تغییر ندهیم، فراوانی نسبی این دسته ۱۵٪ افزایش می‌یابد. تعداد داده‌های اولیه کدام است؟

- (۱) ۹ (۲) ۱۰ (۳) ۱۲ (۴) ۱۵

محل انجام محاسبات

۳۸- تابع f با ضابطه $f(x) = 2x + 3$ و دامنه اعداد طبیعی دورقمی مفروض است. میانه اعضای برد این تابع کدام است؟

- (۱) ۱۰۶ (۲) ۱۰۹ (۳) ۱۱۲ (۴) ۱۱۵

۳۹- ۲۰ داده آماری متمایز داریم. میانگین داده های بزرگ تر از چارک سوم برابر ۷ و میانگین داده های کوچک تر از چارک سوم برابر ۵ است. اگر میانگین داده های بزرگ تر از چارک اول برابر ۶ باشد، میانگین داده های کوچک تر از چارک اول کدام است؟

- (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴) ۵

۴۰- در داده های a_1, a_2, a_3, a_4 مد منحصر به فرد برابر ۳، در داده های b_1, b_2, b_3 مد برابر ۵ و در داده های c_1, c_2, c_3 مد برابر ۴ است. مد منحصر به فرد کل ۱۰ داده برابر ۲ است. میانگین این ۱۰ داده برابر کدام یک از گزینه های زیر می تواند باشد؟

- (۱) ۳/۱ (۲) ۳/۲ (۳) ۳/۳ (۴) ۳/۴

محل انجام محاسبات

فیزیک یازدهم

۴۱- بار الکتریکی هسته اتمی ۶ برابر بار آن اتم در حالت یونیده است. اگر این اتم در حالت خنثی ۱۲ الکترون داشته باشد، بار آن در این حالت یونیده چند نانوکولن است؟ ($e = 1/6 \times 10^{-19} \text{ C}$)

$$(1) \quad 3/2 \times 10^{-19} \quad (2) \quad 3/2 \times 10^{-10}$$

$$(3) \quad 10/8 \times 10^{-19} \quad (4) \quad 10/8 \times 10^{-10}$$

۴۲- دو کره رسانای کوچک (۱) و (۲) با بارهای الکتریکی به ترتیب q_1 و $q_2 = -5q_1$ در فاصله r از هم قرار دارند. اندازه نیروی الکتریکی که دو کره در این حالت به هم وارد می کنند، برابر F است. چند درصد از بار کره (۲) را به کره (۱) منتقل کنیم تا از فاصله $3r$ ، دو کره بر هم نیروی الکتریکی دافعه ای به بزرگی $\frac{F}{15}$ وارد کنند؟

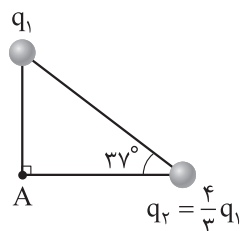
$$(1) \quad 40 \quad (2) \quad 50 \quad (3) \quad 75 \quad (4) \quad 80$$

۴۳- سه بار الکتریکی نقطه ای $q_1 = 3 \mu\text{C}$ ، $q_2 = 12 \mu\text{C}$ و q_3 در مکان های معینی روی خط راست ثابت شده اند. اگر نیروی الکتریکی خالص وارد بر هر یک از بارها برابر با صفر باشد، q_3 چند میکروکولن است؟

$$(1) \quad \frac{2}{3} \quad (2) \quad \frac{4}{3}$$

$$(3) \quad \frac{-2}{3} \quad (4) \quad \frac{-4}{3}$$

۴۴- در شکل زیر اندازه میدان الکتریکی حاصل از بار نقطه ای q_1 در نقطه A برابر $8 \times 10^6 \text{ N/C}$ است. اگر بار الکتریکی نقطه ای $Q = 2 \mu\text{C}$ را در نقطه A قرار دهیم، بزرگی نیروی الکتریکی وارد بر این بار چند نیوتون خواهد بود؟ ($\sin 37^\circ = 0/6$)



$$(1) \quad 16$$

$$(2) \quad 18$$

$$(3) \quad 20$$

$$(4) \quad 24$$

۴۵- ذره ای با بار الکتریکی $q = 4 \mu\text{C}$ در میدان الکتریکی یکنواخت بین دو صفحه رسانای باردار از نقطه A به طرف نقطه B پرتاب می شود. اگر انرژی جنبشی این ذره در نقاط A و B به ترتیب 200 mJ و 300 mJ باشد، اختلاف پتانسیل الکتریکی دو نقطه A و B ($V_B - V_A$) چند کیلوولت است؟

$$(1) \quad 25 \quad (2) \quad -25$$

$$(3) \quad 250 \quad (4) \quad -250$$

محل انجام محاسبات

۴۶- یک جسم رسانای توپر مکعبی شکل به ضلع 20 cm دارای 12 nC بار الکتریکی است. چه تعداد از موارد زیر درباره این جسم درست است؟

- میدان الکتریکی خالص درون جسم رسانا برابر صفر است.
- در بیرون جسم، میدان الکتریکی عمود بر سطح آن است.
- پتانسیل الکتریکی در رأس‌های این مکعب (نقاط نوک تیز جسم) بیشتر است.
- با فرض توزیع یکنواخت بار در سطح رسانا، چگالی سطحی بار الکتریکی برابر $3\text{ }\mu\text{C/m}^2$ است.

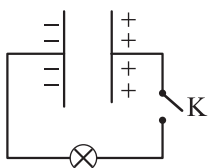
(۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴

۴۷- در هر کلید یک صفحه کلید رایانه، فاصله بین صفحه‌های خازن تخت $4/5\text{ mm}$ است که این فاصله با فشار دادن کلید به 5 mm می‌رسد. مساحت صفحه‌های این خازن 10^{-4} m^2 و فضای بین دو صفحه از ماده‌ای با ثابت دی‌الکتریک 5 پر شده است. اگر دو سر این خازن به اختلاف پتانسیل ثابت 5 V وصل شده باشد، با فشار دادن کلید، بار ذخیره شده در خازن چند پیکوکولن تغییر می‌کند؟ ($\epsilon_0 = 9 \times 10^{-12}\text{ F/m}$)

(۱) ۸ (۲) ۴

(۳) ۸۰ (۴) ۴۰

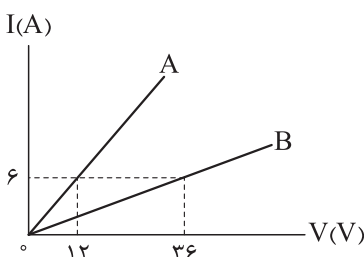
۴۸- در شکل زیر، خازن پُر شده‌ای به دو سر لامپ فلاش یک دوربین عکاسی متصل است. با وصل کردن کلید K و شارش 5×10^{14} الکترون در مدار، خازن با توان متوسط 4 kW به طور کامل تخلیه شده و لامپ به مدت 2 ms روشن می‌شود. ظرفیت این خازن چند نانوفاراد است؟ ($e = 1/6 \times 10^{-19}\text{ C}$)



(۱) ۱/۰ (۲) ۴/۰

(۳) ۱ (۴) ۴

۴۹- نمودار جریان الکتریکی عبوری از دو مقاومت A و B بر حسب اختلاف پتانسیل الکتریکی دو سر آن‌ها به شکل زیر است. اگر اختلاف پتانسیل یکسان 30 V به دو سر هر یک از این مقاومت‌ها اعمال شود، اختلاف جریان الکتریکی عبوری از آن‌ها چند آمپر خواهد بود؟



(۱) ۵

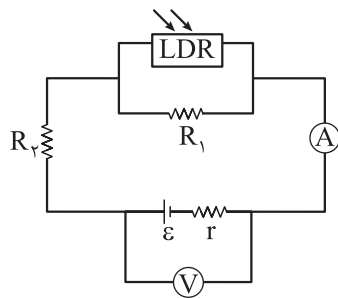
(۲) ۱۰

(۳) ۱۵

(۴) ۲۰

محل انجام محاسبات

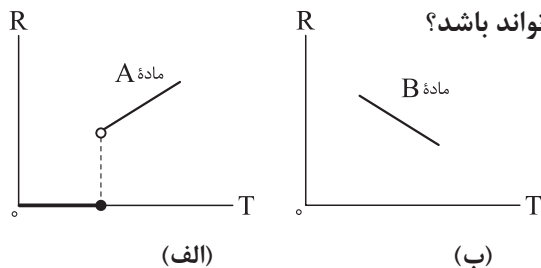
۵۰- در مدار شکل زیر، با افزایش نور محیط، اعدادی که آمپرسنج آرمانی و ولتسنج آرمانی نشان می‌دهند، به ترتیب



از راست به چپ چگونه تغییر می‌کند؟

- (۱) کاهش می‌یابد، کاهش می‌یابد.
- (۲) افزایش می‌یابد، افزایش می‌یابد.
- (۳) کاهش می‌یابد، افزایش می‌یابد.
- (۴) افزایش می‌یابد، کاهش می‌یابد.

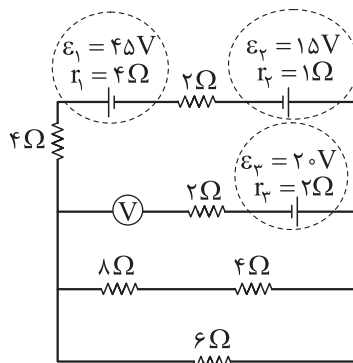
۵۱- نمودارهای (الف) و (ب) چگونگی تغییر مقاومت ویژه دو ماده A و B را بر حسب تغییر دمای آن‌ها به طور کیفی



نشان می‌دهد. به ترتیب از راست به چپ، جنس ماده‌های A و B کدام می‌تواند باشد؟

- (۱) قلع، ژرمانیم
- (۲) جیوه، مس
- (۳) نقره، قلع
- (۴) سیلیسیم، جیوه

۵۲- در مدار شکل روبه‌رو، ولتسنج آرمانی چند ولت را نشان می‌دهد؟



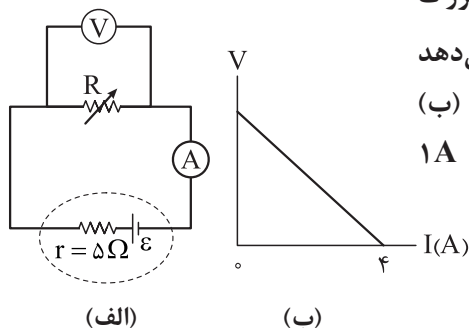
(۱) ۴

(۲) ۱۲

(۳) ۲۸

(۴) ۳۶

۵۳- در مدار شکل (الف)، مقاومت متغیر R را از صفر تا مقادیر بسیار بزرگ



افزایش می‌دهیم. نمودار تغییرات مقداری که ولتسنج آرمانی نشان می‌دهد

بر حسب تغییرات مقداری که آمپرسنج آرمانی نشان می‌دهد، به شکل (ب)

است. مقاومت متغیر R را روی چند اهم تنظیم کنیم تا آمپرسنج عدد ۱A

را نشان دهد؟

(۴) ۱۵

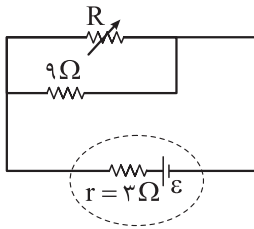
(۳) ۱۰

(۲) ۷/۵

(۱) ۵

محل انجام محاسبات

۵۴- در مدار شکل زیر، مقاومت رئوستا از $R_1 = 18 \Omega$ به R_2 می‌رسد. اگر توان خروجی باتری در این دو حالت برابر باشد، R_2 چند اهم است؟



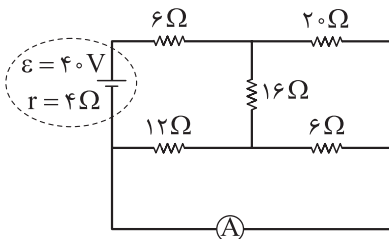
$$(2) \quad 1/5$$

$$(1) \quad 0/9$$

$$(4) \quad 3$$

$$(3) \quad 1/8$$

۵۵- در مدار شکل زیر، آمپرسنج آرمانی، چند آمپر را نشان می‌دهد؟



$$(1) \quad 1$$

$$(2) \quad \frac{4}{3}$$

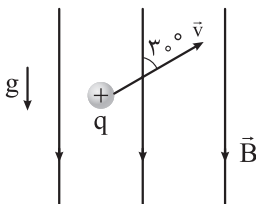
$$(3) \quad \frac{5}{3}$$

$$(4) \quad 2$$

۵۶- ذره‌ای به جرم 2 g و بار الکتریکی $4 \mu\text{C}$ در راستای افقی با تندی 500 km/s به سمت شرق پرتاب می‌شود. در محل پرتاب این ذره، میدان الکتریکی یکنواخت $E = 2 \times 10^4 \text{ N/C}$ ، عمود بر سطح زمین و رو به پایین و میدان مغناطیسی یکنواخت $\vec{B}$ وجود دارد. اگر ذره بدون انحراف به مسیر خود ادامه دهد، $\vec{B}$ چند گاوس و در کدام جهت است؟ ($g = 10 \text{ N/kg}$)

$$(1) \quad 300, \text{ شمال} \quad (2) \quad 300, \text{ جنوب} \quad (3) \quad 500, \text{ شمال} \quad (4) \quad 500, \text{ جنوب}$$

۵۷- در شکل زیر، ذره‌ای به جرم 8 g و بار الکتریکی $q = +2 \mu\text{C}$ در میدان مغناطیسی یکنواختی به بزرگی $B = 60 \text{ mT}$ با تندی $v = 10^5 \text{ m/s}$ پرتاب می‌شود. در این لحظه اندازه شتاب ذره چند متر بر مربع ثانیه است؟ ($g = 10 \text{ m/s}^2$)



$$(1) \quad 2/5$$

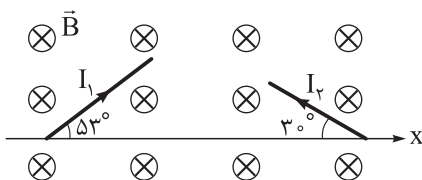
$$(2) \quad 7/5$$

$$(3) \quad 12/5$$

$$(4) \quad 17/5$$

۵۸- در شکل زیر، دو سیم مستقیم (۱) و (۲)، به ترتیب حامل جریان‌های الکتریکی $I_1 = 5 \text{ A}$ و I_2 ، در میدان مغناطیسی یکنواخت درون‌سویی قرار دارند. اگر بزرگی نیروی مغناطیسی وارد بر واحد طول سیم (۱)، دو برابر بزرگی

نیروی مغناطیسی وارد بر واحد طول سیم (۲) باشد، جریان I_2 چند آمپر است؟ ($\sin 53^\circ = 0/8$)



$$(1) \quad 1/5$$

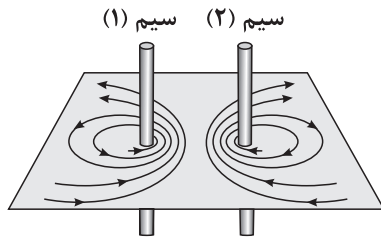
$$(2) \quad 2$$

$$(3) \quad 2/5$$

$$(4) \quad 4$$

محل انجام محاسبات

۵۹- شکل زیر بخشی از خطوط میدان مغناطیسی خالص حاصل از دو سیم موازی حامل جریان را در اطراف آن‌ها نشان می‌دهد. جهت جریان عبوری از سیم (۱) و نوع نیروی مغناطیسی بین دو سیم به ترتیب کدام است؟



(۱) ↑، جاذبه

(۲) ↑، دافعه

(۳) ↓، جاذبه

(۴) ↓، دافعه

۶۰- با استفاده از یک سیم مسی روکش دار به قطر مقطع 2 mm و طول 6 m ، در حالت (۱)، سیم‌لوله‌ای آرمانی با حلقه‌های به هم چسبیده و در حالت (۲) پیچه‌ای مسطح شامل 100 حلقه می‌سازیم. به ازای جریان‌های الکتریکی یکسان عبوری از این سیم‌لوله و پیچه، بزرگی میدان مغناطیسی درون سیم‌لوله چند برابر بزرگی میدان مغناطیسی در مرکز پیچه است؟ ($\pi = 3$ و ضخامت روکش عایق سیم مسی ناچیز است).

(۴) ۰/۱

(۳) ۰/۲

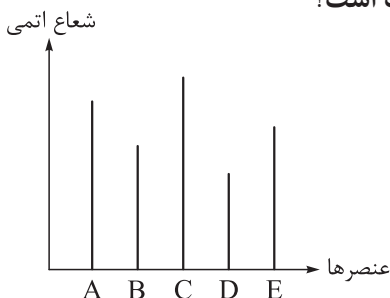
(۲) ۱

(۱) ۲

محل انجام محاسبات

شیمی یازدهم

۶۱- با توجه به نمودار زیر که شعاع اتمی چند عنصر متوالی دوره سوم جدول دوره‌ای را به صورت نسبی و نامرتب نشان می‌دهد؛ اگر مجموع عددهای اتمی این عناصر برابر با ۷۰ باشد، کدام مطلب درست است؟



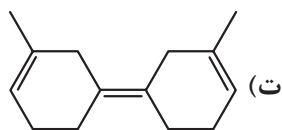
- (۱) آرایش الکترونی اتم همه این عناصر به زیرلایه $1 = l$ ختم می‌شود.
- (۲) عنصر C با گاز کلر به شدت واکنش داده و نوری زردرنگ ساطع می‌کند.
- (۳) عنصر B برخلاف عنصر C، در واکنش با دیگر اتم‌ها الکترون مبادله نمی‌کند.
- (۴) به طور کلی، رفتار شیمیایی عنصر E همانند رفتار شیمیایی عنصر B و خواص فیزیکی آن مشابه خواص فیزیکی عنصر A است.

۶۲- درستی یا نادرستی کدام گزینه با دیگر گزینه‌ها متفاوت است؟

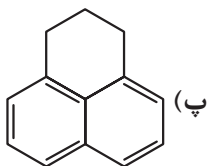
- (۱) یکای رایج دما همان یکای آن در «SI» است.
- (۲) ظرفیت گرمایی یک مول ماده، گرمای ویژه آن را نشان می‌دهد.
- (۳) انرژی گرمایی یک نمونه ماده هم‌ارز با مجموع انرژی جنبشی ذره‌های سازنده آن است.
- (۴) تغییر آنتالپی هر واکنش، هم‌ارز با گرمایی است که در دمای ثابت با محیط پیرامون دادوستد می‌کند.

۶۳- تفاوت جرم مولی کدام دو مولکول، برابر با جرم مولی اولین عضو خانواده آلکان‌ها است؟

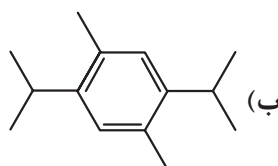
($C = 12, H = 1 : g.mol^{-1}$)



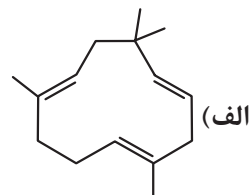
(۴) الف - ب



(۳) ب - ت



(۲) الف - ت



(۱) ب - پ

۶۴- کدام موارد زیر، جاهای خالی موجود در عبارت داده‌شده را به درستی تکمیل می‌کند؟

«اگر در ساختار، گروه‌های CH_3 با گروه‌های C_2H_5 جایگزین شود؛ نام آلکان حاصل به صورت خواهد شد.»

- (الف) ۲- متیل پنتان / ۵- متیل اوکتان
- (ب) دی‌متیل پروپان / ۳،۳- دی‌متیل پنتان
- (پ) ۴،۲،۲- تری‌متیل پنتان / ۵،۳،۳- تری‌اتیل هپتان
- (ت) ۵،۳،۲،۲- تترا‌متیل هگزان / ۶،۴،۳،۳- تترا‌اتیل اوکتان

(۴) الف - ب

(۳) ب - ت

(۲) الف - پ

(۱) پ - ت

محل انجام محاسبات



۶۵- ارزش سوختی گازهای متان و پروپان به ترتیب برابر با ۵۶ و ۵۱ کیلوژول بر گرم است. در اثر سوختن کامل ۶ گرم گاز اتان، به تقریب چند کیلوژول گرما آزاد می‌شود؟ ($C = 12, H = 1: g.mol^{-1}$)

۳۰۷ (۱) ۳۱۴ (۲) ۳۲۱ (۳) ۳۲۸ (۴)

۶۶- چه تعداد از موارد زیر، در ترموشیمی مورد بررسی قرار می‌گیرد؟

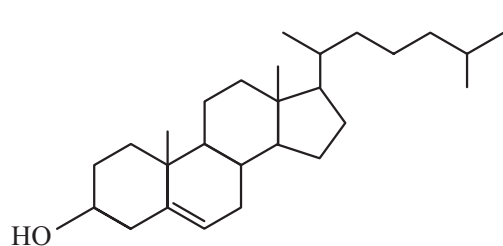
- بررسی کمی و کیفی گرمای واکنش‌ها
- تأثیر گرما بر حالت فیزیکی مواد
- رابطه میان دما و گرما
- شرایط و چگونگی انجام واکنش‌ها
- آهنگ تبدیل واکنش‌دهنده‌ها به فراورده‌ها
- اندازه‌گیری انرژی مواد غذایی

۲ (۱) ۳ (۲) ۴ (۳) ۵ (۴)

۶۷- اگر در واکنش بی‌هوازی تخمیر نمونه‌ای از گلوکز شامل $10^{24} \times 3/01$ مولکول، اختلاف جرم فراورده‌های تولیدشده (اتانول و کربن دی‌اکسید) برابر با ۱۴ گرم باشد؛ بازده این واکنش، چند درصد است؟ ($O = 16, C = 12, H = 1: g.mol^{-1}$)

۴۰ (۱) ۵۰ (۲) ۶۰ (۳) ۷۰ (۴)

۶۸- کدام مطلب، درباره ترکیب با ساختار «پیوند - خط» زیر، درست است؟ ($O = 16, C = 12, H = 1: g.mol^{-1}$)



- (۱) نسبت جرم اتم هیدروژن به جرم اتم اکسیژن در ترکیب مورد نظر برابر ۲/۷۵ است.
- (۲) ترکیب داده‌شده عامل گرفتگی رگ‌ها و سگته بوده و همانند ترکیب آلی موجود در رازیانه، یک الکل سیرنشده است.
- (۳) در ساختار این ترکیب، حدود ۳۰ درصد اتم‌های کربن به یک اتم هیدروژن متصل هستند.
- (۴) تعداد پیوندهای اشتراکی در آن، ۱۹ برابر شمار پیوندهای دوگانه موجود در بنزوئیک اسید است.

۶۹- مطابق معادله زیر، ۲۹ گرم ترکیب Cu_nX با درصد خلوص ۷۵٪ در واکنش با مقدار کافی از فلز پتاسیم، ۹/۶ گرم فلز مس تشکیل می‌دهد. اگر بازده این واکنش برابر با ۶۰ درصد باشد؛ نسبت جرم مولی آنیون X^{n-} به عدد n ، کدام است؟ ($Cu = 64 g.mol^{-1}$) (معادله واکنش، موازنه شود). $Cu_nX(aq) + K(s) \rightarrow K_nX(aq) + Cu(s)$

۲۳ (۱) ۱۱/۵ (۲) ۳۴/۵ (۳) ۴۶ (۴)

محل انجام محاسبات

۷۰- برای کدام پیوند(ها) در مولکول‌های داده شده از مفهوم میانگین آنتالپی پیوند استفاده نمی‌شود؟

(الف) پیوند $N \equiv N$ در مولکول نیتروژن

(ب) پیوند $C=O$ در مولکول کربن دی‌اکسید

(پ) پیوند $C-H$ در مولکول دی‌کلرو متان

(ت) پیوند $H-Cl$ در مولکول هیدروژن کلرید

(۱) فقط ب (۲) ب - پ (۳) فقط الف (۴) الف - ت

۷۱- جدول زیر جرم مخلوط واکنش را بر حسب زمان برای واکنش داده شده نشان می‌دهد. سرعت متوسط تولید گاز در

طول انجام این واکنش بر حسب مول بر دقیقه کدام است و سرعت متوسط واکنش در پانزده ثانیه دوم، به تقریب چند

برابر سرعت آن در سی ثانیه دوم است؟ ($Na = 23, O = 16, N = 14 : g.mol^{-1}$)



زمان (s)	۰	۱۵	۳۰	۴۵	۶۰	۷۵	۹۰
جرم مخلوط واکنش (g)	۳۴/۷۶	۲۹/۳۱	۲۵/۰۶	۲۱/۷۱	۱۹/۰۶	۱۷/۱۶	۱۷/۱۶

(۱) $1/42 - 0/75$ (۲) $1/42 - 0/44$ (۳) $1/82 - 0/44$ (۴) $1/82 - 0/75$

۷۲- درستی یا نادرستی مطالب زیر به ترتیب چگونه است؟

• عنصر اصلی سازنده نفت خام در میان عناصر هم‌دوره خود، کم‌ترین واکنش‌پذیری را دارد.

• اولین شبه‌فلز گروه چهاردهم جدول دوره‌ای، عنصر اصلی سازنده سلول‌های خورشیدی بوده و می‌توان آن را از واکنش ترکیب SiO_2 با کربن تهیه کرد.

• عنصری که در دوره و گروه چهارم جدول تناوبی قرار دارد؛ فلزی محکم با چگالی کم بوده که در دوچرخه‌سازی استفاده می‌شود.

• هیدروکربنی که در جوش کاربردی استفاده می‌شود، با برم مایع واکنش داده و ترکیبی با نام تترابرو اتن ایجاد می‌کند.

(۱) نادرست - نادرست - درست - نادرست (۲) درست - درست - درست - نادرست

(۳) نادرست - درست - درست - نادرست (۴) نادرست - درست - نادرست - نادرست

۷۳- آلیاژ نیتینول از دو فلز تیتانیوم و نیکل تشکیل شده است. یک نمونه $900^\circ C$ گرمی از این آلیاژ با دمای $31^\circ C$ را درون

$200^\circ C$ گرم آب با دمای $49/6^\circ C$ می‌اندازیم. اگر درصد جرمی نیکل در آلیاژ مورد نظر، $8/0$ برابر تیتانیوم باشد، تغییر

دمای آب چند برابر تغییر دمای آلیاژ است؟ ($c_{Ni} = 0/48, c_{Ti} = 0/54, c_{H_2O} = 4/2 : J.g^{-1}.^\circ C^{-1}$)

(۱) $37/0$ (۲) $46/0$ (۳) $55/0$ (۴) $64/0$

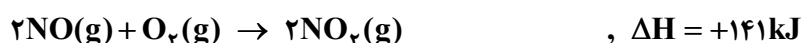
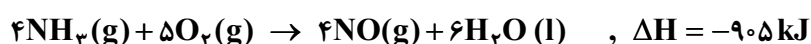
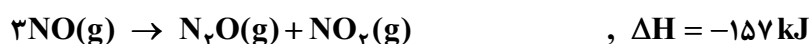
محل انجام محاسبات

۷۴- کدام موارد از مطالب زیر دربارهٔ هگزان (A) و ۱- هگزن (B)، نادرست است؟

الف) این دو هیدروکربن ایزومر یکدیگرند و دارای ۶ اتم کربن هستند.
 ب) در دمای اتاق، هر دو ترکیب، مایع و بی‌رنگ هستند و واکنش‌پذیری ترکیب B نسبت به ترکیب A بیشتر است.
 پ) هیدروکربن B در واکنش با گاز هیدروژن در مجاورت کاتالیزگر سولفوریک اسید، به هیدروکربن A تبدیل می‌شود.
 ت) شمار پیوندهای اشتراکی C—H در ساختار A، چهار برابر شمار پیوندهای اشتراکی C—C در ساختار B است.

(۱) الف - ب - ت (۲) ب - پ - ت (۳) الف - ب - پ (۴) الف - پ - ت

۷۵- با توجه به واکنش‌های داده‌شده، برای تهیه هر مول نیتریک اسید در واکنش:



(۱) ۱۶۱ / ۲۵ (۲) ۳۲۲ / ۵ (۳) ۴۸۳ / ۷۵ (۴) ۶۴۵

۷۶- با توجه به داده‌های جدول زیر، کدام مقایسه دربارهٔ واکنش‌پذیری فلزها درست است؟ (علامت ✓ به معنی واکنش دادن و علامت ✗ به معنای واکنش ندادن فلز با محلول است.)

فلز \ محلول	A	D	M	X
XNO_3	✓	✓	✓	
D_3PO_4	✗		✗	✗
ASO_4		✓	✓	✗
MCl_3	✗	✓		✗

(۱) $\text{X} > \text{A} > \text{M} > \text{D}$

(۲) $\text{X} < \text{A} < \text{M} < \text{D}$

(۳) $\text{D} > \text{A} > \text{M} > \text{X}$

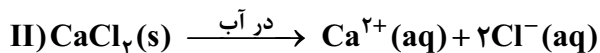
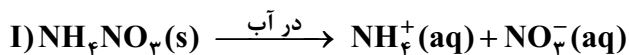
(۴) $\text{D} < \text{A} < \text{X} < \text{A}$

۷۷- مخلوطی از بنزن و نفتالن به جرم ۵۸ گرم را در حضور کاتالیزگر مناسب با ۵ گرم گاز هیدروژن به طور کامل واکنش می‌دهیم. اگر پس از پایان واکنش، گاز هیدروژن باقی‌مانده با ۴ گرم گاز اکسیژن به طور کامل بسوزد؛ به تقریب چند درصد جرمی مخلوط اولیه را هیدروکربن با نقطهٔ جوش بالاتر تشکیل داده است؟ ($\text{O} = 16, \text{C} = 12, \text{H} = 1: \text{g.mol}^{-1}$)

(۱) ۵۵ (۲) ۶۵ (۳) ۴۵ (۴) ۷۵

محل انجام محاسبات

۷۸- با توجه به معادله‌های ترموشیمیایی داده شده، چند مورد از مطالب زیر نادرست است؟



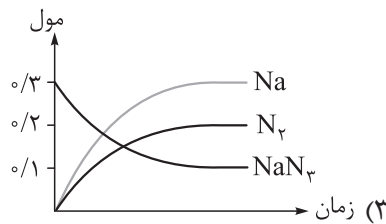
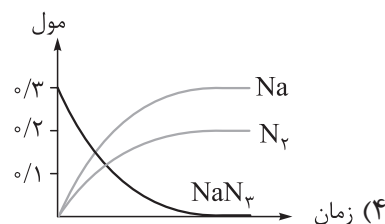
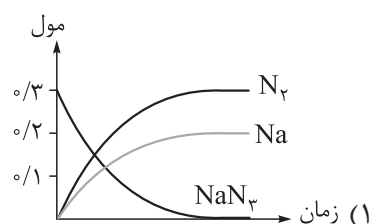
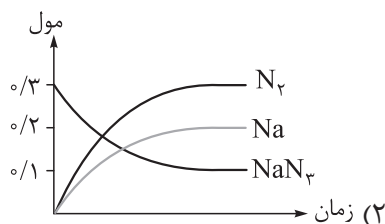
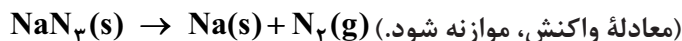
- علامت ΔH فرایند (II) و واکنش $\text{N}_2\text{O}_4(\text{g}) \rightarrow 2\text{NO}_2(\text{g})$ یکسان است.
- از فرایند انحلال $\text{NH}_4\text{NO}_3(\text{s})$ در آب، برای سرد کردن محل آسیب دیدگی بدن ورزشکاران استفاده می شود.
- با انحلال مخلوطی از کلسیم کلرید و آمونیوم نیترات با نسبت مولی برابر در آب، دمای محلول کاهش می یابد.
- شمار پیوندهای کووالانسی در هر واحد فرمولی از واکنش دهنده فرایند (I)، دو برابر شمار پیوندهای کووالانسی ترکیب هیدروژن سیانید (HCN) است.

۴ (۱) ۳ (۲) ۲ (۳) ۱ (۴)

۷۹- کدام مطلب درست است؟

- (۱) ذرات سازنده گازوئیل، در مقایسه با ذرات سازنده نفت سفید، در نقاط بالاتری از برج تقطیر نفت خام جدا می شوند.
- (۲) سوخت هواپیما به طور عمده از ماده‌ای تهیه می شود که از آلکان‌هایی با ۳۱ تا ۴۶ جفت الکترون پیوندی تشکیل شده است.
- (۳) درصد فراوانی مولکول‌های سازنده بنزین و مواد پتروشیمی در نفت برنت دریای شمال کم تر از نفت سنگین کشورهای عربی است.
- (۴) گرمای حاصل از سوختن یک گرم بنزین در مقایسه با یک گرم زغال سنگ بیشتر بوده اما میزان آلاینده بیشتری وارد هوا کرده می کند.

۸۰- ۳۰ گرم سدیم آزید (NaN_3) با خلوص ۶۵ درصد را در ظرفی وارد می کنیم تا مطابق معادله واکنش زیر تجزیه شود. اگر ۶/۷۲ لیتر گاز نیتروژن در این فرایند تولید شود؛ نمودار تغییرات مول مواد شرکت کننده در واکنش مورد نظر کدام است؟ (چگالی گاز نیتروژن در شرایط واکنش، $1/25 \text{ g.L}^{-1}$ است، $\text{Na} = 23, \text{N} = 14 \text{ g.mol}^{-1}$)



محل انجام محاسبات

مهم ترین ویژگی های آزمون های خیلی سبز در پایه های دهم و یازدهم:

- ۱- برگزاری دست کم یک آزمون در ماه بر اساس روال تدریس در مدرسه
- ۲- برگزاری آزمون های ویژه برای زمان های خاص (میان ترم، ترم، پس از عیدو...)
- ۳- امکان جبران عقب ماندگی ها یا دوره مطالب برای تثبیت آنها

پاسخ نامه تشریحی آزمون را ساعت ۱۶ از صفحه
شخصی خودتان در سایت آزمون خیلی سبز دریافت کنید.



azmoon.kheilisabz.com

اساتید، مشاوران و دانش آموزان گرامی؛

نظرات، پیشنهادات، انتقادات و بازخوردهای خود نسبت به سؤالات این آزمون را می توانید
از طریق آیدی @Kheilisabz_edit در همه پیام رسان ها با ما به اشتراک بگذارید.



پاسخ نامه آزمون آزمایشی خلی سبز

مرحله نهم

پایه یازدهم

دانشته ریاضی

سال تحصیلی ۱۴۰۳-۰۴ تاریخ برگزاری: ۱۵/فروردین/۱۴۰۴

نام درس	طراحان به ترتیب حروف الفبا
حسابان	فرشاد حسن زاده - عادل حسینی - مصطفی دیداری - محمدرضا راسخ - مجید رفعتی علی شهرابی - محمد گودرزی - حسین نادری - محمدسجاد نقیه - جهانبخش نیکنام
هندسه	امیرحسین ابومحبوب - محمداطهر شعاعی - حسین هاشمی طاهری - صبا مهدوی
آمار و احتمال	مسعود شفیعی - عطا صادقی - سروش موئینی
فیزیک	یاشار انگوتی - نوید شاهی
شیمی	آرمین عظیمی - امیرمحمد کنگرانی - محدثه ملک پور

نام درس	مسئول درس	گزینشگر	مؤلف پاسخ نامه	کارشناسان علمی	ویراستاران به ترتیب حروف الفبا
حسابان	محمدسجاد نقیه	محمدسجاد نقیه	علیرضا کاظمی بقا	محمد گودرزی عادل حسینی	سهیل تقی زاده سعید خان بابائی منصور زرکش اصفهانی
هندسه	امیرحسین ابومحبوب	امیرحسین ابومحبوب	فرزانه خاکپاش	مریم نظری	منصور زرکش اصفهانی ماهان فنی فر ابوالفضل ناصری
آمار و احتمال	مسعود شفیعی	مسعود شفیعی	علیرضا کاظمی بقا	امیرحسین ابومحبوب سعید قندچی علیرضا کاظمی بقا	منصور زرکش اصفهانی فرزانه خاکپاش ماهان فنی فر
فیزیک	نوید شاهی	یاشار انگوتی	علیرضا عبداللهی	علیرضا عبداللهی	سپهر صادقی مریم گلی حسنلو امیر محمودی انزایی
شیمی	یاسر عبداللهی	محدثه ملک پور	محدثه ملک پور	یاسر عبداللهی	احسان رحیمی متین قنبری صدرا عبادی

سرپرست محتوایی: فاطمه آقاجانیپور



Azmoon.kheilisabz.com

آزمون آزمایشی خلی سبز

سرپرست تولید	الناز علی یاری زاده
ویراستاران فنی	نیلوفر اعتمادی - نیوشا پیمان - راضیه سادات خلدی نسب زهره صفری - فاطمه علی اکبری - محیا غنی فرد زهره فرهادی مهر - محمد محمودی - مریم مسلمی زاده نادره نازآوری - ساعده نمازی
رسم	مونا آندستا ندا فخاری سارا گنجی آزادپور
صفحه آرایی	صدف امام - مریم حسین زاده سپیده سخائی - الهام سهرابی - طاهره صادق نژاد مائده صبری - نیلوفر فرخجسته - مهدیه گل پور دریا لطفی - لیلا نعمت پور



۱ اگر $x = a$ جواب معادله $\frac{1}{x} + \sqrt{\frac{x+2}{x}} = 7$ باشد، حاصل $\frac{2+a}{1-a}$ کدام است؟

۶ (۴)

۵ (۳)

۴ (۲)

۳ (۱)

پاسخ: گزینه ۱

Hint رادیکال را در یک طرف تنها کنید و طرفین را به توان ۲ برسانید.

پاسخ خیلی تشریحی ✓ **گام اول:** ابتدا معادله را به یک معادله گویا تبدیل می کنیم:

$$\frac{1}{x} + \sqrt{\frac{x+2}{x}} = 7 \Rightarrow \sqrt{\frac{x+2}{x}} = 7 - \frac{1}{x} \xrightarrow{\text{توان ۲}} \frac{x+2}{x} = 49 + \frac{1}{x^2} - \frac{14}{x} \Rightarrow \frac{x+2}{x} + \frac{14}{x} - \frac{1}{x^2} - 49 = 0$$

$$\Rightarrow \frac{x+16}{x} - \frac{1}{x^2} - 49 = 0$$

گام دوم: حال به کمک مخرج مشترک گیری خواهیم داشت:

$$\frac{x+16}{x} - \frac{1}{x^2} - 49 = 0 \Rightarrow \frac{x^2 + 16x - 1 - 49x^2}{x^2} = 0 \Rightarrow -48x^2 + 16x - 1 = 0 \Rightarrow 48x^2 - 16x + 1 = 0$$

گام سوم: معادله بالا را به روش روشی حل می کنیم:

$$\Rightarrow t^2 - 16t + 48 = (t-12)(t-4) = 0 \Rightarrow t_1 = 12, t_2 = 4$$

$$\xrightarrow{\div 48} x_1 = \frac{1}{4}, x_2 = \frac{1}{12}$$

اما فقط جواب $x = \frac{1}{4}$ در معادله اصلی صدق می کند.

$$\frac{1}{12} + \sqrt{\frac{\frac{1}{12} + 2}{\frac{1}{12}}} = 12 + \sqrt{25} = 17 \neq 7$$

گام چهارم: و در نهایت داریم:

$$\xrightarrow{a=\frac{1}{4}} \frac{2+a}{1-a} = \frac{\frac{9}{4}}{\frac{3}{4}} = 3$$

سهمی به معادله $f(x) = -4x^2 + bx + c$ با رأس $S(1, 16)$ محور x را در دو نقطه قطع می‌کند. خط گذرنده از رأس سهمی و صفر مثبت تابع، با کدام طول خط گذرنده از صفر منفی و عرض از مبدأ نمودار تابع را قطع می‌کند؟

۰/۲ (۴)

۰/۶ (۳)

۰/۸ (۲)

۰/۴ (۱)

پاسخ: گزینه ۳

Hint ابتدا به کمک فرمول طول رأس سهمی مقدار b را به دست آورید و سپس مختصات رأس را جای‌گذاری کنید تا c هم به دست آید.

طول رأس سهمی به معادله $y = ax^2 + bx + c$ از رابطه $x_S = \frac{-b}{2a}$ به دست می‌آید.

اگر یک خط با شیب m از نقطه (x_0, y_0) عبور کند، معادله خط به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$y - y_0 = m(x - x_0)$$

گام اول: ابتدا با توجه به فرمول طول رأس سهمی، مقدار b را به دست می‌آوریم و سپس مختصات رأس را در معادله سهمی جای‌گذاری می‌کنیم تا c هم به دست آید:

$$x_S = \frac{-b}{2a} \xrightarrow{x_S=1, a=-4} 1 = \frac{-b}{-8} \Rightarrow -b = -8 \Rightarrow b = 8$$

$$(1, 16) \in f \Rightarrow f(1) = 16 \Rightarrow -4(1)^2 + b(1) + c = 16 \Rightarrow b + c = 20$$

$$\xrightarrow{b=8} 8 + c = 20 \Rightarrow c = 12$$

پس ضابطه f به صورت $f(x) = -4x^2 + 8x + 12$ است.

گام دوم: حال صفرهای سهمی را به دست می‌آوریم:

$$-4x^2 + 8x + 12 = 0 \xrightarrow{a+c=b} \begin{cases} x = -1 \\ x = 3 \end{cases}$$

گام سوم: معادله خطوط گفته‌شده را می‌نویسیم:

$$\begin{matrix} (2, 0) & (1, 16) \\ \uparrow & \uparrow \\ \text{صفر مثبت تابع} & \text{رأس} \end{matrix} \quad m = \frac{16 - 0}{1 - 3} = -8, \quad y - 0 = -8(x - 3) \Rightarrow y = -8x + 24$$

$$\begin{matrix} (0, 12) & (-1, 0) \\ \uparrow & \uparrow \\ \text{صفر منفی تابع} & \text{خط گذرنده از عرض از مبدأ} \end{matrix} \quad m = \frac{12 - 0}{0 - (-1)} = 12, \quad y - 0 = 12(x + 1) \Rightarrow y = 12x + 12$$

گام چهارم: حال طول محل برخورد خطوط را به دست می‌آوریم:

$$\begin{cases} y = -8x + 24 \\ y = 12x + 12 \end{cases} \xrightarrow{\text{سمت چپها برابرند پس}} -8x + 24 = 12x + 12 \Rightarrow 20x = 12 \Rightarrow x = \frac{12}{20} = \frac{6}{10} = 0/6$$

اگر مجموعه جواب‌های نامعادله $a < |x-b| < c$ به صورت $(-6, -4) \cup (7, 9)$ باشد، اختلاف جواب‌های معادله $|x-a| + |x-b| = c$ کدام است؟

۱/۵ (۴)

۳/۵ (۳)

۷/۵ (۲)

۷ (۱)

پاسخ: گزینه ۲

پاسخ خیلی تشریحی ✓

گام اول: ابتدا نامعادله داده شده را به دو نامعادله تقسیم می‌کنیم:

$$\underbrace{a < |x-b|}_{(1)} < \underbrace{|x-b|}_{(2)} < c \Rightarrow \begin{cases} a < |x-b| \Rightarrow \begin{cases} x-b > a \Rightarrow x > a+b \\ \text{یا} \\ x-b < -a \Rightarrow x < -a+b \end{cases} & (*) \\ |x-b| < c \Rightarrow -c < x-b < c \Rightarrow -c+b < x < c+b & (**) \end{cases}$$

گام دوم: حال از (*) و (**) اشتراک می‌گیریم و بازه به دست آمده را برابر $(-6, -4) \cup (7, 9)$ می‌گذاریم:

$$\xrightarrow{(*), (**)} \begin{cases} x > a+b \\ \text{یا} \\ x < -a+b \end{cases} \xrightarrow{\cap} x \in [-c+b, -a+b] \cup [a+b, c+b]$$

اگر بازه به دست آمده را برابر $(-6, -4) \cup (7, 9)$ قرار دهیم، تساوی‌های زیر به دست می‌آید:

$$\begin{cases} -c+b = -6 \\ -a+b = -4 \\ a+b = 7 \\ c+b = 9 \end{cases} \Rightarrow b = \frac{3}{2}, a = \frac{11}{2}, c = \frac{15}{2}$$

گام سوم: با توجه به این که a و b و c را به دست آوردیم، معادله داده شده به صورت $|x - \frac{11}{2}| + |x - \frac{3}{2}| = \frac{15}{2}$ درمی‌آید:

در نتیجه:

$$x \geq \frac{11}{2}: x - \frac{11}{2} + x - \frac{3}{2} = \frac{15}{2} \Rightarrow 2x - \frac{14}{2} = \frac{15}{2} \Rightarrow 2x = \frac{29}{2} \Rightarrow x = \frac{29}{4}$$

$$\frac{3}{2} \leq x < \frac{11}{2}: -x + \frac{11}{2} + x - \frac{3}{2} = \frac{15}{2} \Rightarrow \frac{8}{2} = \frac{15}{2} \quad \times$$

$$x < \frac{3}{2}: -x + \frac{11}{2} - x + \frac{3}{2} = \frac{15}{2} \Rightarrow -2x = \frac{1}{2} \Rightarrow x = -\frac{1}{4}$$

پس اختلاف جواب‌های به دست آمده برابر می‌شود با:

$$\frac{29}{4} - (-\frac{1}{4}) = \frac{30}{4} = \frac{15}{2} = 7.5$$

۴ اگر $f(x) = 2 - |x + 3|$ و $g(x) = \sqrt{(x^2 + 6x + 9)(1 - x^2)}$ باشد، دامنه تابع $g \circ f$ شامل چند عدد صحیح است؟

۸ (۴

۶ (۳

۵ (۲

۳ (۱

پاسخ: گزینه ۲

دامنه ترکیب توابع

درس Box

$$D_{g \circ f} = \{x \in D_f \mid f(x) \in D_g\}$$

$$D_{f \circ g} = \{x \in D_g \mid g(x) \in D_f\}$$

پاسخ خیلی تشریحی ✓ گام اول: دامنه f برابر $\mathbb{R}$ است. ابتدا ضابطه g را ساده می‌کنیم و دامنه g را به دست می‌آوریم:

$$g(x) = \sqrt{(x^2 + 6x + 9)(1 - x^2)} = \sqrt{(x + 3)^2(1 - x^2)}$$

$$D_g = \begin{cases} 1 - x^2 \geq 0 \Rightarrow x^2 \leq 1 \Rightarrow -1 \leq x \leq 1 \\ (x + 3)^2 = 0 \Rightarrow x = -3 \end{cases} \Rightarrow D_g = \{-3\} \cup [-1, 1]$$

گام دوم: حال دامنه $g \circ f$ را تشکیل می‌دهیم:

$$D_{g \circ f} = \{x \in D_f \mid f(x) \in D_g\} \Rightarrow D_{g \circ f} = \{x \in \mathbb{R} \mid 2 - |x + 3| \in \{-3\} \cup [-1, 1]\}$$

گام سوم: از مجموعه تشکیل شده، دامنه $g \circ f$ به صورت زیر می‌شود:

$$-1 \leq 2 - |x + 3| \leq 1 \Rightarrow -3 \leq -|x + 3| \leq -1 \Rightarrow 1 \leq |x + 3| \leq 3$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 1 \leq |x + 3| \Rightarrow \begin{cases} x + 3 \geq 1 \Rightarrow x \geq -2 \\ x + 3 \leq -1 \Rightarrow x \leq -4 \end{cases} \\ |x + 3| \leq 3 \Rightarrow -3 \leq x + 3 \leq 3 \Rightarrow -6 \leq x \leq 0 \end{cases} \xrightarrow{\cap} x \in [-6, -4] \cup [-2, 0]$$

$$2 - |x + 3| = -3 \Rightarrow |x + 3| = 5 \Rightarrow \begin{cases} x + 3 = 5 \Rightarrow x = 2 \\ x + 3 = -5 \Rightarrow x = -8 \end{cases}$$

در نهایت دامنه تابع $g \circ f$ مجموعه $\{-8, 2\} \cup [-2, 0] \cup [-6, -4]$ است که شامل ۸ عدد صحیح $-8, -6, -5, -4, -3, -2, -1, 0, 2$ است.

۵ اگر $x[x] = ۸$ ، مقدار $[-۲x]$ کدام است؟ ([] نماد جزء صحیح است.)

۴) -۵

۳) ۵

۲) ۴

۱) -۴

پاسخ: گزینه ۳

پاسخ خیلی تشریحی ✓ گام اول: ابتدا معادله را به شکل زیر تبدیل می کنیم:

$$x[x] = ۸ \Rightarrow [x] = \frac{۸}{x}$$

گام دوم: حاصل براکت عددی صحیح است، پس $\frac{۸}{x}$ را برابر k که عددی صحیح است، در نظر می گیریم:

$$\frac{۸}{x} = k \Rightarrow x = \frac{۸}{k}$$

گام سوم: پس معادله را بر حسب k می نویسیم و خواهیم داشت:

$$\left[\frac{۸}{k} \right] = k \Rightarrow k \leq \frac{۸}{k} < k+۱ \xrightarrow[k \neq 0]{\times k} \begin{cases} k > 0 \Rightarrow k^2 \leq ۸ < k^2 + k & (۱) \\ k < 0 \Rightarrow k^2 + k < ۸ \leq k^2 & (۲) \end{cases}$$

نامعادله (۱) دارای جواب صحیح نیست، اما برای نامعادله (۲) داریم:

$$\begin{cases} ۸ \leq k^2 \Rightarrow k > \sqrt{۸} \text{ یا } k < -\sqrt{۸} \xrightarrow{k < 0} k < -\sqrt{۸} \\ k^2 + k < ۸ \Rightarrow \frac{-۱-\sqrt{۳۳}}{۲} < k < \frac{-۱+\sqrt{۳۳}}{۲} \xrightarrow{k < 0} \frac{-۱-\sqrt{۳۳}}{۲} < k < 0 \end{cases} \rightarrow -\frac{۱+\sqrt{۳۳}}{۲} < k < -۲\sqrt{۲} \xrightarrow{k \in \mathbb{Z}} k = -۳$$

گام چهارم: حال به ازای $k = -۳$ خواسته سؤال را به دست می آوریم:

$$x = \frac{۸}{k} \xrightarrow{k=-۳} x = -\frac{۸}{۳} \Rightarrow [-۲x] = [(-۲)(-\frac{۸}{۳})] = [\frac{۱۶}{۳}] = ۵$$

۶ تابع $f(x) = \begin{cases} 2-3x & , x \leq -\frac{2}{5} \\ 2+2mx-x^2 & , x > -\frac{2}{5} \end{cases}$ یک به یک است. حدود m کدام است؟

(۱) $[-1/5, +\infty)$

(۲) $[-2/25, -1/5]$

(۴) $[-\sqrt{4/5}, +\infty)$

(۳) $[-\sqrt{4/5}, -1/5]$

پاسخ: گزینه ۲

طول و عرض رأس سهمی $y = ax^2 + bx + c$ به ترتیب برابر است با: $-\frac{b}{2a}$ ، $-\frac{\Delta}{4a}$



اگر بخواهیم که سهمی یک به یک باشد، دامنه آن باید از طول رأس به بعد و یا از طول رأس به قبل تعریف شده باشد.

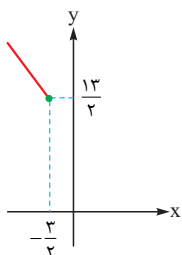


پاسخ خیلی تشریحی ✓ گام اول: برای سهمی ضابطه پایینی دامنه تعریف شده، باید از بعد از رأس سهمی باشد تا تابع یک به یک باشد:

$$\frac{-2m}{-2} \leq \frac{-3}{2} \Rightarrow m \leq \frac{-3}{2} \quad (1)$$

طول رأس سهمی

گام دوم: مقدار ضابطه پایینی به ازای $x = -\frac{3}{2}$ باید کمتر از $\frac{13}{2}$ یا مساوی با آن باشد:



$$2 + 2m(-\frac{3}{2}) - (-\frac{3}{2})^2 = -3m - 0.25 \leq 6.5 \Rightarrow 3m \geq -6.75 \Rightarrow m \geq -2.25 \quad (2)$$

گام سوم: از اشتراک (۱) و (۲) داریم: $-2.25 \leq m \leq -1/5$.

در چه تعداد از موارد زیر، توابع f و g مساوی هستند؟ ([] نماد جزء صحیح است.)

۷

الف) $f(x) = 2^{\log_2 x}$, $g(x) = x$

ب) $f(x) = \left\lfloor \frac{|x|}{|x|+1} \right\rfloor$, $g(x) = \left\lfloor \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1} \right\rfloor$

ج) $f(x) = \sqrt{4x^2 - x^2}$, $g(x) = x\sqrt{4x^2 - 1}$

د) $f(x) = \sqrt{\frac{x-3}{x-1}}$, $g(x) = \frac{\sqrt{x-3}}{\sqrt{x-1}}$

۳ (۴)

۲ (۳)

۱ (۲)

صفر (۱)

پاسخ: گزینه ۱

برابری توابع:

درس Box

دو تابع در صورتی با یکدیگر برابر هستند که دو شرط زیر برقرار باشد:

(۱) دامنه توابع با هم برابر باشند.

(۲) به ازای هر x از دامنه توابع، مقدار دو تابع یکسان باشد. (ضابطه‌ها برابر باشند).

توجه: دامنه توابع را باید قبل از ساده کردن به دست آورید.

پاسخ خیلی تشریحی ✓ به بررسی موارد می‌پردازیم:

الف) $D_g = \mathbb{R}$, $D_f = (0, +\infty) \Rightarrow f \neq g$ ✗

ب) $D_g = (0, +\infty)$, $D_f = \mathbb{R} \Rightarrow f \neq g$ ✗

ج) $f(x) = \sqrt{4x^2 - x^2} = \sqrt{x^2(4x^2 - 1)} = \sqrt{x^2} \sqrt{4x^2 - 1} = |x| \sqrt{4x^2 - 1} \xrightarrow{g(x)=x\sqrt{4x^2-1}} f \neq g$ ✗

د) $D_g : \begin{cases} x-3 \geq 0 \Rightarrow x \geq 3 \\ x-1 > 0 \Rightarrow x > 1 \end{cases} \xrightarrow{\cap} x \geq 3$
 $\Rightarrow D_f \neq D_g \Rightarrow f \neq g$ ✗

$D_f : \frac{x-3}{x-1} \geq 0 \Rightarrow x < 1 \text{ یا } x \geq 3$

پس در هیچ کدام از موارد داده شده توابع برابر نیستند.

در تابع خطی f ، اگر $f(2) = 3$ و $f(-2) = -5$ باشد، مجموع اعداد طبیعی که در برد تابع $g(x) = \frac{3f(x)-7}{f(x)-3}$ با دامنه $(-\infty, 0] \cup (2, +\infty)$ قرار ندارند، کدام است؟

۶ (۴)

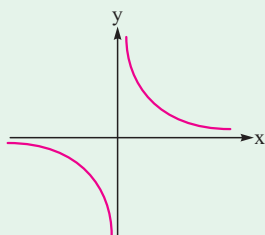
۵ (۳)

۳ (۲)

۱ (۱)

پاسخ: گزینه ۲

نمودار تابع $y = \frac{1}{x}$ به صورت مقابل است:



پاسخ خیلی تشریحی ✓ گام اول: می‌دانیم که فرم کلی ضابطه تابع خطی به صورت $f(x) = ax + b$ است. ضابطه f را به دست می‌آوریم:

$$\begin{cases} f(2) = 3 \Rightarrow 2a + b = 3 \\ f(-2) = -5 \Rightarrow -2a + b = -5 \end{cases} \xrightarrow{\text{حل دستگاه}} a = 2, b = -1$$

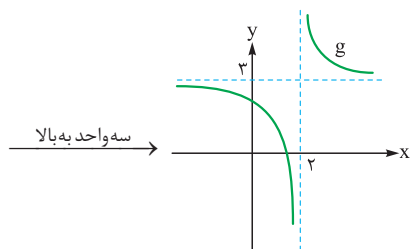
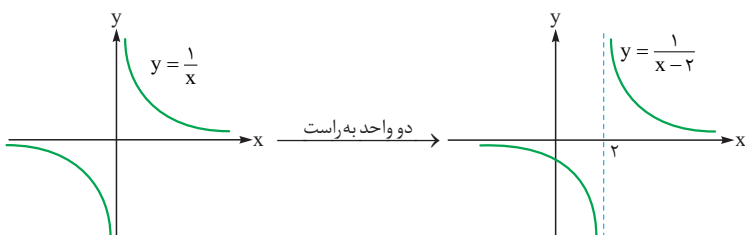
پس: $f(x) = 2x - 1$

گام دوم: حال f را در g جای‌گذاری می‌کنیم:

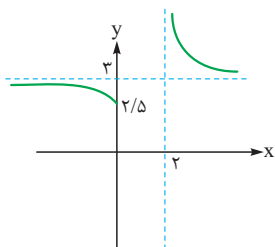
$$g(x) = \frac{3f(x)-7}{f(x)-3} = \frac{3(2x-1)-7}{2x-1-3} \Rightarrow g(x) = \frac{6x-10}{2x-4}$$

$$\Rightarrow g(x) = \frac{3(2x-5)}{2(x-2)} = \frac{3x-6+1}{x-2} \Rightarrow g(x) = 3 + \frac{1}{x-2}$$

گام سوم: برای رسم نمودار تابع g ، تابع $y = \frac{1}{x}$ را دو واحد به راست و سه واحد به بالا می‌بریم:



گام چهارم: حال نمودار تابع g را در دامنه $(-\infty, 0] \cup (2, +\infty)$ رسم می‌کنیم:



$$1 + 2 + 3 = 6$$

با توجه به نمودار، اعداد طبیعی که در برد وجود ندارند ۱، ۲ و ۳ هستند که مجموع آن‌ها برابر است با:

۹ اگر f و g دو تابع خطی با شیب مثبت باشند به طوری که $\left(\frac{f^{-1} \circ g}{g^{-1} \circ f}\right)(x) = \frac{9x+6}{x-m}$ مقدار m کدام است؟

۲ (۴)

۲ (۳)

۱ (۲)

۱ (۱)

پاسخ: گزینه ۳

$$\frac{a}{c} = \frac{a'}{c'}, \frac{b}{d} = \frac{b'}{d'}$$

اگر دو کسر $\frac{ax+b}{cx+d} = \frac{a'x+b'}{c'x+d'}$ ، آن گاه:



پاسخ خیلی تشریحی ✓ گام اول: ضابطه‌های f و g را به صورت‌های زیر فرض می‌کنیم و وارون آن‌ها را به دست می‌آوریم:

$$f(x) = ax + b \Rightarrow y = ax + b \Rightarrow ax = y - b \Rightarrow x = \frac{y-b}{a} \Rightarrow f^{-1}(x) = \frac{x-b}{a}$$

$$g(x) = cx + d \Rightarrow y = cx + d \Rightarrow cx = y - d \Rightarrow x = \frac{y-d}{c} \Rightarrow g^{-1}(x) = \frac{x-d}{c}$$

توجه کنید که f و g توابع خطی صعودی هستند، پس $a, c > 0$.

گام دوم: حال جای‌گذاری‌های لازم را انجام می‌دهیم:

$$(f^{-1} \circ g)(x) = f^{-1}(g(x)) = f^{-1}(cx + d) = \frac{(cx + d) - b}{a}$$

$$(g^{-1} \circ f)(x) = g^{-1}(f(x)) = g^{-1}(ax + b) = \frac{(ax + b) - d}{c}$$

$$\left(\frac{f^{-1} \circ g}{g^{-1} \circ f}\right)(x) = \frac{9x+6}{x-m} \Rightarrow \frac{\frac{cx+d-b}{a}}{\frac{ax+b-d}{c}} = \frac{9x+6}{x-m} \Rightarrow \frac{c^2x+c(d-b)}{a^2x+a(b-d)} = \frac{9x+6}{x-m}$$

گام سوم: حال با توجه به نکته خواهیم داشت:

$$\frac{c^2x+c(d-b)}{a^2x+a(b-d)} = \frac{9x+6}{x-m} \rightarrow \begin{cases} \frac{c^2}{a^2} = 9 \xrightarrow{a>0, c>0} \frac{c}{a} = 3 \\ \frac{c(d-b)}{a(b-d)} = -\frac{6}{m} \Rightarrow -\frac{c}{a} = \frac{-6}{m} \xrightarrow{\frac{c}{a}=3} m = 2 \end{cases}$$

پس: $m = 2$.

۱۰

تابع f با ضابطه $f(x) = -2x + a$ مفروض است. اگر معادله $f(x)f^{-1}(x) = (f^{-1} - f)(x)$ یک جواب داشته باشد، مجموع مقادیر قابل قبول برای a کدام است؟

۴) -۹

۳) ۹

۲) ۱۰

۱) -۱۰

پاسخ: گزینه ۱

پاسخ خیلی تشریحی ✓

گام اول: ابتدا ضابطه $f^{-1}(x)$ را به دست می آوریم:

$$f(x) = -2x + a \Rightarrow y = -2x + a \Rightarrow 2x = -y + a \Rightarrow x = \frac{-y + a}{2} \Rightarrow f^{-1}(x) = \frac{-x + a}{2}$$

گام دوم: حال $(f^{-1} - f)(x)$ و $f(x)f^{-1}(x)$ را تشکیل می دهیم:

$$(f^{-1} - f)(x) = f^{-1}(x) - f(x) = \frac{-x + a}{2} - (-2x + a) = \frac{-x + a + 4x - 2a}{2} \Rightarrow (f^{-1} - f)(x) = \frac{3x - a}{2}$$

$$f(x) \times f^{-1}(x) = (-2x + a) \times \frac{-x + a}{2} = \frac{2x^2 - 3ax + a^2}{2}$$

گام سوم: حال با توجه به تساوی داده شده در سؤال داریم:

$$f(x) \times f^{-1}(x) = (f^{-1} - f)(x) \Rightarrow \frac{2x^2 - 3ax + a^2}{2} = \frac{3x - a}{2}$$

$$\Rightarrow 2x^2 - 3ax + a^2 = 3x - a \Rightarrow 2x^2 + (-3a - 3)x + a + a^2 = 0$$

گام چهارم: این تساوی فقط یک جواب دارد، پس دلتای معادله حاصل را برابر صفر قرار می دهیم:

$$2x^2 + (-3a - 3)x + a + a^2 = 0 \xrightarrow{\Delta=0} (-3a - 3)^2 - 4(2)(a + a^2) = 0$$

$$\Rightarrow 9a^2 + 18a + 9 - 8a - 8a^2 = 0 \Rightarrow a^2 + 10a + 9 = 0$$

مجموع مقادیر قابل قبول برای a عبارت است از:

$$S = \frac{-(10)}{1} = -10$$

نمودار تابع $f(x) = \log_4(ax+8) - 2$ محور طول‌ها را در نقطه A و محور عرض‌ها را در نقطه B قطع می‌کند. اگر نسبت طول نقطه A

به عرض نقطه B برابر ۸ باشد، حاصل $[f(-30)]$ کدام است؟ ([] نماد جزء صحیح است.)

- (۱) صفر (۲) ۱ (۳) ۲ (۴) -۱

پاسخ: گزینه ۲

مفهوم لگاریتم به صورت یک حرکت چرخشی است:

$$\log_b a = c \Leftrightarrow a = b^c$$

یک ویژگی از لگاریتم:

$$\log_{b^n} a^m = \frac{m}{n} \log_b a$$

پاسخ خیلی تشریحی ✓ گام اول: نسبت طول A به عرض B برابر ۸ است، پس طول A را 8α و عرض B را α در نظر می‌گیریم:

$$B(0, \alpha) : \log_4(0+8) - 2 = \alpha \Rightarrow \underbrace{\log_4 8}_{\log_4 2^3} = \alpha + 2 \Rightarrow \frac{3}{4} \log_2 2 = \alpha + 2 \Rightarrow \frac{3}{4} = \alpha + 2 \Rightarrow \alpha = \frac{-1}{4}$$

$$A(8\alpha, 0) : \log_4(-4a+8) - 2 = 0 \Rightarrow \log_4(-4a+8) = 2 \Rightarrow 16 = -4a+8 \Rightarrow 4a = -8 \Rightarrow a = -2$$

$\downarrow$
 $8(\frac{-1}{4}) = -2$

گام دوم: حال که a به دست آمد، $x = -30$ را جای‌گذاری می‌کنیم:

$$f(x) = \log_4(-2x+8) - 2 \Rightarrow f(-30) = \log_4 68 - 2$$

گام سوم: در نتیجه خواسته سؤال برابر می‌شود با:

$$[f(-30)] = [\log_4 68 - 2] = \underbrace{[\log_4 68]}_{3/\dots} - 2 = 3 - 2 = 1$$

مقدار x از معادله $\log_2(2 \log_2(2^0 + \log_2 x)) = 1$ کدام است؟

۱۲۸ (۴)

۳۲ (۳)

۶۴ (۲)

۲۵۶ (۱)

پاسخ: گزینه ۴

پاسخ خیلی تشریحی ✓ گام اول: ابتدا در معادله داده شده دو بار از حرکت چرخشی استفاده می کنیم:

$$\log_2(2 \log_2(2^0 + \log_2 x)) = 1 \Rightarrow 2 \log_2(2^0 + \log_2 x) = 2^1 \xrightarrow{\div 2} \log_2(2^0 + \log_2 x) = 1$$

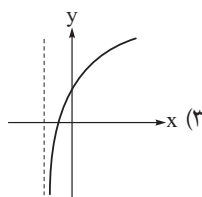
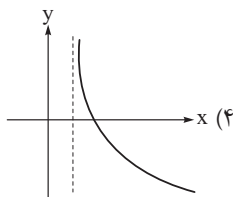
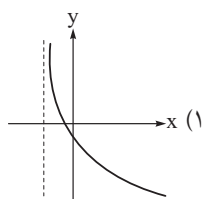
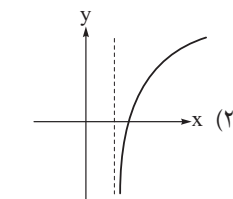
$$\Rightarrow 2^0 + \log_2 x = 2^1 \Rightarrow \log_2 x = 2 - 2^0 = 2 - 1 = 1$$

گام دوم: حال خواسته سؤال برابر می شود با:

$$\log_2 x = 1 \Rightarrow x = 2^1 \Rightarrow x = 2$$

با توجه به ماشین زیر، اگر $g(x) = 2^{x-1} + 1$ باشد، نمودار تابع f کدام گزینه می‌تواند باشد؟

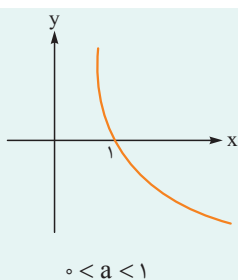
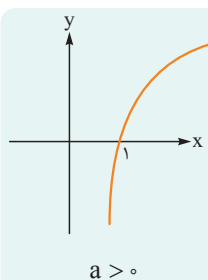
$$x \rightarrow [f(x)] \rightarrow [g(x)] \rightarrow x+3$$



پاسخ: گزینه ۳

نمودار تابع لگاریتم $(y = \log_a x)$

درس Box



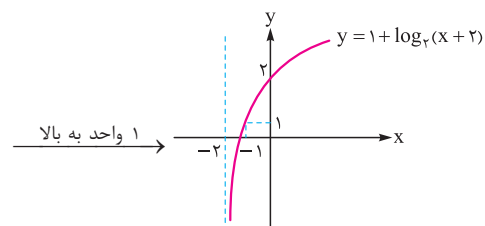
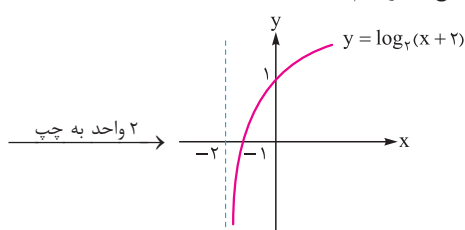
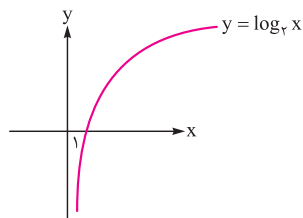
پاسخ خیلی تشریحی ✓ گام اول: این ماشین نشان می‌دهد که اگر به f, g را بدهیم، $x+3$ می‌دهد، پس:

$$g(f(x)) = x+3 \Rightarrow 2^{f(x)-1} + 1 = x+3 \Rightarrow 2^{f(x)-1} = x+2$$

$$\xrightarrow[\text{لگاریتم می‌گیریم}]{\text{از دو طرف درمبنای ۲}} \log_2 2^{f(x)-1} = \log_2 (x+2)$$

$$\Rightarrow f(x) - 1 = \log_2 (x+2) \Rightarrow f(x) = 1 + \log_2 (x+2)$$

گام دوم: حال برای رسم نمودار تابع f خواهیم داشت:



۱۴ اگر $f(\log_3(x+2)) = x+1$ و $g^{-1}(\log_6(x+6)) = 3x+2$ ، آن گاه حاصل $\frac{\log 7}{\log 3}$ کدام است؟

$$f^{-1}(5) + g^{-1}(2) \quad (2)$$

$$f^{-1}(5) \times g(5) \quad (1)$$

$$g^{-1}(2) + f^{-1}(4) \quad (4)$$

$$f^{-1}(4) + g(5) \quad (3)$$

پاسخ: گزینه ۱

$$\log_b a = \frac{\log a}{\log b}$$

یکی از ویژگی‌های لگاریتم عبارت است از:



پاسخ خیلی تشریحی ✓ گام اول: مقادیر $g(5)$ و $g^{-1}(2)$ را به دست می‌آوریم:

$$g^{-1}(\log_6(x+6)) = 3x+2 \Rightarrow g(3x+2) = \log_6(x+6)$$

$$g^{-1}(2) : \log_6(\alpha+6) = 2 \Rightarrow \alpha+6 = 36 \Rightarrow \alpha = 30 \Rightarrow g^{-1}(2) = 3(30)+2 = 92$$

$$g(5) : 3\alpha+2 = 5 \Rightarrow \alpha = 1 \Rightarrow g(5) = \log_6(1+6) \Rightarrow g(5) = \log_6 7$$

گام دوم: حال مقادیر $f^{-1}(4)$ و $f^{-1}(5)$ را به دست می‌آوریم:

$$f(\log_3(x+2)) = x+1 \Rightarrow f^{-1}(x+1) = \log_3(x+2)$$

$$\alpha+1 = 4 \Rightarrow \alpha = 3 \Rightarrow f^{-1}(4) = \log_3(3+2) = \log_3 5$$

$$\alpha+1 = 5 \Rightarrow \alpha = 4 \Rightarrow f^{-1}(5) = \log_3(4+2) = \log_3 6$$

گام سوم: مقدار هر گزینه را به دست می‌آوریم:

$$(1) : f^{-1}(5) \times g(5) = \log_3 6 \times \log_6 7 = \frac{\log 6}{\log 3} \times \frac{\log 7}{\log 6} = \frac{\log 7}{\log 3} \quad \checkmark$$

$$(2) : f^{-1}(5) + g^{-1}(2) = \log_3 6 + 92 \neq \frac{\log 7}{\log 3}$$

$$(3) : f^{-1}(4) + g(5) = \log_3 5 + \log_6 7 \neq \frac{\log 7}{\log 3}$$

$$(4) : g^{-1}(2) + f^{-1}(4) = 92 + \log_3 5 \neq \frac{\log 7}{\log 3}$$

پس $\frac{\log 7}{\log 3}$ برابر با گزینه اول است.

۱۵ اگر $x = a$ جواب معادله $\log_2\left(\frac{2^{x-15}}{64}\right) = 1 - x$ باشد، مقدار $\left[\frac{a}{2}\right]$ کدام است؟ ([] نماد جزء صحیح است.)

۷ (۴)

۴ (۳)

۵ (۲)

۶ (۱)

پاسخ: گزینه ۲

پاسخ خیلی تشریحی ✓ گام اول: ابتدا a را در معادله جای گذاری می کنیم و با توجه به مفهوم لگاریتم خواهیم داشت:

$$\log_2\left(\frac{2^{a-15}}{64}\right) = 1 - a \Rightarrow \frac{2^{a-15}}{64} = 2^{1-a} \Rightarrow \frac{2^{a-15}}{2^6} = 2^{1-a}$$

گام دوم: حال خواهیم داشت:

$$\frac{2^{a-15}}{2^6} = 2^{1-a} \xrightarrow{\text{طرفین وسطین}} 2^{a-15} = 2^{7-a} \Rightarrow a - 15 = 7 - a \Rightarrow a = 11$$

گام سوم: پس خواسته سؤال برابر می شود با:

$$\left[\frac{a}{2}\right] = \left[\frac{11}{2}\right] = [5.5] = 5$$

رأس ساعت "۳:۰۰:۰۰"، عقربه‌های ثانیه‌شمار، دقیقه‌شمار و ساعت‌شمار شروع به حرکت می‌کنند و در مجموع با هم ۷۳۳° حرکت کرده‌اند. زمان کنونی کدام است؟

(۲) $۵:۴۰'$

(۱) $۶:۴۰'$

(۴) $۴:۵۰'$

(۳) $۶:۲۰'$

پاسخ: گزینه ۳

 Hint

اگر عقربه ساعت‌شمار X درجه بچرخد، عقربه دقیقه‌شمار $۱۲X$ درجه و عقربه ثانیه‌شمار $۷۲۰X$ درجه می‌چرخد.

پاسخ خیلی تشریحی ✓ **گام اول:** اگر عقربه ساعت‌شمار ۳۶° بچرخد، عقربه دقیقه‌شمار $۱۲ \times ۳۶^{\circ}$ و عقربه ثانیه‌شمار $۶۰ \times ۱۲ \times ۳۶^{\circ}$ می‌چرخد،

بنابراین اگر عقربه ساعت‌شمار X درجه بچرخد، عقربه دقیقه‌شمار $۱۲X$ درجه و عقربه ثانیه‌شمار $۷۲۰X$ درجه خواهد چرخید.

گام دوم: فرض می‌کنیم با شروع از ساعت ۳، عقربه ساعت‌شمار X درجه چرخیده باشد، پس طبق سؤال داریم:

$$X + ۱۲X + ۷۲۰X = ۷۳۳^{\circ} \Rightarrow ۷۳۳X = ۷۳۳^{\circ} \Rightarrow X = ۱^{\circ}$$

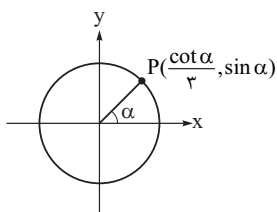
پس عقربه‌های ساعت‌شمار، دقیقه‌شمار و ثانیه‌شمار به ترتیب ۱° ، ۱۲° و ۷۲۰° چرخیده‌اند.

گام سوم: از شروع از ساعت ۳ عقربه ثانیه‌شمار ۷۲۰° چرخیده است، پس $\frac{۷۲۰^{\circ}}{۳۶۰^{\circ}} = ۲$ دور چرخیده است، یعنی ۲° دقیقه؛

در نتیجه:

اکنون ساعت $۶:۲۰'$ است. $\xrightarrow{\text{۲ دقیقه بعد}}$ ساعت ۳ زمان شروع است یا سه ساعت و ۲۰ دقیقه بعد

۱۷ در شکل زیر، نقطه P روی دایره مثلثاتی قرار دارد. حاصل $\sin(\frac{27\pi}{4} + \alpha)$ کدام است؟



(۱) $\frac{2\sqrt{2}}{3}$

(۲) $-\frac{2\sqrt{2}}{3}$

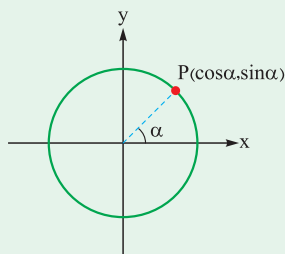
(۳) $\frac{\sqrt{2}}{3}$

(۴) $-\frac{\sqrt{2}}{3}$

مشاوره تسلط بر دایره مثلثاتی، قدم اول برای یادگیری مثلثات است.

پاسخ: گزینه ۲

مختصات هر نقطه بر روی دایره مثلثاتی به صورت زیر است:



نکته

$\frac{\pi}{2}$ و $\frac{3\pi}{2}$ نسبت عوض می کنند (α را در ربع اول فرض می کنیم):

نکته

$$\sin(\frac{\pi}{2} - \alpha) = \cos \alpha$$

$$\cos(\frac{\pi}{2} - \alpha) = \sin \alpha$$

$$\sin(\frac{\pi}{2} + \alpha) = \cos \alpha$$

کسینوس در ربع دوم منفی است

$$\cos(\frac{\pi}{2} + \alpha) = -\sin \alpha$$

ربع دوم

سینوس در ربع سوم منفی است

$$\sin(\frac{3\pi}{2} - \alpha) = -\cos \alpha$$

ربع سوم

کسینوس در ربع سوم منفی است

$$\cos(\frac{3\pi}{2} - \alpha) = -\sin \alpha$$

ربع سوم

سینوس در ربع چهارم منفی است

$$\sin(\frac{3\pi}{2} + \alpha) = -\cos \alpha$$

ربع چهارم

$$\cos(\frac{3\pi}{2} + \alpha) = \sin \alpha$$

برای $\tan \alpha$ و $\cot \alpha$ هم روند کار به همین ترتیب است.

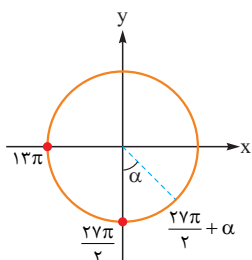
۱۹

پاسخ خیلی تشریحی ✓ گام اول: مختصات نقطه داده شده به صورت $P(\frac{\cot \alpha}{3}, \sin \alpha)$ است، با توجه به نکته داریم:

$$(\cos \alpha, \sin \alpha) = (\frac{\cot \alpha}{3}, \sin \alpha) \Rightarrow \cos \alpha = \frac{\cot \alpha}{3}$$

$$\xrightarrow{\cot \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}} \cos \alpha = \frac{\cos \alpha}{3 \sin \alpha} \xrightarrow{\div \cos \alpha \atop \cos \alpha \neq 0} 1 = \frac{1}{3 \sin \alpha} \Rightarrow 3 \sin \alpha = 1 \Rightarrow \sin \alpha = \frac{1}{3}$$

گام دوم: می دانیم که $\frac{27\pi}{2} + \alpha = 13\pi + \frac{\pi}{2} + \alpha$ ، پس:



$$\sin(\frac{27\pi}{2} + \alpha) = \sin(13\pi + \frac{\pi}{2} + \alpha) = -\cos \alpha$$

سینوس در ناحیه چهارم منفی است
نسبت عوض می کند

گام سوم: در گام اول $\sin \alpha = \frac{1}{3}$ شد. $\cos \alpha$ را به دست می آوریم تا خواسته سؤال پیدا شود:

$$\cos^2 \alpha = 1 - \sin^2 \alpha = 1 - \frac{1}{9} = \frac{8}{9} \xrightarrow{\alpha \text{ در ناحیه اول}} \cos \alpha = \frac{2\sqrt{2}}{3}$$

$$\text{خواسته سؤال: } \sin(\frac{27\pi}{2} + \alpha) = -\cos \alpha = \frac{-2\sqrt{2}}{3}$$

۱۸ اگر $x \in [0, 2\pi]$ باشد، مجموعه جواب‌های نامعادله $\frac{\sin^2(10\pi - x) - \cos^2(13\pi + x)}{\sin(8\pi + x) - \cos(x - 11\pi)} > 0$ کدام است؟

(۲) $(\frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4})$

(۱) $(0, \frac{\pi}{4})$

(۴) $(\frac{3\pi}{4}, \frac{7\pi}{4})$

(۳) $(\frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}) - \{\frac{3\pi}{4}\}$

پاسخ: گزینه ۳

در زوایای به فرم $k\pi \pm \alpha$ که k عددی صحیح است، می‌توانیم $k\pi$ را خط بزینیم، منتها باید مشخص کنیم که $k\pi \pm \alpha$ در کدام ربع قرار می‌گیرد (α را در ربع اول در نظر می‌گیریم):

زوج k $\begin{cases} \text{ربع اول} \\ \sin(k\pi + \alpha) = \sin \alpha, \cos(k\pi + \alpha) = \cos \alpha \\ \text{ربع چهارم منفی است} \\ \sin(k\pi - \alpha) = -\sin \alpha, \cos(k\pi - \alpha) = \cos \alpha \\ \text{ربع چهارم} \end{cases}$

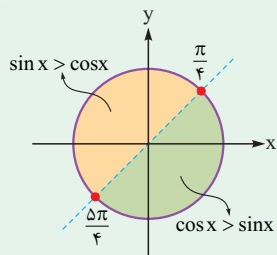
فرد k $\begin{cases} \text{ربع سوم} \\ \sin(k\pi + \alpha) = -\sin \alpha, \cos(k\pi + \alpha) = -\cos \alpha \\ \text{ربع دوم} \\ \sin(k\pi - \alpha) = \sin \alpha, \cos(k\pi - \alpha) = -\cos \alpha \end{cases}$

برای $\tan \alpha$ و $\cot \alpha$ هم روند کار به همین ترتیب است.

برای زاویه $-\alpha$ خواهیم داشت:

$\sin(-\alpha) = -\sin \alpha$
 $\cos(-\alpha) = \cos \alpha$
 $\tan(-\alpha) = -\tan \alpha$
 $\cot(-\alpha) = -\cot \alpha$

در دایره مثلثاتی خواهیم داشت:



پاسخ خیلی تشریحی ✓ گام اول: ابتدا عبارت‌های موجود در کسر داده‌شده را ساده می‌کنیم:

$\sin^2(10\pi - x) = (-\sin x)^2 = \sin^2 x$
 $\cos^2(13\pi + x) = (-\cos x)^2 = \cos^2 x$
 $\sin(8\pi + x) = \sin x$
 $\cos(x - 11\pi) = \cos(11\pi - x) = -\cos x$

گام دوم: حال عبارات به دست آمده را جای گذاری می کنیم:

$$\frac{\sin^2(10\pi - x) - \cos^2(13\pi + x)}{\sin(1\pi + x) - \cos(x - 11\pi)} > 0 \Rightarrow \frac{\sin^2 x - \cos^2 x}{\sin x - (-\cos x)} > 0 \Rightarrow \frac{\sin^2 x - \cos^2 x}{\sin x + \cos x} > 0$$

$$\xrightarrow[\sin x + \cos x \neq 0]{\text{اتحاد مزدوج}} \frac{(\sin x + \cos x)(\sin x - \cos x)}{\sin x + \cos x} > 0 \Rightarrow \sin x > \cos x$$

گام سوم: با توجه به نکته سوم پاسخ سؤال برابر می شود با:

$$\sin x > \cos x \Rightarrow x \in \left(\frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}\right)$$

و البته چون $x = \frac{3\pi}{4}$ مخرج عبارت را صفر می کند، مجموعه جوابها به صورت $\left(\frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}\right) - \left\{\frac{3\pi}{4}\right\}$ است.

۱۹ حاصل عبارت $(\tan(44^\circ) + \frac{1}{\sin(-17^\circ)})(\sin 26^\circ - 1)$ کدام است؟

$\cos 1^\circ$ (۲)

$\sin 1^\circ$ (۱)

$\cot 1^\circ$ (۴)

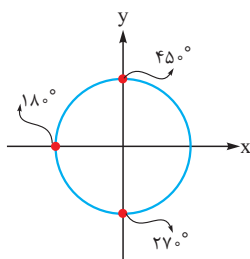
$\tan 1^\circ$ (۳)

پاسخ: گزینه ۱

نسبت‌های مثلثاتی موجود را به نسبت‌های مثلثاتی زوایای 1° تبدیل کنید.

Hint

پاسخ خیلی تشریحی ✓ گام اول: ابتدا همه نسبت‌ها را به نسبت‌های زاویه 1° تبدیل می‌کنیم:



$$\tan(44^\circ) = \tan(45^\circ - 1^\circ) = \cot 1^\circ$$

$$\sin(-17^\circ) = -\sin(17^\circ) = -(\sin(18^\circ - 1^\circ)) = -\sin 1^\circ$$

$$\sin 26^\circ = \sin(27^\circ - 1^\circ) = -\cos 1^\circ$$

گام دوم: حال نسبت‌های به‌دست‌آمده را در خواسته سؤال جای گذاری می‌کنیم:

$$(\tan(44^\circ) + \frac{1}{\sin(-17^\circ)})(\sin 26^\circ - 1) = (\cot 1^\circ - \frac{1}{\sin 1^\circ})(-\cos 1^\circ - 1)$$

$$= (\frac{\cos 1^\circ}{\sin 1^\circ} - \frac{1}{\sin 1^\circ})(\underbrace{-\cos 1^\circ - 1}_{-(\cos 1^\circ + 1)}) = \frac{-(\cos 1^\circ - 1)(\cos 1^\circ + 1)}{\sin 1^\circ} = \frac{-(\cos^2 1^\circ - 1)}{\sin 1^\circ}$$

$$= \frac{1 - \cos^2 1^\circ}{\sin 1^\circ} = \frac{\sin^2 1^\circ}{\sin 1^\circ} = \sin 1^\circ$$

۲۰. معادله $x - 1^\circ \sin x = 0$ دارای چند جواب است؟

۷ (۴)

۵ (۳)

۳ (۲)

۱ (۱)

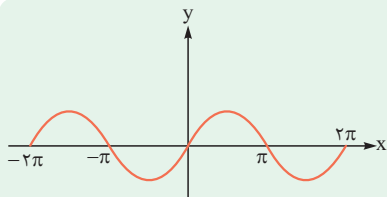
پاسخ: گزینه ۴

نمودار توابع $y = x$ و $y = 1^\circ \sin x$ را در یک دستگاه مختصات رسم کنید.

Hint

نمودار $y = \sin x$ در بازه $[-2\pi, 2\pi]$ به صورت زیر است:

نکته



برای رسم تابع $y = kf(x)$ کافی است عرض‌های نمودار تابع $y = f(x)$ را k برابر کنیم.

نکته

گام اول: ابتدا معادله را به صورت زیر می‌نویسیم:

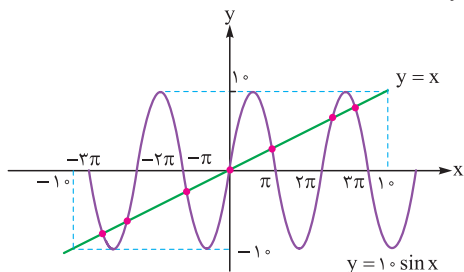
پاسخ خیلی تشریحی

$$x - 1^\circ \sin x = 0 \Rightarrow x = 1^\circ \sin x$$

گام دوم: حال نمودار توابع $y = x$ و $y = 1^\circ \sin x$ را در یک دستگاه

مختصات رسم می‌کنیم. توجه کنید که برای رسم تابع $y = 1^\circ \sin x$ ،

عرض‌های تابع $y = \sin x$ ، 1° برابر می‌شود.



همان‌طور که می‌بینید دو تابع در ۷ نقطه با هم برخورد دارند، پس معادله داده‌شده ۷ جواب دارد.

۲۱ کدام گزینه در مورد تبدیل طولیا همواره درست است؟

- (۱) جهت شکل‌ها را حفظ می‌کند.
- (۲) شیب خط‌ها را حفظ می‌کند.
- (۳) اندازه زاویه‌ها را حفظ می‌کند.
- (۴) حداقل یک نقطه ثابت تبدیل دارد.

مشاوره تعاریف مربوط به تبدیل‌های هندسی (تعریف تبدیل، تبدیل طولیا، تبدیل همانی، نقطه ثابت تبدیل و ...) را به خوبی به خاطر داشته باشید. این دسته از تعاریف و نیز ویژگی‌های تبدیل‌ها (طولپایی، ثابت نگه داشتن شیب و جهت شکل و ...) از مهم‌ترین دسته سؤالات فصل تبدیل‌های هندسی هستند و در امتحان نهایی خرداد ۱۴۰۳ نیز جزء سؤالات بودند.

پاسخ: گزینه ۳

دقت کنید که تبدیل طولیا، اندازه پاره‌خط‌ها را حفظ می‌کند، پس تبدیل یافته هر شکل با شکل اولیه هم‌نهشت است.

تبدیلی که طول پاره‌خط‌ها را حفظ می‌کند، تبدیل طولیا نامیده می‌شود. تبدیل طولیا، اندازه زاویه‌ها و محیط و مساحت اشکال هندسی را ثابت نگه می‌دارد.

گام اول: طبق قضیه صفحه ۳۵ کتاب درسی، در هر تبدیل طولیا، تبدیل یافته هر زاویه، زاویه‌ای هم‌اندازه آن است. بنابراین گزینه (۳) درست است.

گام دوم: به عنوان مثال نقض برای سایر گزینه‌ها داریم:

گزینه (۱): بازتاب تبدیلی طولیا است، ولی جهت شکل‌ها را حفظ نمی‌کند.

گزینه (۲): بازتاب و دوران تبدیلی‌هایی طولپا هستند، ولی شیب خط‌ها را حفظ نمی‌کنند.

گزینه (۴): انتقال تبدیلی طولیا است، ولی نقطه ثابت تبدیل ندارد.

Hint

درتس Box

پاسخ خیلی تشریحی

۲۲

در مثلث ABC ، $\hat{A} = 75^\circ$ ، $\hat{B} = 60^\circ$ و $AB = 2\sqrt{2}$ است. مجموع فواصل نقطه همرسی عمودمنصف‌های مثلث ABC از سه رأس آن

کدام است؟

۴ $\sqrt{2}$ (۴)

۹ (۳)

۳ $\sqrt{2}$ (۲)

۶ (۱)

پاسخ: گزینه ۱

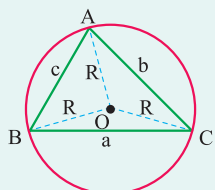
Hint

درس Box

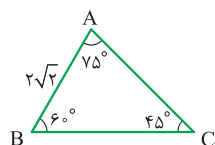
نقطه همرسی عمودمنصف‌های مثلث از سه رأس مثلث به یک فاصله است.

نقطه همرسی عمودمنصف‌های اضلاع هر مثلث، مرکز دایره محیطی آن مثلث است (دایره‌ای که از سه رأس مثلث عبور می‌کند).

طبق قضیه سینوس‌ها در هر مثلث دلخواه مانند ABC داریم:



$$\frac{a}{\sin \hat{A}} = \frac{b}{\sin \hat{B}} = \frac{c}{\sin \hat{C}} = 2R \quad (R \text{ شعاع دایره محیطی مثلث})$$



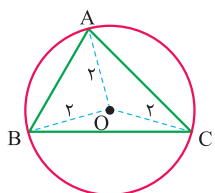
گام اول: مجموع زوایای هر مثلث 180° است، بنابراین داریم:

$$\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180^\circ \Rightarrow 75^\circ + 60^\circ + \hat{C} = 180^\circ \Rightarrow \hat{C} = 45^\circ$$

گام دوم: طبق قضیه سینوس‌ها در مثلث ABC داریم:

$$\frac{AB}{\sin \hat{C}} = 2R \Rightarrow 2R = \frac{2\sqrt{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = 4 \Rightarrow R = 2$$

گام سوم: نقطه همرسی عمودمنصف‌ها از سه رأس مثلث ABC به یک فاصله است، پس:



$$OA + OB + OC = 3R = 3 \times 2 = 6$$

۲۳ اگر شعاع دایره محاطی داخلی مثلث متساوی الساقینی برابر ۳ و طول ارتفاع وارد بر قاعده آن برابر ۸ باشد، طول هر کدام از ارتفاع‌های وارد بر ساق‌های این مثلث کدام است؟

۹ / ۶ (۴)

۸ / ۴ (۳)

۷ / ۲ (۲)

۶ (۱)

مشاوره این سؤال براساس تمرین ۵ (قسمت (ب)) صفحه ۳۰ کتاب درسی هندسه ۲ طراحی شده است. اثبات روابط ارائه شده در هر دو قسمت این تمرین می‌تواند از سوالات احتمالی امتحان نهایی باشد.

پاسخ: گزینه ۴

Hint رابطه بین ارتفاع‌های هر مثلث و شعاع دایره محاطی داخلی آن مثلث را بنویسید.

درس Box

الف) اگر r_a, r_b, r_c شعاع‌های سه دایره محاطی خارجی و r شعاع دایره محاطی داخلی یک مثلث باشند، آن‌گاه:

$$\frac{1}{r_a} + \frac{1}{r_b} + \frac{1}{r_c} = \frac{1}{r}$$

ب) اگر h_a, h_b, h_c اندازه‌های سه ارتفاع و r شعاع دایره محاطی داخلی یک مثلث باشند، آن‌گاه:

$$\frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c} = \frac{1}{r}$$

پاسخ خیلی تشریحی ✓ **گام اول:** مثلث متساوی الساقین ABC ($AB = AC$) را در نظر می‌گیریم. طبق فرض $r = 3$ و $h_a = 8$ است. از طرفی می‌دانیم در هر مثلث متساوی الساقین، ارتفاع‌های وارد بر ساق‌ها برابر یکدیگرند، پس داریم:

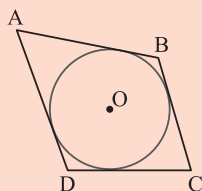
$$h_b = h_c \quad (*)$$

گام دوم: طبق رابطه قسمت (ب) درس باکس داریم:

$$\frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c} = \frac{1}{r} \xrightarrow{(*)} \frac{1}{8} + \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_b} = \frac{1}{3} \Rightarrow \frac{2}{h_b} = \frac{1}{3} - \frac{1}{8} = \frac{5}{24} \Rightarrow h_b = \frac{48}{5} = 9\frac{3}{5}$$

۲۴

در شکل زیر، چهارضلعی ABCD محیطی و O مرکز دایره محاطی آن است. اگر محیط این چهارضلعی ۴۴، طول AB برابر ۱۲ و



AD // BC باشد، حاصل $OC^2 + OD^2$ کدام است؟

۸۱ (۱)

۱۰۰ (۲)

۱۴۴ (۳)

۱۶۹ (۴)

مشاوره چهارضلعی‌های محیطی
و محاطی از مهم‌ترین مباحث فصل دایره محسوب می‌شوند. سوالات مربوط به چهارضلعی محیطی به‌ویژه در قالب دوزنقه متساوی‌الساقین از پرتکرارترین سوالات فصل دایره در کنکورهای اخیر بوده است.

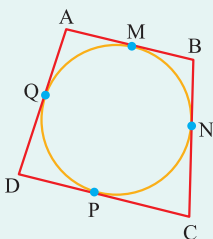
پاسخ: گزینه ۲

با توجه به موازی بودن AD و BC، دو زاویه $\hat{D}$ و $\hat{C}$ مکمل یکدیگرند.

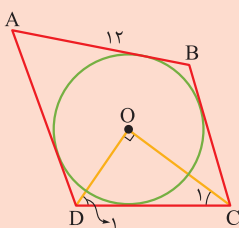
Hint

چهارضلعی محیطی: یک چهارضلعی محیطی است اگر و فقط اگر مجموع اندازه‌های دو ضلع مقابل آن، برابر مجموع اندازه‌های دو ضلع دیگر باشند.

درس‌Box



$$AB + CD = AD + BC$$



گام اول: اضلاع AD و BC موازی یکدیگرند، پس طبق قضیه خطوط موازی و مورب، $\hat{C} + \hat{D} = 180^\circ$ است. از طرفی مرکز دایره محاطی یک چند ضلعی نقطه هم‌رسی نیمسازهای آن چند ضلعی است، پس OC و OD نیمسازهای زوایای C و D در چهارضلعی ABCD هستند و در نتیجه داریم:

پاسخ خیلی تشریحی

$$\frac{\hat{C}}{2} + \frac{\hat{D}}{2} = 90^\circ \Rightarrow \hat{C}_1 + \hat{D}_1 = 90^\circ \xrightarrow{\triangle OCD} \hat{COD} = 90^\circ$$

یعنی مثلث OCD قائم‌الزاویه است.

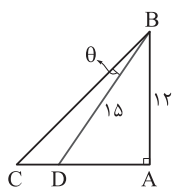
گام دوم: چهارضلعی ABCD محیطی است، پس مجموع هر دو ضلع مقابل، نصف محیط آن است.

$$AB + CD = \frac{44}{2} \Rightarrow 12 + CD = 22 \Rightarrow CD = 10$$

گام سوم: طبق قضیه فیثاغورس در مثلث OCD داریم:

$$OC^2 + OD^2 = CD^2 = 100$$

۲۵ در شکل زیر، اگر مثلث ABC قائم الزاویه متساوی الساقین باشد، آن گاه مقدار $\sin \theta$ کدام است؟



(۱) $\frac{1}{5}$

(۲) $\frac{1}{3}$

(۳) $\frac{\sqrt{3}}{15}$

(۴) $\frac{\sqrt{2}}{10}$

مشاوره قضیه سینوس ها یکی
از مهم ترین قضیه های کتاب درسی
هندسه ۲ است و اثبات آن (در یکی
از سه حالت مثلث قائم الزاویه، مثلث
حاده الزاویه و یا مثلث منفرجه
الزاویه) می تواند از سؤالات احتمالی
امتحان نهایی باشد. مسائل عددی
قضیه سینوس ها به ویژه به صورت
ترکیبی با قضیه کسینوس ها یا
رابطه سینوسی مساحت مثلث نیز
از سؤالات مورد انتظار در امتحان
نهایی و تست های کنکور است.

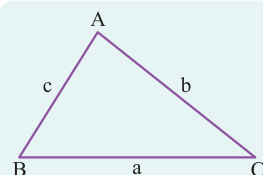
پاسخ: گزینه ۴

قضیه سینوس ها را در مثلث BCD بنویسید.

Hint

درس Box

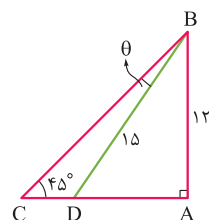
قضیه سینوس ها:



در هر مثلث، نسبت اندازه هر ضلع به سینوس زاویه مقابل آن، برابر است با قطر دایره محیطی آن مثلث.

بنابراین در مثلث ABC به طول اضلاع $AB = c$ و $AC = b$ و $BC = a$ ، اگر شعاع دایره محیطی مثلث را با R نمایش دهیم، آن گاه داریم:

$$\frac{a}{\sin \hat{A}} = \frac{b}{\sin \hat{B}} = \frac{c}{\sin \hat{C}} = 2R$$



$$AD^2 = BD^2 - AB^2 = 15^2 - 12^2 = 9^2 \Rightarrow AD = 9$$

پاسخ خیلی تشریحی ✓ **گام اول:** طبق قضیه فیثاغورس در مثلث قائم الزاویه ABD داریم:

از طرفی مثلث ABC قائم الزاویه متساوی الساقین است، پس:

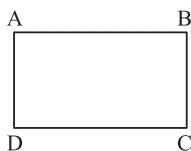
$$AC = AB = 12$$

$$CD = AC - AD = 12 - 9 = 3$$

گام دوم: طبق قضیه سینوس ها در مثلث BCD داریم:

$$\frac{CD}{\sin \theta} = \frac{BD}{\sin 45^\circ} \Rightarrow \frac{3}{\sin \theta} = \frac{15}{\frac{\sqrt{2}}{2}} \Rightarrow \sin \theta = \frac{\sqrt{2}}{10}$$

طول مستطیل $ABCD$ برابر با ۷ و عرض آن برابر با ۴ است. این مستطیل را نسبت به ضلع CD بازتاب می‌دهیم تا چهارضلعی $A'B'C'D'$ پدید آید. چهارضلعی جدید را حول نقطه B' به اندازه 90° در جهت حرکت عقربه‌های ساعت دوران می‌دهیم تا چهارضلعی $A''B''C''D''$ حاصل شود. طول پاره‌خط AA'' کدام است؟



(۱) $2\sqrt{10}$

(۲) $5\sqrt{2}$

(۳) $5\sqrt{3}$

(۴) $3\sqrt{10}$

پاسخ: گزینه ۲

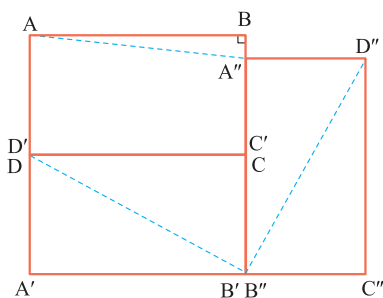
دقت کنید که هر دو تبدیل بازتاب و دوران، طولها هستند.

Hint

دکتر Box

یک تبدیل طولیا، طول پاره‌خطها و اندازه زوایه‌ها را حفظ می‌کند، بنابراین تصویر یک چند ضلعی تحت یک تبدیل طولیا (یا ترکیبی از چند تبدیل طولیا) با چندضلعی اولیه هم‌نهشت است. بازتاب، انتقال و دوران تبدیلاتی طولیا هستند، پس این ویژگی برای آنها برقرار است.

گام اول: چون مستطیل $ABCD$ را نسبت به ضلع CD بازتاب داده‌ایم، پس نقاط C' و D' (بازتاب C و D) بر خود نقاط C و D منطبق هستند و چون بازتاب تبدیلی طولیا است، پس چهارضلعی $A'B'C'D'$ با مستطیل اولیه هم‌نهشت است.



گام دوم: مستطیل $A'B'C'D'$ را حول B' دوران داده‌ایم، پس B'' بر B' منطبق خواهد شد. از آنجا که دوران تبدیلی طولیا است، پس چهارضلعی $A''B''C''D''$ نیز مستطیلی هم‌نهشت با مستطیل اولیه است.

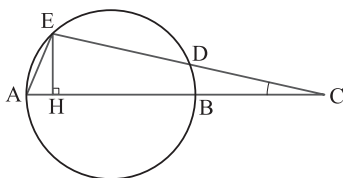
گام سوم: با توجه به شکل داریم:

$$BB'' = 2BC = 2 \times 4 = 8, \quad A''B'' = A'B' = 7, \quad A''B = BB'' - A''B'' = 8 - 7 = 1$$

در نتیجه در مثلث قائم‌الزاویه ABA'' داریم:

$$AA''^2 = AB^2 + A''B^2 = 7^2 + 1^2 = 50 \Rightarrow AA'' = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}$$

در شکل زیر، AB قطر دایره است. از نقطه C روی امتداد AB، قاطع CDE را چنان رسم کرده‌ایم که $\widehat{ACE} = 18^\circ$ و طول وتر DE دو برابر طول EH است. اندازه زاویه $\widehat{AEH}$ چند درجه است؟



(۱) ۳۶

(۲) ۳۲

(۳) ۲۷

(۴) ۲۴

پاسخ: گزینه ۳

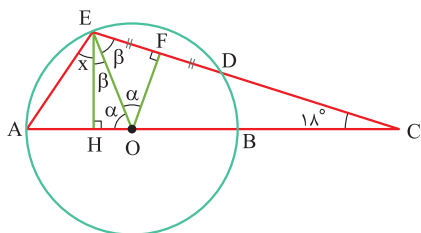
Hint از مرکز دایره، عمودی بر وتر DE رسم کنید.

درس‌Box

قضیه‌های مربوط به وتر در دایره

- (۱) در هر دایره، کمان‌های نظیر وترهای مساوی با یکدیگر برابرند و برعکس.
- (۲) در هر دایره، وترهای مساوی از مرکز دایره به یک فاصله هستند و برعکس.
- (۳) در هر دایره، قطر عمود بر یک وتر، آن وتر و کمان‌های نظیر آن را نصف می‌کند.
- (۴) در هر دایره، اگر از مرکز به وسط یک وتر از آن دایره وصل کنیم، پاره‌خط حاصل بر آن وتر عمود است و امتداد آن کمان نظیر آن وتر را نصف می‌کند.
- (۵) در هر دایره، اگر از مرکز به وسط کمانی از آن دایره وصل کنیم، پاره‌خط حاصل، بر وتر نظیر آن کمان عمود است و آن را نصف می‌کند.

پاسخ خیلی تشریحی ✓ **گام اول:** از مرکز دایره (نقطه O)، عمودی بر وتر DE رسم می‌کنیم.



می‌دانیم قطر عمود بر یک وتر، آن وتر را نصف می‌کند، پس $EF = DF$ است. از طرفی طبق فرض $DE = 2EH$ ، بنابراین داریم:
 $EF = EH$ و در نتیجه دو مثلث OEH و OEF به حالت برابری وتر و یک ضلع هم‌نهشت هستند.

$$\left. \begin{array}{l} \widehat{H} = \widehat{F} = 90^\circ \\ OE = OE \\ EH = EF \end{array} \right\} \Rightarrow \triangle OEH \cong \triangle OEF \Rightarrow \begin{cases} \widehat{EOF} = \widehat{EOH} = \alpha \\ \widehat{OEF} = \widehat{OEH} = \beta \end{cases}$$

گام دوم: با توجه به نتایج گام اول داریم:

$$\widehat{COF} = 90^\circ - 18^\circ = 72^\circ \Rightarrow 18^\circ - 2\alpha = 72^\circ \Rightarrow \alpha = 54^\circ$$

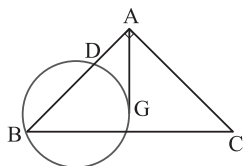
$$\beta = 90^\circ - \alpha = 90^\circ - 54^\circ = 36^\circ$$

گام سوم: در مثلث OAE، $OA = OE = R$ ، پس این مثلث متساوی‌الساقین بوده و در نتیجه $\widehat{OEA} = \widehat{OAE}$. داریم:

$$\triangle AEH: \widehat{H} = 90^\circ \Rightarrow \widehat{OAE} = 90^\circ - \widehat{AEH} = 90^\circ - x$$

$$\widehat{OEA} = \widehat{OAE} \Rightarrow x + 36^\circ = 90^\circ - x \Rightarrow 2x = 54^\circ \Rightarrow x = 27^\circ$$

در مثلث قائم‌الزاویه ABC ($\hat{A} = 90^\circ$)، G نقطه هم‌رسی میانه‌ها است. دایره‌ای از رأس B می‌گذرد که در نقطه G بر AG مماس است و ضلع AB را در نقطه D قطع می‌کند. اگر $AD = 4$ و $BD = 5$ باشد، طول ضلع AC کدام است؟



(۱) $9\sqrt{3}$

(۲) $12\sqrt{3}$

(۳) $6\sqrt{3}$

(۴) $8\sqrt{3}$

مشاوره روابط طولی در دایره از مهم‌ترین دسته مسائل عددی دایره هستند. در امتحان نهایی خرداد ۱۴۰۳، دو سؤال به این مبحث اختصاص یافته بود و در کنکور مرحله اول ۱۴۰۳ نیز سؤالی از این موضوع دیده می‌شود.

پاسخ: گزینه ۱

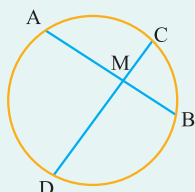
به ویژگی نقطه هم‌رسی میانه‌ها توجه کنید.

Hint

درسی Box

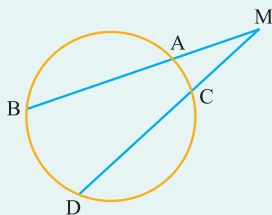
روابط طولی در دایره:

(۱) وترهای متقاطع درون دایره:



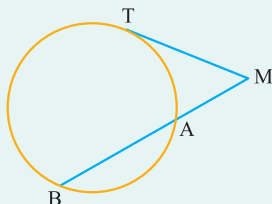
$$MA \times MB = MC \times MD$$

(۲) وترهای متقاطع بیرون دایره:



$$MA \times MB = MC \times MD$$

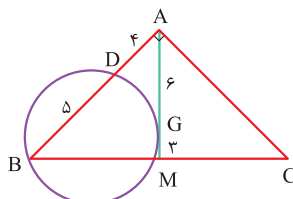
(۳) وتر و مماس متقاطع:



$$MT^2 = MA \times MB$$

پاسخ خیلی تشریحی ✓ **گام اول:** G نقطه هم‌رسی میانه‌های مثلث قائم‌الزاویه ABC است، پس امتداد AG از نقطه M وسط وتر BC می‌گذرد. طبق

روابط طولی مماس و قاطع در این دایره داریم:



$$AG^2 = AD \times AB = 4 \times 9 = 36 \Rightarrow AG = 6$$

گام دوم: می‌دانیم میانه‌های مثلث یکدیگر را به نسبت ۲ به ۱ قطع می‌کنند و فاصله نقطه هم‌رسی میانه‌ها از هر رأس، $\frac{2}{3}$ طول میانه نظیر آن رأس است، بنابراین داریم:

$$AG = \frac{2}{3} AM \Rightarrow 6 = \frac{2}{3} AM \Rightarrow AM = 9$$

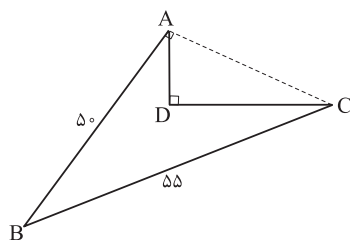
گام سوم: طول میانه نظیر وتر در مثلث قائم‌الزاویه، نصف طول وتر است، پس داریم:

$$AM = \frac{1}{2} BC \Rightarrow 9 = \frac{1}{2} BC \Rightarrow BC = 18$$

طبق قضیه فیثاغورس در مثلث ABC می‌توان نوشت:

$$AC^2 = BC^2 - AB^2 = 18^2 - 9^2 = 9^2(4 - 1) \Rightarrow AC = 9\sqrt{3}$$

مطابق شکل زیر، زمینی به شکل چهارضلعی ABCD در اختیار داریم به طوری که مثلث ABC در رأس A قائم‌الزاویه است. اگر $\hat{BAD} = 15^\circ$ باشد و بخواهیم بدون تغییر در تعداد اضلاع و محیط این زمین، مساحت آن را تا حد ممکن افزایش دهیم، میزان این افزایش مساحت چه قدر است؟



۱) $131/25$

۲) $132/5$

۳) $133/75$

۴) 135

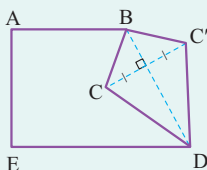
مشاوره این سؤال براساس تمرین‌های ۱ و ۵ صفحه ۵۴ کتاب درسی هندسه ۲ طراحی شده است. سؤالاتی مشابه این سؤال در امتحان نهایی خرداد ۱۴۰۳ و کنکور نوبت دوم ۱۴۰۳ دیده می‌شود.

پاسخ: گزینه ۱

زاویه $\hat{ACD}$ برابر 15° می‌شود، پس می‌توان از ویژگی زاویه 15° برای محاسبه مساحت مثلث قائم‌الزاویه ADC استفاده کرد.

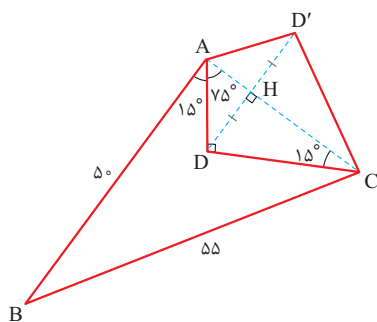
مسائل هم‌پیرامونی یا هم‌محیطی:

هرگاه بخواهیم مساحت یک چند ضلعی را که یک یا چند زاویه بزرگ‌تر از 180° دارد، بدون تغییر در محیط و تعداد اضلاع آن افزایش دهیم، کافی است بازتاب هر کدام از رأس‌هایی که زاویه آن‌ها بزرگ‌تر از 180° است را نسبت به خط گذرنده از دو رأس مجاور آن رسم کنیم.



مطابق شکل، میزان افزایش مساحت چند ضلعی مقعر ABCDE بدون تغییر در محیط و تعداد اضلاع آن، برابر مساحت چندضلعی BCDC' (دو برابر مساحت مثلث BCD) خواهد بود که C' بازتاب C نسبت به BD است.

گام اول: ابتدا به کمک قضیه فیثاغورس در مثلث ABC، طول ضلع AC را محاسبه می‌کنیم: **پاسخ خیلی تشریحی ✓**



$$AC^2 = BC^2 - AB^2 = 55^2 - 50^2 \Rightarrow AC^2 = (55 - 50)(55 + 50) = 5 \times 105 = 525$$

گام دوم: میزان افزایش مساحت زمین، برابر مساحت چهارضلعی ADCD' است که مساحت آن دو برابر مساحت مثلث ADC می‌باشد. در این مثلث، یکی از زوایای حاده 15° است، پس اندازه ارتفاع وارد بر وتر آن، $\frac{1}{4}$ طول وتر است و در نتیجه داریم:

$$\text{میزان افزایش مساحت} = 2S_{ADC} = 2 \times \frac{1}{2} DH \times AC = \frac{1}{4} AC \times AC = \frac{1}{4} AC^2 = \frac{525}{4} = 131/25$$

۳۰. کمترین مقدار محیط دوزنقه‌هایی به طول قاعده‌های ۲۵ و ۵ و مساحت ۱۱۲/۵ که در قاعده بزرگ‌تر مشترک هستند، کدام است؟

(۱) ۵۰

(۲) ۵۵

(۳) ۶۰

(۴) ۶۵

مشاوره این سؤال براساس مسئله (ب) صفحه ۵۳ کتاب درسی هندسه ۲ که مربوط به مسائل پیدا کردن کوتاه‌ترین مسیر می‌شود، طراحی شده است. یکی از سؤالات امتحان نهایی به این دسته از مسائل اختصاص خواهد یافت. هم‌چنین سؤالی براساس این مثال کتاب در کنکور ریاضی خارج از کشور ۹۹ طراحی شده است.

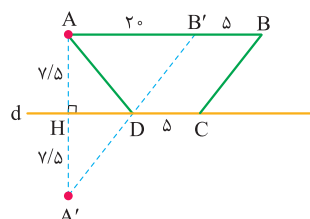
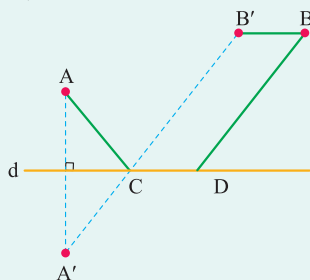
پاسخ: گزینه ۲

به کمک طول قاعده‌ها و مساحت دوزنقه، طول ارتفاع دوزنقه را به دست آورید.

Hint

درس‌Box

فرض کنید بخواهیم از نقطه A به نقطه B برویم به گونه‌ای که بخشی از مسیر به طول $CD = m$ را روی خط d طی کنیم. در این صورت طبق مسئله هرون برای پیدا کردن کوتاه‌ترین مسیر ACDB، کافی است ابتدا نقطه B را به اندازه m واحد موازی با خط d به سمت نقطه A انتقال دهیم تا نقطه B' حاصل شود و سپس B' را به نقطه A' (بازتاب A نسبت به خط d) وصل کنیم تا پاره خط A'B'، خط d را در نقطه C قطع نماید.



پاسخ خیلی تشریحی ✓ **گام اول:** ابتدا ارتفاع دوزنقه را تعیین می‌کنیم.

$$S_{ABCD} = \frac{1}{2}h(AB + CD) \Rightarrow 112/5 = \frac{1}{2}h(25 + 5) \Rightarrow h = \frac{225}{3} = 7/5$$

گام دوم: نقطه B را به اندازه ۵ واحد (طول قاعده کوچک دوزنقه) به سمت چپ انتقال می‌دهیم تا نقطه B' حاصل شود. هم‌چنین بازتاب نقطه A را نسبت به خط d (خط گذرنده از قاعده کوچک دوزنقه) پیدا کرده و آن را A' می‌نامیم. حال از A' به B' وصل می‌کنیم. محل برخورد A'B' با خط d همان نقطه D است.

گام سوم: طبق قضیه فیثاغورس در مثلث AA'B' داریم:

$$A'B'^2 = AA'^2 + AB'^2 = 15^2 + 20^2 = 25^2 \Rightarrow A'B' = 25$$

گام چهارم: چهارضلعی BB'DC متوازی‌الاضلاع است، پس $CD = BB' = 5$ و $B'D = BC$ در نتیجه داریم:

$$\min(ABCD) = AB + CD + (AD + BC) = AB + CD + (A'D + B'D) = AB + CD + A'B' = 25 + 5 + 25 = 55$$

۳۱ اگر p گزاره درست، q گزاره نادرست و r گزاره دلخواه باشد، گزاره $(p \Rightarrow r) \Leftrightarrow (r \wedge q)$ هم‌ارز منطقی کدام گزاره است؟

T (۲)

r (۱)

F (۴)

$\sim r$ (۳)

مشاوره جبر گزاره‌ها در کنکورهای اخیر از مباحث مورد علاقه طراحان بوده است، با توجه به حجم کم و آسانی مطلب، از مباحثی است که می‌توانید روی آن سرمایه‌گذاری کنید.

پاسخ: گزینه ۳

ارزش گزاره‌های p و q را در گزاره $(p \Rightarrow r) \Leftrightarrow (r \wedge q)$ جای‌گذاری کنید و یک بار ارزش r را درست و در حالت دیگر، ارزش آن را نادرست در نظر بگیرید.

Hint

درس‌Box

جبر گزاره‌ها

۱) ترکیب‌های فصلی و عطفی دو گزاره:

ارزش یک گزاره فصلی تنها در صورتی نادرست است که هر دو گزاره نادرست باشد. $p \vee q$: فصلی

ارزش یک گزاره عطفی تنها در صورتی درست است که هر دو گزاره درست باشد. $p \wedge q$: عطفی

۲) ترکیب شرطی دو گزاره:

به گزاره $p \Rightarrow q$ ترکیب شرطی دو گزاره می‌گوییم و آن را به صورت «اگر p آن‌گاه q » می‌خوانیم.

ارزش $p \Rightarrow q$ تنها در حالتی نادرست است که ارزش p (مقدم) درست و ارزش q (تالی) نادرست باشد.

به $p \Rightarrow q \equiv \sim q \Rightarrow \sim p$ عکس نقیض گزاره شرطی $p \Rightarrow q$ می‌گوییم، ارزش این دو گزاره یکسان است. $(p \Rightarrow q) \equiv (\sim q \Rightarrow \sim p)$

۳) ترکیب دوشروطی:

به ترکیب عطفی دو گزاره $(p \Rightarrow q)$ و $(q \Rightarrow p)$ ترکیب دوشروطی می‌گوییم و آن را با $p \Leftrightarrow q$ نشان می‌دهیم.

$$(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p) \equiv p \Leftrightarrow q$$

ارزش گزاره $p \Leftrightarrow q$ در صورتی درست است که هر دو گزاره p و q هم‌ارزش باشند. (یا هر دو درست و یا هر دو نادرست باشند).

۴) هم‌ارزی‌های منطقی:

$$p \vee q \equiv q \vee p$$

$$p \wedge q \equiv q \wedge p \text{ (جابه‌جایی)}$$

$$(p \vee q) \vee r \equiv p \vee (q \vee r)$$

$$(p \wedge q) \wedge r \equiv p \wedge (q \wedge r) \text{ (شرکت‌پذیری)}$$

$$p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$$

$$p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r) \text{ (توزیع‌پذیری)}$$

$$\sim (p \wedge q) \equiv \sim p \vee \sim q$$

$$\sim (p \vee q) \equiv \sim p \wedge \sim q \text{ (دمورگان)}$$

$$p \wedge (p \vee q) \equiv p$$

$$p \vee (p \wedge q) \equiv p \text{ (جذب)}$$

$$p \Rightarrow q \equiv \sim p \vee q \text{ (تبدیل شرطی به فصلی)}$$

$$(p \Leftrightarrow q) \equiv (p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p) \equiv (\sim p \wedge \sim q) \vee (p \wedge q)$$

پاسخ خیلی تشریحی ✓ گام اول: با توجه به صورت سؤال $p \equiv T$ و $q \equiv F$:

$$(p \Rightarrow r) \Leftrightarrow (r \wedge q) \equiv \underbrace{(T \Rightarrow r)}_{\equiv r} \Leftrightarrow \underbrace{(r \wedge F)}_{\equiv F} \equiv r \Leftrightarrow F$$

گام دوم: در گزاره به‌دست‌آمده داریم:

$$r \equiv F \text{ اگر } r \Leftrightarrow F \equiv T \equiv \sim r$$

$$r \equiv T \text{ اگر } r \Leftrightarrow F \equiv F \equiv \sim r$$

پس گزاره $r \Leftrightarrow F$ هم‌ارز گزاره $\sim r$ است و گزینه (۳) صحیح است.

۳۲ اگر گزاره‌های p و q به تصادف انتخاب شوند، با کدام احتمال ارزش گزاره $(p \Rightarrow \sim q) \vee (q \Leftrightarrow \sim p)$ درست است؟

- (۱) $\frac{1}{4}$ (۲) $\frac{1}{2}$ (۳) $\frac{3}{4}$ (۴) صفر

پاسخ: گزینه ۳

Hint

جدول ارزش گزاره‌ها را رسم کنید، چهار ردیف خواهیم داشت، حال ببینید که گزاره داده شده در چند حالت دارای ارزش درست است و سپس احتمال خواسته شده را به دست آورید.

پاسخ خیلی تشریحی ✓ **گام اول:** برای هر کدام از گزاره‌های p و q دو حالت درست و نادرست داریم، پس در کل $2 \times 2 = 4$ ردیف، برای جدول ارزش گزاره‌ها داریم، جدول را رسم می‌کنیم:

p	q	$\sim q$	$p \Rightarrow \sim q$	$\sim p$	$q \Leftrightarrow \sim p$	$(p \Rightarrow \sim q) \vee (q \Leftrightarrow \sim p)$
T	T	F	F	F	F	F
T	F	T	T	F	T	T
F	T	F	T	T	T	T
F	F	T	T	T	F	T

گام دوم: گزاره $(p \Rightarrow \sim q) \vee (q \Leftrightarrow \sim p)$ در سه حالت دارای ارزش درست است و در کل برای آن چهار حالت داریم، پس احتمال درستی آن $\frac{3}{4}$ است.

په‌جور دیکه

می‌دانیم که $q \Leftrightarrow \sim p \equiv (q \Rightarrow \sim p) \wedge (\sim p \Rightarrow q)$ و همچنین می‌دانیم که عکس نقیض گزاره شرطی هم‌ارز خود گزاره است؛ یعنی $(p \Rightarrow \sim q) \equiv (q \Rightarrow \sim p)$ ، در نتیجه:

$$(p \Rightarrow \sim q) \vee (q \Leftrightarrow \sim p) \equiv (q \Rightarrow \sim p) \vee ((q \Rightarrow \sim p) \wedge (\sim p \Rightarrow q)) \equiv q \Rightarrow \sim p$$

جذب

گزاره به دست آمده یک گزاره شرطی است و می‌دانیم که گزاره شرطی در سه حالت دارای ارزش درست است.

برای سه مجموعه ناتهی A، B و C می‌دانیم $((x \notin B) \vee (x \in C)) \Rightarrow (x \in A)$ ، در این صورت کدام نتیجه گیری الزاماً درست است؟

$A \subseteq (B' \cup C)$

$A \cap B \cap C = \emptyset$ (۱)

$A \cap B = A \cap B \cap C$ (۲)

$(A - B) \cup (B - A) = A \cup B$ (۳)

$A \cup C = B \cup C$ (۴)

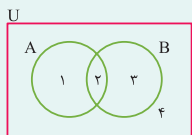
مشاوره در سال‌های اخیر ردپای سؤالات ترکیبی در کنکور مشاهده شده است، در این سؤال هم با یک سؤال ترکیبی از جبر مجموعه‌ها و جبر گزاره‌ها مواجه هستیم.

پاسخ: گزینه ۲

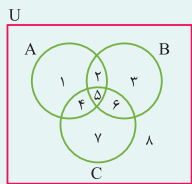
گزاره داده‌شده به زبان جبر مجموعه‌ها به صورت $A \subseteq (B' \cup C)$ نوشته می‌شود.

روش شماره‌گذاری ناحیه‌ها برای حل سؤالات جبر مجموعه‌ها

روش شماره‌گذاری ناحیه‌ها برای حل سؤالات جبر مجموعه‌ها به این صورت است: اگر دو مجموعه داشته باشیم و سؤال هیچ شرطی نداشته باشد، نمودار ون را به صورت مقابل در نظر می‌گیریم:



و اگر سه مجموعه داشته باشیم و سؤال هیچ شرطی نداشته باشد، نمودار ون را به صورت زیر در نظر می‌گیریم:



حالا هر قسمت را با مجموعه‌ای از اعداد درون آن نمایش می‌دهیم؛ برای مثال اگر دو مجموعه داشته باشیم:

$A = \{1, 2\}$, $B = \{2, 3\}$, $A \cap B = \{2\}$

مثلاً برای این‌که بفهمیم حاصل $A \cup (A' \cap B)$ چیست، به صورت زیر عمل می‌کنیم:

$A \cup (A' \cap B) = \{1, 2\} \cup (\{3, 4\} \cap \{2, 3\}) = \{1, 2\} \cup \{3\} = \{1, 2, 3\} = A \cup B$

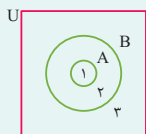
و یا به عنوان مثال اگر $(A - B) \cup (B - A) = A$ باشد، داریم:

$(A - B) \cup (B - A) = A \Rightarrow \{1\} \cup \{3\} = \{1, 2\} \Rightarrow \{1, 3\} = \{1, 2\}$

دقت کنید که در این روش هیچ دو ناحیه‌ای نمی‌توانند با هم مساوی باشند (منظور از ناحیه، اعداد است، برای مثال هیچ وقت $\{1\} = \{4\}$ نمی‌شود)، چون نواحی کاملاً جدا از هم هستند؛ برای این‌که $\{1, 3\} = \{1, 2\}$ شود، باید $\{2\} = \{3\} = \emptyset$ باشند که از آن نتیجه می‌گیریم:

$$\left. \begin{array}{l} A = \{1, 2\} = \{1\} \\ B = \{2, 3\} = \emptyset \end{array} \right\} \Rightarrow B \subseteq A$$

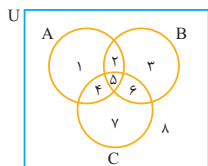
هواستون باشد اگر در سؤالی، شرطی برای مجموعه‌ها داشته باشیم، باید نمودار ون را طوری رسم کنیم که آن شرط رعایت شود، برای مثال اگر در سؤالی دو مجموعه داشته باشیم و گفته باشد $A \subseteq B$ ، نمودار ون را به صورت زیر در نظر می‌گیریم:



گام اول: گزاره داده شده در صورت سؤال به زبان فارسی این گونه خوانده می شود: (هر عضوی از A یا عضو C است یا عضو B نیست)، پس هر عضوی از A، عضو اجتماع B' و C است. در نتیجه A زیرمجموعه B' ∪ C است:

$$A \subseteq (B' \cup C)$$

گام دوم: نمودار ون مربوط به سه مجموعه را رسم می کنیم و از روش شماره گذاری استفاده می کنیم:



$$\{1, 4, 7, 8\}$$

$$A \subseteq (B' \cup C) \Rightarrow \{1, 2, 4, 5\} \subseteq \{1, 4, 5, 6, 7, 8\} \Rightarrow 2 = \emptyset$$

$$\{4, 5, 6, 7\}$$

$$\Rightarrow (A \cap B) = (A \cap B \cap C)$$

پس گزینه (۲) صحیح است.

۳۴

در مدرسه‌ای ۶۰ درصد دانش‌آموزان در رشته تجربی و ۴۰ درصد دانش‌آموزان در رشته ریاضی تحصیل می‌کنند. در این مدرسه، $\frac{1}{3}$ دانش‌آموزان رشته تجربی و $\frac{1}{x}$ دانش‌آموزان رشته ریاضی، معدل بالای ۱۸ کسب کرده‌اند. اگر دانش‌آموزی به تصادف از این مدرسه انتخاب کنیم و معدل او بالای ۱۸ باشد، احتمال آن که این فرد دانش‌آموز رشته تجربی باشد برابر $\frac{1}{3}$ است. مقدار x کدام است؟

۱ (۴)

۲ (۳)

۳ (۲)

۴ (۱)

مشاوره همواره به کار در کلاس‌ها و تمرینات کتاب درسی توجه ویژه‌ای داشته باشید، این سؤال مشابه یکی از تمرینات کتاب درسی است.

پاسخ: گزینه ۳

Hint

احتمال کل این که یک دانش‌آموز بالای ۱۸ شده باشد را در مخرج و احتمال این که دانش‌آموز رشته تجربی معدل بالای ۱۸ کسب کرده باشد را در صورت قرار دهید.

دستی Box

قانون بیز

به شرطی شدن قانون احتمال کل، قانون بیز می‌گوییم، برای به دست آوردن احتمال خواسته شده در این سؤالات، احتمال کل را در مخرج و احتمال مطلوب را در صورت قرار می‌دهیم.
توجه: برای درک بهتر و حل این گونه سؤالات می‌توانید از نمودار درختی استفاده کنید.

پاسخ خیلی تشریحی ✓ گام اول: احتمال‌ها را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$P(A)$: احتمال این که معدل دانش‌آموز بالای ۱۸ باشد.

$P(B_1)$: احتمال این که رشته دانش‌آموز، تجربی باشد.

$P(B_2)$: احتمال این که رشته دانش‌آموز، ریاضی باشد.

گام دوم: پس احتمال خواسته شده برابر می‌شود با:

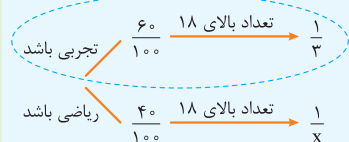
$$P(B_1 | A) = \frac{P(B_1 \cap A)}{P(A)} \Rightarrow P(B_1 | A) = \frac{P(B_1) \times P(A | B_1)}{P(B_1)P(A | B_1) + P(B_2)P(A | B_2)}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{\frac{60}{100} \times \frac{1}{3}}{\frac{60}{100} \times \frac{1}{3} + \frac{40}{100} \times \frac{1}{x}} \xrightarrow[\text{را در ۱۰۰ ضرب می‌کنیم.}]{\text{صورت و مخرج کسر سمت راست}} \frac{1}{2} = \frac{60 \times \frac{1}{3}}{60 \times \frac{1}{3} + 40 \times \frac{1}{x}}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{20}{20 + \frac{40}{x}} \xrightarrow{\text{طرفین وسطین}} 40 = 20 + \frac{40}{x} \Rightarrow \frac{40}{x} = 20 \Rightarrow x = 2$$

پس گزینه (۳) صحیح است.

از نمودار درختی استفاده می‌کنیم: **به‌جور دیگر**



$$\frac{1}{2} = \frac{\frac{60}{100} \times \frac{1}{3}}{\frac{60}{100} \times \frac{1}{3} + \frac{40}{100} \times \frac{1}{x}} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{20}{20 + \frac{40}{x}} \Rightarrow 40 = 20 + \frac{40}{x} \Rightarrow x = 2$$

پس:

۳۵

در جریان یک مسابقه، بازیکن A دو پناستی می‌زند. این بازیکن با احتمال ۸۰ درصد پناستی اول را گل می‌کند که در این صورت احتمال گل شدن پناستی دوم ۷۰ درصد است. اگر این بازیکن پناستی اول را گل نکند، احتمال گل شدن پناستی دوم ۵۰ درصد است. با چه احتمالی وضعیت گل شدن دو پناستی مشابه است؟

۰/۹ (۴)

۰/۶۶ (۳)

۰/۵۶ (۲)

۰/۳۴ (۱)

مشاوره تسلط خود را بر روی سؤالات ضرب احتمال و احتمال شرطی بالا ببرید چراکه پای ثابت سؤالات کنکور هستند.

پاسخ: گزینه ۳

Hint

خواسته سؤال احتمال این است که یا هر دو پناستی گل شود و یا هر دو پناستی گل نشود، از قانون ضرب احتمال استفاده کنید.

گام اول: احتمال خواسته شده این است که یا هر دو پناستی گل شوند و یا هر دو پناستی گل نشوند. احتمال گل شدن پناستی اول

را برابر $P(A)$ و احتمال گل شدن پناستی دوم را برابر $P(B)$ در نظر می‌گیریم، پس با توجه به اطلاعات سؤال خواهیم داشت:

$$P(A) = 0/8$$

$$P(B|A) = 0/7 \xrightarrow{P(A \cap B) = P(A)P(B|A)} P(A \cap B) = 0/8 \times 0/7 = 0/56$$

هر دو گل شود

گل شدن دومی به شرط گل شدن اولی

$$P(A') = 0/2$$

$$P(B'|A') = 0/5 \xrightarrow{P(A' \cap B') = P(A')P(B'|A')} P(A' \cap B') = 0/2 \times 0/5 = 0/1$$

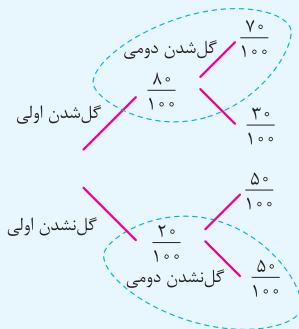
هیچ‌کدام گل نشود

گل نشدن دومی به شرط گل نشدن اولی

گام دوم: در نتیجه خواسته سؤال برابر می‌شود با:

$$P(A \cap B) + P(A' \cap B') = 0/56 + 0/1 = 0/66$$

با استفاده از نمودار درختی خواهیم داشت:



$$\text{احتمال خواسته شده} = \underbrace{\left(\frac{0/8}{100} \times \frac{0/7}{100}\right)}_{\text{هر دو گل شود}} + \underbrace{\left(\frac{0/2}{100} \times \frac{0/5}{100}\right)}_{\text{هر دو گل نشود}} = 0/56 + 0/1 = 0/66$$

په‌جور دیگه

یک تاس به گونه‌ای ساخته شده است که احتمال وقوع هر عدد اول، چهار برابر احتمال وقوع هر عدد غیراول است. در دو بار پرتاب این تاس، احتمال این که حداقل یک بار عدد زوج مشاهده شود چه قدر است؟

$$۰/۵۲ (۲)$$

$$۰/۱۶ (۱)$$

$$۰/۹۲ (۴)$$

$$۰/۶۴ (۳)$$

پاسخ: گزینه ۳

Hint

درس Box

احتمال آمدن اعداد غیراول را x و اعداد اول را $4x$ در نظر بگیرید و مجموع آن‌ها را برابر ۱ قرار دهید.

احتمال غیر هم‌شانس

هرگاه حداقل دو پیشامد ساده از فضای نمونه‌ای $S = \{s_1, s_2, \dots, s_n\}$ احتمال نابرابر داشته باشند، S را فضای نمونه‌ای با احتمال غیرهم‌شانس می‌گوییم. در فضای نمونه‌ای متناهی S با احتمال غیرهم‌شانس، همواره خواهیم داشت:

$$P(S) = P(s_1) + P(s_2) + \dots + P(s_n) = 1$$

گام اول: احتمال وقوع هر عدد غیراول را x در نظر می‌گیریم، پس احتمال وقوع هر عدد اول برابر $4x$ می‌شود، از طرفی جمع

احتمال‌ها باید برابر ۱ شود، در نتیجه:

$$\left. \begin{array}{l} P(1) = x \\ P(4) = x \\ P(6) = x \\ P(2) = 4x \\ P(3) = 4x \\ P(5) = 4x \end{array} \right\} \xrightarrow{P(S)=1} P(1) + P(4) + P(6) + P(2) + P(3) + P(5) = 1$$

$$\Rightarrow x + x + x + 4x + 4x + 4x = 1 \Rightarrow 15x = 1 \Rightarrow x = \frac{1}{15}$$

گام دوم: از احتمال متمم استفاده می‌کنیم. متمم مطلوب سؤال این است که در هر دو پرتاب، هیچ‌گاه عدد زوج ظاهر نشود، به عبارت دیگر در هر دو پرتاب عدد فرد ظاهر شود:

$$P(\text{فرد}) = P(1) + P(3) + P(5) = x + 4x + 4x = 9x \xrightarrow{x = \frac{1}{15}} P(\text{فرد}) = 9 \times \frac{1}{15} = \frac{3}{5}$$

$$P(\text{خواسته سؤال}) = 1 - \left(\frac{3}{5} \times \frac{3}{5} \right) \Rightarrow P(\text{خواسته سؤال}) = 1 - \frac{9}{25} = \frac{16}{25}$$

تاس دوم فرد بیاید تاس اول فرد بیاید

$$\Rightarrow P(\text{خواسته سؤال}) = ۰/۶۴$$

تعدادی داده آماری داریم. فراوانی دسته اول برابر ۱ است. اگر به این دسته دو داده اضافه کنیم و فراوانی مابقی دسته‌ها را تغییر ندهیم، فراوانی نسبی این دسته ۰/۱۵ افزایش می‌یابد. تعداد داده‌های اولیه کدام است؟

۱۵ (۴)

۱۲ (۳)

۱۰ (۲)

۹ (۱)

پاسخ: گزینه ۲

فراوانی نسبی اولیه را $\frac{1}{x}$ و فراوانی نسبی جدید را $\frac{3}{x+2}$ در نظر بگیرید.

Hint

اگر داده‌ها را به n دسته تقسیم کنیم، فراوانی نسبی هر دسته برابر است با فراوانی دسته تقسیم بر فراوانی کل.

نکته

$$\text{فراوانی همان دسته} = \frac{\text{تعداد کل داده‌ها}}{\text{فراوانی نسبی هر دسته}}$$

پاسخ خیلی تشریحی ✓ **گام اول:** تعداد کل داده‌ها را x در نظر می‌گیریم، فراوانی نسبی دسته اول برابر می‌شود با:

$$\frac{1}{x} : \text{فراوانی نسبی دسته اول}$$

گام دوم: در حالت جدید، دسته اول ۳ داده دارد و فراوانی نسبی جدید دسته اول $\frac{3}{x+2}$ می‌شود، طبق صورت سؤال:

$$\frac{3}{x+2} = \frac{1}{x} + 0.15 \quad (*)$$

با جای‌گذاری گزینه‌ها در رابطه $(*)$ ، $x = 10$ پاسخ سؤال است.

تابع f با ضابطه $f(x) = 2x + 3$ و دامنه اعداد طبیعی دورقمی مفروض است. میانه اعضای برد این تابع کدام است؟

۱۱۵ (۴)

۱۱۲ (۳)

۱۰۹ (۲)

۱۰۶ (۱)

پاسخ: گزینه ۳

 Hint

 نکته

تعداد اعضای برد را به دست آورید و دو داده وسط در برد را به کمک دامنه و ضابطه f به دست آورید.

برای به دست آوردن میانه داده‌ها ابتدا آن‌ها را از کوچک به بزرگ مرتب می‌کنیم و سپس:

(۱) اگر تعداد داده‌ها فرد باشد، داده وسطی میانه است.

(۲) اگر تعداد داده‌ها زوج باشد، میانه برابر است با میانگین دو داده وسط.

 پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: تابع داده‌شده خطی است و شیب آن مثبت است، پس اعضای برد رابطه خطی صعودی با یکدیگر دارند، از طرفی تعداد اعضای برد برابر تعداد اعضای دامنه یعنی $90 = 1 + (99 - 10)$ تا است.

گام دوم: دیدیم که تعداد اعضای برد ۹۰ تا است و ۹۰ عددی زوج است، پس میانه برابر میانگین دو داده وسط است، یعنی میانگین داده‌های $f(54)$ و $f(55)$:

داده‌ها: $f(10), \dots, f(53), f(54), f(55), f(56), \dots, f(99)$
داده ۴۴ داده ۴۴

گام سوم: در نتیجه میانگین $f(54)$ و $f(55)$ که خواسته سؤال و همان میانه است، برابر می‌شود با:

$$f(x) = 2x + 3 \Rightarrow \begin{cases} f(54) = 2(54) + 3 = 111 \\ f(55) = 2(55) + 3 = 113 \end{cases} \Rightarrow \text{میانه} = \frac{f(54) + f(55)}{2} = \frac{111 + 113}{2} = 112$$

۲۰ داده آماری متمایز داریم. میانگین داده‌های بزرگ‌تر از چارک سوم برابر ۷ و میانگین داده‌های کوچک‌تر از چارک سوم برابر ۵ است. اگر میانگین داده‌های بزرگ‌تر از چارک اول برابر ۶ باشد، میانگین داده‌های کوچک‌تر از چارک اول کدام است؟

۳ (۲)

۲ (۱)

۵ (۴)

۴ (۳)

مشاوره بر تمامی مفاهیم ابتدایی آمار تسلط داشته باشید چراکه بارها در کنکور سؤالات امتیازآور و آسان از آن داشته‌ایم.

پاسخ: گزینه ۳

داده‌ها را پنج‌تا پنج‌تا تقسیم کنید و با توجه به سه میانگین داده‌شده، مجموع داده‌های کوچک‌تر از چارک اول را پیدا کنید.

چارک‌ها داده‌ها را به چهار دسته تقسیم می‌کنند، چارک اول میانه داده‌های کوچک‌تر از میانه، چارک دوم همان میانه و چارک سوم نیز میانه داده‌های بزرگ‌تر از میانه است.

پاسخ خیلی تشریحی ✓ **گام اول:** ۲۰ داده به صورت زیر تقسیم می‌شود:



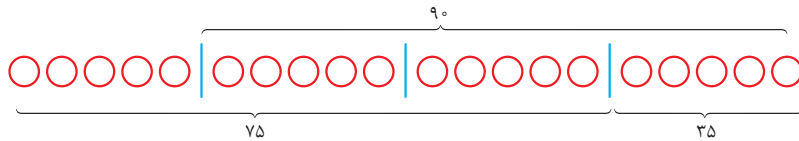
گام دوم: حال با توجه به داده‌های سؤال داریم:

$$۷ \times ۵ = ۳۵ = \text{مجموع داده‌های بزرگ‌تر از چارک سوم} \Rightarrow ۷ = \text{میانگین داده‌های بزرگ‌تر از چارک سوم}$$

$$۵ \times ۱۵ = ۷۵ = \text{مجموع داده‌های کوچک‌تر از چارک سوم} \Rightarrow ۵ = \text{میانگین داده‌های کوچک‌تر از چارک سوم}$$

$$۶ \times ۱۵ = ۹۰ = \text{مجموع داده‌های بزرگ‌تر از چارک اول} \Rightarrow ۶ = \text{میانگین داده‌های بزرگ‌تر از چارک اول}$$

به عبارت دیگر:



گام سوم: مجموع کل داده‌ها $۷۵ + ۳۵ = ۱۱۰$ است و مجموع ۱۵ داده دوم ۹۰ است، پس مجموع ۵ داده اول یا داده‌های کوچک‌تر از چارک اول برابر می‌شود با:

$$۱۱۰ - ۹۰ = ۲۰ = \text{مجموع داده‌های کوچک‌تر از چارک اول}$$

پس خواسته سؤال برابر است با:

$$\frac{۲۰}{۵} = ۴ = \text{میانگین داده‌های کوچک‌تر از چارک اول}$$

با توجه به مجموع داده‌های کوچک‌تر و بزرگ‌تر از چارک سوم، میانگین کل داده‌ها را به دست می‌آوریم:

$$\frac{۷ \times ۵ + ۵ \times ۱۵}{۲۰} = \frac{۱۱۰}{۲۰}$$

حال میانگین داده‌های کوچک‌تر از چارک اول را x در نظر می‌گیریم:

$$\frac{۵ \times x + ۱۵ \times ۶}{۲۰} = \frac{۱۱۰}{۲۰} \Rightarrow ۵x + ۹۰ = ۱۱۰ \Rightarrow ۵x = ۲۰ \Rightarrow x = ۴$$

به‌جور دیگر

۴۰

در داده‌های a_1, a_2, a_3, a_4 مُد منحصربه‌فرد برابر ۳، در داده‌های b_1, b_2, b_3 مُد برابر ۵ و در داده‌های c_1, c_2, c_3 مُد برابر ۴ است. مُد منحصربه‌فرد کل ۱۰ داده برابر ۲ است. میانگین این ۱۰ داده برابر کدام یک از گزینه‌های زیر می‌تواند باشد؟

$$۳/۲ \quad (۲)$$

$$۳/۱ \quad (۱)$$

$$۳/۴ \quad (۴)$$

$$۳/۳ \quad (۳)$$

پاسخ: گزینه (۱)

 Hint

در دسته اول حتماً دو داده سه وجود دارد، در دسته دوم حتماً دو داده پنج و در دسته سوم حتماً دو داده چهار داریم. سه داده دیگر باید برابر ۲ باشند و یک داده نامشخص است، با توجه به شرط سؤال برای آن یک عدد مناسب در نظر بگیرید.

 درستی Box

مد یا نما: به داده‌ای که بیشترین تکرار را در بین داده‌های دیگر دارد، مد یا نما گفته می‌شود.

توجه: اگر تعداد فراوانی داده‌ها برابر هم باشد، مد نداریم و هم‌چنین اگر دو داده فراوانی بیشتری از بقیه داده‌ها داشته باشند، دو مد خواهیم داشت.

 پاسخ خیلی تشریحی ✓ **گام اول:** اعداد دسته‌ها تماماً نمی‌توانند با هم برابر باشند، چراکه دیگر مد معنا پیدا نمی‌کند، پس در دسته دوم و سوم به ترتیب

دو داده ۵ و ۴ داریم، هم‌چنین در دسته اول حتماً دو داده ۳ وجود دارد:

$$۳, ۳, -, -, ۵, ۵, -, ۴, ۴, -$$

گام دوم: مد منحصربه‌فرد کل ده داده برابر ۲ است، پس حداقل سه داده ۲ باید داشته باشیم، دقت کنید که در جاهای خالی دسته اول نمی‌توانیم دو داده ۲ قرار دهیم چراکه دیگر در دسته اول مد نخواهیم داشت، پس داده‌ها به صورت زیر هستند:

$$۳, ۳, ۲, ۲, ۵, ۵, ۲, ۴, ۴, ۲$$

گام سوم: ۹ داده مشخص و یک داده غیرمشخص است، مجموع داده‌ها برابر می‌شود با:

$$۳ + ۳ + ۲ + ۲ + ۵ + ۵ + ۲ + ۴ + ۴ + ۲ = ۳۰ + x$$

به ازای $x = ۲$ ، $x = ۳$ و $x = ۴$ میانگین برابر $۳/۲$ ، $۳/۳$ و $۳/۴$ می‌شود، ولی x نمی‌تواند برابر ۲، ۳ و ۴ باشد، چراکه شرایط سؤال به هم می‌ریزد ولی x می‌تواند برابر یک باشد که به ازای آن میانگین برابر می‌شود با:

$$x = ۱ \xrightarrow{\text{میانگین}} \frac{۳۰+۱}{۱۰} = ۳/۱$$

پس گزینه (۱) صحیح است.

بار الکتریکی هسته اتمی ۶ برابر بار آن اتم در حالت یونیده است. اگر این اتم در حالت خنثی ۱۲ الکترون داشته باشد، بار آن در این حالت یونیده چند نانوکولن است؟ ($e = 1.6 \times 10^{-19} \text{ C}$)

$$3/2 \times 10^{-10} \quad (2)$$

$$3/2 \times 10^{-19} \quad (1)$$

$$10/8 \times 10^{-10} \quad (4)$$

$$10/8 \times 10^{-19} \quad (3)$$

پاسخ: گزینه ۲

درس Box

کوانتیده بودن بار الکتریکی: همواره بار الکتریکی یک جسم، مضرب درستی از یک مقدار پایه (بار بنیادی e) است و هر مقدار دلخواهی نمی تواند داشته باشد.

$$q = \pm ne, \quad e = 1.6 \times 10^{-19} \text{ C}$$

↓
تعداد الکترون مبادله شده

علامت +: برای جسمی که الکترون از دست داده است.

علامت -: برای جسمی که الکترون گرفته است.

بار هسته اتم به تعداد پروتون های آن بستگی دارد و در حالت خنثی، تعداد پروتون ها و الکترون های اتم با هم برابر است:

$$q_{\text{هسته}} = +12e \xrightarrow{\text{اتم یونیده } q_{\text{هسته}} = 6e} +12e = 6q_{\text{اتم یونیده}} \Rightarrow q_{\text{اتم یونیده}} = +2e$$

$$q_{\text{اتم یونیده}} = +2 \times 1.6 \times 10^{-19} \text{ C} \Rightarrow q_{\text{اتم یونیده}} = 3/2 \times 10^{-19} \text{ C} \times 10^9 = 3/2 \times 10^{-10} \text{ nC}$$

پاسخ خیلی تشریحی ✓

دو کرهٔ رسانای کوچک (۱) و (۲) با بارهای الکتریکی به ترتیب q_1 و $q_2 = -5q_1$ در فاصلهٔ r از هم قرار دارند. اندازهٔ نیروی الکتریکی که دو کره در این حالت به هم وارد می‌کنند، برابر F است. چند درصد از بار کرهٔ (۲) را به کرهٔ (۱) منتقل کنیم تا از فاصلهٔ $3r$ ، دو کره بر هم نیروی الکتریکی دافعه‌ای به بزرگی $\frac{F}{15}$ وارد کنند؟

۸۰ (۴)

۷۵ (۳)

۵۰ (۲)

۴۰ (۱)

پاسخ: گزینهٔ ۴

درس: Box

هر دو بار الکتریکی نقطه‌ای q_1 و q_2 در فاصلهٔ r به یکدیگر نیروی الکتریکی وارد می‌کنند که اندازهٔ این نیرو از رابطهٔ زیر به دست می‌آید.

$$F = \frac{k |q_1| |q_2|}{r^2}$$

F : اندازهٔ نیرو (N)

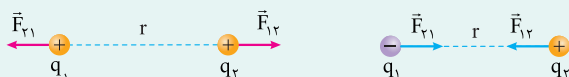
$$k: \text{ثابت کولن} = \frac{9 \times 10^9 \text{ N.m}^2}{\text{C}^2}$$

r : فاصلهٔ دو بار از هم (m)

q_1 و q_2 : بارهای الکتریکی نقطه‌ای (C)

نیروی بین دو بار در حالتی که دو بار همنام هستند، از نوع دافعه (رانشی) و در حالتی که دو بار ناهمنام هستند، از نوع جاذبه (ربایشی) است.

بنا بر قانون سوم نیوتون، نیروی الکترواستاتیکی که دو بار بر یکدیگر وارد می‌کنند، هم‌اندازه، هم‌راستا، ولی در خلاف جهت یکدیگرند.



پاسخ خیلی تشریحی ✓ با توجه به قانون کولن، رابطهٔ مقایسه‌ای زیر را خواهیم داشت:

$$\frac{F'}{F} = \frac{q'_1}{q_1} \times \frac{q'_2}{q_2} \times \left(\frac{r}{r'}\right)^2 \Rightarrow \frac{15}{F} = \frac{q'_1}{q_1} \times \frac{q'_2}{5q_1} \times \left(\frac{r}{3r}\right)^2$$

$$\Rightarrow \frac{1}{15} = \frac{q'_1 q'_2}{5 q_1^2} \times \frac{1}{9} \Rightarrow 3 q_1^2 = q'_1 q'_2 \Rightarrow 3 q_1^2 = |a| q_1 \times |b| q_1 \quad (1)$$

رابطهٔ (۱) یعنی حاصل ضرب بارهای جدید باید با یکدیگر نسبت یک به سه داشته و هم‌علامت باشند:

$$\left| \frac{a}{b} \right| = 3 \Rightarrow \begin{cases} q'_1 = -3q_1 \\ q'_2 = -q_1 \end{cases}$$

نتیجه می‌گیریم که کرهٔ (۲)، $x = -4q_1$ ، داده و بار کره‌ها به صورت بالا درآمده است، بنابراین:

$$80\% = \frac{4q_1}{5q_1} \times 100\% = \text{درصد بار منتقل شده}$$

سه بار الکتریکی نقطه‌ای $q_1 = 3 \mu C$ ، $q_2 = 12 \mu C$ و q_3 در مکان‌های معینی روی خط راست ثابت شده‌اند. اگر نیروی الکتریکی خالص وارد بر هر یک از بارها برابر با صفر باشد، q_3 چند میکروکولن است؟

(۱) $\frac{2}{3}$ (۲) $\frac{4}{3}$ (۳) $-\frac{2}{3}$ (۴) $-\frac{4}{3}$

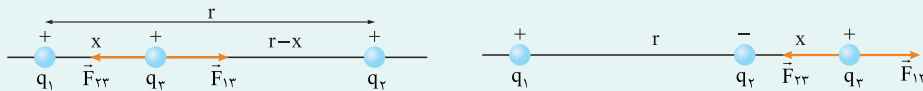
پاسخ: گزینه ۴

درس Box

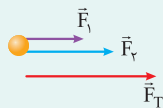
اگر دو بار نقطه‌ای q_1 و q_2 در فاصله r از یکدیگر ثابت شده باشند و بخواهیم بار q_3 را روی خط وصل دو بار یا امتداد آن قرار دهیم تا نیروی خالص وارد بر آن از سمت دو بار q_1 و q_2 صفر باشد، اگر دو بار هم‌نام باشند، بار q_3 بین آن‌ها و نزدیک بار کوچک‌تر و اگر دو بار ناهم‌نام باشند، بار q_3 خارج آن‌ها و سمت بار کوچک‌تر قرار می‌گیرد. در این صورت برای به دست آوردن فاصله بار q_3 تا بار کوچک‌تر اندازه نیروهای وارد بر آن را برابر قرار می‌دهیم. $(|F_{13}| = |F_{23}|)$

هم‌نام:

ناهم‌نام:

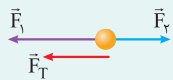


برای محاسبه برآیند دو نیروی $\vec{F}_1$ و $\vec{F}_2$ در کتاب درسی، سه حالت مطابق شکل‌های زیر وجود دارد.



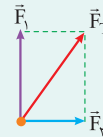
دو نیرو هم‌راستا و هم‌جهت باشند.

$$F_T = F_1 + F_2$$



دو نیرو هم‌راستا و خلاف جهت باشند.

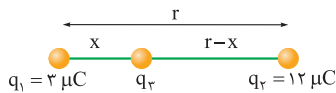
$$F_T = |F_1 - F_2|$$



دو نیرو عمود بر هم باشند.

$$F_T = \sqrt{F_1^2 + F_2^2}$$

گام اول: محل قرارگیری بارها را روی خط راست مشخص می‌کنیم. با توجه به این‌که بارهای q_1 و q_2 هم‌نام هستند، بار q_3 باید بین آن‌ها و نزدیک بار q_1 قرار گیرد.

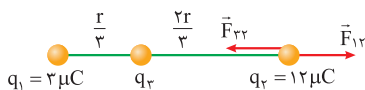


گام دوم: حال نسبت فاصله‌های x و r را مشخص می‌کنیم؛ از آن‌جا که q_3 در حال تعادل است، نیروی خالص وارد بر آن صفر است:

$$F = \frac{k |q_1| |q_2|}{r^2}$$

$$|F_{13}| = |F_{23}| \Rightarrow \frac{k |q_1| |q_2|}{x^2} = \frac{k |q_2| |q_2|}{(r-x)^2} \Rightarrow \frac{1}{x^2} = \frac{1}{(r-x)^2} \Rightarrow \frac{1}{x} = \frac{1}{r-x} \Rightarrow x = r-x \Rightarrow 2x = r \Rightarrow x = \frac{r}{2}$$

گام سوم: در این مرحله نیروی خالص وارد بر یکی دیگر از بارهای q_1 یا q_2 را نیز برابر با صفر قرار می‌دهیم تا بار q_3 به دست آید.

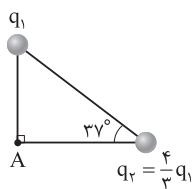


$$|F_{12}| = |F_{23}| \Rightarrow \frac{k |q_1| |q_2|}{r^2} = \frac{k |q_2| |q_2|}{(\frac{r}{2})^2} \Rightarrow \frac{1}{r^2} = \frac{1}{\frac{r^2}{4}} \Rightarrow |q_2| = \frac{4}{3}$$

و چون نیرویی که بار q_3 به q_2 وارد می‌کند، باید جاذبه باشد تا با نیروی بار q_1 به q_2 هم‌اندازه و خلاف جهت شود، پس بار q_3 باید منفی باشد؛ بنابراین:

$$q_3 = -\frac{4}{3} \mu C$$

در شکل زیر اندازه میدان الکتریکی حاصل از بار نقطه‌ای q_1 در نقطه A برابر $8 \times 10^6 \text{ N/C}$ است. اگر بار الکتریکی نقطه‌ای $Q = 2 \mu\text{C}$ را در نقطه A قرار دهیم، بزرگی نیروی الکتریکی وارد بر این بار چند نیوتون خواهد بود؟ ($\sin 37^\circ = 0.6$)



۱۶ (۱)

۱۸ (۲)

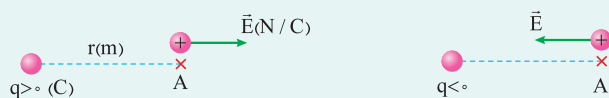
۲۰ (۳)

۲۴ (۴)

پاسخ: گزینه ۳

درتس Box

برای محاسبه اندازه میدان الکتریکی ناشی از بار q در فاصله r از آن از رابطه $E = \frac{k|q|}{r^2}$ استفاده می‌کنیم. برای تشخیص جهت میدان الکتریکی، بار آزمون ($q_0 > 0$) را در نقطه مورد نظر قرار می‌دهیم و جهت نیرویی که بار q به بار آزمون وارد می‌کند، در آن نقطه جهت میدان را نشان می‌دهد.



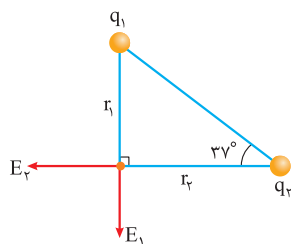
میدان الکتریکی در یک نقطه به اندازه بار q که میدان را ایجاد کرده و همچنین به فاصله از بار بستگی دارد.

$$\frac{E_2}{E_1} = \frac{q_2}{q_1} \times \left(\frac{r_1}{r_2}\right)^2$$

اگر بار الکتریکی q_0 در میدان الکتریکی $\vec{E}$ قرار بگیرد، از طرف میدان به آن نیروی $\vec{F}$ وارد می‌شود.

$$\vec{F} = \vec{E} \cdot q_0$$

پاسخ خیلی تشریحی ✓ گام اول: ابتدا از رابطه مقایسه‌ای میدان الکتریکی، اندازه میدان بار q_2 را در نقطه A به دست می‌آوریم:



$$\tan 37^\circ = \frac{r_1}{r_2} \Rightarrow \frac{\sin 37^\circ}{\cos 37^\circ} = \frac{0.6}{0.8} = \frac{r_1}{r_2} \Rightarrow \frac{r_1}{r_2} = \frac{3}{4}$$

$$\frac{E_2}{E_1} = \frac{q_2}{q_1} \times \left(\frac{r_1}{r_2}\right)^2 \Rightarrow \frac{E_2}{8 \times 10^6} = \left(\frac{3}{4}\right) \left(\frac{4}{3}\right)^2 = \frac{3}{4} \Rightarrow E_2 = 6 \times 10^6 \text{ N/C}$$

گام دوم: حال میدان خالص در نقطه A را به دست آورده و نیروی وارد بر بار Q_A را محاسبه می‌کنیم:

$$E_t = \sqrt{E_1^2 + E_2^2} \Rightarrow E_t = \sqrt{(8 \times 10^6)^2 + (6 \times 10^6)^2} \Rightarrow E_t = 10 \times 10^6 = 10^7 \text{ N/C}$$

$$F = E|q| \Rightarrow F = 10^7 \times 2 \times 10^{-6} \Rightarrow F = 20 \text{ N}$$

ذره‌ای با بار الکتریکی $q = 4 \mu\text{C}$ در میدان الکتریکی یکنواخت بین دو صفحه رسانای باردار از نقطه A به طرف نقطه B پرتاب می‌شود. اگر انرژی جنبشی این ذره در نقاط A و B به ترتیب 200 mJ و 300 mJ باشد، اختلاف پتانسیل الکتریکی دو نقطه A و B ($V_B - V_A$) چند کیلوولت است؟

- (۱) ۲۵
(۲) -۲۵
(۳) ۲۵۰
(۴) -۲۵۰

پاسخ: گزینه ۲

Hint

ابتدا تغییرات انرژی جنبشی جسم ($\Delta K = K_B - K_A$) را به دست آورده و می‌دانیم که برابر با فریته تغییرات انرژی پتانسیل بار الکتریکی است ($\Delta U = -\Delta K$) و سپس از رابطه ($\Delta V = \frac{\Delta U}{q}$) اختلاف پتانسیل دو نقطه A و B را محاسبه می‌کنیم.

درس Box

بر طبق قانون پایستگی انرژی مکانیکی، مقدار انرژی مکانیکی همواره ثابت است، در صورتی که انرژی جنبشی جسم افزایش یابد، انرژی پتانسیل آن به همان اندازه کاهش یافته و برعکس.

$$E = U + K$$

$$|\Delta U| = |\Delta K|$$

اختلاف پتانسیل الکتریکی:

اگر بار الکتریکی q درون میدان الکتریکی از نقطه (۱) به (۲) منتقل شود و انرژی پتانسیل آن از U_1 به U_2 برسد، اختلاف پتانسیل الکتریکی دو نقطه (۱) و (۲) از رابطه زیر قابل محاسبه است:

$$V_2 - V_1 = \frac{U_2 - U_1}{q} \Rightarrow \Delta V = \frac{\Delta U}{q}$$

ΔU : تغییرات انرژی پتانسیل الکتریکی (J)

ΔV : اختلاف پتانسیل دو نقطه (V)

q : بار الکتریکی (C) (لزوماً با علامتش باید لحاظ شود).

پاسخ خیلی تشریحی

تغییرات انرژی جنبشی ذره در حرکت از A تا B برابر است با:

$$\Delta K = K_B - K_A \Rightarrow \Delta K = 300 - 200 \Rightarrow \Delta K = 100 \text{ mJ}$$

$$\Delta U = -\Delta K \Rightarrow \Delta U = -100 \times 10^{-3} \text{ J} = -10^{-1} \text{ J}$$

حال می‌توانیم اختلاف پتانسیل بین دو نقطه A و B را به دست آوریم:

$$\Delta V = \frac{\Delta U}{q} \Rightarrow \Delta V = \frac{-10^{-1}}{4 \times 10^{-6}} \Rightarrow \Delta V = -\frac{1}{4} \times 10^5 \text{ V}$$

$$\Delta V = -0.25 \times 10^5 \text{ V} \times 10^{-3} \Rightarrow \Delta V = -25 \text{ kV}$$

- یک جسم رسانای توپر مکعبی شکل به ضلع 20 cm دارای 12 nC بار الکتریکی است. چه تعداد از موارد زیر دربارهٔ این جسم درست است؟
- میدان الکتریکی خالص درون جسم رسانا برابر صفر است.
 - در بیرون جسم، میدان الکتریکی عمود بر سطح آن است.
 - پتانسیل الکتریکی در رأس‌های این مکعب (نقاط نوک‌تیز جسم) بیشتر است.
 - با فرض توزیع یکنواخت بار در سطح رسانا، چگالی سطحی بار الکتریکی برابر $3\text{ } \mu\text{C} / \text{m}^2$ است.

۴ (۴)

۳ (۳)

۲ (۲)

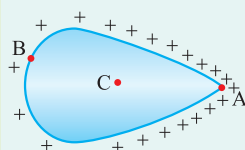
۱ (۱)

پاسخ: گزینه ۲

درتس Box

اگر بار اضافی به یک جسم رسانا داده شود، پس از مدت‌زمان کوتاهی که جسم در تعادل الکتروستاتیکی قرار می‌گیرد، میدان الکتریکی داخل رسانا صفر می‌شود. یا اگر یک جسم رسانای خنثی در میدان الکتریکی خارجی قرار بگیرد، الکترون‌های آزاد جسم تحت تأثیر میدان الکتریکی خارجی، طوری روی سطح خارجی رسانا القا می‌شوند که میدان الکتریکی ناشی از آن‌ها اثر میدان خارجی را در داخل رسانا خنثی کند، از این‌رو، میدان الکتریکی خالص درون رسانا صفر می‌شود.

حال اگر به یک جسم رسانا بار الکتریکی q را منتقل کنیم، بارها جابه‌جا شده و به سطح جسم منتقل می‌شوند تا در نهایت به تعادل الکتریکی برسند. پس از رسیدن به تعادل الکتریکی، تراکم بار در نزدیکی نقاط نوک‌تیز بیشتر است و هنگامی که یک رسانا در تعادل الکتروستاتیکی باشد، پتانسیل الکتریکی تمام نقاط آن با هم برابر است. $V_A = V_B = V_C$ و تراکم بار در $B > A$



اگر مساحت سطحی که بار روی آن توزیع شده است، برابر A و بار الکتریکی موجود در آن سطح برابر Q باشد، چگالی سطحی بار که با نماد σ نشان داده می‌شود، از رابطهٔ مقابل به دست می‌آید:

$$\sigma = \frac{Q}{A}$$

σ : چگالی سطحی بار (C / m^2)

Q : بار الکتریکی (C)

A : مساحت (m^2)

پاسخ خیلی تشریحی ✓

مورد اول: درست؛ میدان الکتریکی خالص درون جسم رسانا در حالت تعادل الکترواستاتیکی همواره برابر صفر است.

مورد دوم: درست؛ میدان الکتریکی در هر نقطه از سطح جسم رسانا همواره عمود بر آن نقطه است.

مورد سوم: نادرست؛ پتانسیل الکتریکی در تمامی نقاط جسم رسانا با یکدیگر برابر است.

مورد چهارم: نادرست؛ سطح جانبی مکعب را محاسبه کرده و چگالی سطحی بار الکتریکی را محاسبه می‌کنیم.

$$\sigma = \frac{Q}{A} \Rightarrow \sigma = \frac{12 \times 10^{-9}}{6 \times 20 \times 20 \times 10^{-4}} \Rightarrow \sigma = \frac{12 \times 10^{-9}}{24 \times 10^{-2}} \Rightarrow \sigma = 0.5 \times 10^{-7} \text{ C} / \text{m}^2$$

$$\sigma = 0.5 \times 10^{-7} \text{ C} / \text{m}^2 \times 10^6 \Rightarrow \sigma = 0.5 \text{ } \mu\text{C} / \text{m}^2$$

در هر کلید یک صفحه کلید رایانه، فاصله بین صفحه‌های خازن تخت $4/5 \text{ mm}$ است که این فاصله با فشار دادن کلید به $5/5 \text{ mm}$ می‌رسد. مساحت صفحه‌های این خازن 10^{-4} m^2 و فضای بین دو صفحه از ماده‌ای با ثابت دی‌الکتریک 5 پر شده است. اگر دو سر این خازن به اختلاف پتانسیل ثابت 5 V وصل شده باشد، با فشار دادن کلید، بار ذخیره شده در خازن چند پیکو کولن تغییر می‌کند؟ ($\epsilon_0 = 9 \times 10^{-12} \text{ F/m}$)

۴۰ (۴)

۸۰ (۳)

۴ (۲)

۸ (۱)

پاسخ: گزینه ۴

Hint

ابتدا ظرفیت اولیه خازن را از رابطه $(C = \kappa \epsilon_0 \frac{A}{d})$ به دست آورید و سپس ظرفیت ثانویه آن را از رابطه $(\frac{C_2}{C_1} = \frac{d_1}{d_2})$ محاسبه کنید. حال می‌توانید تغییرات بار الکتریکی را از رابطه $(\Delta Q = \Delta C.V)$ به دست آورید.

دروس Box

عوامل مؤثر بر ظرفیت خازن:

همان‌طور که می‌دانید، ظرفیت یک خازن به بار ذخیره شده (q) و اختلاف پتانسیل (V) دو سر آن بستگی ندارد، بلکه به ساختمان آن وابسته است.

$$C = \frac{\kappa \epsilon_0 . A}{d}$$

ظرفیت خازن از رابطه مقابل به دست می‌آید:

κ : ثابت دی‌الکتریک

$$\epsilon_0: \text{ضریب گذردهی الکتریکی خلأ} \left(\epsilon_0 = 8.85 \times 10^{-12} \frac{\text{C}^2}{\text{N.m}^2} \right)$$

A : مساحت ناحیه مشترک (مقابل) صفحات خازن (m^2)

d : فاصله بین قسمت داخلی صفحات خازن (m)

اگر فضای بین صفحات خازن را با یک ماده عایق پر کنیم، به آن دی‌الکتریک خازن گفته و ثابت κ برای هر دی‌الکتریک وابسته به جنس آن می‌باشد.

ثابت دی‌الکتریک برای هوا (خلأ) برابر یک است ($\kappa = 1$) و برای مواد عایق دیگر به جز هوا (خلأ) بزرگ‌تر از یک می‌باشد؛ بنابراین اضافه کردن دی‌الکتریک به یک خازن که بین صفحات آن هوا است، ظرفیت خازن را افزایش می‌دهد، زیرا ظرفیت خازن با ثابت دی‌الکتریک رابطه مستقیم دارد.

$$\frac{C_2}{C_1} = \frac{\kappa_2}{\kappa_1} \times \frac{A_2}{A_1} \times \frac{d_1}{d_2}$$

با اتصال یک خازن به یک باتری، می‌توانیم در آن بار الکتریکی ذخیره کنیم. پس از اتصال خازن به باتری، شارش بار الکتریکی در مدار تا زمانی ادامه می‌یابد که اختلاف پتانسیل دو سر خازن برابر اختلاف پتانسیل باتری شود. صفحه‌ای که به پایانه مثبت باتری متصل است، دارای بار مثبت و صفحه دیگر دارای بار منفی می‌شود.

وقتی می‌گوییم یک خازن دارای بار q است، یعنی یک صفحه آن بار $+q$ و یک صفحه آن بار $-q$ دارد.

ظرفیت خازن: نسبت بار ذخیره شده در یک خازن به اختلاف پتانسیل دو سر آن مقدار ثابتی است که آن را ظرفیت خازن می‌نامند.

$$C = \frac{q}{V} \quad \text{کولن (C)} = \frac{\text{فاراد (F)}}{\text{ولت (V)}}$$

پاسخ خیلی تشریحی ✓ **گام اول:** ابتدا ظرفیت خازن زیر هر کلید را به دست می‌آوریم:

$$C = \kappa \epsilon_0 \frac{A}{d} \Rightarrow C_1 = \frac{5 \times 9 \times 10^{-12} \times 10^{-4}}{4/5 \times 10^{-3}} \Rightarrow C_1 = \frac{45 \times 10^{-16}}{45 \times 10^{-4}} \Rightarrow C_1 = 10^{-12} \text{ F}$$

گام دوم: حال ظرفیت جدید خازن پس از فشردن کلید را محاسبه می‌کنیم:

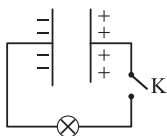
$$\frac{C_2}{C_1} = \frac{d_1}{d_2} \Rightarrow \frac{C_2}{10^{-12}} = \frac{5/5}{4/5} \Rightarrow C_2 = 9 \times 10^{-12} \text{ F}$$

گام سوم: تغییرات ظرفیت خازن با توجه به این که اختلاف پتانسیل ثابت است، باعث تغییرات بار الکتریکی می‌شود.

$$Q = CV \Rightarrow \Delta Q = \Delta C.V \Rightarrow \Delta Q = (9 \times 10^{-12} - 10^{-12}) \times 5$$

$$\Rightarrow \Delta Q = 8 \times 10^{-12} \times 5 \Rightarrow \Delta Q = 40 \times 10^{-12} \text{ C} \times 10^{12} \Rightarrow \Delta Q = 40 \text{ pC}$$

در شکل زیر، خازن پُر شده‌ای به دو سر لامپ فلاش یک دوربین عکاسی متصل است. با وصل کردن کلید K و شارش 5×10^{14} الکترون در مدار، خازن با توان متوسط 4 kW به طور کامل تخلیه شده و لامپ به مدت 2 ms روشن می‌شود. ظرفیت این خازن چند نانوفاراد است؟ ($e = 1.6 \times 10^{-19} \text{ C}$)



۰/۴ (۲)

۰/۱ (۱)

۴ (۴)

۱ (۳)

پاسخ: گزینه ۲

Hint

ابتدا از روابط $(U = Pt)$ و $(q = ne)$ انرژی و بار تخلیه شده از خازن را به دست آورید، سپس با کمک رابطه انرژی خازن $(U = \frac{q^2}{2C})$ می‌توانید ظرفیت خازن را محاسبه کنید.

دانش Box

انرژی الکتریکی ذخیره شده در خازن:

کار انجام شده برای باردار شدن کل خازن به صورت انرژی پتانسیل الکتریکی در میدان الکتریکی فضای بین صفحه‌های خازن ذخیره می‌شود.

$$U = \frac{1}{2} QV = \frac{1}{2} CV^2 = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C}$$

U : انرژی پتانسیل الکتریکی خازن (J)

Q : بار خازن (C)

V : اختلاف پتانسیل دو صفحه خازن (V)

C : ظرفیت خازن (F)

گام اول: ابتدا انرژی و بار تخلیه شده خازن را به صورت زیر محاسبه می‌کنیم:

$$U = Pt \Rightarrow U = 4 \times 10^3 \times 2 \times 10^{-3} \Rightarrow U = 8 \text{ J}$$

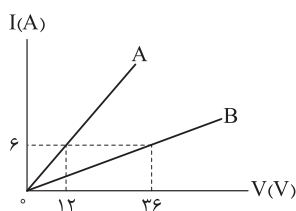
$$q = ne \Rightarrow q = 5 \times 10^{14} \times 1.6 \times 10^{-19} \Rightarrow q = 8 \times 10^{-5} \text{ C}$$

گام دوم: حال از رابطه انرژی خازن، ظرفیت آن را به دست می‌آوریم:

$$U = \frac{Q^2}{2C} \Rightarrow 8 = \frac{(8 \times 10^{-5})^2}{2C} \Rightarrow C = \frac{64 \times 10^{-10}}{16} \Rightarrow C = 4 \times 10^{-10} \text{ F} \times 10^9 \Rightarrow C = 0.4 \text{ nF}$$

پاسخ خیلی تشریحی

نمودار جریان الکتریکی عبوری از دو مقاومت A و B بر حسب اختلاف پتانسیل الکتریکی دو سر آنها به شکل زیر است. اگر اختلاف پتانسیل یکسان $30V$ به دو سر هر یک از این مقاومت‌ها اعمال شود، اختلاف جریان الکتریکی عبوری از آنها چند آمپر خواهد بود؟



۵ (۱)

۱۰ (۲)

۱۵ (۳)

۲۰ (۴)

پاسخ: گزینه ۲

Hint

شیب هر نمودار را محاسبه کنید که برابر با عکس مقاومت مربوط است $(\frac{1}{R})$ ، سپس با توجه به مقاومت‌های A و B و اختلاف پتانسیل متصل به آنها، جریان عبوری از هر یک را محاسبه کنید $(R = \frac{V}{I})$ و در نهایت اختلاف جریان عبوری از دو مقاومت A و B را به دست آورید $(I_A - I_B)$.

قانون اهم:

اگر مقاومت الکتریکی یک وسیله در ولتاژهای مختلف (در دمای ثابت) همواره مقدار ثابتی داشته باشد، به آن وسیله مقاومت یا رسانای اهمی گفته می‌شود. به عبارت دیگر در وسیله‌هایی که از قانون اهم پیروی می‌کنند، نسبت اختلاف پتانسیل دو سر آنها به شدت جریان عبوری از آنها در دمای ثابت، مقداری ثابت است. این مقدار ثابت را مقاومت الکتریکی آن جسم می‌نامیم.

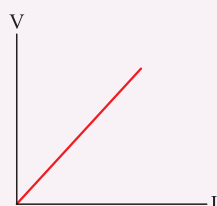
$$R = \frac{V}{I}$$

R: مقاومت الکتریکی بر حسب اهم (Ω)

V: اختلاف پتانسیل بر حسب ولت (V)

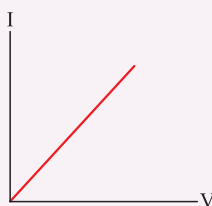
I: جریان الکتریکی بر حسب آمپر (A)

اگر نمودار V بر حسب I و I بر حسب V را برای یک مقاومت اهمی متصل به باتری رسم کنیم، مشاهده می‌شود که این نمودار به صورت خطی است:



$$V = RI$$

شیب نمودار



$$I = \frac{1}{R} V$$

شیب نمودار

همان‌طور که در قسمت درس‌باکس توضیح دادیم، شیب این نمودار برابر با $\frac{1}{R}$ است؛ بنابراین:

✓ پاسخ خیلی تشریحی

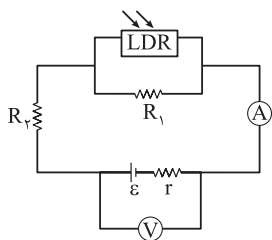
$$\text{شیب نمودار A} = \frac{1}{R_A} \Rightarrow \frac{6}{12} = \frac{1}{R_A} \Rightarrow R_A = 2\Omega$$

$$\text{شیب نمودار B} = \frac{1}{R_B} \Rightarrow \frac{6}{36} = \frac{1}{R_B} \Rightarrow R_B = 6\Omega$$

$$R = \frac{V}{I} \Rightarrow \begin{cases} I_A = \frac{30}{2} \Rightarrow I_A = 15A \\ I_B = \frac{30}{6} \Rightarrow I_B = 5A \end{cases}$$

$$\Delta I = |I_A - I_B| = 15 - 5 \Rightarrow \Delta I = 10A$$

در مدار شکل زیر، با افزایش نور محیط، اعدادی که آمپرسنج آرمانی و ولتسنج آرمانی نشان می‌دهند، به ترتیب از راست به چپ چگونه تغییر می‌کند؟



- (۱) کاهش می‌یابد، کاهش می‌یابد.
- (۲) افزایش می‌یابد، افزایش می‌یابد.
- (۳) کاهش می‌یابد، افزایش می‌یابد.
- (۴) افزایش می‌یابد، کاهش می‌یابد.

پاسخ: گزینه ۲

آمپرسنج در مدار به صورت سری بسته می‌شود و جریان کل مدار را نشان می‌دهد.

$$I = \frac{\varepsilon}{R_{eq} + r}$$

مقاومت آمپرسنج آرمانی صفر است، بنابراین اگر اشتباهاً آن را در مدار به صورت موازی ببندیم، مانند اتصال کوتاه عمل می‌کند و جزئی از مدار که به آن بسته شده از مدار حذف می‌شود.

ولتسنج در مدار به صورت موازی به هر جزء بسته می‌شود. اگر ولتسنج به مقاومت متصل شود، عدد RI را نشان می‌دهد و اگر به مولد متصل شود، در صورتی که جریان در مدار برقرار نباشد، نیروی محرکه مولد (ε) را نشان می‌دهد و اگر جریان در مدار برقرار باشد، ولتسنج عدد $V = \varepsilon - rI$ را نشان می‌دهد. اگر اشتباهاً ولتسنج آرمانی را در مدار به صورت سری ببندیم، به دلیل این که مقاومت آن بی‌نهایت است، جریان در مدار صفر می‌شود.

با افزایش نور محیط، مقاومت LDR کاهش یافته و مقاومت معادل را نیز کاهش می‌دهد؛ بنابراین عدد آمپرسنج افزایش می‌یابد.

$$\uparrow I = \frac{\varepsilon}{R_{eq} + r}$$

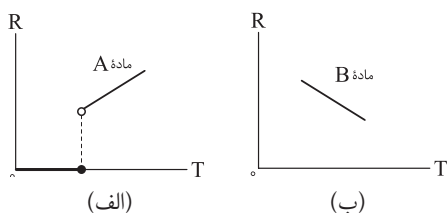
ولتسنج نیز به مولد متصل است، بنابراین با افزایش جریان، افت پتانسیل باتری افزایش یافته؛ در نتیجه عدد ولتسنج کاهش می‌یابد.

$$\downarrow V = \varepsilon - rI \uparrow$$

درس Box

پاسخ خیلی تشریحی ✓

نمودارهای (الف) و (ب) چگونگی تغییر مقاومت ویژه دو ماده A و B را برحسب تغییر دمای آن‌ها به طور کیفی نشان می‌دهد. به ترتیب از راست به چپ، جنس ماده‌های A و B کدام می‌تواند باشد؟



(۲) جیوه، مس

(۴) سیلیسیم، جیوه

(۱) قلع، ژرمانیم

(۳) نقره، قلع

پاسخ: گزینه ۱

درس Box

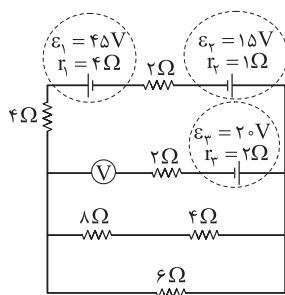
مقاومت ویژه و در نتیجه مقاومت یک ماده به ساختار اتمی و دمای آن بستگی دارد. رساناهای الکتریکی خوب، مقاومت ویژه بسیار کم و عایق‌های خوب، مقاومت ویژه بسیار زیادی دارند. دسته‌ای از مواد مانند ژرمانیم و سیلیسیم نیز وجود دارند که مقاومت ویژه آن‌ها بین مقاومت ویژه رساناها و نارساناها است. به این دسته از مواد نیم‌رسانا می‌گویند. مقاومت ویژه رساناهای فلزی با افزایش دما زیاد می‌شود، درحالی‌که مقاومت ویژه نیم‌رساناها با افزایش دما کاهش می‌یابد. در برخی مواد، مانند جیوه و قلع، با کاهش دما، مقاومت ویژه در دمای خاصی به صورت ناگهانی به صفر افت می‌کند و در دماهای پایین‌تر، همچنان صفر می‌ماند. این پدیده را اُپ‌رسانایی می‌گویند.

نمودار (الف): با توجه به این‌که مقاومت ویژه ماده A به طور ناگهانی افت کرده و به صفر رسیده است، ماده A یک اُپ‌رسانا می‌باشد که قلع و جیوه از جمله این مواد است.

نمودار (ب): با توجه به این‌که با افزایش دما مقاومت ویژه نیم‌رساناها کاهش می‌یابد؛ پس ماده B یک نیم‌رسانا بوده و سیلیسیم و ژرمانیم نیز از جمله این مواد است.

پاسخ خیلی تشریحی ✓

در مدار شکل روبه‌رو، ولت‌سنج آرمانی چند ولت را نشان می‌دهد؟



۴ (۱)

۱۲ (۲)

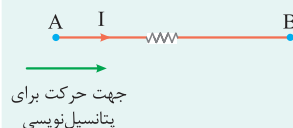
۲۸ (۳)

۳۶ (۴)

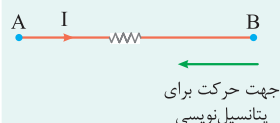
پاسخ: گزینه ۳

درس: Box

هرگاه در مدار در جهت جریان از مقاومت R یا r بگذریم، پتانسیل الکتریکی به اندازه RI یا rI کاهش می‌یابد و اگر در خلاف جهت جریان حرکت کنیم پتانسیل الکتریکی به همان اندازه افزایش می‌یابد.



$$V_A - RI = V_B$$



$$V_B + RI = V_A$$

در هنگام عبور از درون باتری و از قطب منفی به مثبت، پتانسیل الکتریکی به اندازه نیروی محرکه افزایش می‌یابد و بالعکس. بنابراین در پتانسیل‌نویسی بین دو نقطه هنگامی که به قطب منفی باتری رسیدیم علامت مثبت گذاشته و بالعکس.

توجه شود که این موضوع از جهت جریان مستقل است و در عملیات پتانسیل‌نویسی با مقاومت درونی باتری مانند یک مقاومت خارجی رفتار می‌کنیم.

جهت حرکت برای پتانسیل‌نویسی



$$V_A + \varepsilon - rI = V_B$$

جهت حرکت برای پتانسیل‌نویسی



$$V_B - \varepsilon + rI = V_A$$

$$I = \frac{\varepsilon}{R_{eq} + r}$$

آمپرسنج در مدار به صورت سری بسته می‌شود و جریان کل مدار را نشان می‌دهد.

مقاومت آمپرسنج آرمانی صفر است؛ بنابراین اگر اشتباهاً آن را در مدار به صورت موازی ببندیم، مانند اتصال کوتاه عمل می‌کند و جزئی از مدار که به آن بسته شده از مدار حذف می‌شود.

ولت‌سنج در مدار به صورت موازی به هر جزء بسته می‌شود. اگر ولت‌سنج به مقاومت متصل شود عدد RI را نشان می‌دهد و اگر به مولد متصل شود در صورتی که جریان در مدار برقرار نباشد نیروی محرکه مولد (ε) را نشان می‌دهد و اگر جریان در مدار برقرار باشد، ولت‌سنج عدد $V = \varepsilon - rI$ را نشان می‌دهد. اگر اشتباهاً ولت‌سنج آرمانی را در مدار سری ببندیم به دلیل این که مقاومت آن بی‌نهایت است جریان در مدار صفر می‌شود.

پاسخ خیلی تشریحی ✓ گام اول: مقاومت معادل مدار و جریان کل مدار را محاسبه می‌کنیم.

$$8\Omega, 4\Omega: \text{سری} \Rightarrow R_{f,8} = 8 + 4 = 12\Omega$$

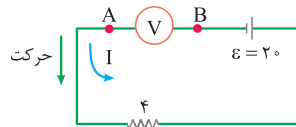
$$12\Omega, 6\Omega: \text{موازی} \Rightarrow R_{f,12} = \frac{12 \times 6}{18} = 4\Omega$$

$$R_{eq} = 4 + 4 + 2 = 10\Omega$$

دقت کنید، شاخه‌ای که ولت‌سنج در آن قرار دارد به دلیل آرمانی بودن ولت‌سنج و این که مقاومتش بی‌نهایت است، مقاومت‌های دیگر (2Ω) و مقاومت درونی باتری را در نظر نمی‌گیریم.

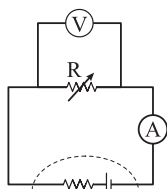
$$I = \frac{\varepsilon}{R_e + r} \Rightarrow I = \frac{45 - 15}{10 + 5} = \frac{30}{15} = 2 \text{ A}$$

گام دوم: حال اختلاف پتانسل دو نقطه A و B که همان عدد ولت‌سنج است را می‌نویسیم:

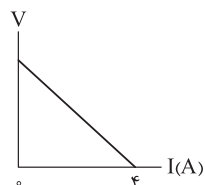


$$V_A - \varepsilon(I) - \varepsilon = V_B \Rightarrow V_A - 8 - 20 = V_B \Rightarrow V_A - V_B = 28 \text{ V}$$

در مدار شکل (الف)، مقاومت متغیر R را از صفر تا مقادیر بسیار بزرگ افزایش می‌دهیم. نمودار تغییرات مقداری که ولت‌سنج آرمانی نشان می‌دهد برحسب تغییرات مقداری که آمپرسنج آرمانی نشان می‌دهد، به شکل (ب) است. مقاومت متغیر R را روی چند اهم تنظیم کنیم تا آمپرسنج عدد ۱ A را نشان دهد؟



(الف)



(ب)

۱۵ (۴)

۱۰ (۳)

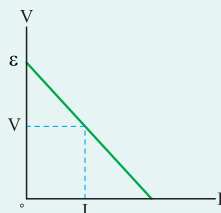
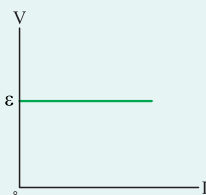
۷/۵ (۲)

۵ (۱)

پاسخ: گزینه ۴

درسی Box

نمودار ولتاژ دو سر باتری برحسب شدت جریان عبوری از آن در دو حالت باتری ایده‌آل ($r = 0$) و غیرایده‌آل ($r \neq 0$) به صورت زیر است:



$$r = 0 \Rightarrow V = \varepsilon \text{ ولتاژ دو سر باتری}$$

$$r \neq 0 \quad V = \varepsilon - rI$$

$$\left| \text{شیب نمودار} \right| = \frac{\varepsilon - V}{I} = \frac{rI}{I} = r$$

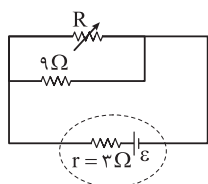
پاسخ خیلی تشریحی ✓ اندازه شیب این نمودار مقاومت درونی را نشان می‌دهد؛ بنابراین:

$$r = \left| \frac{\varepsilon}{I} \right| \Rightarrow ۵ = \frac{\varepsilon}{۴} \Rightarrow \varepsilon = ۲۰\text{ V}$$

برای آن که آمپرسنج جریان مدار را ۱ A نشان دهد:

$$I = \frac{\varepsilon}{R + r} \Rightarrow ۱ = \frac{۲۰}{R + ۵} \Rightarrow R + ۵ = ۲۰ \Rightarrow R = ۱۵\ \Omega$$

در مدار شکل زیر، مقاومت رئوستا از $R_1 = 18 \Omega$ به R_2 می‌رسد. اگر توان خروجی باتری در این دو حالت برابر باشد، R_2 چند اهم است؟



(۱) ۰/۹

(۲) ۱/۵

(۳) ۱/۸

(۴) ۳

پاسخ: گزینه ۳

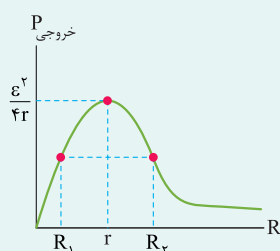
درس: Box

تغییرات توان خروجی باتری بر حسب مقاومت معادل مدار

در مدار ساده شکل زیر، می‌خواهیم ببینیم با تغییر مقاومت R ، توان خروجی از باتری چگونه تغییر می‌کند. با توجه به این که توان خروجی از باتری، همان توان مصرف‌شده در مقاومت R است، می‌توان گفت:

$$\begin{cases} I = \frac{\varepsilon}{r+R} \\ P_{\text{خروجی}} = RI^2 \end{cases} \Rightarrow P_{\text{خروجی}} = \frac{\varepsilon^2 R}{(r+R)^2}$$

حال با توجه به این رابطه، نمودار توان خروجی را بر حسب مقاومت رسم می‌کنیم که در این نمودار نکات زیر دارای اهمیت زیادی است:



(۱) زمانی که $R = r$ است، توان خروجی باتری بیشینه می‌شود.

(۲) اگر $R < r$ باشد، نمودار به صورت صعودی است، یعنی با افزایش مقاومت R ، توان خروجی از باتری افزایش می‌یابد.

(۳) اگر $R > r$ باشد، نمودار به صورت نزولی است، یعنی با افزایش مقاومت R ، توان خروجی از باتری کاهش می‌یابد.

(۴) اگر به ازای دو مقاومت R_1 و R_2 ، توان خروجی از باتری یکسان باشد، آن‌گاه رابطه $R_1 R_2 = r^2$ یا $r = \sqrt{R_1 R_2}$ برقرار است.

همان‌طور که در قسمت درس‌باکس بالا اشاره کردیم، هرگاه توان خروجی باتری به ازای دو مقاومت R_1 و R_2 برابر باشد، داریم:

$$R_1 = 18 \Omega \text{ و } 9 \Omega \text{ موازی} \Rightarrow R_{\text{eq}} = \frac{18 \times 9}{18 + 9} \Rightarrow R_{\text{eq}} = 6 \Omega$$

$$R_1 R_2 = r^2 \Rightarrow 6 R_{\text{req}} = 9 \Rightarrow R_{\text{req}} = 1.5$$

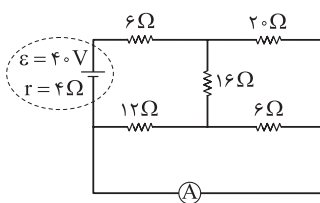
$$\frac{9 R_2}{9 + R_2} = 1.5 \Rightarrow 13.5 + 1.5 R_2 = 9 R_2 \Rightarrow 7.5 R_2 = 13.5$$

$$\Rightarrow R_2 = 1.8 \Omega$$

پاسخ خیلی تشریحی ✓

در مدار شکل زیر، آمپرسنج آرمانی، چند آمپر را نشان می‌دهد؟

۵۵



۱ (۱)

۴ (۲)

۵ (۳)

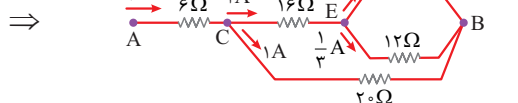
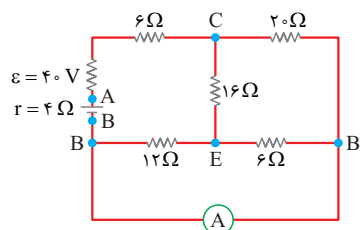
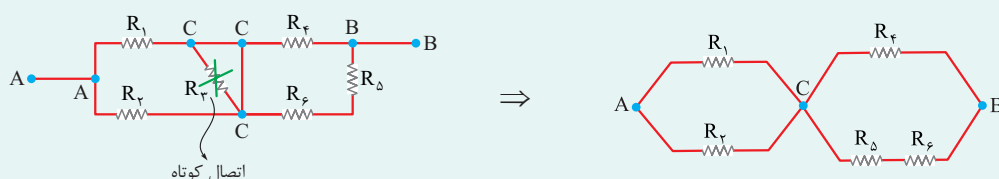
۲ (۴)

پاسخ: گزینه ۳

تکنیک نام‌گذاری برای حل مدارهای دشوار:

درس‌Box

ابتدا گره‌ها را نام‌گذاری می‌کنیم؛ گره به ابتدا و انتهای مدار (دو سر باتری) و نقاطی می‌گوییم که بیشتر از دو شاخه داشته باشد. سپس از یک سر مدار (ابتدای آن) شروع می‌کنیم به نام‌گذاری گره‌ها و تا سر دیگر مدار نام‌گذاری را ادامه می‌دهیم. در نام‌گذاری گره‌ها، آن‌هایی که با سیم به هم وصل شده‌اند را هم‌نام می‌گذاریم.



پاسخ خیلی تشریحی ✓

$$R_{6,12} \text{ و } R_{12} \text{ موازی} \Rightarrow R_{6,12} = \frac{12 \times 6}{18} = 4\Omega$$

$$R_{6,12} \text{ و } R_{16} \text{ سری} \Rightarrow R_{6,12,16} = 4 + 16 = 20\Omega$$

$$R_{6,12,16} \text{ و } R_{20} \text{ موازی} \Rightarrow R_{6,12,16,20} = \frac{20}{2} = 10\Omega$$

$$R_{eq} = 10 + 6 = 16\Omega$$

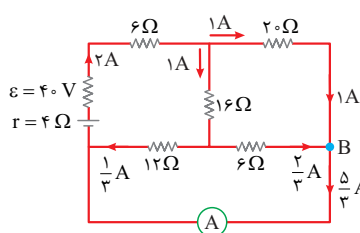
$$I_{\text{کل}} = \frac{\varepsilon}{R_{eq} + r} \Rightarrow I = \frac{40}{16 + 4} = \frac{40}{20} \Rightarrow I = 2A \xrightarrow{\text{تقسیم جریان}}$$

$$I_{6,12,16} + I_{20} = 2A \xrightarrow{R_{6,12,16} = R_{20}} I_{6,12,16} = I_{20} = \frac{1}{2} = 1A$$

$$\frac{I_6}{I_{12}} = \frac{12}{6} \Rightarrow \frac{I_6}{I_{12}} = 2 \Rightarrow I_6 = 2I_{12}, I_6 + I_{12} = 1A \Rightarrow I_6 = \frac{2}{3}A, I_{12} = \frac{1}{3}A$$

همان‌طور که مشاهده می‌کنید، پس از تقسیم جریان بین مقاومت‌ها، دو جریان ۱A و $\frac{2}{3}A$ به گره B وارد می‌شود؛ بنابراین جریان

خروجی از آن $1 + \frac{2}{3} = \frac{5}{3}A$ است که به سمت آمپرسنج می‌رود.



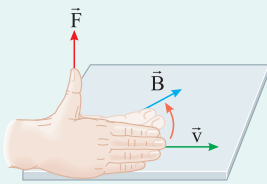
ذره‌ای به جرم 2 g و بار الکتریکی $4 \mu\text{C}$ در راستای افقی با تندی 500 km/s به سمت شرق پرتاب می‌شود. در محل پرتاب این ذره، میدان الکتریکی یکنواخت $E = 2 \times 10^4 \text{ N/C}$ ، عمود بر سطح زمین و رو به پایین و میدان مغناطیسی یکنواخت $\vec{B}$ وجود دارد. اگر ذره بدون انحراف به مسیر خود ادامه دهد، $\vec{B}$ چند گاوس و در کدام جهت است؟ ($g = 10 \text{ N/kg}$)

- (۱) 300 ، شمال
(۲) 300 ، جنوب
(۳) 500 ، شمال
(۴) 500 ، جنوب

پاسخ: گزینه ۳

درس: Box

آزمایش نشان می‌دهد که اگر ذره باردار q با سرعت $\vec{v}$ در میدان مغناطیسی $\vec{B}$ حرکت کند (به شرط آن که جهت حرکت آن با میدان مغناطیسی موازی نباشد)، بر آن نیرویی وارد خواهد شد که مطابق شکل زیر بر راستای سرعت و میدان مغناطیسی عمود



است. این نیرو را نیروی مغناطیسی می‌نامند و جهت آن به کمک قاعده دست راست تعیین می‌شود. اگر دست راست را طوری نگه داریم که انگشتان باز شده ما در جهت $\vec{v}$ باشد و کف دست (جهت چرخش انگشتان) در جهت میدان مغناطیسی قرار گیرد، انگشت شست ما در جهت نیروی وارد بر ذره باردار مثبت است. توجه کنید که نیروی وارد بر بار منفی، در خلاف جهت نیروی وارد بر بار مثبت است.

$$F = |q| v B \sin \theta$$

اندازه نیروی مغناطیسی وارد بر بار الکتریکی در حال حرکت از رابطه مقابل به دست می‌آید:

F : نیروی وارد بر ذره باردار (N)

q : بار الکتریکی ذره (C)

v : سرعت حرکت ذره (m/s)

B : میدان مغناطیسی (T)

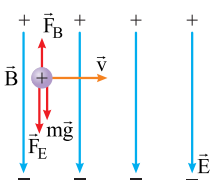
θ : زاویه بین جهت حرکت ذره و جهت میدان مغناطیسی

وقتی بار الکتریکی q عمود بر راستای میدان مغناطیسی حرکت کند، اندازه نیروی مغناطیسی وارد بر بار الکتریکی بیشینه می‌شود.

$$\theta = 90^\circ \Rightarrow \sin \theta = 1 \Rightarrow F_{\max} = |q| v B$$

یکای SI میدان مغناطیسی به احترام نیکولا تسلا، دانشمند و مخترع نامی، تسلا نامیده می‌شود و به اختصار با نماد T نشان داده می‌شود. به این ترتیب می‌توان نوشت:

$$1 \text{ T} = 1 \frac{\text{N}}{\text{C} \cdot \text{m/s}} = 1 \frac{\text{N}}{\text{A} \cdot \text{m}}$$



گام اول: ابتدا با توجه به جهت‌های بیان شده در صورت سؤال، شکل مقابل را رسم می‌کنیم.

با توجه به شکل، نیروی میدان مغناطیسی باید هم‌اندازه و خلاف جهت برآیند نیروهای میدان الکتریکی و وزن ذره باشد تا بدون انحراف به مسیر خود ادامه دهد. طبق قاعده دست راست، جهت میدان مغناطیسی درون سو می‌باشد که طبق قرارداد آن را به سمت شمال در نظر می‌گیریم.

گام دوم: حال می‌توانیم اندازه میدان مغناطیسی را به دست آوریم:

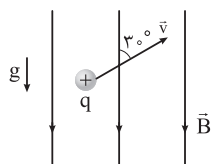
$$F_B = F_E + mg \Rightarrow |q| v B = E |q| + mg$$

$$\Rightarrow 4 \times 10^{-6} \times 500 \times 10^3 \times B = 2 \times 10^4 \times 4 \times 10^{-6} + 2 \times 10^{-3} \times 10 \Rightarrow 2B = 8 \times 10^{-2} + 2 \times 10^{-2}$$

$$\Rightarrow 2B = 10 \times 10^{-2} \Rightarrow B = \frac{10^{-1}}{2} \text{ T} \Rightarrow B = \frac{1}{2} \times 10^{-1} \text{ T} \times 10^4 \Rightarrow B = 500 \text{ G}$$

پاسخ خیلی تشریحی

در شکل زیر، ذره‌ای به جرم $g/8$ و بار الکتریکی $q = +2 \mu C$ در میدان مغناطیسی یکنواختی به بزرگی $B = 60 \text{ mT}$ با تندی $v = 10^5 \text{ m/s}$ پرتاب می‌شود. در این لحظه اندازه شتاب ذره چند متر بر مربع ثانیه است؟ ($g = 10 \text{ m/s}^2$)



(۱) ۲/۵

(۲) ۷/۵

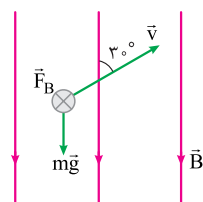
(۳) ۱۲/۵

(۴) ۱۷/۵

پاسخ: گزینه ۳

پاسخ خیلی تشریحی ✓

نیروهای وارد بر ذره باردار را رسم می‌کنیم:



بر طبق قاعده دست راست، نیروی میدان مغناطیسی درون سواست و نیروی وزن نیز رو به پایین می‌باشد. اگر دقت کنید این دو نیرو بر یکدیگر عمود هستند؛ بنابراین نیروی خالص وارد بر ذره به صورت زیر به دست می‌آید:

$$F_B = |q| v B \sin \theta \Rightarrow F_B = 2 \times 10^{-6} \times 10^5 \times 60 \times 10^{-3} \times \sin(90^\circ - 30^\circ) \Rightarrow F_B = 6 \times 10^{-3} \text{ N}$$

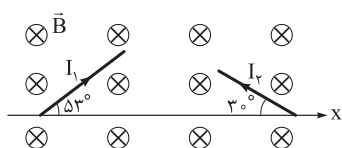
$$mg = 8 \times 10^{-3} \times 10 \Rightarrow mg = 8 \times 10^{-3} \text{ N}$$

$$F_{\text{net}} = \sqrt{(mg)^2 + F_B^2} \Rightarrow F_{\text{net}} = \sqrt{(8 \times 10^{-3})^2 + (6 \times 10^{-3})^2} \Rightarrow F_{\text{net}} = 10 \times 10^{-3} = 10^{-2} \text{ N}$$

حال می‌توانیم شتاب ذره را محاسبه کنیم:

$$a = \frac{F_{\text{net}}}{m} \Rightarrow a = \frac{10^{-2}}{8 \times 10^{-4}} \Rightarrow a = \frac{100}{8} = 12.5 \text{ m/s}^2$$

در شکل زیر، دو سیم مستقیم (۱) و (۲)، به ترتیب حامل جریان‌های الکتریکی $I_1 = 5A$ و I_2 ، در میدان مغناطیسی یکنواخت درون سویی قرار دارند. اگر بزرگی نیروی مغناطیسی وارد بر واحد طول سیم (۱)، دو برابر بزرگی نیروی مغناطیسی وارد بر واحد طول سیم (۲) باشد، جریان I_2 چند آمپر است؟ ($\sin 53^\circ = 0.8$)



۱/۵ (۱)

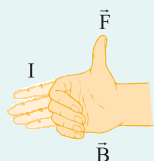
۲ (۲)

۲/۵ (۳)

۴ (۴)

پاسخ: گزینه ۳

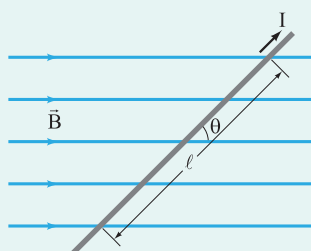
درس: Box



میدان مغناطیسی بر سیم حامل جریان نیروی مغناطیسی وارد می‌کند. براساس آزمایش‌های اورستد، نیرویی که در میدان مغناطیسی بر سیم حامل جریان الکتریکی وارد می‌شود، بر راستای سیم و نیز بر راستای میدان مغناطیسی عمود است. جهت نیروی وارد بر سیم حامل جریان در میدان مغناطیسی را می‌توان با استفاده از قاعده دست راست تعیین کرد.

نیروی مغناطیسی وارد بر یک سیم رسانای حامل جریان در میدان مغناطیسی یکنواخت به عامل‌های مختلفی بستگی دارد:

$$F = ILB \sin \theta$$



F : نیروی مغناطیسی وارد بر سیم حامل جریان (N)

I : جریان الکتریکی (A)

L : طول سیم درون میدان مغناطیسی (m)

B : میدان مغناطیسی (T)

θ : زاویه بین جهت میدان مغناطیسی و جهت جریان سیم

اگر سیم موازی خطوط میدان مغناطیسی قرار بگیرد:

$$\theta = 0^\circ \Rightarrow \sin \theta = 0 \Rightarrow F = 0$$

اگر سیم عمود بر خطوط میدان مغناطیسی قرار بگیرد:

$$\theta = 90^\circ \Rightarrow \sin \theta = 1 \Rightarrow F_{\max} = ILB$$

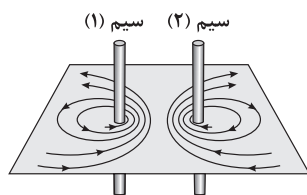
طبق رابطه نیروی وارد بر سیم حامل جریان درون میدان مغناطیسی و این‌که میدان مغناطیسی و واحد طول برای هر دو سیم یکسان است، داریم:

$$F = BIL \sin \theta \Rightarrow \frac{F_2}{F_1} = \frac{I_2}{I_1} \xrightarrow{F_1 = 2F_2} \frac{1}{2} = \frac{I_2}{5} \Rightarrow I_2 = 2.5A$$

دقت کنید که در شکل سؤال، زاویه بین راستای جریان و محور x را به ما داده است، اما θ در رابطه نیروی وارد بر سیم، زاویه بین جهت جریان و جهت میدان مغناطیسی است که با توجه به این‌که میدان درون سو و عمود بر راستای سیم است، برای هر دو سیم $\theta = 90^\circ$ و $\sin \theta = 1$ است.

پاسخ خیلی تشریحی ✓

شکل زیر بخشی از خطوط میدان مغناطیسی خالص حاصل از دو سیم موازی حامل جریان را در اطراف آن‌ها نشان می‌دهد. جهت جریان عبوری از سیم (۱) و نوع نیروی مغناطیسی بین دو سیم به ترتیب کدام است؟



(۱) $\uparrow$ ، جاذبه

(۲) $\uparrow$ ، دافعه

(۳) $\downarrow$ ، جاذبه

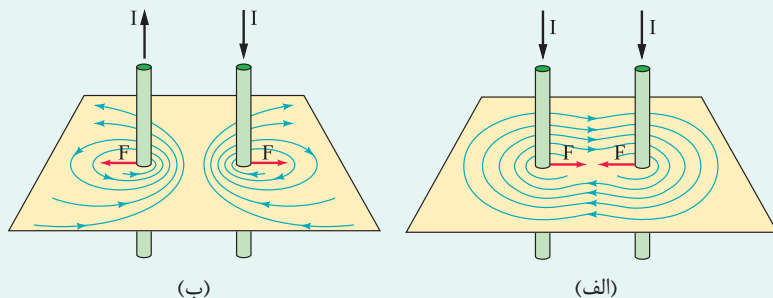
(۴) $\downarrow$ ، دافعه

پاسخ: گزینه ۲

درس: Box

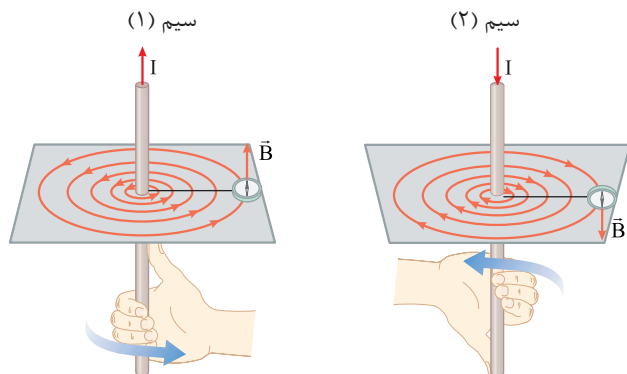
نیروی بین سیم‌های موازی حامل جریان:

اگر برای تولید میدان مغناطیسی به جای آهنربا، از یک سیم حامل جریان استفاده کنیم و سیم حامل جریان دیگری را در نزدیکی این سیم قرار دهیم، دو سیم به یکدیگر نیرو وارد می‌کنند، به طوری که اگر جریان‌ها در یک جهت از دو سیم موازی بگذرند، نیروی بین آن‌ها رانشی است و اگر جریان‌ها در دو جهت مخالف از دو سیم موازی بگذرند، نیروی بین آن‌ها رانشی است.



در سیم (۱) با توجه به جهت میدان مغناطیسی و طبق قاعده دست راست جهت جریان رو به بالا است.

پاسخ خیلی تشریحی ✓



در سیم (۲) نیز با توجه به قاعده دست راست جهت جریان رو به پایین است.

با توجه به درس باکس بالا، هرگاه دو سیم در مجاورت یکدیگر جریان‌هایی خلاف جهت هم داشته باشند، نیروی بین آن‌ها دافعه است.

با استفاده از یک سیم مسی روکش دار به قطر مقطع ۲ mm و طول ۶ m، در حالت (۱)، سیم لوله ای آرمانی با حلقه های به هم چسبیده و در حالت (۲) پیچهای مسطح شامل ۱۰۰ حلقه می سازیم. به ازای جریان های الکتریکی یکسان عبوری از این سیم لوله و پیچه، بزرگی میدان مغناطیسی درون سیم لوله چند برابر بزرگی میدان مغناطیسی در مرکز پیچه است؟ ($\pi = 3$) و ضخامت روکش عایق سیم مسی ناچیز است.

(۱) ۲ (۲) ۱ (۳) ۰/۲ (۴) ۰/۱

پاسخ: گزینه ۴

درس Box

اگر قطر حلقه های سیم لوله در مقایسه با طول آن بسیار کوچک و حلقه های آن خیلی به هم نزدیک باشند، به این سیم لوله، سیم لوله آرمانی می گوئیم که اندازه میدان مغناطیسی یکنواخت درون آن و به دور از لبه ها از رابطه زیر به دست می آید:

$$B = \frac{\mu_0 NI}{L}$$

B: اندازه میدان مغناطیسی (T)

μ_0 : تراوایی مغناطیسی خلأ ($\frac{T.m}{A}$)

N: تعداد دورهای سیم لوله

I: جریان الکتریکی (A)

L: طول سیم لوله (m)

اگر از سیمی به قطر D سیم لوله ای بسازیم که سیم های آن فشرده و بدون فاصله باشند، طول سیم لوله برابر است با: $L = ND$

$$B = \frac{\mu_0 NI}{\pi R}$$

اندازه میدان مغناطیسی در مرکز پیچهای که حامل جریان است، از رابطه مقابل به دست می آید:

B: اندازه میدان مغناطیسی (T)

$\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}$: تراوایی مغناطیسی خلأ ($\frac{T.m}{A}$)

N: تعداد دورها

I: جریان الکتریکی (A)

R: شعاع پیچه (m)

نکته

پاسخ خیلی تشریحی ✓ گام اول: میدان سیم لوله و میدان پیچه را محاسبه می کنیم:

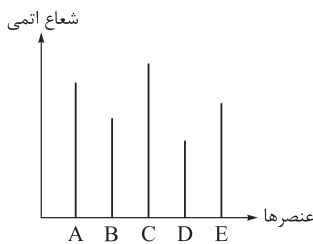
$$B_{\text{سیم لوله}} = \frac{\mu_0 NI}{L} \xrightarrow{L=ND} B = \frac{\mu_0 I}{D} \Rightarrow B_{\text{سیم لوله}} = \frac{\mu_0 I}{2 \times 10^{-3}}$$

$$\left. \begin{aligned} B_{\text{پیچه}} &= \frac{\mu_0 NI}{\pi R} \quad (1) \\ N &= \frac{L}{\pi R} \Rightarrow R = \frac{L}{\pi N} \quad (2) \end{aligned} \right\} \xrightarrow{(1), (2)} B = \frac{\mu_0 NI}{\pi \frac{L}{\pi N}} \Rightarrow B = \frac{\mu_0 N^2 I \pi}{L} \Rightarrow B_{\text{پیچه}} = \frac{\mu_0 I \times 100^2 \times \pi}{6}$$

گام دوم: حال نسبت میدان سیم لوله و میدان پیچه را به دست می آوریم:

$$\frac{B_{\text{سیم لوله}}}{B_{\text{پیچه}}} = \frac{\frac{\mu_0 I}{2 \times 10^{-3}}}{\frac{\mu_0 I \times 100^2 \times \pi}{6}} \Rightarrow \frac{B_{\text{سیم لوله}}}{B_{\text{پیچه}}} = \frac{6}{6 \times 10^{+1}} \Rightarrow \frac{B_{\text{سیم لوله}}}{B_{\text{پیچه}}} = 10^{-1} = \frac{1}{10}$$

با توجه به نمودار زیر که شعاع اتمی چند عنصر متوالی دوره سوم جدول دوره‌ای را به صورت نسبی و نامرتب نشان می‌دهد؛ اگر مجموع عددهای اتمی این عناصر برابر با ۷۰ باشد، کدام مطلب درست است؟



(۱) آرایش الکترونی اتم همه این عناصر به زیرلایه $l = 1$ ختم می‌شود.

(۲) عنصر C با گاز کلر به شدت واکنش داده و نوری زردرنگ ساطع می‌کند.

(۳) عنصر B برخلاف عنصر C، در واکنش با دیگر اتم‌ها الکترون مبادله نمی‌کند.

(۴) به طور کلی، رفتار شیمیایی عنصر E همانند رفتار شیمیایی عنصر B و خواص فیزیکی آن مشابه خواص فیزیکی عنصر A است.

پاسخ: گزینه ۲

در یک دوره جدول تناوبی، شعاع اتمی عناصرها از چپ به راست کاهش می‌یابد؛ زیرا در یک دوره جدول، تعداد لایه‌های الکترونی ثابت می‌ماند؛ درحالی که تعداد پروتون‌های هسته عناصر افزایش می‌یابد. با افزایش تعداد پروتون‌ها، نیروی جاذبه‌ای که هسته به الکترون‌ها وارد می‌کند؛ افزایش یافته و بدین ترتیب شعاع اتمی عناصر کاهش می‌یابد. عناصر دوره سوم جدول دوره‌ای به شرح جدول زیر می‌باشند:

عنصر	نماد شیمیایی	نوع عنصر	نحوه تبادل الکترون
سدیم	$_{11}\text{Na}$	فلز	دادن الکترون
منیزیم	$_{12}\text{Mg}$	فلز	دادن الکترون
آلومینیم	$_{13}\text{Al}$	فلز	دادن الکترون
سیلیسیم	$_{14}\text{Si}$	شبه‌فلز	اشتراک الکترون
فسفر	$_{15}\text{P}$	نافلز	گرفتن یا اشتراک الکترون
گوگرد	$_{16}\text{S}$	نافلز	گرفتن یا اشتراک الکترون
کلر	$_{17}\text{Cl}$	نافلز	گرفتن یا اشتراک الکترون
آرگون	$_{18}\text{Ar}$	نافلز	—

درس‌Box

پاسخ خیلی تشریحی

عدد اتمی عناصر مورد نظر را از کوچک به بزرگ به ترتیب $x, x+1, x+2, x+3, x+4$ فرض می‌کنیم؛ بنابراین داریم:

$$x + (x+1) + (x+2) + (x+3) + (x+4) = 70$$

$$\Rightarrow 5x + 10 = 70 \Rightarrow 5x = 60 \Rightarrow x = 12$$

$$\Rightarrow 12 \Rightarrow \text{عدد اتمی کوچک‌ترین عنصر } {}_{12}\text{Mg}$$

با توجه به نمودار داده‌شده، ترتیب شعاع اتمی این عناصر به صورت $C > A > E > B > D$ است؛ بنابراین از آن جایی که در یک دوره جدول تناوبی، با افزایش عدد اتمی، شعاع اتمی عناصرها کاهش می‌یابد؛ پس این عناصر بر اساس شعاع اتمی و عدد اتمی کوچک‌ترین عنصر به‌دست آمده، به ترتیب منیزیم (${}_{12}\text{Mg}$)، آلومینیم (${}_{13}\text{Al}$)، سیلیسیم (${}_{14}\text{Si}$)، فسفر (${}_{15}\text{P}$) و گوگرد (${}_{16}\text{S}$) هستند. بررسی گزینه‌ها:

گزینه (۱): زیرلایه $l = 1$ همان زیر لایه p است و تنها آرایش الکترونی عناصر دسته p جدول تناوبی به زیرلایه p ختم می‌شود. همه عناصر مورد نظر به‌جز عنصر منیزیم (${}_{12}\text{Mg}$) در دسته p جدول دوره‌ای قرار داشته، ولی عنصر منیزیم (${}_{12}\text{Mg}$) در دسته s جدول جای دارد.

گزینه (۲): عنصر C، عنصر منیزیم (${}_{12}\text{Mg}$) است اما عنصر سدیم در واکنش با گاز کلر نور زردرنگ ساطع می‌کند.

گزینه (۳): عنصر B یا همان عنصر فسفر (${}_{15}\text{P}$)، یک نافلز است و در واکنش با سایر عناصر، الکترون می‌گیرد و یا به اشتراک می‌گذارد. همچنین عنصر C یا همان عنصر منیزیم (${}_{12}\text{Mg}$) یک فلز است و در واکنش با نافلزها، الکترون از دست می‌دهد؛ بنابراین هر دو عنصر گفته‌شده در واکنش با سایر عناصر می‌توانند الکترون مبادله کنند.

گزینه (۴): عنصر E یا همان عنصر سیلیسیم (${}_{14}\text{Si}$)، یک شبه‌فلز است. خواص فیزیکی شبه‌فلزها بیشتر به فلزها شبیه بوده؛ درحالی که رفتار شیمیایی آن‌ها همانند نافلزها است؛ بنابراین می‌توان گفت که رفتار شیمیایی شبه‌فلز سیلیسیم (${}_{14}\text{Si}$) همانند رفتار شیمیایی عنصر B یا همان نافلز فسفر (${}_{15}\text{P}$) و خواص فیزیکی آن مشابه خواص فیزیکی عنصر A یا همان فلز آلومینیم (${}_{13}\text{Al}$) است.

درستی یا نادرستی کدام گزینه با دیگر گزینه‌ها متفاوت است؟

- (۱) یکای رایج دما همان یکای آن در «SI» است.
- (۲) ظرفیت گرمایی یک مول ماده، گرمای ویژه آن را نشان می‌دهد.
- (۳) انرژی گرمایی یک نمونه ماده هم‌ارز با مجموع انرژی جنبشی ذره‌های سازنده آن است.
- (۴) تغییر آنتالپی هر واکنش، هم‌ارز با گرمایی است که در دمای ثابت با محیط پیرامون دادوستد می‌کند.

پاسخ: گزینه ۳

پاسخ خیلی تشریحی ✓

گزینه (۳) برخلاف سایر گزینه‌ها درست است.

بررسی گزینه‌ها:

گزینه (۱): یکای رایج دما، درجهٔ سلسیوس ($^{\circ}\text{C}$) است؛ درحالی‌که یکای دما در «SI»، کلونین (K) می‌باشد.

گزینه (۲):

کمیت	تعریف	وابستگی به جرم ماده	رابطه برای محاسبهٔ آن	یکا
ظرفیت گرمایی ویژه یا گرمای ویژه (c)	مقدار گرمای مورد نیاز برای افزایش دمای ۱ گرم ماده به اندازهٔ 1°C یا 1 K	ندارد.	$c = \frac{Q}{m\Delta\theta}$	$\text{J}\cdot\text{g}^{-1}\cdot^{\circ}\text{C}^{-1}$ یا $\text{J}\cdot\text{g}^{-1}\cdot\text{K}^{-1}$
ظرفیت گرمایی (C)	مقدار گرمای مورد نیاز برای افزایش دمای ماده به اندازهٔ 1°C یا 1 K	دارد.	$C = m c$ یا $C = \frac{Q}{\Delta\theta}$ گرمای ویژه جرم	$\text{J}\cdot\text{K}^{-1}$ یا $\text{J}\cdot^{\circ}\text{C}^{-1}$

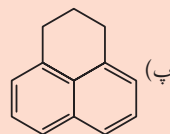
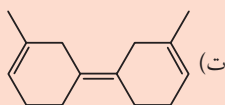
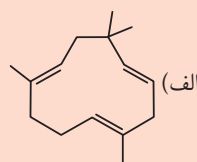
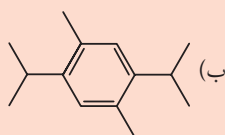


ظرفیت گرمایی، مقدار گرمایی است که باید به جسمی به جرم m گرم داده شود تا دمای آن یک درجهٔ سلسیوس افزایش یابد، درحالی‌که گرمای ویژه، مقدار گرمایی است که باید به یک گرم از جسم داده شود تا گرمای آن یک درجهٔ سلسیوس افزایش یابد؛ بنابراین ظرفیت گرمایی یک گرم (نه مول!) ماده، گرمای ویژه آن را نشان می‌دهد.

گزینه (۳): به مجموع انرژی جنبشی ذره‌های سازندهٔ یک ماده، انرژی گرمایی آن ماده می‌گویند.

گزینه (۴): تغییر آنتالپی واکنش، هم‌ارز با گرمایی است که هنگام انجام واکنش در فشار ثابت با محیط پیرامون مبادله می‌شود.

تفاوت جرم مولی کدام دو مولکول، برابر با جرم مولی اولین عضو خانواده آلکان‌ها است؟ ($C = 12, H = 1 : g.mol^{-1}$)



(۲) الف - ت

(۱) ب - پ

(۴) الف - ب

(۳) ب - ت

مشاوره در این سؤال، نحوه تعیین سریع فرمول مولکولی هیدروکربن‌ها رو یاد می‌گیرید.

پاسخ: گزینه ۲

درس Box

برای تعیین فرمول مولکولی هیدروکربنی که ساختار پیوند - خط آن به ما داده شده است، باید علاوه بر شمارش تعداد اتم‌های کربن آن، به هر اتم کربن تعداد کافی هیدروژن (تا جایی که تعداد کل پیوندهای هر اتم کربن، ۴ تا شود) اضافه کنیم و سپس کل اتم‌های هیدروژن را بشماریم. این روش، فیلی روش علمی و فوب و دقیقه! اما وقتی هیدروکربن مورد نظر کمی گنجه باشد! شاید این کار کمی وقت‌گیر باشد. در این مواقع، می‌توانیم از فرمول زیر هم استفاده کنیم:

(تعداد پیوندهای سه‌گانه $\times 4$) - (تعداد حلقه‌ها + تعداد پیوندهای دوگانه) $\times 2 = 2n + 2$ = شمار اتم‌های هیدروژن یک هیدروکربن n کربنی
حالا این فرمول از کجا اومده؟! $(2n + 2)$ شما رو یاد می‌ندازه؟! آفرین! تعداد اتم‌های هیدروژن یک آلکان n کربنی! اگر در ساختار یک هیدروکربن، هیچ پیوند دوگانه یا سه‌گانه و حلقه‌ای وجود نداشته باشد، حداکثر تعداد اتم‌های هیدروژن آن برابر با $2n + 2$ خواهد بود. وجود پیوندهای دوگانه و سه‌گانه و حلقه در ساختار یک هیدروکربن، باعث می‌شه که تعداد اتم‌های هیدروژن آن نسبت به آلکان هم‌کربن، کمتر باشد.

به طور مثال، اتن (C_2H_2) یک پیوند دوگانه دارد و ۲ اتم هیدروژن نسبت به آلکان هم‌کربن آن یعنی اتان (C_2H_6) کمتر دارد. در اتین (C_2H_2) یک پیوند سه‌گانه وجود دارد و ۴ اتم هیدروژن نسبت به اتان کمتر دارد. همچنین در ساختار سیکلوپروپان (C_3H_6) یک حلقه وجود دارد و می‌بینیم که ۲ اتم هیدروژن نسبت به آلکان هم‌کربن خود یعنی C_3H_8 کمتر دارد. فاصله این که هر پیوند دوگانه یا حلقه، ۲ اتم هیدروژن و هر پیوند سه‌گانه، ۴ اتم هیدروژن از تعداد اتم‌های هیدروژن یک هیدروکربن نسبت به آلکان هم‌کربن خود، کم می‌کند.

پاسخ خیلی تشریحی ✓

(الف) اگر شمار اتم‌های کربن مورد نظر را بشماریم، می‌بینیم در ساختار این هیدروکربن ۱۵ اتم کربن وجود دارد. برای تعیین شمار اتم‌های هیدروژن از فرمول استفاده می‌کنیم. در ساختار این ترکیب یک حلقه و ۳ پیوند دوگانه وجود دارد؛ بنابراین $4 \times 2 = 8$ اتم هیدروژن از آلکان هم‌کربن خود کم‌تر دارد:

$$C_{15}H_{24} \Rightarrow 2(15) + 2 - (4 \times 2) = 24 = \text{شمار اتم‌های هیدروژن}$$

(ب) در ساختار این هیدروکربن، ۱۴ اتم کربن، یک حلقه و ۳ پیوند دوگانه وجود دارد:

$$C_{14}H_{22} \Rightarrow 2(14) + 2 - (4 \times 2) = 22 = \text{شمار اتم‌های هیدروژن}$$

(پ) در ساختار این هیدروکربن، ۱۳ اتم کربن وجود دارد. با توجه به این که در ساختار این هیدروکربن، ۳ حلقه و ۵ پیوند دوگانه وجود دارد، خواهیم داشت:

$$C_{13}H_{12} \Rightarrow 2(13) + 2 - (8 \times 2) = 12 = \text{شمار اتم‌های هیدروژن}$$

(ت) در ساختار این هیدروکربن، ۱۴ اتم کربن وجود دارد. از آنجایی که در این ساختار، ۲ حلقه و ۳ پیوند دوگانه مشاهده می‌شود؛ می‌توان گفت که:

$$C_{14}H_{20} \Rightarrow 2(14) + 2 - (5 \times 2) = 20 = \text{شمار اتم‌های هیدروژن}$$

حالا باید ببینیم که تفاوت جرم مولی کدام دو ترکیب با جرم مولی اولین عضو خانواده آلکان‌ها یا همان متان با فرمول مولکولی CH_4 ، برابر است. البته باید به این نکته توجه کرد که نیازی به محاسبه جرم مولی ترکیب‌ها نمی‌باشد و تنها کافی است ببینیم که تفاوت فرمول مولکولی کدام دو ترکیب با فرمول مولکولی متان یکسان است:

(۱) گزینه: $\text{C}_{14}\text{H}_{22} - \text{C}_{13}\text{H}_{12} = \text{CH}_1$. ✗

(۲) گزینه: $\text{C}_{15}\text{H}_{24} - \text{C}_{14}\text{H}_{20} = \text{CH}_4$ ✓

(۳) گزینه: $\text{C}_{14}\text{H}_{22} - \text{C}_{14}\text{H}_{20} = \text{H}_2$ ✗

(۴) گزینه: $\text{C}_{15}\text{H}_{24} - \text{C}_{14}\text{H}_{22} = \text{CH}_2$ ✗

کدام موارد زیر، جاهای خالی موجود در عبارت داده شده را به درستی تکمیل می کند؟
 «اگر در ساختار گروه های CH_3 با گروه های C_2H_5 جایگزین شود؛ نام آلکان حاصل به صورت خواهد شد.»

(الف) ۲- متیل پنتان / ۵- متیل اوکتان

(ب) دی متیل پروپان / ۳،۳- دی متیل پنتان

(پ) ۴،۲،۲- تری متیل پنتان / ۵،۳،۳- تری اتیل هپتان

(ت) ۵،۳،۲،۲- تترامتیل هگزان / ۶،۴،۳،۳- تتراتیل اوکتان

(۲) الف - پ

(۱) پ - ت

(۴) الف - ب

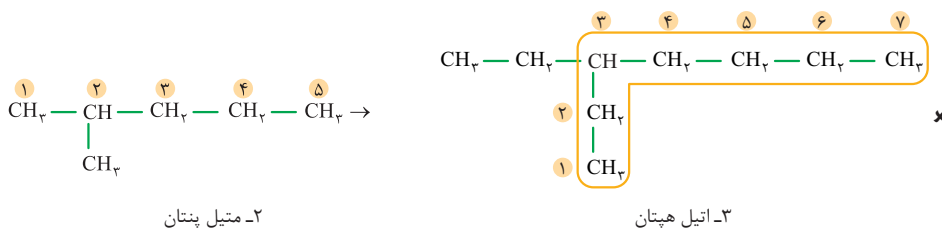
(۳) ب - ت

پاسخ: گزینه ۱

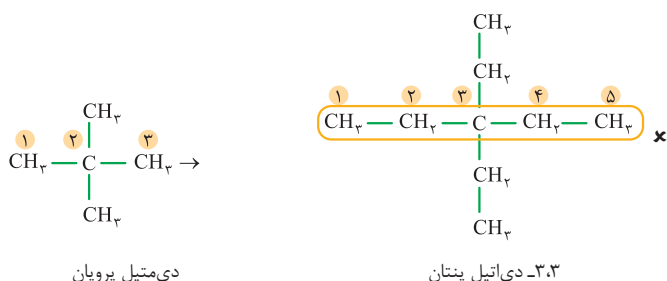
پاسخ خیلی تشریحی ✓ موارد «پ» و «ت» عبارت داده شده را به درستی تکمیل می کنند.

بررسی عبارت ها:

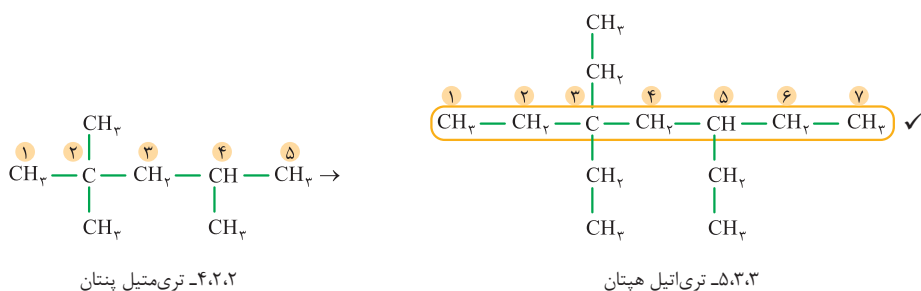
(الف)



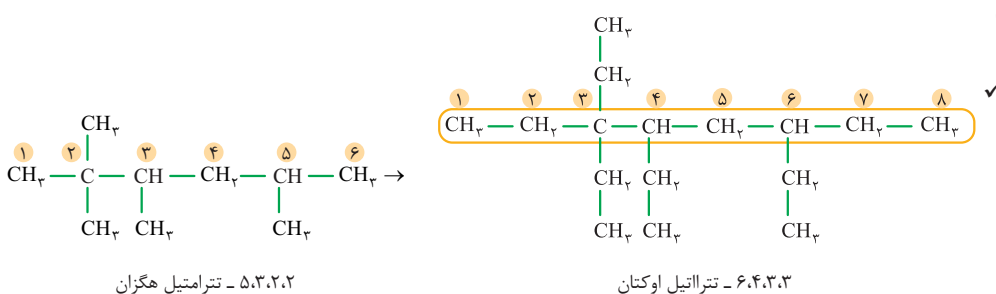
(ب)



(پ)



(ت)



ارزش سوختی گازهای متان و پروپان به ترتیب برابر با ۵۶ و ۵۱ کیلوژول بر گرم است. در اثر سوختن کامل ۶ گرم گاز اتان، به تقریب چند کیلوژول گرما آزاد می‌شود؟ ($C = 12, H = 1: g.mol^{-1}$)

۳۲۸ (۴)

۳۲۱ (۳)

۳۱۴ (۲)

۳۰۷ (۱)

پاسخ: گزینه ۲

پاسخ خیلی تشریحی ✓

نکته

۱) هر دو عضو متوالی از خانواده آلکان‌ها، آلکین‌ها و آلکین‌ها در یک گروه CH_2 با هم اختلاف دارند (گله شک داریم، مثلاً به فرمول یا ساختار اتان و پروپان دقت کنید!) بنابراین می‌توان گفت تفاوت آنتالپی‌های سوختن دو عضو متوالی از یک خانواده تقریباً ثابت است. به طور مثال اختلاف آنتالپی سوختن متان و اتان با اختلافی آنتالپی سوختن اتان و پروپان تقریباً برابر است.

۲) برای محاسبه ارزش سوختی یک ماده، کافی است مقدار آنتالپی سوختن آن را به جرم مولی‌اش تقسیم کنیم.

$$\text{ارزش سوختی (kJ.g}^{-1}\text{)} = \frac{|\text{آنتالپی سوختن (kJ.mol}^{-1}\text{)}|}{\text{جرم مولی (g.mol}^{-1}\text{)}}$$

ابتدا با توجه به ارزش سوختی گازهای متان و پروپان، مقدار آنتالپی سوختن این دو گاز را به دست می‌آوریم:

$$|\text{آنتالپی سوختن متان (CH}_4\text{)}| = \text{ارزش سوختی متان (CH}_4\text{)} \times \text{جرم مولی متان (CH}_4\text{)} = 56 \times 16 = 896 \text{ kJ.mol}^{-1}$$

$$|\text{آنتالپی سوختن پروپان (C}_3\text{H}_8\text{)}| = \text{ارزش سوختی پروپان (C}_3\text{H}_8\text{)} \times \text{جرم مولی پروپان (C}_3\text{H}_8\text{)} = 51 \times 44 = 2244 \text{ kJ.mol}^{-1}$$

از آنجایی که اختلاف آنتالپی سوختن متان و اتان با اختلاف آنتالپی سوختن اتان و پروپان تقریباً برابر است؛ مقدار آنتالپی سوختن اتان را محاسبه می‌کنیم:

$$|\Delta H_{\text{سوختن متان}}| - |\Delta H_{\text{سوختن اتان}}| = |\Delta H_{\text{سوختن اتان}}| - |\Delta H_{\text{سوختن پروپان}}|$$

$$2244 - |\Delta H_{\text{سوختن اتان}}| = |\Delta H_{\text{سوختن اتان}}| - 896 \Rightarrow 2|\Delta H_{\text{سوختن اتان}}| = 2244 + 896 = 3140$$

$$\Rightarrow |\Delta H_{\text{سوختن اتان}}| = \frac{3140}{2} = 1570 \text{ kJ.mol}^{-1}$$

در نهایت می‌توان گفت که به ازای سوختن کامل یک مول گاز اتان، ۱۵۷۰ کیلوژول گرما آزاد می‌شود؛ بنابراین خواهیم داشت:

$$6 \text{ g C}_3\text{H}_8 \times \frac{1 \text{ mol C}_3\text{H}_8}{44 \text{ g C}_3\text{H}_8} \times \frac{1570 \text{ kJ}}{1 \text{ mol C}_3\text{H}_8} = \frac{6 \times 1570}{44} = 314 \text{ kJ}$$

چه تعداد از موارد زیر، در ترموشیمی مورد بررسی قرار می‌گیرد؟

- بررسی کتی و کیفی گرمای واکنش‌ها
- تأثیر گرما بر حالت فیزیکی مواد
- رابطه میان دما و گرما
- شرایط و چگونگی انجام واکنش‌ها
- آهنگ تبدیل واکنش‌دهنده‌ها به فراورده‌ها
- اندازه‌گیری انرژی مواد غذایی

۵ (۴)

۴ (۳)

۳ (۲)

۲ (۱)

پاسخ: گزینه ۳

گرماشیمی محصول مشترک علم شیمی و گرما است! موضوع‌هایی که در گرماشیمی بررسی می‌شوند، عبارت‌اند از:

(۱) مطالعه کتی و کیفی گرمای واکنش‌های شیمیایی (انرژی گرمایی مبادله‌شده طی واکنش‌ها)

(۲) تغییر گرما طی واکنش‌های شیمیایی

(۳) تأثیر گرما بر حالت ماده

سینتیک شیمیایی شاخه‌ای از علم شیمی است که به بررسی آهنگ تغییر شیمیایی در واکنش‌ها و عوامل مؤثر بر این آهنگ و به عبارت دیگر، شرایط و چگونگی انجام واکنش‌های شیمیایی می‌پردازد.

به جز موارد «شرایط و چگونگی انجام واکنش‌ها» و «آهنگ تبدیل واکنش‌دهنده‌ها به فراورده‌ها»، بقیه موارد در ترموشیمی بررسی می‌شوند. این دو مورد گفته‌شده در سینتیک شیمیایی بررسی می‌شوند.



پاسخ خیلی تشریحی ✓

اگر در واکنش بی‌هوازی تخمیر نمونه‌ای از گلوکز شامل $3/01 \times 10^{24}$ مولکول، اختلاف جرم فراورده‌های تولیدشده (اتانول و کربن دی‌اکسید) برابر با ۱۴ گرم باشد؛ بازده این واکنش، چند درصد است؟ ($O = 16, C = 12, H = 1: g.mol^{-1}$)

۷۰ (۴)

۶۰ (۳)

۵۰ (۲)

۴۰ (۱)

پاسخ: گزینه ۴

پاسخ خیلی تشریحی ✓

ابتدا معادله موازنه‌شده واکنش بی‌هوازی تخمیر گلوکز را می‌نویسیم:



پس می‌توان گفت که به ازای تخمیر یک مول گلوکز ($C_6H_{12}O_6$)، دو مول یا همان $2 \times 46 = 92$ گرم اتانول (C_2H_5OH) و دو مول یا همان $2 \times 44 = 88$ گرم کربن دی‌اکسید (CO_2) تولید می‌شود؛ بنابراین اختلاف جرم فراورده‌های تولیدشده در این واکنش برابر $92 - 88 = 4g$ است.

بر این اساس با توجه به اطلاعات داده‌شده، بازده درصدی واکنش انجام‌شده (Ra) را حساب می‌کنیم:

$$R = \frac{\text{اختلاف جرم فراورده‌ها}}{\text{اختلاف جرم گلوکز}} \times \frac{\text{مولکول گلوکز}}{\text{مولکول گلوکز}} \times \frac{100}{100} = 14g$$

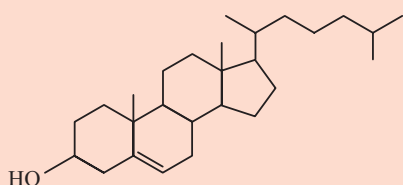
$$\Rightarrow \frac{3/01 \times 10^{24} \times 4 \times R}{6/02 \times 10^{23} \times 100} = 14 \Rightarrow R = \frac{140}{2} = 70$$

به‌جور دیگر

$$\frac{\text{بازده درصدی} \times \text{تعداد ذره}}{100} = \frac{\text{اختلاف جرم}}{\text{جرم مولی B} \times \text{ضریب B} - \text{جرم مولی A} \times \text{ضریب A}}$$

$$\Rightarrow \frac{3/01 \times 10^{24} \times \frac{x}{100}}{1 \times 6/02 \times 10^{23}} = \frac{14}{(2 \times 46) - (2 \times 44)} \Rightarrow x = 70\%$$

کدام مطلب، درباره ترکیب با ساختار «پیوند - خط» زیر، درست است؟ ($O = 16, C = 12, H = 1 : g.mol^{-1}$)



(۱) نسبت جرم اتم هیدروژن به جرم اتم اکسیژن در ترکیب مورد نظر برابر $2/75$ است.

(۲) ترکیب داده شده عامل گرفتگی رگها و سخته بوده و همانند ترکیب آلی موجود در رازیانه، یک الکل سیر نشده است.

(۳) در ساختار این ترکیب، حدود 30% درصد اتمهای کربن به یک اتم هیدروژن متصل هستند.

(۴) تعداد پیوندهای اشتراکی در آن، 19 برابر شمار پیوندهای دوگانه موجود در بنزوئیک اسید است.

پاسخ: گزینه ۳

پاسخ خیلی تشریحی ✓ بررسی گزینه ها:

گزینه (۱): با توجه به ساختار «پیوند - خط» داده شده، فرمول مولکولی ترکیب مورد نظر، $C_{27}H_{46}O$ می باشد؛ در یک مول از این ترکیب، 46 مول یا همان $46 \times 1 = 46$ گرم اتم هیدروژن و یک مول یا همان $16 = 1 \times 16$ گرم اتم اکسیژن وجود دارد؛ پس نسبت جرم اتم هیدروژن به جرم اتم اکسیژن در ترکیب داده شده برابر $2/875 = \frac{46}{16}$ است.

گزینه (۲):

در کتاب درسی به آلدهیدها، کتون ها، الکل ها و اترهای موجود در برخی از مواد، اشاره شده است که ما همشون رو براتون بسته بندی! کردیم:

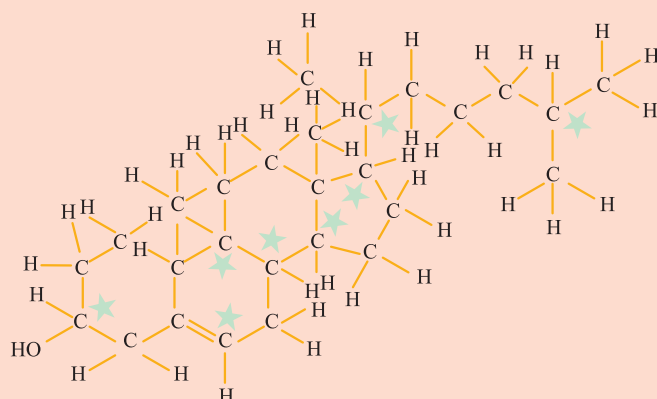


ترکیب دارای گروه عاملی			چه گروه عاملی دارد؟	نام ماده
نام	فرمول مولکولی	فرمول ساختاری		
بنزآلدهید	C_7H_6O		آلدهیدی	بادام
—	C_9H_8O		آلدهیدی	دارچین
۲-هپتانون	$C_7H_{14}O$		کتونی	میخک
—	$C_{15}H_{26}O$		کتونی	زردچوبه
—	$C_{11}H_{18}O$		هیدروکسیل (الکلی)	گشنیز

نام ماده	چه گروه عاملی دارد؟	ترکیب دارای گروه عاملی	
		فرمول ساختاری	فرمول مولکولی
رازیانه	اتری		$C_9H_{10}O$
کلسترول	هیدروکسیل (الکلی)		$C_{27}H_{46}O$

ترکیب مورد نظر همان کلسترول است که یکی از مواد آلی موجود در غذاهای جانوری می باشد که مقدار اضافی آن در دیواره رگ ها رسوب می کند، فرایندی که منجر به گرفتگی رگ ها و سکنه می شود. با توجه به ساختار این ماده به علت وجود گروه هیدروکسیل (OH) و پیوند دوگانه در ساختار آن، شیمی دان ها کلسترول را یک الکل سیر نشده می دانند. از طرفی، ترکیب آلی موجود در رازیانه دارای گروه اتری (O) و پیوند دوگانه در ساختار خود می باشد؛ بنابراین این ترکیب، نوعی اتری سیر نشده محسوب می شود.

گزینه (۳): در ساختار ترکیب مورد نظر، ۸ اتم کربن وجود دارد که تنها به یک اتم هیدروژن متصل اند؛ پس درصد تعداد این اتم های کربن در ساختار ترکیب داده شده حدوداً برابر $30 \approx 100 \times \frac{8}{27}$ درصد می باشد:



گزینه (۴):

برای به دست آوردن تعداد پیوندهای اشتراکی در ترکیب های آلی باید به این نکته توجه کرد که هر اتم کربن، ۴ الکترون، هر اتم هیدروژن، ۱ الکترون، هر اتم اکسیژن، ۲ الکترون و هر اتم نیتروژن، ۳ الکترون نیاز دارد تا به آرایش پایدار برسد و از طرفی هر پیوند اشتراکی (کووالانسی) معادل ۲ الکترون است، خواهیم داشت:

$$\text{تعداد پیوندهای اشتراکی (کووالانسی) در یک ترکیب آلی} = \frac{(3 \times \text{تعداد اتم های N}) + (2 \times \text{تعداد اتم های O}) + (1 \times \text{تعداد اتم های H}) + (4 \times \text{تعداد اتم های C})}{2}$$

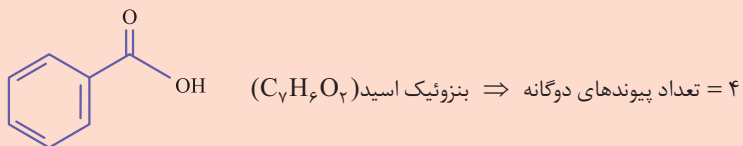
ابتدا تعداد پیوندهای اشتراکی در ترکیب مورد نظر یا همان کلسترول را به دست می آوریم:

$$\text{شمار پیوندهای اشتراکی} = \frac{(2 \times \text{تعداد اتم های O}) + (1 \times \text{تعداد اتم های H}) + (4 \times \text{تعداد اتم های C})}{2}$$

$$\text{تعداد پیوندهای اشتراکی در } C_{27}H_{46}O = \frac{(2 \times 1) + (46 \times 1) + (27 \times 4)}{2} = \frac{156}{2} = 78$$

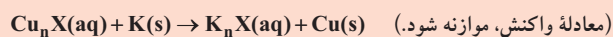


سپس با توجه به ساختار بنزوئیک اسید با فرمول مولکولی C_6H_5COOH خواهیم داشت:



$$\Rightarrow \frac{\text{شمار پیوندهای اشتراکی در مولکول کلسترول}}{\text{تعداد پیوندهای دوگانه در بنزوئیک اسید}} = \frac{78}{4} = 19.5$$

مطابق معادله زیر، ۲۹ گرم ترکیب Cu_nX با درصد خلوص ۷۵٪ در واکنش با مقدار کافی از فلز پتاسیم، ۹/۶ گرم فلز مس تشکیل می‌دهد. اگر بازده این واکنش برابر با ۶۰ درصد باشد؛ نسبت جرم مولی آنیون X^{n-} به عدد n ، کدام است؟ ($\text{Cu} = 64 \text{ g.mol}^{-1}$)



۴۶ (۴)

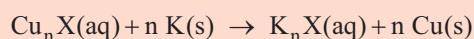
۳۴/۵ (۳)

۱۱/۵ (۲)

۲۳ (۱)

پاسخ: گزینه ۱

پاسخ خیلی تشریحی ✓ ابتدا معادله موازنه شده واکنش انجام شده را بر حسب n می‌نویسیم:



حالا با توجه به اطلاعات داده شده و تناسب میان ترکیب Cu_nX و فلز Cu ، نسبت جرم مولی آنیون X^{n-} به عدد n را محاسبه می‌کنیم:

$$\frac{\text{جرم مولی} \times \text{ضریب}}{\text{Cu}_n\text{X}} = \frac{\text{جرم مولی} \times \text{ضریب}}{\text{Cu}}$$

$$\frac{\frac{75}{100} = \frac{29}{4} \text{ و } \frac{60}{100} = \frac{6}{10}}{\frac{29 \times 3 \times 6}{4 \times 100 \times (64n + X)}} = \frac{\frac{96}{100} \times 64n}{64n + X} \Rightarrow \frac{29 \times 3}{64n + X} = \frac{1}{n} \Rightarrow 87n = 64n + X \Rightarrow \frac{X}{n} = 23$$

توجه کنید که به دلیل ناچیز بودن جرم الکترون‌ها، جرم مولی X^{n-} به تقریب با جرم مولی X برابر است.

۷۰ برای کدام پیوند(ها) در مولکول‌های داده‌شده از مفهوم میانگین آنتالپی پیوند استفاده نمی‌شود؟

الف) پیوند $N \equiv N$ در مولکول نیتروژن

ب) پیوند $C=O$ در مولکول کربن دی‌اکسید

پ) پیوند $C-H$ در مولکول دی‌کلرو متان

ت) پیوند $H-Cl$ در مولکول هیدروژن کلرید

(۱) فقط ب

(۲) ب - پ

(۳) فقط الف

(۴) الف - ت

مشاوره این تست شبیه‌ساز
تست ۸۷ کنکور تیرماه تجربی سال
۱۴۰۳ است.

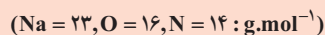
پاسخ: گزینه ۴



$O=O, N \equiv N, H-H$ $..., H-Cl, H-F, Br-Br, Cl-Cl$	نیازی به استفاده از واژه میانگین آنتالپی پیوند نیست، زیرا فقط همین یک نوع پیوند وجود دارد.	پیوندها
$C-I, C-Br, C-Cl, C-F$ $..., C=O, C \equiv C, C=C, C-C, C-H, O-H, N-H$	برای آن‌ها میانگین آنتالپی پیوند به کار می‌رود؛ زیرا دو یا تعداد بیشتری از آن‌ها می‌توانند در یک مولکول وجود داشته باشند و یا همین نوع پیوند در مولکول‌های مختلف وجود دارد.	

پاسخ خیلی تشریحی ✓ برای مولکول‌هایی مانند کربن دی‌اکسید (CO_2) و دی‌کلرو متان (CH_2Cl_2) که در آن‌ها، اتم مرکزی به چند اتم کناری یکسان با پیوندهای اشتراکی متصل است یا به عبارت دیگر برای پیوندهایی که حداقل ۲ یا تعداد بیشتری از آن‌ها می‌تواند در یک مولکول وجود داشته باشد، اطلاق نام میانگین آنتالپی پیوند مناسب‌تر است. در مورد پیوندهایی که در مولکول‌های دواتمی وجود دارد، مثل « $N \equiv N$ » در مولکول نیتروژن (N_2) و « $H-Cl$ » در مولکول هیدروژن کلرید (HCl) چون فقط همین یک نوع پیوند اشتراکی وجود دارد، دیگر نیازی به استفاده از واژه میانگین آنتالپی پیوند نیست.

جدول زیر جرم مخلوط واکنش را برحسب زمان برای واکنش داده شده نشان می دهد. سرعت متوسط تولید گاز در طول انجام این واکنش برحسب مول بر دقیقه کدام است و سرعت متوسط واکنش در پانزده ثانیه دوم، به تقریب چند برابر سرعت آن در سی ثانیه دوم است؟



زمان (s)	۰	۱۵	۳۰	۴۵	۶۰	۷۵	۹۰
جرم مخلوط واکنش (g)	۳۴/۷۶	۲۹/۳۱	۲۵/۰۶	۲۱/۷۱	۱۹/۰۶	۱۷/۱۶	۱۷/۱۶

$$1/42 - 0/75 (2)$$

$$1/42 - 0/44 (1)$$

$$1/82 - 0/75 (4)$$

$$1/82 - 0/44 (3)$$

پاسخ: گزینه ۱

پاسخ خیلی تشریحی ✓

گزینه ۱: کاهش جرم مخلوط واکنش به دلیل خروج گاز اکسیژن تولید شده از ظرف واکنش است:

جرم مخلوط در زمان t - جرم اولیه مخلوط ($t = 0$) = جرم گاز O_2 تولید شده تا لحظه t

از آن جایی که جرم مخلوط واکنش از ثانیه ۷۵ به بعد ثابت مانده است، پس طول انجام واکنش، ۷۵ (نه ۱۹۰) ثانیه می باشد؛ پس خواهیم داشت:

زمان (s)	صفر	۱۵	۳۰	۴۵	۶۰	۷۵
جرم مخلوط واکنش (g)	۳۴/۷۶	۲۹/۳۱	۲۵/۰۶	۲۱/۷۱	۱۹/۰۶	۱۷/۱۶
جرم گاز O_2 (g)	صفر	$34/76 - 29/31 = 5/45$	$34/76 - 25/06 = 9/7$	$34/76 - 21/71 = 13/05$	$34/76 - 19/06 = 15/7$	$34/76 - 17/16 = 17/6$

در بازه زمانی انجام واکنش مورد نظر، ۱۷/۶ گرم گاز اکسیژن تولید شده است؛ پس سرعت متوسط تولید این گاز در طول انجام این واکنش برابر است با:

$$O_2 \text{ تعداد مول های گاز } = 17/6 g \times \frac{1 \text{ mol}}{32 g} = 0/53 \text{ mol}, \quad \Delta t = 75 s \times \frac{1 \text{ min}}{60 s} = 1/25 \text{ min}$$

$$\bar{R}(O_2) = \frac{\Delta n(O_2)}{\Delta t} = \frac{0/53}{1/25} = 0/44 \text{ mol.min}^{-1}$$

برای قسمت دوم سؤال، می توان گفت که از آن جایی که ضریب استوکیومتری گاز اکسیژن در معادله موازنه شده واکنش آن برابر با یک است؛ سرعت متوسط واکنش با سرعت متوسط تولید گاز O_2 یکسان می باشد که در ۱۵ ثانیه دوم واکنش، یعنی بازه زمانی ۳۰ - ۱۵ ثانیه، $4/25 = 29/31 - 25/06$ گرم O_2 و در ۳۰ ثانیه دوم واکنش یعنی بازه زمانی ۶۰ - ۳۰ ثانیه، $6 = 19/06 - 13/05$ گرم O_2 تولید شده است.

باید توجه کرد که ما فقط نسبت سرعت ها را می خواهیم؛ بنابراین نیازی به تبدیل جرم O_2 به تعداد مول آن نیست و خیلی راحت می توان نوشت:

$$\bar{R}(O_2) \left| \begin{array}{l} 30s \\ 15s \end{array} \right| \frac{4/25g}{15s} = \frac{6g}{30s} \approx 1/42$$

$$\bar{R}(O_2) \left| \begin{array}{l} 60s \\ 30s \end{array} \right| \frac{6g}{30s}$$

درستی یا نادرستی مطالب زیر به ترتیب چگونه است؟

کربن

• عنصر اصلی سازنده نفت خام در میان عناصر هم‌دوره خود، کم‌ترین واکنش‌پذیری را دارد.

• اولین شبه‌فلز گروه چهاردهم جدول دوره‌ای، عنصر اصلی سازنده سلول‌های خورشیدی بوده و می‌توان آن را از واکنش ترکیب SiO_2 با کربن تهیه کرد.

سیلیسیم

• عنصری که در دوره و گروه چهارم جدول تناوبی قرار دارد؛ فلزی محکم با چگالی کم بوده که در دوچرخه‌سازی استفاده می‌شود.

تیتانیم

• هیدروکربنی که در جوش کاربردی استفاده می‌شود، با برم مایع واکنش داده و ترکیبی با نام تترابروماتن ایجاد می‌کند.

اتین

(۲) درست - درست - درست - نادرست

(۱) نادرست - نادرست - درست - نادرست

(۴) نادرست - درست - نادرست - نادرست

(۳) نادرست - درست - درست - نادرست

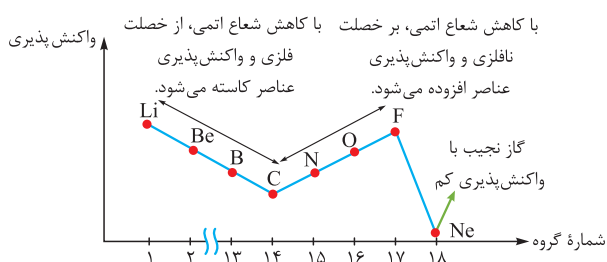
پاسخ: گزینه ۳

پاسخ خیلی تشریحی ✓

عبارت‌های اول و چهارم نادرست و عبارت‌های دوم و سوم درست هستند.

بررسی عبارت‌ها:

عبارت اول: عنصر اصلی سازنده نفت خام، کربن (C) است؛ از طرفی، کم‌ترین واکنش‌پذیری در میان عناصر یک دوره از جدول تناوبی مربوط به عناصر گروه ۱۸ جدول می‌باشد که گازهای نجیب هستند و چندان تمایلی به انجام واکنش ندارند، اما باید به این نکته توجه کرد که بدون در نظر گرفتن گازهای نجیب، عنصر کربن (C) در میان عناصر دوره دوم جدول تناوبی، کم‌ترین واکنش‌پذیری را دارد. در آخر بد نیست که نمودار مربوط به روند کلی واکنش‌پذیری عناصرهای دوره دوم جدول دوره‌ای است را ببینید:

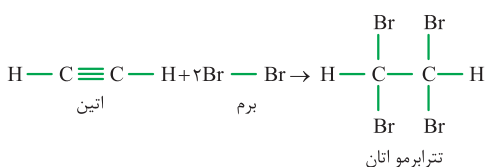


عبارت دوم: اولین شبه‌فلز گروه چهاردهم جدول تناوبی، سیلیسیم (Si) است که عنصر اصلی سازنده سلول‌های خورشیدی می‌باشد و می‌توان آن را از واکنش زیر تهیه کرد:



عبارت سوم: عنصری که در دوره و گروه چهارم جدول تناوبی قرار دارد، به آرایش الکترونی $3d^2 4s^2$ می‌رسد که می‌توان فهمید این عنصر همان فلز تیتانیم (Ti) است. این فلز محکم، کم‌چگال و مقاوم در برابر خوردگی است به همین دلیل از آن در بدنه دوچرخه استفاده می‌شود.

عبارت چهارم: در جوش کاربردی با سوختن گاز اتین، دمای لازم برای جوش دادن قطعه‌های فلزی تأمین می‌شود. اگر گاز اتین با برم مایع قرمز رنگ واکنش دهد؛ آن را بی‌رنگ می‌کند و ترکیبی با نام تترابروماتن (C_2Br_4) تولید می‌کند؛ زیرا این هیدروکربن، آلکینی سیر نشده است و با واکنش زیر به ترکیبی سیر شده تبدیل می‌شود:



آلیاژ نیتینول از دو فلز تیتانیم و نیکل تشکیل شده است. یک نمونه ۹۰۰ گرمی از این آلیاژ با دمای 31°C را درون ۲۰۰ گرم آب با دمای $49/6^{\circ}\text{C}$ می‌اندازیم. اگر درصد جرمی نیکل در آلیاژ مورد نظر، $8/0$ برابر تیتانیم باشد، تغییر دمای آب چند برابر تغییر دمای آلیاژ است؟
 $(c_{\text{Ni}} = 0/48, c_{\text{Ti}} = 0/54, c_{\text{H}_2\text{O}} = 4/2 : \text{J} \cdot \text{g}^{-1} \cdot ^{\circ}\text{C}^{-1})$

۰ / ۴۶ (۲)

۰ / ۳۷ (۱)

۰ / ۶۴ (۴)

۰ / ۵۵ (۳)

پاسخ: گزینه ۳

پاسخ خیلی تشریحی ✓

نکته

وقتی دو یا چند ماده با دمای متفاوت در تماس با هم قرار می‌گیرند، با فرض عدم اتلاف گرما، رابطه زیر برقرار است:

$$|\theta_A + \theta_B + \dots| = |\theta_C + \theta_D + \dots|$$

موادی که گرما از دست می‌دهند موادی که گرما می‌گیرند

اگر در آلیاژ مورد نظر، جرم فلز نیکل را برابر با x گرم در نظر بگیریم؛ با توجه به نسبت درصد جرمی دو فلز داده‌شده در آلیاژ خواهیم داشت:

$$900 - x = \text{جرم فلز تیتانیم} \Rightarrow \text{جرم فلز نیکل} + \text{جرم فلز تیتانیم}$$

$$\frac{\text{جرم فلز نیکل}}{\text{جرم فلز تیتانیم}} = 0/8 \Rightarrow \frac{x}{900 - x} = \frac{4}{5} \Rightarrow 5x = 4(900 - x) \Rightarrow 5x = 3600 - 4x \Rightarrow 9x = 3600 \Rightarrow x = 400 \text{ g Ni} \Rightarrow \text{جرم فلز Ti} = 500 \text{ g}$$

$$Q_{\text{Ti}} + Q_{\text{Ni}} = |Q_{\text{آب}}| \Rightarrow (500 \times 0/54 + 400 \times 0/48) \Delta\theta_{\text{فلز}} = 200 \times 4/2 \times \Delta\theta_{\text{آب}}$$

$$\Rightarrow (270 + 192) \Delta\theta_{\text{فلزها}} = 840 \Delta\theta_{\text{آب}} \Rightarrow \frac{\Delta\theta_{\text{آب}}}{\Delta\theta_{\text{فلزها}}} = \frac{462}{840} = 0/55$$

دقت کنید که چون نسبت $\Delta\theta$ خواسته شده است، نیازی به محاسبه دمای تعادل نیست.

۷۴ کدام موارد از مطالب زیر دربارهٔ هگزان (A) و ۱-هگزین (B)، نادرست است؟



(الف) این دو هیدروکربن ایزومر یکدیگرند و دارای ۶ اتم کربن هستند.

ب) در دمای اتاق، هر دو ترکیب، مایع و بی‌رنگ هستند و واکنش‌پذیری ترکیب B نسبت به ترکیب A بیشتر است.

پ) هیدروکربن B در واکنش با گاز هیدروژن در مجاورت کاتالیزگر سولفوریک اسید، به هیدروکربن A تبدیل می‌شود.

(ت) شمار پیوندهای اشتراکی C—H در ساختار A، چهار برابر شمار پیوندهای اشتراکی C—C در ساختار B است.

(۲) پ - پ - ت

(۱) الف - ب - ت

(۴) الف - پ - ت

(۳) الف - ب - پ

پاسخ: گزینہ ۴

پاسخ خیلی تشریحی ✓ عبارتهای «الف»، «پ» و «ت» نادرست‌اند.

آلکان‌ها دارای فرمول عمومی C_nH_{2n+2} و آلکن‌ها دارای فرمول عمومی C_nH_{2n} می‌باشند. هگزان، آلکانی شش کربنه با فرمول مولکولی C_6H_{14} و ۱-هگزن، آلکنی شش کربنه با فرمول مولکولی C_6H_{12} است.

پررسی عبارت‌ها:

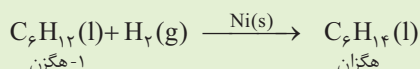
(الف)

به موادی که فرمول مولکولی یکسان اما ساختار متفاوتی دارند، ایزومر (هم‌پار) می‌گویند.

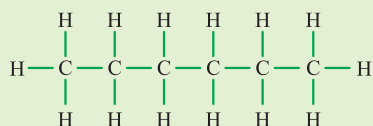
هگزان (C_6H_{14}) و ۱-هگزن (C_6H_{12}) فرمول مولکولی و ساختار متفاوتی دارند؛ بنابراین این دو هیدروکربن، ایزومر یکدیگر محسوب نمی‌شوند.

(ب) هگزان (C_6H_{14})، ترکیبی سیر شده است، ولی ۱-هگزن (C_6H_{12}) به دلیل وجود یک پیوند اشتراکی $C=C$ ، ترکیبی سیر نشده می‌باشد؛ پس واکنش‌پذیری ۱-هگزن، بیشتر از واکنش‌پذیری هگزان است. البته لازم به ذکر است که هر دو هیدروکربن مورد نظر در دمای اتاق، مایع و بی‌رنگ می‌باشند.

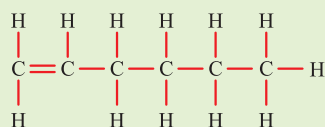
(پ) ۱-هگزن (C_6H_{12}) در واکنش با گاز هیدروژن (H_2) در مجاورت کاتالیزگر فلز نیکل (Ni) (نه سولفوریک اسید!) به هگزان (C_6H_{14}) تبدیل می‌شود:



(ت) با توجه به ساختار ترکیب‌های داده‌شده خواهیم داشت:



(C_6H_{14}) هگزان $\Rightarrow C-H$ اشتراکی = ۱۴ شمار پیوندهای

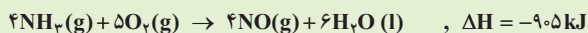
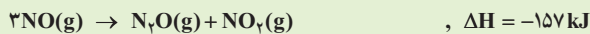
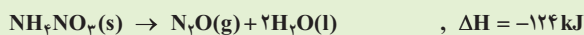

$$(C_6H_{12})_{1-} \Rightarrow C-C \text{ اشتراکی} = 4$$

$$\Rightarrow \frac{\text{شمار پیوندهای اشتراکی C—H در } C_6H_{14}}{\text{شمار پیوندهای اشتراکی C—C در } C_6H_{12}} = \frac{14}{4} = 3.5 \neq 4$$

با توجه به واکنش‌های داده‌شده، برای تهیه هر مول نیتریک اسید در واکنش: $۳\text{NO}_2(\text{g}) + \text{H}_2\text{O}(\text{l}) \rightarrow ۲\text{HNO}_3(\text{l}) + \text{NO}(\text{g})$ چند

کیلوژول گرما با محیط مبادله می‌شود؟

مشاوره مسئله قانون هس
تقریباً پایه ثابت همه امتحانات نهایی و کنکور است، پس با تمرین زیاد سعی کنید به نحوه حل این سؤال‌ها و محاسبات آن‌ها مسلط شوید.



۶۴۵ (۴

۴۸۳ / ۷۵ (۳

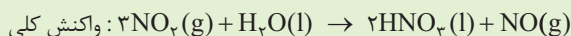
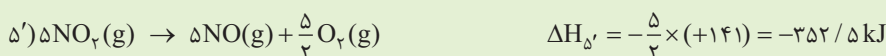
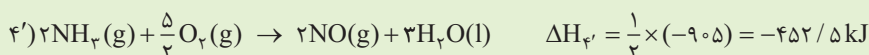
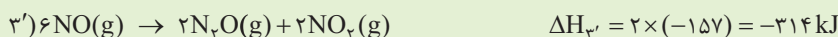
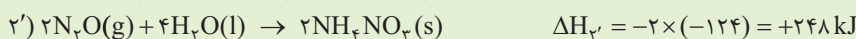
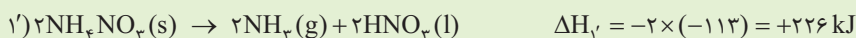
۳۲۲ / ۵ (۲

۱۶۱ / ۲۵ (۱

پاسخ: گزینه ۲

پاسخ خیلی تشریحی ✓

ابتدا باید به کمک قانون هس، ΔH واکنش $۳\text{NO}_2(\text{g}) + \text{H}_2\text{O}(\text{l}) \rightarrow ۲\text{HNO}_3(\text{l}) + \text{NO}(\text{g})$ را به دست آوریم؛ برای رسیدن به معادله موازنه‌شده واکنش مورد نظر، باید واکنش اول و دوم را وارونه و ۲ برابر کرده (به خاطر ایجاد ۲HNO_3 و حذف $۲\text{NH}_4\text{NO}_3$)، واکنش سوم را ۲ برابر کرده (به خاطر حذف $۲\text{N}_2\text{O}$)، واکنش چهارم را $\frac{۱}{۲}$ برابر کرده (به خاطر حذف ۲NH_3) و واکنش پنجم را وارونه و $\frac{۵}{۲}$ برابر و (به خاطر حذف $\frac{۵}{۲}\text{O}_2$) کنیم و در نهایت پنج واکنش به‌دست‌آمده را با هم جمع کنیم:



$$\Delta H_{\text{کلی}} = \Delta H_{۱'} + \Delta H_{۲'} + \Delta H_{۳'} + \Delta H_{۴'} + \Delta H_{۵'} = +۲۲۶ + ۲۴۸ + (-۳۱۴) + (-۴۵۲ / ۵) + (-۳۵۲ / ۵) = -۶۴۵ \text{ kJ}$$

حالا با توجه به معادله موازنه‌شده واکنش مورد نظر، می‌توان فهمید که به ازای تولید دو مول نیتریک اسید (HNO_3)، ۶۴۵ کیلوژول

گرما آزاد می‌شود؛ پس برای تهیه هر مول نیتریک اسید (HNO_3)، $\frac{۶۴۵}{۲} = ۳۲۲ / ۵$ کیلوژول گرما با محیط مبادله خواهد شد.

با توجه به داده‌های جدول زیر، کدام مقایسه دربارهٔ واکنش‌پذیری فلزها درست است؟ (علامت ✓ به معنی واکنش دادن و علامت ✗ به معنای واکنش ندادن فلز با محلول است.)

فلز محلول	A	D	M	X
XNO_3	✓	✓	✓	
D_3PO_4	✗		✗	✗
ASO_4		✓	✓	✗
MCl_3	✗	✓		✗

$$X > A > M > D \quad (۱)$$

$$X < A < M < D \quad (۲)$$

$$D > A > M > X \quad (۳)$$

$$D < A < X < A \quad (۴)$$

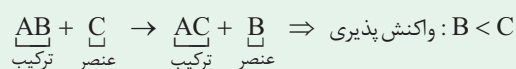
پاسخ: گزینه ۲

پاسخ خیلی تشریحی ✓

نکته

در هر واکنش شیمیایی که به طور طبیعی انجام می‌شود واکنش‌پذیری فراورده‌ها از واکنش‌دهنده‌ها کم‌تر است.

پس اگر یک واکنش به ما بدهند که در دو طرفش به عنصر آزاد وجود داشته باشد و بگویند به طور طبیعی انجام می‌شود، ما خیلی سریع می‌توانیم واکنش‌پذیری دو عنصر آزاد در دو طرف معادله را با هم مقایسه کنیم.



در معادله کلی بالا واکنش‌پذیری C از B بیشتر بوده است؛ به همین دلیل میل بیشتری به تشکیل ترکیب داشته؛ از این رو، با B عوض کرده!

با توجه به ردیف اول جدول، هر سه فلز A، D و M می‌توانند با محلول XNO_3 واکنش دهند و جای X را در ترکیبش بگیرند؛ بنابراین واکنش‌پذیری هر سه فلز از X بیشتر است. از ردیف دوم، نتیجه می‌گیریم که واکنش‌پذیری D از سه فلز دیگر بیشتر می‌باشد؛ زیرا هیچ کدام از آن‌ها نتوانسته جای D در ترکیبش را بگیرد. فب! تا این‌جا شد D از همه بیشتر و X از همه کم‌تر! پس گزینه‌های (۱) و (۴) پُر!

با توجه به ردیف سوم، M می‌تواند با محلول ASO_4 واکنش دهد؛ بنابراین واکنش‌پذیری M از A بیشتر است و جواب می‌شود گزینه (۲) و فلاس!

مخلوطی از بنزن و نفتالن به جرم ۵۸ گرم را در حضور کاتالیزگر مناسب با ۵ گرم گاز هیدروژن به طور کامل واکنش می‌دهیم. اگر پس از



پایان واکنش، گاز هیدروژن باقی‌مانده با ۴ گرم گاز اکسیژن به طور کامل بسوزد؛ به تقریب چند درصد جرمی مخلوط اولیه را هیدروکربن

نفتالن

با نقطه جوش بالاتر تشکیل داده است؟ ($O = ۱۶, C = ۱۲, H = ۱ : g.mol^{-1}$)

۷۵ (۴)

۴۵ (۳)

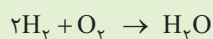
۶۵ (۲)

۵۵ (۱)

پاسخ: گزینه ۱

پاسخ خیلی تشریحی ✓ گام اول: با توجه به معادله موازنه‌شده واکنش سوختن گاز هیدروژن، با استفاده از جرم گاز اکسیژن مصرفی، جرم گاز هیدروژن

باقی‌مانده را حساب می‌کنیم:



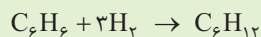
$$\frac{\text{جرم}}{\text{جرم مولی} \times \text{ضریب}} = \frac{\text{جرم}}{\text{جرم مولی} \times \text{ضریب}} \Rightarrow \frac{x}{2 \times 2} = \frac{1}{1 \times 32} \Rightarrow x = 0.5 \text{ g } H_2$$

گام دوم: با استفاده از جرم مخلوط بنزن و نفتالن و جرم گاز هیدروژن مصرف‌شده برای سیر این مخلوط، جرم هیدروکربن با نقطه جوش بالاتر یعنی نفتالن را به دست می‌آوریم:

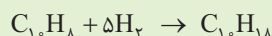
$5 - 0.5 = 4.5 \text{ g}$ = جرم گاز هیدروژن باقی‌مانده - جرم کل گاز هیدروژن = جرم گاز هیدروژن مصرف‌شده در واکنش با بنزن و نفتالن

در ساختار بنزن (C₆H₆)، ۳ پیوند دوگانه و در ساختار نفتالن (C₁₀H₈)، ۵ پیوند دوگانه وجود دارد؛ بنابراین هر

مول بنزن با ۳ مول گاز هیدروژن و هر مول نفتالن با ۵ مول گاز هیدروژن به طور کامل واکنش می‌دهد:



x mol 3x mol



y mol 5y mol

$$4.5 \text{ g} \times \frac{1 \text{ mol}}{2 \text{ g}} = 2.25 \text{ mol} \Rightarrow 3x + 5y = 2.25$$

$$58 \text{ g} = 78x + 128y \Rightarrow 78x + 128y = 58$$

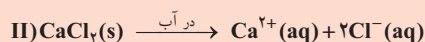
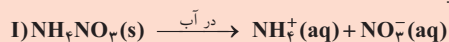
$$\begin{cases} 3x + 5y = 2.25 \\ 78x + 128y = 58 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 78x + 128y = 58 \\ 78x + 128y = 58 \end{cases}$$

$$2y = 0.5 \Rightarrow y = \frac{1}{4} \text{ mol (تعداد مول نفتالن)} \Rightarrow \text{جرم نفتالن} = \frac{1}{4} \text{ mol} \times \frac{128 \text{ g}}{1 \text{ mol}} = 32 \text{ g}$$

گام سوم: درصد جرمی نفتالن در مخلوط اولیه را حساب می‌کنیم:

$$\text{درصد جرمی نفتالن} = \frac{\text{جرم نفتالن}}{\text{جرم کل مخلوط}} \times 100 = \frac{32}{58} \times 100 \approx 55\%$$

با توجه به معادله‌های ترموشیمیایی داده‌شده، چند مورد از مطالب زیر نادرست است؟



• علامت ΔH فرایند (II) و واکنش $\text{N}_2\text{O}_4(\text{g}) \rightarrow 2\text{NO}_2(\text{g})$ یکسان است.

• از فرایند انحلال $\text{NH}_4\text{NO}_3(\text{s})$ در آب، برای سرد کردن محل آسیب دیدگی بدن ورزشکاران استفاده می‌شود.

• با انحلال مخلوطی از کلسیم کلرید و آمونیوم نیتрат با نسبت مولی برابر در آب، دمای محلول کاهش می‌یابد.

• شمار پیوندهای کووالانسی در هر واحد فرمولی از واکنش دهنده فرایند (I)، دو برابر شمار پیوندهای کووالانسی ترکیب هیدروژن سیانید (HCN) است.

۱ (۴)

۲ (۳)

۳ (۲)

۴ (۱)

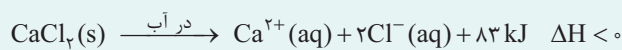
پاسخ: گزینه ۳

بسته‌های گرمای گرمای و سرمازا

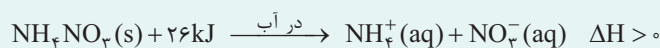
درتس Box

حل شدن (انحلال) برخی از ترکیب‌های یونی در آب گرماگیر و انحلال برخی دیگر از ترکیب‌ها در آب گرماده است. اساس کار بسته‌های گرمای و سرمازایی که ورزشکاران برای درمان آسیب دیدگی‌های خود استفاده می‌کنند، انحلال یک حل‌شونده یونی (ترکیب یونی) در آب است. در واقع هر بسته یک کیسه پلاستیکی است که درون آن بسته کوچکی آب همراه با مقدار معینی از یک جامد یونی وجود دارد. ضربه زدن یا فشار دادن کیسه پلاستیکی باعث پاره شدن بسته آب شده و جامد یونی در آن حل می‌شود. انحلالی که زود، تند، سریع! باعث ردوبدل گرما با محیط می‌شود.

مثال: انحلال کلسیم کلرید (CaCl_2) در آب گرماده است، به طوری که بر اثر انحلال ۱ مول از این ترکیب در آب، ۸۳ کیلوژول گرما آزاد می‌شود؛ در نتیجه بر اثر انحلال این نمک در آب، دمای محلول افزایش می‌یابد و گرما به سرعت به بدن ورزشکار منتقل می‌شود.



مثال: انحلال آمونیوم نیترات (NH_4NO_3) در آب گرماگیر است، به طوری که برای انحلال یک مول از این ترکیب در آب، ۲۶ کیلوژول گرما باید جذب شود؛ در نتیجه بر اثر انحلال این نمک در آب، دمای محلول کاهش می‌یابد. به همین خاطر از آمونیوم نیترات در بسته‌های سرمازا استفاده می‌شود.



جمع‌بندی:

انحلال کلسیم کلرید در آب ← گرماده ← دمای بسته بالا می‌رود ← بسته‌های گرمای

انحلال آمونیوم نیترات در آب ← گرماگیر ← دمای بسته کاهش می‌یابد ← بسته‌های سرمازا

پاسخ خیلی تشریحی ✓ عبارتهای اول و سوم، نادرست هستند.

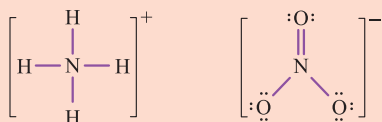
بررسی عبارتهای:

عبارت اول: واکنش $\text{N}_2\text{O}_4(\text{g}) \rightleftharpoons 2\text{NO}_2(\text{g})$ ، گرماگیر است و علامت ΔH آن، مثبت می‌باشد، ولی فرایند $\text{CaCl}_2(\text{s}) \xrightarrow{\text{در آب}} \text{Ca}^{2+}(\text{aq}) + 2\text{Cl}^-(\text{aq})$ ، گرماده است و علامت ΔH آن، منفی می‌باشد؛ پس علامت ΔH فرایند (II) و واکنش $\text{N}_2\text{O}_4(\text{g}) \rightarrow 2\text{NO}_2(\text{g})$ با هم یکسان نیست.

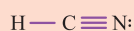
عبارت دوم: فرایند $\text{NH}_4\text{NO}_3(\text{s}) \xrightarrow{\text{در آب}} \text{NH}_4^+(\text{aq}) + \text{NO}_3^-(\text{aq})$ ، گرماگیر است و بر اثر انحلال نمک NH_4NO_3 در آب، دمای محلول کاهش می‌یابد؛ در نتیجه از آمونیوم نیترات در بسته‌های سرمازا و برای سرد کردن محل آسیب دیدگی بدن ورزشکاران استفاده می‌شود.

عبارت سوم: مقدار آنتالپی فرایند گرماده انحلال کلسیم کلرید (CaCl_2) در آب ($83 \text{ kJ} \cdot \text{mol}^{-1}$)، بیشتر از فرایند گرماگیر انحلال آمونیوم نیترات (NH_4NO_3) در آب ($26 \text{ kJ} \cdot \text{mol}^{-1}$) است؛ بنابراین با انحلال مخلوطی از این دو نمک با نسبت مولی برابر در آب، گرمای مصرف‌شده کمتر از گرمای آزادشده می‌باشد؛ پس دمای محلول افزایش می‌یابد.

عبارت چهارم: با توجه به ساختار ترکیب‌های بیان شده، خواهیم داشت:



۸ = شمار پیوندهای کووالانسی $\Rightarrow (\text{NH}_4\text{NO}_3)$ آمونیوم نیترات : واکنش دهنده فرایند (I)



۴ = شمار پیوندهای کووالانسی $\Rightarrow (\text{HCN})$ هیدروژن سیانید

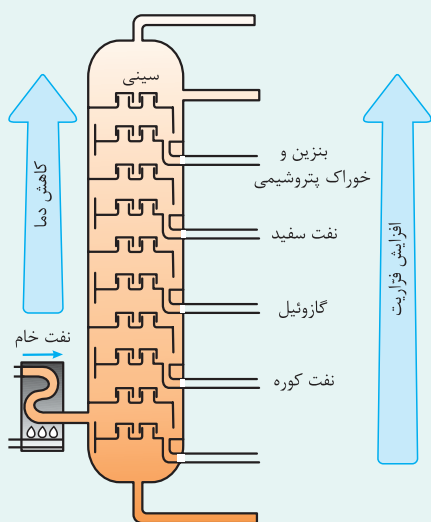
$$\Rightarrow \frac{\text{شمار پیوندهای کووالانسی در آمونیوم نیترات}}{\text{شمار پیوندهای کووالانسی در هیدروژن سیانید}} = \frac{8}{4} = 2$$

- (۱) ذرات سازنده گازوئیل، در مقایسه با ذرات سازنده نفت سفید، در نقاط بالاتری از برج تقطیر نفت خام جدا می‌شوند.
- (۲) سوخت هواپیما به طور عمده از ماده‌ای تهیه می‌شود که از آلکان‌هایی با ۳۱ تا ۴۶ جفت الکترون پیوندی تشکیل شده است.
- (۳) درصد فراوانی مولکول‌های سازنده بنزین و مواد پتروشیمی در نفت برنت دریای شمال کم‌تر از نفت سنگین کشورهای عربی است.
- (۴) گرمای حاصل از سوختن یک گرم بنزین در مقایسه با یک گرم زغال‌سنگ بیشتر بوده اما میزان آلاینده بیشتری وارد هوا کرده می‌کند.

پاسخ: گزینه ۲

پالایش نفت خام

در درس Box



با توجه به این که نفت خامی که از زمین استخراج می‌شود، حاوی نمک‌ها، اسیدها و آب است، ابتدا آن‌ها را از نفت خام جدا می‌کنند و پس از جدا کردن این ناخالصی‌ها، هیدروکربن‌های موجود در نفت خام را با روش تقطیر جزء به جزء پالایش می‌کنند. با استفاده از این روش، هیدروکربن‌های موجود در نفت خام به صورت مخلوط‌هایی با نقطه جوش نزدیک، از هم جدا می‌شوند.

ابتدا نفت خام را در محفظه‌ای بزرگ گرمای می‌دهند و بعد نفت خام داغ را به درون برج تقطیر هدایت می‌کنند، برج تقطیر، محفظه‌ای بلند شامل بخش‌های مختلفی است که دمای آن‌ها با یکدیگر تفاوت دارد. در این برج از پایین به بالا دما کاهش می‌یابد، یعنی با حرکت به سمت بالای برج تقطیر دما کاهش می‌یابد. هنگامی که نفت خام داغ به قسمت پایین برج وارد می‌شود، مولکول‌های سبک‌تر و فزاتر (با نقطه جوش پایین‌تر) به سمت بالای برج حرکت می‌کنند. این در حالی است که هیدروکربن‌های سنگین‌تر و غیرفزاتر (با نقطه جوش بالاتر)

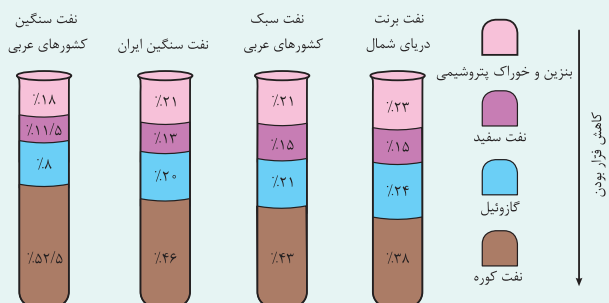
در طبقات پایین‌تر برج، با فوش می‌کنند! رفته رفته! که مولکول‌ها بالاتر می‌روند، سرد شده و به مایع تبدیل می‌شوند و در سینی‌هایی که در فاصله‌های گوناگون برج قرار دارند، وارد شده و از برج خارج می‌شوند.

بنزین و خوراک پتروشیمی، نفت سفید (شامل آلکان‌هایی با ۱۰ تا ۱۵ کربن) گازوئیل و نفت کوره، برخی از موادی هستند که در نفت خام وجود دارند.

نفت کوره < گازوئیل < نفت سفید < بنزین و خوراک پتروشیمی: مقایسه اندازه و جرم مولکول

سوخت هواپیما به طور عمده از نفت سفید تهیه می‌شود که شامل آلکان‌هایی با ۱۰ تا ۱۵ اتم کربن (۲۲ تا ۳۲ اتم هیدروژن) است.

در «با هم بیندیشیم» صفحه ۴۳ کتاب درسی، با چهار نوع نفت خام آشنا می‌شویم که درصد هر یک از هیدروکربن‌های مایع بالا در آن‌ها متفاوت است.



زغال‌سنگ، جایگزینی برای نفت:

نام سوخت	گرمای آزاد شده (kJ.g ⁻¹)	فرآورده‌های سوختن	مقدار کربن دی‌اکسید به ازای هر کیلوژول انرژی تولید شده (g)
بنزین	۴۸	CO ₂ , CO, H ₂ O	۰/۰۶۵
زغال‌سنگ	۳۰	SO ₂ , CO ₂ , NO ₂ , CO, H ₂ O	۰/۱۰۴

(۱) ارزش سوختی یا همان گرمای حاصل از سوختن یک گرم زغال سنگ، کم تر از یک گرم بنزین است (در اثر سوختن یک گرم بنزین، 48 kJ گرما آزاد می شود در حالی که گرمای آزاد شده در اثر سوختن یک گرم زغال سنگ برابر با 30 kJ است).

(۲) مقدار کربن دی اکسید آزاد شده به ازای هر کیلوژول انرژی تولید شده در اثر سوختن زغال سنگ، بیشتر از سوختن بنزین است. CO_2 بیشتر، یعنی اثر گلخانه ای بیشتر!

(۳) جایگزینی نفت با زغال سنگ باعث ورود مقدار بیشتری از انواع آلاینده ها به هوا کره می شود. در اثر سوختن (کامل یا ناقص) بنزین، فرآورده های CO ، H_2O و CO_2 تولید می شود؛ در حالی که در اثر سوختن زغال سنگ علاوه بر این ها، آلاینده های SO_2 و NO_2 هم تولید می شوند.

پاسخ خیلی تشریحی ✓ بررسی گزینه ها:

گزینه (۱): در برج تقطیر نفت خام، مولکول های سبک تر و فرار تر با نقطه جوش پایین تر به سمت بالای برج حرکت می کنند و در آن نقاط، به مایع تبدیل می شوند. از آن جایی که ذرات سازنده نفت سفید، سبک تر از ذرات سازنده گازوئیل است؛ نفت سفید در مقایسه با گازوئیل در نقاط بالاتری از برج تقطیر نفت خام جدا می شود.

گزینه (۲):

در هر آلکان با n اتم کربن، $3n + 1$ پیوند اشتراکی یا جفت الکترون پیوندی وجود دارد.

سوخت هواپیما به طور عمده از نفت سفید تهیه می شود که شامل آلکان هایی با 10 تا 15 اتم کربن (22 تا 32 اتم هیدروژن) است که این آلکان ها دارای $31 = 1 + (3 \times 10)$ تا $46 = 1 + (3 \times 15)$ جفت الکترون پیوندی هستند.

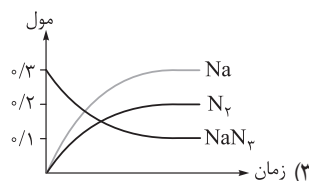
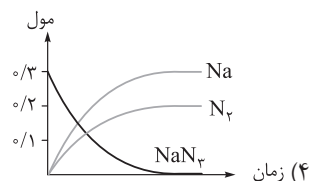
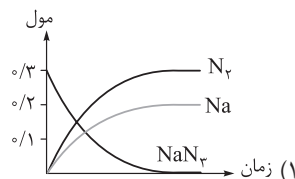
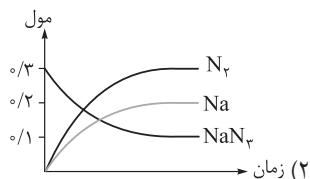
گزینه (۳): درصد فراوانی بنزین و خوراک پتروشیمی در نفت برنت دریای شمال بیشتر از درصد فراوانی بنزین و خوراک پتروشیمی در نفت سنگین کشورهای عربی است، به همین دلیل که نفت برنت دریای شمال، گران تر است.

گزینه (۴): گرمای حاصل از سوختن یک گرم بنزین، بیشتر از گرمای حاصل از سوختن یک گرم زغال سنگ است، اما میزان آلاینده های تولید شده در اثر سوختن زغال سنگ بیشتر می باشد.



۳۰ گرم سدیم آزید (NaN_3) با خلوص ۶۵ درصد را در ظرفی وارد می‌کنیم تا مطابق معادله واکنش زیر تجزیه شود. اگر ۶/۷۲ لیتر گاز نیتروژن در این فرایند تولید شود؛ نمودار تغییرات مول مواد شرکت‌کننده در واکنش مورد نظر کدام است؟ (چگالی گاز نیتروژن در شرایط واکنش، $1/25 \text{ g.L}^{-1}$ است، $\text{Na} = 23, \text{N} = 14 : \text{g.mol}^{-1}$)

(معادله واکنش، موازنه شود.) $\text{NaN}_3(\text{s}) \rightarrow \text{Na}(\text{s}) + \text{N}_2(\text{g})$



پاسخ: گزینه ۲

پاسخ خیلی تشریحی ✓ ابتدا تعداد مول‌های سدیم آزید (NaN_3) را حساب می‌کنیم:

$$\text{NaN}_3 \text{ تعداد مول} = 30 \text{ g NaN}_3 \times \frac{1 \text{ mol NaN}_3}{65 \text{ g NaN}_3} = 0.3 \text{ mol NaN}_3$$

حالا حساب می‌کنیم که در این واکنش چند مول گاز نیتروژن (N_2) تولید شده است:

$$6.72 \text{ L N}_2 \times \frac{1/25 \text{ g N}_2}{1 \text{ L N}_2} \times \frac{1 \text{ mol N}_2}{28 \text{ g N}_2} = \frac{6.72 \times 5}{100 \times 4 \times 28} = 0.3 \text{ mol N}_2 \Rightarrow \text{گزینه‌های (۳) و (۴) حذف}$$

حالا بریم سراغ معادله موازنه‌شده واکنش:



باید به کمک تعداد مول‌های N_2 تولیدشده، تعداد مول‌های Na تولیدی و تعداد مول‌های NaN_3 مصرف‌شده را حساب کنیم:

$$0.3 \text{ mol N}_2 \times \frac{2 \text{ mol Na}}{3 \text{ mol N}_2} = 0.2 \text{ mol Na}$$

$$\Rightarrow \text{تعداد مول‌های NaN}_3 \text{ مصرف‌شده} = 0.2 \text{ mol NaN}_3$$

بنابراین از ۰/۳ مول NaN_3 اولیه، ۰/۲ مول آن مصرف شده و ۰/۱ مول آن باقی می‌ماند؛ بنابراین نمودار گزینه (۲) درست است.