

آزمون آزمایشی خیلی سبز

پایه یازدهم

مرحله هشتم

رشته ریاضی

سال تحصیلی ۱۴۰۳-۰۴

تاریخ برگزاری: ۲۴/اسفند/۱۴۰۳

نود جده بندی دروس

حسابان (۱)	آمار و احتمال	هندسه (۲)
فصل ۳ (درس ۲ و ۳) و فصل ۴ (درس ۱ تا ۳) صفحه ۸۰ تا ۱۰۹	فصل ۲ (درس ۳ از ابتدای قانون ضرب احتمال) فصل ۳ (درس ۱ و ۲) صفحه ۵۲ تا ۸۶	فصل ۲ (از ابتدای تجانس) و فصل ۳ (درس ۱) صفحه ۴۳ تا ۶۳
فیزیک (۲)	شیمی (۲)	
فصل ۲ (از ابتدای توان در مدارهای الکتریکی) و فصل ۳ (تا ابتدای ویژگی های مغناطیسی مواد) صفحه ۶۷ تا ۱۰۱	فصل ۲ (از ابتدای آنتالپی، همان محتوای انرژی است) صفحه ۶۵ تا ۹۸	

مواد امتحانی	تعداد سؤال	از شماره	تا شماره	مدت پاسخگویی
حسابان	۲۰	۱	۲۰	۳۰ دقیقه
هندسه	۱۰	۲۱	۳۰	۲۰ دقیقه
آمار و احتمال	۱۰	۳۱	۴۰	۲۰ دقیقه
فیزیک	۲۰	۴۱	۶۰	۳۰ دقیقه
شیمی	۲۰	۶۱	۸۰	۲۰ دقیقه
مجموع		۸۰ سؤال		۱۲۰ دقیقه

این آزمون نمره منفی دارد.

استفاده از ماشین حساب مجاز نیست.

دفتر چه سوالات آزمون های خیلی سبز، از همه نظر (تعداد سؤال ها، زمان پاسخگویی، نوع چینش گزینه ها، نوع صفحه آرایی، فونت سوالات، سایز کلمات و اعداد، جای خالی محل انجام محاسبات و...) در شبیه ترین حالت به دفترچه سوالات کنکور سراسری طراحی می شود.



Azmoon.kheilisabz.com

حسابان یازدهم

۱- مقدار x از معادله $\log_5 x \cdot \log_7 x \cdot \log_8 x = \log_x (\Delta x^2 + 6x)$ کدام است؟

- (۱) ۶ (۲) ۳ (۳) ۲ (۴) ۱

۲- اگر $\log_5 4 = a, \log_7 9 = b, \log_8 3 = c$ باشد، حاصل $\frac{ab}{c}$ کدام است؟

- (۱) ۴ (۲) ۳ (۳) ۲ (۴) ۱

۳- دامنه تابع $f(x) = \log_{8-x}(3x+k)$ شامل ۴ عدد صحیح است. کمترین مقدار صحیح k کدام است؟

- (۱) -۵ (۲) -۶ (۳) -۷ (۴) -۸

۴- اگر $\sqrt[3]{42} = 7^c = 3^b = 2^a$ باشد، حاصل $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$ کدام است؟

- (۱) ۴ (۲) ۳ (۳) ۲ (۴) ۱

۵- اگر $\log_3 a = \log_3 3 = b$ و $\log_3 5 = b$ باشد، مقدار $\log_3 8$ کدام است؟

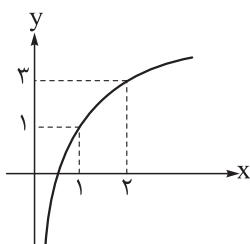
- (۱) ab (۲) $3(1-a-b)$

- (۳) $a+b$ (۴) $3(1-a+b)$

۶- دامنه تابع $f(x) = \log(\log_2 x - \log_x 2)$ به صورت $(a, b) \cup (c, +\infty)$ است. حاصل $a+b+c$ کدام است؟

- (۱) ۳ (۲) $3/5$ (۳) ۲ (۴) $2/5$

۷- در شکل زیر نمودار تابع f با ضابطه $f(x) = a \log_b x + c$ رسم شده است. اگر a عددی طبیعی باشد، مقدار $f(2^a)$ کدام می‌تواند باشد؟



- (۱) ۲ (۲) ۴

- (۳) $2/5$ (۴) ۵

۸- هر هفته ۱۰ درصد از میزان آب موجود در یک مخزن تبخیر می‌شود. بعد از تقریباً چند روز، مقدار آب موجود در

مخزن به $\frac{1}{4}$ مقدار اولیه می‌رسد؟ ($\log 2 \approx 0/3$, $\log 3 \approx 0/47$)

- (۱) ۶۰ (۲) ۷۵ (۳) ۵۵ (۴) ۷۰

۹- انرژی آزاد شده در زلزله شهر A، ۵۰۰ برابر انرژی آزاد شده در زلزله دیگری در شهر B است. اختلاف شدت این دو زلزله

چند ریشتر است؟ ($\log 2 \approx 0/3$)

- (۱) $1/2$ (۲) $1/5$ (۳) $1/8$ (۴) $2/1$

محل انجام محاسبات



۱۰- جواب معادله $\log_3(\log_2 x) + 3 \log_9(\log_x 2) = 7$ کدام است؟

- (۱) 2^{3^7} (۲) $3^{2^{-7}}$ (۳) $3^{2^{-3/5}}$ (۴) $2^{3^{-14}}$

۱۱- اگر شعاع یک دایره برابر ۱۰ باشد، مساحت قطاعی از آن با زاویه مرکزی یک رادیان کدام است؟

- (۱) ۵۰ (۲) ۱۰۰ (۳) ۲۰۰ (۴) ۷۵

۱۲- یک تسمه، دو قرقره به شعاع‌های ۵/۰ و ۷۵/۰ متر را به هم وصل کرده است. اگر قرقره کوچک‌تر ۱۸ متر را طی کرده باشد قرقره بزرگ‌تر چه زاویه‌ای بر حسب رادیان دوران می‌کند؟

- (۱) ۱۲ (۲) ۲۴ (۳) ۳۶ (۴) ۴۸

۱۳- اگر $\frac{-51\pi}{4} \text{ rad} = x + k \times 360^\circ$ باشد، مقدار x کدام می‌تواند باشد؟ ($k \in \mathbb{Z}$)

- (۱) 45° (۲) 135° (۳) 225° (۴) 245°

۱۴- اگر $x + y = \frac{\pi}{4}$ و $\sin(2x + y) = \frac{1}{4}$ باشد، حاصل $\frac{\cos y}{\tan x}$ کدام است؟

- (۱) $\frac{1}{4}$ (۲) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ (۳) $\sqrt{3}$ (۴) $\frac{\sqrt{3}}{3}$

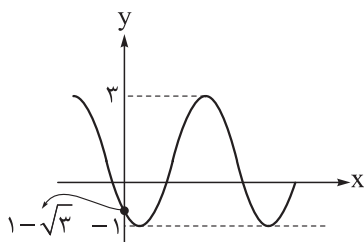
۱۵- حاصل $\frac{1}{1 + \tan x} + \frac{1}{1 + \tan(x + \frac{\pi}{4})} + \frac{1}{1 + \tan(x + \pi)} + \dots + \frac{1}{1 + \tan(x + \frac{11\pi}{4})}$ کدام است؟

- (۱) $6 + \frac{12}{\tan x + \cot x}$ (۲) $6 + \frac{12}{\tan x - \cot x}$ (۳) $6 - \frac{12}{\tan x - \cot x}$ (۴) $6 - \frac{12}{\tan x + \cot x}$

۱۶- اگر $\frac{3\pi}{4} < x < \frac{\pi}{4}$ ، مقدار $\cos x = 3 \sin x - \cos(\frac{\pi}{4} - x)$ ، مقدار $\cos x$ کدام است؟

- (۱) $-\frac{1}{5}$ (۲) $-\frac{2}{3}$ (۳) $-\frac{3}{5}$ (۴) $-\frac{4}{5}$

۱۷- در شکل زیر، قسمتی از نمودار تابع f با ضابطه $f(x) = a \sin(x - b) + c$ رسم شده است. اگر $\frac{3\pi}{4} < b < 2\pi$ باشد،

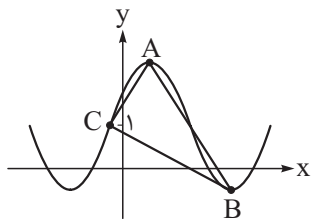


مقدار $f(\frac{53\pi}{6})$ کدام است؟

- (۱) $\frac{3}{2}$ (۲) $-\frac{1}{2}$ (۳) ۲ (۴) $-\frac{1}{4}$

محل انجام محاسبات

۱۸- بخشی از نمودار تابع $f(x) = k \sin(x + \frac{\pi}{3}) + 1$ در شکل زیر رسم شده است. اگر مثلث ABC در رأس A قائمه باشد، مقدار $f(k)$ کدام است؟ (A و B نقاط ماکزیمم و مینیمم تابع هستند.)



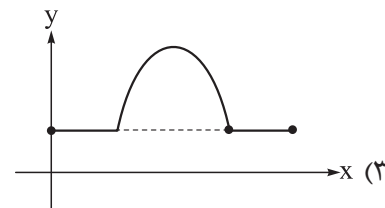
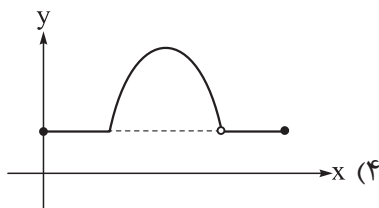
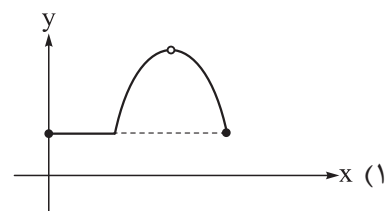
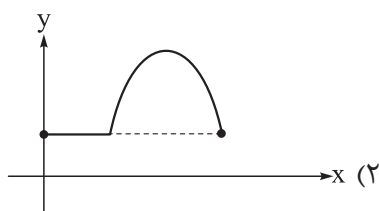
$$\frac{\pi}{3} + 1 \quad (2)$$

$$\frac{\pi}{2} + 1 \quad (1)$$

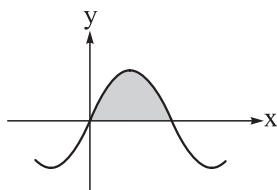
$$\frac{\pi}{6} + 1 \quad (4)$$

$$\frac{\pi}{4} + 1 \quad (3)$$

۱۹- اگر $f(x) = \frac{\cos^2 x}{1 + \sin x}$ و $g(x) = \cos(x + \frac{3\pi}{2})$ باشد، نمودار تابع $|f| + |g|$ روی بازه $[0, 2\pi]$ کدام است؟



۲۰- اگر مطابق شکل، مساحت هر طاق نمودار تابع $g(x) = \sin x$ در بازه $[0, \pi]$ برابر ۲ باشد، مساحت سطح محدود به نمودار تابع $f(x) = \sin x + |\sin x|$ و محور x روی بازه $[-2\pi, 2\pi]$ کدام است؟



$$4 \quad (1)$$

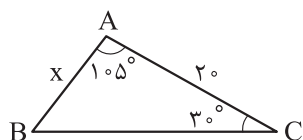
$$8 \quad (2)$$

$$12 \quad (3)$$

$$16 \quad (4)$$

محل انجام محاسبات

هندسه یازدهم

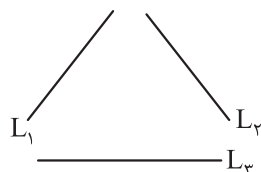
۲۱- در شکل مقابل، مقدار x کدام است؟

(۲) ۱۰

(۴) ۱۵

(۱) $10\sqrt{2}$

(۳) $10\sqrt{3}$

۲۲- سه خط L_1 ، L_2 و L_3 مطابق شکل زیر در صفحه مفروض‌اند. با کدام تبدیل می‌توان پاره خطی به طول ۶ سانتی‌متررسم کرد به طوری که دو سر آن روی خط L_1 و L_2 بوده و موازی L_3 باشد؟

(۲) دوران

(۴) تجانس

(۱) بازتاب

(۳) انتقال

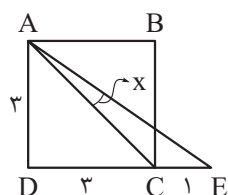
۲۳- دایره $C(O, 6)$ و نقطه M به فاصله ۱۲ واحد از O مفروض‌اند. دایره C' را در تجانس به مرکز M و نسبت تجانس $\frac{1}{3}$ بر دایره C تصویر می‌کنیم. وضعیت دو دایره C و C' نسبت به هم چگونه است؟

(۲) متداخل

(۴) مماس خارج

(۱) متخارج

(۳) متقاطع

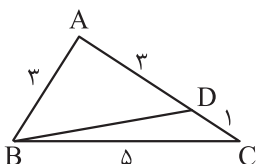
۲۴- در مربع شکل مقابل، مقدار $\sin x$ کدام است؟

(۲) $\frac{\sqrt{3}}{12}$

(۴) $\frac{\sqrt{2}}{5}$

(۱) $\frac{\sqrt{3}}{6}$

(۳) $\frac{\sqrt{2}}{10}$

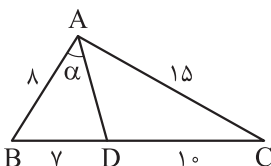
۲۵- در شکل مقابل، شعاع دایره محیطی مثلث BCD کدام است؟

(۲) $\frac{15\sqrt{2}}{8}$

(۴) $\frac{9\sqrt{2}}{4}$

(۱) $\frac{5\sqrt{2}}{2}$

(۳) $\frac{3\sqrt{2}}{2}$

۲۶- در شکل مقابل، $\tan \alpha$ کدام است؟

(۲) $\frac{21}{16}$

(۴) $\frac{15}{17}$

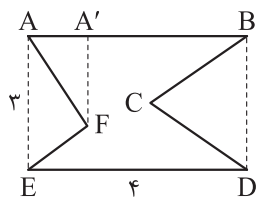
(۱) $\frac{17}{23}$

(۳) $\frac{12}{7}$

محل انجام محاسبات



۲۷- شش ضلعی ABCDEF را مطابق شکل زیر در نظر بگیرید. اگر چهارضلعی ABDE مستطیلی به طول ۴ و عرض ۳، نقطه C روی عمود منصف AB، A' مجانس نقطه A در تجانس به مرکز B و با نسبت $\frac{3}{4}$ و $A'F \parallel AE$ باشد و بخواهیم مساحت این شش ضلعی را بدون تغییر محیط و تعداد اضلاع آن به بیشترین مقدار ممکن افزایش دهیم، مساحت شش ضلعی جدید کدام است؟



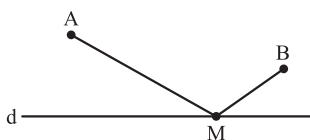
$$16/5 \quad (2)$$

$$15 \quad (1)$$

$$19/5 \quad (4)$$

$$18 \quad (3)$$

۲۸- در شکل زیر می‌خواهیم از نقطه A به نقطه‌ای روی خط d رفته و سپس از آن نقطه به نقطه B برویم. اگر طول کوتاه‌ترین مسیر AMB برابر ۷ و طول MB برابر ۲ و فاصله A از خط d برابر $\frac{2}{5}$ باشد، اندازه زاویه حاده بین پاره خط MB و خط d چند درجه است؟



$$22/5 \quad (2)$$

$$15 \quad (1)$$

$$45 \quad (4)$$

$$30 \quad (3)$$

۲۹- در مثلثی به اضلاع ۲، $2\sqrt{3}$ و ۴، نقطه M را روی بزرگ‌ترین ضلع در نظر می‌گیریم. کم‌ترین مقدار مجموع فواصل نقطه M از وسط‌های دو ضلع دیگر مثلث کدام است؟

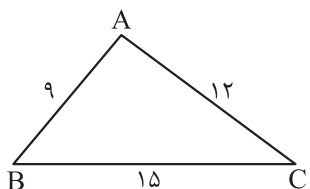
$$\sqrt{7} \quad (4)$$

$$\frac{\sqrt{7}}{2} \quad (3)$$

$$\sqrt{6} \quad (2)$$

$$\frac{\sqrt{6}}{2} \quad (1)$$

۳۰- در مثلث ABC مطابق شکل، تصویر نقطه B را در تجانس به مرکز A و نسبت $\frac{1}{3}$ ، B' و تصویر نقطه C را در تجانس به مرکز A و نسبت $\frac{1}{3}$ ، C' می‌نامیم. هم‌چنین تصویر وسط ضلع BC را در تجانس به مرکز A و نسبت $\frac{2}{3}$ ، A' می‌نامیم. مساحت مثلث A'B'C' کدام است؟



$$4/5 \quad (2)$$

$$3 \quad (1)$$

$$9 \quad (4)$$

$$6 \quad (3)$$

آمار و احتمال

۳۱- در جریان یک مسابقه، بازیکن A دو پنالتی می‌زند. این بازیکن با احتمال ۸۰ درصد پنالتی اول را گل می‌کند، در این صورت احتمال گل شدن پنالتی دوم ۹۰ درصد و در غیر این صورت ۴۰ درصد خواهد بود. با کدام احتمال پنالتی اول گل نمی‌شود ولی پنالتی دوم گل می‌شود؟

$$(1) \frac{2}{25} \quad (2) \frac{8}{25} \quad (3) \frac{1}{50} \quad (4) \frac{9}{50}$$

۳۲- در ظرف A، ۲ مهره سیاه و ۳ مهره سفید، در ظرف B، ۴ مهره سیاه و ۱ مهره سفید و در ظرف C، ۵ مهره سفید داریم. از ظرف A دو مهره و از ظرف B سه مهره وارد ظرف C می‌کنیم. حالا از ظرف C یک مهره انتخاب می‌کنیم. با چه احتمالی این مهره، سفید است؟

$$(1) \frac{3}{5} \quad (2) \frac{17}{25} \quad (3) \frac{18}{25} \quad (4) \frac{4}{5}$$

۳۳- یک سکه که در آن شانس «رو» آمدن دو برابر شانس «پشت» آمدن است را دو بار پرتاب می‌کنیم. اگر هر دو بار «رو» آمد، یک سکه سالم و گرنه دو سکه سالم پرتاب می‌کنیم. با چه احتمالی همه سکه‌هایی که پرتاب کرده‌ایم یکسان آمده‌اند؟

$$(1) \frac{7}{36} \quad (2) \frac{2}{9} \quad (3) \frac{1}{4} \quad (4) \frac{5}{18}$$

۳۴- برای ارسال تلگراف، از کدهایی شامل اعداد صفر و یک استفاده می‌کنیم. اعداد صفر و یک به نسبت ۲ به ۳ ارسال می‌شوند. هر عدد صفر با احتمال ۷۵ درصد بدون تغییر به مقصد می‌رسد و با احتمال ۲۵ درصد در طول مسیر به عدد یک تغییر پیدا می‌کند. هر عدد یک با احتمال ۸۰ درصد بدون تغییر به مقصد می‌رسد و با احتمال ۲۰ درصد در طول مسیر به عدد صفر تغییر پیدا می‌کند. اگر در مقصد عدد صفر دریافت کرده باشیم، با چه احتمالی در مبدأ هم عدد صفر ارسال شده است؟

$$(1) \frac{4}{7} \quad (2) \frac{5}{7} \quad (3) \frac{6}{7} \quad (4) \frac{11}{14}$$

۳۵- احتمال موفقیت یک دارویی که به تازگی تولید شده $\frac{1}{3}$ است. اگر ۵ بیمار را انتخاب کنیم، با چه احتمالی دارو باعث بهبودی حداقل یکی از بیماران می‌شود؟

$$(1) \frac{32}{243} \quad (2) \frac{211}{243} \quad (3) \frac{228}{243} \quad (4) \frac{242}{243}$$

۳۶- در نمودار میله‌ای تعدادی داده، اگر طول میله متناظر با دسته اول ۲ واحد افزایش یابد و طول مابقی میله‌ها ثابت بماند، زاویه مربوط به دسته اول همان داده‌ها در نمودار دایره‌ای، 48° بیشتر می‌شود. تعداد کل داده‌های اولیه برابر کدام یک از اعداد زیر می‌تواند باشد؟

$$(1) 8 \quad (2) 10 \quad (3) 12 \quad (4) 20$$

محل انجام محاسبات



۳۷- میانگین جملات اول تا شانزدهم دنباله هندسی $1, \sqrt{2}, 2, \dots$ تقریباً چند برابر مجموع دو جمله اول است؟

- (۱) ۸ (۲) ۱۲ (۳) ۱۶ (۴) ۳۲

۳۸- اگر میانه داده‌های $11, 12, 14, 17, a, 20$ برابر $15/5$ باشد، چند مقدار طبیعی دورقمی برای a قابل قبول نیست؟

- (۱) ۵ (۲) ۶ (۳) ۷ (۴) ۸

۳۹- داده‌های $1, 1, 2, 3, x, y$ مد ندارند. اختلاف چارک اول و چارک سوم این داده‌ها کدام است؟

- (۱) $0/5$ (۲) ۱ (۳) $1/5$ (۴) ۲

۴۰- در جدول فراوانی زیر، میانگین و میانه برابراند. مقدار a برابر و مقدار مد برابر است.

x_i	۳	۵	۷	۸
f_i	۲	۳	۱	a

(۱) $8 - 4$

(۲) $5 - 3$

(۳) $5 - 2$

(۴) $8 - 5$

محل انجام محاسبات

فیزیک یازدهم

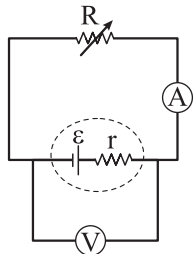
۴۱- روی یک اتوی برقی اعداد 220 V و 880 W نوشته شده است. به ترتیب از راست به چپ، حداقل جریانی که سیم اتصال به برق این اتوی برقی باید بتواند از خود عبور دهد، چند آمپر است و مقاومت الکتریکی این وسیله چند اهم است؟

- (۱) $4, 55$ (۲) $5, 55$ (۳) $4, 50$ (۴) $5, 50$

۴۲- روی یک لامپ رشته‌ای، اعداد 90 W و 240 V نوشته شده است. اگر این لامپ را با اختلاف پتانسیل V روشن کنیم، انرژی مصرفی در آن در مدت یک شبانه‌روز، 96 kWh خواهد بود، V چند ولت است؟ (مقاومت لامپ را در حالت روشن ثابت در نظر بگیرید.)

- (۱) 240 (۲) 200 (۳) 160 (۴) 120

۴۳- توان خروجی باتری مدار شکل زیر، به ازای جریان‌های عبوری 1 A و 5 A از آن، یکسان است. در این مدار اگر مقداری که ولت‌سنج آرمانی نشان می‌دهد، $\frac{1}{3}$ برابر نیرو محرکه باتری باشد، آمپرسنج آرمانی چند آمپر را نشان می‌دهد؟



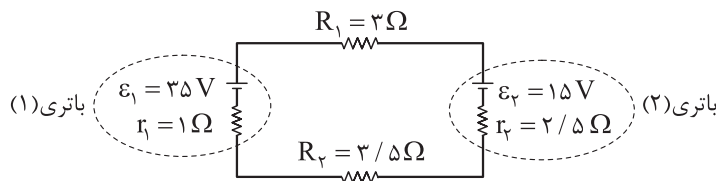
- (۱) $1/5$

- (۲) 2

- (۳) 3

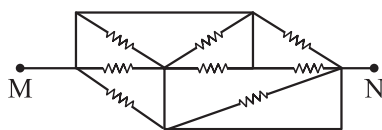
- (۴) 4

۴۴- در مدار شکل زیر، چند درصد از توان ورودی به باتری (۲) به صورت انرژی شیمیایی در آن ذخیره می‌شود؟



- (۱) 80 (۲) 75 (۳) 60 (۴) 50

۴۵- در شکل زیر، اگر مقدار هر یک از مقاومت‌ها برابر R باشد، مقاومت معادل بین دو نقطه M و N چند برابر R است؟



- (۲) $\frac{1}{7}$

- (۴) $\frac{1}{5}$

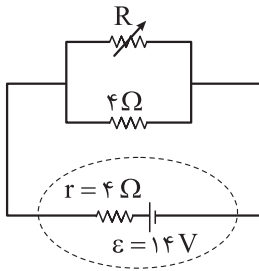
- (۱) $\frac{1}{8}$

- (۳) $\frac{1}{6}$

محل انجام محاسبات

۴۶- در مدار شکل زیر، در مدتی که مقاومت متغیر به طور پیوسته از 4Ω تا 12Ω افزایش می‌یابد، بیشینه توان

خروجی باتری چند وات است؟



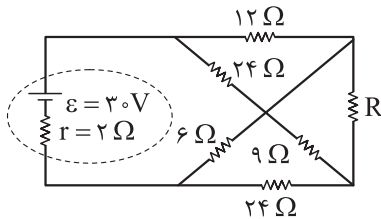
(۱) $12/25$

(۲) 12

(۳) $11/5$

(۴) 11

۴۷- در مدار شکل زیر، اگر اختلاف پتانسیل الکتریکی دو سر باتری، برابر $26V$ باشد، مقاومت R چند اهم است؟



(۱) 24

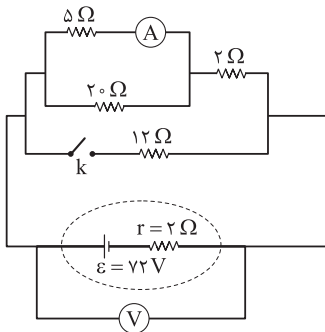
(۲) 18

(۳) 12

(۴) 9

۴۸- در مدار شکل زیر، اگر کلید k را وصل کنیم، مقداری که آمپرسنج آرمانی و ولتسنج آرمانی نشان می‌دهند، به

ترتیب چند آمپر و چند ولت تغییر می‌کنند؟



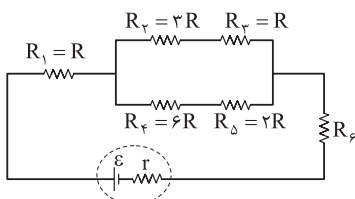
(۱) $6, 0/8$

(۲) $6, 1$

(۳) $8, 0/8$

(۴) $8, 1$

۴۹- در مدار شکل زیر، اگر توان مصرفی مقاومت R_p با توان مصرفی مقاومت R_g برابر باشد، مقاومت R_g چند برابر R است؟



(۱) $\frac{3}{2}$

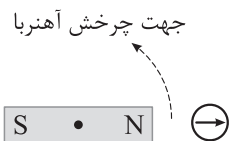
(۲) $\frac{4}{3}$

(۳) $\frac{5}{4}$

(۴) $\frac{5}{3}$

محل انجام محاسبات

۵۰- یک آهنربای میله‌ای روی سطح افقی میزی قرار دارد. مطابق شکل یک قطب‌نما را روی میز، مقابل قطب N آهنربا قرار می‌دهیم. اگر آهنربا را روی میز، حول محوری که از مرکز آن و عمود بر میز می‌گذرد، در جهت پادساعتگرد بچرخانیم، در طی این حرکت، عقربه مغناطیسی، چند درجه و در چه جهتی می‌چرخد؟



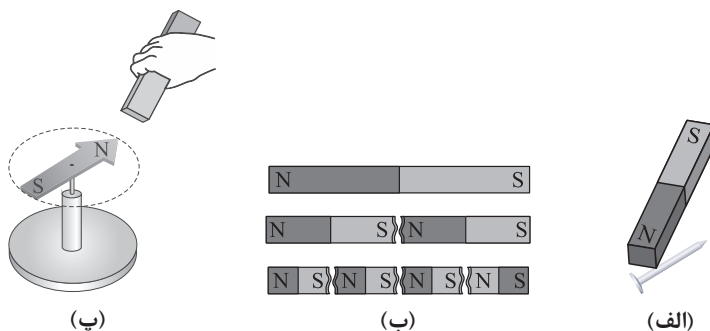
(۱) ۱۸۰°، ساعتگرد

(۲) ۱۸۰°، پادساعتگرد

(۳) ۳۶۰°، ساعتگرد

(۴) ۳۶۰°، پادساعتگرد

۵۱- چه تعداد از موارد زیر درباره شکل‌های (الف)، (ب) و (پ)، درست است؟



• شکل الف: هنگامی که یک آهنربای دائمی برای چندین بار و در جهت‌های مختلف روی یک سوزن ته‌گرد کشیده می‌شود، سوزن برای مدتی آهنربا می‌شود.

• شکل ب: قطب‌های مغناطیسی همواره به صورت زوج ظاهر می‌شوند.

• شکل پ: آهنربا از سر قطب N به عقربه مغناطیسی نزدیک شده است.

(۱) صفر (۲) ۱ (۳) ۲ (۴) ۳

۵۲- شکل‌های زیر مسیر حرکت یک الکترون را در عبور از یک میدان مغناطیسی یکنواخت عمود بر صفحه کاغذ نشان می‌دهد. اگر نیروی مغناطیسی، تنها نیروی وارد بر الکترون باشد، جهت میدان مغناطیسی در شکل‌های (۱) و (۲) به ترتیب از راست به چپ، کدام است؟



(۱) درون سو - برون سو

(۲) برون سو - درون سو

(۳) برون سو - برون سو

(۴) درون سو - درون سو

محل انجام محاسبات

۵۳- در شکل زیر، ذره باردار با جرم ناچیز و تندی $v = 3 \text{ km/s}$ ، در امتداد محور x وارد فضایی می شود که میدان های یکنواخت $B = 1500 \text{ G}$ و $\vec{E}$ وجود دارد، برای این که ذره در همان امتداد محور x به حرکت خود ادامه دهد، $\vec{E}$ بر حسب



نیوتون بر کولن کدام است؟

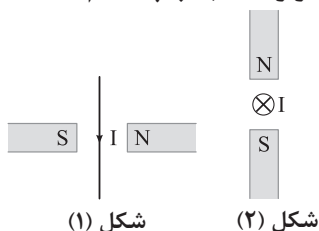
(۱) $500 \vec{j}$

(۲) $-500 \vec{j}$

(۳) $450 \vec{j}$

(۴) $-450 \vec{j}$

۵۴- جهت نیروی مغناطیسی وارد بر سیم حامل جریان در شکل های (۱) و (۲)، به ترتیب از راست به چپ کدام است؟



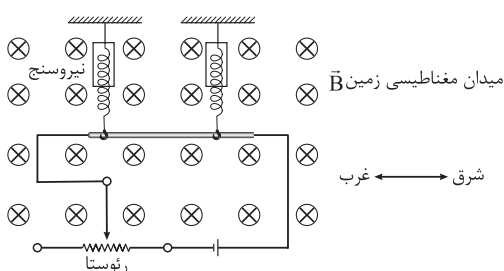
(۱) $\rightarrow, \odot$

(۲) $\leftarrow, \odot$

(۳) $\rightarrow, \otimes$

(۴) $\leftarrow, \otimes$

۵۵- در شکل زیر، سیمی به طول 1 m و جرم $4/5 \text{ g}$ ، حامل جریان الکتریکی 100 A ، با دو نیروسنج فنری که به دو انتهای آن بسته شده اند، به طور افقی و در راستای غرب - شرق، عمود بر میدان مغناطیسی یکنواخت زمین به بزرگی $50 \mu\text{T}$ قرار دارد. اگر با تغییر مقاومت رئوستا، جریان عبوری از سیم دو برابر شود، مقداری که هر یک از نیروسنج ها



نشان می دهند، چند درصد و چگونه تغییر می کند؟ ($g = 10 \text{ m/s}^2$)

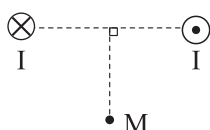
(۱) 10% ، افزایش می یابد.

(۲) 10% ، کاهش می یابد.

(۳) 20% ، افزایش می یابد.

(۴) 20% ، کاهش می یابد.

۵۶- در شکل زیر از دو سیم بلند و موازی، جریان های الکتریکی یکسان عمود بر صفحه کاغذ عبور می کند. نوع نیروی مغناطیسی بین این دو سیم و جهت میدان مغناطیسی خالص ناشی از آن ها در نقطه M واقع بر عمود منصف خط واصل دو



سیم به ترتیب کدام است؟

(۱) جاذبه، $\downarrow$

(۲) دافعه، $\uparrow$

(۳) جاذبه، $\uparrow$

(۴) دافعه، $\downarrow$

محل انجام محاسبات

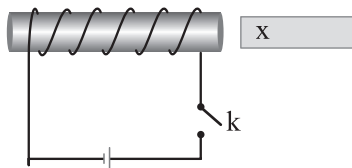
۵۷- شعاع دو حلقه رسانا، یکسان و جریان الکتریکی عبوری از آن‌ها برابر است. حلقه‌ها به صورت هم مرکز قرار دارند و سطح آن‌ها بر هم عمود است. اگر جریان عبوری از یکی از حلقه‌ها نصف و جریان عبوری از حلقه دیگر دو برابر شود، اندازه میدان مغناطیسی در مرکز مشترک حلقه‌ها چند برابر می‌شود؟

- (۱) $\sqrt{5}$ (۲) $\frac{\sqrt{5}}{2}$ (۳) $\frac{\sqrt{17}}{2}$ (۴) $\frac{\sqrt{34}}{4}$

۵۸- شعاع پیچه مسطح A، ۲ برابر شعاع پیچه مسطح B و جریان الکتریکی عبوری از پیچه B، ۲ برابر جریان الکتریکی عبوری از پیچه A است. اگر اندازه میدان مغناطیسی پیچه B در مرکزش، ۴ برابر اندازه میدان مغناطیسی پیچه A در مرکزش باشد، طول سیم استفاده شده برای ساخت پیچه B، چند برابر طول سیم استفاده شده برای ساخت پیچه A است؟

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۴ (۴) ۸

۵۹- در شکل زیر با بسته شدن کلید k، آهنربای میله‌ای توسط آهنربای الکتریکی جذب می‌شود. نوع قطب انتهای x آهنربای میله‌ای و جهت میدان مغناطیسی در داخل آهنربای الکتریکی به ترتیب کدام است؟



- (۱) N، ←
(۲) S، ←
(۳) N، →
(۴) S، →

۶۰- سیم لوله‌ای به طول ۳۰ cm، دارای ۲۰۰ حلقه است و از آن جریان الکتریکی ۴ A عبور می‌کند. اندازه میدان مغناطیسی درون سیم لوله چند گاوس است؟ ($\mu_0 = 12 \times 10^{-7} \frac{T.m}{A}$)

- (۱) ۱۶ (۲) ۳۲ (۳) ۱۶۰ (۴) ۳۲۰

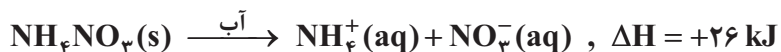
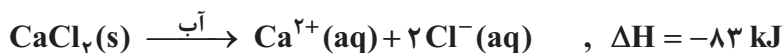
محل انجام محاسبات

شیمی یازدهم

۶۱- کدام گزینه درست است؟

- (۱) محلول هیدروژن پراکسید در حضور دو قطره پتاسیم کلرید، به سرعت تجزیه شده و گاز اکسیژن تولید می‌کند.
- (۲) فلزهای قلیایی متفاوت به سرعت با آب سرد واکنش می‌دهند که این امر نشان‌دهنده تأثیر دما بر سرعت واکنش است.
- (۳) الیاف آهن داغ و سرخ‌شده در هوا با سرعت کمی می‌سوزد، در حالی که همان مقدار الیاف آهن در یک ارلن پر از اکسیژن به سرعت می‌سوزد.
- (۴) پاشیدن گرد آهن بر روی شعله برخلاف قرارگرفتن آن در کپسول چینی، موجب سوختن آن می‌شود که این امر نشان‌دهنده تأثیر سطح تماس بر سرعت واکنش است.

۶۲- با توجه به معادله‌های گرمایشی زیر، از انحلال برای گرم کردن محل آسیب‌دیده بدن استفاده می‌شود و انحلال ۲ / ۰ مول از ماده دیگر در آب، کیلوژول گرما با محیط مبادله می‌شود.



۶۳- یک ورزشکار برای تأمین انرژی خود در روند مسابقه، ۲۰۰ گرم از نوعی شکلات را مصرف کرده است که ۳۰ درصد جرمی آن را پروتئین تشکیل داده است و به میزان برابری چربی و کربوهیدرات در آن وجود دارد. اگر این شکلات را فقط حاوی کربوهیدرات، چربی و پروتئین در نظر بگیریم، این شکلات چند کیلوکالری انرژی برای بدن ورزشکار تأمین می‌کند؟ (ارزش سوختی کربوهیدرات و پروتئین $17 \text{ kJ} \cdot \text{g}^{-1}$ و چربی $38 \text{ kJ} \cdot \text{g}^{-1}$ است و $1 \text{ cal} = 4 / 2 \text{ kJ}$)

۴۷۰۰ (۲)

۱۱۹۰ (۱)

۴۸۷۰ (۴)

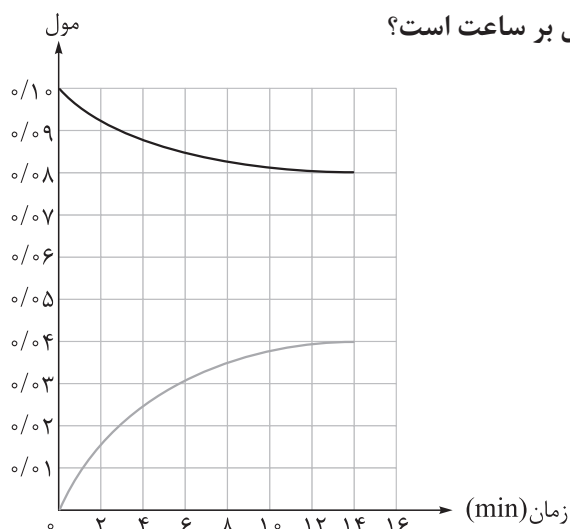
۱۱۵۹ (۳)

۶۴- کدام گزینه نادرست است؟

- (۱) چهره آشکار ردپای غذا نشان می‌دهد که سالانه حدود ۳۰٪ غذایی که در جهان فراهم می‌شود، به مصرف نمی‌رسد.
- (۲) یکی از چهره‌های پنهان ردپای غذا، شامل همه منابعی است که در تهیه غذا از آغاز تا سر سفره سهم داشته‌اند.
- (۳) تولید گاز کربن دی‌اکسید به عنوان چهره پنهان ردپای غذا، به مراتب کم‌تر از سوختن سوخت‌ها در خودروها و کارخانه‌ها است.
- (۴) در دهه‌های گذشته، الگوی توسعه پایدار و الگوی مصرف غذا دو مسیر متفاوت را طی کرده و میزان مساحت مورد نیاز برای تأمین اقلام ضروری افزایش یافته است.

محل انجام محاسبات

۶۵- با توجه به نمودار زیر که به تغییرات مول‌های واکنش‌دهنده و فراورده نسبت به زمان در واکنش $X(g) \rightarrow 2Z(g)$ مربوط است، سرعت متوسط مصرف X در ۱۲ دقیقه اول، چند مول بر ساعت است؟



(۱) ۰/۱

(۲) ۰/۲

(۳) ۰/۳

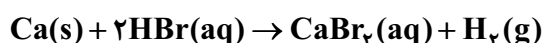
(۴) ۰/۴

۶۶- چند مورد از مطالب زیر، درست است؟

- آهنک واکنش، معیاری برای زمان ماندگاری مواد است و اگر در گستره‌ای از زمان بیان شود، به آن سرعت واکنش می‌گویند.
- در شرایط یکسان، آهنک تجزیه سلولز موجود در کاغذ، بسیار بیشتر از آهنک زنگ‌زدن آهن است.
- هر چه گستره زمانی انجام یک تغییر کوچک‌تر باشد، آهنک انجام آن تندتر است و زمان انجام واکنش‌ها، گستره‌ای از چند صدم ثانیه تا چند سده می‌باشد.
- زنگار حاصل از واکنش زنگ‌زدن آهن، ترکیبی ترد و شکننده است و در شرایط یکسان، آهنک تغییر رنگ میوه‌ها از آهنک تغییر رنگ یک ظرف نقره‌ای، کم‌تر است.

(۱) دو (۲) سه (۳) یک (۴) چهار

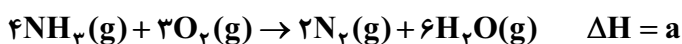
۶۷- کدام مورد درباره واکنش ۲ گرم کلسیم با ۱۰۰ میلی‌لیتر محلول ۸/۱ درصد جرمی هیدروبرمیک اسید با چگالی 1.2 g.mL^{-1} ، درست است؟ ($\text{Br} = 80, \text{Ca} = 40, \text{H} = 1: \text{g.mol}^{-1}$)



- (۱) اگر حجم ظرف واکنش نصف شود، سرعت مصرف کلسیم دو برابر می‌شود.
- (۲) با افزودن ۵۰ میلی‌لیتر محلول ۱/۲ مولار HBr به مخلوط اولیه واکنش، سرعت تولید گاز هیدروژن، ۱/۵ برابر می‌شود.
- (۳) با افزودن سه میلی‌لیتر آب خالص به محلول اولیه، سرعت واکنش کاهش می‌یابد.
- (۴) با افزودن کاتالیزگر مناسب، سرعت تولید گاز هیدروژن همانند شمار مول‌های نهایی آن، افزایش می‌یابد.

محل انجام محاسبات

۶۸- با توجه به واکنش‌های زیر، ΔH واکنش $۴NH_3(g) + ۶NO(g) \rightarrow ۵N_2(g) + ۶H_2O(g)$ کدام است؟



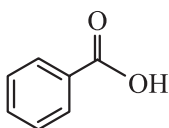
$$a - ۳b + ۳c \quad (۴)$$

$$a - ۳b - ۳c \quad (۳)$$

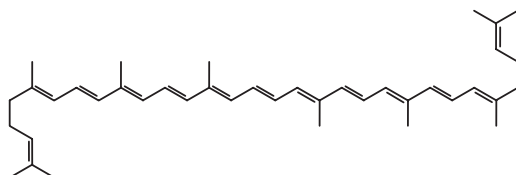
$$a + ۳b + ۳c \quad (۲)$$

$$a + ۳b - ۳c \quad (۱)$$

۶۹- با توجه به ساختارهای داده‌شده، کدام گزینه درست است؟



(۱)



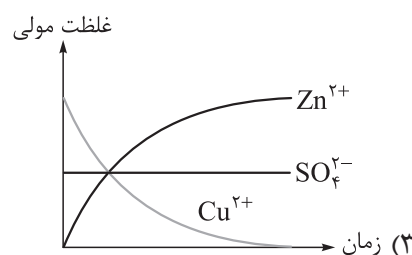
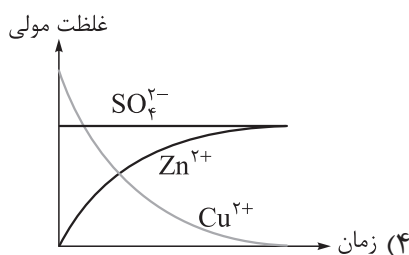
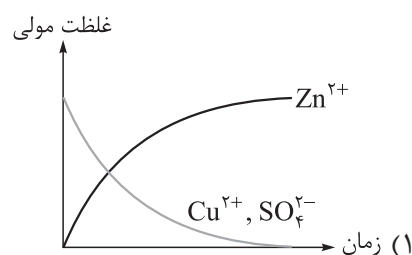
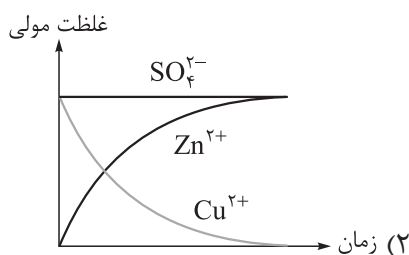
(۲)

(۱) ترکیب (۱) بنزالدهید است که به عنوان نگهدارنده، واکنش‌هایی که منجر به فساد مواد غذایی می‌شود را کاهش می‌دهد.
(۲) ترکیب (۲) لیکوپن با فرمول $C_{۴۰}H_{۵۶}$ است که فعالیت رادیکال‌ها را کاهش داده و به عنوان بازدارنده باعث به دام افتادن آن‌ها می‌شود.

(۳) ریزمغذی‌های آروماتیک مانند ترکیب (۲)، در تمشک، توت‌فرنگی و گوجه‌فرنگی یافت می‌شوند.

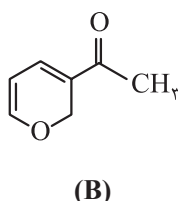
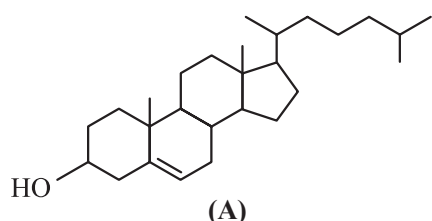
(۴) ترکیب (۱) ایزومر ماده‌آلی موجود در بادام بوده و عضوی از خانواده‌ی کربوکسیلیک اسیدها است.

۷۰- کدام نمودار را می‌توان به تغییر غلظت یون‌ها در واکنش مقدار کافی فلز روی با محلول مس (II) سولفات نسبت داد؟



محل انجام محاسبات

۷۱- با توجه به ترکیب‌های داده‌شده، پاسخ درست پرسش‌های زیر به ترتیب کدام است؟



الف) کم‌ترین آنتالپی پیوند در ترکیب B مربوط به کدام پیوند است؟

ب) کدام گروه عاملی در ترکیب‌های A و B وجود ندارد؟

پ) شمار اتم‌های هیدروژن در ترکیب B، چند برابر شمار الکترون‌های ناپیوندی در ترکیب A است؟

(۱) C—C، آلدئید، ۲ (۲) C—O، اتری، ۴

(۳) C—O، اتری، ۲ (۴) C—C، آلدئید، ۴

۷۲- ۱۰ مول گاز آمونیاک را در یک ظرف ۵ لیتری در شرایط مناسب قرار می‌دهیم تا به گازهای نیتروژن و هیدروژن تجزیه شود. اگر سرعت متوسط واکنش در یک دقیقه اول، برابر $10^{-3} \text{ mol.L}^{-1}.\text{s}^{-1}$ باشد، در پایان دقیقه اول، چند مول گاز در ظرف وجود دارد؟

(۱) ۱۳ (۲) ۱۲ (۳) ۱۱ (۴) ۸

۷۳- درستی یا نادرستی کدام گزینه با دیگر گزینه‌ها متفاوت است؟

(۱) تهیه هیدروژن پراکسید از گازهای هیدروژن و اکسیژن به طور مستقیم ممکن نیست.

(۲) قدرمطلق آنتالپی واکنش تولید ۱ مول کربن دی‌اکسید از کربن مونوکسید، بیشتر از سوختن ناقص ۱ مول کربن است.

(۳) تأمین شرایط بهینه برای تولید گاز متان از واکنش میان گرافیت و گاز هیدروژن در آزمایشگاه، بسیار آسان است.

(۴) با انجام واکنش: $2\text{CO(g)} + 2\text{NO(g)} \rightarrow 2\text{CO}_2\text{(g)} + \text{N}_2\text{(g)}$ ، گازهای آلاینده به گازهایی پایدارتر تبدیل می‌شوند.

۷۴- کلسیم کربنات با محلول هیدروکلریک اسید در دمای 45°C و فشار ۱ اتمسفر مطابق معادله موازنه‌نشده زیر واکنش می‌دهد. مطابق جدول داده‌شده، در چه ثانیه‌ای واکنش به پایان می‌رسد و به تقریب، چند مول هیدروکلریک اسید در این واکنش مصرف شده است؟ ($\text{C}=12, \text{O}=16:\text{g.mol}^{-1}$)

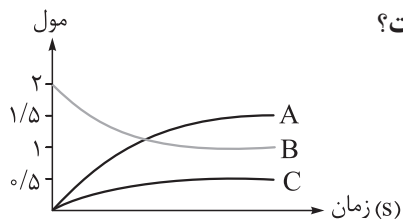


زمان (s)	۰	۱۵	۳۰	۴۵	۶۰	۷۵	۹۰
جرم مخلوط واکنش (گرم)	۴۹/۶۵	۴۹/۰۰	۴۸/۳۸	۴۷/۷۸	۴۷/۲۰	۴۷/۲۰	۴۷/۲۰

(۱) ۶۰ - ۱۱ / ۰ (۲) ۷۵ - ۰ / ۰۵۵

(۳) ۶۰ - ۰ / ۰۵۵ (۴) ۷۵ - ۰ / ۱۱

محل انجام محاسبات



۷۵- با توجه به نمودار داده شده، چند مورد از مطالب زیر به طور حتم درست است؟

الف) مجموع ضرایب استوکیومتری مواد A و C، دو برابر B است.

ب) می توان آن را به واکنش: $2\text{HF(g)} \rightarrow \text{H}_2\text{(g)} + \text{F}_2\text{(g)}$ ، نسبت داد.

پ) با افزایش دمای مخلوط اولیه واکنش، مجموع شمار مول های نهایی مواد در مخلوط پایانی واکنش به بیش از ۳ مول می رسد.

ت) رابطه $R_{\text{واکنش}} = \frac{-\Delta n_A}{3\Delta t} = \frac{\Delta n_B}{2\Delta t} = \frac{-\Delta n_C}{\Delta t}$ ، برقرار است.

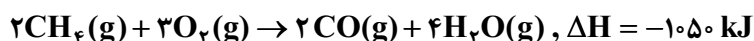
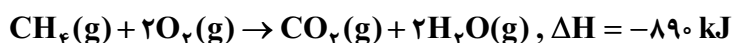
۴ (۴)

۳ (۳)

۲ (۲)

۱ (۱)

۷۶- بر اثر سوختن متان در مقداری اکسیژن، مخلوطی از گازهای CO، CO₂ و H₂O پدید می آید. اگر نسبت شمار مولکول های CO₂ به CO در مخلوط گازی فراورده ها برابر ۳ باشد، با توجه به واکنش های زیر، گرمای حاصل از سوختن ۴/۰ مول متان در این شرایط برابر با چند کیلوژول است؟



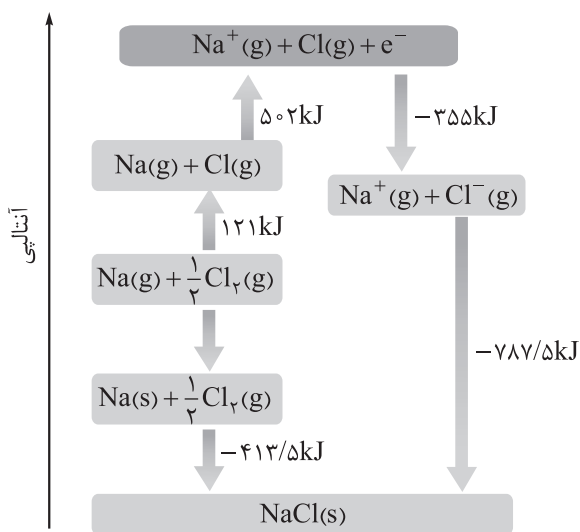
۴۱۵/۵ (۴)

۳۹۱/۵ (۳)

۳۱۹/۵ (۲)

۲۸۱/۵ (۱)

۷۷- واکنش تشکیل سدیم کلرید از عنصرهای سازنده اش را می توان یک فرایند ۵ مرحله ای در نظر گرفت. با توجه به نمودار



زیر، پاسخ درست پرسش های زیر در کدام گزینه آمده است؟

الف) آنتالپی فرازش ۱ مول سدیم، چند کیلوژول است؟

ب) با ۱۴۲ kJ گرما، چند مول Cl⁻(g) را می توان به Cl(g) تبدیل کرد؟

۱۷۰ - ۰/۲ (۱)

۱۰۶ - ۰/۴ (۲)

۱۰۶ - ۰/۲ (۳)

۱۷۰ - ۰/۴ (۴)

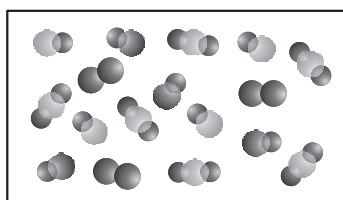
محل انجام محاسبات

۷۸- در رابطه با واکنش موازنه نشده: $A \rightarrow B$ ، کدام مورد درست است؟

- (۱) اگر سرعت متوسط تغییر جرم ماده A، برابر با سرعت متوسط تغییر جرم ماده B باشد، ضریب استوکیومتری آنها در معادله واکنش نیز برابر خواهد بود.
- (۲) اگر ضریب استوکیومتری دو ماده A و B در معادله واکنش با هم برابر باشد، تغییر شمار مول‌های آنها در واحد زمان نیز با هم برابر است.
- (۳) اگر نسبت اندازه شیب منحنی دو ماده A و B در نمودار «غلظت - زمان»، برابر ۵/۰ باشد، هیچ‌گاه در یک لحظه معین غلظت آنها با هم برابر نخواهد بود.
- (۴) اگر جرم مولی ماده A، ۳ برابر جرم مولی ماده B باشد، سرعت تغییر جرم ماده B در واحد زمان، ۳ برابر سرعت تغییر جرم ماده A است.

۷۹- واکنش: $2CO(g) + 2NO(g) \rightarrow 2CO_2(g) + N_2(g)$, $\Delta H = -750 \text{ kJ}$ در یک ظرف سربسته الیتری با ۴/۰ مول از هریک از واکنش‌دهنده‌ها شروع می‌شود. اگر ترکیب درصد اجزای واکنش درون ظرف، ۳۰ دقیقه پس از شروع واکنش به صورت زیر باشد، به طور میانگین در هر دقیقه چند کیلوژول گرما آزاد شده است و سرعت متوسط مصرف NO، به تقریب چند مولار بر ثانیه است؟

(هر ذره در شکل معادل ۰/۰۴ مول ماده است. $N_2 = \bullet\bullet$ / $NO = \bullet\bullet$ / $CO = \bullet\bullet$ / $CO_2 = \bullet\bullet\bullet$)



$$(1) \quad 1/33 \times 10^{-4}, 3$$

$$(2) \quad 1/33 \times 10^{-4}, 4$$

$$(3) \quad 6/67 \times 10^{-5}, 3$$

$$(4) \quad 6/67 \times 10^{-5}, 4$$

۸۰- با توجه به جدول‌های زیر، اختلاف آنتالپی واکنش $C_2H_4(g) + H_2(g) \rightarrow C_2H_6(g)$ ، به کمک آنتالپی‌های سوختن و آنتالپی‌های پیوند، برحسب کیلوژول کدام است و کدام عدد برای آنتالپی واکنش داده شده برای یک گزارش علمی، معتبرتر است؟

پیوند	آنتالپی پیوند ($\text{kJ} \cdot \text{mol}^{-1}$)
C - C	۳۴۵
C = C	۶۱۹
C - H	۴۱۵
H - H	۴۳۶

ماده	آنتالپی سوختن ($\text{kJ} \cdot \text{mol}^{-1}$)
C_2H_4	-۱۴۱۰
C_2H_6	-۱۵۶۰
H_2	-۲۷۵

- (۱) ۵، -۱۲۵ (۲) ۱۰، -۱۲۵ (۳) ۵، -۱۲۰ (۴) ۱۰، -۱۲۰

محل انجام محاسبات

مهم ترین ویژگی های آزمون های خیلی سبز در پایه های دهم و یازدهم:

- ۱- برگزاری دست کم یک آزمون در ماه بر اساس روال تدریس در مدرسه
- ۲- برگزاری آزمون های ویژه برای زمان های خاص (میان ترم، ترم، پس از عیدو...)
- ۳- امکان جبران عقب ماندگی ها یا دوره مطالب برای تثبیت آن ها

پاسخ نامه تشریحی آزمون را ساعت ۱۶ از صفحه
شخصی خودتان در سایت آزمون خیلی سبز دریافت کنید.



azmoon.kheilisabz.com

اساتید، مشاوران و دانش آموزان گرامی؛

نظرات، پیشنهادات، انتقادات و بازخوردهای خود نسبت به سؤالات این آزمون را می توانید
از طریق آیدی @Kheilisabz_edit در همه پیام رسان ها با ما به اشتراک بگذارید.



پاسخ نامه آزمون آزمایشی خیلی سبز



مرحله هشتم

پایه یازدهم

تاریخ برگزاری: ۱۴۰۳/۲۴/اسفند

سال تحصیلی ۱۴۰۳-۰۴

نام درس	طراحان به ترتیب حروف الفبا
حسابان	فرشاد حسن زاده - عادل حسینی - محمدرضا راسخ - مجید رفعتی - علی شهبازی محمد گودرزی - میلاد منصوری - حسین نادری - محمدسجاد نقیه - جهانبخش نیکنام
هندسه	امیرحسین ابومحبوب - محمدطاهر شعاعی - حسین هاشمی طاهری - صبا مهدوی
آمار و احتمال	مسعود شفیعی - عطا صادقی - سروش موئینی
فیزیک	یاشار انگوتی - نوید شاهی
شیمی	یاسر راش - فاطمه صیقلی - امیرحسین مسلمی

نام درس	مسئول درس	گزینشگر	مؤلف پاسخ نامه	کارشناسان علمی	ویراستاران به ترتیب حروف الفبا
حسابان	محمدسجاد نقیه	محمدسجاد نقیه	عادل حسینی	محمد گودرزی	سهیل تقی زاده سعید خان بابائی منصور زرکش اصفهانی
هندسه	امیرحسین ابومحبوب	امیرحسین ابومحبوب	فرزانه خاکپاش	زهرا جالینوسی	منصور زرکش اصفهانی ماهان فنی فر ابوالفضل ناصری
آمار و احتمال	مسعود شفیعی	مسعود شفیعی	مسعود شفیعی	امیرحسین ابومحبوب سعید قندچی علیرضا کاظمی بقا	منصور زرکش اصفهانی فرزانه خاکپاش ماهان فنی فر
فیزیک	نوید شاهی	یاشار انگوتی	علیرضا عبداللہی	علیرضا عبداللہی	مریم گلی حسنلو ماهان فنی فر امیر محمودی انزایی
شیمی	یاسر عبداللہی	امیرحسین مسلمی	امیرحسین مسلمی	یاسر عبداللہی	احسان رحیمی متین قنبری صدرا عبادی

سرپرست محتوایی: فاطمه آقاجانیپور



Azmoon.kheilisabz.com

آزمون آزمایشی خلی سبز

سرپرست تولید	الناز علی یاری زاده
ویراستاران فنی	نیلوفر اعتمادی - نیوشا پیمان - راضیه سادات خلدی نسب زهره صفری - فاطمه علی اکبری - محیا غنی فرد زهره فرهادی مهر - محمد محمودی - مریم مسلمی زاده نادره نازآوری - ساعده نمازی
رسم	مونا آندستا ندا فخاری سارا گنجی آزادپور
صفحه آرایی	صدف امام - مریم حسین زاده سپیده سخائی - الهام سهرابی - طاهره صادق نژاد مائده صبری - نیلوفر فرخجسته - مهدیه گل پور دریا لطفی - لیلا نعمت پور



مقدار x از معادله $\log_7 \Delta \cdot \log_5 \gamma \cdot \log_7 \lambda = \log_x (\Delta x^2 + \epsilon x)$ کدام است؟

۱

۱ (۴)

۲ (۳)

۳ (۲)

۶ (۱)

۱

مفهوم لگاریتم:

درس Box

$$\log_b a = c \Leftrightarrow b^c = a \quad (a, b > 0, b \neq 1)$$

ویژگی‌های لگاریتم:

ردیف	ویژگی	مثال
۱	$\log_a a = 1$	$\log_5 5 = 1$
۲	$\log_a 1 = 0$	$\log_{19} 1 = 0$
۳	$\log a + \log b = \log ab$	$\log 3 + \log 5 = \log 15, \log 12 = \log 3 + \log 4$
۴	$\log a - \log b = \log \frac{a}{b}$	$\log 21 - \log 3 = \log 7, \log 4 = \log 28 - \log 7$
۵	$\log_{b^n} a^m = \frac{m}{n} \log_b a$	$\log_{5^2} 3^2 = \frac{2}{3} \log_5 3$
۶	$a^{\log_c b} = b^{\log_c a}$	$3^{\log_{\sqrt{3}} 16} = 16^{\log_{\sqrt{3}} 3} = 16^2$
۷	$\log_b a = \frac{\log a}{\log b}$	$\log_7 6 = \frac{\log 6}{\log 7}$

از ویژگی ۷ نتیجه می‌گیریم که:

$$\log_b a = \frac{\log_a a}{\log_a b} = \frac{1}{\log_a b} \Rightarrow \boxed{\log_b a = \frac{1}{\log_a b}}$$

نکته

پاسخ خیلی تشریحی ✓ گام اول: طبق ویژگی‌های درس باکس سمت چپ تصاویر را ساده می‌کنیم:

$$\log_7 \Delta \times \log_5 \gamma \times \log_7 \lambda = \frac{\log \Delta}{\log 7} \times \frac{\log \gamma}{\log 5} \times \frac{\log \lambda}{\log 7} = \log_7 \lambda = \log_7 2^3 = 3$$

$$\log_x (\Delta x^2 + \epsilon x) = 3$$

گام دوم: پس در اصل تساوی مقابل را داریم:

$$x^3 = \Delta x^2 + \epsilon x$$

که یعنی:

گام سوم: پس باید معادله زیر را حل کنیم:

$$x^3 - \Delta x^2 - \epsilon x = x(x^2 - \Delta x - \epsilon) \Rightarrow x(x - \epsilon)(x + 1) = 0 \Rightarrow x = 0, \epsilon, -1$$

با توجه به شرط‌های تعریف لگاریتم مقادیر صفر و -1 غیر قابل قبول هستند.

اگر $\log_{\Delta} 3 = c, \log_{\Gamma} 9 = b, \log_{\Delta} 4 = a$ باشد، حاصل $\frac{ab}{c}$ کدام است؟

۲

۱ (۴)

۲ (۳)

۳ (۲)

۴ (۱)

۲

پاسخ خیلی تشریحی ✓ گام اول: ابتدا تا حد امکان عبارتهای داده شده را ساده تر می نویسیم:

$$\log_{\Delta} 4 = \log_{\Delta} 2^2 = 2 \log_{\Delta} 2 = a \Rightarrow \log_{\Delta} 2 = \frac{a}{2}$$

$$\log_{\Gamma} 9 = \log_{\Gamma} 3^2 = 2 \log_{\Gamma} 3 = \log_{\Gamma} 3 = b$$

$$\log_{\Gamma\Delta} 3 = \log_{\Delta} 3 = \frac{1}{\Gamma} \log_{\Delta} 3 = c \Rightarrow \log_{\Delta} 3 = \Gamma c \Rightarrow \log_{\Gamma} \Delta = \frac{1}{\Gamma c}$$

دقت کنید که چون در عبارت خواسته سؤال، c در مخرج است، تساوی آخر را عکس کردیم.

گام دوم: حال اگر طرفین ۳ تساوی به دست آمده را در هم ضرب کنیم داریم:

$$\underbrace{\log_{\Delta} 2 \times \log_{\Gamma} 3 \times \log_{\Gamma\Delta} \Delta}_{\log_{\Delta} 3} = \frac{a}{2} \times b \times \frac{1}{\Gamma c}$$

برابر ۱ است.

$$\Rightarrow 1 = \frac{ab}{\Gamma c} \Rightarrow \frac{ab}{c} = \Gamma$$

دامنه تابع $f(x) = \log_{8-x}(3x+k)$ شامل ۴ عدد صحیح است. کمترین مقدار صحیح k کدام است؟

۳

۴) -۸

۳) -۷

۲) -۶

۱) -۵



دامنه توابع لگاریتمی: برای به دست آوردن دامنه توابع به فرم $y = \log_{g(x)} f(x)$ ، باید اشتراک مجموعه جواب‌های نامساوی‌های زیر را به دست آوریم:

دستی Box

$$\begin{cases} f(x) > 0 \\ g(x) > 0 \\ g(x) \neq 1 \end{cases}$$

پاسخ خیلی تشریحی ✓ گام اول: با توجه به شرط‌های تعریف لگاریتم، برای دامنه تابع f داریم:

$$\begin{cases} 3x+k > 0 \Rightarrow x > -\frac{k}{3} \\ 8-x > 0 \Rightarrow x < 8 \\ 8-x \neq 1 \Rightarrow x \neq 7 \end{cases}$$

پس دامنه تابع مجموعه‌ای به صورت $\{x \mid -\frac{k}{3} < x < 8, x \neq 7\}$ است.

گام دوم: این مجموعه شامل ۴ عدد صحیح است. این اعداد صحیح باید ۶، ۵، ۴ و ۳ باشند، پس $-\frac{k}{3}$ باید در بازه $[2, 3]$ قرار بگیرد:

$$2 \leq -\frac{k}{3} < 3 \Rightarrow -9 < k \leq -6$$

در این بازه کمترین مقدار صحیح $k = -8$ است.

۴ اگر $2^a = 3^b = 7^c = \sqrt[4]{42}$ باشد، حاصل $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$ کدام است؟

۱ (۴)

۲ (۳)

۳ (۲)

۴ (۱)



پاسخ خیلی تشریحی ✓ گام اول: از طرفین تساوی‌های مفروض سؤال، لگاریتم می‌گیریم:

$$2^a = \sqrt[4]{42} \Rightarrow a = \log_2 \sqrt[4]{42}$$

$$3^b = \sqrt[4]{42} \Rightarrow b = \log_3 \sqrt[4]{42}$$

$$7^c = \sqrt[4]{42} \Rightarrow c = \log_7 \sqrt[4]{42}$$

گام دوم: طبق ویژگی‌های لگاریتم $\frac{1}{a}$ ، $\frac{1}{b}$ و $\frac{1}{c}$ به ترتیب برابرند با: $\log_{\sqrt[4]{42}} 2$ ، $\log_{\sqrt[4]{42}} 3$ و $\log_{\sqrt[4]{42}} 7$

پس داریم:

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \log_{\sqrt[4]{42}} (2 \times 3 \times 7) = \log_{\sqrt[4]{42}} 42 = 4$$

نکته در حالت کلی داریم:

$$a^{p_1} = a^{p_2} = a^{p_3} = \dots = a^{p_n} = \sqrt[m]{a_1 a_2 a_3 \dots a_n} \Rightarrow \frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} + \dots + \frac{1}{p_n} = m$$

اگر $\log_3 3 = a$ و $\log_3 5 = b$ باشد، مقدار $\log_3 8$ کدام است؟

(۲) $3(1-a-b)$

(۱) ab

(۴) $3(1-a+b)$

(۳) $a+b$

Hint از $\log_3 (2 \times 3 \times 5) = 1$ شروع کنید.

ویژگی‌های لگاریتم

ردیف	مثال	ویژگی
۱	$\log_5 5 = 1$	$\log_a a = 1$
۲	$\log_{10} 1 = 0$	$\log_a 1 = 0$
۳	$\log 3 + \log 5 = \log 15$, $\log 12 = \log 3 + \log 4$	$\log_O a + \log_O b = \log_O ab$
۴	$\log 21 - \log 3 = \log 7$, $\log 4 = \log 28 - \log 7$	$\log_O a - \log_O b = \log_O \frac{a}{b}$
۵	$\log_5^{12} = \frac{12}{5} \log_5 5$	$\log_{b^n}^a = \frac{m}{n} \log_b^a$
۶	$3^{\log_{\sqrt{3}} 16} = 16^{\log_{\sqrt{3}} 3} = 16^2$	$a^{\log_c b} = b^{\log_c a}$
۷	$\log_7 6 = \frac{\log 6}{\log 7}$	$\log_b a = \frac{\log_O a}{\log_O b}$

پاسخ خیلی تشریحی ✓ گام اول: می‌دانیم $\log_3 3 = 1$ است:

$$\log_3 (2 \times 3 \times 5) = 1$$

$$\Rightarrow \log_3 2 + \log_3 3 + \log_3 5 = 1 \xrightarrow{\text{فرض سوال}} \log_3 2 + a + b = 1$$

$$\Rightarrow \log_3 2 = 1 - a - b$$

گام دوم: حال می‌رویم سراغ محاسبه $\log_3 8$:

$$\log_3^8 = \log_3^{2^3} = 3 \log_3 2 = 3(1 - a - b)$$

از ویژگی ۷ نتیجه می‌گیریم که:

$$\log_b a = \frac{\log_a a}{\log_a b} = \frac{1}{\log_a b} \Rightarrow \log_b a = \frac{1}{\log_a b}$$



دامنه تابع $f(x) = \log(\log_7 x - \log_x 2)$ به صورت $(a, b) \cup (c, +\infty)$ است. حاصل $a + b + c$ کدام است؟

۶

۲/۵ (۴)

۲ (۳)

۳/۵ (۲)

۳ (۱)

۶

پاسخ خیلی تشریحی ✓ گام اول: هر کدام از دو عبارت $\log_7 x$ و $\log_x 2$ باید قابل تعریف باشند:

$$\begin{cases} \log_7 x : x > 0 \\ \log_x 2 : \begin{cases} x > 0 \\ x \neq 1 \end{cases} \end{cases}$$

پس تا این جای کار $x \in (0, +\infty) - \{1\}$ است.

گام دوم: حالا باید $\log_7 x - \log_x 2$ را مثبت کنیم:

$$\log_7 x - \frac{1}{\log_7 x} > 0 \Rightarrow \frac{(\log_7 x)^2 - 1}{\log_7 x} > 0$$

$\log_7 x$ را t می‌گیریم و عبارت $\frac{t^2 - 1}{t}$ را تعیین علامت می‌کنیم:

t		-۱	۰	۱	
$\frac{t^2 - 1}{t}$	-		+		+

و محدوده قابل قبول ما $t \in (-1, 0) \cup (1, +\infty)$ است.

$$\Rightarrow \begin{cases} -1 < \log_7 x < 0 \Rightarrow \frac{1}{7} < x < 1 \\ \text{یا} \\ \log_7 x > 1 \Rightarrow x > 7 \end{cases}$$

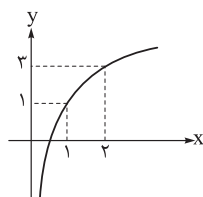
پس باید $x \in (\frac{1}{7}, 1) \cup (7, +\infty)$ باشد.

گام سوم: اگر اشتراک دو مجموعه به دست آمده را حساب کنیم، دامنه تابع f به دست می‌آید:

$$D_f = [(0, +\infty) - \{1\}] \cap [(\frac{1}{7}, 1) \cup (7, +\infty)] = (\frac{1}{7}, 1) \cup (7, +\infty)$$

پس با توجه به فرض صورت سؤال $a = \frac{1}{7}$, $b = 1$, $c = 7$ در نتیجه $a + b + c = 3/5$ است.

در شکل زیر نمودار تابع f با ضابطه $f(x) = a \log_b x + c$ رسم شده است. اگر a عددی طبیعی باشد، مقدار $f(2^a)$ کدام می‌تواند باشد؟



۲ (۱)

۴ (۲)

۲/۵ (۳)

۵ (۴)



پاسخ خیلی تشریحی ✓ گام اول: نمودار تابع از نقاط $(1, 1)$ و $(2, 3)$ گذر می‌کند، پس مختصات آن‌ها را در ضابطه تابع جای گذاری می‌کنیم:

$$f(1) = a \log_b 1 + c = 0 + c = 1 \Rightarrow c = 1$$

$$\xrightarrow{c=1} f(2) = a \log_b 2 + 1 = 3 \Rightarrow a \log_b 2 = 2 \quad (*)$$

گام دوم: $f(2^a)$ را حساب می‌کنیم:

$$f(2^a) = a \log_b 2^a + 1 = a \times a \log_b 2 + 1$$

$$\xrightarrow{(*)} f(2^a) = 2a + 1$$

و تنها عدد فرد گزینه‌ها ۵ است.

هر هفته ۱۰ درصد از میزان آب موجود در یک مخزن تبخیر می‌شود. بعد از تقریباً چند روز، مقدار آب موجود در مخزن به $\frac{1}{4}$ مقدار اولیه می‌رسد؟ ($\log 3 \approx 0.47, \log 2 \approx 0.3$)

۷۰ (۴)

۵۵ (۳)

۷۵ (۲)

۶۰ (۱)



پاسخ خیلی تشریحی ✓ گام اول: هر هفته ۱۰ درصد از حجم آب مخزن تبخیر می‌شود، پس هر هفته ۹۰ درصد یا 0.9 حجم مقدار قبلی باقی می‌ماند، در نتیجه پس از گذشت n هفته حجم باقی‌مانده آب مخزن، از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$V_n = V_0 (0.9)^n$$

گام دوم: حالا باید V_n را برابر $\frac{1}{4} V_0$ قرار دهیم و مقدار n را به دست آوریم:

$$\frac{1}{4} V_0 = V_0 (0.9)^n \xrightarrow{\div V_0} \frac{1}{4} = (0.9)^n$$

از طرفین تساوی بالا لگاریتم می‌گیریم:

$$\Rightarrow \underbrace{\log \frac{1}{4}}_{\log 2^{-2}} = \log 0.9^n \Rightarrow -2 \log 2 = n \log \underbrace{0.9}_{\frac{9}{10}}$$

$$\Rightarrow -2 \log 2 = n(\log 3^2 - \log 10) \Rightarrow -2 \log 2 = n(2 \log 3 - 1) \Rightarrow n = \frac{2 \log 2}{1 - 2 \log 3}$$

گام سوم: حالا مقادیر تقریبی مفروض سؤال را جای‌گذاری می‌کنیم:

$$n = \frac{2(0.3)}{1 - 2(0.47)} = \frac{0.6}{0.06} = 10$$

یعنی پس از ۱۰ هفته یا ۷۰ روز حجم آب مخزن $\frac{1}{4}$ می‌شود.

انرژی آزاد شده در زلزله شهر A، ۵۰۰ برابر انرژی آزاد شده در زلزله دیگری در شهر B است. اختلاف شدت این دو زلزله چند ریشتر است؟

$$(\log 2 = 0.3)$$

$$2/1 (4)$$

$$1/8 (3)$$

$$1/5 (2)$$

$$1/2 (1)$$



درس Box

ریشتر، مقیاسی برای اندازه گیری بزرگی زمین لرزه و نماد میزان انرژی آزاد شده در زلزله است. اگر بزرگی زمین لرزه برابر M در مقیاس ریشتر باشد، مقدار انرژی آزاد شده بر حسب ارگ (Erg) از رابطه زیر حساب می شود:

$$\log E = 11/8 + 1/5 M$$

$$\Rightarrow \frac{E_2}{E_1} = 10^{1/5(M_2 - M_1)} = \sqrt[5]{10000}^{(M_2 - M_1)}$$

هر Erg معادل 10^{-7} ژول است.

پاسخ خیلی تشریحی ✓ طبق رابطه درس باکس برای مقایسه دو زلزله داریم:

$$\frac{E_A}{E_B} = 10^{1/5(M_A - M_B)} = 500$$

$$1/5(M_A - M_B) = \log(5 \times 100) = \log 5 + 2$$

از طرفین لگاریتم می گیریم:

$$\Rightarrow 1/5(M_A - M_B) = 1 - \log 2 + 2 = 3 - \log 2 \Rightarrow M_A - M_B = \frac{3 - \log 2}{1/5}$$

$$\xrightarrow{\log 2 \approx 0.3} M_A - M_B = \frac{3 - 0.3}{1/5} = \frac{2.7}{1/5} = \frac{9}{5} = 1.8$$

۱۰. جواب معادله $\log_3(\log_2 x) + 3 \log_9(\log_x 2) = 7$ کدام است؟

$$3^{2-7} (2)$$

$$2^{3-14} (4)$$

$$2^{37} (1)$$

$$3^{2-3/5} (3)$$



Hint  $\log_2 x$ رو به متغیر جدید بگیر.

پاسخ خیلی تشریحی ✓ **گام اول:** بهتر است $\log_2 x$ را متغیر جدیدی مثل t در نظر بگیریم. در آن صورت $\log_x 2$ برابر $\frac{1}{t}$ یا t^{-1} است و معادله به صورت زیر در خواهد آمد:

$$\log_3 t + 3 \log_9 t^{-1} = 7$$

$$\Rightarrow \log_3 t - \frac{3}{3} \log_3 t = 7 \Rightarrow -\frac{1}{3} \log_3 t = 7 \Rightarrow \log_3 t = -21$$

$$\Rightarrow t = 3^{-21}$$

$$\log_2 x = 3^{-21} \Rightarrow x = 2^{3^{-21}}$$

گام دوم: حال مقدار x را می‌یابیم:

اگر شعاع یک دایره برابر ۱۰ باشد، مساحت قطاعی از آن با زاویه مرکزی یک رادیان کدام است؟

۷۵ (۴)

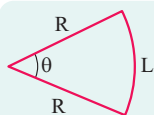
۲۰۰ (۳)

۱۰۰ (۲)

۵۰ (۱)



درس Box



برشی شبیه یک اسلایس کیک را مطابق شکل مقابل، یک قطاع از دایره می‌نامند:

این قطاع محدود به دو شعاع و یک کمان است.

اگر زاویه یک قطاع برحسب رادیان برابر θ باشد، مساحت آن از رابطه $S_{\theta} = \frac{1}{2}\theta R^2$ به دست می‌آید.

پاسخ خیلی تشریحی ✓ طبق درس باکس داریم:

$$S = \frac{1}{2}(1)(10)^2 = \frac{1}{2} \times 100 = 50$$

یک تسمه، دو قرقره به شعاع‌های ۵° و ۷۵° متر را به هم وصل کرده است. اگر قرقره کوچک‌تر ۱۸ متر را طی کرده باشد قرقره بزرگ‌تر چه زاویه‌ای برحسب رادیان دوران می‌کند؟

۴۸ (۴)

۳۶ (۳)

۲۴ (۲)

۱۲ (۱)



درس‌Box

اگر دو قرقره یا چرخ‌دنده توسط تسمه‌ای به هم وصل شده باشند، رابطه زیر بین زوایای دوران آن‌ها برقرار است:



$$\frac{R_2}{R_1} = \frac{\theta_1}{\theta_2} \text{ یا } R_1 \theta_1 = R_2 \theta_2$$

این یعنی قرقره کوچک‌تر، با سرعت بیشتری می‌چرخد. این مسئله در مورد چرخ‌های نامساوی تراکتور هم برقرار است.

پاسخ خیلی تشریحی ✓ طبق رابطه درس‌باکس باید معادله زیر را حل کنیم:

$$۱۸ = R_2 \times \theta_2 \Rightarrow \theta_2 = \frac{۱۸}{R_2} = \frac{۱۸}{\frac{۳}{۴}} = ۲۴ \text{ rad}$$

این $R_1 \theta_1$ قرقره کوچک است.

۱۳ اگر $-\frac{51\pi}{4} \text{ rad} = x + k \times 36^\circ$ باشد، مقدار x کدام می تواند باشد؟ ($k \in \mathbb{Z}$)

۲۴۵° (۴)

۲۲۵° (۳)

۱۳۵° (۲)

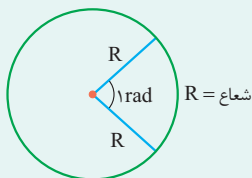
۴۵° (۱)



دانش Box

اندازه زاویه ها را می توان به دو گونه بیان کرد: برحسب درجه و برحسب رادیان.

رادیان چیست؟ یک رادیان اندازه زاویه مرکزی از یک دایره به شعاع R است، به طوری که طول کمان روبه رو به این زاویه برابر شعاع دایره باشد.



بین درجه (D) و رادیان (rad) رابطه زیر برقرار است:

$$\text{rad} = D \times \frac{\pi}{180^\circ} \Leftrightarrow D = \text{rad} \times \frac{180^\circ}{\pi}$$

یعنی برای تبدیل درجه به رادیان، زاویه را در $\frac{\pi}{180^\circ}$ ضرب می کنیم و برای تبدیل رادیان به درجه، زاویه را در $\frac{180^\circ}{\pi}$ ضرب می کنیم.

نکته یک رادیان تقریباً 57.3° است.

پاسخ خیلی تشریحی ✓ گام اول: ابتدا $-\frac{51\pi}{4} \text{ rad}$ را برحسب درجه می نویسیم:

$$-\frac{51\pi}{4} \text{ rad} = -\frac{51\pi}{4} \times \frac{180^\circ}{\pi} = -51 \times 45^\circ$$

گام دوم: حالا مقدار x را می یابیم:

$$-51 \times 45^\circ = -56 \times 45^\circ + 5 \times 45^\circ = -7 \times 36^\circ + 225^\circ$$

$$-7 \times 36^\circ + 225^\circ = x + k \times 36^\circ$$

پس داریم:

$$\Rightarrow x = (-k - 7) \times 36^\circ + 225^\circ = k' \times 36^\circ + 225^\circ$$

به ازای $k' = 0$ مقدار 225° برای x به دست می آید.

۱۴ اگر $x + y = \frac{\pi}{4}$ و $\sin(2x + y) = \frac{1}{4}$ باشد، حاصل $\frac{\cos y}{\tan x}$ کدام است؟

$\frac{\sqrt{3}}{3}$ (۴)

$\sqrt{3}$ (۳)

$\frac{\sqrt{2}}{2}$ (۲)

$\frac{1}{4}$ (۱)



درتس Box

نوشتن نسبت‌های مثلثاتی زوایای $\frac{k\pi}{4} \pm \alpha$ بر حسب زاویه α

مرحله (۱): اگر کمان از 2π بیشتر بود، مجاز هستیم مضارب 2π را از آن کم کنیم تا به زاویه‌ای در محدوده 0° تا 2π برسیم.

مرحله (۲): اگر π یا 2π داشتیم، نسبت مثلثاتی عوض نمی‌شود، ولی اگر $\frac{\pi}{4}$ یا $\frac{3\pi}{4}$ داشتیم، $\sin$ به $\cos$ و (بالعکس) و $\tan$ به $\cot$ (و بالعکس) تبدیل می‌شود.

مرحله (۳): α را زاویه‌ای در ربع اول (مثلاً 10°) در نظر می‌گیریم و با توجه به آن، محدوده زاویه $\frac{k\pi}{4} \pm \alpha$ را مشخص و علامت نسبت را تعیین می‌کنیم.

مثال: $\sin(\frac{7\pi}{4} - \alpha)$

مرحله (۱): از 2π ، $\frac{7\pi}{4}$ کم می‌کنیم.
 $\sin(\frac{7\pi}{4} - \alpha) = \sin(\frac{7\pi}{4} + \frac{3\pi}{4} - \alpha) = \sin(\frac{3\pi}{4} - \alpha)$

مرحله (۲): به خاطر $\frac{3\pi}{4}$ ، $\sin$ به $\cos$ تبدیل می‌شود.

مرحله (۳): با فرض $\alpha = 10^\circ$ زاویه $\frac{3\pi}{4} - \alpha$ می‌شود 26° که در ربع سوم قرار دارد و در این ربع $\sin$ منفی است.

$\sin(\frac{7\pi}{4} - \alpha) = -\cos \alpha$

$\uparrow$ مرحله ۲
 $\downarrow$ مرحله ۳

پاسخ خیلی تشریحی ✓ گام اول: در عبارت $2x + y$ ، عبارت $x + y$ را جدا می‌کنیم:

$2x + y = x + (x + y) = x + \frac{\pi}{4}$

پس داریم:

$\sin(x + \frac{\pi}{4}) = \cos x = \frac{1}{4} \Rightarrow \sin x = \pm \frac{\sqrt{3}}{4}$

گام دوم: حالا حاصل عبارت را حساب می‌کنیم. برای این کار به جای y عبارت $x - \frac{\pi}{4}$ را قرار می‌دهیم:

$\frac{\cos y}{\tan x} = \frac{\cos(\frac{\pi}{4} - x)}{\tan x} = \frac{\sin x}{\tan x} = \cos x = \frac{1}{4}$

پس حاصل عبارت $\frac{1}{4}$ است.

۱۵ حاصل $\frac{1}{1+\tan x} + \frac{1}{1+\tan(x+\frac{\pi}{4})} + \frac{1}{1+\tan(x+\pi)} + \dots + \frac{1}{1+\tan(x+\frac{11\pi}{4})}$ کدام است؟

(۲) $6 + \frac{12}{\tan x - \cot x}$

(۱) $6 + \frac{12}{\tan x + \cot x}$

(۴) $6 - \frac{12}{\tan x + \cos x}$

(۳) $6 - \frac{12}{\tan x - \cot x}$

پاسخ خیلی تشریحی ✓ گام اول: چون $\tan(x + \frac{(2k+1)\pi}{4}) = -\cot x$ و $\tan(x + k\pi) = \tan x$ ، پس عبارت به صورت زیر ساده می شود:

$$P = \frac{1}{1+\tan x} + \frac{1}{1-\cot x} + \frac{1}{1+\tan x} + \dots + \frac{1}{1-\cot x}$$

گام دوم: عبارت P شامل ۱۲ جمله است که هر کدام از جملات $\frac{1}{1+\tan x}$ و $\frac{1}{1-\cot x}$ ، ۶ بار تکرار می شوند، پس داریم:

$$P = 6 \left(\frac{1}{1+\tan x} + \frac{1}{1-\cot x} \right)$$

گام سوم: عبارت داخل پرانتز را ساده می کنیم:

$$\frac{1}{1+\tan x} + \frac{1}{1-\cot x} = \frac{1-\cot x + 1+\tan x}{(1+\tan x)(1-\cot x)} = \frac{2+\tan x - \cot x}{\tan x - \cot x} = \frac{2}{\tan x - \cot x} + 1$$

$$\Rightarrow P = 6 \left(1 + \frac{2}{\tan x - \cot x} \right) = 6 + \frac{12}{\tan x - \cot x}$$

۱۶ اگر $\frac{3\pi}{4} < x < \pi$, $\cos(\frac{\pi}{4} - x) = 3 \cos x - \sin x$ باشد، مقدار $\cos x$ کدام است؟

$-\frac{4}{5}$ (۴)

$-\frac{3}{5}$ (۳)

$-\frac{2}{3}$ (۲)

$-\frac{1}{5}$ (۱)



پاسخ خیلی تشریحی ✓ گام اول: ابتدا به جای $\cos(\frac{\pi}{4} - x)$ عبارت $\sin x$ را قرار می‌دهیم:

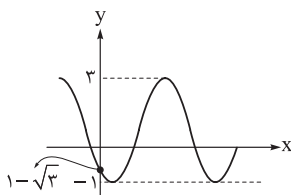
$$3 \sin x = 3 \cos x - \sin x \Rightarrow 4 \sin x = 3 \cos x \Rightarrow \tan x = \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{3}{4}$$

گام دوم: حالا از اتحاد $1 + \tan^2 \theta = \frac{1}{\cos^2 \theta}$ استفاده می‌کنیم:

$$1 + \tan^2 x = 1 + \frac{9}{16} = \frac{25}{16} = \frac{1}{\cos^2 x} \Rightarrow \cos^2 x = \frac{16}{25} \Rightarrow \cos x = \pm \frac{4}{5}$$

اما چون x در ربع سوم است و در این ربع کسینوس منفی است، مقدار $-\frac{4}{5}$ را می‌پذیریم.

در شکل زیر، قسمتی از نمودار تابع f با ضابطه $f(x) = a \sin(x - b) + c$ رسم شده است. اگر $\frac{3\pi}{4} < b < 2\pi$ باشد، مقدار



$f(\frac{53\pi}{6})$ کدام است؟

$\frac{3}{4}$ (۱)

$-\frac{1}{4}$ (۲)

۲ (۳)

$-\frac{1}{4}$ (۴)



می‌دانیم $\sin$ و $\cos$ همواره در بازه $[-1, 1]$ تغییر می‌کنند:

$$-1 \leq \sin \leq 1$$

$$-1 \leq \cos \leq 1$$

این یعنی برای محاسبه برد تابع $y = a \sin + b$ یا $y = a' \cos + b'$ کافی است به جای $\sin$ و $\cos$ مقادیر -1 و 1 را جای‌گذاری کنیم تا کم‌ترین و بیشترین مقدار تابع (نه الزاماً به ترتیب) به دست آید:

$$\Rightarrow \begin{cases} y_{\min} = -|a| + b \\ y_{\max} = |a| + b \end{cases}$$

گام اول: ما انتقال افقی نمودار توابع مثلثاتی را به اندازه کمانی حاده خیلی بهتر بلدیم (در این جا باید به اندازه b ، نمودار تابع $y = \sin x$ را به سمت راست انتقال دهیم) اما انتقال افقی این سؤال به اندازه یک کمان حاده نیست، پس ما به شکل زیر عمل می‌کنیم:

$$b = \frac{3\pi}{4} + \underbrace{\theta}_{\text{کمان حاده}}$$

$$\Rightarrow f(x) = a \sin(x - (\frac{3\pi}{4} + \theta)) + c = a \sin(x - \theta - \frac{3\pi}{4}) + c$$

$$\Rightarrow f(x) = a \cos(x - \theta) + c$$

گام دوم: حالا ساده‌تر شد؛ به این شکل که ابتدا نمودار تابع $y = \cos x$ را به اندازه θ به سمت راست انتقال می‌دهیم. بعد عرض نقاط را در a ضرب می‌کنیم و سپس نمودار را c واحد به بالا انتقال می‌دهیم.

با توجه به درس‌بکس، بیشترین و کم‌ترین مقدار تابع را می‌نویسیم:

$$\begin{cases} y_{\max} = |a| + c = 3 \\ y_{\min} = -|a| + c = -1 \end{cases} \Rightarrow |a| = 2, c = 1$$

اما چون در نزدیکی $x = 0$ مینیمم تابع رخ داده است، پس $a < 0$ و $a = -2$ قابل قبول است.

گام سوم: عرض از مبدأ تابع برابر $1 - \sqrt{3}$ شده است:

$$f(0) = a \cos(-\theta) + c = 1 - \sqrt{3}$$

$$\xrightarrow{a=-2, c=1} \xrightarrow{\cos(-\theta)=\cos\theta} -2\cos\theta + 1 = 1 - \sqrt{3} \Rightarrow \cos\theta = \frac{\sqrt{3}}{2} \xrightarrow{\theta \text{ حاده}} \theta = \frac{\pi}{6}$$

گام چهارم: پس ضابطه تابع f به صورت $f(x) = -2 \cos(x - \frac{\pi}{6}) + 1$ است. داریم:

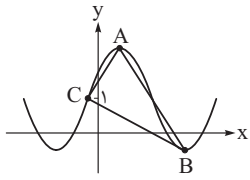
$$f(\frac{53\pi}{6}) = -2 \cos(\frac{53\pi}{6} - \frac{\pi}{6}) + 1 = -2 \cos(\frac{52\pi}{6}) + 1$$

$$= -2 \cos(9\pi - \frac{\pi}{3}) + 1 = -2(-\cos\frac{\pi}{3}) + 1 = -2(-\frac{1}{2}) + 1 = 2$$

درس‌Box

پاسخ خیلی تشریحی ✓

بخشی از نمودار تابع $f(x) = k \sin(x + \frac{\pi}{3}) + 1$ در شکل زیر رسم شده است. اگر مثلث ABC در رأس A قائمه باشد، مقدار $f(k)$ کدام است؟ (A و B نقاط ماکزیمم و مینیمم تابع هستند.)



$$\frac{\pi}{3} + 1 \quad (2)$$

$$\frac{\pi}{6} + 1 \quad (4)$$

$$\frac{\pi}{3} + 1 \quad (1)$$

$$\frac{\pi}{6} + 1 \quad (3)$$



پاسخ خیلی تشریحی ✓ گام اول: برای رسم نمودار تابع f ، نمودار تابع $y = \sin x$ را $\frac{\pi}{3}$ واحد به سمت چپ می‌بریم، سپس عرض نقاط روی آن را k برابر می‌کنیم و با یک جمع می‌کنیم. پس مختصات نقاط A ، B و C به صورت زیر به دست می‌آید:

$$(0, 0) \xrightarrow{\text{واحد انتقال به چپ } \frac{\pi}{3}} (-\frac{\pi}{3}, 0) \xrightarrow{\text{عرض در } k} (-\frac{\pi}{3}, 0) \xrightarrow{+1} C(-\frac{\pi}{3}, 1)$$

$$(\frac{\pi}{2}, 1) \xrightarrow{\text{واحد انتقال به چپ } \frac{\pi}{3}} (\frac{\pi}{6}, 1) \xrightarrow{\text{عرض در } k} (\frac{\pi}{6}, k) \xrightarrow{+1} A(\frac{\pi}{6}, k+1)$$

$$(\frac{3\pi}{2}, -1) \xrightarrow{\text{واحد انتقال به چپ } \frac{\pi}{3}} (\frac{7\pi}{6}, -1) \xrightarrow{\text{عرض در } k} (\frac{7\pi}{6}, -k) \xrightarrow{+1} B(\frac{7\pi}{6}, -k+1)$$

گام دوم: حالا برای این که زاویه A قائم باشد، باید شیب پاره‌خط‌های AB و AC قرینه و معکوس هم باشند:

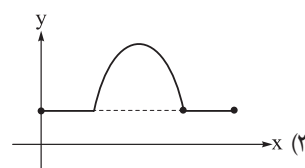
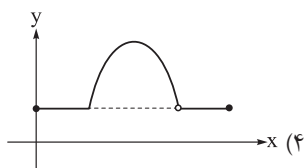
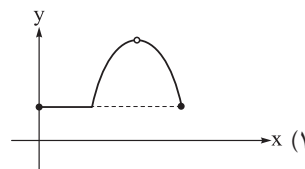
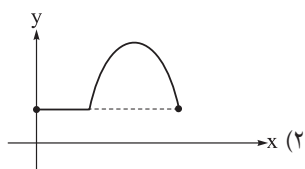
$$\left. \begin{aligned} m_{AB} &= \frac{-k+1-k-1}{\frac{7\pi}{6}-\frac{\pi}{6}} = \frac{-2k}{\pi} \\ m_{AC} &= \frac{k+1-1}{\frac{\pi}{6}-(-\frac{\pi}{3})} = \frac{k}{\frac{\pi}{2}} = \frac{2k}{\pi} \end{aligned} \right\} \xrightarrow{m_{AB} \cdot m_{AC} = -1} \frac{-4k^2}{\pi^2} = -1$$

$$\Rightarrow k^2 = \frac{\pi^2}{4} \xrightarrow{k>0} k = \frac{\pi}{2}$$

گام سوم: پس ضابطه تابع $f(x) = \frac{\pi}{2} \sin(x + \frac{\pi}{3}) + 1$ است و داریم:

$$f(k) = f(\frac{\pi}{2}) = \frac{\pi}{2} \sin(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{3}) + 1 = \frac{\pi}{2} \cos \frac{\pi}{3} + 1 = \frac{\pi}{4} + 1$$

۱۹ اگر $f(x) = \frac{\cos^2 x}{1 + \sin x}$ و $g(x) = \cos(x + \frac{3\pi}{4})$ باشد، نمودار تابع $|f| + |g|$ روی بازه $[0, 2\pi]$ کدام است؟



پاسخ خیلی تشریحی ✓ گام اول: مشخص است که ابتدا باید دامنه‌ها را به دست آوریم و ضابطه‌ها را ساده کنیم:

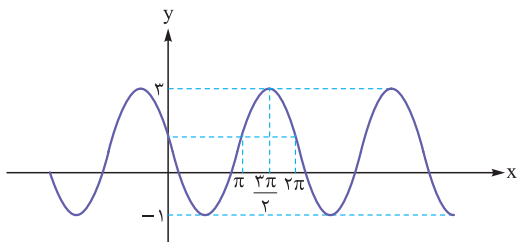
$$f: \begin{cases} D_f: \sin x \neq -1 \Rightarrow x \neq \frac{3\pi}{4} \Rightarrow D_f = [0, 2\pi] - \{\frac{3\pi}{4}\} \\ f(x) = \frac{1 - \sin^2 x}{1 + \sin x} = \frac{(1 - \sin x)(1 + \sin x)}{1 + \sin x} = 1 - \sin x \end{cases}$$

$$g: \begin{cases} D_g = \mathbb{R} \\ g(x) = \cos(x + \frac{3\pi}{4}) = \sin x \end{cases}$$

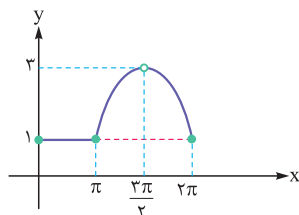
گام دوم: پس باید نمودار تابع $h(x) = |1 - \sin x| + |\sin x|$ را در دامنه $[0, 2\pi] - \{\frac{3\pi}{4}\}$ رسم می‌کنیم.

$$\begin{aligned} 1 - \sin x \geq 0 &\Rightarrow h(x) = 1 - \sin x + |\sin x| \\ \Rightarrow h(x) &= \begin{cases} 1 & ; 0 \leq x \leq \pi \\ 1 - 2\sin x & ; \pi \leq x < \frac{3\pi}{4} \\ 1 - 2\sin x & ; \frac{3\pi}{4} < x \leq 2\pi \end{cases} \end{aligned}$$

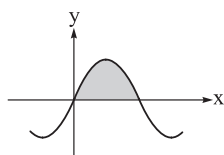
گام سوم: برای رسم نمودار تابع $y = 1 - 2\sin x$ ، عرض نقاط روی نمودار تابع $y = \sin x$ را در -2 ضرب می‌کنیم و سپس با ۱ جمع می‌کنیم:



پس نمودار تابع h در دامنه $[0, 2\pi] - \{\frac{3\pi}{4}\}$ به صورت زیر است:



۲۰. اگر مطابق شکل، مساحت هر طاق نمودار تابع $g(x) = \sin x$ در بازه $[0, \pi]$ برابر ۲ باشد، مساحت سطح محدود به نمودار تابع $f(x) = \sin x + |\sin x|$ و محور x روی بازه $[-2\pi, 2\pi]$ کدام است؟

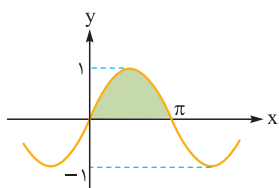


۴ (۱)

۸ (۲)

۱۲ (۳)

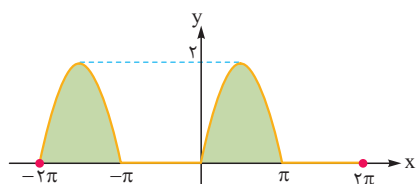
۱۶ (۴)



پاسخ خیلی تشریحی ✓ گام اول: در ابتدا فرض سؤال را به صورت زیر ترجمه می کنیم:

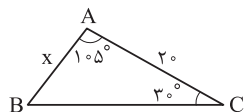
مساحت طاق رنگی برابر ۲ است.

گام دوم: حالا نمودار تابع $f(x) = \sin x + |\sin x|$ را در بازه $[-2\pi, 2\pi]$ رسم می کنیم:



$$f(x) = \begin{cases} 0, & \sin x < 0 \\ 2 \sin x, & \sin x \geq 0 \end{cases}$$

می بینیم که این نمودار ۲ طاق دارد که مساحت هر کدام از آنها، به دلیل حضور ضریب ۲ در ضابطه تابع $y = 2 \sin x$ ، دو برابر مساحت هر طاق نمودار $y = \sin x$ است، در نتیجه مساحت طاق های رنگی برابر ۸ است.



۲۱ در شکل مقابل، مقدار x کدام است؟

۱) $10\sqrt{2}$

۲) 10

۳) $10\sqrt{3}$

۴) 15

مشاوره قضیه سینوس‌ها یکی از قضیه‌های مهم فصل ۳ کتاب درسی هندسه (۲) است که اثبات آن در سه حالت مثلث حاده‌الزاویه، قائم‌الزاویه و منفرجه‌الزاویه در کتاب ارائه شده است. اثبات این قضیه و مسائل عددی آن (به طور مستقیم یا ترکیبی با قضیه کسینوس‌ها) می‌توانند از سوالات امتحان نهایی باشند.

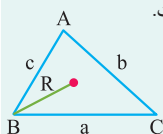
Hint

درس‌Box

اندازه زاویه B را محاسبه کرده و قضیه سینوس‌ها را در مثلث ABC بنویسید.

قضیه سینوس‌ها

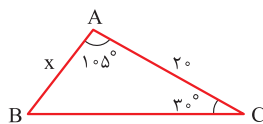
در هر مثلث دلخواه، نسبت اندازه هر ضلع به سینوس زاویه روبه‌روی آن، برابر است با قطر دایره محیطی مثلث.



بنابراین اگر اندازه‌های اضلاع مثلث ABC ، برابر a ، b ، c و $AB = c$ و $AC = b$ باشند، آن‌گاه داریم:

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$$

پاسخ خیلی تشریحی ✓ **گام اول:** مجموع زوایای داخلی هر مثلث برابر 180° است، پس داریم:



$$\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180^\circ \Rightarrow 105^\circ + \hat{B} + 3^\circ = 180^\circ \Rightarrow \hat{B} = 45^\circ$$

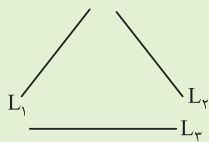
گام دوم: طبق قضیه سینوس‌ها در مثلث ABC داریم:

$$\frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} \Rightarrow \frac{2^\circ}{\sin 45^\circ} = \frac{x}{\sin 3^\circ} \Rightarrow \frac{2^\circ}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{x}{\frac{1}{2}}$$

$$\Rightarrow x = \frac{2^\circ}{\frac{\sqrt{2}}{2}} \times \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = 10\sqrt{2}$$

سه خط L_1 ، L_2 و L_3 مطابق شکل زیر در صفحه مفروض‌اند. با کدام تبدیل می‌توان پاره‌خطی به طول ۶ سانتی‌متر رسم کرد به طوری که

دو سر آن روی خط L_1 و L_2 بوده و موازی L_3 باشد؟



(۱) بازتاب

(۲) دوران

(۳) انتقال

(۴) تجانس

مشاوره این سؤال مشابه تمرین ۳ صفحه ۵۴ کتاب درسی هندسه (۲) طراحی شده است. این تمرین مربوط به کاربردهای تبدیل در ترسیم‌های هندسی است و می‌تواند یکی از سؤالات احتمالی امتحان نهایی باشد.

درسی Box

مهم‌ترین ویژگی‌های تبدیل‌ها که در ترسیم‌های هندسی و یا اثبات مسائل به کار می‌روند، عبارت‌اند از:

(۱) در هر یک از تبدیل‌ها، تبدیل‌یافته خط راست، خط راست است.

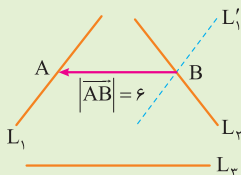
(۲) طول پاره‌خط و اندازه زاویه تحت انتقال، بازتاب و دوران ثابت می‌ماند.

(۳) اگر دو خط موازی باشند، هر یک از آن‌ها می‌تواند تحت یک انتقال، دوران 180° یا بازتاب نسبت به محور موازی بر روی دیگری تصویر شود.

(۴) یک خط می‌تواند تحت یک انتقال با بردار صفر، دوران 180° یا بازتاب نسبت به محور عمود بر آن، بر روی خودش تصویر شود.

(۵) عمودمنصف هر پاره‌خط AB ، محور تقارن بازتابی است که $A \rightarrow B$ و $B \rightarrow A$.

(۶) اگر دو خط متقاطع باشند، هر یک از آن‌ها می‌تواند تحت یک دوران یا بازتاب بر دیگری تصویر شود.



با استفاده از انتقال، خط L_1 را با یک بردار به اندازه ۶ و موازی خط L_3 انتقال می‌دهیم

تا خط L_2 را در نقطه B قطع کند. سپس نقطه B را با همین بردار و در خلاف جهت آن

انتقال می‌دهیم تا نقطه A حاصل شود که روی خط L_1 قرار دارد. پاره‌خط AB جواب

مسئله است.

پاسخ خیلی تشریحی ✓

دایره $C(O, 6)$ و نقطه M به فاصله ۱۲ واحد از O مفروض اند. دایره C' را در تجانس به مرکز M و نسبت تجانس $\frac{1}{3}$ بر دایره C تصویر می کنیم. وضعیت دو دایره C و C' نسبت به هم چگونه است؟

(۱) متخارج

(۲) متداخل

(۳) متقاطع

(۴) مماس خارج

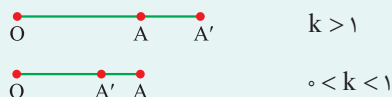


Hint

درس Box

در تجانس با نسبت k ، طول همه پاره خطها $|k|$ برابر می شود.

(۱) در تجانس به مرکز O و نسبت k ($k > 0$)، اگر A' مجانس نقطه A باشد، آن گاه A و A' در یک طرف O قرار می گیرند. در صورتی که $k > 1$ ، A بین O و A' و در صورتی که $0 < k < 1$ ، A' بین O و A قرار دارد.



(۲) دو دایره $C(O, R)$ و $C'(O', R')$ را در نظر بگیرید. با فرض $OO' = d$ داریم:

(الف) اگر $d > R + R'$ ، دو دایره متخارج اند.

(ب) اگر $d = R + R'$ ، دو دایره مماس خارج اند.

(پ) اگر $|R - R'| < d < R + R'$ ، دو دایره متقاطع اند.

(ت) اگر $d = |R - R'|$ ، دو دایره مماس داخل اند.

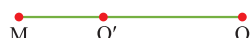
(ث) اگر $d < |R - R'|$ ، دو دایره متداخل اند.

پاسخ خیلی تشریحی ✓ گام اول: فرض کنید نقطه O' مرکز دایره C' و شعاع این دایره باشد. در این صورت طبق تعریف تجانس داریم:

$$|k| = \frac{MO'}{MO} \Rightarrow \frac{1}{3} = \frac{MO'}{12} \Rightarrow MO' = 4$$

$$|k| = \frac{R'}{R} \Rightarrow \frac{1}{3} = \frac{R'}{6} \Rightarrow R' = 2$$

گام دوم:



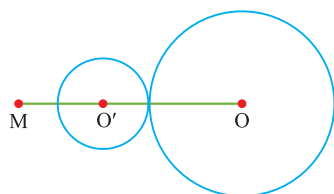
مطابق شکل، نقطه O' بین O و M قرار دارد، پس داریم:

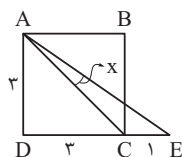
$$OO' = MO - MO' = 12 - 4 = 8$$

با توجه به مقادیر شعاع های دو دایره و طول خط المרכזین داریم:

$$8 = 6 + 2 \Rightarrow OO' = R + R'$$

پس دو دایره مماس خارج اند.





$$\frac{\sqrt{3}}{12} \quad (2)$$

$$\frac{\sqrt{2}}{5} \quad (4)$$

$$\frac{\sqrt{3}}{6} \quad (1)$$

$$\frac{\sqrt{2}}{10} \quad (3)$$

۲۴

در مربع شکل مقابل، مقدار $\sin x$ کدام است؟



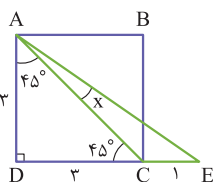
به زاویه‌های 45° که قطر مربع با اضلاع آن می‌سازد توجه کنید و به کمک آن قضیه سینوس‌ها را در مثلث ACE بنویسید.

Hint

طبق قضیه سینوس‌ها در مثلث ABC داریم:

$$\frac{a}{\sin \hat{A}} = \frac{b}{\sin \hat{B}} = \frac{c}{\sin \hat{C}}$$

نکته



$$\hat{CAD} = \hat{ACD} = 45^\circ$$

گام اول: AC قطر مربع است، پس در مثلث قائم‌الزاویه متساوی‌الساقین ACD داریم:

پاسخ خیلی تشریحی ✓

زاویه ACE، مکمل زاویه $\hat{ACD}$ است:

$$\hat{ACE} = 180^\circ - 45^\circ = 135^\circ$$

$$AE^2 = AD^2 + DE^2 = 3^2 + 4^2 = 5^2 \Rightarrow AE = 5$$

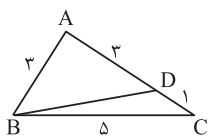
از طرفی در مثلث قائم‌الزاویه ADE داریم:

گام دوم: طبق قضیه سینوس‌ها در مثلث ACE داریم:

$$\frac{CE}{\sin(\hat{CAE})} = \frac{AE}{\sin(\hat{ACE})} \Rightarrow \frac{1}{\sin x} = \frac{5}{\sin 135^\circ} \Rightarrow \frac{1}{\sin x} = \frac{5}{\frac{\sqrt{2}}{2}} \Rightarrow 5 \sin x = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\Rightarrow \sin x = \frac{\sqrt{2}}{10}$$

۲۵ در شکل مقابل، شعاع دایره محیطی مثلث BCD کدام است؟



(۱) $\frac{5\sqrt{2}}{2}$

(۲) $\frac{15\sqrt{2}}{8}$

(۳) $\frac{3\sqrt{2}}{2}$

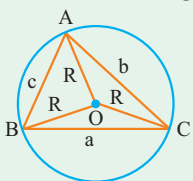
(۴) $\frac{9\sqrt{2}}{4}$

Hint

نکته

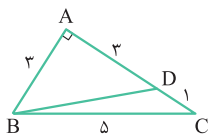
نشان دهید مثلث ABD قائم‌الزاویه است و سپس طول BD را محاسبه کنید.

طول قطر دایره محیطی هر مثلث برابر است با نسبت اندازه هر ضلع مثلث به سینوس زاویه مقابل آن ضلع.



$$\frac{a}{\sin \hat{A}} = \frac{b}{\sin \hat{B}} = \frac{c}{\sin \hat{C}} = 2R$$

پاسخ خیلی تشریحی ✓ گام اول: طول اضلاع مثلث ABC، $AB = 3$ ، $AC = 4$ و $BC = 5$ است. با توجه به رابطه $3^2 + 4^2 = 5^2$ ، مثلث ABC قائم‌الزاویه و $\hat{A} = 90^\circ$ است.



گام دوم: در مثلث ABD داریم:

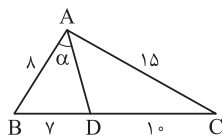
$$BD^2 = AB^2 + AD^2 = 3^2 + 3^2 = 18 \Rightarrow BD = 3\sqrt{2}$$

هم‌چنین در مثلث قائم‌الزاویه ABC می‌توان نوشت:

$$\sin \hat{C} = \frac{AB}{BC} = \frac{3}{5}$$

گام سوم: با توجه به قضیه سینوس‌ها، شعاع دایره محیطی مثلث BCD را محاسبه می‌کنیم:

$$\frac{BD}{\sin \hat{C}} = 2R \Rightarrow \frac{3\sqrt{2}}{\frac{3}{5}} = 2R \Rightarrow 2R = 5\sqrt{2} \Rightarrow R = \frac{5\sqrt{2}}{2}$$



$$\frac{21}{16} \quad (2)$$

$$\frac{15}{17} \quad (4)$$

۲۶ در شکل مقابل، $\tan \alpha$ کدام است؟

$$\frac{17}{33} \quad (1)$$

$$\frac{12}{7} \quad (3)$$

Hint

نکته

قضیه سینوس ها را در دو مثلث ABD و ACD بنویسید.

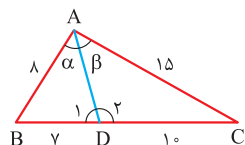
(۱) اگر α و β دو زاویه مکمل هم باشند، آن گاه داریم:

$$\alpha + \beta = 180^\circ \Rightarrow \alpha = 180^\circ - \beta \Rightarrow \sin \alpha = \sin(180^\circ - \beta) \Rightarrow \sin \alpha = \sin \beta$$

(۲) اگر α و β دو زاویه متمم هم باشند، آن گاه داریم:

$$\alpha + \beta = 90^\circ \Rightarrow \beta = 90^\circ - \alpha \Rightarrow \sin \beta = \sin(90^\circ - \alpha) \Rightarrow \sin \beta = \cos \alpha$$

گام اول: با توجه به اندازه اضلاع مثلث ABC داریم:



$$8^2 + 15^2 = 17^2 \Rightarrow AB^2 + AC^2 = BC^2 \Rightarrow \hat{A} = 90^\circ$$

$$\Rightarrow \alpha + \beta = 90^\circ \Rightarrow \sin \beta = \cos \alpha \quad (*)$$

گام دوم: قضیه سینوس ها را در دو مثلث ABD و ADC می نویسیم.

$$\triangle ABD: \frac{BD}{\sin \alpha} = \frac{AB}{\sin \hat{D}_1} \Rightarrow \frac{7}{\sin \alpha} = \frac{8}{\sin \hat{D}_1} \Rightarrow \sin \hat{D}_1 = \frac{8}{7} \sin \alpha$$

$$\triangle ACD: \frac{CD}{\sin \beta} = \frac{AC}{\sin \hat{D}_2} \Rightarrow \frac{10}{\sin \beta} = \frac{15}{\sin \hat{D}_2} \Rightarrow \sin \hat{D}_2 = \frac{3}{2} \sin \beta$$

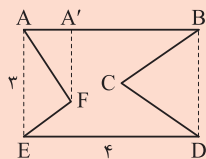
گام سوم: دو زاویه $\hat{D}_1$ و $\hat{D}_2$ مکمل یکدیگرند؛ بنابراین داریم:

$$\sin \hat{D}_1 = \sin \hat{D}_2 \Rightarrow \frac{8}{7} \sin \alpha = \frac{3}{2} \sin \beta \xrightarrow{(*)} \frac{8}{7} \sin \alpha = \frac{3}{2} \cos \alpha$$

$$\Rightarrow \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{\frac{3}{2}}{\frac{8}{7}} \Rightarrow \tan \alpha = \frac{21}{16}$$

پاسخ خیلی تشریحی ✓

شش ضلعی $ABCDEF$ را مطابق شکل زیر در نظر بگیرید. اگر چهارضلعی $ABDE$ مستطیلی به طول ۴ و عرض ۳، نقطه C روی عمود منصف AB ، A' مجانس نقطه A در تجانسی به مرکز B و با نسبت $\frac{3}{4}$ و $A'F \parallel AE$ باشد و بخواهیم مساحت این شش ضلعی را بدون تغییر محیط و تعداد اضلاع آن به بیشترین مقدار ممکن افزایش دهیم، مساحت شش ضلعی جدید کدام است؟



۱۵ (۱)

۱۶/۵ (۲)

۱۸ (۳)

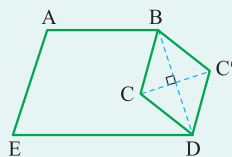
۱۹/۵ (۴)

مشاوره این سؤال براساس تمرین‌های ۱ و ۵ صفحه ۵۴ کتاب درسی هندسه (۲) طرح شده است. سؤالاتی مشابه در امتحان نهایی خرداد ۱۴۰۳ و کنکور نوبت دوم ۱۴۰۳ دیده می‌شود.

Hint

دروس Box

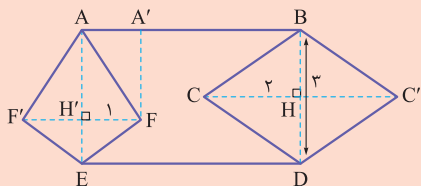
مسائل هم‌پیرامونی یا هم‌محیطی



هرگاه بخواهیم مساحت یک چندضلعی را که یک یا چند زاویه در آن بزرگ‌تر از 180° هستند، بدون تغییر در محیط و تعداد اضلاع آن افزایش دهیم، کافی است بازتاب هر کدام از رأس‌هایی که زاویه آن‌ها بزرگ‌تر از 180° است را نسبت به خط گذرنده از دو رأس مجاور آن رسم کنیم.

مطابق شکل، میزان افزایش مساحت چندضلعی مقعر $ABCDE$ بدون تغییر در تعداد اضلاع و محیط این چندضلعی، برابر مساحت چندضلعی $BCDC'$ خواهد بود که C' بازتاب C نسبت به BD است.

گام اول: ابتدا بازتاب رأس C را نسبت به پاره‌خط BD و بازتاب رأس F را نسبت به پاره‌خط AE یافته و نقاط حاصل را به ترتیب F' و C' می‌نامیم:



گام دوم: چون C روی عمود منصف AB قرار دارد، پس فاصله آن از BD ، برابر نصف طول AB ، یعنی $CH = 2$ است. از طرفی A' مجانس A در تجانس به مرکز B و با نسبت $\frac{3}{4}$ است، پس داریم:

$$\frac{BA'}{BA} = \frac{3}{4} \Rightarrow \frac{BA'}{4} = \frac{3}{4} \Rightarrow BA' = 3 \Rightarrow AA' = 4 - 3 = 1$$

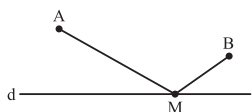
$$\Rightarrow FH' = 1$$

گام سوم: مساحت شش ضلعی جدید یعنی شش ضلعی $ABC'DEF'$ برابر است با:

$$S_{ABDE} + S_{BDC'} + S_{AEF'} = S_{ABDE} + S_{BDC} + S_{AEF}$$

$$= 4 \times 3 + \frac{1}{2} \times 2 \times 3 + \frac{1}{2} \times 1 \times 3 = 16/5$$

در شکل زیر می‌خواهیم از نقطه A به نقطه‌ای روی خط d رفته و سپس از آن نقطه به نقطه B برویم. اگر طول کوتاه‌ترین مسیر AMB برابر ۷ و طول MB برابر ۲ و فاصله A از خط d برابر ۲/۵ باشد، اندازه زاویه حاده بین پاره خط MB و خط d چند درجه است؟



۱۵ (۱)

۲۲/۵ (۲)

۳۰ (۳)

۴۵ (۴)

مشاوره این سؤال براساس مسئله (الف) صفحه ۵۲ کتاب درسی هندسه ۲ از مسائل پیدا کردن کوتاه‌ترین مسیر (معروف به مسئله هرون) طراحی شده است.

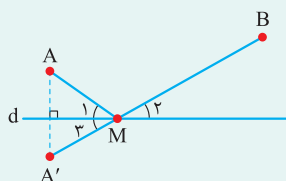


طبق مسئله هرون، پاره‌خط‌های AM و BM، زوایای یکسانی با خط d می‌سازند.

Hint

دستی Box

مسئله هرون



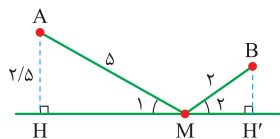
فرض کنید دو نقطه A و B در یک طرف خط d باشند و بخواهیم از نقطه A به نقطه‌ای مانند M روی خط d رفته و آن‌جا به نقطه B برویم. برای پیدا کردن کوتاه‌ترین طول ممکن برای خط شکسته AMB، کافی است بازتاب نقطه A را نسبت به خط d پیدا کنیم (نقطه A') و سپس از A' به B وصل کنیم تا خط d را در نقطه‌ای مانند M قطع کند. نقطه M همان نقطه مورد نظر مسئله است. در این صورت داریم:

$$\left. \begin{array}{l} \hat{M}_1 = \hat{M}_3 \text{ : طبق تعریف بازتاب} \\ \hat{M}_2 = \hat{M}_4 \text{ : زوایای متقابل به رأس} \end{array} \right\} \Rightarrow \hat{M}_1 = \hat{M}_2$$

گام اول: طول کوتاه‌ترین مسیر AMB برابر ۷ و طول MB برابر ۲ است، پس $AM = 5$ خواهد بود. در مثلث قائم‌الزاویه AMH، اندازه

✓ پاسخ خیلی تشریحی

ضلع مقابل به زاویه M_1 ، نصف اندازه وتر است؛ پس داریم:



$$\triangle AMH: \left. \begin{array}{l} AH = 2/5 \\ AM = 5 \end{array} \right\} \Rightarrow AH = \frac{1}{5} AM \Rightarrow \hat{M}_1 = 3^\circ$$

گام دوم: طبق مسئله هرون، اندازه زوایای $\hat{M}_1$ و $\hat{M}_2$ به ازای کوتاه‌ترین مسیر AMB، برابر یکدیگر است؛ بنابراین $\hat{M}_2 = 3^\circ$ است.

۲۹

در مثلثی به اضلاع ۲، $2\sqrt{3}$ و ۴، نقطه M را روی بزرگ‌ترین ضلع در نظر می‌گیریم. کم‌ترین مقدار مجموع فواصل نقطه M از وسط‌های دو ضلع دیگر مثلث کدام است؟

$\sqrt{7}$ (۴)

$\frac{\sqrt{7}}{2}$ (۳)

$\sqrt{6}$ (۲)

$\frac{\sqrt{6}}{2}$ (۱)



مشاوره مسائل مربوط به پیدا کردن کوتاه‌ترین مسیر، در سال‌های اخیر همواره از سوالات مورد توجه طراحان کنکور بوده است.

Hint

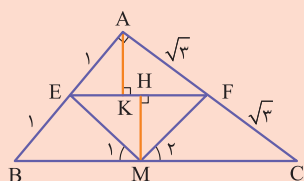
دقت کنید که طول اضلاع مثلث داده‌شده در قضیه فیثاغورس صدق می‌کند.

گام اول: مثلث داده‌شده قائم‌الزاویه است، چون طبق عکس قضیه فیثاغورس داریم:

$$2^2 + (2\sqrt{3})^2 = 4^2 \Rightarrow AB^2 + AC^2 = BC^2 \Rightarrow \hat{A} = 90^\circ$$

گام دوم:

مطابق شکل نقاط E و F وسط‌های اضلاع AB و AC، دو نقطه ثابت هستند که در یک طرف خط گذرنده از رأس‌های B و C قرار دارند. اگر نقطه M روی BC باشد، آن‌گاه بنا به مسئله هرون، زمانی $ME + MF$ کم‌ترین مقدار را دارد که پاره‌خط‌های ME و MF با ضلع BC زوایای برابر بسازند، یعنی $\hat{M}_1 = \hat{M}_2$.



گام سوم: چون E و F از BC به یک فاصله هستند، پس نقطه M محل برخورد عمودمنصف EF با BC است. مطابق شکل داریم:

$$\triangle AEF : EF^2 = AE^2 + AF^2 = 1^2 + (\sqrt{3})^2 = 4 \Rightarrow EF = 2 \Rightarrow EH = FH = 1$$

گام چهارم: با توجه به این که نقاط E و F وسط‌های اضلاع AB و AC هستند، طول MH برابر طول AK (ارتفاع وارد بر وتر در مثلث AEF) است. طبق روابط طولی در مثلث قائم‌الزاویه AEF داریم:

$$AK \times EF = AE \times AF \Rightarrow AK \times 2 = 1 \times \sqrt{3} \Rightarrow AK = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

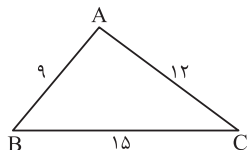
$$\Rightarrow MH = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

گام پنجم: M روی عمودمنصف EF است، پس $ME = MF$. حال در مثلث MEH داریم:

$$ME^2 = MH^2 + EH^2 = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + 1^2 = \frac{7}{4} \Rightarrow ME = \frac{\sqrt{7}}{2}$$

$$\Rightarrow ME + MF = 2 \times \frac{\sqrt{7}}{2} = \sqrt{7}$$

در مثلث ABC مطابق شکل، تصویر نقطه B را در تجانس به مرکز A و نسبت $\frac{1}{3}$ ، B' و تصویر نقطه C را در تجانس به مرکز A و نسبت $\frac{1}{3}$ می‌نامیم. هم‌چنین تصویر وسط ضلع BC را در تجانس به مرکز A و نسبت $\frac{2}{3}$ ، A' می‌نامیم. مساحت مثلث $A'B'C'$ کدام است؟



(۱) ۳

(۲) ۴/۵

(۳) ۶

(۴) ۹



دقت کنید که طول اضلاع مثلث ABC در قضیه فیثاغورس صدق می‌کند.

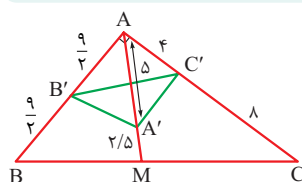
Hint

درس‌Box

در تجانس با نسبت k

(۱) طول پاره‌خط‌ها $|k|$ برابر می‌شود.

(۲) مساحت شکل‌ها k^2 برابر می‌شود.



گام اول: با توجه به برقراری قضیه فیثاغورس برای طول اضلاع مثلث ABC ($9^2 + 12^2 = 15^2$)، $\hat{A} = 90^\circ$ و مثلث قائم‌الزاویه است. طول میانه AM (میانه وارد بر وتر) برابر نصف طول وتر یعنی برابر $7/5 = \frac{15}{2}$ است.

گام دوم: مساحت مثلث $A'B'C'$ را به روش زیر محاسبه می‌کنیم:

$$S_{A'B'C'} = S_{AA'B'} + S_{AA'C'} - S_{AB'C'}$$

گام سوم:

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} AB \times AC = \frac{1}{2} \times 9 \times 12 = 54$$

$$\Rightarrow S_{AMB} = S_{AMC} = \frac{1}{2} \times 54 = 27$$

$$\frac{S_{AA'B'}}{S_{AMB}} = \frac{AB'}{AB} \times \frac{AA'}{AM} \Rightarrow \frac{S_{AA'B'}}{27} = \frac{1}{3} \times \frac{2}{3} = \frac{1}{9} \Rightarrow S_{AA'B'} = 9$$

$$\frac{S_{AA'C'}}{S_{AMC}} = \frac{AC'}{AC} \times \frac{AA'}{AM} \Rightarrow \frac{S_{AA'C'}}{27} = \frac{1}{3} \times \frac{2}{3} = \frac{2}{9} \Rightarrow S_{AA'C'} = 6$$

$$S_{AB'C'} = \frac{1}{2} AB' \times AC' = \frac{1}{2} \times \frac{9}{3} \times \frac{12}{3} = 9$$

گام چهارم: با توجه به رابطه ارائه‌شده در گام دوم داریم:

$$S_{A'B'C'} = 9 + 6 - 9 = 6$$

پاسخ خیلی تشریحی ✓

۳۱

در جریان یک مسابقه، بازیکن A دو پالتی می‌زند. این بازیکن با احتمال ۸۰ درصد پالتی اول را گل می‌کند. در این صورت احتمال گل شدن پالتی دوم ۹۰ درصد و در غیر این صورت ۴۰ درصد خواهد بود. با کدام احتمال پالتی اول گل نمی‌شود ولی پالتی دوم گل می‌شود؟

$\frac{9}{50}$ (۴)

$\frac{1}{50}$ (۳)

$\frac{8}{25}$ (۲)

$\frac{2}{25}$ (۱)



درس‌Box

قانون ضرب احتمال: تعریف احتمال شرطی، با یک محاسبه ساده به عبارتی تبدیل می‌شود که به آن «قانون ضرب احتمال» گفته می‌شود:

اگر A و B دو پیشامد باشند که $P(A) > 0$ ، آن‌گاه $P(A \cap B) = P(A)P(B|A)$.

از این قانون، معمولاً وقتی استفاده می‌شود که بخواهیم عبارت سمت چپ تساوی را حساب کنیم.

قانون ضرب احتمال را می‌توان برای سه پیشامد نیز نوشت:

اگر A_1, A_2, A_3 پیشامدهایی با احتمال ناصفر باشند، آن‌گاه:

$P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = P(A_1)P(A_2|A_1)P(A_3|(A_1 \cap A_2))$



پاسخ خیلی تشریحی ✓ گام اول: پالتی اول این بازیکن به احتمال ۸۰ درصد (یا همان $\frac{4}{5}$) گل می‌شود و به احتمال ۲۰ درصد (یا همان $\frac{1}{5}$) گل نمی‌شود.

$P(A) = \frac{1}{5}$

گام دوم: پالتی اول گل نشده، پس احتمال گل شدن پالتی دوم ۴۰ درصد (یا همان $\frac{4}{10}$) است.

$P(B|A) = \frac{4}{10}$

گام سوم: بنابراین احتمال این‌که پالتی اول گل نشود ولی پالتی دوم گل شود برابر است با:

پالتی دوم گل شود

$P(A \cap B) = P(A).P(B|A) = \frac{1}{5} \times \frac{4}{10} = \frac{4}{50} = \frac{2}{25}$

پالتی اول گل نشود

در ظرف A، ۲ مهره سیاه و ۳ مهره سفید، در ظرف B، ۴ مهره سیاه و ۱ مهره سفید و در ظرف C، ۵ مهره سفید داریم. از ظرف A دو مهره و از ظرف B سه مهره وارد ظرف C می‌کنیم. حالا از ظرف C یک مهره انتخاب می‌کنیم. با چه احتمالی این مهره، سفید است؟

$$\frac{4}{5} \quad (۴)$$

$$\frac{18}{25} \quad (۳)$$

$$\frac{17}{25} \quad (۲)$$

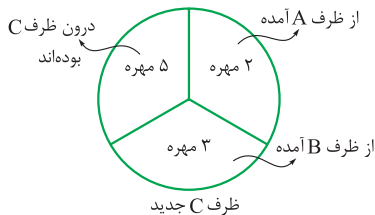
$$\frac{3}{5} \quad (۱)$$



برای حل سؤالات قانون احتمال کل، کافی است از نمودار درختی کمک بگیرید.

Hint

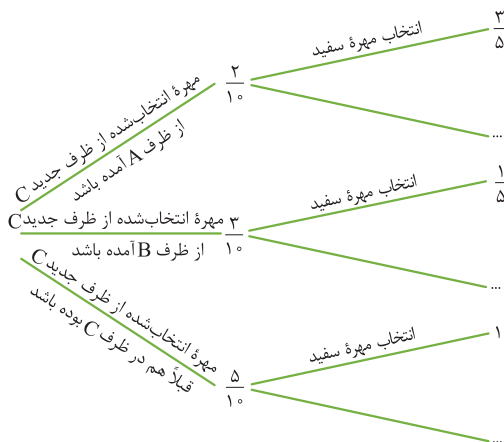
پاسخ خیلی تشریحی ✓ **گام اول:** اگر از ظرف A دو مهره و از ظرف B سه مهره وارد ظرف C کنیم، ظرف C به شکل زیر می‌شود:



گام دوم: حالا در ظرف C جدید، ۱۰ مهره داریم. اگر از این ظرف یک مهره انتخاب کنیم، به احتمال $\frac{2}{10}$ از ظرف A آمده، به احتمال $\frac{3}{10}$ از ظرف B آمده و به احتمال $\frac{5}{10}$ درون ظرف C بوده است.

گام سوم: در ظرف A، ۲ مهره سیاه و ۳ مهره سفید داریم، پس احتمال انتخاب مهره سفید از آن برابر $\frac{3}{5}$ است. در ظرف B، ۴ مهره سیاه و ۱ مهره سفید داریم، پس احتمال انتخاب مهره سفید از آن برابر $\frac{1}{5}$ است. در ظرف C، ۵ مهره سفید داریم، پس احتمال انتخاب مهره سفید از آن ۱ است.

گام چهارم: نمودار درختی را رسم می‌کنیم:



گام پنجم: بنابراین جواب برابر است با:

$$\frac{2}{10} \times \frac{3}{5} + \frac{3}{10} \times \frac{1}{5} + \frac{5}{10} \times 1 = \frac{6}{50} + \frac{3}{50} + \frac{25}{50} = \frac{34}{50} = \frac{17}{25}$$

یک سکه که در آن شانس «رو» آمدن دو برابر شانس «پشت» آمدن است را دو بار پرتاب می‌کنیم. اگر هر دو بار «رو» آمد، یک سکه سالم وگرنه دو سکه سالم پرتاب می‌کنیم. با چه احتمالی همه سکه‌هایی که پرتاب کرده‌ایم یکسان آمده‌اند؟

$$\frac{5}{18} \quad (۴)$$

$$\frac{1}{4} \quad (۳)$$

$$\frac{2}{9} \quad (۲)$$

$$\frac{7}{36} \quad (۱)$$



پاسخ خیلی تشریحی ✓ گام اول: شانس «رو» آمدن در این سکه، دو برابر شانس «پشت» آمدن است، پس:

$$P(\text{رو}) = 2x$$

$$P(\text{پشت}) = x$$

گام دوم: از طرفی:

$$P(S) = 1 \Rightarrow P(\text{رو}) + P(\text{پشت}) = 1 \Rightarrow 2x + x = 1 \Rightarrow 3x = 1 \Rightarrow x = \frac{1}{3}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} P(\text{رو}) = \frac{2}{3} \\ P(\text{پشت}) = \frac{1}{3} \end{cases}$$

گام سوم: احتمال این که این سکه را پرتاب کنیم و:

$$\text{الف) هر دو بار «رو» بیاید: } \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} = \frac{4}{9}$$

بار اول (رو) بیاید بار دوم (رو) بیاید

$$\text{ب) هر دو بار «پشت» بیاید: } \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{9}$$

بار اول (پشت) بیاید بار دوم (پشت) بیاید

$$\text{پ) یک بار «رو» و یک بار «پشت» بیاید: } \frac{1}{3} \times \frac{2}{3} + \frac{2}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{4}{9}$$

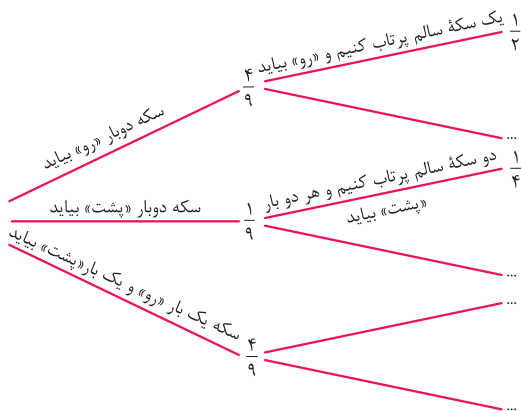
بار اول (پشت) بیاید بار دوم (رو) بیاید بار اول (رو) بیاید بار دوم (پشت) بیاید

گام چهارم: سکه سالم، سکه‌ای است که به احتمال $\frac{1}{3}$ «رو» و به احتمال $\frac{1}{3}$ «پشت» می‌آید؛ بنابراین اگر دو بار سکه سالم را پرتاب کنیم، داریم:

$$\frac{1}{4} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{16}$$

$$\frac{1}{4} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{16}$$

گام پنجم: با رسم نمودار درختی داریم:



گام ششم: بنابراین، احتمال این که همه سکه‌هایی که پرتاب کردیم یکسان بیایند برابر است با:

$$\left(\frac{1}{4} \times \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{4} \times \frac{1}{4}\right) = \frac{1}{16} + \frac{1}{16} = \frac{2}{16} = \frac{1}{8}$$

برای ارسال تلگراف، از کدهایی شامل اعداد صفر و یک استفاده می‌کنیم. اعداد صفر و یک به نسبت ۲ به ۳ ارسال می‌شوند. هر عدد صفر با احتمال ۷۵ درصد بدون تغییر به مقصد می‌رسد و با احتمال ۲۵ درصد در طول مسیر به عدد یک تغییر پیدا می‌کند. هر عدد یک با احتمال ۸۰ درصد بدون تغییر به مقصد می‌رسد و با احتمال ۲۰ درصد در طول مسیر به عدد صفر تغییر پیدا می‌کند. اگر در مقصد عدد صفر دریافت کرده باشیم، با چه احتمالی در مبدأ هم عدد صفر ارسال شده است؟

$$\frac{11}{14} \quad (۴)$$

$$\frac{6}{7} \quad (۳)$$

$$\frac{5}{7} \quad (۲)$$

$$\frac{4}{7} \quad (۱)$$



Hint با رسم نمودار درختی، و استفاده از قانون بیز به سادگی به جواب می‌رسید.

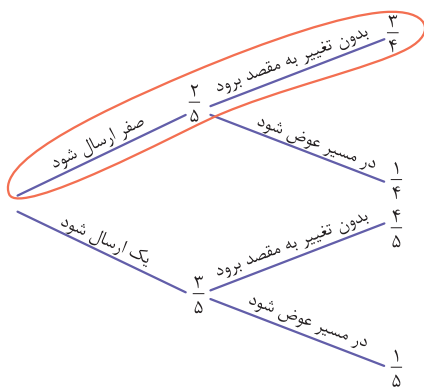
درس‌Box

قانون بیز: به شرطی شدن قانون احتمال کل، قانون بیز می‌گوییم. برای حل سؤالات قانون بیز، ابتدا نمودار درختی را رسم کرده و احتمال کل را محاسبه می‌کنیم و در مخرج قرار می‌دهیم. حالا با قراردادن احتمال رخ دادن شاخه‌های مطلوب در صورت جواب حاصل می‌شود.

گام اول: اعداد صفر و یک به نسبت ۲ به ۳ ارسال می‌شوند، پس می‌توانیم تعداد صفرها و یک‌های ارسال شده را به ترتیب $2X$ و $3X$ فرض کنیم.

گام دوم: پس احتمال ارسال صفر، برابر $\frac{2X}{2X+3X} = \frac{2}{5}$ و احتمال ارسال یک، برابر $\frac{3X}{2X+3X} = \frac{3}{5}$ است.

گام سوم: نمودار درختی را رسم می‌کنیم:



گام چهارم: با توجه به نمودار درختی رسم شده، احتمال این که در مقصد صفر دریافت کنیم برابر است با:

$$\frac{2}{5} \times \frac{4}{5} + \frac{3}{5} \times \frac{1}{5}$$

گام پنجم: از طرفی احتمال این که در مقصد صفر دریافت کنیم و از مبدأ هم صفر ارسال کرده باشیم (شاخه مشخص شده) برابر است با:

$$\frac{2}{5} \times \frac{4}{5}$$

گام ششم: بنابراین جواب برابر است با:

$$\frac{\frac{2}{5} \times \frac{4}{5}}{\frac{2}{5} \times \frac{4}{5} + \frac{3}{5} \times \frac{1}{5}} = \frac{\frac{8}{25}}{\frac{8}{25} + \frac{3}{25}} = \frac{\frac{8}{25}}{\frac{11}{25}} = \frac{8}{11}$$

۳۵ احتمال موفقیت یک دارویی که به تازگی تولید شده $\frac{1}{3}$ است. اگر ۵ بیمار را انتخاب کنیم، با چه احتمالی دارو باعث بهبودی حداقل یکی از بیماران می‌شود؟

$$\frac{211}{243} \quad (2)$$

$$\frac{32}{243} \quad (1)$$



$$\frac{242}{243} \quad (4)$$

$$\frac{228}{243} \quad (3)$$

Hint از احتمال متمم استفاده کنید.

پیشامدهای A و B را مستقل می‌گوییم، هرگاه وقوع یکی از آن‌ها در احتمال وقوع دیگری تأثیری نداشته باشد. به عبارت دیگر دو پیشامد A و B مستقل‌اند، اگر و تنها اگر:

$$P(A \cap B) = P(A)P(B)$$

دو پیشامدی که مستقل نباشند، وابسته نامیده می‌شوند.

مفهوم استقلال برای بیش از دو پیشامد نیز تعریف می‌شود.

سه پیشامد A، B و C را مستقل می‌گوییم، هرگاه چهار تساوی زیر برقرار باشند.

$$P(A \cap B) = P(A)P(B)$$

$$P(A \cap C) = P(A)P(C)$$

$$P(B \cap C) = P(B)P(C)$$

$$P(A \cap B \cap C) = P(A)P(B)P(C)$$

در حالت کلی، n پیشامد $A_1, A_2, \dots, A_n$ را مستقل می‌گوییم، هرگاه احتمال اشتراک هر تعداد از این پیشامدها با حاصل ضرب احتمال آن‌ها برابر باشد.

پاسخ خیلی تشریحی ✓ گام اول: احتمال موفقیت این دارو $\frac{1}{3}$ است، پس احتمال شکست آن $\frac{2}{3} = 1 - \frac{1}{3}$ می‌شود.

گام دوم: موفقیت یا عدم موفقیت دارو برای افراد متفاوت مستقل از هم است.

گام سوم: احتمال این‌که این دارو برای هر ۵ بیمار ناموفق باشد برابر است با:

$$\frac{2}{3} \times \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} = \frac{32}{243}$$

دارو روی نفر اول موفقیت‌آمیز نباشد. دارو روی نفر دوم موفقیت‌آمیز نباشد. دارو روی نفر سوم موفقیت‌آمیز نباشد. دارو روی نفر چهارم موفقیت‌آمیز نباشد. دارو روی نفر پنجم موفقیت‌آمیز نباشد.

گام چهارم: بنابراین، دارو با احتمال $\frac{211}{243} = 1 - \frac{32}{243}$ روی حداقل یکی از این ۵ نفر موفقیت‌آمیز است (یا به عبارت دیگر باعث بهبودی حداقل یکی از بیماران است).

در نمودار میله‌ای تعدادی داده، اگر طول میله متناظر با دسته اول ۲ واحد افزایش یابد و طول مابقی میله‌ها ثابت بماند، زاویه مربوط به دسته اول همان داده‌ها در نمودار دایره‌ای، 48° بیشتر می‌شود. تعداد کل داده‌های اولیه برابر کدام یک از اعداد زیر می‌تواند باشد؟

۲۰ (۴)

۱۲ (۳)

۱۰ (۲)

۸ (۱)



پاسخ خیلی تشریحی ✓

گام اول: تعداد داده‌های دسته اول را K و تعداد کل داده‌ها را n فرض می‌کنیم. زاویه مرکزی این دسته در نمودار دایره‌ای برابر است با:

$$\frac{K}{n} \times 360$$

گام دوم: اگر طول میله متناظر با دسته اول ۲ واحد افزایش یابد، فراوانی این دسته ۲ تا زیاد می‌شود. حالا با توجه به این که طول مابقی میله‌ها ثابت می‌ماند، تعداد کل داده‌ها هم ۲ تا زیاد می‌شود:

$K + 2$: تعداد داده‌های جدید در دسته اول

$n + 2$: تعداد کل داده‌های جدید

گام سوم: بنابراین، زاویه مرکزی جدید برای این دسته برابر است با:

$$\frac{K+2}{n+2} \times 360$$

گام چهارم: طبق گفته سوال، با این کار، زاویه مرکزی 48° زیاد می‌شود:

$$\frac{K+2}{n+2} \times 360 = \frac{K}{n} \times 360 + 48 \xrightarrow{\div 24} \frac{K+2}{n+2} \times 15 = \frac{K}{n} \times 15 + 2$$

$$\Rightarrow \frac{K+2}{n+2} \times 15 - \frac{K}{n} \times 15 = 2 \Rightarrow \frac{K+2}{n+2} - \frac{K}{n} = \frac{2}{15} \Rightarrow \frac{nK+2n-nK-2K}{n(n+2)} = \frac{2}{15}$$

$$\Rightarrow \frac{2n-2K}{n(n+2)} = \frac{2}{15} \Rightarrow \frac{n-K}{n(n+2)} = \frac{1}{15} \Rightarrow n(n+2) = 15(n-K)$$

گام پنجم: با توجه به این که فراوانی هر دسته و فراوانی کل عدد حسابی است، پس $n-K$ هم عدد حسابی است، یعنی:

$$n(n+2) = \underbrace{15(n-K)}_{\text{عددی مضرب ۱۵}}$$

پس $n(n+2)$ هم باید مضرب ۱۵ باشد. حالا با امتحان کردن گزینه‌ها می‌بینیم که به ازای $n = 10$ ، $n(n+2) = 10 \times 12 = 120$ ، شده که مضرب ۱۵ است.

۲۷ میانگین جملات اول تا شانزدهم دنباله هندسی $1, \sqrt{2}, 2, \dots$ تقریباً چند برابر مجموع دو جمله اول است؟

۳۲ (۴)

۱۶ (۳)

۱۲ (۲)

۸ (۱)



درس Box

میانگین داده‌های آماری X_1 تا X_n برابر است با:

$$\bar{X} = \frac{X_1 + X_2 + X_3 + \dots + X_n}{n}$$

مجموع n جمله اول یک دنباله هندسی با جمله اول a و قدرنسبت r برابر است با:

$$S_n = \frac{a(1-r^n)}{1-r}$$



پاسخ خیلی تشریحی ✓

گام اول: در دنباله هندسی $1, \sqrt{2}, 2, \dots$ جمله اول برابر $a = 1$ و قدرنسبت برابر $r = \sqrt{2}$ است.

گام دوم: مجموع جملات اول تا شانزدهم این دنباله (یا به عبارت دیگر مجموع شانزده جمله اول این دنباله) برابر است با:

$$S_{16} = \frac{a(1-r^{16})}{1-r} = \frac{1 \times (1-(\sqrt{2})^{16})}{1-\sqrt{2}} = \frac{1-(2^8)}{1-\sqrt{2}} = \frac{1-256}{1-\sqrt{2}} = \frac{-255}{1-\sqrt{2}}$$

$$= \frac{-255}{1-\sqrt{2}} = \frac{255}{\sqrt{2}-1} \times \frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}+1} = \frac{255(\sqrt{2}+1)}{2-1} = 255(\sqrt{2}+1)$$

گام سوم: بنابراین میانگین شانزده جمله اول این دنباله برابر است با:

$$\frac{S_{16}}{16} = \frac{255(\sqrt{2}+1)}{16}$$

گام چهارم: دو جمله اول این دنباله 1 و $\sqrt{2}$ هستند که مجموع آن‌ها برابر $1+\sqrt{2}$ است.

گام پنجم: میانگین شانزده جمله اول این دنباله تقسیم بر مجموع دو جمله اول برابر است با:

$$\frac{255(\sqrt{2}+1)}{\frac{16}{\sqrt{2}+1}} = \frac{255}{16} \approx 16$$

اگر میانه داده‌های ۲۰، ۱۷، ۱۴، ۱۲، ۱۱ برابر ۵/۱۵ باشد، چند مقدار طبیعی دورقمی برای a قابل قبول نیست؟

۳۸

۸ (۴)

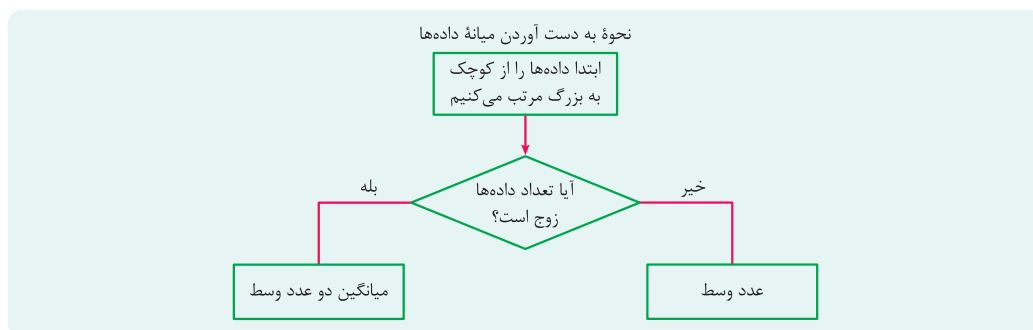
۷ (۳)

۶ (۲)

۵ (۱)



درس‌Box



پاسخ خیلی تشریحی ✓

گام اول: تعداد داده‌ها شش تا است، پس میانه برابر میانگین دو داده وسط، یعنی برابر میانگین داده سوم و چهارم است.

گام دوم: اگر به داده‌ها توجه کنیم، متوجه می‌شویم که $5/15 = \frac{14+17}{2}$ است، پس ۱۴ و ۱۷ باید داده‌های سوم و چهارم باشند.

این اتفاق زمانی رخ می‌دهد که $a \geq 17$ باشد.

گام سوم: بنابراین اگر $a < 17$ باشد، میانه داده‌ها برابر ۵/۱۵ نمی‌شود، بنابراین a برابر ۷ عدد دورقمی (یعنی برابر ۱۰، ۱۱، ۱۲، ... و ۱۶)

نمی‌تواند باشد.

داده‌های $۱, ۱, ۲, ۳, x, y$ مد ندارند. اختلاف چارک اول و چارک سوم این داده‌ها کدام است؟

۲ (۴)

۱/۵ (۳)

۱ (۲)

۰/۵ (۱)



درس‌Box

نما (مد): داده‌ای که بیشترین فراوانی را داشته باشد، نما یا مد داده‌ها نام دارد. اگر در داده‌هایی، همه داده‌ها یک فراوانی داشته باشند، آن‌گاه این داده‌ها مد ندارند. اگر در داده‌هایی، دو داده بیشترین فراوانی را داشته باشند، آن‌گاه این داده‌ها دو مد دارند.

چارک‌ها: عدد وسط مجموعه‌ای از داده‌ها را که از کوچک به بزرگ مرتب شده باشند میانه (یا چارک دوم) داده‌ها می‌گوییم و آن را با Q_2 نشان می‌دهیم. میانه یک‌دوم اول داده‌های مرتب‌شده را چارک اول می‌گوییم و آن را با Q_1 نشان می‌دهیم. همچنین میانه یک‌دوم آخر داده‌های مرتب‌شده را چارک سوم می‌گوییم و آن را با Q_3 نشان می‌دهیم.

پاسخ خیلی تشریحی ✓

گام اول: این داده‌ها مد ندارند، پس همه داده‌ها باید یک فراوانی داشته باشند. این اتفاق زمانی رخ می‌دهد که یکی از x یا y برابر ۲ و دیگری برابر ۳ باشد (مثلاً $x = ۲$ و $y = ۳$ یا $y = ۲$ و $x = ۳$).

در هر دو حالت، داده‌ها به شکل زیر می‌شوند:

۱, ۱, ۲, ۲, ۳, ۳

گام دوم: تعداد داده‌ها ۶ تا است، پس میانه، برابر میانگین دو داده وسط یعنی برابر $\frac{۲+۲}{۲} = ۲$ می‌شود.

۱, ۱, ۲, ۲, ۳, ۳
↓
 $Q_2 = ۲$

گام سوم: یک‌دوم اول داده‌ها ۱ و ۱ است که میانه آن‌ها برابر داده وسطشان یعنی برابر ۱ می‌شود، پس $Q_1 = ۱$ است. یک‌دوم

دوم داده‌ها ۲ و ۲ است که میانه آن‌ها برابر داده وسطشان یعنی برابر ۲ می‌شود، پس $Q_3 = ۳$ است.

گام چهارم: اختلاف چارک اول و چارک سوم برابر $۳ - ۱ = ۲$ است.

۴۰ در جدول فراوانی زیر، میانگین و میانه برابرند. مقدار a برابر و مقدار مد برابر است.

x_i	۳	۵	۷	۸
f_i	۲	۳	۱	a

۸ - ۵ (۴)

۵ - ۲ (۳)

۵ - ۳ (۲)

۸ - ۴ (۱)



میانگین موزون داده‌ها: اگر n داده $x_1, x_2, \dots, x_n$ داشته باشیم به طوری که هر یک از این داده‌ها به ترتیب دارای فراوانی $f_1, f_2, \dots, f_n$ باشند، میانگین موزون داده‌ها را با نماد $\bar{x}_w$ نشان می‌دهیم و آن را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\bar{x}_w = \frac{\sum_{i=1}^n f_i x_i}{\sum_{i=1}^n f_i} = \frac{f_1 x_1 + f_2 x_2 + \dots + f_n x_n}{f_1 + f_2 + \dots + f_n}$$

دروس Box

پاسخ خیلی تشریحی ✓ **گام اول:** میانگین داده‌ها را محاسبه می‌کنیم:

$$\bar{x} = \frac{(3 \times 2) + (5 \times 3) + (7 \times 1) + (8 \times a)}{2 + 3 + 1 + a} = \frac{6 + 15 + 7 + 8a}{6 + a} = \frac{28 + 8a}{6 + a}$$

گام دوم: در گزینه‌ها برای a مقادیر ۲، ۳، ۴، ۵ داده شده است. به جای a این مقادیر را جای‌گذاری می‌کنیم تا ببینیم در کدام حالت میانگین و میانه برابرند.

حالت اول: اگر $a = 2$ ، میانگین برابر $5/5 = 1$ ، $\bar{x} = \frac{28 + 16}{6 + 2} = \frac{44}{8} = 5.5$ می‌شود. در این حالت جدول فراوانی به شکل زیر می‌شود:

x_i	۳	۵	۷	۸
f_i	۲	۳	۱	۲

تعداد داده‌ها $2 + 3 + 1 + 2 = 8$ تا است، پس میانه برابر میانگین دو داده وسط، یعنی برابر میانگین داده‌های چهارم و پنجم می‌شود. هر دوی داده‌های چهارم و پنجم برابر ۵ هستند، پس میانه برابر 5 می‌شود. میانه و میانگین برابر نیستند، پس این حالت غیر قابل قبول است.

حالت دوم: اگر $a = 3$ ، دو مد خواهیم داشت که ۵ و ۸ خواهند بود، در گزینه (۲) که $a = 3$ ، مد برابر ۵ است، پس $a = 3$ قابل قبول نیست.

حالت سوم: اگر $a = 4$ ، میانگین برابر 6 ، $\bar{x} = \frac{28 + 32}{6 + 4} = \frac{60}{10} = 6$ می‌شود. در این حالت جدول فراوانی به شکل زیر می‌شود:

x_i	۳	۵	۷	۸
f_i	۲	۳	۱	۴

تعداد داده‌ها $2 + 3 + 1 + 4 = 10$ تا است، پس میانه برابر میانگین دو داده وسط، یعنی برابر میانگین داده‌های پنجم و ششم می‌شود. داده پنجم برابر ۵ و داده ششم برابر ۷ است، پس میانه برابر 6 است. میانه و میانگین برابرند، پس $a = 4$ است.

حالت چهارم: اگر $a = 5$ ، میانگین برابر 6.8 ، $\bar{x} = \frac{28 + 40}{6 + 5} = \frac{68}{11}$ می‌شود. در این حالت جدول فراوانی به شکل زیر می‌شود:

x_i	۳	۵	۷	۸
f_i	۲	۳	۱	۵

تعداد داده‌ها $2 + 3 + 1 + 5 = 11$ تا است، پس میانه برابر داده وسط، یعنی برابر داده ششم می‌شود. داده ششم برابر ۷ است، پس میانه هم برابر ۷ می‌شود. میانه و میانگین برابر نیستند، پس این حالت غیر قابل قبول است.

گام سوم: به ازای $a = 4$ ، جدول فراوانی به شکل مقابل است:

x_i	۳	۵	۷	۸
f_i	۲	۳	۱	۴

داده ۸ بیشترین فراوانی را دارد، پس مد برابر ۸ است.

روی یک اتوی برقی اعداد ۸۸۰ W و ۲۲۰ V نوشته شده است. به ترتیب از راست به چپ، حداقل جریانی که سیم اتصال به برق این اتوی برقی باید بتواند از خود عبور دهد، چند آمپر است و مقاومت الکتریکی این وسیله چند اهم است؟

۵۵ ، ۵ (۲)

۵۵ ، ۴ (۱)

۵۰ ، ۵ (۴)

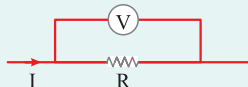
۵۰ ، ۴ (۳)

Hint

ابتدا از رابطه توان مصرفی مقاومت ($P = VI$) جریان عبوری از اتو را به دست آورید و سپس توسط قانون اهم ($R = \frac{V}{I}$) مقاومت اتو را محاسبه کنید.

درس Box

مطابق شکل اگر جریان عبوری از مقاومت R برابر I و اختلاف پتانسیل دو سر آن برابر V باشد، برای محاسبه مقدار توان مصرفی در مقاومت داریم:



$$P = RI^2 = \frac{V^2}{R} = VI$$

قانون اهم:

اگر مقاومت الکتریکی یک وسیله در ولتاژهای مختلف (در دمای ثابت) همواره مقدار ثابتی داشته باشد، به آن وسیله، مقاومت یا رسانای اهمی گفته می‌شود. به عبارت دیگر در وسیله‌هایی که از قانون اهم پیروی می‌کنند نسبت اختلاف پتانسیل دو سر آن‌ها به شدت جریان عبوری از آن در دمای ثابت، مقداری ثابت است. این مقدار ثابت را مقاومت الکتریکی آن جسم می‌نامیم.

$$R = \frac{V}{I}$$

R : مقاومت الکتریکی بر حسب اهم (Ω)

V : اختلاف پتانسیل بر حسب ولت (V)

I : جریان الکتریکی بر حسب آمپر (A)

پاسخ خیلی تشریحی ✓ با توجه به این که توان اتوی برقی ۸۸۰ وات است، می‌توانیم جریان عبوری از آن را به دست آوریم:

$$P = VI \Rightarrow ۸۸۰ = ۲۲۰ I \Rightarrow I = ۴\text{ A}$$

حال با استفاده از قانون اهم مقاومت اتو را محاسبه می‌کنیم:

$$R = \frac{V}{I} \Rightarrow R = \frac{۲۲۰}{۴} = ۵۵\ \Omega$$

روی یک لامپ رشته‌ای، اعداد W ۹۰ و V ۲۴۰ نوشته شده است. اگر این لامپ را با اختلاف پتانسیل V روشن کنیم، انرژی مصرفی در آن در مدت یک شبانه‌روز، $0.96kWh$ خواهد بود. V چند ولت است؟ (مقاومت لامپ را در حالت روشن ثابت در نظر بگیرید.)

۱۲۰ (۴)

۱۶۰ (۳)

۲۰۰ (۲)

۲۴۰ (۱)



Hint

ابتدا توان واقعی را از رابطه $(P = \frac{U}{t})$ به دست آورید و سپس از رابطه $\frac{P}{P_{اسمی}} = (\frac{V}{V_{اسمی}})^2$ ولتاژ داده‌شده به لامپ را محاسبه کنید.

دروس Box

روی بسیاری از مصرف‌کننده‌های برقی دو عدد تحت نام‌های ولتاژ و توان به عنوان مشخصه‌های آن مصرف‌کننده معرفی می‌شود. به این اعداد ولتاژ و توان اسمی می‌گوییم. ولتاژ اسمی مناسب‌ترین اختلاف پتانسیلی است که می‌توان به دو سر یک وسیله برقی وصل کرد و توان اسمی مقدار توانی است که وسیله برقی در صورت اتصال به ولتاژ اسمی مصرف خواهد کرد.

$$P_{اسمی} = \frac{V_{اسمی}^2}{R}$$

حال اگر مصرف‌کننده‌ای به ولتاژهای کمتر از ولتاژ اسمی وصل شود، توان آن نیز کمتر از توان اسمی خواهد بود. توان یک لامپ در ولتاژ V ، در مقایسه با توان اسمی برابر است با:

$$\frac{P}{P_{اسمی}} = (\frac{V}{V_{اسمی}})^2$$

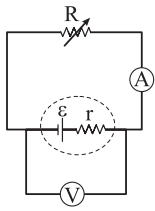
پاسخ خیلی تشریحی ✓ گام اول: ابتدا توان واقعی مصرفی لامپ رشته‌ای را به دست می‌آوریم:

$$U = Pt \Rightarrow 0.96 \times 1000 = P \times 24 \Rightarrow P = \frac{960}{24} = 40 \text{ W}$$

گام دوم: حال می‌توانیم با توجه به ثابت بودن مقاومت، ولتاژ V را به دست آوریم:

$$\frac{P}{P_{اسمی}} = (\frac{V}{V_{اسمی}})^2 \Rightarrow \frac{40}{90} = (\frac{V}{240})^2 \Rightarrow \frac{2}{3} = \frac{V}{240} \Rightarrow V = 160 \text{ V}$$

توان خروجی باتری مدار شکل زیر، به ازای جریان‌های عبوری ۱ A و ۵ A از آن، یکسان است. در این مدار اگر مقداری که ولت‌سنج آرمانی نشان می‌دهد، $\frac{1}{3}$ برابر نیرو محرکه باتری باشد، آمپرسنج آرمانی چند آمپر را نشان می‌دهد؟



۱/۵ (۱)

۲ (۲)

۳ (۳)

۴ (۴)



دروس Box

آمپرسنج در مدار به صورت سری بسته می‌شود و جریان کل مدار را نشان می‌دهد.

$$I = \frac{\varepsilon}{R_{eq} + r}$$

مقاومت آمپرسنج آرمانی صفر است، بنابراین اگر اشتباهاً آن را در مدار به صورت موازی ببندیم، مانند اتصال کوتاه عمل می‌کند و جزئی از مدار که به آن بسته شده از مدار حذف می‌شود. ولت‌سنج در مدار به صورت موازی به هر جزء بسته می‌شود. اگر ولت‌سنج به مقاومت متصل شود، عدد RI را نشان می‌دهد و اگر بر مولد متصل شود در صورتی که جریان در مدار برقرار نباشد، نیرو محرکه مولد (ε) را نشان می‌دهد و اگر جریان در مدار برقرار باشد ولت‌سنج عدد $V = \varepsilon - rI$ را نشان می‌دهد. اگر اشتباهاً ولت‌سنج آرمانی را در مدار سری ببندیم به دلیل این که مقاومت آن بی‌نهایت است، جریان در مدار صفر می‌شود. توان خروجی باتری برابر است با توان تولیدی آن منهای توان تلف‌شده توسط مقاومت درونی:

$$P_{\text{خروجی}} = (\varepsilon I) - (rI^2)$$

توان تولیدی توان تلف‌شده

اگر در مدار یک مولد، یک ولت‌سنج متصل به آن و یک روستا داشته باشیم و مقاومت خارجی را تغییر دهیم و به ازای دو جریان توان خروجی باتری یکسان باشد، به ازای میانگین آن‌ها توان خروجی از باتری بیشینه است.

$$I = \frac{I_1 + I_2}{2}$$

این شدت جریان در شرایطی ایجاد می‌شود که مقاومت خارجی با مقاومت درونی باتری برابر شود.

$$R_{eq} = r$$

پاسخ خیلی تشریحی ✓ گام اول: ولتاژ دو سر باتری با ولتاژ دو سر مقاومت متغیر برابر است. در نتیجه:

$$V = \frac{1}{3}\varepsilon \Rightarrow \varepsilon - rI = \frac{1}{3}\varepsilon \Rightarrow rI = \frac{2}{3}\varepsilon \quad (1)$$

$$RI = \frac{1}{3}\varepsilon \quad (2)$$

گام دوم: عبارت‌های (۱) و (۲) را بر یکدیگر تقسیم می‌کنیم:

$$\frac{rI}{RI} = \frac{\frac{2}{3}\varepsilon}{\frac{1}{3}\varepsilon} \Rightarrow \frac{r}{R} = 2 \Rightarrow R = \frac{r}{2}$$

گام سوم: جریان عبوری از مولد را در دو حالت محاسبه می‌کنیم:

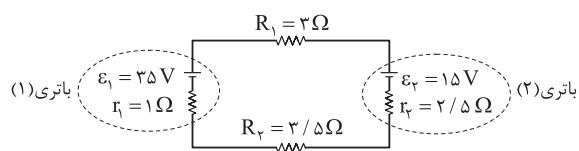
$$\text{حالت اول} \Rightarrow I = \frac{\varepsilon}{R + r} \Rightarrow I = \frac{\varepsilon}{\frac{r}{2} + r} \Rightarrow I = \frac{2\varepsilon}{3r} \quad (3)$$

$$\text{حالت دوم} \Rightarrow I' = \frac{\varepsilon}{r + r} \xrightarrow{I' = \frac{1+5}{2} = 3} 3 = \frac{\varepsilon}{2r} \Rightarrow \frac{\varepsilon}{r} = 6 \quad (4)$$

از روابط (۳) و (۴) نتیجه می‌گیریم:

$$I = \frac{2}{3}(6) = \frac{12}{3} \Rightarrow I = 4A$$

۴۴ در مدار شکل زیر، چند درصد از توان ورودی به باتری (۲) به صورت انرژی شیمیایی در آن ذخیره می‌شود؟



۵۰ (۴)

۶۰ (۳)

۷۵ (۲)

۸۰ (۱)



پاسخ خیلی تشریحی ✓ گام اول: ابتدا جریان عبوری از مدار را محاسبه می‌کنیم:

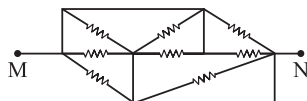
$$I = \frac{\varepsilon}{R_{eq} + r} \Rightarrow I = \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{R_1 + R_2 + r_1 + r_2} \Rightarrow I = \frac{3.5 - 1.5}{3 + 3/5 + 1 + 2/5} \Rightarrow I = \frac{2}{10} = 0.2 \text{ A}$$

گام دوم: نسبت توان ذخیره شده در باتری (۲) به صورت انرژی شیمیایی به توان ورودی به آن به عنوان مصرف کننده (ضد مولد)

را به صورت زیر محاسبه و درصد آن را مشخص می‌کنیم:

$$\frac{\varepsilon I}{\varepsilon I + r I^2} \times 100 \Rightarrow \frac{\varepsilon I}{(\varepsilon + r I) I} \times 100 \Rightarrow \frac{1.5}{(1.5 + (2/5)(0.2))} \times 100 \Rightarrow \frac{1.5}{2} \times 100 = 75\%$$

۴۵ در شکل زیر، اگر مقدار هر یک از مقاومت‌ها برابر R باشد، مقاومت معادل بین دو نقطه M و N چند برابر R است؟



(۱) $\frac{1}{8}$

(۲) $\frac{1}{7}$

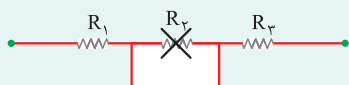
(۳) $\frac{1}{6}$

(۴) $\frac{1}{5}$

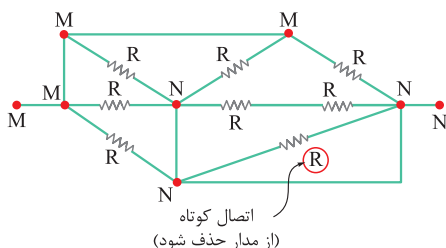


درس‌Box

اتصال کوتاه: هرگاه دو سر یک مقاومت توسط سیم به هم متصل شود، آن مقاومت اتصال کوتاه شده و از مدار حذف می‌شود.



تذکر: اگر چند مقاومت سری باشند و یکی از آن‌ها اتصال کوتاه شود، فقط همان مقاومت از مدار حذف می‌شود. اما اگر چند مقاومت با یکدیگر موازی باشند و یکی از آن‌ها اتصال کوتاه شود، تمامی مقاومت‌های دیگر که با آن موازی هستند نیز از مدار حذف می‌شوند.



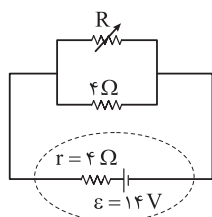
پاسخ خیلی تشریحی ✓

مقاومت‌ها در شاخه‌های جداگانه بین نقاط M و N بسته شده‌اند و با یکدیگر موازی‌اند:

$$R_{eq} = \frac{R}{n} \Rightarrow R_{eq} = \frac{R}{3}$$

در مدار شکل زیر، در مدتی که مقاومت متغیر به طور پیوسته از $4\ \Omega$ تا $12\ \Omega$ افزایش می‌یابد، بیشینه توان خروجی باتری

چند وات است؟



(۱) $12/25$

(۲) 12

(۳) $11/5$

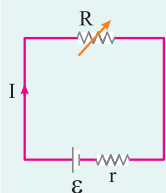
(۴) 11



درس‌Box

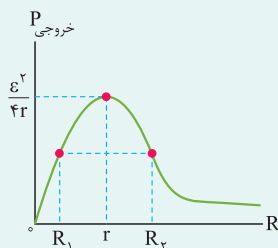
تغییرات توان خروجی باتری بر حسب مقاومت معادل مدار

در مدار ساده شکل زیر، می‌خواهیم ببینیم با تغییر مقاومت R ، توان خروجی از باتری چگونه تغییر می‌کند. با توجه به این که توان خروجی از باتری، همان توان مصرف‌شده در مقاومت R است، می‌توان گفت:



$$\begin{cases} I = \frac{\varepsilon}{r + R} \\ P_{\text{خروجی}} = RI^2 \end{cases} \Rightarrow P_{\text{خروجی}} = \frac{\varepsilon^2 R}{(r + R)^2}$$

حال با توجه به این رابطه، نمودار توان خروجی را بر حسب مقاومت رسم می‌کنیم که در این نمودار نکات زیر دارای اهمیت زیادی است:



(۲) اگر $R < r$ باشد، نمودار به صورت صعودی است، یعنی با افزایش مقاومت R ، توان خروجی از باتری افزایش می‌یابد.

(۳) اگر $R > r$ باشد، نمودار به صورت نزولی است، یعنی با افزایش مقاومت R ، توان خروجی از باتری کاهش می‌یابد.

(۴) اگر به ازای دو مقاومت R_1 و R_2 ، توان خروجی از باتری یکسان باشد، آن‌گاه رابطه $R_1 R_2 = r^2$ یا $r = \sqrt{R_1 R_2}$ برقرار است.

پاسخ خیلی تشریحی ✓ اگر $R = 4\ \Omega$ باشد داریم:

$$R_{\text{eq}} = \frac{4}{2} = 2\ \Omega$$

$$P = \frac{\varepsilon^2 R_{\text{eq}}}{(r + R_{\text{eq}})^2} \Rightarrow P = \frac{14^2 \times 2}{(4 + 2)^2} \Rightarrow P = 11\ \text{W}$$

اگر $R = 12\ \Omega$ باشد داریم:

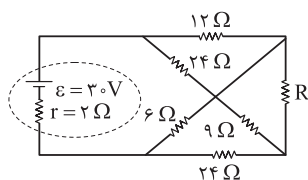
$$R_{\text{eq}} = \frac{4 \times 12}{16} = 3\ \Omega$$

$$P = \frac{\varepsilon^2 R_{\text{eq}}}{(r + R_{\text{eq}})^2} \Rightarrow P = \frac{14^2 \times 3}{(4 + 3)^2} \Rightarrow P = 12\ \text{W}$$

که بیشینه توان خروجی $12\ \text{W}$ وات می‌باشد.

حواستان باشد که وقتی مقاومت معادل از $2\ \Omega$ به $3\ \Omega$ می‌رسد، توان خروجی باتری به طور پیوسته در حال افزایش است.

در مدار شکل زیر، اگر اختلاف پتانسیل الکتریکی دو سر باتری، برابر ۲۶ V باشد، مقاومت R چند اهم است؟



۲۴ (۱)

۱۸ (۲)

۱۲ (۳)

۹ (۴)

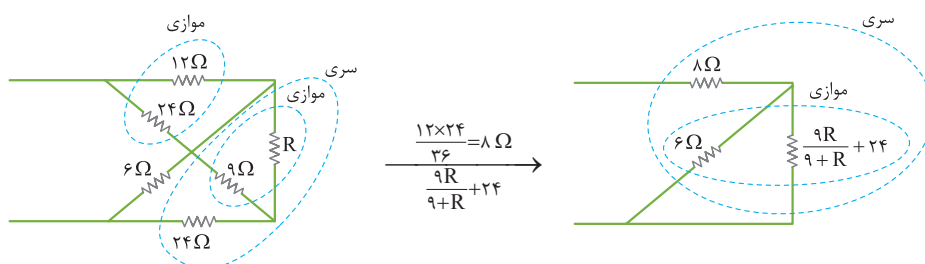


پاسخ خیلی تشریحی ✓ اختلاف پتانسیل دو سر باتری برابر است با:

$$V = \varepsilon - rI \Rightarrow 26 = 30 - 2I \Rightarrow 2I = 4 \Rightarrow I = 2 \text{ A}$$

حال می‌توانیم مقاومت معادل مدار را مشخص کنیم:

$$I = \frac{\varepsilon}{R_{eq} + r} \Rightarrow 2 = \frac{30}{R_{eq} + 2} \Rightarrow R_{eq} = 13 \Omega$$

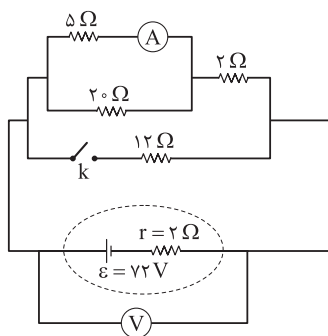


در این جا می‌توانیم گزینه‌ها را به جای R قرار دهیم تا جواب درست مشخص گردد:

$$\text{گزینه (۲)} \xrightarrow{R=18\Omega} \frac{9 \times 18}{27} + 24 = 30 \Rightarrow \frac{30 \times 6}{36} = 5 \Rightarrow R_{eq} = 8 + 5 = 13 \Omega$$

در مدار شکل زیر، اگر کلید k را وصل کنیم، مقداری که آمپرسنج آرمانی و ولتسنج آرمانی نشان می‌دهند، به ترتیب چند

آمپر و چند ولت تغییر می‌کنند؟



۱) ۶، ۰/۸

۲) ۶، ۱

۳) ۸، ۰/۸

۴) ۸، ۱

پاسخ خیلی تشریحی ✓

ابتدا در حالت اول که کلید باز است عدد ولتسنج و آمپرسنج را محاسبه می‌کنیم:

مقاومت 12Ω در این حالت از مدار حذف می‌شود.

$$5 \Omega, 20 \Omega \text{ موازی} \Rightarrow R_{\Delta, 20} = \frac{5 \times 20}{25} = 4 \Omega$$

$$R_{eq} = 4 + 2 = 6 \Omega$$

$$I = \frac{\varepsilon}{R_{eq} + r} \Rightarrow I = \frac{72}{6 + 2} = 9 \text{ A}$$

$$\frac{I_{\Delta}}{I_{20}} = \frac{R_{20}}{R_{\Delta}} \Rightarrow \frac{I_{\Delta}}{I_{20}} = \frac{20}{5} = 4 \Rightarrow I_{\Delta} = 4 I_{20} \Rightarrow I_{\Delta} = \frac{4}{5} \times 9 \text{ A} = 7.2 \text{ A}$$

$$V = R_{eq} I \Rightarrow V = 6 \times 9 = 54 \text{ V}$$

حال با بستن کلید، مقاومت 12Ω اهم به صورت موازی به مدار اضافه می‌شود:

$$R_{eq} = \frac{6 \times 12}{18} = 4 \Omega$$

$$I = \frac{\varepsilon}{R_{eq} + r} \Rightarrow I = \frac{72}{4 + 2} = 12 \text{ A}$$

$$\frac{I_{\Delta}}{I_{20}} = \frac{R_{20}}{R_{\Delta}} \Rightarrow \frac{I_{\Delta}}{I_{20}} = \frac{20}{5} = 4 \Rightarrow I_{\Delta} = 4 I_{20} \Rightarrow I_{\Delta} = \frac{4}{5} \times 12 \text{ A} = 9.6 \text{ A}$$

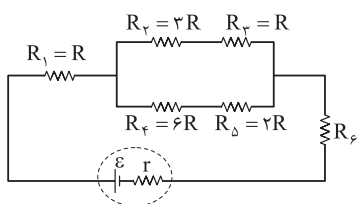
$$\frac{I_{\Delta}}{I_{20}} = \frac{R_{20}}{R_{\Delta}} \Rightarrow \frac{I_{\Delta}}{I_{20}} = \frac{20}{5} = 4 \Rightarrow I_{\Delta} = 4 I_{20} \Rightarrow I_{\Delta} = \frac{4}{5} \times 12 \text{ A} = 9.6 \text{ A}$$

$$V = R_{eq} I \Rightarrow V = 4 \times 12 = 48 \text{ V}$$

$$\Delta V = 48 - 54 = -6 \text{ V}, \Delta I = 9.6 - 7.2 = 2.4 \text{ A}$$

علامت منفی نشان‌دهنده کاهش یافتن عدد آمپرسنج و ولتسنج است.

۴۹ در مدار شکل زیر، اگر توان مصرفی مقاومت R_2 ، با توان مصرفی مقاومت R_6 برابر باشد، مقاومت R_6 چند برابر R است؟



(۱) $\frac{3}{2}$

(۲) $\frac{4}{3}$

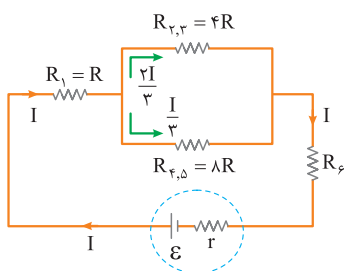
(۳) $\frac{5}{4}$

(۴) $\frac{5}{3}$



پاسخ خیلی تشریحی ✓

اگر جریان کل ورودی به انشعاب را بین شاخه‌های بالا و پایین تقسیم کنیم، جریان شاخه بالا ۲ برابر جریان شاخه پایین خواهد بود (چرا؟) بنابراین جریان مقاومت R_2 برابر با $2\frac{I}{3}$ خواهد شد. جریان مقاومت R_6 نیز I است. حال توان مصرفی این دو مقاومت را برابر قرار می‌دهیم:

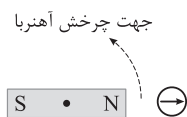


$$P = RI^2$$

$$P_2 = P_6 \Rightarrow 3R\left(2\frac{I}{3}\right)^2 = R_6(I)^2 \Rightarrow \frac{4}{3}RI^2 = R_6I^2$$

$$R_6 = \frac{4}{3}R$$

یک آهنربای میله‌ای روی سطح افقی میزی قرار دارد. مطابق شکل یک قطب‌نما را روی میز، مقابل قطب N آهنربا قرار می‌دهیم. اگر آهنربا را روی میز، حول محوری که از مرکز آن و عمود بر میز می‌گذرد، در جهت پادساعتگرد بچرخانیم، در طی این حرکت، عقربه مغناطیسی، چند درجه و در چه جهتی می‌چرخد؟



(۱) ۱۸۰° ، ساعتگرد

(۲) ۱۸۰° ، پادساعتگرد

(۳) ۳۶۰° ، ساعتگرد

(۴) ۳۶۰° ، پادساعتگرد

درس‌Box

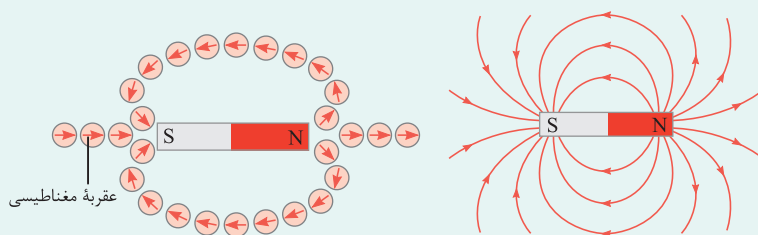
عقربه مغناطیسی یک آهنربای بسیار کوچک و سبک است که آن را با نماد $\rightarrow$ نشان می‌دهند. در این نماد نوک پیکان قطب N و ته آن قطب S است.

آهنربا در فضای اطراف خود خاصیتی به وجود می‌آورد که به موجب آن بر مواد مغناطیسی و آهنرباهای دیگر، نیروی مغناطیسی وارد می‌کند، به این خاصیت میدان مغناطیسی گفته می‌شود.

میدان مغناطیسی کمیتی برداری است و آن را با نماد $\vec{B}$ نمایش می‌دهند و یکای آن در SI، تسلا (T) است. گاهی از یکاهای کوچک‌تری به نام گاوس نیز برای آن استفاده می‌شود.

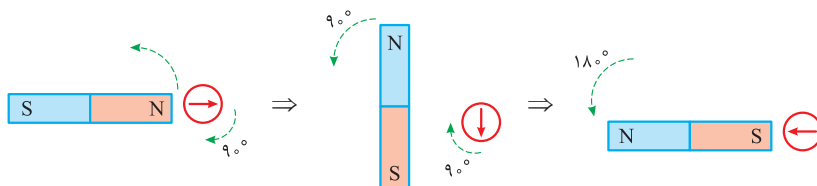
$$۱ \text{ G} = ۱۰^{-۴} \text{ T}$$

به کمک عقربه مغناطیسی می‌توان جهت میدان مغناطیسی را در هر نقطه از فضای اطراف یک آهنربا تعیین کرد. بنا به تعریف، بردار میدان مغناطیسی در هر نقطه از فضا پیرامون یک آهنربا در جهتی است که وقتی عقربه مغناطیسی در آن نقطه قرار می‌گیرد، قطب N عقربه، آن جهت را نشان می‌دهد. جهت خطوط میدان مغناطیسی در خارج آهنربا از قطب N به S و در داخل آن از قطب S به N است. خط‌های میدان مغناطیسی حلقه‌های بسته‌ای را تشکیل می‌دهند و در نزدیکی قطب‌های آهنربا به یکدیگر نزدیک‌ترند.

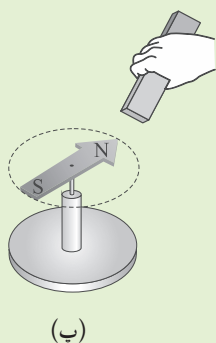


پاسخ خیلی تشریحی ✓

با چرخاندن آهنربا در جهت پادساعتگرد و به اندازه ۱۸۰° به صورت شکل قطب S در مقابل عقربه مغناطیسی قرار می‌گیرد. در نتیجه عقربه نیز باید طوری بچرخد که نوک آن (قطب N آن) در سمت قطب S آهنربا قرار بگیرد، در نتیجه عقربه نیز ۱۸۰° درجه می‌چرخد و چرخش آن مطابق شکل ساعتگرد است.



چه تعداد از موارد زیر درباره شکل‌های (الف)، (ب) و (پ)، درست است؟



(پ)



(ب)



(الف)

- شکل (الف): هنگامی که یک آهنربای دائمی برای چندین بار و در جهت‌های مختلف روی یک سوزن ته گرد کشیده می‌شود، سوزن برای مدتی آهنربا می‌شود.
- شکل (ب): قطب‌های مغناطیسی همواره به صورت زوج ظاهر می‌شوند.
- شکل (پ): آهنربا از سر قطب N به عقربه مغناطیسی نزدیک شده است.

۳ (۴)

۲ (۳)

۱ (۲)

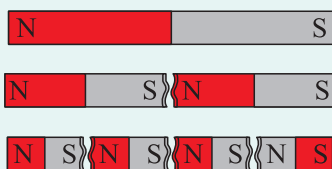
۱ (۱) صفر



درس‌Box

اگر آهنربا را به دفعات بشکنیم، هر قسمت به طور مستقل به قطب‌های N و S تبدیل شده و یک آهنربای جدید ایجاد می‌شود. بنابراین در طبیعت تک‌قطبی مغناطیسی نداریم. (شکل ۱)

هرگاه یک آهنربا را به میخ آهنی نزدیک کنیم، در میخ آهنی حتی بدون تماس با آهنربا خاصیت مغناطیسی ایجاد می‌شود که این پدیده را القای خاصیت مغناطیسی می‌نامیم. در القای خاصیت مغناطیسی میخ آهنی به یک آهنربا با قطب مخالف آهنربای اصلی تبدیل می‌شود و با دور کردن آهنربای اصلی خاصیت آهنربایی میخ از بین می‌رود. (شکل ۲)



شکل (۱)



شکل (۲)

تک‌تک عبارت‌ها را بررسی می‌کنیم: ✓ پاسخ خیلی تشریحی

- شکل الف: نادرست؛ باید آهنربای دائمی را چند بار و همواره در یک جهت روی سوزن ته‌گرد بکشیم تا برای مدتی آهنربا شود.
- شکل ب: درست؛ در طبیعت تک‌قطب مغناطیسی نداریم و با شکستن هر آهنربا، دو آهنربای جدید با قطب‌های N و S خواهیم داشت.
- شکل پ: نادرست؛ جهت‌گیری عقربه مغناطیسی در شکل به گونه‌ای است که آهنربا از سمت قطب S آن به آن نزدیک شده است.

شکل‌های زیر مسیر حرکت یک الکترون را در عبور از یک میدان مغناطیسی یکنواخت عمود بر صفحه کاغذ نشان می‌دهد. اگر نیروی مغناطیسی، تنها نیروی وارد بر الکترون باشد، جهت میدان مغناطیسی در شکل‌های (۱) و (۲) به ترتیب از راست به چپ، کدام است؟



(۱) درون سو - برون سو

(۲) برون سو - درون سو

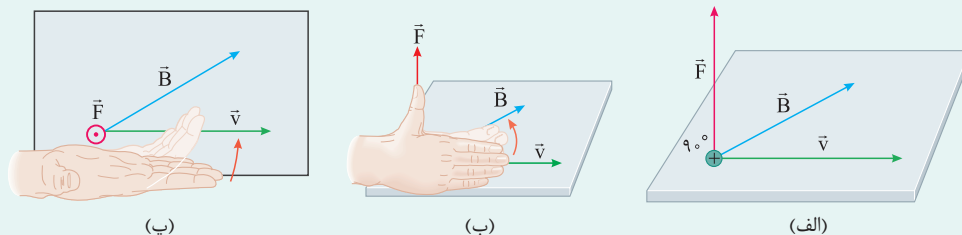
(۳) برون سو - برون سو

(۴) درون سو - درون سو



درس‌Box

آزمایش نشان می‌دهد که اگر ذره باردار q با سرعت $\vec{v}$ در میدان مغناطیسی $\vec{B}$ حرکت کند (به شرط آن که جهت حرکت آن با میدان مغناطیسی موازی نباشد) بر آن نیرویی وارد خواهد شد که مطابق شکل زیر بر راستای سرعت و میدان مغناطیسی عمود است. این نیرو را نیروی مغناطیسی می‌نامند و جهت آن به کمک قاعده دست راست تعیین می‌شود. اگر دست را طوری نگه داریم که انگشتان باز شده ما در جهت $\vec{v}$ باشد و کف دست (جهت چرخش انگشتان) در جهت میدان مغناطیسی قرار گیرد انگشت شست ما در جهت نیروی وارد بر ذره باردار مثبت است. توجه کنید که نیروی وارد بر بار منفی، در خلاف جهت نیروی وارد بر بار مثبت است.



اندازه نیروی مغناطیسی وارد بر بار الکتریکی در حال حرکت از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$F = |q| v B \sin \theta$$

F : نیروی وارد بر ذره باردار (N)

q : بار الکتریکی ذره (C)

v : سرعت حرکت ذره (m/s)

B : میدان مغناطیسی (T)

θ : زاویه بین جهت حرکت ذره و جهت میدان مغناطیسی

وقتی بار الکتریکی q عمود بر راستای میدان مغناطیسی حرکت کند، اندازه نیروی مغناطیسی وارد بر بار الکتریکی بیشینه می‌شود.

$$\theta = 90^\circ \Rightarrow \sin \theta = 1 \Rightarrow F_{\max} = |q| v B$$

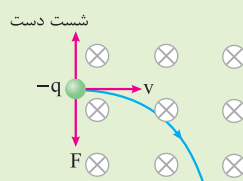
یکای SI میدان مغناطیسی به احترام نیکاتسلا دانشمند و مخترع نامی، تسلا نامیده می‌شود و به اختصار با نماد T نمایش داده می‌شود. به این ترتیب می‌توان نوشت:

$$1T = 1 \frac{N}{C \cdot \frac{m}{s}} = 1 \frac{N}{A \cdot m}$$

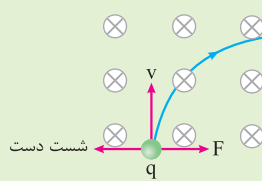
هرگاه ذره باردار با بار منفی (مثلاً الکترون) وارد یک میدان مغناطیسی شود، نیروی وارد بر آن و در نتیجه جهت حرکت ذره خلاف

جهتی است که شست دست راست نشان می‌دهد، بنابراین در هر دو شکل (۱) و (۲) با رسم جهت حرکت و جهت نیرو مشخص

است که کف دست عمود بر صفحه به سمت داخل (درون سو) است.



شکل (۱)



شکل (۲)

پاسخ خیلی تشریحی ✓

در شکل زیر، ذرهٔ بارداری با جرم ناچیز و تندی $v = 3 \text{ km/s}$ ، در امتداد محور x وارد فضایی می‌شود که میدان‌های یکنواخت $\vec{B} = 1500 \text{ G}$ و $\vec{E}$ وجود دارد، برای این که ذره در همان امتداد محور x به حرکت خود ادامه دهد، $\vec{E}$ بر حسب نیوتون بر کولن



کدام است؟

(۱) $500 \hat{j}$

(۲) $-500 \hat{j}$

(۳) $450 \hat{j}$

(۴) $-450 \hat{j}$



ابتدا نیروی میدان الکتریکی و مغناطیسی را برابر قرار دهید ($F_E = F_B$) تا اندازهٔ میدان الکتریکی به دست آید و سپس با توجه به این که جهت نیروی میدان مغناطیسی رو به بالا است، جهت نیرو و میدان الکتریکی را مشخص کنید.

نیروی الکتریکی وارد بر بار الکتریکی در یک میدان الکتریکی: گرچه برای تعریف میدان الکتریکی یک جسم باردار از بار آزمون مثبت استفاده کردیم، ولی وجود این میدان مستقل از بار آزمون است. بنابراین، اگر بار الکتریکی ذره‌ای q در میدان الکتریکی $\vec{E}$ ناشی از اجسام باردار دیگری قرار گیرد، این میدان بر آن نیروی $\vec{F}$ را وارد می‌کند. نیروی $\vec{F}$ از رابطهٔ زیر به دست می‌آید:

$$\vec{F} = q\vec{E}$$

بزرگی این نیرو از رابطهٔ $F = |q|E$ به دست می‌آید و جهت آن اگر q مثبت باشد، در همان جهت $\vec{E}$ و اگر q منفی باشد، در خلاف جهت $\vec{E}$ خواهد بود.

Hint

درس‌Box

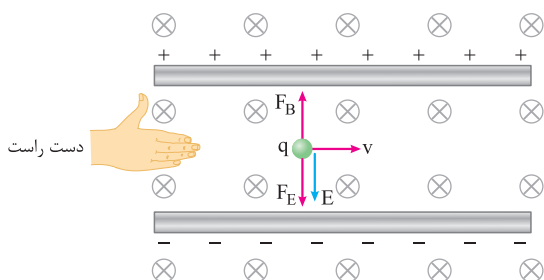
پاسخ خیلی تشریحی

مطابق شکل به ذرهٔ باردار در این فضا دو نیرو، یکی از سمت میدان مغناطیسی و یکی از سمت میدان الکتریکی وارد می‌شود. برای این که ذرهٔ باردار بدون انحراف به حرکت خود ادامه دهد، باید نیروی خالص وارد بر آن صفر شود یعنی نیروی‌های میدان‌های مغناطیسی و الکتریکی هم‌اندازه و خلاف جهت باشند، با توجه به قانون دست راست اگر فرض کنیم بار q مثبت است، نیروی میدان مغناطیسی رو به بالا و در نتیجه نیروی میدان الکتریکی رو به پایین می‌باشد. پس جهت میدان الکتریکی نیز هم جهت با نیروی وارد بر بار مثبت و رو به پایین است.

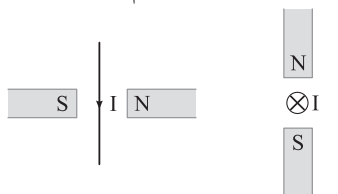
$$F_B = F_E \Rightarrow qvB = Eq \Rightarrow vB = E$$

$$E = 3 \times 10^3 \times 1500 \times 10^{-4} \Rightarrow E = 450 \text{ N/C}$$

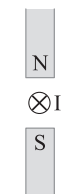
که با توجه به شکل $E = -450 \hat{j} \text{ N/C}$ صحیح است.



جهت نیروی مغناطیسی وارد بر سیم حامل جریان در شکل‌های (۱) و (۲)، به ترتیب از راست به چپ کدام است؟



شکل (۱)



شکل (۲)

(۱) $\odot$ ، $\rightarrow$

(۲) $\odot$ ، $\leftarrow$

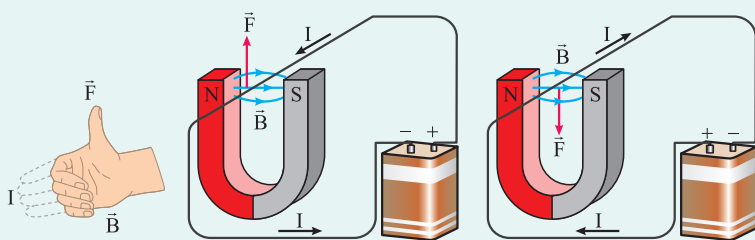
(۳) $\otimes$ ، $\rightarrow$

(۴) $\otimes$ ، $\leftarrow$



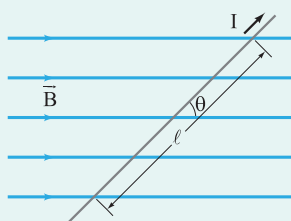
درس‌Box

میدان مغناطیسی، بر سیم حامل جریان نیروی مغناطیسی وارد می‌کند. براساس آزمایش‌های اورستد، نیرویی که در میدان مغناطیسی بر سیم حامل جریان الکتریکی وارد می‌شود، بر راستای سیم و نیز بر راستای میدان مغناطیسی عمود است. جهت نیروی وارد بر سیم حامل جریان در میدان مغناطیسی را می‌توان با استفاده از قاعدهٔ درست راست تعیین کرد.



نیروی مغناطیسی وارد بر یک سیم رسانای حامل جریان در میدان مغناطیسی یکنواخت به عامل‌های مختلفی بستگی دارد:

$$F = ILB \sin \theta$$



F : نیروی مغناطیسی وارد بر سیم حامل جریان (N)

I : جریان الکتریکی (A)

L : طول سیم درون میدان مغناطیسی (m)

B : میدان مغناطیسی (T)

θ : زاویهٔ بین جهت میدان مغناطیسی و جهت جریان سیم

اگر سیم موازی خطوط میدان مغناطیسی قرار بگیرد:

$$\theta = 0^\circ \Rightarrow \sin \theta = 0 \Rightarrow F = 0$$

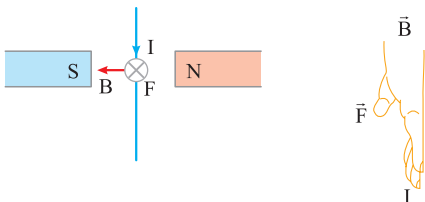
اگر سیم عمود بر خطوط میدان مغناطیسی قرار گیرد:

$$\theta = 90^\circ \Rightarrow \sin \theta = 1 \Rightarrow F_{\max} = ILB$$

در شکل (۱) جهت میدان مغناطیسی به سمت چپ (از N به S) است؛ بنابراین با توجه به جهت جریان، نیروی وارد بر سیم (قانون

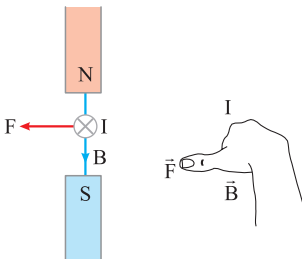
پاسخ خیلی تشریحی ✓

دست راست) درون سو خواهد بود.



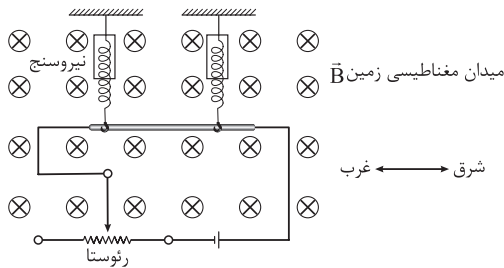
در شکل (۲) جهت میدان مغناطیسی به سمت پایین (از N به S) است؛ بنابراین با توجه به جهت جریان، نیروی وارد بر سیم به

سمت چپ خواهد بود.



۵۵

در شکل زیر، سیمی به طول 1 m و جرم $4/5\text{ g}$ ، حامل جریان الکتریکی 100 A ، با دو نیروسنج فتری که به دو انتهای آن بسته شده‌اند، به طور افقی و در راستای غرب - شرق، عمود بر میدان مغناطیسی یکنواخت زمین به بزرگی $50\text{ }\mu\text{T}$ قرار دارد. اگر با تغییر مقاومت رنوستا، جریان عبوری از سیم دو برابر شود، مقداری که هر یک از نیروسنج‌ها نشان می‌دهند، چند درصد و چگونه تغییر می‌کند؟ ($g = 10\text{ m/s}^2$)



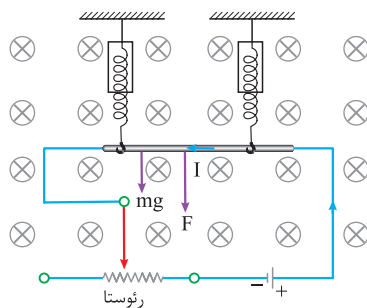
(۱) 10% ، افزایش می‌یابد.

(۲) 10% ، کاهش می‌یابد.

(۳) 20% ، افزایش می‌یابد.

(۴) 20% ، کاهش می‌یابد.

پاسخ خیلی تشریحی ✓ گام اول: ابتدا نیروهای وارد بر نیروسنج در حالت اول را محاسبه می‌کنیم:



$$F = ILB \Rightarrow F = 100 \times 1 \times 50 \times 10^{-6} = 5 \times 10^{-3} \text{ N}$$

$$W = mg = 4/5 \times 10^{-3} \times 10 = 8 \times 10^{-3} \text{ N}$$

$$F_{\text{net}} = F + mg = 13 \times 10^{-3} \text{ N}$$

$$F_{\text{هر نیروسنج}} = \frac{13 \times 10^{-3}}{2} = 6.5 \times 10^{-3} \text{ N}$$

گام دوم: اگر جریان عبوری از سیم دو برابر شود، نیروی خالص وارد بر سیم برابر است با:

$$F' = 20 \times 10^{-3} \text{ N}$$

$$mg = 8 \times 10^{-3} \text{ N}$$

$$F'_{\text{net}} = 28 \times 10^{-3} \text{ N}$$

$$F'_{\text{هر نیروسنج}} = \frac{28 \times 10^{-3}}{2} = 14 \times 10^{-3} \text{ N}$$

گام سوم: درصد تغییرات نیرو را به صورت زیر محاسبه می‌کنیم:

$$\frac{\Delta F}{F_1} \times 100 \Rightarrow \frac{14 - 6.5}{6.5} \times 100 = 100\%$$

اگر نیروی اولیه وارد بر سیم را x و وزن را چون $9x$ ، برابر آن است، $9x$ در نظر بگیریم با توجه به این که جریان 2 برابر شد، نیروی وارد بر آن نیز $2x$ برابر یعنی $2x$ می‌گردد؛ بنابراین:

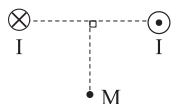
$$\text{حالت اول } F_{\text{net}} = x + 9x = 10x \Rightarrow F_{\text{هر نیروسنج}} = 5x$$

$$\text{حالت دوم } F'_{\text{net}} = 2x + 9x = 11x \Rightarrow F'_{\text{هر نیروسنج}} = 5.5x$$

$$\text{درصد تغییرات} = \frac{0.5x}{5x} \times 100 = 10\%$$

تیزبازی

در شکل زیر از دو سیم بلند و موازی، جریان‌های الکتریکی یکسان عمود بر صفحه کاغذ عبور می‌کند. نوع نیروی مغناطیسی بین این دو سیم و جهت میدان مغناطیسی خالص ناشی از آن‌ها در نقطه M واقع بر عمود منصف خط واصل دو سیم به ترتیب کدام است؟



(۱) جاذبه، ↓

(۲) دافعه، ↑

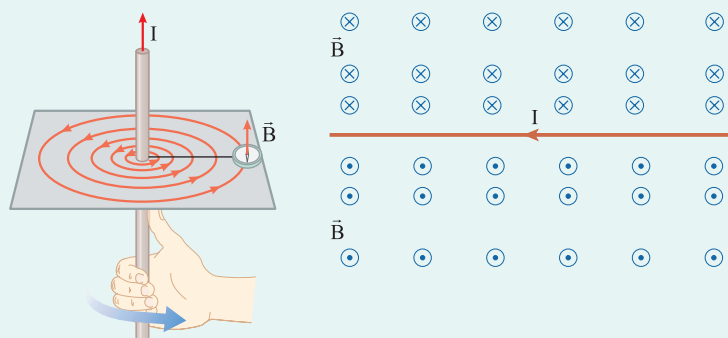
(۳) جاذبه، ↑

(۴) دافعه، ↓

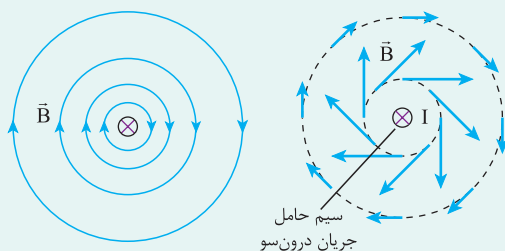


درس‌Box

اوستد دانشمند دانمارکی کشف کرد که عبور جریان الکتریکی از یک سیم رسانا، در اطراف آن یک میدان مغناطیسی به وجود می‌آورد. خط‌های میدان مغناطیسی حاصل از یک سیم حامل جریان، مطابق شکل به صورت دایره‌های هم مرکز در اطراف سیم حامل جریان هستند. جهت میدان مغناطیسی را با استفاده از قاعده دست راست می‌توان تعیین کرد. مطابق این قاعده اگر سیم را در دست راست خود بگیرید به گونه‌ای که شست در جهت جریان الکتریکی باشد، جهت چرخش انگشتان دست شما جهت خط‌های میدان مغناطیسی در اطراف سیم را نشان می‌دهد. اگر سیم را در صفحه نشان دهیم، میدان در یک سمت آن درون سو و در سمت دیگر آن به صورت برون سو خواهد بود. به عنوان مثال در شکل زیر جهت جریان سیم رو به بالا است، بنابراین:

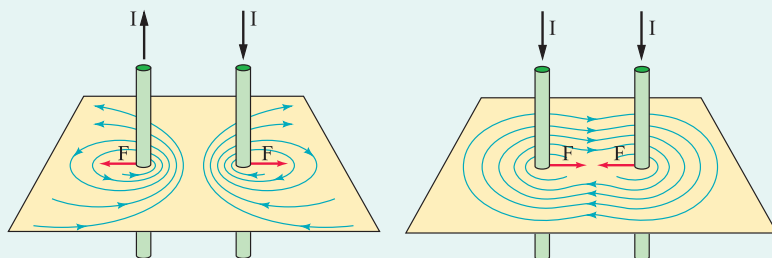


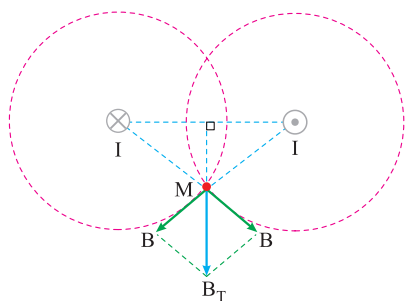
حال اگر به سیم حامل جریان از بالا نگاه کنیم جریان عبوری از سیم را به صورت درون سو یا برون سو می‌بینیم و میدان مغناطیسی اطراف آن را به صورت دایره‌های هم مرکز مشاهده می‌کنیم که خط مماس بر میدان در هر نقطه جهت میدان مغناطیسی را نشان می‌دهد. به عنوان مثال اگر در سیمی جریان رو به پایین باشد و ما از بالا به آن نگاه کنیم خواهیم داشت:



نیروی بین سیم‌های موازی حامل جریان:

اگر برای تولید میدان مغناطیسی به جای آهنربا، از یک سیم حامل جریان استفاده کنیم و سیم حامل جریان دیگری را در نزدیکی این سیم قرار دهیم، دو سیم به یکدیگر نیرو وارد می‌کنند. به طوری که اگر جریان‌ها در یک جهت از دو سیم موازی بگذرند، نیروی بین آن‌ها راباشی است و اگر جریان‌ها در دو جهت مخالف از دو سیم موازی بگذرند، نیروی بین آن‌ها رانشی است.





با توجه به این که جهت جریان در دو سیم خلاف هم است نیروی بین آن‌ها رانشی (دافعه) است. حال با استفاده از قاعده دست راست میدان مغناطیسی (دایره) اطراف هر سیم را رسم و جهت آن را مشخص کرده و در نقطه M خط مماس بر میدان را رسم می‌کنیم.

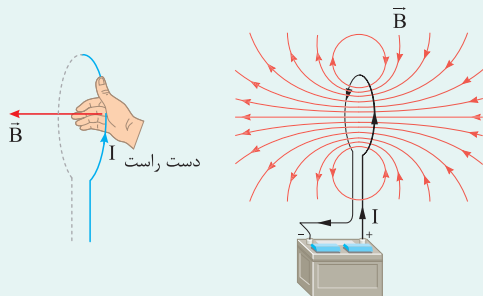
شعاع دو حلقه رسانا، یکسان و جریان الکتریکی عبوری از آن‌ها برابر است. حلقه‌ها به صورت هم مرکز قرار دارند و سطح آن‌ها بر هم عمود است. اگر جریان عبوری از یکی از حلقه‌ها نصف و جریان عبوری از حلقه دیگر دو برابر شود، اندازه میدان مغناطیسی در مرکز مشترک حلقه‌ها چند برابر می‌شود؟

$$\begin{array}{ll} \sqrt{5} \quad (1) & \frac{\sqrt{5}}{2} \quad (2) \\ \frac{\sqrt{17}}{2} \quad (3) & \frac{\sqrt{34}}{4} \quad (4) \end{array}$$

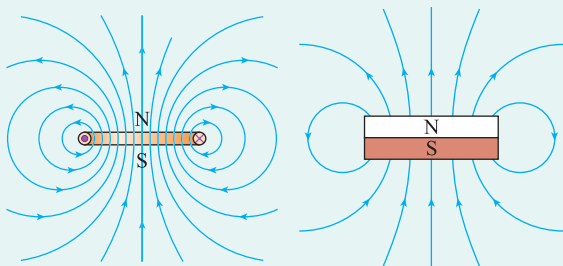


میدان مغناطیسی ناشی از یک حلقه دایره‌ای حامل جریان

مطابق شکل در اطراف یک حلقه رسانای دایره‌ای شکل حامل جریان میدان مغناطیسی ایجاد می‌شود. همان‌طور که می‌بینید خط‌های میدان مغناطیسی در ناحیه داخل حلقه به یکدیگر نزدیک‌ترند؛ یعنی میدان در این ناحیه قوی‌تر است. افزون بر این، در نقطه‌های روی محور حلقه، میدان موازی محور است. جهت خط‌های میدان مغناطیسی حلقه را می‌توان با قاعده دست راست مطابق شکل زیر نشان داد.



بررسی و مقایسه میدان مغناطیسی یک حلقه حامل جریان و یک آهنربای تخت دایره‌ای شکل، نشان می‌دهد که میدان مغناطیسی آن‌ها درست مانند یکدیگر است. به همین دلیل هر حلقه حامل جریان را به عنوان یک دوقطبی مغناطیسی در نظر می‌گیرند.



اندازه میدان مغناطیسی در مرکز پیچهای که حامل جریان است از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$B = \frac{\mu_0 NI}{2R}$$

B: میدان مغناطیسی (T)

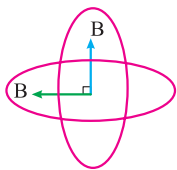
$$\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{ T.m/A} \quad \text{تراوایی مغناطیسی خلأ}$$

N: تعداد دورها

I: جریان الکتریکی (A)

R: شعاع پیچه (m)

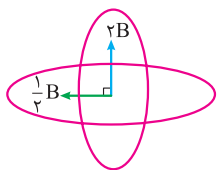
پاسخ خیلی تشریحی ✓ گام اول: اندازه میدان مغناطیسی برابند را در حالت اول محاسبه می‌کنیم:



$$B = \frac{\mu_0 I}{2R} \Rightarrow B_x = B_y = B$$

$$B_t = \sqrt{B_x^2 + B_y^2} = B\sqrt{2}$$

گام دوم: با تغییرات بیان شده در صورت تست مجدداً میدان مغناطیسی برابند را محاسبه می کنیم.



$$\frac{I'_x}{I_x} = \frac{1}{2} \Rightarrow B'_x = \frac{1}{2} B$$

$$\frac{I'_y}{I_y} = 2 \Rightarrow B'_y = 2B$$

$$B'_t = \sqrt{\left(\frac{1}{2}B\right)^2 + (2B)^2} \Rightarrow B'_t = \sqrt{\frac{1}{4}B^2 + 4B^2} = \sqrt{\frac{17}{4}B^2} \Rightarrow B'_t = \frac{B}{2}\sqrt{17}$$

گام سوم: نسبت میدان مغناطیسی در حالت دوم به حالت اول را به دست می آوریم:

$$\frac{B'_t}{B_t} = \frac{\frac{B}{2}\sqrt{17}}{B\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{34}}{4}$$

شعاع پیچۀ مسطح A ، ۲ برابر شعاع پیچۀ مسطح B و جریان الکتریکی عبوری از پیچۀ B ، ۲ برابر جریان الکتریکی عبوری از پیچۀ A است. اگر اندازه میدان مغناطیسی پیچۀ B در مرکز، ۴ برابر اندازه میدان مغناطیسی پیچۀ A در مرکز باشد، طول سیم استفاده شده برای ساخت پیچۀ B ، چند برابر طول سیم استفاده شده برای ساخت پیچۀ A است؟

۸ (۴)

۴ (۳)

۲ (۲)

۱ (۱)



پاسخ خیلی تشریحی ✓

$$B = \frac{\mu_0 NI}{2R} \Rightarrow 4B_A = B_B \Rightarrow \frac{4\mu_0 N_A I_A}{2R_A} = \frac{\mu_0 N_B I_B}{2R_B} \Rightarrow \frac{4N_A (2I_B)}{2R_B} = \frac{N_B I_B}{R_B}$$

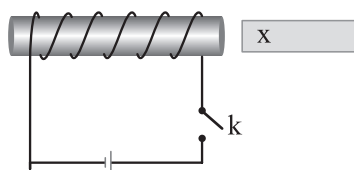
$$\Rightarrow N_A = \frac{1}{4} N_B$$

همان طور که می دانیم طول سیمی که پیچۀ را با آن ساخته ایم در رابطه با تعداد دورهای آن به صورت زیر قرار می گیرد.

$$N = \frac{L}{2\pi R} \Rightarrow \frac{L_B}{L_A} = \frac{N_B}{N_A} \times \frac{R_B}{R_A}$$

$$\Rightarrow \frac{L_B}{L_A} = 4 \times \frac{1}{2} = 2$$

در شکل زیر با بسته شدن کلید k ، آهنربای میله‌ای توسط آهنربای الکتریکی جذب می‌شود. نوع قطب انتهای X آهنربای میله‌ای و جهت میدان مغناطیسی در داخل آهنربای الکتریکی به ترتیب کدام است؟



(۱) N ، $\leftarrow$

(۲) S ، $\leftarrow$

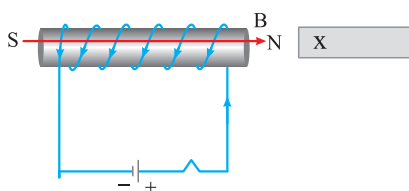
(۳) N ، $\rightarrow$

(۴) S ، $\rightarrow$



پاسخ خیلی تشریحی ✓

با بستن کلید k سیم‌لوله تبدیل به یک آهنربا می‌شود که اگر طبق قاعده دست راست جهت چرخش چهار انگشت را در جهت جریان قرار دهیم، شست، جهت میدان درون سیم‌لوله را نشان می‌دهد. بنابراین قطب‌های سیم‌لوله را این‌گونه نام‌گذاری می‌کنیم و چون آهنربا توسط سیم‌لوله جذب می‌شود، نتیجه می‌گیریم که X قطب ناهم‌نام با N یعنی قطب S است و جهت میدان مغناطیسی داخل سیم‌لوله از S به N و به سمت راست است.



سیم‌لوله‌ای به طول ۳۰ cm، دارای ۲۰۰ حلقه است و از آن جریان الکتریکی ۴ A عبور می‌کند. اندازه میدان مغناطیسی درون

سیم‌لوله چند گاوس است؟ ($\mu_0 = 12 \times 10^{-7} \frac{T \cdot m}{A}$)

۳۲۰ (۴)

۱۶۰ (۳)

۳۲ (۲)

۱۶ (۱)



با کمک رابطه ($B = \frac{\mu_0 NI}{L}$) اندازه میدان مغناطیسی درون سیم‌لوله را بر حسب تسلا محاسبه کنید و سپس آن را در عدد 10^{+4} ضرب کنید تا به گاوس تبدیل شود.

Hint

پاسخ خیلی تشریحی ✓

$$B = \frac{\mu_0 NI}{L} \Rightarrow B = \frac{12 \times 10^{-7} \times 200 \times 4}{30 \times 10^{-2}} \Rightarrow B = \frac{12 \times 2 \times 4 \times 10^{-5}}{3 \times 10^{-1}} = 32 \times 10^{-4} \text{ T}$$

$$B = 32 \times 10^{-4} \times 10^4 = 32 \text{ G}$$

۶۱ کدام گزینه درست است؟

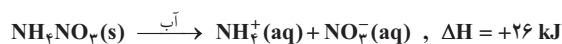
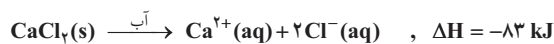
- (۱) محلول هیدروژن پراکسید در حضور دو قطره پتاسیم کلرید، به سرعت تجزیه شده و گاز اکسیژن تولید می‌کند.
- (۲) فلزهای قلیایی متفاوت به سرعت با آب سرد واکنش می‌دهند که این امر نشان‌دهنده تأثیر دما بر سرعت واکنش است.
- (۳) الیاف آهن داغ و سرخ‌شده در هوا با سرعت کمی می‌سوزد، در حالی که همان مقدار الیاف آهن در یک ارلن پراز اکسیژن به سرعت می‌سوزد.
- (۴) پاشیدن گرد آهن بر روی شعله برخلاف قرار گرفتن آن در کپسول چینی، موجب سوختن آن می‌شود که این امر نشان‌دهنده تأثیر سطح تماس بر سرعت واکنش است.



پاسخ خیلی تشریحی ✓ بررسی سایر گزینه‌ها:

- گزینه (۱): محلول هیدروژن پراکسید در دمای اتاق به کندی تجزیه شده و گاز اکسیژن تولید می‌کند، در حالی که افزودن دو قطره از محلول پتاسیم یدید (نه پتاسیم کلرید)، سرعت واکنش را به طور چشمگیری افزایش می‌دهد.
- گزینه (۲): فلزهای قلیایی سدیم و پتاسیم در شرایط یکسان با آب سرد به شدت واکنش می‌دهند، اما سرعت واکنش‌ها متفاوت است. ← نشان‌دهنده تأثیر نوع واکنش‌دهنده بر سرعت واکنش است.
- گزینه (۳): الیاف آهن داغ و سرخ‌شده در هوا **نمی‌سوزد**، در حالی که همان مقدار الیاف آهن داغ و سرخ‌شده در یک ارلن پراز اکسیژن می‌سوزد. ← نشان‌دهنده تأثیر غلظت بر سرعت واکنش است.

با توجه به معادله‌های گرمایشیایی زیر، از انحلال برای گرم کردن محل آسیب دیده بدن استفاده می‌شود و انحلال ۰/۲ مول از ماده دیگر در آب، کیلوژول گرما با محیط مبادله می‌شود.

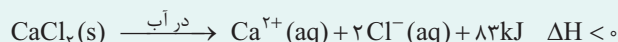


بسته‌های گرمازا و سرمازا:

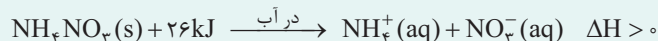
دروس Box

حل شدن (انحلال) برخی از ترکیب‌های یونی در آب گرماگیر و انحلال برخی دیگر از این ترکیب‌ها در آب گرماده است. اساس کار بسته‌های گرمازا و سرمازایی که ورزشکاران برای درمان آسیب دیدگی خود استفاده می‌کنند، **انحلال یک حل‌شونده یونی** (ترکیب یونی) در آب است. در واقع هر بسته، یک کیسه پلاستیکی است که درون آن بسته کوچکی آب همراه با مقدار معینی از یک جامد یونی وجود دارد. ضربه زدن یا فشار دادن کیسه پلاستیکی باعث پاره شدن بسته آب شده و جامد یونی در آن حل می‌شود؛ انحلالی که *زود، تند، سریع!* باعث رد و بدل گرما با محیط می‌شود.

مثال: انحلال کلسیم کلرید (CaCl_2) در آب گرماده است، به طوری که بر اثر انحلال ۱ مول از این ترکیب در آب، ۸۳ کیلوژول گرما آزاد می‌شود؛ در نتیجه بر اثر انحلال این نمک در آب، دمای محلول افزایش می‌یابد و گرما به سرعت به بدن ورزشکار منتقل می‌شود.



مثال: انحلال آمونیوم نیترات (NH_4NO_3) در آب گرماگیر است؛ به طوری که برای انحلال ۱ مول از این ترکیب در آب، ۲۶ کیلوژول گرما باید جذب شود؛ در نتیجه بر اثر انحلال این نمک در آب، دمای محلول کاهش می‌یابد. به همین خاطر از آمونیوم نیترات در بسته‌های سرمازا استفاده می‌شود.



جمع بندی:

انحلال کلسیم کلرید در آب ← گرماده ← دمای بسته افزایش می‌یابد. ← بسته‌های گرمازا

انحلال آمونیوم نیترات در آب ← گرماگیر ← دمای بسته کاهش می‌یابد. ← بسته‌های سرمازا

انحلال CaCl_2 در آب، گرماده و انحلال NH_4NO_3 در آب، گرماگیر است؛ بنابراین از CaCl_2 برای گرم کردن محل آسیب دیدگی و از NH_4NO_3 ، برای سرد کردن محل آسیب دیدگی استفاده می‌شود. با توجه به پاسخ قسمت اول سؤال، برای قسمت دوم باید گرمای مبادله شده به ازای انحلال ۰/۲ مول آمونیوم نیترات را حساب کنیم:

$$0.2 \text{ mol NH}_4\text{NO}_3 \times \frac{26 \text{ kJ}}{1 \text{ mol NH}_4\text{NO}_3} = 5.2 \text{ kJ}$$

پاسخ خیلی تشریحی ✓

یک ورزشکار برای تأمین انرژی خود در روند مسابقه، ۲۰۰ گرم از نوعی شکلات را مصرف کرده است که ۳۰ درصد جرمی آن را پروتئین تشکیل داده است و به میزان برابری چربی و کربوهیدرات در آن وجود دارد. اگر این شکلات را فقط حاوی کربوهیدرات، چربی و پروتئین در نظر بگیریم، این شکلات چند کیلوکالری انرژی برای بدن ورزشکار تأمین می‌کند؟ (ارزش سوختی کربوهیدرات و پروتئین $17 \text{ kJ} \cdot \text{g}^{-1}$ و چربی $38 \text{ kJ} \cdot \text{g}^{-1}$ است و $1 \text{ cal} = 4/2 \text{ kJ}$)

$$4700 \text{ (2)}$$

$$1190 \text{ (1)}$$

$$4870 \text{ (4)}$$

$$1159 \text{ (3)}$$



پاسخ خیلی تشریحی ✓ با توجه به میزان چربی، کربوهیدرات و پروتئین موجود در شکلات داریم:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{پروتئین} = \frac{3}{100} \times 200 = 60 \text{ g} \\ \text{چربی} = \frac{35}{100} \times 200 = 70 \text{ g} \\ \text{کربوهیدرات} = \frac{35}{100} \times 200 = 70 \text{ g} \end{array} \right.$$

انرژی آزادشده از سوخت و ساز ۲۰۰ گرم شکلات برابر است با مجموع انرژی حاصل از سوختن پروتئین، چربی و کربوهیدرات آن؛ بنابراین:

$$Q_{\text{چربی}} = m_{\text{چربی}} \times \text{ارزش سوختی چربی} = 70 \times 38 = 2660 \text{ kJ}$$

$$Q_{\text{پروتئین}} = m_{\text{پروتئین}} \times \text{ارزش سوختی پروتئین} = 60 \times 17 = 1020 \text{ kJ}$$

$$Q_{\text{کربوهیدرات}} = m_{\text{کربوهیدرات}} \times \text{ارزش سوختی کربوهیدرات} = 70 \times 17 = 1190 \text{ kJ}$$

$$Q_{\text{کل}} = 4870 \text{ kJ}$$

از آنجایی که میزان انرژی برحسب کیلوکالری خواسته شده، داریم:

$$4870 \text{ kJ} \times \frac{1 \text{ kcal}}{4/2 \text{ kJ}} = \frac{4870}{4/2} \approx 1159 \text{ kcal}$$

حواستون باشه اگه واحد رو به کالری تبدیل نکنید، ۴۸۷۰ رو که انرژی برحسب کیلوژول هست رو انتخاب می‌کنید و تو تله میفتین!

گول نخوری

۶۴ کدام گزینه نادرست است؟

- (۱) چهره آشکار ردپای غذا نشان می‌دهد که سالانه حدود ۳۰٪ غذایی که در جهان فراهم می‌شود، به مصرف نمی‌رسد.
- (۲) یکی از چهره‌های پنهان ردپای غذا، شامل همه منابعی است که در تهیه غذا از آغاز تا سر سفره سهم داشته‌اند.
- (۳) تولید گاز کربن دی‌اکسید به عنوان چهره پنهان ردپای غذا، به مراتب کم‌تر از سوختن سوخت‌ها در خودروها و کارخانه‌ها است.
- (۴) در دهه‌های گذشته، الگوی توسعه پایدار و الگوی مصرف غذا دو مسیر متفاوت را طی کرده و میزان مساحت مورد نیاز برای تأمین اقلام ضروری افزایش یافته است.



ردپای غذا دارای دو چهره آشکار و پنهان است:

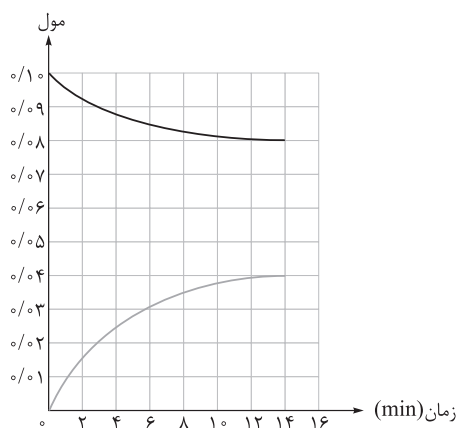
- (۱) **چهره آشکار:** چهره آشکار نشان می‌دهد که سالانه حدود ۳۰٪ غذایی که در جهان فراهم می‌شود، به مصرف نمی‌رسد و به زباله تبدیل می‌شود و یا از بین می‌رود. این در حالی است که آمارها نشان می‌دهد که به ازای هر هفت نفر در جهان، یک نفر گرسنه است! خبری که هدررفتن منابع اقتصادی را آشکار می‌سازد.
- (۲) **چهره پنهان:** چهره پنهان این ردپا شامل همه منابعی است که در تهیه غذا از آغاز تا سر سفره سهم داشته‌اند. مدیریت منابع، نیروی انسانی برای تولید و تأمین مواد اولیه و انرژی، فراوری، ابزار و دستگاه‌های مورد نیاز، بسته‌بندی، حمل‌ونقل، آب و انرژی مصرفی، زمین‌های بایر و ... از جمله این منابع هستند.
- چهره پنهان این ردپا، تولید گازهای گلخانه‌ای به‌ویژه کربن دی‌اکسید است، آن‌چنان که سهم تولید این گاز در ردپای غذا به مراتب بیش از سوختن سوخت‌ها در خودروها، کارخانه‌ها و ... است.

پاسخ خیلی تشریحی ✓ بررسی گزینه‌ها:

چهره آشکار، مربوط به تولید زباله (درستی گزینه (۱)) و ردپای پنهان، مربوط به تهیه غذا و منابع آن (درستی گزینه (۲)) و تولید کربن دی‌اکسید و گازهای گلخانه‌ای است که سهم آن از سوختن سوخت‌ها نیز بیشتر است (نادرستی گزینه (۳)). با توجه به افزایش تقاضا برای غذا و رشد جمعیت جهان، الگوی مصرف، صعودی و الگوی توسعه پایدار، نزولی بوده و مساحت مورد نیاز برای تأمین اقلام ضروری نیز افزایش یافته است (درستی گزینه (۴)).

۶۵

با توجه به نمودار زیر که به تغییرات مول‌های واکنش‌دهنده و فراورده نسبت به زمان در واکنش $X(g) \rightarrow 2Z(g)$ مربوط است، سرعت متوسط مصرف X در ۱۲ دقیقه اول، چند مول بر ساعت است؟



۰/۱ (۱)

۰/۲ (۲)

۰/۳ (۳)

۰/۴ (۴)

پاسخ خیلی تشریحی ✓

منحنی نزولی مربوط به واکنش‌دهنده X است.

در ۱۲ دقیقه اول، مقدار X از ۰/۱۰ به ۰/۰۸ مول رسیده است، یعنی به اندازه ۰/۰۲ مول تغییر کرده است:

$$\bar{R}(X) = \frac{0.10 \text{ mol} - 0.08 \text{ mol}}{12 \text{ min}} \times \frac{60 \text{ min}}{1 \text{ h}} = 0.1 \text{ mol.h}^{-1}$$

چند مورد از مطالب زیر، درست است؟

- آهنک واکنش، معیاری برای زمان ماندگاری مواد است و اگر در گستره‌ای از زمان بیان شود، به آن سرعت واکنش می‌گویند.
- در شرایط یکسان، آهنک تجزیه سلولز موجود در کاغذ، بسیار بیشتر از آهنک زنگ‌زدن آهن است.
- هر چه گستره زمانی انجام یک تغییر کوچک‌تر باشد، آهنک انجام آن تندتر است و زمان انجام واکنش‌ها، گستره‌ای از چند صدم ثانیه تا چند سده می‌باشد.
- زنگار حاصل از واکنش زنگ‌زدن آهن، ترکیبی ترد و شکننده است و در شرایط یکسان، آهنک تغییر رنگ میوه‌ها از آهنک تغییر رنگ یک ظرف نقره‌ای، کم‌تر است.

چهار (۴)

یک (۳)

سه (۲)

دو (۱)



پاسخ خیلی تشریحی ✓ عبارتهای اول و سوم درست‌اند.

بررسی عبارتهای نادرست:

عبارت دوم: واکنش تجزیه سلولز کاغذ جزء واکنش‌های بسیار کند و واکنش زنگ‌زدن آهن، جزء واکنش‌های کند محسوب می‌شود؛ یعنی آهنک تجزیه سلولز کاغذ کم‌تر از آهنک زنگ‌زدن آهن است.

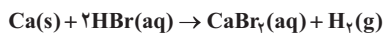
عبارت چهارم: آهنک تغییر رنگ میوه‌ها بیشتر از آهنک تغییر رنگ ظروف نقره‌ای است؛ مثلاً موز در ۵ روز تغییر رنگ می‌دهد، در حالی که تغییر رنگ یک ظرف نقره‌ای حدود ۵ ماه طول می‌کشد.



مقایسه آهنک چند فرایند طبیعی

کدام مورد درباره واکنش ۲ گرم کلسیم با ۱۰۰ میلی لیتر محلول ۸/۱ درصد جرمی هیدروبرمیک اسید با چگالی 1.2 g.mL^{-1} درست است؟

($\text{Br} = 80$, $\text{Ca} = 40$, $\text{H} = 1$: g.mol^{-1})



(۱) اگر حجم ظرف واکنش نصف شود، سرعت مصرف کلسیم دو برابر می شود.

(۲) با افزودن ۵۰ میلی لیتر محلول ۱/۲ مولار HBr به مخلوط اولیه واکنش، سرعت تولید گاز هیدروژن، ۱/۵ برابر می شود.

(۳) با افزودن سه میلی لیتر آب خالص به محلول اولیه، سرعت واکنش کاهش می یابد.

(۴) با افزودن کاتالیزگر مناسب، سرعت تولید گاز هیدروژن همانند شمار مول های نهایی آن، افزایش می یابد.



پاسخ خیلی تشریحی ✓

با افزودن آب، محلول رقیق شده و غلظت آن کاهش می یابد؛ از این رو سرعت واکنش کاهش می یابد.

بررسی سایر گزینه ها:

گزینه (۱): با تغییر حجم ظرف واکنش، سرعت واکنش تغییر نمی کند، زیرا مواد واکنش دهنده جامد و محلول هستند و با تغییر حجم ظرف، سرعت واکنش هایی که واکنش دهنده گازی دارند، تغییر می کند.

گزینه (۲): ابتدا غلظت HBr اولیه را با توجه به فرمول $M = \frac{10 \cdot a \cdot d}{m}$ به دست می آوریم:

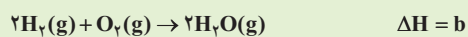
(جرم مولی: m ، چگالی: d ، درصد جرمی: a ، غلظت مولار: M)

$$M = \frac{10 \times 8 / 1 \times 1 / 2}{81} = 1 / 2 \text{ mol.L}^{-1}$$

از آن جایی که غلظت محلول اولیه با محلول اضافه شده برابر است، سرعت واکنش تغییر نمی کند.

گزینه (۴): کاتالیزورها باعث افزایش سرعت واکنش می شوند، ولی تأثیری در پیشرفت واکنش ندارند و میزان فراورده ها در انتهای واکنش در حضور و عدم حضور کاتالیزگر، تغییری نمی کند.

با توجه به واکنش‌های زیر، ΔH واکنش $4\text{NH}_3(\text{g}) + 6\text{NO}(\text{g}) \rightarrow 5\text{N}_2(\text{g}) + 6\text{H}_2\text{O}(\text{g})$ کدام است؟



$$a + 3b + 3c \quad (2)$$

$$a + 3b - 3c \quad (1)$$

$$a - 3b + 3c \quad (4)$$

$$a - 3b - 3c \quad (3)$$



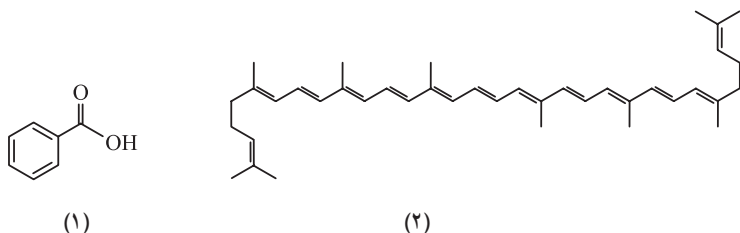
پاسخ خیلی تشریحی ✓ برای رسیدن به واکنش مورد نظر، واکنش اول نباید تغییر کند (به دلیل 4NH_3). واکنش سوم را برای ایجاد 6NO در سمت

چپ، وارونه کرده و در ۳ ضرب می‌کنیم و در نهایت برای از بین بردن H_2 که در معادله اصلی وجود ندارد، واکنش دوم را نیز

وارونه کرده و در ۳ ضرب می‌کنیم.

$$\Delta H = \Delta H_1 - 3\Delta H_2 - 3\Delta H_3 = a - 3b - 3c$$

با توجه به ساختارهای داده شده، کدام گزینه درست است؟



(۱) ترکیب (۱) بنزآلدهید است که به عنوان نگهدارنده، واکنش هایی که منجر به فساد مواد غذایی می شود را کاهش می دهد.

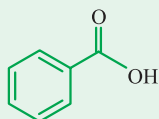
(۲) ترکیب (۲) لیکوپن با فرمول $C_{40}H_{56}$ است که فعالیت رادیکال ها را کاهش داده و به عنوان بازدارنده باعث به دام افتادن آن ها می شود.

(۳) ریزمغذی های آروماتیک مانند ترکیب (۲)، در تمشک، توت فرنگی و گوجه فرنگی یافت می شوند.

(۴) ترکیب (۱) ایزومر ماده آلی موجود در بادام بوده و عضوی از خانواده کربوکسیلیک اسیدها است.

بنزآلدهید

(۱) نگهدارنده ها، سرعت واکنش های شیمیایی که منجر به فساد ماده غذایی می شود را کاهش می دهند. یکی از این مواد، بنزوئیک اسید است که در تمشک و توت فرنگی وجود دارد:

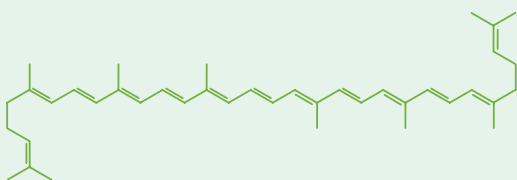


بنزوئیک اسید، یک کربوکسیلیک اسید آروماتیک است.

این ترکیب آلی عضوی از خانواده کربوکسیلیک اسیدها است. خانواده ای که در ساختار هر عضو آن یک یا چند گروه عاملی کربوکسیل ($COOH$) وجود دارد. آشناترین عضو آن، اتانویک (استیک) اسید با فرمول CH_3COOH است.

(۲) رادیکال، گونه فعال و ناپایداری است که در ساختار خود، الکترون جفت نشده دارد، در واقع، محتوی اتم هایی است که از قاعده هشت تایی پیروی نمی کنند. بدیهی است که رادیکال ها واکنش پذیری بالایی دارند.

در بدن ما به دلیل انجام واکنش های متنوع و پیچیده، رادیکال هایی به وجود می آیند که اگر به وسیله بازدارنده ها جذب نشوند، می توانند با انجام واکنش های سریع به بافت های بدن آسیب برسانند. با این توصیف، مصرف خوراکی های محتوی بازدارنده ها سبب خواهد شد که رادیکال ها به دام بیفتند تا با کاهش مقدار آن ها از سرعت واکنش های ناخواسته کاسته شود.



هندوانه و گوجه فرنگی محتوی لیکوپن بوده که فعالیت رادیکال ها را کاهش می دهد.

لیکوپن با فرمول مولکولی $C_{40}H_{56}$ ، دارای ۱۳ پیوند دوگانه و ترکیبی غیرآروماتیک است که به عنوان بازدارنده باعث کاهش

فعالیت رادیکال ها و به دام انداختن آن ها می شود.

بررسی سایر گزینه ها:

گزینه (۱): بنزوئیک اسید سرعت فساد مواد غذایی را کاهش می دهد، نه بنزآلدهید!

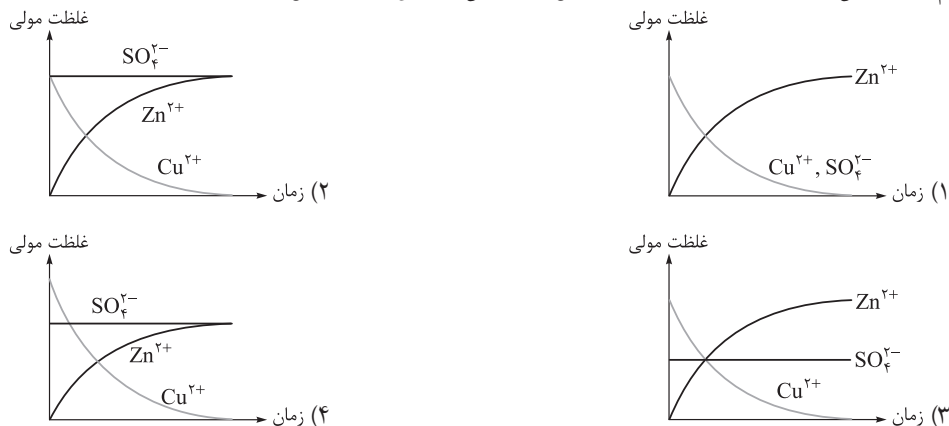
گزینه (۳): لیکوپن ترکیبی غیرآروماتیک است که در هندوانه و گوجه فرنگی یافت می شود.

گزینه (۴): ترکیب موجود در بادام، بنزآلدهید با فرمول مولکولی C_7H_6O است، در صورتی که فرمول مولکولی بنزوئیک اسید

$C_7H_6O_2$ است و این دو ترکیب ایزومر نیستند.

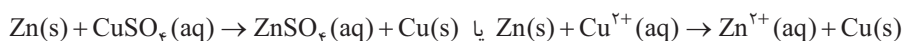
پاسخ خیلی تشریحی ✓

کدام نمودار را می‌توان به تغییر غلظت یون‌ها در واکنش مقدار کافی فلز روی با محلول مس (II) سولفات نسبت داد؟



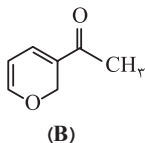
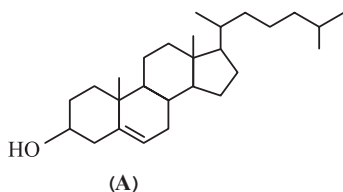
پاسخ خیلی تشریحی ✓

معادله واکنش انجام شده به صورت زیر است:



با انجام واکنش، یون‌های Cu^{2+} مصرف و یون‌های Zn^{2+} تولید می‌شوند؛ بنابراین با گذشت زمان غلظت Cu^{2+} کاهش و غلظت Zn^{2+} افزایش می‌یابد. در ضمن به دلیل برابری ضریب این یون‌ها در معادله واکنش شیب نمودار آن‌ها با هم برابر است. یون‌های سولفات (SO_4^{2-}) در این واکنش نقش یون ناظر یا تماشاچی دارند و غلظت آن‌ها تغییری نمی‌کند؛ هم‌چنین در محلول اولیه (CuSO_4)، غلظت یون‌های Cu^{2+} و SO_4^{2-} با هم برابر است.

۷۱ با توجه به ترکیب‌های داده شده، پاسخ درست پرسش‌های زیر به ترتیب کدام است؟



الف) کم‌ترین آنتالپی پیوند در ترکیب B مربوط به کدام پیوند است؟

ب) کدام گروه عاملی در ترکیب‌های A و B وجود ندارد؟

پ) شمار اتم‌های هیدروژن در ترکیب B، چند برابر شمار الکترون‌های ناپیوندی ترکیب A است؟

۲) C—O، اتری، ۴

۱) C—C، آلدهید، ۲

۴) C—C، آلدهید، ۴

۳) C—O، اتری، ۲

پاسخ خیلی تشریحی ✓ ترکیب A دارای گروه عاملی هیدروکسیل (OH-) می‌باشد و یک اتم اکسیژن دارد و دارای دو جفت الکترون ناپیوندی

(۴ الکترون ناپیوندی) است. ترکیب B گروه عاملی اتری (—O—) و کتونی (—C(=O)—) دارد و فرمول مولکولی آن $C_7H_8O_2$ است و ۸ اتم هیدروژن در ساختار خود دارد.

پیوندهای موجود در ترکیب B شامل C—O، C—C، C=C، C—H و C=O است که کم‌ترین آنتالپی پیوند مربوط به پیوند C—C است که یگانه بوده و طول پیوند بیشتری دارد. (نادرستی گزینه‌های (۲) و (۳))

گروه عاملی آلدهیدی در ترکیب‌های A و B وجود ندارد. (نادرستی گزینه‌های (۲) و (۳))

نسبت شمار اتم‌های هیدروژن در ترکیب B به شمار الکترون‌های ناپیوندی ترکیب A برابر $\frac{8}{4} = 2$ است. (درستی گزینه (۱))

حواستون باشد که اگر در قسمت «پ» به کلمه شمار الکترون‌های ناپیوندی دقت نکنید و جفت الکترون‌های ناپیوندی را در نظر بگیرید، حاصل $\frac{8}{2} = 4$ و جواب، گزینه (۴) می‌شود.

گول نخوری ✗

۷۲ ۱۰ مول گاز آمونیاک را در یک ظرف ۵ لیتری در شرایط مناسب قرار می‌دهیم تا به گازهای نیتروژن و هیدروژن تجزیه شود. اگر سرعت متوسط واکنش در یک دقیقه اول، برابر $5 \times 10^{-3} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1} \cdot \text{s}^{-1}$ باشد، در پایان دقیقه اول، چند مول گاز در ظرف وجود دارد؟

- ۱۳ (۱) ۱۲ (۲) ۱۱ (۳) ۸ (۴)

پاسخ خیلی تشریحی ✓



$$\bar{R}_{(\text{واکنش})} = 5 \times 10^{-3} \frac{\text{mol}}{\text{L} \cdot \text{s}} \times 5 \text{ L} \times \frac{60 \text{ s}}{1 \text{ min}} = 1.5 \text{ mol} \cdot \text{min}^{-1}$$

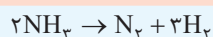
می‌توانیم با توجه به سرعت واکنش، مول مصرف‌شده و تولیدی مواد را حساب کنیم:

$$\bar{R}_{(\text{N}_2)} = \bar{R}_{(\text{واکنش})} \Rightarrow \text{تولیدشده در ۱ دقیقه } \text{N}_2 = 1.5 \text{ mol}$$

$$\Rightarrow \text{مول H}_2 \text{ تولیدشده در ۱ دقیقه} = 3 \times 1.5 = 4.5 \text{ mol}$$

$$\text{NH}_3 \text{ باقی‌مانده} = 10 - 3 = 7 \text{ mol} \Rightarrow \text{مول NH}_3 \text{ مصرف‌شده در ۱ دقیقه} = 2 \times 1.5 = 3 \text{ mol}$$

$$\text{مجموع مول گازها پس از ۱ دقیقه} = 1.5 + 4.5 + 7 = 13 \text{ mol}$$



مول اولیه : ۱۰ ۰ ۰

مول پس از ۱ دقیقه : ۱۰-۲x x ۳x

$$\text{مجموع مول گازها} : (10 - 2x) + x + 3x = 10 + 2x \xrightarrow{x=1.5} 10 + (2 \times 1.5) = 13 \text{ mol}$$

بهمین‌طور دیگر

درستی یا نادرستی کدام گزینه با دیگر گزینه‌ها متفاوت است؟

- (۱) تهیه هیدروژن پراکسید از گازهای هیدروژن و اکسیژن به طور مستقیم ممکن نیست.
- (۲) قدرمطلق آنتالپی واکنش تولید ۱ مول کربن دی‌اکسید از کربن مونوکسید، بیشتر از سوختن ناقص ۱ مول کربن است.
- (۳) تأمین شرایط بهینه برای تولید گاز متان از واکنش میان گرافیت و گاز هیدروژن در آزمایشگاه، بسیار آسان است.
- (۴) با انجام واکنش: $2\text{CO(g)} + 2\text{NO(g)} \rightarrow 2\text{CO}_2\text{(g)} + \text{N}_2\text{(g)}$ ، گازهای آلاینده به گازهایی پایدارتر تبدیل می‌شوند.



پاسخ خیلی تشریحی ✓

گزینه (۳) برخلاف بقیه گزینه‌ها نادرست است.

بررسی گزینه‌ها:

- گزینه (۱): تهیه H_2O_2 از واکنش مستقیم گازهای هیدروژن و اکسیژن در آزمایشگاه امکان‌پذیر نیست، زیرا از واکنش مستقیم این مواد، آب تولید می‌شود که از هیدروژن پراکسید پایدارتر است.
- گزینه (۲): ΔH واکنش $\text{CO} + \frac{1}{2}\text{O}_2 \rightarrow \text{CO}_2$ حدود -283 kJ و ΔH واکنش $\text{C} + \frac{1}{2}\text{O}_2 \rightarrow \text{CO}$ حدود -111 kJ است.
- گزینه (۳): گاز متان را نمی‌توان از واکنش گرافیت و گاز هیدروژن در آزمایشگاه مطابق معادله $\text{C(s, گرافیت)} + 2\text{H}_2\text{(g)} \rightarrow \text{CH}_4\text{(g)}$ به دست آورد، زیرا تأمین شرایط بهینه برای انجام این واکنش، بسیار دشوار و پرهزینه است.
- گزینه (۴): طبق صفحه ۷۶ کتاب درسی، واکنش مورد نظر برای تبدیل آلاینده‌های CO و NO ، به گازهایی پایدارتر و با آلاینده‌گی کمتر به کار می‌رود.

کلسیم کربنات با محلول هیدروکلریک اسید در دمای 45°C و فشار ۱ اتمسفر مطابق معادله موازنه‌نشده زیر واکنش می‌دهد. مطابق جدول داده‌شده، در چه ثانیه‌ای واکنش به پایان می‌رسد و به تقریب، چند مول هیدروکلریک اسید در این واکنش مصرف شده است؟
($\text{C} = 12, \text{O} = 16 : \text{g.mol}^{-1}$)



زمان (s)	۰	۱۵	۳۰	۴۵	۶۰	۷۵	۹۰
جرم مخلوط واکنش (گرم)	۴۹/۶۵	۴۹/۰۰	۴۸/۳۸	۴۷/۷۸	۴۷/۲۰	۴۷/۲۰	۴۷/۲۰

$$2) 75 - 0.05$$

$$1) 60 - 0.11$$

$$4) 75 - 0.11$$

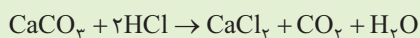
$$3) 60 - 0.055$$

پاسخ خیلی تشریحی ✓ از $t = 60 \text{ s}$ به بعد، جرم مخلوط واکنش ثابت باقی مانده است؛ بنابراین زمان پایان واکنش $t = 60 \text{ s}$ است.

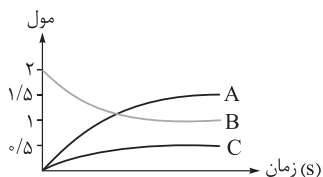
کاهش جرم مخلوط واکنش، به دلیل خروج گاز CO_2 از ظرف واکنش است:

$$\text{جرم CO}_2 \text{ تولیدشده} = 49/65 - 47/20 = 2/45 \text{ g}$$

حالا به کمک معادله موازنه‌شده واکنش، از جرم CO_2 به مول HCl می‌رسیم:



$$2/45 \text{ g CO}_2 \times \frac{1 \text{ mol CO}_2}{44 \text{ g CO}_2} \times \frac{2 \text{ mol HCl}}{1 \text{ mol CO}_2} = 0.11 \text{ mol HCl}$$



با توجه به نمودار داده شده، چند مورد از مطالب زیر به طور حتم درست است؟

(الف) مجموع ضرایب استوکیومتری مواد A و C، دو برابر B است.

(ب) می توان آن را به واکنش: $2\text{HF(g)} \rightarrow \text{H}_2\text{(g)} + \text{F}_2\text{(g)}$ ، نسبت داد.

(پ) با افزایش دمای مخلوط اولیه واکنش، مجموع شمار مول های نهایی

مواد در مخلوط پایانی واکنش به بیش از ۳ مول می رسد.

(ت) رابطه $\frac{-\Delta n_A}{3\Delta t} = \frac{\Delta n_B}{2\Delta t} = \frac{-\Delta n_C}{\Delta t}$ ، برقرار است.

۴ (۴)

۳ (۳)

۲ (۲)

۱ (۱)



در بازه زمانی معین، قدرمطلق میزان تغییرات تعداد مول یا غلظت مواد شرکت کننده در واکنش، متناسب با ضرایب استوکیومتری آنها است. به طور مثال در واکنش $2\text{SO}_2 + \text{O}_2 \rightarrow 2\text{SO}_3$ خواهیم داشت:

$$\Delta n(\text{SO}_3) = 2 | \Delta n(\text{O}_2) | \quad \text{یا} \quad \Delta[\text{SO}_3] = 2 | \Delta[\text{O}_2] |$$

برای واکنش به فرم $aA + bB \rightarrow cC + dD$ می توان نوشت:

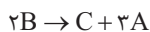
$$\bar{R}_{(\text{واکنش})} = \frac{\bar{R}(A)}{a} = \frac{\bar{R}(B)}{b} = \frac{\bar{R}(C)}{c} = \frac{\bar{R}(D)}{d}$$

فقط عبارت «الف» درست است.

پاسخ خیلی تشریحی ✓

بررسی عبارت ها:

(الف) می دانیم که با گذشت زمان، غلظت واکنش دهنده ها کاهش و غلظت فراورده ها افزایش می یابد، پس B واکنش دهنده و A و C فراورده های واکنش هستند. با توجه به شکل، تا پایان واکنش (لحظه افقی شدن نمودارها)، مقدار مول های A، B و C به ترتیب ۱/۵، ۱ و ۵/۰ واحد تغییر کرده است؛ بنابراین اگر ضریب C را ۱ در نظر بگیریم، ضرایب مواد A و B به ترتیب برابر ۲ و ۳ خواهد بود:



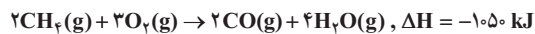
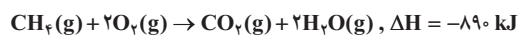
$$\frac{\text{مجموع ضرایب A و C}}{\text{ضریب B}} = \frac{4}{2} = 2$$

(ب) ضرایبی که به دست آوردیم، با واکنش $2\text{HF} \rightarrow \text{H}_2 + \text{F}_2$ همخوانی ندارد.

(پ) با توجه به نمودار، مجموع شمار مول های نهایی مواد برابر با $1/5 + 1 + 0/5 = 3$ است. دقت کنید که با افزایش دما، سرعت واکنش افزایش می یابد، اما شمار مول های نهایی مواد تغییری نمی کند.

(ت) A و C فراورده هستند و برای آنها نباید از علامت منفی استفاده کرد.

بر اثر سوختن متان در مقداری اکسیژن، مخلوطی از گازهای CO ، CO_2 و H_2O پدید می‌آید. اگر نسبت شمار مولکول‌های CO_2 به CO در مخلوط گازی فراورده‌ها برابر ۳ باشد، با توجه به واکنش‌های زیر، گرمای حاصل از سوختن $4^\circ/\text{mol}$ متان در این شرایط برابر با چند کیلوژول است؟



$$319/5 \text{ (2)}$$

$$281/5 \text{ (1)}$$

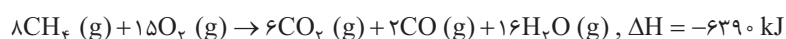
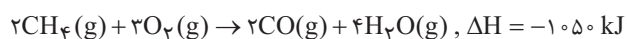
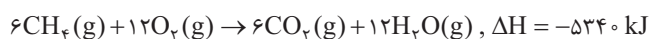
$$415/5 \text{ (4)}$$

$$391/5 \text{ (3)}$$



پاسخ خیلی تشریحی ✓

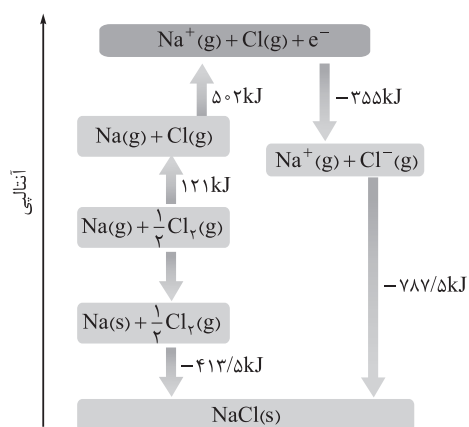
برای این که نسبت شمار مول‌های CO_2 به CO برابر ۳ شود، باید معادله اول را در ۶ ضرب کنیم:



حالا مقدار گرمای آزادشده را به ازای سوختن $4^\circ/\text{mol}$ متان به دست می‌آوریم:

$$4^\circ/\text{mol CH}_4 \times \frac{6390 \text{ kJ}}{8 \text{ mol CH}_4} = \frac{6390}{2} = 3195 \text{ kJ}$$

واکنش تشکیل سدیم کلرید از عنصرهای سازنده‌اش را می‌توان یک فرایند ۵ مرحله‌ای در نظر گرفت. با توجه به نمودار زیر، پاسخ درست



پرسش‌های زیر در کدام گزینه آمده است؟

(الف) آنتالپی فرازش ۱ مول سدیم، چند کیلوژول است؟

(ب) با ۱۴۲ kJ گرما، چند مول $\text{Cl}^-(\text{g})$ را می‌توان به $\text{Cl}(\text{g})$ تبدیل کرد؟

(۱) $170 - 2$

(۲) $106 - 4$

(۳) $106 - 2$

(۴) $170 - 4$



(الف) مراحل انجام فرایند و واکنش‌های انجام‌شده به صورت زیر است:

پاسخ خیلی تشریحی ✓

مرحله اول: $\text{Na}(\text{s}) \rightarrow \text{Na}(\text{g})$

$\Delta H_1 = x$

مرحله دوم: $\frac{1}{2} \text{Cl}_2(\text{g}) \rightarrow \text{Cl}(\text{g})$

$\Delta H_2 = +121 \text{ kJ}$

مرحله سوم: $\text{Na}(\text{g}) \rightarrow \text{Na}^+(\text{g}) + \text{e}^-$

$\Delta H_3 = +50.2 \text{ kJ}$

مرحله چهارم: $\text{Cl}(\text{g}) + \text{e}^- \rightarrow \text{Cl}^-(\text{g})$

$\Delta H_4 = -355 \text{ kJ}$

مرحله پنجم: $\text{Na}^+(\text{g}) + \text{Cl}^-(\text{g}) \rightarrow \text{NaCl}(\text{s})$

$\Delta H_5 = -787/5 \text{ kJ}$

از طرفی، مجموع قدرمطلق آنتالپی واکنش‌های سمت راست نمودار با مجموع قدرمطلق آنتالپی واکنش‌های سمت چپ نمودار برابر

است؛ پس آنتالپی فرایند فرازش ۱ مول سدیم ($\text{Na}(\text{s}) \rightarrow \text{Na}(\text{g})$) برابر است با:

$|-413/5| + x + 121 + 50.2 = |-355| + |-787/5| \Rightarrow x = 106 \text{ kJ}$

(ب) سطح انرژی $\text{Cl}(\text{g})$ به اندازه ۳۵۵ کیلوژول از سطح انرژی $\text{Cl}^-(\text{g})$ ، بالاتر است؛ پس برای تبدیل یک مول $\text{Cl}^-(\text{g})$ به یک

مول $\text{Cl}(\text{g})$ به ۳۵۵ کیلوژول انرژی نیاز است؛ بنابراین داریم:

$142 \text{ kJ} \times \frac{1 \text{ mol}}{355 \text{ kJ}} = 0.4 \text{ mol}$

در رابطه با واکنش موازنه نشده: $A \rightarrow B$ ، کدام مورد درست است؟

مشاوره این سؤال، شبیه‌ساز یکی از سؤالات کنکور ۱۴۰۳ است.

(۱) اگر سرعت متوسط تغییر جرم ماده A ، برابر با سرعت متوسط تغییر جرم ماده B باشد، ضریب استوکیومتری آن‌ها در معادله واکنش نیز برابر خواهد بود.

(۲) اگر ضریب استوکیومتری دو ماده A و B در معادله واکنش با هم برابر باشد، تغییر شمار مول‌های آن‌ها در واحد زمان نیز با هم برابر است.

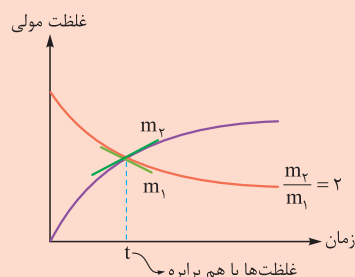
(۳) اگر نسبت اندازه شیب منحنی دو ماده A و B در نمودار «غلظت - زمان»، برابر $۵/۰$ باشد، هیچ‌گاه در یک لحظه معین غلظت آن‌ها با هم برابر نخواهد بود.

(۴) اگر جرم مولی ماده A ، ۳ برابر جرم مولی ماده B باشد، سرعت تغییر جرم ماده B در واحد زمان، ۳ برابر سرعت تغییر جرم ماده A است.

پاسخ خیلی تشریحی ✓ بررسی گزینه‌ها:

گزینه‌های (۱) و (۲): نسبت ضرایب استوکیومتری مواد در یک واکنش، با نسبت تغییرات تعداد مول یا غلظت آن‌ها رابطه مستقیم دارد. اگر علاوه بر یکسان بودن سرعت تغییر جرم، جرم مولی دو ماده A و B نیز با هم برابر باشد، تغییرات تعداد مول آن‌ها و در نتیجه ضریب استوکیومتری آن‌ها با هم برابر خواهد بود.

گزینه (۳): مثلاً اگر شیب نمودار B دو برابر A باشد، مطابق نمودار زیر، نمودار غلظت - زمان آن در یک نقطه همدیگر را قطع می‌کنند:

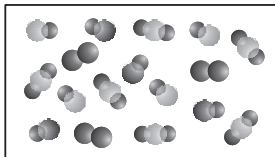


گزینه (۴): اگر ضریب استوکیومتری B ، با ضریب استوکیومتری A برابر باشد، با شرایط گفته شده، سرعت تغییر جرم B ، $\frac{1}{3}$ برابر A خواهد بود:

$$\frac{\text{جرم مولی } B \times \text{تغییر مول } B}{\text{جرم مولی } A \times \text{تغییر مول } A} = \frac{\text{نسبت ضریب } B}{\text{نسبت ضریب } A}$$

$$\frac{1}{3}$$

واکنش: $۲\text{CO(g)} + ۲\text{NO(g)} \rightarrow ۲\text{CO}_2\text{(g)} + \text{N}_2\text{(g)}$, $\Delta H = -۷۵۰ \text{ kJ}$ واکتش: $۰/۴$ مول از هریک از واکتش دهنده‌ها شروع می‌شود. اگر ترکیب درصد اجزای واکتش درون ظرف، ۳۰ دقیقه پس از شروع واکتش به صورت زیر باشد، به طور میانگین در هر دقیقه چند کیلوژول گرما آزاد شده است و سرعت متوسط مصرف NO ، به تقریب چند مولار بر ثانیه است؟ (هر ذره در شکل معادل $۰/۴$ مول ماده است. $\text{N}_2 = \bullet\bullet$ / $\text{NO} = \bullet\bullet$ / $\text{CO} = \bullet\bullet$ / $\text{CO}_2 = \bullet\bullet\bullet$)



۱) $۱/۳۳ \times ۱۰^{-۴}$

۲) $۱/۳۳ \times ۱۰^{-۴}$

۳) $۶/۶۷ \times ۱۰^{-۵}$

۴) $۶/۶۷ \times ۱۰^{-۵}$

پاسخ خیلی تشریحی ✓

پس از ۳۰ دقیقه، $۰/۱۲ = ۳ \times ۰/۰۴$ مول N_2 تولید شده است. با توجه به ΔH واکتش، خواهیم داشت:

$$۰/۱۲ \text{ mol N}_2 \times \frac{۷۵۰ \text{ kJ}}{۱ \text{ mol N}_2} = ۹۰ \text{ kJ} \xrightarrow{\text{به ازای ۱ دقیقه}} ۱ \text{ min} \times \frac{۹۰ \text{ kJ}}{۳۰ \text{ min}} = ۳ \text{ kJ}$$

پس از ۳۰ دقیقه، $۰/۲۴$ مول NO مصرف شده است (دو برابر تعداد مول N_2 تولیدی)؛ بنابراین خواهیم داشت:

$$\bar{R}_{\text{NO}} = \frac{۰/۲۴ \text{ mol}}{۳۰ \text{ min}} \times \frac{۱}{۱ \text{ L}} \times \frac{۱ \text{ min}}{۶۰ \text{ s}} \approx ۱/۳۳ \times ۱۰^{-۴} \text{ mol.L}^{-1}.\text{s}^{-1}$$

با توجه به جدول‌های زیر، اختلاف آنتالپی واکنش $C_2H_4(g) + H_2(g) \rightarrow C_2H_6(g)$ ، به کمک آنتالپی‌های سوختن و آنتالپی‌های پیوند، برحسب کیلوژول کدام است و کدام عدد برای آنتالپی واکنش داده‌شده برای یک گزارش علمی، معتبرتر است؟

آنتالپی سوختن ($kJ \cdot mol^{-1}$)	ماده	آنتالپی پیوند ($kJ \cdot mol^{-1}$)	پیوند
-۱۴۱۰	C_2H_4	۳۴۵	$C - C$
-۱۵۶۰	C_2H_6	۶۱۹	$C = C$
-۲۷۵	H_2	۴۱۵	$C - H$
		۴۳۶	$H - H$

(۲) ۱۰، -۱۲۵

(۱) ۵، -۱۲۵

(۴) ۱۰، -۱۲۰

(۳) ۵، -۱۲۰

درس‌Box

(۱) رابطه محاسبه ΔH یک واکنش گازی به کمک آنتالپی‌های پیوند:

$$\Delta H_{\text{واکنش}} = [\text{مجموع آنتالپی پیوندها در مواد فراورده}] - [\text{مجموع آنتالپی پیوندها در مواد واکنش‌دهنده}]$$

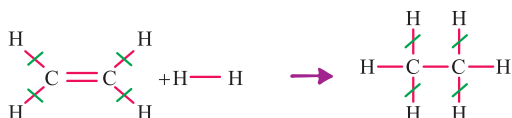
(۲) رابطه محاسبه ΔH یک واکنش به کمک آنتالپی‌های سوختن:

$$\Delta H_{\text{واکنش}} = [\text{مجموع آنتالپی سوختن فراورده‌ها}] - [\text{مجموع آنتالپی سوختن واکنش‌دهنده‌ها}]$$

پاسخ خیلی تشریحی ✓ گام اول: محاسبه ΔH واکنش به کمک آنتالپی‌های سوختن:

$$\Delta H = [\Delta H_{\text{سوختن}}(C_2H_4) + \Delta H_{\text{سوختن}}(H_2)] - [\Delta H_{\text{سوختن}}(C_2H_6)] = -۱۴۱۰ - ۲۷۵ - (-۱۵۶۰) = -۱۲۵ \text{ kJ}$$

گام دوم: محاسبه ΔH واکنش به کمک آنتالپی‌های پیوند:



$$\Delta H = [\Delta H(C = C) + \Delta H(H - H)] - [\Delta H(C - C) + 2\Delta H(C - H)] = [619 + 436] - [345 + 2(415)] = -120 \text{ kJ}$$

گام سوم: اختلاف ΔH محاسبه‌شده به دو روش، ۵ kJ است، اما گزارش ΔH واکنش به روش آنتالپی سوختن، علمی‌تر است، زیرا در روش دوم، آنتالپی پیوندهای $C = C$ ، $C - C$ و $C - H$ در واقع میانگین آنتالپی پیوند هستند که اعداد دقیق نیستند.

به کار بردن میانگین آنتالپی پیوندها برای تعیین ΔH واکنش‌های گازی با مولکول‌های پیچیده‌تر، اغلب در مقایسه با داده‌های تجربی، تفاوت آشکاری را نشان می‌دهد.