آزمون آزمایشی خیلی سبز

رشته ریاضی

پایه یازدهم	مرحله پنجم
سال تحصیلی ۰۴-۱۴۰۳	تاریخ برگزاری: ۲۸/دی/۱۴۰۳

بودجه‌بندی دروس

حسابان(۱)	آمار و احتمال	هندسه(۲)
فصل ۱ ، فصل ۲ و فصل ۳ (درس ۱) صفحهٔ ۱ تا ۷۹	فصل ۱ و فصل ۲ (درس ۱ تا ۳ تا ابتدای قانون ضرب احتمال) صفحهٔ ۱ تا ۵۲	فصل ۱ و فصل ۲ (درس ۱ تا ابتدای تجانس) صفحهٔ ۹ تا ۴۳

فیزیک(۲)	شیمی(۲)
فصل ۱ و فصل ۲ (تا ابتدای توان در مدارهای الکتریکی) صفحهٔ ۱ تا ۶۶	فصل ۱ و فصل ۲ (تا ابتدای آنتالپی، همان محتوای انرژی است) صفحهٔ ۱ تا ۶۵

مواد امتحانی	تعداد سؤال	از شماره	تا شماره	مدت پاسخگویی
حسابان	۲۰	۱	۲۰	۳۰ دقیقه
هندسه	۱۰	۲۱	۳۰	۲۰ دقیقه
آمار و احتمال	۱۰	۳۱	۴۰	۲۰ دقیقه
فیزیک	۲۰	۴۱	۶۰	۳۰ دقیقه
شیمی	۲۰	۶۱	۸۰	۲۰ دقیقه
مجموع	۸۰ سؤال			۱۲۰ دقیقه

استفاده از ماشین حساب مجاز نیست.

این آزمون نمره منفی دارد.

دفترچه سؤالات آزمون های خیلی سبز، از همه نظر (تعداد سؤال ها، زمان پاسخگویی، نوع چینش گزینه ها، نوع صفحه آرایی، فونت سؤالات، سایز کلمات و اعداد، جای خالی محل انجام محاسبات و...) در شبیه ترین حالت به دفترچه سؤالات کنکور سراسری طراحی می شود.

ویژه یازدهمی های ۱۴۰۳

Azmoon.kheilisabz.com

سنجش کلاد
www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshClouds

حسابان یازدهم

۱- در یک دنبالهٔ حسابی با جملهٔ عمومی a_n، S_n مجموع n جملهٔ اول دنباله است. اگر $S_n - S_{n-1} = 3n + 4$ باشد، حاصل $a_8 - a_5$ کدام است؟

۱) ۱۲ ۲) ۶ ۳) ۹ ۴) ۱۵

۲- اگر اعداد مثبت a و b جواب‌های معادلهٔ $2ax^2 - 5bx + 8b = 0$ باشند، حاصل $a + b$ کدام است؟

۱) ۵ ۲) ۶ ۳) ۱۰ ۴) ۱۲

۳- فاصلهٔ نقطهٔ M روی خط $y = 2x - 1$ از خط $3x - 4y = 3$ برابر ۲ است. حاصل‌ضرب طول و عرض نقطهٔ M کدام می‌تواند باشد؟

۱) ۶/۸ ۲) ۸/۲۸

۳) −۷/۴۸ ۴) −۷/۲

۴- فاصلهٔ بین رأس‌های دو سهمی $f(x) = 3(x-1)(x+5) + 7$ و $g(x) = 3(x+1)(x+7) + k$ برابر $\sqrt{29}$ است. حاصل‌ضرب مقادیر ممکن برای k کدام است؟

۱) ۲۰ ۲) ۲۴ ۳) ۲۸ ۴) ۳۰

۵- به‌ازای چند مقدار صحیح a سهمی $ay = (a+2)x^2 + (a-1)x + 6 - a$ حداکثر از سه ناحیه دستگاه مختصات می‌گذرد؟

۱) ۸

۲) ۷

۳) ۶

۴) ۵

۶- اگر $x = a$ جواب معادلهٔ $\frac{x-2}{x+2} = \frac{x+1}{x+a}$ باشد، حاصل $a^2 + \frac{4}{a^2}$ کدام است؟

۱) ۲۰ ۲) ۱۷

۳) ۸۶ ۴) ۵۳

۷- معادلهٔ $x^2\sqrt{x+3} = (x+3)^{\frac{3}{2}}$ چند جواب حقیقی دارد؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

محل انجام محاسبات

www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshClouds

۸- مساحت سطح بین نمودارهای دو تابع $f(x)=|x-1|$ و $g(x)=k-|x-3|$ برابر ۱۶ است. مقدار k کدام است؟

۱) ۵
۲) ۵/۵
۳) ۶
۴) ۶/۵

۹- دامنهٔ تابع $f(x)=\sqrt{([x]-\sqrt{5})(\sqrt{30}-[x])}$ شامل چند عدد صحیح است؟ ([ ]، نماد جزء صحیح است.)

۱) ۶
۲) ۵
۳) ۴
۴) ۳

۱۰- اگر توابع $f(x)=\sqrt{x^2-4}+\sqrt{4-x^2}+b$ و $g(x)=\{(a,1),(k,c)\}$ با هم برابر باشند. حاصل $a+b+c+k$ کدام است؟

۱) ۱
۲) ۲
۳) ۳
۴) ۴

۱۱- تابع خطی $f(x)=ax+b$ مفروض است. اگر $f^{-1}(x)=(a+b)x+\frac{b^2}{3}$ باشد، مجموعهٔ مقادیر قابل قبول برای a چندعضوی است؟

۱) ۲
۲) ۴
۳) ۶
۴) این مجموعه نامتناهی است.

۱۲- اگر $f(x)=x^2+\sqrt{5x-x^2-4}+20$ و $g(x)=8x+\sqrt{5x-x^2-4}$ باشد، برد تابع $f-g$ شامل چند عدد صحیح است؟

۱) ۹
۲) ۱۰
۳) ۱۱
۴) بی‌شمار

۱۳- اگر $f(2^x+x)=2(x-1)+2^{1+x}$ باشد، مقدار $f(2)$ کدام است؟

۱) ۲
۲) ۴
۳) ۳
۴) ۶

۱۴- اگر $f(x)=\sqrt{4-2\sqrt{x-1}}$ باشد، مساحت سطح محصور بین نمودار تابع $g(x)=(f^{-1}of)(x)+(fof^{-1})(x)$ و محور xها کدام است؟

۱) ۱۵
۲) ۳
۳) ۳۰
۴) ۶

۱۵- اگر $f(x)=\sqrt{16-x^2}$ باشد، دامنهٔ تابع $y=2+3f(1-x)$ کدام است؟

۱) $[-5,3]$
۲) $[-5,4]$
۳) $[-3,5]$
۴) $[-4,5]$

محل انجام محاسبات

سنجش کلاد
www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshClouds

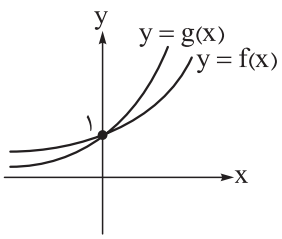
۱۶- اگر $f(x)=\frac{x-1}{x-2}$ و $g(x)=\frac{x+1}{x-3}$ باشد، مجموع جواب‌های معادلهٔ $(f^{-1}og)(x)=\frac{1-4x^2}{x-1}$ کدام است؟

۱) $\frac{9}{17}$
۲) $\frac{4}{17}$
۳) $-\frac{4}{17}$
۴) $-\frac{9}{17}$

۱۷- بزرگ‌ترین بازه‌ای که روی آن تابع $f(x)=x(|x|-||x|-2|-2)$ یک‌به‌یک است، به صورت $[a,b]$ است. ضابطهٔ تابع وارون این تابع در بازهٔ $[a,b]$ کدام است؟

۱) $f^{-1}(x)=\frac{|x|}{x}(\sqrt{1-\frac{|x|}{2}}-1)\ ;|x|\le 1$
۲) $f^{-1}(x)=\frac{|x|}{x}(\sqrt{1-\frac{|x|}{2}}-1)\ ;|x|\le 2$
۳) $f^{-1}(x)=\frac{|x|}{x}(\sqrt{1+\frac{|x|}{2}}-1)\ ;|x|\le 1$
۴) $f^{-1}(x)=\frac{|x|}{x}(\sqrt{1+\frac{|x|}{2}}-1)\ ;|x|\le 2$

۱۸- نمودار دو تابع نمایی f و g با ضابطه‌های $f(x)=(5-m)^x$ و $g(x)=(2m-3)^x$ در شکل زیر رسم شده‌اند. اگر مجموعه مقادیر قابل قبول برای m بازهٔ (a,b) باشد، حاصل $b-3a$ کدام است؟

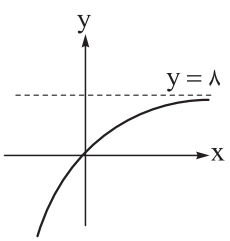


۱) $\frac{4}{3}$
۲) ۴
۳) -4
۴) $-\frac{4}{3}$

۱۹- نمودار تابع $f(x)=2^{x+b}+a$ از نقاط $(1,2)$ و $(2,3)$ می‌گذرد. مقدار $f(3)$ کدام است؟

۱) ۴
۲) ۵
۳) ۶
۴) ۷

۲۰- نمودار تابع $f(x)=c-2^{ax+b}$ در زیر رسم شده است. اگر فاصلهٔ نقطه‌ای به طول $-\frac{1}{2}$ روی نمودار تابع f از خط $y=8$، دو برابر فاصلهٔ آن تا محور xها باشد، مقدار $f(a+b)$ کدام است؟



۱) ۷/۵
۲) ۶
۳) -24
۴) -120

محل انجام محاسبات

www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshClouds

هندسه یازدهم

۲۱- در کدام‌یک از تبدیل‌های زیر، جهت شکل حفظ نمی‌شود؟

۱) بازتاب
۲) انتقال
۳) دوران ۹۰°
۴) دوران ۱۸۰°

۲۲- اگر پاره‌خط $A'B'$ دوران‌یافتهٔ پاره‌خط AB به مرکز نقطه‌ای غیرواقع بر AB (و یا امتداد آن) باشد، مرکز دوران کدام است؟
(A' و B' به ترتیب دوران‌یافتهٔ A و B هستند.)

۱) محل تلاقی AB و $A'B'$
۲) محل تلاقی عمودمنصف‌های AB و $A'B'$
۳) محل تلاقی عمودمنصف‌های AA' و BB'
۴) محل تلاقی AA' و BB'

۲۳- نقطهٔ A' تصویر نقطهٔ A تحت بازتاب نسبت به خط d و O نقطه‌ای روی خط d است. اگر $AA' = ۱۲$ و فاصلهٔ نقطهٔ A از پاره‌خط OA' برابر $۹/۶$ باشد، فاصلهٔ نقطهٔ O از پاره‌خط AA' کدام است ؟

۱) ۶
۲) ۸
۳) ۹
۴) ۱۰

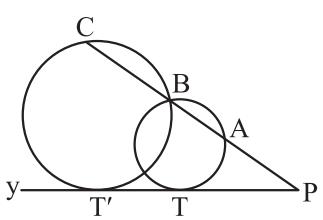
۲۴- دایرهٔ $C(O, a-۱)$ را با بردار انتقال $\vec{V}$ بر دایرهٔ $C'(O', ۷-a)$ تصویر می‌کنیم. اگر طول مماس مشترک داخلی دو دایره برابر $۲\sqrt{۷}$ باشد، طول مماس مشترک خارجی این دو دایره کدام است؟

۱) ۶
۲) $۳\sqrt{۵}$
۳) $۴\sqrt{۳}$
۴) ۸

۲۵- شعاع‌های دو دایرهٔ مماس داخل برابر $۲x$ و $۳x+۱$ هستند. اگر طول خط‌المرکزین این دو دایره برابر $۲x-۱$ باشد، اندازهٔ شعاع دایرهٔ کوچک‌تر کدام است؟

۱) ۲
۲) ۴
۳) ۶
۴) ۷

۲۶- در شکل زیر دو دایره در نقاط T و T' بر نیم‌خط Py مماس هستند و $PT = ۳TT'$. حاصل $\frac{PC}{PA}$ کدام است؟



۱) $\frac{۴}{۳}$
۲) ۲
۳) $\frac{۱۶}{۹}$
۴) ۴

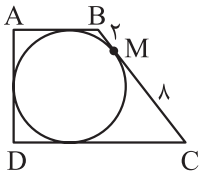
محل انجام محاسبات

www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshClouds

۲۷- در مثلث متساوی‌الاضلاع ABC، I مرکز دایرهٔ محاطی داخلی و I_a مرکز دایرهٔ محاطی خارجی است، نسبت مساحت مثلث BIC به BI_aC کدام است؟

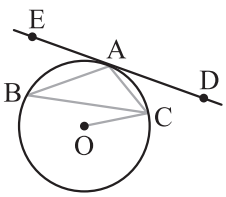
۱) ۱
۲) $\frac{۱}{۲}$
۳) $\frac{۱}{۳}$
۴) $\frac{۱}{۴}$

۲۸- در ذوزنقهٔ قائم‌الزاویهٔ شکل زیر، نقطهٔ تماس دایرهٔ محاطی ذوزنقه با یکی از ساق‌ها، آن را به دو پاره‌خط به طول‌های ۲ و ۸ تقسیم کرده است. طول ارتفاع این ذوزنقه کدام است؟



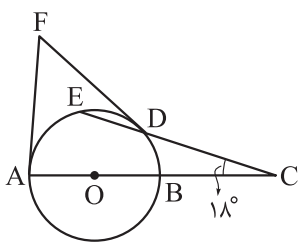
۱) ۶
۲) ۷/۵
۳) ۸
۴) ۹

۲۹- در شکل زیر، O مرکز دایره است و خط گذرنده از نقاط D و E در نقطهٔ A بر دایره مماس است. اگر $B\hat{C}O = ۱۵^\circ$ و $C\hat{A}D = ۲۵^\circ$ باشد، اندازهٔ زاویهٔ EAB چند درجه است؟



۱) ۴۰
۲) ۴۵
۳) ۵۰
۴) ۵۵

۳۰- در شکل زیر O مرکز دایره است و FA و FD بر دایره مماس‌اند. اگر طول وتر DE برابر شعاع دایره باشد و امتداد DE و AB در نقطهٔ C متقاطع باشند، اندازهٔ زاویهٔ F چند درجه است؟



۱) ۳۶
۲) ۳۸
۳) ۴۰
۴) ۴۲

محل انجام محاسبات

سنجش کلاد
www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshClouds

آمار و احتمال

۳۱- s کدام‌یک از گزاره‌های زیر باشد تا ارزش گزارهٔ $[(p\wedge q)\Rightarrow(p\wedge r)]\vee s$ همواره درست باشد؟

۱) $(p\wedge q)\wedge r$
۲) $(p\wedge q)\wedge\sim r$
۳) $(p\wedge\sim q)\wedge r$
۴) $(\sim p\wedge q)\wedge r$

۳۲- در جای خالی کدام‌یک از سورهای زیر را قرار دهیم تا ارزش گزارهٔ سوری «$x^2+y^2=2y-1$;.....» درست باشد؟

الف) $\forall x,\forall y$
ب) $\forall x,\exists y$
پ) $\forall y,\exists x$
ت) $\exists y,\exists x$

۱) الف ـ ب ـ پ
۲) ب ـ ت
۳) پ ـ ت
۴) ت

۳۳- یک‌سوم زیرمجموعه‌های سه‌عضوی مجموعهٔ $A=\{1,2,3,...,k\}$ شامل عضو ۲ هستند. A چند زیرمجموعهٔ ۴عضوی یا ۵عضوی دارد؟

۱) $\binom{10}{4}$
۲) $\binom{10}{5}$
۳) $\binom{11}{6}$
۴) $\binom{12}{7}$

۳۴- اگر a و b دو عدد طبیعی باشند، به طوری که $A=[a,7]$ و $B=[5,b]$، در این صورت مساحت مربوط به ناحیهٔ A^2-B^2 برابر کدام‌یک از عددهای زیر نمی‌تواند باشد؟ ($a<5$ و $b>7$)

۱) ۵
۲) ۲۱
۳) ۳۲
۴) ۴۵

۳۵- A یک پیشامد xعضوی از فضای نمونه‌ای هم‌شانس S و B یک پیشامد $x+2$ از همان فضای نمونه‌ای است به طوری که $P(B)=\frac{1}{5}+P(A)$. اگر تعداد پیشامدهای x عضوی و $x+2$ عضوی در این فضای نمونه‌ای برابر باشند، $P(A)$ کدام است؟

۱) $\frac{1}{5}$
۲) $\frac{2}{5}$
۳) $\frac{3}{5}$
۴) $\frac{3}{10}$

۳۶- یک تاس به گونه‌ای ساخته شده است که احتمال وقوع هر عدد اول، پنج برابر احتمال وقوع هر عدد غیراول است. در پرتاب این تاس، احتمال این‌که عدد زوج مشاهده شود، چه‌قدر است؟

۱) $\frac{1}{6}$
۲) $\frac{5}{6}$
۳) $\frac{7}{18}$
۴) $\frac{11}{18}$

محل انجام محاسبات

www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshClouds

۳۷- در یک آزمایش با فضای نمونه‌ای $S=\{a,b,c,d\}$، می‌دانیم $P(\{a,b\})=P(c)$، $P(\{b,c\})=2P(d)$ و $P(\{a,c\})=0/45$ است. مقدار $P(a)$ کدام است؟

۱) $0/1$
۲) $0/15$
۳) $0/2$
۴) $0/25$

۳۸- دو تاس پرتاب می‌کنیم و می‌بینیم که مجموع اعداد روشدهٔ دو تاس مضرب ۳ است. با چه احتمالی عدد روشدهٔ حداقل یکی از تاس‌ها اول است؟

۱) $\frac{2}{3}$
۲) $\frac{3}{4}$
۳) $\frac{5}{6}$
۴) $\frac{11}{12}$

۳۹- A و B دو پیشامد از فضای نمونه‌ای S هستند، به طوری که $P(A)=0/5$، $P(B)=0/4$ و $P(A\cap B)=0/1$ است. مقدار $P(A-B\,|\,B'\cup A)$ چه‌قدر است؟

۱) $\frac{2}{7}$
۲) $\frac{4}{7}$
۳) $\frac{1}{2}$
۴) $\frac{3}{8}$

۴۰- تیم ملی والیبال ایران ۱۲ بازیکن دارد که قد هیچ دو بازیکنی با هم برابر نیست. می‌دانیم a از نظر قدی بلندتر از b و c است؛ با چه احتمالی a بلندقدترین بازیکن تیم است؟

۱) $\frac{1}{2}$
۲) $\frac{1}{4}$
۳) $\frac{1}{10}$
۴) $\frac{1}{9}$

محل انجام محاسبات

www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshClouds

فیزیک یازدهم

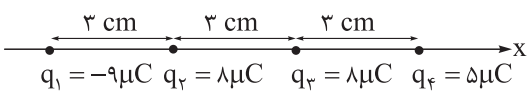
۴۱- بار الکتریکی هستهٔ یون X^{+3} برابر با $۲/۰۸\times۱۰^{-۱۸}C$ است. مجموع بار الکتریکی الکترون‌های این یون، چند میکروکولن است؟ $(e=۱/۶\times۱۰^{-۱۹}\,C)$

۱) $-۱/۶\times۱۰^{-۱۲}$ ۲) $-۱/۶\times۱۰^{-۱۱}$ ۳) $-۱/۶\times۱۰^{-۱۸}$ ۴) $-۱/۶\times۱۰^{-۱۷}$

۴۲- بار الکتریکی دو ذرهٔ باردار، یکسان است. ۹۶ درصد از بار یکی از این ذره‌ها را به ذرهٔ دیگر منتقل می‌کنیم. برای آن‌که نوع و اندازهٔ نیروی الکتریکی بین دو ذره تغییر نکند، فاصلهٔ بین دو ذره باید چند درصد و چگونه تغییر کند؟

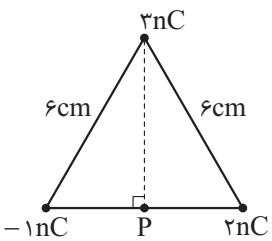
۱) ۶۴ درصد افزایش یابد.
۲) ۷۲ درصد افزایش یابد.
۳) ۶۴ درصد کاهش یابد.
۴) ۷۲ درصد کاهش یابد.

۴۳- مطابق شکل، چهار بار الکتریکی نقطه‌ای روی محور x ثابت شده‌اند. بار $q_۳$ روی محور x، چند سانتی‌متر جابه‌جا شود تا نیروی الکتریکی خالص وارد بر بار $q_۴$ در SI برابر با $\vec{F}=-۵۰\vec{i}$ شود؟ $(k=۹\times۱۰^{۹}\,\frac{N.m^{۲}}{C^{۲}})$



۱) ۳
۲) ۶
۳) ۹
۴) ۱۲

۴۴- مطابق شکل، سه بار الکتریکی نقطه‌ای در رأس‌های مثلث متساوی‌الاضلاعی به ضلع ۶cm ثابت شده‌اند. بزرگی میدان الکتریکی خالص در نقطهٔ P، چند کیلوولت بر متر است؟ $(k=۹\times۱۰^{۹}\,\frac{N.m^{۲}}{C^{۲}})$



۱) ۱۰
۲) $۱۰\sqrt{۲}$
۳) $۱۰\sqrt{۵}$
۴) $۱۰\sqrt{۱۰}$

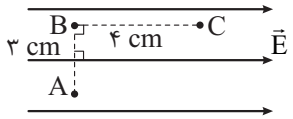
۴۵- در یک میدان الکتریکی یکنواخت به بزرگی $۲\times۱۰^{۴}\,N/C$ که جهت آن قائم و رو به پایین است، ذرهٔ بارداری به جرم ۸g معلق و به حال سکون قرار دارد. بار ذره چند میکروکولن است؟ $(g=۱۰\,N/kg)$

۱) -۴ ۲) ۴ ۳) -۲ ۴) ۲

محل انجام محاسبات

www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshClouds

۴۶- بار الکتریکی نقطه‌ای $q = -۵۰\,\mu C$ مطابق شکل زیر در میدان الکتریکی یکنواخت و افقی $E = ۴\times۱۰^{۴}\ N/C$، ابتدا به اندازهٔ $۳cm$ از نقطهٔ A تا نقطهٔ B و سپس به اندازهٔ $۴cm$ از نقطهٔ B تا نقطهٔ C جابه‌جا می‌شود. چه تعداد از موارد زیر درست هستند؟



الف) تغییر انرژی پتانسیل الکتریکی بار از نقطهٔ A تا نقطهٔ C برابر با $+۸۰\,mJ$ است.

ب) پتانسیل الکتریکی نقطهٔ B به اندازهٔ $۱۶۰۰\,V$ بیشتر از پتانسیل الکتریکی نقطهٔ C است.

پ) نقاط A و B هم‌پتانسیل‌اند.

ت) کار میدان الکتریکی در جابه‌جایی بار از نقطهٔ B تا نقطهٔ C برابر با $-۱۰۰\,mJ$ است.

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۴۷- به یک کرهٔ رسانای خنثی به شعاع $۵\,cm$، $۶۰\,\mu C$ بار الکتریکی می‌دهیم. چه تعداد از عبارت‌های زیر دربارهٔ این کره، درست است؟ $(\pi \simeq ۳)$

الف) چگالی سطحی بار الکتریکی این کره در SI برابر ۲×۱۰^{-۳} است.

ب) میدان الکتریکی درون کره برابر صفر است.

پ) پتانسیل الکتریکی تمام نقاط داخل و سطح این کره، برابر صفر است.

ت) تمامی بار داده‌شده به کره در سطح خارجی آن توزیع می‌شود.

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۴۸- یک یاختهٔ عصبی را می‌توان با یک خازن تخت مدل‌سازی کرد، به طوری که غشای یاخته به عنوان دی‌الکتریک عمل می‌کند. اگر غشا دارای ثابت دی‌الکتریک $k = ۳$، ضخامت $۹\,nm$ و مساحت سطح $۱۰^{-۱۰}\ m^{۲}$ باشد، ظرفیت این یاختهٔ عصبی چند پیکوفاراد است؟ $\left(\varepsilon_{۰} = ۹\times۱۰^{-۱۲}\ \frac{C^{۲}}{N.m^{۲}}\right)$

۱) ۰/۰۳ ۲) ۰/۳ ۳) ۳ ۴) ۳۰

۴۹- خازنی به ظرفیت $۱۰\,\mu F$ دارای بار $۲mC$ بوده و بین صفحات آن هوا است. یک ذره با بار الکتریکی $q = ۱\mu C$، بین صفحات خازن از مجاورت صفحهٔ مثبت، رها می‌شود. اگر جرم ذره ۸ میلی‌گرم باشد، تندی آن در هنگام رسیدن به صفحهٔ مقابل، چند متر بر ثانیه است؟

۱) ۲ ۲) ۵ ۳) $۵\sqrt{۲}$ ۴) ۱۰

محل انجام محاسبات

www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshClouds

۵۰- عایق بین صفحه‌های خازنی، هوا و اندازهٔ میدان الکتریکی بین صفحات آن $۶۰\ V/mm$ است. اندازهٔ چگالی سطحی بار الکتریکی هر یک از صفحه‌های این خازن در SI کدام است؟ $(\varepsilon_{\circ} = ۹\times ۱۰^{-۱۲}\ F/m)$

۱) $۵/۴\times ۱۰^{-۷}$ ۲) $۵/۴\times ۱۰^{-۴}$ ۳) ۶×۱۰^{-۷} ۴) ۶×۱۰^{-۴}

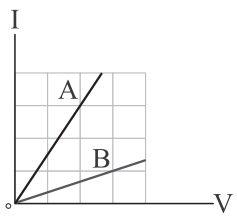
۵۱- در ماشین‌های چمن‌زنی برقی، برای مسافت‌های حداکثر تا $۳۵\ m$ از سیم‌های مسی با قطر $۰/۸\ mm$ و برای مسافت‌های طولانی‌تر، از سیم‌های مسی با قطر $۱/۲\ mm$ استفاده می‌شود. مقاومت الکتریکی سیم یک ماشین چمن‌زنی به طول $۱۵\ m$ چند برابر مقاومت الکتریکی سیم یک ماشین چمن‌زنی به طول $۴۵\ m$ است؟

۱) $\frac{۳}{۴}$ ۲) $\frac{۴}{۳}$ ۳) $\frac{۲۷}{۴}$ ۴) $\frac{۴}{۲۷}$

۵۲- دو سیم مسی هم‌جرم A و B به طور جداگانه به اختلاف پتانسیل یکسان و ثابتی وصل هستند. اگر شعاع مقطع سیم A، n برابر شعاع مقطع سیم B باشد، در مدت معین، تعداد الکترون‌های عبوری از سیم A، چند برابر تعداد الکترون‌های عبوری از سیم B است؟

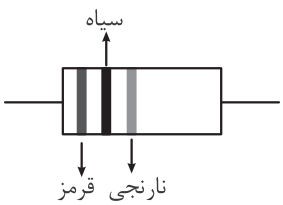
۱) $\frac{۱}{n^۲}$ ۲) $n^۲$ ۳) $\frac{۱}{n^۴}$ ۴) $n^۴$

۵۳- نمودار جریان الکتریکی عبوری از دو رسانای A و B برحسب اختلاف پتانسیل الکتریکی دو سر آن‌ها به شکل زیر است. اگر این دو رسانا به طور جداگانه، به ترتیب، به اختلاف پتانسیل‌های الکتریکی V و $۲V$ وصل شوند، جریان الکتریکی عبوری از رسانای A، چند برابر جریان الکتریکی عبوری از رسانای B می‌شود؟



۱) $\frac{۹}{۴}$ ۲) $\frac{۴}{۹}$ ۳) ۹ ۴) $\frac{۱}{۹}$

۵۴- مقاومت الکتریکی مقاومت ترکیبی شکل زیر برابر با چه تعداد از مقادیر زیر می‌تواند باشد؟



رنگ	سیاه	قرمز	نارنجی
کد	۰	۲	۳

الف) $۱۷\ k\Omega$

ب) $۲۰\ k\Omega$

پ) $۲۳\ k\Omega$

ت) $۲۶\ k\Omega$

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

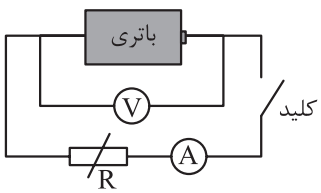
محل انجام محاسبات

www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshClouds

۵۵- مقاومت یک قطعه سیم آلومینیمی در دمای $10^\circ C$ برابر 25Ω است. از این سیم جریان الکتریکی عبور می‌کند و در اثر افزایش دما، مقاومت الکتریکی آن به $27/2\Omega$ می‌رسد. دمای سیم در این حالت، چند درجهٔ سلسیوس است؟ $(\alpha_{Al} = 4/4\times10^{-3} K^{-1})$

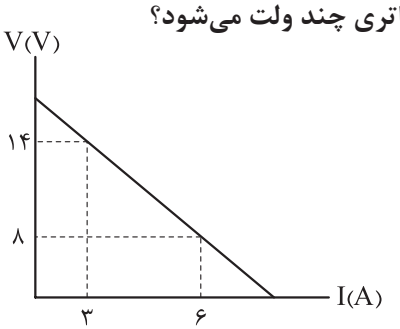
۱) ۲۰ ۲) ۳۰ ۳) ۴۰ ۴) ۵۰

۵۶- در مدار شکل زیر، در حالتی که کلید باز است، ولت‌سنج آرمانی $19V$ و در حالتی که کلید بسته است، ولت‌سنج $17V$ و آمپرسنج آرمانی $2A$ را نشان می‌دهد. مقاومت درونی باتری چند اهم است؟



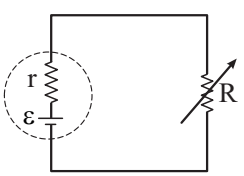
۱) ۰/۵
۲) ۱
۳) ۱/۵
۴) ۲

۵۷- نمودار اختلاف پتانسیل الکتریکی دو سر یک باتری برحسب جریان گذرنده از آن، به شکل زیر است. اگر یک مقاومت ۳ اُهمی به دو سر این باتری ببندیم، اختلاف پتانسیل الکتریکی دو سر باتری چند ولت می‌شود؟



۱) ۶
۲) ۸
۳) ۱۲
۴) ۱۶

۵۸- در مدار شکل زیر، اگر مقاومت رئوستا از R به $2R$ برسد، اختلاف پتانسیل الکتریکی دو سر باتری، ۲۰ درصد افزایش می‌یابد. R چند برابر مقاومت درونی باتری است؟

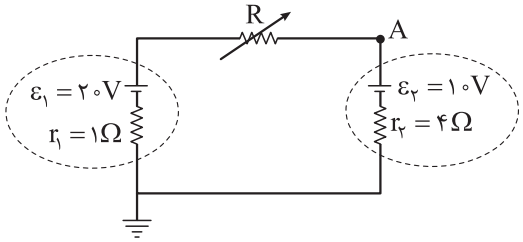


۱) ۱
۲) ۲
۳) ۳
۴) ۴

محل انجام محاسبات

www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshClouds

۵۹- در مدار شکل زیر، اگر مقاومت رئوستا از مقادیر بسیار بزرگ تا صفر کاهش یابد، پتانسیل الکتریکی نقطهٔ A چند ولت و چگونه تغییر می‌کند؟



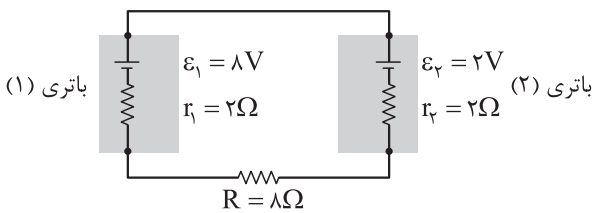
۱) ۲، کاهش می‌یابد.

۲) ۸، کاهش می‌یابد.

۳) ۲، افزایش می‌یابد.

۴) ۸، افزایش می‌یابد.

۶۰- در مدار شکل زیر، اختلاف پتانسیل الکتریکی دو سر باتری (۱)، چند برابر اختلاف پتانسیل الکتریکی دو سر باتری (۲) است؟



۱) ۳

۲) ۴

۳) $\frac{7}{4}$

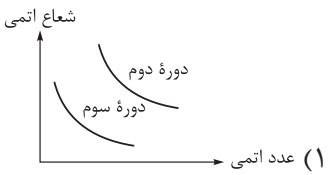
۴) $\frac{7}{3}$

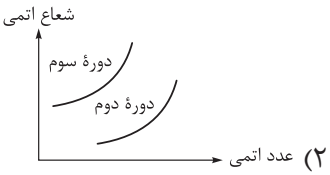
محل انجام محاسبات

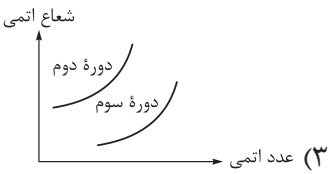
www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshClouds

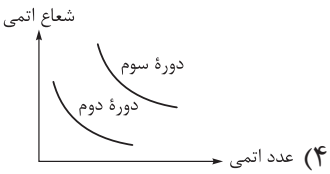
شیمی یازدهم

۶۱- کدام نمودار دربارهٔ روند کلی تغییر شعاع اتمی عنصرهای دوره‌های دوم و سوم جدول تناوبی، درست است؟

۱) 

۲) 

۳) 

۴) 

۶۲- چه تعداد از ویژگی‌های زیر را می‌توان به بیش از نیمی از عنصرهای دورهٔ سوم جدول تناوبی نسبت داد؟

- **هم‌گروه‌بودن با حداقل یک عنصر واسطه**
- **داشتن سطح صیقلی و براق**
- **تشکیل یون تک‌اتمی با آرایش گاز نجیب**
- **جامدبودن در دما و فشار اتاق**
- **توانایی از دست دادن الکترون**

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۵

۶۳- دربارهٔ ترکیبی با فرمول شیمیایی C_6H_{12}، کدام مورد نادرست است؟

۱) این مولکول همانند ترکیبی با عنوان عمل‌آورندهٔ کشاورزی، ممکن است رنگ قرمز برم مایع را از بین ببرد.

۲) در اثر سوختن کامل هر مول از این هیدروکربن، ۹ مول گاز اکسیژن مصرف می‌شود.

۳) در ساختار آن به یقین، اتم کربنی وجود ندارد که به یک اتم هیدروژن متصل شده باشد.

۴) در ساختار این ترکیب، قطعاً نسبت تعداد پیوندهای $C-H$ به تعداد پیوندهای $C-C$، کم‌تر از ۴ است.

۶۴- براساس واکنش زیر، برای تولید ۱/۱ لیتر فراوردهٔ گازی با چگالی ۲ گرم بر لیتر، چند گرم فلز روی نیاز است؟ (بازده واکنش را ۸۰ درصد در نظر بگیرید؛ $Zn=65, O=16, N=14 : g.mol^{-1}$)

(موازنهٔ معادلهٔ واکنش کامل شود.) $4Zn(s)+10HNO_3(aq) \rightarrow 4Zn(NO_3)_2(aq)+N_xO_y(g)+aH_2O(l)$

۱) ۱۳/۰۰ ۲) ۱۶/۲۵

۳) ۱۹/۰۰ ۴) ۲۰/۳۰

محل انجام محاسبات

www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshClouds

۶۵- کدام مطلب درست است؟

۱) گرمای ویژهٔ همهٔ مواد گازی از گرمای ویژهٔ مواد جامد، کم‌تر است.

۲) هر چه حاصل‌ضرب جرم در گرمای ویژهٔ یک جسم کم‌تر باشد؛ مقاومت آن جسم در برابر تغییر دما بیشتر خواهد بود.

۳) میانگین انرژی جنبشی مولکول‌های یک لیوان آب در دمای اتاق، نسبت به یک قطرهٔ آب در دمای اتاق، بیشتر است.

۴) اگر به جرم برابری از نان و سیب‌زمینی در دمای اتاق، گرمای یکسانی دهیم، در مدت‌زمان برابر، تغییر دمای سیب‌زمینی کم‌تر خواهد بود.

۶۶- در یک آلکین، درصد جرمی اتم‌های هیدروژن برابر ۱۲/۵٪ است. چند مورد از مطالب زیر دربارهٔ آلکین مورد نظر، درست است؟ $(C=12, H=1: g.mol^{-1})$

- **نام آن می‌تواند ۴ ـ هپتین باشد.**
- **جرم مولی این آلکین از جرم مولی آلکان هم‌کربن خود، ۴ درصد کم‌تر است.**
- **تفاوت تعداد اتم‌های کربن در ترکیب مورد نظر با تعداد اتم‌های کربن در سرگروه خانوادهٔ آروماتیک‌ها برابر ۳ است.**
- **شمار گروه‌های CH_2 در ساختار این هیدروکربن می‌تواند با شمار گروه‌های CH_3 در ساختار ۳،۲ ـ دی‌متیل بوتان برابر باشد.**

۱) ۴ ۲) ۳ ۳) ۲ ۴) ۱

۶۷- با فرض این‌که گرمای لازم برای تبخیر یک مول آمونیاک مایع، نصف گرمای لازم برای تبخیر یک مول آب است، مقایسهٔ مقدار گرمای مبادله‌شده در واکنش‌های زیر، در کدام گزینه به درستی نشان داده شده است؟ (همهٔ واکنش‌های داده‌شده، گرماده هستند.)

I) $4NH_3(g)+3O_2(g) \rightarrow 2N_2(g)+6H_2O(g)$

II) $4NH_3(l)+3O_2(g) \rightarrow 2N_2(g)+6H_2O(l)$

III) $4NH_3(g)+3O_2(g) \rightarrow 2N_2(g)+6H_2O(l)$

IV) $4NH_3(l)+3O_2(g) \rightarrow 2N_2(g)+6H_2O(g)$

۱) $II > III > IV > I$ ۲) $IV > II > I > III$

۳) $III > I > II > IV$ ۴) $III > II > I > IV$

۶۸- برای افزایش دمای ۱۰ گرم از هر یک از ماده‌های A و B به اندازهٔ ۱۰ درجهٔ سلسیوس، به ترتیب ۸۰۰ و ۴۰۰ ژول گرما نیاز است. اگر برای بالارفتن دمای ۱۰ گرم مخلوطی از این دو ماده به اندازهٔ ۱۰ درجهٔ سلسیوس، ۶۵۰ ژول گرما لازم باشد؛ اختلاف جرم دو مادهٔ A و B در مخلوط مورد نظر چند گرم است؟ (گرمای ویژهٔ دو مادهٔ A و B با مخلوط‌شدن تغییر نکرده است.)

۱) ۲/۵ ۲) ۳/۷۵ ۳) ۶/۲۵ ۴) ۴/۵

محل انجام محاسبات

www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshClouds

۶۹- اگر در اثر واکنش ۳۸/۴ گرم نفتالن با مقدار کافی گاز هیدروژن، ترکیبی کاملاً سیرشده تولید شود؛ کدام موارد از مطالب زیر نادرست است؟ $(C=۱۲, H=۱: g.mol^{-۱})$

الف) اختلاف جرم فراوردهٔ به‌دست‌آمده با مقدار عددی جرم نفتالن واکنش‌داده، برابر ۳/۶ گرم است.

ب) شمار الکترون‌های پیوندی در ترکیب تولیدشده با مقدار عددی جرم مولی گاز سوخت فندک برابر است.

پ) تعداد پیوندهای $C-C$ در ساختار فراورده، ۳ برابر تعداد پیوندهای اشتراکی در ساده‌ترین عضو خانوادهٔ آلکان‌ها است.

ت) نسبت شمار اتم‌های هیدروژن به شمار اتم‌های کربن در ساختار فراورده، یک واحد بیشتر از این نسبت در نفتالن است.

۱) الف ـ پ ۲) الف ـ ب ۳) پ ـ ت ۴) ب ـ پ

۷۰- اگر آرایش الکترونی یون‌های $A^{۲+}$ و $M^{۳+}$ به ترتیب به $۳p^{۶}$ و $۳d^{۱۰}$ ختم شود، تفاوت عدد اتمی دو عنصر A و M، برابر با عدد اتمی ..... است.

۱) اتم سازندهٔ هالوژن مایع

۲) اولین فلز واسطهٔ جدول دوره‌ای

۳) فلز قلیایی با رنگ شعلهٔ زرد

۴) فلز قلیایی با نماد شیمیایی تک‌حرفی

۷۱- هر مولکول از آلکان راست‌زنجیر A دارای ۲۰ اتم است و در ساختار آلکان راست‌زنجیر B، ۱۰ پیوند $C-H$ وجود دارد. نقطهٔ جوش آلکان‌های راست‌زنجیر A و B در فشار ۱atm به ترتیب کدام اعداد برحسب درجهٔ سلسیوس می‌توانند باشند؟

۱) ۳۶,۶۹ ۲) −۱,۶۹ ۳) ۵۶,۳۸ ۴) −۵۰,−۱۲

۷۲- ۲۰ گرم از کربنات فلز X با خلوص ۸۴ درصد، مطابق معادلهٔ زیر تجزیه شده و ۸ گرم اکسید فلز تولید می‌شود. جرم مولی فلز، چند برابر جرم مولی گاز اکسیژن است؟ $(O=۱۶, C=۱۲: g.mol^{-۱})$

$$XCO_۳(s) \longrightarrow XO(s) + CO_۲(g)$$

۱) ۰/۸ ۲) ۰/۷۵ ۳) ۱/۶ ۴) ۱/۵

۷۳- چه تعداد از واکنش‌های زیر به طور طبیعی انجام‌پذیر هستند؟

الف) $۳Ti(s) + ۲Fe_۲O_۳(s) \xrightarrow{\Delta} ۴Fe(s) + ۳TiO_۲(s)$

ب) $Zn(s) + ۲AgNO_۳(aq) \longrightarrow Zn(NO_۳)_۲(aq) + ۲Ag(s)$

پ) $Zn(s) + CuSO_۴(aq) \longrightarrow ZnSO_۴(aq) + Cu(s)$

ت) $C(s) + ۲Cu_۲O(s) \xrightarrow{\Delta} CO_۲(g) + ۴Cu(s)$

۱) ۴ ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

محل انجام محاسبات

سنجش کلاد
www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshClouds

۷۴- کدام موارد از مطالب زیر، دربارهٔ ششمین عنصر دستهٔ d جدول تناوبی درست است؟

الف) استخراج آن از سنگ معدن، دشوارتر از استخراج فلز مس از سنگ معدن است.

ب) یون دو بار مثبت آن، یکی از سازنده‌های زنگ آهن است.

پ) می‌توان درصد قابل توجهی از سنگ معدن آن را در فرایند استخراج به فلز تبدیل کرد.

ت) مصرف سالانهٔ آن در جهان از مصرف سالانهٔ فلز طلا در جهان بیشتر است.

۱) ب و پ ۲) الف و پ ۳) ب و ت ۴) الف و ت

۷۵- اگر فرمول مولکولی ترکیب $(C_2H_5)_2CH(CH_2)_xC(CH_3)_3$ با  یکسان باشد، نام این ترکیب کدام است؟

۱) ۴ ـ اتیل ـ ۲، ۲ ـ دی‌متیل هگزان

۲) ۳ ـ اتیل ـ ۶ ، ۶ ـ دی‌متیل هپتان

۳) ۵ ـ اتیل ـ ۲، ۲ ـ دی‌متیل هپتان

۴) ۶ ـ اتیل ـ ۲، ۲ ـ دی‌متیل اوکتان

۷۶- با توجه به جدول زیر، کدام مطلب نادرست است ؟

نام سوخت	گرمای آزادشده (kJ / g)	فراورده‌های سوختن	مقدار کربن دی‌اکسید به ازای هر کیلوژول انرژی تولیدشده (g)
بنزین	A	CO_2, CO, H_2O	X
زغال‌سنگ	B	Z, CO_2, NO_2, CO, H_2O	Y

۱) تنوع عنصرهای سازندهٔ بنزین نسبت به زغال‌سنگ، کم‌تر است.

۲) مقدار A، بیشتر از مقدار B و مقدار X، کم‌تر از مقدار Y است.

۳) یکی از راه‌های بهبود کارایی زغال‌سنگ، انجام واکنش $Z(g) + CaO(s) \rightarrow$ است.

۴) از انحلال فراوردهٔ نیتروژن‌دار حاصل از سوختن زغال‌سنگ در آب، محیطی بازی ایجاد می‌شود.

۷۷- یک قطعهٔ فلز مس به جرم ۵۰ گرم و دمای $60^\circ C$ در ۲۵ گرم آب با دمای $5^\circ C$ فرو برده می‌شود. کدام‌یک از مطالب زیر، درست است؟ (از تبادل گرمایی با محیط صرف نظر شود و ظرفیت گرمایی ویژهٔ آب، اتانول و مس به ترتیب برابر ۴/۲ ، ۲/۴ و ۰/۴ ژول بر گرم بر درجهٔ سلسیوس است.)

۱) طی این فرایند، تفاوت میانگین تندی حرکت ذرات دو ماده افزایش می‌یابد.

۲) مقدار تغییر انرژی گرمایی در قطعهٔ فلز مس، بیشتر از مقدار تغییر انرژی گرمایی در آب است.

۳) در این تعادل گرمایی، تغییرات دمایی قطعهٔ فلز مس، ۵/۲۵ برابر تغییرات دمای آب است.

۴) اگر به جای آب، اتانول با جرم و دمای یکسان به کار رود، دمای پایانی قطعهٔ فلز مس پایین‌تر خواهد بود.

محل انجام محاسبات

www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshClouds

۷۸- مخلوطی به جرم ۱۶ گرم از ۲ ـ متیل بوتان و ۲ ـ پنتن را در اختیار داریم. اگر با افزودن ۱۶ گرم برم مایع به مخلوط مورد نظر و کامل انجام شدن واکنش(ها)، رنگ قرمز مخلوط به طور کامل از بین برود؛ درصد جرمی ۲ ـ متیل بوتان در مخلوط اولیه کدام است؟ $(Br = ۸۰, C = ۱۲, H = ۱ : g.mol^{-۱})$

۱) ۳۰ ۲) ۴۳ / ۷۵ ۳) ۵۶ / ۲۵ ۴) ۷۰

۷۹- درستی یا نادرستی عبارت‌های زیر دربارهٔ دورهٔ چهارم جدول تناوبی به چه صورت است؟

- **حدود ۴۵ درصد از عنصرهای آن، جز عنصرهای اصلی محسوب می‌شوند.**
- **آرایش الکترونی اتم ۴ عنصر آن به زیرلایهٔ نیمه‌پر ختم می‌شود.**
- **۳ عنصر اول آن، فقط یک کاتیون پایدار تشکیل می‌دهند.**
- **در آرایش الکترونی ۸ عنصر آن، زیرلایهٔ 3d به طور کامل پر است.**

۱) درست ـ درست ـ درست ـ درست
۲) درست ـ نادرست ـ درست ـ درست
۳) نادرست ـ درست ـ نادرست ـ نادرست
۴) نادرست ـ نادرست ـ نادرست ـ نادرست

۸۰- از سوختن یکی از آلوتروپ‌های کربن، ۵۶ لیتر گاز در شرایط STP تولید و ۹۸۸ / ۵ کیلوژول گرما آزاد می‌شود. با توجه به معادلهٔ واکنش‌های زیر، نوع آلوتروپ و جرم آن برحسب گرم، کدام است؟ $(C = ۱۲\ g.mol^{-۱})$

$$C(s, \text{گرافیت}) + O_۲(g) \longrightarrow CO_۲(g) + ۳۹۳ / ۵ kJ$$

$$C(s, \text{الماس}) + O_۲(g) \longrightarrow CO_۲(g) + ۳۹۵ / ۴ kJ$$

۱) الماس ـ ۱۵ ۲) گرافیت ـ ۱۵
۳) الماس ـ ۳۰ ۴) گرافیت ـ ۳۰

محل انجام محاسبات

سنجش کلاد
www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshClouds

مهم‌ترین ویژگی‌های آزمون‌های خیلی سبز در پایه‌های دهم و یازدهم:

۱- برگزاری دست‌کم یک آزمون در ماه بر اساس روال تدریس در مدرسه
۲- برگزاری آزمون‌های ویژه برای زمان‌های خاص (میان ترم، ترم، پس از عید و...)
۳- امکان جبران عقب‌ماندگی‌ها یا دوره مطالب برای تثبیت آن‌ها

پاسخ‌نامهٔ تشریحی آزمون را ساعت ۱۶ از صفحهٔ شخصی خودتان در سایت آزمون خیلی سبز دریافت کنید.

azmoon.kheilisabz.com

اساتید، مشاوران و دانش‌آموزان گرامی؛
نظرات، پیشنهادات، انتقادات و بازخوردهای خود نسبت به سؤالات این آزمون را می‌توانید از طریق آیدی Kheilisabz_edit@ در همهٔ پیام‌رسان‌ها با ما به اشتراک بگذارید.

سنجش کلاد
www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshClouds

www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshClouds

پاسخ‌نامه آزمون آزمایشی خیلی سبز

رشته ریاضی

پایه یازدهم	مرحله پنجم
سال تحصیلی ۰۴-۱۴۰۳	تاریخ برگزاری: ۱۴۰۳/دی/۲۸

نام درس	طراحان به ترتیب حروف الفبا
حسابان	زهرا پورشیر ـ شمیم پهلوان شریف ـ فرشاد حسن‌زاده ـ خشایار خاکی ـ مجید رفعتی ـ علی شهرابی محمد گودرزی ـ میلاد منصوری ـ حسین نادری ـ محمدسجاد نقیه
هندسه	امیرحسین ابومحبوب ـ محمدطاهر شعاعی ـ صبا مهدوی ـ حسین هاشمی طاهری
آمار و احتمال	مسعود شفیعی ـ عطا صادقی ـ سروش موئینی
فیزیک	یاشار انگوتی ـ نوید شاهی
شیمی	امیرمحمد کنگرانی ـ محدثه ملک‌پور

نام درس	مسئول درس	گزینشگر	مولف پاسخ‌نامه	کارشناسان علمی	ویراستاران به ترتیب حروف الفبا
حسابان	محمدسجاد نقیه	محمدسجاد نقیه	فرامرز سلطان‌کریمی	عادل حسینی سجاد داوطلب	محمدرضا راسخ منصور زرکش اصفهانی علیرضا کاظمی‌بقا
هندسه	امیرحسین ابومحبوب	امیرحسین ابومحبوب	فرزانه خاکپاش	فرزانه خاکپاش	زهرا جالینوسی مهدی خوشنویس ماهان فنی‌فر ابوالفضل ناصری
آمار و احتمال	مسعود شفیعی	مسعود شفیعی	مسعود شفیعی	امیرحسین ابومحبوب سعید قندچی	علیرضا کاظمی‌بقا فرزانه خاکپاش ماهان فنی‌فر
فیزیک	نوید شاهی	یاشار انگوتی	علیرضا عبداللهی	علیرضا عبداللهی	ماهان فنی‌فر امیر محمودی انزابی محمدمهدی یوسفی‌چهرقانی
شیمی	یاسر عبداللهی	محدثه ملک‌پور	محدثه ملک‌پور	هومن زندی	علی حیدری علیرضا کرمانی صدرا عبادی

سرپرست محتوایی: فاطمه آقاجانپور

ویژه یازدهمی‌های ۱۴۰۳

Azmoon.kheilisabz.com

سنجش کلاد
www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshClouds

آزمون آزمایشی خیلی سبز

سرپرست تولید	الناز علی‌یاری‌زاده
ویراستاران فنی	راضیه سادات خلدی‌نسب ـ زهرا صفری محیا غنی‌فرد ـ زهرا فرهادی‌مهر مریم مسلمی‌زاده ـ ساعده نمازی
رسام	مونا آندستا ندا فخاری سارا گنجی آزادپور
صفحه‌آرایی	سحر ازلی تاش ـ مریم حسین‌زاده سارا حاتمی ـ سپیده سخایی مائده صبری ـ نیلوفر فرخجسته مهدیه گل‌پور ـ لیلا نعمت‌پور

Azmoon.kheilisabz.com
www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshClouds

۱ در یک دنبالهٔ حسابی با جملهٔ عمومی a_n، S_n مجموع n جملهٔ اول دنباله است. اگر $S_n - S_{n-1} = 3n + 4$ باشد، حاصل $a_8 - a_5$ کدام است؟

۱) ۱۲ ۲) ۶ ۳) ۹ ۴) ۱۵

Hint رابطهٔ مجموع n جملهٔ اول (S_n) و مجموع $n-1$ جملهٔ اول (S_{n-1}) را بنویسید، حاصل $S_n - S_{n-1}$ جملهٔ عمومی دنباله را نشان می‌دهد، سرانجام با استفاده از جملهٔ عمومی (a_n) مقدار $a_8 - a_5$ را به دست آورید.

درس Box

- دنباله‌ای که در آن هر جمله (به‌جز جملهٔ اول) با اضافه‌شدن عددی ثابت (قدرنسبت) به جملهٔ قبل از خودش به دست آید، یک دنبالهٔ حسابی نامیده می‌شود.
- در دنبالهٔ حسابی، اختلاف هر ۲ جملهٔ متوالی برابر قدرنسبت است:

$a_n - a_{n-1} = d$ (قدرنسبت دنبالهٔ حسابی را با d نشان می‌دهیم.)

- جملهٔ nاُم دنبالهٔ حسابی با جملهٔ اول a_1 و قدرنسبت d به صورت $a_n = a_1 + (n-1)d$ است.

برای مثال: $\underset{\text{جملهٔ پنجم}}{۲۴}, ۱۹, ۱۴, ۹, ۴, \ldots$ ($+5$ بین هر دو جمله)

$$\Rightarrow \begin{cases} d = 5 \\ a_n = a_1 + (n-1)d = 4 + (n-1)(5) = 5n - 1 \end{cases}$$

- اگر ۲ جملهٔ دلخواه a_m و a_n از یک دنبالهٔ حسابی معلوم باشند، آن‌گاه:

$$\begin{cases} a_m = a_1 + (m-1)d \\ a_n = a_1 + (n-1)d \end{cases} \xrightarrow{\text{پایین - بالا}} a_m - a_n = (m-n)d$$

برای مثال:

$$\begin{cases} a_8 = a_1 + 7d \\ a_5 = a_1 + 4d \end{cases} \Rightarrow a_8 - a_5 = 3d$$

- مجموع n جملهٔ اول دنبالهٔ حسابی از $S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)$ یا $S_n = \frac{n}{2}(2a_1 + (n-1)d)$ به دست می‌آید.

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: مجموع n جملهٔ اول (S_n) و $n-1$ جملهٔ اول (S_{n-1}) را به صورت زیر می‌نویسیم:

$$\begin{cases} S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_{n-1} + a_n \\ S_{n-1} = a_1 + a_2 + \ldots + a_{n-1} \end{cases}$$

پس حاصل $S_n - S_{n-1}$ را به دست می‌آوریم:

$$S_n - S_{n-1} = (a_1 + a_2 + \ldots + a_{n-1} + a_n) - (a_1 + a_2 + \ldots + a_{n-1}) \Rightarrow S_n - S_{n-1} = a_n$$

در نتیجه با توجه به $S_n - S_{n-1} = 3n + 4$ می‌توان نتیجه گرفت که:

$a_n = 3n + 4$

گام دوم: حالا که جملهٔ عمومی را داریم می‌توانیم a_8 و a_5 را محاسبه کنیم.

$$a_n = 3n + 4 \Rightarrow \begin{cases} \xrightarrow{n=8} a_8 = 3(8) + 4 = 28 \\ \xrightarrow{n=5} a_5 = 3(5) + 4 = 19 \end{cases}$$

گام سوم: در آخر کافی است مقدار $a_8 - a_5$ را به دست آوریم تا جواب حاصل شود:

$a_8 - a_5 = 28 - 19 = 9$

نکته دنبالهٔ حسابی یک دنبالهٔ خطی است و جملهٔ عمومی آن را می‌توان به صورت $a_n = an + b$ نوشت که ضریب n (a) قدرنسبت دنباله را نشان می‌دهد.

تیزبازی در جملهٔ عمومی دنبالهٔ $(a_n = 3n + 4)$ با توجه به نکتهٔ بالا ضریب n قدرنسبت را نشان می‌دهد؛ بنابراین $d = 3$ است؛ در نتیجه حاصل $a_8 - a_5$ برابر با:

$$a_8 - a_5 \xrightarrow{a_m - a_n = (m-n)d} = 3d = 3 \times 3 = 9$$

سنجش کلاد
www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshClouds

۲ اگر اعداد مثبت a و b جواب‌های معادلهٔ $۲ax^۲ - ۵bx + ۸b = ۰$ باشند، حاصل $a+b$ کدام است؟

۱) ۵ ۲) ۶ ۳) ۱۰ ۴) ۱۲

Hint از S و P استفاده کن.

درس Box

اگر معادلهٔ درجه‌دوم $ax^۲ + bx + c = ۰$ دو جواب حقیقی $x_۱$ و $x_۲$ را داشته باشد، می‌توان رابطه‌های زیر را بین این جواب‌ها و ضرایب معادله نوشت:

مجموع جواب‌ها: $S = x_۱ + x_۲ = -\frac{b}{a}$

حاصل‌ضرب جواب‌ها: $P = x_۱ x_۲ = \frac{c}{a}$

پاسخ خیلی تشریحی ✔

گام اول: a و b جواب‌های معادله هستند؛ پس می‌توانیم روابط مجموع و حاصل‌ضرب آن‌ها را به صورت زیر بنویسیم:

$$S = a + b = -\frac{(-۵b)}{۲a} = \frac{۵b}{۲a} \quad (۱)$$

$$P = a \times b = \frac{۸b}{۲a} = \frac{۴b}{a} \quad (۲)$$

گام دوم: از معادلهٔ (۲) با فرض ناصفربودن b می‌توانیم مقدار a را به دست آوریم:

$$ab = \frac{۴b}{a} \xrightarrow{b \neq ۰} a = \frac{۴}{a} \Rightarrow a^۲ = ۴ \xrightarrow{a \text{ مثبت است.}} a = ۲$$

گام سوم: مقدار a را در معادلهٔ (۱) جای‌گذاری می‌کنیم:

$$۲ + b = \frac{۵b}{۴} \Rightarrow \frac{b}{۴} = ۲ \Rightarrow b = ۸$$

در نتیجه خواستهٔ سؤال برابر $a + b = ۱۰$ است.

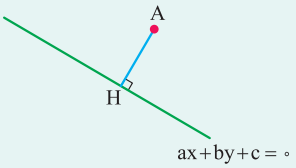
سنجش کلاد
www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshClouds

۳ فاصلهٔ نقطهٔ M روی خط $y = 2x - 1$ از خط $3x - 4y = 3$ برابر ۲ است. حاصل‌ضرب طول و عرض نقطهٔ M کدام می‌تواند باشد؟

۱) $6/8$
۲) $8/28$
۳) $-7/48$
۴) $-7/2$

Hint مختصات نقطهٔ M رو به صورت $(\alpha, 2\alpha - 1)$ در نظر بگیر و از فرمول درس‌باکس استفاده کن.

درس Box **فاصلهٔ نقطه از خط:** فاصلهٔ نقطه $A(x_0, y_0)$ از خط $L(x,y) = ax + by + c = 0$ از رابطهٔ زیر به دست می‌آید:



این یعنی مختصات نقطهٔ A را در معادلهٔ خط L جای‌گذاری کن.

$$AH = \frac{|L(x_0, y_0)|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{\overbrace{|ax_0 + by_0 + c|}}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

پاسخ خیلی تشریحی ✔ **گام اول:** نقطهٔ M روی خط $y = 2x - 1$ قرار دارد؛ پس مختصات آن را $M(\alpha, 2\alpha - 1)$ در نظر می‌گیریم و هدف مسئله محاسبهٔ مقادیر ممکن α است.

گام دوم: طبق رابطهٔ درس‌باکس، فاصلهٔ نقطهٔ M را از خط داده‌شده حساب می‌کنیم:

$$\text{فاصله: } MH = \frac{|3(\alpha) - 4(2\alpha - 1) - 3|}{\sqrt{3^2 + (-4)^2}} = \frac{|-5\alpha + 1|}{5} = 2 \Rightarrow |5\alpha - 1| = 10$$

گام سوم: معادلهٔ قدرمطلقی بالا را حل می‌کنیم:

$$\begin{cases} 5\alpha - 1 = 10 \Rightarrow \alpha = \frac{11}{5} \Rightarrow 2\alpha - 1 = \frac{17}{5} \\ \text{یا} \\ 5\alpha - 1 = -10 \Rightarrow \alpha = -\frac{9}{5} \Rightarrow 2\alpha - 1 = -\frac{23}{5} \end{cases}$$

گام چهارم: پس دو نقطه با مختصات $(\frac{11}{5}, \frac{17}{5})$ و $(-\frac{9}{5}, -\frac{23}{5})$ برای M می‌توان در نظر گرفت که حاصل‌ضرب طول و عرض آن‌ها برابر می‌شود با:

$$\begin{cases} \frac{11}{5} \times \frac{17}{5} = \frac{187}{25} = \frac{748}{100} = 7/48 \\ \text{یا} \\ (-\frac{9}{5}) \times (-\frac{23}{5}) = \frac{207}{25} = \frac{828}{100} = 8/28 \end{cases}$$

سنجش کلاد
www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshClouds

۴ فاصلهٔ بین رأس‌های دو سهمی $f(x)=۳(x-۱)(x+۵)+۷$ و $g(x)=۳(x+۱)(x+۷)+k$ برابر $\sqrt{۲۹}$ است. حاصل‌ضرب مقادیر ممکن برای k کدام است؟

۱) ۲۰ ۲) ۲۴ ۳) ۲۸ ۴) ۳۰

Hint

معادلهٔ سهمی‌ها رو به فرم مربع کاملشون بنویسید.

درس Box

معادلهٔ سهمی $y=ax^۲+bx+c$ به فرم مربع کامل به صورت $y=a(x-(-\frac{b}{۲a}))^۲-\frac{b^۲-۴ac}{۴a}$ نوشته می‌شود که نقطهٔ $(-\frac{b}{۲a},-\frac{b^۲-۴ac}{۴a})$ رأس سهمی نامیده می‌شود.

در نتیجه برای به دست آوردن مختصات رأس سهمی، کافی است طول رأس سهمی را که برابر $x_s=-\frac{b}{۲a}$ است، در معادلهٔ سهمی جای‌گذاری کنیم تا عرض آن نیز به دست آید. می‌توانیم مستقیم نیز عرض رأس را از رابطهٔ $y_s=\frac{-\Delta}{۴a}$ به دست آوریم.

پاسخ خیلی تشریحی ✔

گام اول: طبق الگوی درس‌باکس، معادلهٔ هر دو سهمی را به فرم مربع کامل می‌نویسیم:

$$f(x)=۳(x^۲+۴x-۵)+۷=۳((x+۲)^۲-۹)+۷=۳(x+۲)^۲-۲۰$$

$$g(x)=۳(x^۲+۸x+۷)+k=۳((x+۴)^۲-۹)+k=۳(x+۴)^۲+k-۲۷$$

گام دوم: در نتیجه نقاط $A(-۲,-۲۰)$ و $B(-۴,k-۲۷)$ به ترتیب رأس‌های دو سهمی f و g هستند.

یادآوری: فاصلهٔ دو نقطهٔ $(x_۱,y_۱)$ و $(x_۲,y_۲)$ از یکدیگر برابر $\sqrt{(x_۲-x_۱)^۲+(y_۲-y_۱)^۲}$ است.

طبق یادآوری بالا، فاصلهٔ دو رأس را برابر $\sqrt{۲۹}$ قرار می‌دهیم:

$$AB=\sqrt{(-۴+۲)^۲+(k-۷)^۲}=\sqrt{۲۹} \Rightarrow ۴+(k-۷)^۲=۲۹ \Rightarrow (k-۷)^۲=۲۵$$

$$\Rightarrow \begin{cases} k-۷=۵ \Rightarrow k=۱۲ \\ \text{یا} \\ k-۷=-۵ \Rightarrow k=۲ \end{cases}$$

در نتیجه حاصل‌ضرب دو مقدار قابل قبول برای k برابر ۲۴ است.

سنجش کلاد
www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshClouds

۵ به ازای چند مقدار صحیح a سهمی $ay=(a+۲)x^۲+(a-۱)x+۶-a$ حداکثر از سه ناحیه دستگاه مختصات می‌گذرد؟

۲ ناحیه یا ۳ ناحیه

۱) ۸

۲) ۷

۳) ۶

۴) ۵

مشاوره در سؤالاتی شبیه این سؤال که از زیرمبحث «گذر سهمی از ربع‌های دستگاه مختصات» است. رسم شکل کلی سهمی لازم است و بهتر است به جای این‌که با S و P کار کنید، با خود ضرایب a، b و c کار کنید؛ ساده‌تر است.

درس Box

جدول زیر شرایط لازم برای گذر سهمی از ربع‌های دستگاه مختصات را بیان می‌کند.

۱	عبور از هر چهار ربع	$P<۰$ یا $ac<۰$
۲	عبور از حداقل سه ربع	$\Delta>۰$
۳	فقط از ربع اول نگذرد.	$\Delta>۰, a<۰, b<۰$ و $c\le ۰$
۴	فقط از ربع دوم نگذرد.	$\Delta>۰, a<۰, b>۰$ و $c\le ۰$
۵	فقط از ربع سوم نگذرد.	$\Delta>۰, a>۰, b<۰$ و $c\ge ۰$
۶	فقط از ربع چهارم نگذرد.	$\Delta>۰, a>۰, b>۰$ و $c\ge ۰$
۷	حداکثر از سه ربع بگذرد.	$P\ge ۰$ یا $ac\ge ۰$
۸	از دو ربع بگذرد.	$\Delta\le ۰$

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: ابتدا از رابطهٔ داده‌شده، y را تنها می‌کنیم و معادلهٔ سهمی را به دست می‌آوریم:

$$y=(\frac{a+۲}{a})x^۲+(\frac{a-۱}{a})x+\frac{۶-a}{a}$$

گام دوم: و طبق جدول مهم درس‌باکس، برای این‌که این سهمی حداکثر از ۳ ناحیهٔ دستگاه مختصات عبور کند، کافی است P را نامنفی کنیم:

$$y=\underbrace{(\frac{a+۲}{a})}_{A}x^۲+\underbrace{(\frac{a-۱}{a})}_{B}x+\underbrace{\frac{۶-a}{a}}_{C}\Rightarrow P=\frac{C}{A}=\frac{\frac{۶-a}{a}}{\frac{a+۲}{a}}=\frac{۶-a}{a+۲}\ge ۰\xrightarrow{\text{بین ریشه‌ها}}-۲<a\le ۶$$

گام سوم: اما با توجه به معادلهٔ سهمی، بدیهی است که a نمی‌تواند صفر باشد؛ در نتیجه مجموعهٔ قابل قبول برای a برابر $(-۲,۶]-\{۰\}$ است که این مجموعه شامل ۷ عدد صحیح -۱، ۱، ۲، ۳، ۴، ۵ و ۶ است.

سنجش کلاد
www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshClouds

۶ اگر $x=a$ جواب معادلهٔ $\frac{x+۱}{x+a}=\frac{x-۲}{x+۲}$ باشد، حاصل $a^۲+\frac{۴}{a^۲}$ کدام است؟ در خود معادله صدق می‌کند.

۱) ۲۰
۲) ۱۷
۳) ۸۶
۴) ۵۳

Hint $x=a$ جواب معادله‌س، به جای هر x، a قرار بده و یه معادلهٔ گویا برحسب a حل کن.

پاسخ خیلی تشریحی **گام اول:** چون $x=a$ یک جواب معادله است؛ پس در آن صدق می‌کند و می‌توانیم به جای هر x، a قرار دهیم و تساوی هم‌چنان برقرار است:

$$\frac{a+۱}{۲a}=\frac{a-۲}{a+۲}$$

گام دوم: حالا معادلهٔ بالا را حل می‌کنیم تا مقدار a به دست آید. برای همین طرفین‌وسطین می‌کنیم:

$$۲a(a-۲)=(a+۱)(a+۲) \Rightarrow ۲a^۲-۴a=a^۲+۳a+۲ \Rightarrow a^۲-۷a-۲=۰$$

گام سوم: در این مرحله به جای این‌که معادلهٔ بالا را حل کنیم و سپس با جای‌گذاری مقدار a در عبارت $a^۲+\frac{۴}{a^۲}$ حاصل را به دست آوریم، صرفاً براساس اتحادهای جبری به صورت زیر عمل می‌کنیم:

$$a^۲-۲=۷a$$

حال طرفین تساوی را بر a تقسیم می‌کنیم:

$$a-\frac{۲}{a}=۷$$

و حالا طرفین تساوی را به توان ۲ می‌رسانیم:

$$a^۲+\frac{۴}{a^۲}-۴=۴۹ \Rightarrow a^۲+\frac{۴}{a^۲}=۵۳$$

www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshClouds

۷ معادلهٔ $x^{۲}\sqrt{x+۳}=(x+۳)^{\frac{۳}{۲}}$ چند جواب حقیقی دارد؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

Hint با فاکتورگیری حل کن. از چی فاکتور می‌گیری؟ ... آفرین، $\sqrt{x+۳}$.

پاسخ خیلی تشریحی **گام اول:** ابتدا معادله را به صورت زیر بازنویسی می‌کنیم:

$$x^{۲}\sqrt{x+۳}=(x+۳)\sqrt{x+۳}$$

اما دقت کنید که باید $x+۳$ مثبت باشد؛ پس جواب‌های محدودهٔ $x>-۳$ قابل قبول است.

گام دوم: همهٔ عبارت‌ها را به یک سمت تساوی می‌بریم و از $\sqrt{x+۳}$ فاکتور می‌گیریم:

$$(x^{۲}-x-۳)\sqrt{x+۳}=۰$$

گام سوم: حاصل‌ضرب دو عبارت صفر شده است؛ پس حداقل یکی از آن‌ها صفر است، اما با توجه به شرط $x>-۳$، فقط عبارت $x^{۲}-x-۳$ می‌تواند برابر صفر شود:

$$x^{۲}-x-۳=۰ \Rightarrow x=\frac{۱\pm\sqrt{۱۳}}{۲}$$

با در نظر گرفتن مقدار تقریبی $\sqrt{۱۳}\simeq ۳/۶$ هر دو جواب در محدودهٔ $(-۳,+\infty)$ و قابل قبول‌اند.

گول نخوری دقت کنید که $x=-۳$ را به عنوان جواب در نظر نگیرید، زیرا عبارت $x+۳$ با توان گویا نوشته شده است و طبق متن کتاب درسی سال دهم، فقط اعداد **مثبت** را می‌توانیم با توان گویا بنویسیم؛ در نتیجه محدودهٔ قابل قبول x بازهٔ $(-۳,+\infty)$ است و $x=-۳$ قابل قبول نیست.

سنجش کلاد
www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshClouds

۸ مساحت سطح بین نمودارهای دو تابع $f(x)=|x-۱|$ و $g(x)=k-|x-۳|$ برابر ۱۶ است. مقدار k کدام است؟

۱) ۵ ۲) ۵/۵

۳) ۶ ۴) ۶/۵

Hint

ابتدا ضابطه های دو تابع را به صورت دوضابطه‌ای بنویسید، سپس نمودار توابع f و g را در یک دستگاه رسم کنید. سطح بین نمودار که یک مستطیل است را برابر ۱۶ قرار دهید، مقدار k به دست می‌آید.

درس Box

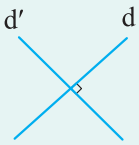
- برای محاسبهٔ شیب خط گذرنده از ۲ نقطهٔ $A(x_۱,y_۱)$ و $B(x_۲,y_۲)$ کافی است اختلاف عرض دو نقطه را به اختلاف طول دو نقطه تقسیم کنیم؛ یعنی:

$$m_{AB}=\frac{y_۱-y_۲}{x_۱-x_۲}$$

- برای محاسبهٔ طول پاره‌خط گذرنده از نقاط $A(x_۱,y_۱)$ و $B(x_۲,y_۲)$، از رابطهٔ زیر استفاده می‌کنیم:

$$AB=\sqrt{(x_۱-x_۲)^۲+(y_۱-y_۲)^۲}$$

- شیب دو خط عمود بر هم، قرینه و معکوس یکدیگر هستند:



$$m_{d'}=-\frac{۱}{m_d}$$

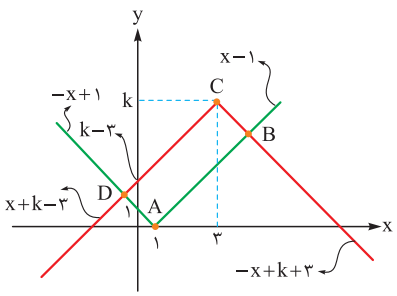
پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: ابتدا تابع $f(x)=|x-۱|$ و $g(x)=k-|x-۳|$ را به صورت دوضابطه‌ای می‌نویسیم:

$$f(x)=\begin{cases}x-۱ & x-۱\geq ۰\\ -x+۱ & x-۱<۰\end{cases}=\begin{cases}x-۱ & ;\ x\geq ۱\\ -x+۱ & ;\ x<۱\end{cases},\quad g(x)=\begin{cases}k-(x-۳) & ,\ x-۳\geq ۰\\ k-(-(x-۳)) & ,\ x-۳<۰\end{cases}$$

$$=\begin{cases}-x+k+۳ & x\geq ۳\\ x+k-۳ & x<۳\end{cases}$$

گام دوم: نمودار توابع f و g را در یک دستگاه رسم می‌کنیم:



گام سوم: با توجه به نمودار، چهارضلعی ABCD مستطیل است، زیرا اضلاع مستطیل دوبه‌دو بر هم عمودند. (حاصل‌ضرب شیب‌شان ۱− است.)

گام چهارم: برای محاسبهٔ مساحت محدود به نمودار، ابتدا مختصات نقطهٔ B که از محل برخورد دو خط به معادلات $y=x-۱$ و $y=-x+k+۳$ ایجاد شده است را به دست می‌آوریم:

$$\begin{cases}y=x-۱\\ y=-x+k+۳\end{cases}\Rightarrow x-۱=-x+k+۳\ \Rightarrow\ ۲x=k+۴\Rightarrow x=\frac{k+۴}{۲}\Rightarrow y=\frac{k+۴}{۲}-۱=\frac{k+۲}{۲}$$

بنابراین مختصات رئوس A، B و C در مستطیل به صورت‌های $A(۱,۰)$ و $B(\frac{k+۴}{۲},\frac{k+۲}{۲})$ و $C(۳,k)$ می‌باشند.

سنجش کلاد
www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshClouds

گام پنجم: طول اضلاع AB و BC را پیدا می‌کنیم:

$$AB=\sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2}=\sqrt{(\frac{k+4}{2}-1)^2+(\frac{k+2}{2}-0)^2}=\sqrt{(\frac{k+2}{2})^2+(\frac{k+2}{2})^2}$$

$$=\sqrt{2(\frac{k+2}{2})^2}=\sqrt{\frac{(k+2)^2}{2}}=\frac{|k+2|}{\sqrt{2}}\xrightarrow{k>0}AB=\frac{k+2}{\sqrt{2}}$$

همین‌طور محاسبهٔ ضلع BC:

$$BC=\sqrt{(x_B-x_C)^2+(y_B-y_C)^2}=\sqrt{(\frac{k+4}{2}-3)^2+(\frac{k+2}{2}-k)^2}=\sqrt{(\frac{k-2}{2})^2+(\frac{2-k}{2})^2}$$

$$=\sqrt{2(\frac{k-2}{2})^2}=\sqrt{\frac{(k-2)^2}{2}}=\frac{|k-2|}{\sqrt{2}}\xrightarrow{k>4}BC=\frac{k-2}{\sqrt{2}}$$

گام ششم: با توجه به شکل داریم:

$$S_{ABCD}=AB\times BC\Rightarrow S_{ABCD}=\frac{k+2}{\sqrt{2}}\times\frac{k-2}{\sqrt{2}}=\frac{k^2-4}{2}$$

گام هفتم: در آخر مساحت مستطیل به‌دست‌آمده از گام ششم را مساوی ۱۶ قرار می‌دهیم و k را حساب می‌کنیم:

$$S_{ABCD}=16\Rightarrow\frac{k^2-4}{2}=16\Rightarrow k^2-4=32\Rightarrow k^2=36\xrightarrow{k>0}k=6$$

سنجش کلاد
www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshClouds

۹ دامنهٔ تابع $f(x)=\sqrt{([x]-\sqrt{۵})(\sqrt{۳۰}-[x])}$ شامل چند عدد صحیح است؟ ([ ]، نماد جزء صحیح است.)

۱) ۶ ۲) ۵ ۳) ۴ ۴) ۳

Hint مثل چندجمله‌ای‌ها باهاش برخورد کن و عبارت زیر رادیکال رو تعیین علامت کن، فقط حواست باشه براکت حتماً باید صحیح باشه.

پاسخ خیلی تشریحی ✔ **گام اول:** دامنهٔ تابع مجموعهٔ مقادیری از x است که به ازای آن‌ها عبارت زیر رادیکال نامنفی است؛ پس این عبارت را تعیین علامت می‌کنیم و در این راه فعلاً کاری با براکت نداریم:

x		$\sqrt{۵}$		$\sqrt{۳۰}$	
$[x]-\sqrt{۵}$	$-$	۰	$+$		$+$
$\sqrt{۳۰}-[x]$	$+$	|	$+$	۰	$-$
$([x]-\sqrt{۵})(\sqrt{۳۰}-[x])$	$-$	۰	$+$	۰	$-$

پس باید $\sqrt{۵}\le[x]\le\sqrt{۳۰}$ باشد.

گام دوم: $[x]$ عددی صحیح است؛ پس نامساوی بالا را به صورت زیر حل می‌کنیم:

$$\xrightarrow{\sqrt{۵}\simeq۲/۲,\ \sqrt{۳۰}\simeq۵/۵} ۲/۲\le[x]\le۵/۵ \Rightarrow ۳\le[x]\le۵ \Rightarrow ۳\le x<۶$$

این بازه شامل ۳ عدد صحیح ۳، ۴ و ۵ است.

سنجش کلاد
www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshClouds

۱۰ اگر توابع $f(x)=\sqrt{x^۲-۴}+\sqrt{۴-x^۲}+b$ و $g(x)=\{(a,۱),(k,c)\}$ با هم برابر باشند. حاصل $a+b+c+k$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

Hint کافی است شرط تساوی دو تابع را اعمال نمایید، جواب‌ها به راحتی به دست می‌آیند.

پاسخ خیلی تشریحی **گام اول:** ابتدا دامنهٔ دو تابع را محاسبه می‌کنیم.

$$f(x)=\sqrt{x^۲-۴}+\sqrt{۴-x^۲}+b$$

$$x^۲-۴\geq ۰ \Rightarrow x^۲\geq ۴ \xrightarrow{\text{جذر}} |x|\geq ۲ \Rightarrow x\geq ۲ \text{ یا } x\leq -۲$$

$$۴-x^۲\geq ۰ \Rightarrow x^۲\leq ۴ \xrightarrow{\text{جذر}} |x|\leq ۲ \Rightarrow -۲\leq x\leq ۲$$

دامنهٔ تابع f از اشتراک جواب‌ها به دست می‌آید:



$$D_f=\{-۲,۲\}$$

حالا دامنهٔ تابع g را به دست می‌آوریم:

$$D_g=\{a,k\}$$

گام دوم: ضابطهٔ تابع f را با دامنهٔ $\{\pm ۲\}$ محاسبه می‌کنیم:

$$x=\pm ۲ \Rightarrow f(x)=b$$

بنابراین تابع f را می‌توان به صورت $f=\{(۲,b),(-۲,b)\}$ نوشت.

گام سوم: شرط تساوی دو تابع را برای f و g اعمال می‌کنیم:

شرط اول $\Rightarrow D_f=D_g \Rightarrow \{۲,-۲\}=\{a,k\}$

شرط دوم $\Rightarrow f(x)=g(x) \Rightarrow \{b\}=\{۱,c\}$

گام چهارم: از تساوی $\{b\}=\{۱,c\}$ می‌توان نتیجه گرفت که $b=c=۱$ و از تساوی $\{a,k\}=\{+۲,-۲\}$ می‌توان نتیجه گرفت که $a+k=۰$ است.

گام پنجم: در آخر حاصل $a+b+c+k$ برابر می‌شود با:

$$a+b+c+k=\overbrace{(a+k)}^{\text{صفر}}+b+c=۰+۱+۱=۲$$

سنجش کلاد
www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshClouds

۱۱ تابع خطی $f(x)=ax+b$ مفروض است. اگر $f^{-1}(x)=(a+b)x+\frac{b^2}{3}$ باشد، مجموعهٔ مقادیر قابل قبول برای a چندعضوی است؟

۱) ۲
۲) ۴
۳) ۶
۴) این مجموعه نامتناهی است.

Hint از درس‌باکس استفاده کن و ضابطهٔ f^{-1} رو به دست بیار، همین!

درس Box

محاسبهٔ ضابطهٔ تابع وارون

در حالت کلی برای یافتن ضابطهٔ وارون تابع یک‌به‌یک $y=f(x)$ به ترتیب زیر عمل می‌کنیم:

۱) برد تابع f را می‌یابیم: این برد، همان دامنهٔ تابع f^{-1} است.

۲) از معادلهٔ $y=f(x)$، x را بر حسب y می‌یابیم.

۳) در رابطهٔ به‌دست‌آمده، x و y را با هم تعویض می‌کنیم.

مثال‌های خاص: در تابع خطی و غیرثابت $f(x)=ax+b$، ضابطهٔ تابع وارون $f^{-1}(x)=\frac{x-b}{a}$ است؛ بنابراین وارون تابع خطی و غیرثابت، خود یک تابع خطی است؛ ضمناً شیب دو خط عکس هم هستند.

پاسخ خیلی تشریحی ✔

گام اول: ابتدا ضابطهٔ تابع f^{-1} را با همین پارامترهای a و b می‌نویسیم:

$$f^{-1}(x)=\frac{x-b}{a}$$

گام دوم: و این ضابطه را با ضابطهٔ مفروض صورت سؤال متحد قرار می‌دهیم:

$$\frac{1}{a}x-\frac{b}{a}=(a+b)x+\frac{b^2}{3} \Rightarrow \begin{cases}\frac{1}{a}=a+b & (1)\\ -\frac{b}{a}=\frac{b^2}{3} & (2)\end{cases}$$

گام سوم: در دو حالت $b=0$ و $b\neq 0$ بررسی می‌کنیم:

- $b=0 \Rightarrow \frac{1}{a}=a \Rightarrow a^2=1 \Rightarrow a\in\{-1,1\}$
- $b\neq 0 \Rightarrow -\frac{b}{a}=\frac{b^2}{3} \xrightarrow{\div b} -\frac{1}{a}=\frac{b}{3} \Rightarrow b=-\frac{3}{a}$

$$\xrightarrow{(1)} \frac{1}{a}=a-\frac{3}{a} \Rightarrow a=\frac{4}{a} \Rightarrow a^2=4 \Rightarrow a\in\{-2,2\}$$

پس a می‌تواند مقادیر مجموعهٔ $\{2,-1,1,-2\}$ را بپذیرد.

سنجش کلاد
www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshClouds

۱۲ اگر $f(x)=x^۲+\sqrt{۵x-x^۲-۴}+۲۰$ و $g(x)=۸x+\sqrt{۵x-x^۲-۴}$ باشد، برد تابع $f-g$ شامل چند عدد صحیح است؟

۱) ۹ ۲) ۱۰

۳) ۱۱ ۴) بی‌شمار

Hint کافی است با محاسبهٔ دامنهٔ f و g و اشتراک‌گیری از آن‌ها دامنهٔ تابع $f-g$ را به دست آورید، سپس ضابطهٔ تابع $f-g$ که یک سهمی است را تشکیل داده و در محدودهٔ دامنه، برد آن را محاسبه کنید.

درس Box

اعمال جبری روی توابع

رسم عمل	نماد	تعریف ریاضی	دامنه
جمع دو تابع	$f+g$	$(f+g)(x)=f(x)+g(x)$	$D_f \cap D_g$
تفریق دو تابع	$f-g$	$(f-g)(x)=f(x)-g(x)$	$D_f \cap D_g$
ضرب دو تابع	$f.g$	$(fg)(x)=f(x).g(x)$	$D_f \cap D_g$
تقسیم دو تابع	$\frac{f}{g}$	$(\frac{f}{g})(x)=\frac{f(x)}{g(x)}$	$D_f \cap D_g - \{x \mid g(x)=۰\}$

برای به‌دست‌آوردن دامنهٔ توابع رادیکالی با فرجهٔ زوج، کافی است عبارت زیر رادیکال را بزرگ‌تر یا مساوی صفر قرار دهیم:

$\sqrt[۲n]{A} \Rightarrow A \geq ۰$

پاسخ خیلی تشریحی **گام اول:** در ابتدا دامنه‌های دو تابع f و g را حساب می‌کنیم:

$f(x)=x^۲+\sqrt{۵x-x^۲-۴}+۲۰ \xrightarrow{\text{عبارت زیر رادیکال بزرگ‌تر یا مساوی صفر باشد.}} ۵x-x^۲-۴ \geq ۰$

$\xrightarrow{\times(-)} x^۲-۵x+۴ \leq ۰ \Rightarrow (x-۱)(x-۴) \leq ۰ \xrightarrow{\text{بین ۲ ریشه}} ۱ \leq x \leq ۴ \Rightarrow D_f=[۱,۴]$

و همین‌طور برای دامنهٔ تابع g که داریم:

$D_g=[۱,۴]$

گام دوم: از اشتراک دامنه‌های f و g دامنهٔ $f-g$ به دست می‌آید؛ بنابراین داریم:

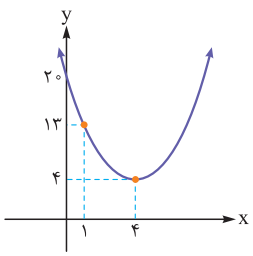
$D_{f-g}=D_f \cap D_g=[۱,۴]$

گام سوم: ضابطهٔ تابع $f-g$ را تشکیل می‌دهیم:

$(f-g)(x)=f(x)-g(x)=x^۲+\sqrt{۵x-x^۲-۴}+۲۰-(۸x+\sqrt{۵x-x^۲-۴})=x^۲-۸x+۲۰$

گام چهارم: حال برد تابع $(f-g)(x)=x^۲-۸x+۲۰$ را در محدودهٔ $x \in [۱,۴]$ با استفاده از رسم سهمی به دست می‌آوریم:

$(f-g)(x)=x^۲-۸x+۲۰=(x-۴)^۲+۴$



گام پنجم: با توجه به نمودار گام چهارم در محدودهٔ $x \in [۱,۴]$ برد تابع به صورت $[۴,۱۳]$ است که شامل ۱۰ عدد صحیح ۴، ۵، ۶، ۷، ۸، ۹، ۱۰، ۱۱، ۱۲ و ۱۳ است.

سنجش کلاد
www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshClouds

۱۳ اگر $f(۲^x + x) = ۲(x-۱) + ۲^{۱+x}$ باشد، مقدار $f(۲)$ کدام است؟

منظور از $f(۲)$ یعنی ورودی ماشین f را ۲ قرار دهید، در این‌جا ورودی ماشین f، $۲^x + x$ می‌باشد.

۱) ۲

۲) ۴

۳) ۳

۴) ۶

Hint کافی است به جای $۲^x + x$ قرار دهیم ۲. اصلاً به حل‌کردن معادله و پیداکردن x فکر نکنید و بایستی $۲^x + x$ را در رابطهٔ داده‌شده بسازید.

پاسخ خیلی تشریحی ✔

گام اول: با توجه به این‌که $f(۲)$ را می‌خواهد؛ بنابراین ورودی ماشین f را برابر ۲ قرار می‌دهیم:

$$۲^x + x = ۲$$

با توجه به این‌که پیداکردن x در معادلهٔ فوق پیچیده است؛ بنابراین سعی می‌کنیم عبارت $۲^x + x$ را در تساوی داده‌شده تشکیل دهیم.

گام دوم: طرف دوم تساوی $f(۲^x + x) = ۲(x-۱) + ۲^{۱+x}$ را ساده می‌کنیم تا $۲^x + x$ در آن تشکیل شود:

$$f(۲^x + x) = ۲x - ۲ + ۲ \times ۲^x = ۲(x + ۲^x) - ۲$$

گام سوم: حالا در تساوی $f(۲^x + x) = ۲(۲^x + x) - ۲$ به جای $۲^x + x$ قرار می‌دهیم ۲:

$$f(۲) = ۲ \times ۲ - ۲ = ۴ - ۲ = ۲$$

سنجش کلاد
www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshClouds

۱۴ اگر $f(x)=\sqrt{۴-۲\sqrt{x-۱}}$ باشد، مساحت سطح محصور بین نمودار تابع $g(x)=(f^{-۱}of)(x)+(fof^{-۱})(x)$ و محور xها کدام است؟

۱) ۱۵ ۲) ۳ ۳) ۳۰ ۴) ۶

Hint

ابتدا دامنه و برد تابع f را به دست آورید. سپس دامنهٔ تابع g را محاسبه و ضابطهٔ آن را تشکیل دهید. سرانجام نمودار تابع g را در محدودهٔ به‌دست‌آمده رسم نمایید و مساحت سطح محصور نمودار تابع با محور xها به راحتی به دست می‌آید.

درس Box

- اگر f تابعی وارون‌پذیر و $f^{-۱}$ وارون آن باشد، همواره داریم:

$$(fof^{-۱})(x)=x \;;\; x\in D_{f^{-۱}}$$
$$(f^{-۱}of)(x)=x \;;\; x\in D_f$$

- $D_{f^{-۱}}=R_f$ (دامنهٔ تابع وارون برابر برد تابع است) و $R_{f^{-۱}}=D_f$.
- برای به دست آوردن دامنهٔ توابع رادیکالی با فرجهٔ زوج، کافی است عبارت زیر رادیکال را بزرگ‌تر یا مساوی صفر قرار دهیم:

$$\sqrt[۲n]{A} \Rightarrow A\geq ۰$$

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: در ابتدا دامنهٔ تابع $f(x)=\sqrt{۴-۲\sqrt{x-۱}}$ را محاسبه می‌کنیم:

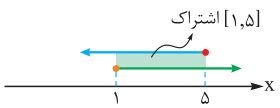
برای $\sqrt{x-۱}$:

$$x-۱\geq ۰ \Rightarrow x\geq ۱$$

برای $\sqrt{۴-۲\sqrt{x-۱}}$:

$$۴-۲\sqrt{x-۱}\geq ۰ \Rightarrow ۲\sqrt{x-۱}\leq ۴ \xrightarrow{\div ۲} \sqrt{x-۱}\leq ۲ \xrightarrow{\text{توان ۲}} x-۱\leq ۴ \Rightarrow x\leq ۵$$

از اشتراک جواب‌ها دامنهٔ تابع f حاصل می‌شود:



بنابراین: $D_f=[۱,۵]$.

گام دوم: با توجه به دامنهٔ تابع f، برد تابع را به دست می‌آوریم:

$$D_f=[۱,۵]\Rightarrow ۱\leq x\leq ۵ \xrightarrow{-۱} ۰\leq x-۱\leq ۴ \xrightarrow{\text{جذر}} ۰\leq \sqrt{x-۱}\leq ۲ \xrightarrow{\times(-۲)} -۴\leq -۲\sqrt{x-۱}\leq ۰$$

$$\xrightarrow{+۴} ۰\leq ۴-۲\sqrt{x-۱}\leq ۴ \xrightarrow{\text{جذر}} ۰\leq \sqrt{۴-۲\sqrt{x-۱}}\leq ۲ \Rightarrow ۰\leq f(x)\leq ۲ \Rightarrow R_f=[۰,۲]$$

گام سوم: می‌دانیم دامنهٔ تابع وارون برد تابع f است؛ پس:

$$D_{f^{-۱}}=R_f=[۰,۲]$$

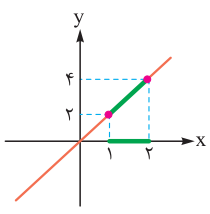
گام چهارم: حالا دامنهٔ تابع g را به صورت زیر محاسبه می‌کنیم:

$$\left.\begin{matrix} D_{fof^{-۱}}=D_{f^{-۱}}=R_f=[۰,۲] \\ D_{f^{-۱}of}=D_f=[۱,۵] \end{matrix}\right\} \xrightarrow{\text{طبق درس Box}} D_g=D_{fof^{-۱}}\cap D_{f^{-۱}of}=[۰,۲]\cap[۱,۵]=[۱,۲]$$

گام پنجم: حالا که دامنهٔ تابع g را به دست آوردیم، ضابطهٔ تابع آن را تشکیل می‌دهیم:

$$g(x)=(fof^{-۱})(x)+(f^{-۱}of)(x)=x+x=۲x \;;\; D_g=[۱,۲]$$

گام ششم: نمودار تابع $g(x)=۲x$ را در محدودهٔ $[۱,۲]$ رسم می‌کنیم:



سطح بین نمودار و محور xها یک ذوزنقه با قاعدهٔ کوچک ۲ و قاعدهٔ بزرگ ۴ و ارتفاع یک می‌باشد؛ بنابراین مساحت آن را می‌توان از رابطهٔ زیر محاسبه کرد:

$$S_{\text{ذوزنقه}}=\frac{\text{ارتفاع}\times\text{مجموع ۲ قاعده}}{۲}=\frac{(۲+۴)(۱)}{۲}=۳$$

سنجش کلاد
www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshClouds

۱۵ اگر $f(x)=\sqrt{16-x^2}$ باشد، دامنهٔ تابع $y=2+3f(1-x)$ کدام است؟

دامنهٔ تابع $y=2+3f(1-x)$ همان دامنهٔ $y=f(1-x)$ است، زیرا ۲ و ۳ روی دامنه تأثیر نمی‌گذارند.

۱) $[-5,3]$

۲) $[-5,4]$

۳) $[-3,5]$

۴) $[-4,5]$

Hint کافی است دامنهٔ تابع f را حساب کنید و سپس از تعریف دامنهٔ ترکیب تابع، جواب به دست می‌آید.

درس Box

- برای به دست آوردن دامنهٔ تابع رادیکالی با فرجهٔ زوج، کافی است عبارت زیر رادیکال را بزرگ‌تر یا مساوی صفر قرار دهیم:

$$\sqrt[2n]{A} \Rightarrow A\geq 0$$

- در تبدیل نمودار تابع $y=af(bx+c)+d$، a و d روی برد و b و c روی دامنه تأثیر می‌گذارند.
- دامنهٔ ترکیب دو تابع (fog) به صورت زیر است:

$$D_{fog}=\{x\in D_g \mid g(x)\in D_f\}$$

پاسخ خیلی تشریحی ✔

گام اول: ابتدا دامنهٔ تابع f را حساب می‌کنیم:

$$f(x)=\sqrt{16-x^2} \xrightarrow{\text{زیر رادیکال بزرگ‌تر یا مساوی صفر است.}} 16-x^2\geq 0 \Rightarrow x^2\leq 16$$

$$\xrightarrow[\sqrt{x^2}=|x|]{\text{جذر}} |x|\leq 4 \xrightarrow{\text{طبق نکتهٔ زیر}} -4\leq x\leq 4 \Rightarrow D_f=[-4,4]$$

نکته اگر $k>0$ باشد، آن‌گاه:

$$\begin{cases} |x|\leq k \Rightarrow -k\leq x\leq k \\ |x|\geq k \Rightarrow x\geq k \text{ یا } x\leq -k \end{cases}$$

گام دوم: در تبدیل نمودار تابع $y=2+3f(1-x)$، اعداد ۲ و ۳ روی دامنه تأثیر نمی‌گذارند؛ بنابراین برای محاسبهٔ دامنه می‌توان آن را نادیده گرفت.

گام سوم: ضابطهٔ $g(x)$ را $1-x$ قرار می‌دهیم و دامنهٔ $f(g(x))$ یا دامنهٔ fog را به صورت زیر حساب می‌کنیم:

$$f(x)=\sqrt{16-x^2},\quad g(x)=1-x$$

$$D_f \xrightarrow{\text{گام اول}} =[-4,4]$$

$$g(x)=1-x \Rightarrow D_g=\mathbb{R}$$

طبق تعریف: $D_{fog}=\{x\in D_g \mid g(x)\in D_f\} \Rightarrow D_{fog}=\{x\in\mathbb{R} \mid g(x)\in[-4,4]\}$

گام چهارم: حال کافی است نامعادلهٔ $-4\leq g(x)\leq 4$ را حل کنیم:

$$-4\leq g(x)\leq 4 \Rightarrow -4\leq 1-x\leq 4 \xrightarrow{\times(-1)} -5\leq -x\leq 3$$

$$\xrightarrow{\text{در منفی ضرب کنید، جهت نامعادله عوض می‌شود.}} 5\geq x\geq -3 \xrightarrow{\text{می‌توان نوشت}} -3\leq x\leq 5$$

گام پنجم: دامنهٔ تابع $y=2+3f(1-x)$ از اشتراک $\mathbb{R}$ و $[-3,5]$ به دست می‌آید:

$$\mathbb{R}\cap[-3,5]=[-3,5]$$

تیزبازی

چون بازه‌ها را در گزینه‌ها داریم، می‌توانیم از عددگذاری استفاده کنیم. برای این کار از عددی استفاده می‌کنیم که بین گزینه‌ها اختلاف می‌اندازد؛ مثل $x=-4$ که در گزینه‌های (۱)، (۲) و (۴) حضور دارد و در گزینهٔ (۳) حضور ندارد. بیایید $x=-4$ را در تابع جای‌گذاری کنیم.

$$y=2+3f(1-x) \xrightarrow{x=-4} y=2+3f(5) \xrightarrow{f(x)=\sqrt{16-x^2}} y=2+3\sqrt{16-25}=2+3\sqrt{-9}$$

همان‌طوری‌که می‌بینید عبارت داخل رادیکال منفی شده؛ پس گزینه‌های (۱)، (۲) و (۴) پَر! بنابراین گزینهٔ (۳) صحیح است.

سنجش کلاد
www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshClouds

۱۶ اگر $f(x)=\frac{x-۱}{x-۲}$ و $g(x)=\frac{x+۱}{x-۳}$ باشد، مجموع جواب‌های معادلهٔ $(f^{-۱}og)(x)=\frac{۱-۴x^۲}{x-۱}$ کدام است؟

۱) $\frac{۹}{۱۷}$

۲) $\frac{۴}{۱۷}$

۳) $-\frac{۴}{۱۷}$

۴) $-\frac{۹}{۱۷}$

Hint

در ابتدا ضابطهٔ تابع وارون f را به دست آورید و ضابطهٔ $f^{-۱}og(x)$ را تشکیل دهید و آن را مساوی $\frac{۱-۴x^۲}{x-۱}$ قرار دهید. پس از حل معادله ریشه‌های معادله به راحتی به دست می‌آیند.

درس Box

- تابع $f(x)=\frac{ax+b}{cx+d}$ که $\frac{a}{c}\neq\frac{b}{d}$ است را تابع هموگرافیک می‌نامیم، دامنه و برد این تابع به ترتیب برابر $D_f=\mathbb{R}-\{\frac{-d}{c}\}$ و $R_f=\mathbb{R}-\{\frac{a}{c}\}$ است.
- ضابطهٔ وارون تابع هموگرافیک $f(x)=\frac{ax+b}{cx+d}$ را می‌توان به صورت $f^{-۱}(x)=\frac{-dx+b}{cx-a}$ به دست آورد.

پاسخ خیلی تشریحی ✔

گام اول: ابتدا وارون تابع $f(x)=\frac{x-۱}{x-۲}$ را به صورت زیر به دست می‌آوریم:

$$f(x)=\frac{x-۱}{x-۲}\xrightarrow{\text{مطابق درس باکس}}f^{-۱}(x)=\frac{۲x-۱}{x-۱}$$

$$D_{f^{-۱}}=\mathbb{R}-\{۱\}$$

$$R_{f^{-۱}}=\mathbb{R}-\{۲\}$$

گام دوم: با داشتن $g(x)=\frac{x+۱}{x-۳}$ و $f^{-۱}(x)=\frac{۲x-۱}{x-۱}$ ضابطهٔ تابع $f^{-۱}og$ را به دست می‌آوریم:

$$(f^{-۱}og)(x)=f^{-۱}(g(x))=\frac{۲g(x)-۱}{g(x)-۱}=\frac{۲(\frac{x+۱}{x-۳})-۱}{\frac{x+۱}{x-۳}-۱}=\frac{x+۵}{۴}$$

گام سوم: ضابطهٔ تابع $f^{-۱}og$ را مساوی $\frac{۱-۴x^۲}{x-۱}$ قرار می‌دهیم و آن را حل می‌کنیم تا ریشه‌های آن را به دست آوریم:

$$\frac{x+۵}{۴}=\frac{۱-۴x^۲}{x-۱}\Rightarrow x^۲+۴x-۵=۴-۱۶x^۲\Rightarrow ۱۷x^۲+۴x-۹=۰$$

گام چهارم: در نتیجه مجموع جواب‌ها برابر است با:

$$-\frac{b}{a}=-\frac{۴}{۱۷}$$

سنجش کلاد
www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshClouds

۱۷ بزرگ‌ترین بازه‌ای که روی آن تابع $f(x)=x(|x|-||x|-2|-2)$ یک‌به‌یک است، به صورت $[a,b]$ است. ضابطهٔ تابع وارون این تابع در بازهٔ $[a,b]$ کدام است؟

۱) $f^{-1}(x)=\frac{|x|}{x}(\sqrt{1-\frac{|x|}{2}}-1)\ ;\ |x|\le 1$

۲) $f^{-1}(x)=\frac{|x|}{x}(\sqrt{1-\frac{|x|}{2}}-1)\ ;\ |x|\le 2$

۳) $f^{-1}(x)=\frac{|x|}{x}(\sqrt{1+\frac{|x|}{2}}-1)\ ;\ |x|\le 1$

۴) $f^{-1}(x)=\frac{|x|}{x}(\sqrt{1+\frac{|x|}{2}}-1)\ ;\ |x|\le 2$

پاسخ خیلی تشریحی ✔

گام اول: ریشه‌های داخل عبارت‌های قدرمطلقی صفر و ± 2 هستند، پس براساس این ریشه‌ها ضابطهٔ تابع f را می‌نویسیم:

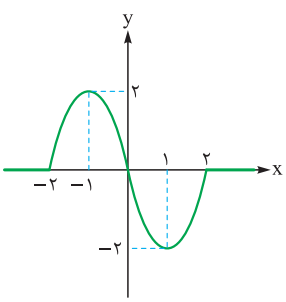
$$|x|-||x|-2|-2=\begin{cases}0 & ;\ x<-2\\ -2x-4 & ;\ -2\le x<0\\ 2x-4 & ;\ 0\le x<2\\ 0 & ;\ x\ge 2\end{cases}$$

$$\Rightarrow f(x)=\begin{cases}0 & ;\ x<-2\\ -2x^2-4x & ;\ -2\le x<0\\ 2x^2-4x & ;\ 0\le x<2\\ 0 & ;\ x\ge 2\end{cases}$$

گام دوم: ضابطه‌های تابع f را به صورت مربع کامل می‌نویسیم:

$$f(x)=\begin{cases}0 & ;\ x<-2\\ -2(x+1)^2+2 & ;\ -2\le x<0\\ 2(x-1)^2-2 & ;\ 0\le x<2\\ 0 & ;\ x\ge 2\end{cases}$$

و نمودار این تابع به صورت زیر است:



گام سوم: بزرگ‌ترین بازه‌ای که تابع f روی آن یک به یک است، بازهٔ $[-1,1]$ است که برد تابع در این بازه برابر $[-2,2]$ است.

ضابطهٔ تابع f^{-1} در این بازه به صورت زیر است:

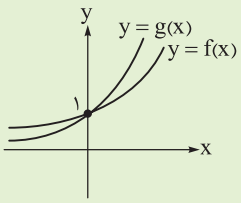
$$f^{-1}(x)=\begin{cases}-1+\sqrt{1-\frac{x}{2}} & ;\ 0\le x\le 2\\ 1-\sqrt{1+\frac{x}{2}} & ;\ -2\le x\le 0\end{cases}$$

گام چهارم: که اگر ضابطه‌ها را به صورت واحد بنویسیم، داریم:

$$f^{-1}(x)=\frac{|x|}{x}(\sqrt{1-\frac{|x|}{2}}-1)$$

سنجش کلاد
www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshClouds

۱۸ نمودار دو تابع نمایی f و g با ضابطه‌های $f(x)=(5-m)^x$ و $g(x)=(2m-3)^x$ در شکل زیر رسم شده‌اند. اگر مجموعه مقادیر قابل قبول برای m بازهٔ (a,b) باشد، حاصل $b-3a$ کدام است؟



۱) $\frac{4}{3}$

۲) ۴

۳) -4

۴) $-\frac{4}{3}$

Hint کافی است شرط نمایی‌بودن ۲ تابع f و g را به طور دقیق لحاظ نمایید تا بازهٔ قابل قبول m به دست آید.

درس Box

- هر تابع با ضابطهٔ $f(x)=a^x$ که در آن $a\neq 1, a>0, a\in\mathbb{R}$ یک تابع نمایی نامیده می‌شود.

در تابع $f(x)=a^x$:

اگر $a>1$، با افزایش مقدار x، مقادیر تابع f افزایش می‌یابند.

اگر $0<a<1$، با افزایش مقدار x، مقادیر تابع f کاهش می‌یابند.

- برای ۲ تابع $f(x)=a^x$ و $g(x)=b^x$ با شرط $b>a>1$ داریم:

اگر $x>0$، آن‌گاه $g(x)$ بالاتر از $f(x)$ قرار می‌گیرد: $(b^x>a^x)$.

اگر $x<0$، آن‌گاه $g(x)$ پایین‌تر از $f(x)$ قرار می‌گیرد: $(b^x<a^x)$.

برای مثال: اگر $x>0$، آن‌گاه $3^x>2^x$.

اگر $x<0$، آن‌گاه $3^x<2^x$.

پاسخ خیلی تشریحی ✔

گام اول: با توجه به نمودارهای $f(x)$ و $g(x)$ هر دو تابع نمایی افزایشی‌اند؛ بنابراین پایهٔ آن‌ها باید بزرگ‌تر از یک باشد.

$$f(x)=(5-m)^x \xrightarrow[\text{پایه}>1]{\text{نمایی افزایشی است.}} 5-m>1\Rightarrow m<4 \quad (1)$$

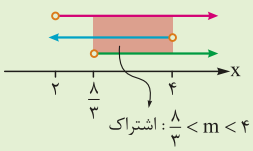
$$g(x)=(2m-3)^x \xrightarrow[\text{پایه}>1]{\text{نمایی افزایشی است.}} 2m-3>1\Rightarrow m>2 \quad (2)$$

گام دوم: مطابق شکل، برای $x>0$ نمودار $g(x)$ بالاتر از $f(x)$ قرار دارد؛ در نتیجه داریم:

$$g(x)>f(x)\Rightarrow (2m-3)^x>(5-m)^x \xrightarrow{\text{چون } f \text{ و } g \text{ نمایی افزایشی‌اند.}} 2m-3>5-m\Rightarrow 3m>8$$

$$\Rightarrow m>\frac{8}{3} \quad (3)$$

گام سوم: از جواب‌های (۱)، (۲) و (۳) اشتراک می‌گیریم:



گام چهارم: جواب به‌دست‌آمده برای m به صورت $m\in(\frac{8}{3},4)$ است که در آن $a=\frac{8}{3}$ و $b=4$؛ بنابراین مقدار $b-3a$ برابر می‌شود با:

$$b-3a=4-3(\frac{8}{3})=4-8=-4$$

سنجش کلاد
www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshClouds

۱۹ نمودار تابع $f(x)=۲^{x+b}+a$ از نقاط $(۱,۲)$ و $(۲,۳)$ می‌گذرد. مقدار $f(۳)$ کدام است؟

۱) ۴ ۲) ۵ ۳) ۶ ۴) ۷

Hint کافی است نقاط $(۱,۲)$ و $(۲,۳)$ را در تابع قرار دهید. با حل دستگاه حاصل، مقادیر a و b به دست می‌آید. با نوشتن ضابطهٔ تابع محاسبهٔ $f(۳)$ بسیار ساده است.

پاسخ خیلی تشریحی ✔

گام اول: تابع $f(x)=۲^{x+b}+a$ از نقطهٔ $(۱,۲)$ می‌گذرد؛ پس می‌توانیم بنویسیم:

$$۲=۲^{۱+b}+a \Rightarrow ۲=۲\times ۲^{b}+a \qquad (I)$$

گام دوم: تابع $f(x)=۲^{x+b}+a$ از نقطهٔ $(۲,۳)$ می‌گذرد؛ پس می‌توانیم بنویسیم:

$$۳=۲^{۲+b}+a \Rightarrow ۳=۲^{۲}\times ۲^{b}+a \Rightarrow ۳=۴\times ۲^{b}+a \qquad (II)$$

گام سوم: حالا با حل دستگاه حاصل از روابط (I) و (II) مقدار a و b را حساب می‌کنیم:

$$\begin{cases} ۲\times ۲^{b}+a=۲ \\ ۴\times ۲^{b}+a=۳ \end{cases} \xrightarrow{\text{بالایی - پایینی}} ۴\times ۲^{b}-۲\times ۲^{b}=۱$$

$$\Rightarrow ۲\times ۲^{b}=۱ \Rightarrow ۲^{b}=\frac{۱}{۲}=۲^{-۱} \Rightarrow b=-۱$$

با جای‌گذاری $b=-۱$ در $۴\times ۲^{b}+a=۳$، a به دست می‌آید:

$$۴\times ۲^{-۱}+a=۳ \Rightarrow ۲+a=۳ \Rightarrow a=۱$$

گام چهارم: بنابراین ضابطهٔ تابع به صورت زیر می‌شود:

$$f(x)=۲^{x-۱}+۱$$

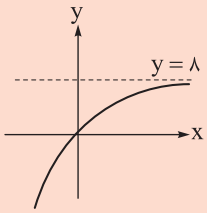
مقدار $f(۳)$ را محاسبه می‌کنیم:

$$f(۳)=۲^{۳-۱}+۱=۲^{۲}+۱=۴+۱=۵$$

سنجش کلاد
www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshClouds

۲۰ نمودار تابع $f(x)=c-۲^{ax+b}$ در زیر رسم شده است. اگر فاصلهٔ نقطه‌ای به طول $-\frac{۱}{۲}$ روی نمودار تابع f از خط $y=۸$، دو برابر فاصلهٔ آن تا محور xها باشد، مقدار $f(a+b)$ کدام است؟

قدرمطلق عرض نقطه



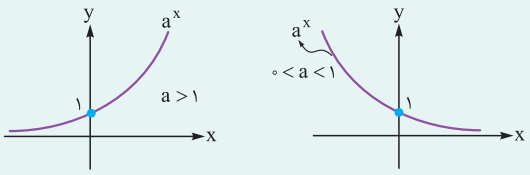
۱) ۷/۵
۲) ۶
۳) −۲۴
۴) −۱۲۰

Hint

ابتدا نقطهٔ $(۰,۰)$ و $(+\infty,۸)$ را در تابع قرار دهید تا مقدار b و c را به دست آورید، سپس فاصلهٔ نقطهٔ A از خط $y=۸$ را دوبرابر فاصلهٔ نقطهٔ A تا خط $y=۰$ (محور xها) قرار دهید تا مقدار a هم حاصل شود. حالا ضابطهٔ تابع را داریم و محاسبهٔ $f(a+b)$ بسیار ساده است.

درس Box

- **تابع نمایی**: هر تابعی را که بتوان به فرم $y=a^x$ با شرط $a>۰$ و $a\neq ۱$ نوشت تابع نمایی است.
- در تابع نمایی $y=a^x$ اگر $a>۱$، تابع نمایی افزایشی و $۰<a<۱$، تابع نمایی کاهشی است و نمودار آن مطابق شکل زیر است:



- در تابع نمایی $y=c+ka^{bx+d}$ خط $y=c$ مجانب ـ همان خط‌چین ـ افقی تابع است. (یعنی تابع در بی‌نهایت به سمت $y=c$ میل می‌کند.)

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: در تابع $f(x)=c-۲^{ax+b}$، طبق نمودار خط $y=۸$ مجانب افقی است (در بی‌نهایت تابع f به سمت ۸ میل می‌کند)؛ در نتیجه $c=۸$ است.

گام دوم: تابع $f(x)=۸-۲^{ax+b}$ از نقطهٔ $(۰,۰)$ می‌گذرد؛ پس می‌توانیم بنویسیم:

$$۸-۲^{b}=۰\Rightarrow ۲^{b}=۸=۲^{۳}\Rightarrow b=۳$$

گام سوم: نقطهٔ A به طول $-\frac{۱}{۲}$ روی نمودار تابع f قرار دارد؛ بنابراین مختصات نقطهٔ A را می‌توان به صورت $A(-\frac{۱}{۲},f(-\frac{۱}{۲}))$ نوشت. با توجه به نمودار مقدار $y_A=f(-\frac{۱}{۲})$ منفی است.

گام چهارم: فاصلهٔ نقطهٔ A از خط $y=۸$ و خط $y=۰$ (محور xها) را حساب می‌کنیم:

$$\text{فاصلهٔ نقطهٔ } A \text{ از خط } y=۸ \overset{\text{طبق نکتهٔ پایین}}{=\!=\!=} |۸-y_A| \xrightarrow{y_A<۰} =۸-y_A$$

$$\text{فاصلهٔ نقطهٔ } A \text{ از خط } y=۰ \text{ (محور } x\text{ها)} \overset{\text{طبق نکتهٔ پایین}}{=\!=\!=} |۰-y_A| \xrightarrow{y_A<۰} =-y_A$$

نکته

فاصلهٔ نقطهٔ $A\begin{vmatrix}x_۰\\y_۰\end{vmatrix}$ از خط $y=k$ برابر است با: $|k-y_۰|$

گام پنجم: فاصلهٔ نقطهٔ A از خط $y=۸$ را دوبرابر فاصلهٔ آن تا خط $y=۰$ (محور xها) قرار می‌دهیم:

$$۸-y_A=۲(-y_A)\Rightarrow y_A=-۸\Rightarrow f(-\tfrac{۱}{۲})=-۸$$

گام ششم: از تساوی $f(-\frac{۱}{۲})=-۸$ می‌توان a را به دست آورد:

$$f(x)=۸-۲^{ax+۳}\xrightarrow{f(-\frac{۱}{۲})=-۸}-۸=۸-۲^{-\frac{a}{۲}+۳}\Rightarrow ۲^{-\frac{a}{۲}+۳}=۱۶=۲^{۴}$$

$$\Rightarrow -\frac{a}{۲}+۳=۴\Rightarrow a=-۲$$

گام هفتم: بنابراین ضابطهٔ تابع به صورت $f(x)=۸-۲^{-۲x+۳}$ می‌شود.

مقدار $f(a+b)=f(-۲+۳)=f(۱)$ را محاسبه می‌کنیم:

$$f(a+b)=f(۱)=۸-۲^{-۲(۱)+۳}=۸-۲^{۱}=۸-۲=۶$$

سنجش کلاد
www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshClouds

۲۱ در کدام‌یک از تبدیل‌های زیر، جهت شکل حفظ نمی‌شود؟

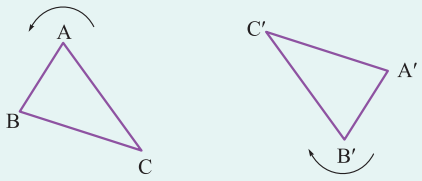
۱) بازتاب
۲) انتقال
۳) دوران 90°
۴) دوران 180°

مشاوره این سؤال مشابه سؤالی از کنکور ریاضی داخل مرحلهٔ اول ۱۴۰۳ طرح شده است.

Hint منظور از جهت شکل، ساعتگرد یا پادساعتگردبودن ترتیب رأس‌های چندضلعی است.

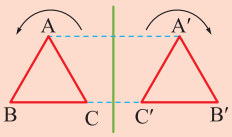
درس Box

جهت شکل در تبدیل‌های هندسی

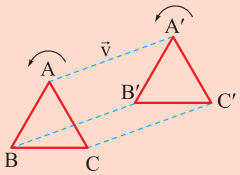


فرض کنید تحت تبدیل هندسی T، مثلث ABC بر مثلث $A'B'C'$ تصویر شده باشد. در مثلث ABC، ترتیب قرارگرفتن نقاط A, B و C به صورت پادساعتگرد (در خلاف جهت حرکت عقربه‌های ساعت) است، اما در مثلث $A'B'C'$، ترتیب قرارگرفتن نقاط A', B' و C' یعنی تصاویر نقاط A, B و C تحت تبدیل T، به صورت ساعتگرد (در جهت حرکت عقربه‌های ساعت) است. در این صورت می‌گوییم جهت شکل تحت تبدیل T عوض شده است.

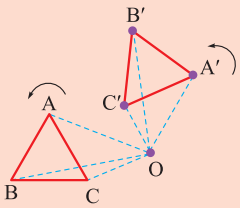
پاسخ خیلی تشریحی ✔ گزینه‌ها را به طور جداگانه مورد بررسی قرار می‌دهیم:



گزینهٔ (۱): نقاط A, B و C و به صورت پادساعتگرد قرار گرفته‌اند، ولی تصاویر آن‌ها تحت بازتاب جهت نسبت به خط d، یعنی نقاط A', B' و C' به صورت ساعتگرد هستند، پس تحت بازتاب، جهت شکل عوض می‌شود.

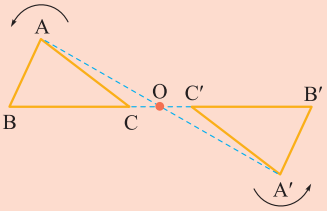


گزینهٔ (۲): هم نقاط A, B و C و هم تصاویر آن‌ها تحت انتقال با بردار $\vec{V}$، یعنی نقاط A', B' و C' به صورت پادساعتگرد قرار گرفته‌اند، پس تحت انتقال، جهت شکل عوض نمی‌شود.



گزینهٔ (۳): هم نقاط A, B و C و هم تصاویر آن‌ها تحت دوران 90° حول نقطهٔ O، یعنی نقاط A', B' و C' به صورت پادساعتگرد قرار گرفته‌اند.

گزینهٔ (۴): هم نقاط A, B و C و هم تصاویر آن‌ها تحت دوران 180° حول نقطهٔ O، یعنی نقاط A', B' و C' به صورت پادساعتگرد قرار گرفته‌اند.



با توجه به گزینه‌های (۳) و (۴)، تحت دوران، جهت شکل عوض نمی‌شود.

گول نخوری ✘ ممکن است برداشت اشتباهی از جهت شکل صورت بگیرد و به نوعی جهت قرارگیری شکل نسبت به محورهای مختصات به جای ترتیب ساعتگرد یا پادساعتگرد بودن رأس‌ها در نظر گرفته شود و در این صورت چون در دوران 180°، شکل به نوعی برعکس می‌شود، گزینهٔ «۴» به اشتباه انتخاب گردد.

سنجش کلاد
www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshClouds

۲۲ اگر پاره‌خط $A'B'$ دوران‌یافتهٔ پاره‌خط AB به مرکز نقطه‌ای غیرواقع بر AB (و یا امتداد آن) باشد، مرکز دوران کدام است؟ (A' و B' به ترتیب دوران‌یافتهٔ A و B هستند.)

۱) محل تلاقی AB و $A'B'$

۲) محل تلاقی عمودمنصف‌های AB و $A'B'$

۳) محل تلاقی عمودمنصف‌های AA' و BB'

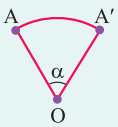
۴) محل تلاقی AA' و BB'

مشاوره این سؤال براساس تمرین ۳ صفحهٔ ۴۲ کتاب درسی هندسه (۲) طرح شده است که به روش پیداکردن مرکز دوران در صورت داشتن یک شکل و تصویر آن تحت دوران می‌پردازد.

Hint هر نقطه و تصویر آن تحت دوران، از مرکز دوران به یک فاصله قرار دارند.

درس Box

دوران:



دوران به مرکز O و زاویهٔ α تبدیلی است که در آن نقطهٔ A بر نقطهٔ A' تصویر می‌شود، به طوری که:

$$OA = OA' \quad و \quad A\hat{O}A' = \alpha$$

مهم‌ترین ویژگی‌های دوران عبارت‌اند از:

۱) دوران یک تبدیل طولپا است.

۲) دوران اندازهٔ زاویه‌ها را حفظ می‌کند.

۳) دوران در حالت کلی شیب خط‌ها را حفظ نمی‌کند. (مگر این‌که زاویهٔ دوران مضربی از 180° باشد.)

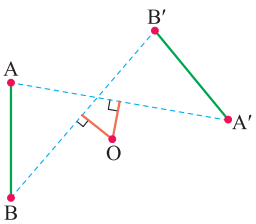
۴) دوران جهت شکل‌ها را حفظ می‌کند.

نکته هر نقطه که از دو سر یک پاره‌خط به یک فاصله باشد، روی عمودمنصف آن پاره‌خط قرار دارد.

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: فرض کنید نقطهٔ O مرکز دوران باشد. در این صورت $OA = OA'$ و $OB = OB'$ است؛ یعنی A و A' از O به یک فاصله و به طور مشابه B و B' هم از O به یک فاصله هستند.

گام دوم: با توجه به توضیحات گام اول، O روی عمودمنصف AA' و نیز روی عمودمنصف BB' قرار دارد، پس O محل تلاقی عمودمنصف‌های دو پاره‌خط AA' و BB' است.



سنجش کلاد
www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshClouds

۲۳ نقطهٔ A' تصویر نقطهٔ A تحت بازتاب نسبت به خط d و O نقطه‌ای روی خط d است. اگر $AA' = ۱۲$ و فاصلهٔ نقطهٔ A از پاره‌خط OA' برابر ۹/۶ باشد، فاصلهٔ نقطهٔ O از پاره‌خط AA' کدام است؟

۱) ۶ ۲) ۸

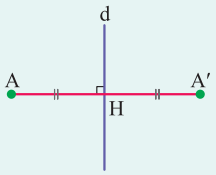
۳) ۹ ۴) ۱۰

مشاوره این سؤال مشابه تمرین ۷ صفحه ۴۳ کتاب درسی هندسهٔ ۲ طرح شده است. حل این سؤال را برای امتحان نهایی به طور کامل به یاد داشته باشید.

Hint حاصل‌ضرب طول هر ضلع در طول ارتفاع وارد بر آن ضلع در یک مثلث، مقدار یکسانی است.

درس Box

بازتاب:



نقطهٔ A' را بازتاب نقطهٔ A نسبت به خط d گویند، هرگاه d عمودمنصف پاره‌خط AA' باشد.

خط d را محور بازتاب می‌گویند و در صورتی که نقطهٔ A روی محور بازتاب باشد، تصویر A بر خود A منطبق می‌شود.

مهم‌ترین ویژگی‌های بازتاب عبارت‌اند از:

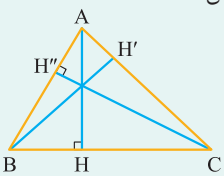
۱) بازتاب یک تبدیل طولپا است.

۲) بازتاب اندازهٔ زاویه‌ها را حفظ می‌کند.

۳) بازتاب جهت شکل‌ها را حفظ نمی‌کند.

۴) بازتاب در حالت کلی شیب خط‌ها را حفظ نمی‌کند. (مگر این‌که محور بازتاب موازی با خط یا عمود بر خط باشد.)

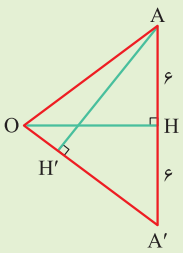
نکته حاصل‌ضرب طول هر ضلع در ارتفاع وارد بر آن ضلع در یک مثلث، مقداری ثابت و دو برابر مساحت آن مثلث است.



$$S_{ABC} = \frac{۱}{۲}AH \times BC = \frac{۱}{۲}BH' \times AC = \frac{۱}{۲}CH'' \times AB \Rightarrow a \times h_a = b \times h_b = c \times h_c = ۲S$$

پاسخ خیلی تشریحی ✔

گام اول: شکل مسئله را رسم می‌کنیم. مطابق شکل اگر $OH = x$ فرض شود، آن‌گاه طبق قضیهٔ فیثاغورس در مثلث $OA'H$ داریم:



$$OA'^{۲} = OH^{۲} + A'H^{۲} \Rightarrow OA'^{۲} = x^{۲} + ۳۶ \Rightarrow OA' = \sqrt{x^{۲} + ۳۶}$$

گام دوم: در مثلث OAA'، OH ارتفاع وارد بر ضلع AA' و AH' ارتفاع وارد بر ضلع OA' است؛ بنابراین طبق نکتهٔ بالا داریم:

$$OH \times AA' = AH' \times OA' \Rightarrow x \times ۱۲ = ۹/۶ \times \sqrt{x^{۲} + ۳۶} \xrightarrow{\div ۱/۲} ۱۰x = ۸\sqrt{x^{۲} + ۳۶}$$

$$\xrightarrow{\text{به توان ۲}} ۱۰۰x^{۲} = ۶۴(x^{۲} + ۳۶) = ۶۴x^{۲} + ۶۴ \times ۳۶ \Rightarrow ۳۶x^{۲} = ۶۴ \times ۳۶ \Rightarrow x^{۲} = ۶۴ \Rightarrow x = ۸$$

سنجش کلاد
www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshClouds

۲۴ دایرهٔ $C(O,a-1)$ را با بردار انتقال $\vec{V}$ بر دایرهٔ $C'(O',7-a)$ تصویر می‌کنیم. اگر طول مماس مشترک داخلی دو دایره برابر $2\sqrt{7}$ باشد، طول مماس مشترک خارجی این دو دایره کدام است؟

۱) ۶
۲) $3\sqrt{5}$
۳) $4\sqrt{3}$
۴) ۸

مشاوره سؤالات ترکیبی انواع تبدیل‌ها با مباحث مختلف فصل دایره به ویژه مماس مشترک دو دایره از سؤالات مورد توجه در آزمون‌های تستی است و امکان طرح چنین سؤالاتی در امتحان نهایی نیز وجود دارد.

Hint طول مماس مشترک خارجی دو دایره با شعاع‌های مساوی، برابر طول خط‌المرکزین دو دایره است.

درس Box

انتقال:



انتقال T تحت بردار $\vec{v}$، تبدیلی است که در آن تصویر هر نقطه مانند A از صفحهٔ P، نقطه‌ای مانند B از همین صفحه است، به طوری که $\overrightarrow{AB}=\vec{v}$ باشد.

مهم‌ترین ویژگی‌های انتقال عبارت‌اند از:

۱) انتقال، تبدیلی طولپاست.

۲) انتقال، شیب خط‌ها را حفظ می‌کند.

۳) انتقال، اندازهٔ زاویه‌ها را حفظ می‌کند.

۴) انتقال، جهت شکل‌ها را حفظ می‌کند.

۵) بردارهایی که هر نقطه از شکل را به تصویر آن تحت انتقال وصل می‌کنند، همگی با هم برابرند.

نکته دو دایرهٔ $C(O,R)$ و $C'(O',R')$ با طول خط‌المرکزین $OO'=d$ را در نظر بگیرید. طول‌های مماس مشترک داخلی و خارجی دو دایره از روابط زیر به دست می‌آیند:

$$\text{طول مماس مشترک داخلی} = \sqrt{d^2-(R+R')^2}$$

$$\text{طول مماس مشترک خارجی} = \sqrt{d^2-(R-R')^2}$$

پاسخ خیلی تشریحی ✔

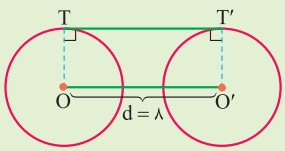
گام اول: انتقال تبدیلی طولپاست، پس شعاع دایره تحت انتقال تغییری نمی‌کند و در نتیجه داریم:

$$R=R' \Rightarrow a-1=7-a \Rightarrow 2a=8 \Rightarrow a=4 \Rightarrow R=R'=3$$

گام دوم: به کمک فرمول طول مماس مشترک داخلی، طول خط‌المرکزین دو دایره (طول بردار انتقال) را پیدا می‌کنیم:

$$\text{طول مماس مشترک داخلی} = \sqrt{d^2-(R+R')^2} \Rightarrow 2\sqrt{7}=\sqrt{d^2-(3+3)^2} \xrightarrow{\text{به توان ۲}} 28=d^2-36 \Rightarrow d^2=64 \Rightarrow d=8$$

گام سوم: طول مماس مشترک خارجی دو دایرهٔ C و C' که شعاع‌های آن‌ها برابر یکدیگر باشد، برابر طول خط‌المرکزین دو دایره، یعنی برابر ۸ است.



سنجش کلاد
www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshClouds

۲۵ شعاع‌های دو دایرهٔ مماس داخل برابر $2x$ و $3x+1$ هستند. اگر طول خط‌المرکزین این دو دایره برابر $2x-1$ باشد، اندازهٔ شعاع دایرهٔ کوچک‌تر کدام است؟

۱) ۲

۲) ۴

۳) ۶

۴) ۷

مشاوره رابطهٔ بین اندازهٔ شعاع‌های دو دایره و طول خط‌المرکزین در حالت‌های مختلف دو دایره به طور مستقیم یا غیرمستقیم (مثلاً در مسائل مربوط به طول مماس مشترک‌ها) در بخش زیادی از مسائل دایره در پایه‌های یازدهم و دوازدهم مورد استفاده قرار می‌گیرد.

Hint کافی است شرط مماس داخل بودن دو دایره (رابطهٔ بین اندازهٔ شعاع‌ها و طول خط‌المرکزین) را بنویسید.

درس Box

حالت‌های مختلف دو دایره

دو دایرهٔ $C(O,R)$ و $C'(O',R')$ با طول خط‌المرکزین $OO'=d$ را در نظر بگیرید.

۱) اگر $d>R+R'$ دایره باشد، دو دایره متخارج‌اند.

۲) اگر $d=R+R'$ باشد، دو دایرهٔ مماس خارج‌اند.

۳) اگر $|R-R'|<d<R+R'$ باشد، دو دایره متقاطع‌اند.

۴) اگر $d=|R-R'|$ باشد، دو دایرهٔ مماس داخلی‌اند.

۵) اگر $d<|R-R'|$ باشد، دو دایره متداخل‌اند.

۶) اگر $d=0$ باشد، دو دایره هم‌مرکزند.

پاسخ خیلی تشریحی **گام اول:** اندازهٔ شعاع‌های دو دایره و طول خط‌المرکزین مقادیری مثبت هستند؛ در نتیجه داریم:

$$3x>2x \Rightarrow 3x+1>2x$$

بنابراین شعاع دایرهٔ بزرگ‌تر، برابر $3x+1$ و شعاع دایرهٔ کوچک‌تر، برابر $2x$ است.

گام دوم: دو دایرهٔ مماس داخل هستند، پس داریم:

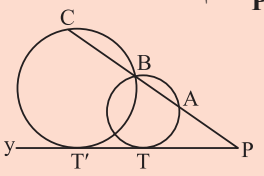
$$d=|R-R'| \Rightarrow 2x-1=|(3x+1)-2x| \Rightarrow 2x-1=|x+1| \xrightarrow{x+1>0} 2x-1=x+1 \Rightarrow x=2$$

گام سوم: شعاع دایرهٔ کوچک‌تر برابر است با:

$$2x=2\times 2=4$$

سنجش کلاد
www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshClouds

۲۶ در شکل زیر دو دایره در نقاط T و T' بر نیم‌خط Py مماس هستند و $PT = ۳TT'$. حاصل $\frac{PC}{PA}$ کدام است؟



۱) $\frac{۴}{۳}$
۲) ۲
۳) $\frac{۱۶}{۹}$
۴) ۴

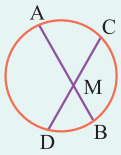
مشاوره سؤالات مربوط به مبحث روابط طولی در دایره، بخش مهمی از سؤالات فصل دایره در کنکور را به خود اختصاص داده‌اند و از جمله سؤالی از این موضوع در کنکور مرحلهٔ اول ۱۴۰۳ طرح شده است.

Hint برای هر کدام از دو دایره، رابطهٔ طولی بین مماس و قاطع را بنویسید.

درس Box

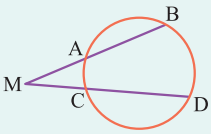
روابط طولی در دایره

۱) اگر دو وتر AB و CD در نقطهٔ M درون دایره متقاطع باشند، آن‌گاه داریم:



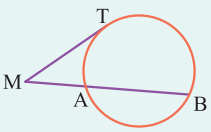
$$MA \times MB = MC \times MD$$

۲) اگر امتداد دو وتر AB و CD در نقطهٔ M بیرون دایره متقاطع باشد، آن‌گاه داریم:



$$MA \times MB = MC \times MD$$

۳) اگر از نقطهٔ M بیرون دایره، مماس MT و قاطع MAB نسبت به دایره رسم شده باشد، آن‌گاه داریم:



$$MT^۲ = MA \times MB$$

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: اول فرض کنید $TT' = x$ باشد، در این صورت $PT = ۳x$ و $PT' = ۴x$ است. رابطهٔ طولی مماس و قاطع را برای دایرهٔ کوچک‌تر می‌نویسیم:

$$PT^۲ = PA \times PB \Rightarrow PA \times PB = (۳x)^۲ = ۹x^۲$$

گام دوم: رابطهٔ طولی مماس و قاطع را برای دایرهٔ بزرگ‌تر می‌نویسیم:

$$PT'^۲ = PB \times PC \Rightarrow PB \times PC = (۴x)^۲ = ۱۶x^۲$$

گام سوم: طرفین رابطه‌های به‌دست‌آمده در گام‌های اول و دوم را بر هم تقسیم می‌کنیم:

$$\frac{PB \times PC}{PA \times PB} = \frac{۱۶x^۲}{۹x^۲} \Rightarrow \frac{PC}{PA} = \frac{۱۶}{۹}$$

سنجش کلاد
www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshClouds

۲۷ در مثلث متساوی‌الاضلاع ABC، I مرکز دایرهٔ محاطی داخلی و I_a مرکز دایرهٔ محاطی خارجی است، نسبت مساحت مثلث BIC به BI_aC کدام است؟

۱) 1
۲) $\frac{1}{2}$
۳) $\frac{1}{3}$
۴) $\frac{1}{4}$

مشاوره فرمول‌های شعاع دایرهٔ محاطی داخلی و دایره‌های محاطی خارجی مثلث از روابط پرکاربرد فصل دایره محسوب می‌شوند و در سؤالات ترکیبی فصل سوم کتاب هندسه ۲ (روابط طولی در مثلث) نیز حضور چشمگیری دارند.

Hint
به یکسان‌بودن قاعده‌های دو مثلث دقت کنید.

درس Box

شعاع دایره‌های محاطی داخلی و خارجی مثلث

اگر S و P به ترتیب مساحت و نصف محیط مثلث ABC باشند، آن‌گاه:

۱) شعاع دایرهٔ محاطی داخلی مثلث از رابطهٔ $r = \frac{S}{P}$ به دست می‌آید.

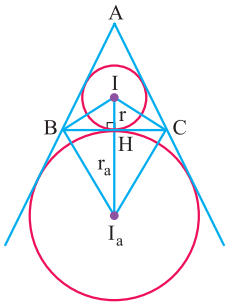
۲) شعاع دایرهٔ محاطی خارجی مماس بر ضلع به طول a از رابطهٔ $r_a = \frac{S}{P-a}$ به دست می‌آید.

۳) رابطهٔ زیر بین شعاع دایرهٔ محاطی داخلی و شعاع‌های دایره‌های محاطی خارجی مثلث برقرار است:

$$\frac{1}{r_a}+\frac{1}{r_b}+\frac{1}{r_c}=\frac{1}{r}$$

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: دو مثلث BIC و BI_aC در قاعدهٔ BC مشترک‌اند و نقطهٔ تماس دو دایرهٔ محاطی داخلی و محاطی خارجی نظیر ضلع BC با ضلع BC، بر یکدیگر منطبق است (نقطهٔ H). ارتفاع نظیر این قاعدهٔ مشترک در این دو مثلث، همان شعاع‌های دایره‌های محاطی داخلی و خارجی است.



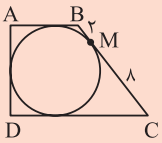
گام دوم: نسبت مساحت‌های دو مثلث برابر است با:

$$\frac{S_{BIC}}{S_{BI_aC}}=\frac{\frac{1}{2}r\times a}{\frac{1}{2}r_a\times a}=\frac{r}{r_a}=\frac{\frac{S}{P}}{\frac{S}{P-a}}=\frac{P-a}{P}=\frac{\frac{3}{2}a-a}{\frac{3}{2}a}=\frac{\frac{1}{2}a}{\frac{3}{2}a}=\frac{1}{3}$$

سنجش کلاد
www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshClouds

۲۸ در ذوزنقهٔ قائم‌الزاویهٔ شکل زیر، نقطهٔ تماس دایرهٔ محاطی ذوزنقه با یکی از ساق‌ها، آن را به دو پاره‌خط به طول‌های ۲ و ۸ تقسیم کرده است. طول ارتفاع این ذوزنقه کدام است؟

طول قطر دایرهٔ محاطی ذوزنقه



۱) ۶
۲) ۷/۵
۳) ۸
۴) ۹

مشاوره سؤالات مربوط به دایرهٔ محاطی ذوزنقه از سؤالات پرتکرار کنکور محسوب می‌شوند و از جمله در کنکور ریاضی داخل و خارج ۱۴۰۱ و مرحلهٔ اول ۱۴۰۲ سؤال‌هایی از این مبحث طراحی شده است.

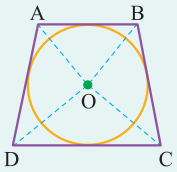
Hint نیمسازهای دو زاویهٔ مجاور به هر ساق یک ذوزنقه، بر هم عمود هستند.

درس Box

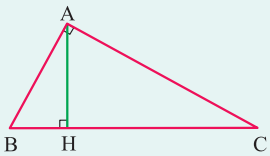
چندضلعی محیطی

یک چندضلعی محیطی نامیده می‌شود هرگاه دایره‌ای وجود داشته باشد که بر همهٔ ضلع‌های آن مماس باشد؛ در این صورت دایره را دایرهٔ محاطی این چندضلعی می‌نامیم.

یک چندضلعی محیطی است اگر و فقط اگر همهٔ نیمسازهای زاویه‌های آن در یک نقطهٔ همرس باشند. این نقطه مرکز دایرهٔ محاطی چندضلعی است.



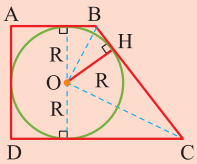
نکته در هر مثلث قائم‌الزاویه، ارتفاع وارد بر وتر، واسطهٔ هندسی دو قطعه‌ای است که ارتفاع بر روی وتر پدید می‌آورد، یعنی اگر AH ارتفاع وارد بر وتر در مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC باشد، آن‌گاه داریم:



$$AH^2 = BH \times CH$$

پاسخ خیلی تشریحی ✔

گام اول: مرکز دایرهٔ محاطی ذوزنقه، نقطهٔ همرسی نیمسازهای ذوزنقه است، پس ابتدا مطابق شکل، نیمسازهای داخلی زوایای B و C را رسم می‌کنیم تا یکدیگر را در نقطهٔ O قطع کنند.



با توجه به این‌که زوایای $\hat{B}$ و $\hat{C}$ (زوایای مجاور به یک ساق) مکمل یکدیگرند، پس مجموع زوایای $O\hat{B}C$ و $O\hat{C}B$ برابر 90° است و در نتیجه $\hat{O} = 90^\circ$ و مثلث OBC قائم‌الزاویه است.

گام دوم: می‌دانیم شعاع وارد بر خط مماس بر دایره، در نقطهٔ تماس بر این خط عمود است؛ پس شعاع OH، ارتفاع وارد بر وتر در مثلث قائم‌الزاویهٔ OBC است و در نتیجه طبق روابط طولی در این مثلث قائم‌الزاویه داریم:

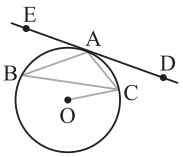
$$OH^2 = BH \times CH \Rightarrow R^2 = 2 \times 8 = 16 \Rightarrow R = 4$$

گام سوم: طول ارتفاع ذوزنقه برابر طول ضلع AD و دو برابر شعاع دایرهٔ محاطی ذوزنقه است، پس طول ارتفاع ذوزنقه برابر است با:

$$2 \times 4 = 8$$

سنجش کلاد
www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshClouds

۲۹ در شکل زیر، **O** مرکز دایره است و خط گذرنده از نقاط **D** و **E** در نقطهٔ **A** بر دایره مماس است. اگر $B\hat{C}O = ۱۵^\circ$ و $C\hat{A}D = ۲۵^\circ$ باشد، اندازهٔ زاویهٔ **EAB** چند درجه است؟



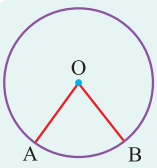
۱) ۴۰
۲) ۴۵
۳) ۵۰
۴) ۵۵

مشاوره سؤالات مبحث زاویه‌ها در دایره از سؤالات تقریباً ثابت در کنکور محسوب می‌شوند و زاویه‌های محاطی و ظلی معمولاً پایه و اساس این دسته از سؤالات را تشکیل می‌دهند.

Hint به کمک زاویهٔ مرکزی $B\hat{O}C$ اندازهٔ کمان $\overset{\frown}{BAC}$ را تعیین کنید.

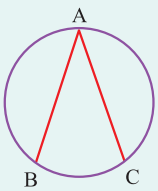
درس Box

زاویهٔ مرکزی: زاویه‌ای است که رأس آن روی مرکز دایره قرار دارد و اضلاع آن دو شعاع از دایره هستند. اندازهٔ هر زاویهٔ مرکزی برابر اندازهٔ کمان روبه‌رو به آن است.



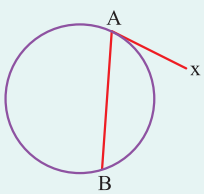
$$A\hat{O}B = \overset{\frown}{AB}$$

زاویهٔ محاطی: زاویه‌ای است که رأس آن روی دایره قرار دارد و اضلاع آن دو وتر از دایره هستند. اندازهٔ هر زاویهٔ محاطی برابر نصف اندازهٔ کمان روبه‌رو به آن است.



$$B\hat{A}C = \frac{\overset{\frown}{BC}}{۲}$$

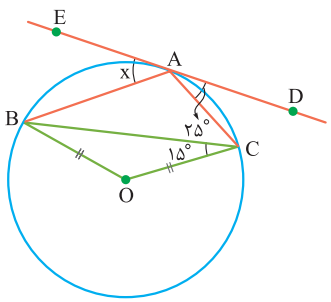
زاویهٔ ظلی: زاویه‌ای است که رأس آن روی دایره قرار دارد و یکی از اضلاع آن مماس بر دایره و ضلع دیگر آن وتری از دایره است. اندازهٔ هر زاویهٔ ظلی برابر نصف اندازهٔ کمان روبه‌رو به آن است.



$$B\hat{A}x = \frac{\overset{\frown}{AB}}{۲}$$

پاسخ خیلی تشریحی ✔

گام اول: شعاع OB را رسم می‌کنیم. مثلث OBC متساوی‌الساقین است و داریم:



$$O\hat{B}C = O\hat{C}B = ۱۵^\circ$$

$$B\hat{O}C = ۱۸۰^\circ - (۱۵^\circ + ۱۵^\circ) = ۱۵۰^\circ$$

زاویهٔ $B\hat{O}C$ زاویهٔ مرکزی است؛ پس داریم:

$$\overset{\frown}{BAC} = B\hat{O}C = ۱۵۰^\circ$$

گام دوم: زاویه‌های $C\hat{A}D$ و $E\hat{A}B$، زوایای ظلی هستند؛ بنابراین داریم:

$$C\hat{A}D = \frac{\overset{\frown}{AC}}{۲} = ۲۵^\circ \Rightarrow \overset{\frown}{AC} = ۵۰^\circ$$

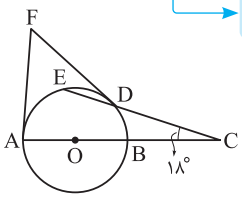
$$\overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{BAC} - \overset{\frown}{AC} = ۱۵۰^\circ - ۵۰^\circ = ۱۰۰^\circ$$

$$E\hat{A}B = \frac{\overset{\frown}{AB}}{۲} = \frac{۱۰۰^\circ}{۲} = ۵۰^\circ$$

سنجش کلاد
www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshClouds

۳۰ در شکل زیر **O** مرکز دایره است و **FA** و **FD** بر دایره مماس‌اند. اگر طول وتر **DE** برابر شعاع دایره باشد و امتداد **DE** و **AB** در نقطهٔ **C** متقاطع باشند، اندازهٔ زاویهٔ **F** چند درجه است؟

اندازهٔ کمان $\overset{\frown}{DE}$ برابر ۶۰° است

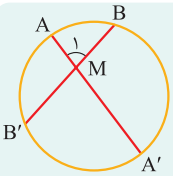


۱) ۳۶
۲) ۳۸
۳) ۴۰
۴) ۴۲

Hint اگر طول وتری از دایره برابر اندازهٔ شعاع دایره باشد، اندازهٔ کمان متناظر با آن وتر برابر ۶۰° است.

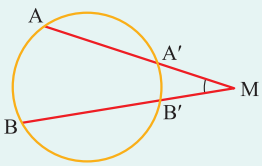
درس Box

زاویهٔ بین دو وتر:



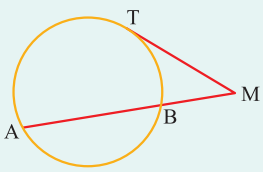
$$\hat{M}_۱ = \frac{\overset{\frown}{AB} + \overset{\frown}{A'B'}}{۲}$$

زاویهٔ بین امتداد دو وتر:



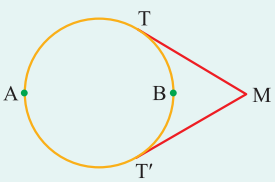
$$\hat{M} = \frac{\overset{\frown}{AB} - \overset{\frown}{A'B'}}{۲}$$

زاویهٔ بین امتداد وتر و مماس:



$$\hat{M} = \frac{\overset{\frown}{AT} - \overset{\frown}{BT}}{۲}$$

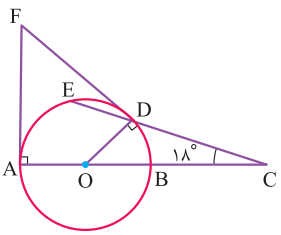
زاویهٔ بین دو مماس:



$$\hat{M} = \frac{\overset{\frown}{TAT'} - \overset{\frown}{TBT'}}{۲}$$

پاسخ خیلی تشریحی ✔

گام اول: بنا به فرض طول وتر DE با شعاع دایره برابر است، پس اندازهٔ کمان $\overset{\frown}{DE}$ برابر ۶۰° است. برای زاویهٔ بین امتداد دو وتر DE و AB داریم:



$$\hat{C} = \frac{\overset{\frown}{AE} - \overset{\frown}{BD}}{۲} = ۱۸^\circ \Rightarrow \overset{\frown}{AE} - \overset{\frown}{BD} = ۳۶^\circ \quad (۱)$$

سنجش کلاد
www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshClouds

گام دوم: AB قطر دایره است؛ بنابراین داریم:

$$\overset{\frown}{AE}+\overset{\frown}{DE}+\overset{\frown}{BD}=180^\circ \xrightarrow{\overset{\frown}{DE}=60^\circ} \overset{\frown}{AE}+\overset{\frown}{BD}=120^\circ \quad (2)$$

$$(1)\text{ و }(2) \Rightarrow \begin{cases}\overset{\frown}{AE}-\overset{\frown}{BD}=36^\circ\\ \overset{\frown}{AE}+\overset{\frown}{BD}=120^\circ\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\overset{\frown}{AE}=78^\circ\\ \overset{\frown}{BD}=42^\circ\end{cases}$$

گام سوم: با توجه به مقادیر به‌دست‌آمده در گام دوم داریم:

$$\overset{\frown}{AED}=\overset{\frown}{AE}+\overset{\frown}{DE}=78^\circ+60^\circ=138^\circ$$

$$\overset{\frown}{ABD}=\overset{\frown}{AB}+\overset{\frown}{BD}=180^\circ+42^\circ=222^\circ$$

زاویهٔ F، زاویهٔ بین مماس‌های FA و FD است:

$$\hat{F}=\frac{\overset{\frown}{ABD}-\overset{\frown}{AED}}{2}=\frac{222^\circ-138^\circ}{2}=\frac{84}{2}=42^\circ$$

www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshClouds

۳۱ s کدام‌یک از گزاره‌های زیر باشد تا ارزش گزارهٔ $[(p\wedge q)\Rightarrow (p\wedge r)]\vee s$ همواره درست باشد؟

۱) $(p\wedge q)\wedge r$

۲) $(p\wedge q)\wedge \sim r$

۳) $(p\wedge \sim q)\wedge r$

۴) $(\sim p\wedge q)\wedge r$

درس Box

جبر گزاره‌ها

۱) نقیض یک گزاره: نقیض گزارهٔ p را با $\sim p$ نمایش می دهیم و آن را «چنین نیست که p» می‌خوانیم.

نکته

۱) اگر ارزش p درست باشد، ارزش $\sim p$ نادرست است و برعکس:

p	$\sim p$
د	ن
ن	د

۲) ارزش نقیض نقیض یک گزاره، با ارزش خود گزاره یکسان است:

$\sim(\sim p)\equiv p$

۳) **ترکیب‌های فصلی و عطفی دو گزاره:** اگر دو گزاره را با حرف ربط «یا» به هم مرتبط کنیم، ترکیب فصلی دو گزاره به وجود می‌آید که آن را می‌خوانیم «p یا q» و می‌نویسیم « $p\vee q$ ».

درس Box

اگر دو گزاره را با حرف ربط «و» به هم مرتبط کنیم، ترکیب عطفی دو گزاره به وجود می‌آید که آن را می‌خوانیم «p و q» و می‌نویسیم. « $p\wedge q$ ».

نکته

ارزش $p\vee q$ زمانی درست است که ارزش دست کم یکی از دو گزاره p یا q درست باشد و ارزش $p\wedge q$ زمانی درست است که ارزش هر دو گزارهٔ p و q درست باشد:

p	q	$p\wedge q$	$p\vee q$
د	د	د	د
د	ن	ن	د
ن	د	ن	د
ن	ن	ن	ن

$p\wedge T\equiv p$	$p\wedge F\equiv F$	$p\wedge \sim p\equiv F$
$p\vee T\equiv T$	$p\vee F\equiv p$	$p\vee \sim p\equiv T$

۴) **ترکیب شرطی دو گزاره:** به گزارهٔ $p\Rightarrow q$ ترکیب شرطی دو گزاره می‌گوییم و آن را به صورت «اگر p آن‌گاه q» می‌خوانیم.
ارزش یک گزارهٔ شرطی تنها در حالتی نادرست است که p درست و q نادرست باشد:

p	q	$p\Rightarrow q$
د	د	د
د	ن	ن
ن	د	د
ن	ن	د

۱) در ترکیب شرطی $p\Rightarrow q$، به p «مقدم» یا «فرض» و به q «تالی» یا «حکم» می‌گوییم.

۲) گزارهٔ شرطی $p\Rightarrow q$ را به دو صورت زیر نیز می‌خوانیم:

q شرط لازم است برای p

p شرط کافی است برای q

سنجش کلاد
www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshClouds

۳) اگر $p \Rightarrow q$ یک گزارهٔ شرطی باشد:

به $q \Rightarrow p$ عکس گزارهٔ شرطی می‌گوییم؛

به $\sim q \Rightarrow \sim p$ عکس نقیض گزارهٔ شرطی می‌گوییم (که با $p \Rightarrow q$ هم‌ارزش است؛ یعنی $p \Rightarrow q \equiv \sim q \Rightarrow \sim p$)؛

و به $\sim (q \Rightarrow p)$ نقیض عکس گزارهٔ شرطی می‌گوییم.

۴) **انتفای مقدم**: در گزارهٔ شرطی $p \Rightarrow q$، اگر p یا «مقدم» نادرست باشد، گزاره به انتفای مقدم درست است:

$$p \equiv F \xrightarrow{\text{در این صورت}} p \Rightarrow q \equiv T$$

۵) **درست بودن تالی**: در گزارهٔ شرطی $p \Rightarrow q$، اگر q یا «تالی» درست باشد، $p \Rightarrow q$ همواره درست است:

$$q \equiv T \xrightarrow{\text{در این صورت}} p \Rightarrow q \equiv T$$

۴) **ترکیب دوشرطی**: اگر دو گزارهٔ شرطی $p \Rightarrow q$ و $q \Rightarrow p$ را با ترکیب عطفی «$\wedge$» به هم مرتبط کنیم، ترکیب دو شرطی $p \Leftrightarrow q$ به دست می‌آید که آن را به صورت «p اگر و تنها اگر q» یا «p شرط لازم و کافی برای q است» می‌خوانیم.

p	q	$p \Leftrightarrow q$
د	د	د
د	ن	ن
ن	د	ن
ن	ن	د

۱) ارزش $p \Leftrightarrow q$ فقط در حالتی درست است که p و q هم‌ارزش باشند:

۲) نقیض $p \Leftrightarrow q$ را به یکی از صورت‌های زیر می‌توان نوشت:

$$\sim (p \Leftrightarrow q) \equiv p \Leftrightarrow \sim q \qquad \sim (p \Leftrightarrow q) \equiv \sim p \Leftrightarrow q$$

۳) ترکیب دوشرطی یک گزاره با خودش همواره درست و ترکیب دو شرطی یک گزاره با نقیضش همواره نادرست است:

$$p \Leftrightarrow \sim p \equiv F \qquad p \Leftrightarrow p \equiv T$$

درس Box

هم‌ارزی‌های منطقی:

۱) جابه‌جایی	$p \wedge q \equiv q \wedge p$	$p \vee q \equiv q \vee p$
۲) شرکت‌پذیری	$(p \wedge q) \wedge r \equiv p \wedge (q \wedge r)$	$(p \vee q) \vee r \equiv p \vee (q \vee r)$
۳) توزیع‌پذیری	$p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$	$p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$
۴) دمورگان	$\sim (p \vee q) \equiv \sim p \wedge \sim q$	$\sim (p \wedge q) \equiv \sim p \vee \sim q$
۵) جذب	$p \vee (p \wedge q) \equiv p$	$p \wedge (p \vee q) \equiv p$

$$p \Rightarrow q \equiv \sim p \vee q$$

$$p \Leftrightarrow q \equiv (p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p) \equiv (\sim p \wedge \sim q) \vee (p \wedge q)$$

پاسخ خیلی تشریحی ✔

گام اول: اگر ارزش $(p \wedge q) \Rightarrow (p \wedge r)$ درست باشد، ارزش گزارهٔ $[(p \wedge q) \Rightarrow (p \wedge r)] \vee s$ هم درست می‌شود. اما اگر ارزش آن نادرست بود، باید ارزش s درست باشد. پس ابتدا باید بفهمیم ارزش گزارهٔ $(p \wedge q) \Rightarrow (p \wedge r)$ در چه حالتی (یا حالاتی) نادرست است.

گام دوم: ارزش گزارهٔ $(p \wedge q) \Rightarrow (p \wedge r)$ فقط وقتی نادرست است که ارزش $p \wedge q$ درست و ارزش $p \wedge r$ نادرست باشد:

$$\begin{cases} p \wedge q \equiv T \xrightarrow{\text{بنابراین}} \begin{cases} p \equiv T \\ q \equiv T \end{cases} \\ \underset{T}{p} \wedge r \equiv F \xrightarrow{\text{بنابراین}} r \equiv F \end{cases}$$

پس ارزش گزارهٔ $(p \wedge q) \Rightarrow (p \wedge r)$ فقط وقتی نادرست است که p درست، q درست و r نادرست باشد.

سنجش کلاد
www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshClouds

گام سوم: بنابراین ارزش گزارهٔ $((p \wedge q) \Rightarrow (p \wedge r)) \vee s$ زمانی همواره درست می‌شود که p درست، q درست و r نادرست و s دارای ارزش درست باشد.

حالا گزینه‌ها را بررسی می‌کنیم: (جواب گزینه‌ای است که به ازای p درست، q درست و r نادرست، ارزش درست داشته باشد.)

گزینهٔ (۱): $(p \wedge q) \wedge r \equiv \underbrace{T \wedge T}_{T} \wedge F \equiv F$ ✗

گزینهٔ (۲): $(p \wedge q) \wedge \sim r \equiv \underbrace{T \wedge T}_{T} \wedge \underbrace{(\sim F)}_{T} \equiv T$ ✓

گزینهٔ (۳): $(p \wedge \sim q) \wedge r \equiv \underbrace{(T \wedge \underbrace{\sim T}_{F})}_{F} \wedge F \equiv F$ ✗

گزینهٔ (۴): $(\sim p \wedge q) \wedge r \equiv \underbrace{(\underbrace{\sim T}_{F} \wedge T)}_{F} \wedge F \equiv F$ ✗

سنجش کلاد
www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshClouds

۳۲ در جای خالی کدام‌یک از سورهای زیر را قرار دهیم تا ارزش گزارهٔ سوری « $x^۲ + y^۲ = ۲y - ۱$; ..... » درست باشد؟

الف) $\forall x, \forall y$ ب) $\forall x, \exists y$

پ) $\forall y, \exists x$ ت) $\exists y, \exists x$

۱) الف ـ ب ـ پ ۲) ب ـ ت

۳) پ ـ ت ۴) ت

Hint همهٔ عبارت‌ها را به سمت چپ تساوی ببرید!

درس Box

سورها

برای بیان عبارت‌ها با استفاده از نمادهای ریاضی به جای «به ازای هر»، یا «به ازای جمیع مقادیر» از نماد $\forall$ و به جای «وجود دارد»، یا «به ازای بعضی مقادیر» از نماد $\exists$ استفاده می‌کنیم. نماد $\forall$ سور عمومی و نماد $\exists$ سور وجودی نامیده می‌شود.

نکته

۱) ارزش گزاره‌های سوری با سور عمومی (یا همان $\forall$)، زمانی درست است که ارزش گزاره‌نما به ازای تمام اعضای دامنهٔ متغیر، درست باشد.

۲) ارزش گزاره‌های سوری با سور وجودی (یا همان $\exists$)، زمانی درست است که ارزش گزاره‌نما به ازای حداقل یکی از اعضای دامنهٔ متغیر، درست باشد.

۳) مجموع چند عبارت نامنفی فقط زمانی برابر صفر می‌شود که تک‌تک عبارت‌ها برابر صفر باشند؛ برای مثال:

$$\sqrt{x-۲} + (y+۳)^۴ + |z-۵| = ۰ \Rightarrow (x-۲=۰) \wedge (y+۳=۰) \wedge (z-۵=۰) \Rightarrow (x=۲) \wedge (y=-۳) \wedge (z=۵)$$

پاسخ خیلی تشریحی ✔

گام اول: همهٔ عبارت‌ها را به سمت چپ تساوی می‌بریم:

$$x^۲ + y^۲ = ۲y - ۱ \Rightarrow x^۲ + y^۲ - ۲y + ۱ = ۰ \Rightarrow x^۲ + (y-۱)^۲ = ۰$$

گام دوم: با توجه به نکتهٔ (۳) درس‌باکس، این تساوی فقط زمانی برقرار است که $(x=۰) \wedge (y-۱=۰)$ یعنی $x=۰$ و $y=۱$ باشد. یعنی وجود دارد مقداری برای y (همان $y=۱$) که به ازای آن مقداری برای x پیدا می‌شود (همان $x=۰$) که تساوی برقرار باشد، بنابراین هر دو سور باید وجودی باشند و فقط با جای‌گذاری «ت» در جای خالی، ارزش گزارهٔ سوری درست است.

www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshClouds

۳۳ یک‌سوم زیرمجموعه‌های سه‌عضوی مجموعهٔ $A=\{1,2,3,...,k\}$ شامل عضو ۲ هستند. A چند زیرمجموعهٔ ۴عضوی یا ۵ عضوی دارد؟

یعنی تعداد زیرمجموعه‌های ۳عضوی شامل عضو ۲، یک‌سوم تعداد کل زیرمجموعه‌های ۳عضوی است.

۱) $\binom{10}{4}$

۲) $\binom{10}{5}$

۳) $\binom{11}{6}$

۴) $\binom{12}{7}$

درس Box

۱) اگر nشیء متمایز داشته باشیم، تعداد راه‌های انتخاب kشیء از میان آن‌ها (به طوری که جایگشت اشیاء انتخاب‌شده مهم نباشد) برابر است با:

$$\binom{n}{k}=\frac{n!}{k!(n-k)!}$$

۲) اتحاد پاسکال به صورت مقابل است:

$$\binom{n}{k}+\binom{n}{k+1}=\binom{n+1}{k+1}$$

پاسخ خیلی تشریحی ✔

گام اول: تعداد زیرمجموعه‌های سه‌عضوی مجموعهٔ A برابر $\binom{k}{3}$ است.

گام دوم: حالا برای شمارش تعداد زیرمجموعه‌های سه‌عضوی شامل ۲، به این توجه می‌کنیم که عضو ۲ درون زیرمجموعه هست، پس برای این‌که زیرمجموعه سه‌عضوی شود، باید ۲ عضو دیگر از میان $k-1$ عضو دیگر (همهٔ اعضا به‌جز عضو ۲) انتخاب کنیم که به $\binom{k-1}{2}$ حالت امکان‌پذیر است.

گام سوم: تعداد زیرمجموعه‌های ۳عضوی شامل عضو ۲، یک‌سوم تعداد کل زیرمجموعه‌های ۳عضوی است:

$$\binom{k-1}{2}=\frac{1}{3}\binom{k}{3}\Rightarrow\frac{(k-1)(k-2)}{2}=\frac{1}{3}\times\frac{k(k-1)(k-2)}{6}\Rightarrow\frac{1}{2}=\frac{k}{18}\Rightarrow k=9$$

بنابراین $A=\{1,2,3,...,9\}$ است.

گام چهارم: بنابراین تعداد زیرمجموعه‌های ۴ یا ۵ عضوی A برابر است با:

$$\underbrace{\binom{9}{4}}_{\text{تعداد زیرمجموعه‌های چهارعضوی}}+\underbrace{\binom{9}{5}}_{\text{تعداد زیرمجموعه‌های پنج‌عضوی}}\overset{\text{طبق اتحاد پاسکال}}{=\!=\!=}\binom{10}{5}$$

سنجش کلاد
www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshClouds

۳۴ اگر a و b دو عدد طبیعی باشند، به طوری که $A=[a,7]$ و $B=[5,b]$، در این صورت مساحت مربوط به ناحیهٔ A^2-B^2 برابر کدام‌یک از عددهای زیر نمی‌تواند باشد؟ ($a<5$ و $b>7$)

۱) ۵

۲) ۲۱

۳) ۳۲

۴) ۴۵

Hint به این توجه کنید که $A\cap B=[5,7]$ شده و $A^2-B^2=A^2-(A\cap B)^2$ است.

درس Box نکاتی دربارهٔ ضرب دکارتی دو مجموعه

۱) $A\times\varnothing=\varnothing\times A=\varnothing$

۲) $A^2=A\times A$

۳) $(A\times B)\cap(C\times D)=(A\cap C)\times(B\cap D)$

حواستون باشه که چنین رابطه‌ای برای اجتماع درست نیست! یعنی تساوی $(A\times B)\cup(C\times D)=(A\cup C)\times(B\cup D)$ الزاماً درست نیست.

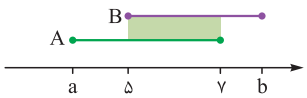
۴) $A\times B-C\times D=A\times B-((A\times B)\cap(C\times D))=A\times B-((A\cap C)\times(B\cap D))$

۵) $A^2\cap B^2=(A\cap B)^2$

۶) $A^2-B^2=A^2-A^2\cap B^2=A^2-(A\cap B)^2$

نکته اگر A بازه‌ای به طول m و B بازه‌ای به طول n باشد، مساحت ناحیهٔ محدود به $A\times B$ برابر mn می‌شود.

پاسخ خیلی تشریحی ✔ **گام اول:** طبق گفتهٔ سؤال $a<5$ و $b>7$ است، پس:



اشتراک $\longrightarrow A\cap B=[5,7]$

گام دوم: $A=[a,7]$ و $A\cap B=[5,7]$ است، پس طول این دو بازه به ترتیب برابر $7-a$ و $7-5=2$ می‌شود.

گام سوم: طبق درس‌باکس $A^2-B^2=A^2-(A\cap B)^2$ است، پس مساحت ناحیهٔ A^2-B^2 برابر می‌شود با:

$$S_{A^2-B^2}=S_{A^2}-S_{(A\cap B)^2}=(\text{طول بازه }A)^2-(\text{طول بازه }A\cap B)^2=(7-a)^2-2^2=(7-a)^2-4$$

گام چهارم: a عددی طبیعی و کوچک‌تر از ۵ است، پس a می‌تواند برابر ۱، ۲، ۳ یا ۴ باشد. در هر حالت، مساحت ناحیهٔ A^2-B^2 را حساب می‌کنیم:

$$a=1\Rightarrow S_{A^2-B^2}=(7-a)^2-4=(7-1)^2-4=36-4=32$$
$$a=2\Rightarrow S_{A^2-B^2}=(7-a)^2-4=(7-2)^2-4=25-4=21$$
$$a=3\Rightarrow S_{A^2-B^2}=(7-a)^2-4=(7-3)^2-4=16-4=12$$
$$a=4\Rightarrow S_{A^2-B^2}=(7-a)^2-4=(7-4)^2-4=9-4=5$$

بنابراین مساحت ناحیهٔ A^2-B^2 نمی‌تواند برابر ۴۵ باشد.

سنجش کلاد
www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshClouds

۳۵ A یک پیشامد xعضوی از فضای نمونه‌ای هم‌شانس S و B یک پیشامد $x+2$ از همان فضای نمونه‌ای است به طوری که $P(B)=\frac{1}{5}+P(A)$. اگر تعداد پیشامدهای x عضوی و $x+2$ عضوی در این فضای نمونه‌ای برابر باشند، $P(A)$ کدام است؟

۱) $\frac{1}{5}$ ۲) $\frac{2}{5}$

۳) $\frac{3}{5}$ ۴) $\frac{3}{10}$

درس Box

فضای نمونه‌ای: در یک آزمایش تصادفی، به مجموعهٔ تمام حالاتی که ممکن است رخ دهند، فضای نمونه‌ای می‌گوییم. فضای نمونه‌ای را عموماً با S نمایش می‌دهیم.

پیشامد: به هر زیرمجموعه از فضای نمونه‌ای یک پیشامد می‌گوییم.

نکته

تعداد پیشامدهای kعضوی از یک فضای نمونه‌ای nعضوی برابر تعداد زیرمجموعه‌های kعضوی از یک مجموعهٔ nعضوی است که برابر است با: $\binom{n}{k}$

یک پیشامد وقتی رخ می‌دهد که حاصل آزمایش، یکی از اعضای پیشامد باشد.

احتمال رخدادن یک پیشامد: اگر A یک پیشامد از فضای نمونه‌ای S باشد، احتمال رخدادن A برابر است با:

$$P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}$$

پیشامد ساده: هر زیرمجموعهٔ تک‌عضوی از فضای نمونه‌ای را یک پیشامد ساده می‌گوییم.

فضای نمونه‌ای با احتمال هم‌شانس: هرگاه احتمال رخدادن تمام پیشامدهای ساده در یک فضای نمونه‌ای با هم برابر باشند، یک فضای نمونه‌ای با احتمال هم‌شانس داریم. در فضای نمونه‌ای با احتمال هم‌شانس، احتمال رخدادن تمام پیشامدهای ساده $\frac{1}{n(S)}$ است.

نکته

با توجه به این‌که $\binom{n}{r}=\binom{n}{n-r}$ است، می‌توانیم بگوییم:

$$\binom{n}{a}=\binom{n}{b}\Rightarrow\begin{cases}a=b\\a+b=n\end{cases}$$

پاسخ خیلی تشریحی ✔

گام اول: اگر تعداد اعضای فضای نمونه‌ای را n فرض کنیم، تعداد پیشامدهای xعضوی آن برابر $\binom{n}{x}$ و تعداد پیشامدهای $x+2$ عضوی آن برابر $\binom{n}{x+2}$ است.

گام دوم: طبق گفتهٔ سؤال، تعداد پیشامدهای xعضوی و $x+2$ عضوی برابرند:

$$\binom{n}{x}=\binom{n}{x+2}\xrightarrow{\text{طبق درس box}}\begin{cases}x=x+2\Rightarrow 0=2\times\\x+x+2=n\Rightarrow n=2x+2\end{cases}$$

بنابراین تعداد اعضای فضای نمونه‌ای برابر $2x+2$ است.

گام سوم: A یک پیشامد xعضوی و B یک پیشامد $x+2$ عضوی است، پس:

$$P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{x}{2x+2}\ ,\ P(B)=\frac{n(B)}{n(S)}=\frac{x+2}{2x+2}$$

گام چهارم: با جای‌گذاری $P(A)=\frac{x}{2x+2}$ و $P(B)=\frac{x+2}{2x+2}$ در تساوی $P(B)=\frac{1}{5}+P(A)$ داریم:

$$\frac{x+2}{2x+2}=\frac{1}{5}+\frac{x}{2x+2}\Rightarrow\frac{x+2}{2x+2}-\frac{x}{2x+2}=\frac{1}{5}\Rightarrow\frac{2}{2x+2}=\frac{1}{5}\Rightarrow\frac{1}{x+1}=\frac{1}{5}\Rightarrow x+1=5\Rightarrow x=4$$

گام پنجم: بنابراین:

$$P(A)=\frac{x}{2x+2}=\frac{4}{10}=\frac{2}{5}$$

سنجش کلاد
www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshClouds

۳۶ یک تاس به گونه‌ای ساخته شده است که احتمال وقوع هر عدد اول، پنج برابر احتمال وقوع هر عدد غیراول است. در پرتاب این تاس، احتمال این‌که عدد زوج مشاهده شود، چه‌قدر است؟

۱) $\frac{۱}{۶}$

۲) $\frac{۵}{۶}$

۳) $\frac{۷}{۱۸}$

۴) $\frac{۱۱}{۱۸}$

درس Box

فضای نمونه‌ای با احتمال غیرهم‌شانس: هرگاه حداقل دو پیشامد ساده از فضای نمونه‌ای S احتمال نابرابر داشته باشند، S را فضای نمونه‌ای با احتمال غیرهم‌شانس می‌گوییم.

در یک فضای نمونه‌ای متناهی با احتمال غیرهم‌شانس، اگر $S=\{s_۱,s_۲,...,s_n\}$ فضای نمونه‌ای و $A=\{a_۱,a_۲,...,a_k\}$ یک زیرمجموعهٔ kعضوی از S باشد، همواره داریم:

۱) $۰\le P(A)\le ۱$

۲) $P(S)=P(s_۱)+P(s_۲)+P(s_۳)+...+P(s_n)=۱$

۳) $P(A)=P(a_۱)+P(a_۲)+...+P(a_k)$

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: فضای نمونه‌ای پرتاب یک تاس $S=\{۱,۲,۳,۴,۵,۶\}$ است.

گام دوم: احتمال وقوع هر عدد اول، پنج برابر احتمال وقوع هر عدد غیراول است؛ پس اگر احتمال وقوع هر کدام از اعداد غیراول (یعنی ۱ و ۴ و ۶) را x فرض کنیم، احتمال وقوع هر کدام از اعداد اول (یعنی ۲ و ۳ و ۵) برابر ۵x می‌شود.

$P(۱)=x$

$P(۲)=۵x$

$P(۳)=۵x$

$P(۴)=x$

$P(۵)=۵x$

$P(۶)=x$

گام سوم: از طرفی طبق درس‌باکس داریم:

$$P(S)=\underbrace{P(۱)}_{x}+\underbrace{P(۲)}_{۵x}+\underbrace{P(۳)}_{۵x}+\underbrace{P(۴)}_{x}+\underbrace{P(۵)}_{۵x}+\underbrace{P(۶)}_{x}=۱ \Rightarrow ۱۸x=۱ \Rightarrow x=\frac{۱}{۱۸}$$

گام چهارم: احتمال این‌که عدد زوج مشاهده شود برابر است با:

$$P(\text{زوج})=\underbrace{P(۲)}_{۵x}+\underbrace{P(۴)}_{x}+\underbrace{P(۶)}_{x}=۷x=\frac{۷}{۱۸}$$

سنجش کلاد
www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshClouds

۳۷ در یک آزمایش با فضای نمونه‌ای $S=\{a,b,c,d\}$، می‌دانیم $P(\{a,b\})=P(c)$، $P(\{b,c\})=2P(d)$ و $P(\{a,c\})=0/45$ است. مقدار $P(a)$ کدام است؟

۱) $0/1$ ۲) $0/15$

۳) $0/2$ ۴) $0/25$

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: فضای نمونه‌ای $S=\{a,b,c,d\}$ است، پس:

$$P(S)=P(a)+P(b)+P(c)+P(d)=1 \quad (*)$$

گام دوم: از طرفی:

$$P(\{a,c\})=0/45 \Rightarrow P(a)+P(c)=0/45 \Rightarrow P(c)=0/45-P(a) \quad (I)$$

$$P(\{a,b\})=P(c) \Rightarrow P(a)+P(b)=P(c) \xrightarrow{\text{طبق (I)}} P(a)+P(b)=0/45-P(a) \Rightarrow P(b)=0/45-2P(a) \quad (II)$$

گام سوم: حالا داریم:

$$P(\{b,c\})=2P(d) \Rightarrow P(b)+P(c)=2P(d) \xrightarrow{\text{طبق (I), (II)}} 0/45-2P(a)+0/45-P(a)=2P(d)$$

$$\Rightarrow 2P(d)=0/9-3P(a) \Rightarrow P(d)=0/45-1/5\,P(a) \quad (III)$$

گام چهارم: با جای‌گذاری روابط (I)، (II) و (III) در (*) داریم:

$$P(a)+0/45-2P(a)+0/45-P(a)+0/45-1/5\,P(a)=1$$

$$\Rightarrow -3/5P(a)+1/35=1 \Rightarrow -3/5P(a)=-0/35 \Rightarrow P(a)=\frac{-0/35}{-3/5}=0/1$$

سنجش کلاد
www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshClouds

۳۸ دو تاس پرتاب می‌کنیم و می‌بینیم که مجموع اعداد روشدهٔ دو تاس مضرب ۳ است. با چه احتمالی عدد روشدهٔ حداقل یکی از تاس‌ها اول است؟

۱) $\frac{۲}{۳}$

۲) $\frac{۳}{۴}$

۳) $\frac{۵}{۶}$

۴) $\frac{۱۱}{۱۲}$

Hint تعداد حالاتی که مجموع اعداد روشدهٔ دو تاس مضرب ۳ است را در مخرج و تعداد حالاتی که مجموع اعداد روشدهٔ دو تاس مضرب ۳ است و عدد روشدهٔ حداقل یکی از تاس‌ها اول است را در صورت قرار دهید.

درس Box

احتمال شرطی: احتمال رخدادن پیشامد A به شرطی که بدانیم پیشامد B رخ داده است را با $P(A \mid B)$ نمایش می‌دهیم که برابر است با:

$$P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{n(A \cap B)}{n(B)}$$

پرتاب دو تاس

برای حل سؤالاتی که در آن‌ها دو تاس پرتاب می‌شوند و احتمال رخدادن یک پیشامد خاص را می‌خواهیم، روش‌های مختلفی وجود دارد، اما بهترین روش این است که جدولی به شکل زیر رسم کنیم و حالات مطلوب را در آن مشخص کنیم.

تاس دوم \ تاس اول	۱	۲	۳	۴	۵	۶
۱						
۲						
۳						
۴						
۵						
۶						

پاسخ خیلی تشریحی ✔

گام اول: دو پیشامد A و B را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

پیشامد A: عدد روشدهٔ حداقل یکی از تاس‌ها اول باشد.

پیشامد B: مجموع اعداد روشدهٔ دو تاس مضرب ۳ (یعنی برابر ۳ یا ۶ یا ۹ یا ۱۲) باشد.

گام دوم: طبق گفتهٔ سؤال می‌دانیم مجموع اعداد روشدهٔ دو تاس مضرب ۳ است (شرط) و احتمال این را می‌خواهیم که عدد روشدهٔ حداقل یکی از تاس‌ها اول باشد، یعنی $P(A \mid B)$ که طبق درس‌باکس برابر $\frac{n(A \cap B)}{n(B)}$ می‌شود.

گام سوم: جدولی مشابه جدول رسم‌شده در درس‌باکس رسم می‌کنیم و در آن، حالاتی که مجموع اعداد روشدهٔ دو تاس مضرب ۳ باشد را مشخص می‌کنیم:

تاس دوم \ تاس اول	۱	۲	۳	۴	۵	۶
۱		○			○	
۲	○			○		
۳			○			○
۴		○			○	
۵	○			○		
۶			○			○

بنابراین $n(B) = ۱۲$ است.

www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshClouds

گام چهارم: حالا از میان خانه‌های مشخص‌شده، حالاتی که عدد روشدهٔ حداقل یکی از تاس‌ها اول باشد را با علامت تیک مشخص می‌کنیم:

تاس دوم \ تاس اول	۱	۲	۳	۴	۵	۶
۱		✓			✓	
۲	✓			✓		
۳			✓			✓
۴		✓			✓	
۵	✓			✓		
۶			✓			○

بنابراین $n(A \cap B) = ۱۱$ و $P(A \mid B) = \frac{n(A \cap B)}{n(B)} = \frac{۱۱}{۱۲}$ می‌شود.

سنجش کلاد
www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshClouds

۳۹ A و B دو پیشامد از فضای نمونه‌ای S هستند، به طوری که $P(A)=۰/۵$، $P(B)=۰/۴$ و $P(A\cap B)=۰/۱$ است. مقدار $P(A-B\,|\,B'\cup A)$ چه‌قدر است؟

۱) $\frac{۲}{۷}$

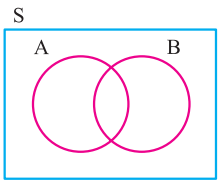
۲) $\frac{۴}{۷}$

۳) $\frac{۱}{۲}$

۴) $\frac{۳}{۸}$

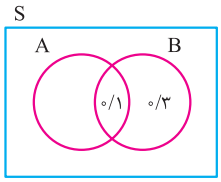
پاسخ خیلی تشریحی ✔

گام اول: ابتدا یک نمودار ون به شکل مقابل رسم می‌کنیم:



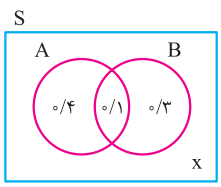
گام دوم: $P(A\cap B)=۰/۱$ و $P(B)=۰/۴$ است،

پس $P(B-A)=P(B)-P(A\cap B)=۰/۴-۰/۱=۰/۳$ می‌شود:



گام سوم: $P(A\cap B)=۰/۱$ و $P(A)=۰/۵$ است،

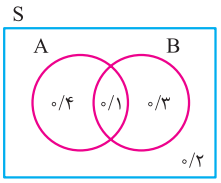
پس $P(A-B)=P(A)-P(A\cap B)=۰/۵-۰/۱=۰/۴$ می‌شود:



گام چهارم: از طرفی $P(S)=۱$ پس:

$$\underbrace{۰/۴+۰/۱+۰/۳}_{۰/۸}+x=۱ \Rightarrow x=۰/۲$$

بنابراین نمودار ون به شکل مقابل شد:

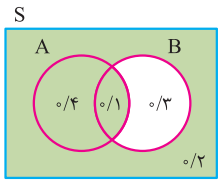


گام پنجم: با استفاده از فرمول احتمال شرطی داریم:

$$P(A-B\,|\,B'\cup A)=\frac{P((A-B)\cap(B'\cup A))}{P(B'\cup A)}$$

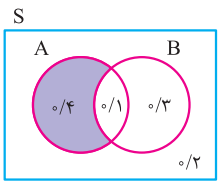
سنجش کلاد
www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshClouds

گام ششم: ناحیه‌های $B' \cup A$ و $(A-B) \cap (B' \cup A)$ را روی نمودار مشخص می‌کنیم.

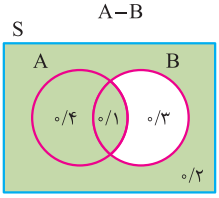


$B' \cup A$

$\Rightarrow P(B' \cup A) = ۰/۴ + ۰/۱ + ۰/۲ = ۰/۷$

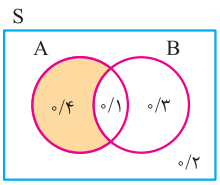


$A-B$



$B' \cup A$

$\Rightarrow$



$(A-B) \cap (B' \cup A)$

$\Rightarrow P((A-B) \cap (B' \cup A)) = ۰/۴$

گام هفتم: بنابراین:

$$P(A-B \mid B' \cup A) = \frac{۰/۴}{۰/۷} = \frac{۴}{۷}$$

سنجش کلاد
www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshClouds

۴۰ تیم ملی والیبال ایران ۱۲ بازیکن دارد که قد هیچ دو بازیکنی با هم برابر نیست. می‌دانیم **a** از نظر قدی بلندتر از **b** و **c** است؛ با چه احتمالی **a** بلندقدترین بازیکن تیم است؟

۱) $\frac{۱}{۲}$

۲) $\frac{۱}{۴}$

۳) $\frac{۱}{۱۰}$

۴) $\frac{۱}{۹}$

پاسخ خیلی تشریحی ✔ **گام اول:** ابتدا تعداد حالاتی را می‌شماریم که a از نظر قدی بلندتر از b و c باشد. ۱۲ بازیکن داریم، پس ۱۲ جایگاه برای آن‌ها فرض می‌کنیم:

_ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _

گام دوم: به $\binom{۱۲}{۳}=۲۲۰$ حالت می‌توانیم ۳ جایگاه از ۱۲ جایگاه بالا را انتخاب کنیم. در جایگاه اول از این سه جایگاه a را قرار می‌دهیم و b و c به $۲!$ حالت می‌توانند در دو جایگاه بعدی قرار گیرند؛ مثلاً به شکل زیر:

_ _ a _ b _ _ c _ _ _ _

گام سوم: حالا $۱۲-۳=۹$ نفر دیگر داریم که به $۹!$ حالت می‌توانند در مابقی جایگاه‌ها قرار گیرند. پس تعداد حالاتی که a از نظر قدی بلندتر از b و c باشد برابر $۲۲۰\times ۲!\times ۹!$ است.

گام چهارم: حالا باید حالاتی را بشماریم که a از نظر قدی بلندتر از بقیه باشد. کافی‌است a را در جایگاه اول قرار دهیم:

a _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _

حالا ۱۱ نفر دیگر به $۱۱!$ حالت می‌توانند در مابقی جایگاه‌ها قرار گیرند (دقت کنید در این حالت، a از نظر قدی از b و c بلندتر است)، پس در $۱۱!$ حالت، a بلندقدترین بازیکن تیم است.

گام پنجم: بنابراین جواب برابر است با:

$$P(\text{a بلند قدترین باشد} \mid \text{a از b و c بلندتر باشد}) = \frac{n(\text{a بلند قدترین باشد})}{n(\text{a از b و c بلندتر باشد})} = \frac{n(\text{a از b و c بلندتر باشد} \cap \text{a بلند قدترین باشد})}{n(\text{a از b و c بلندتر باشد})}$$

$$= \frac{۱۱!}{۲۲۰\times ۲!\times ۹!} = \frac{۱۱\times ۱۰\times ۹!}{۲۲۰\times ۲!\times ۹!} = \frac{۱۱}{۴۴} = \frac{۱}{۴}$$

سنجش کلاد
www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshClouds

۴۱ بار الکتریکی هستهٔ یون X^{+3} برابر با $۲/۰۸\times۱۰^{-۱۸}C$ است. مجموع بار الکتریکی الکترون‌های این یون، چند میکروکولن است؟ $(e=۱/۶\times۱۰^{-۱۹}C)$

۱) $-۱/۶\times۱۰^{-۱۲}$

۲) $-۱/۶\times۱۰^{-۱۱}$

۳) $-۱/۶\times۱۰^{-۱۸}$

۴) $-۱/۶\times۱۰^{-۱۷}$

Hint

ابتدا مقدار بار الکتریکی سه الکترون را از رابطهٔ $(q=ne)$ به دست آورید و سپس آن را با بار اولیهٔ الکترون‌های اتم که در صورت تست بیان شده، جمع جبری کنید.

درس Box

کوانتیده‌بودن بار الکتریکی: همواره بار الکتریکی یک جسم، مضرب درستی از یک مقدار پایه (بار بنیادی e) است و هر مقدار دلخواهی نمی‌تواند داشته باشد.

$$q=\pm ne \quad , \quad e=۱/۶\times۱۰^{-۱۹}C$$

(n: تعداد الکترون مبادله شده)

علامت +: برای جسمی که الکترون از دست داده است.

علامت −: برای جسمی که الکترون گرفته است.

پاسخ خیلی تشریحی ✔

بار الکتریکی هستهٔ هر اتم ثابت و برابر با بار مثبت و منفی اولیهٔ اتم، قبل از از دست دادن و یا دریافت الکترون است؛ بنابراین بار الکترون‌های اتم، قبل از این‌که الکترون از دست بدهد، برابر با $q=-۲/۰۸\times۱۰^{-۱۸}C$ بوده است.

حال این یون سه الکترون از دست داده؛ پس به اندازهٔ $q=۳e$ بار منفی آن کاهش می‌یابد:

$$q=-۲/۰۸\times۱۰^{-۱۸}+۳\times۱/۶\times۱۰^{-۱۹}=-۱/۶\times۱۰^{-۱۸}C=-۱/۶\times۱۰^{-۱۲}\mu C$$

سنجش کلاد
www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshClouds

۴۲ بار الکتریکی دو ذرهٔ باردار، یکسان است. ۹۶ درصد از بار یکی از این ذره‌ها را به ذرهٔ دیگر منتقل می‌کنیم. برای آن‌که نوع و اندازهٔ نیروی الکتریکی بین دو ذره تغییر نکند، فاصلهٔ بین دو ذره باید چند درصد و چگونه تغییر کند؟

۱) ۶۴ درصد افزایش یابد.
۲) ۷۲ درصد افزایش یابد.
۳) ۶۴ درصد کاهش یابد.
۴) ۷۲ درصد کاهش یابد.

مشاوره سؤالاتی که در آن‌ها اطلاعات درصدی به شما می‌دهند و یا از شما درصد تغییرات می‌پرسند در تمامی کنکورها مطرح می‌شوند و توصیه می‌کنیم روی آن‌ها تسلط داشته باشید.

Hint نیروی بین دو بار را در هر دو حالت با استفاده از رابطهٔ $(F=\frac{k|q_1||q_2|}{r^2})$ محاسبه کنید و اندازهٔ آن‌ها را برابر هم قرار دهید تا نسبت $\frac{r'}{r}$ به دست آید. حال از طریق رابطهٔ $(\frac{\Delta r}{r_1}\times 100)$ درصد تغییرات فاصله را محاسبه کنید.

درس Box هر دو بار الکتریکی نقطه‌ای q_1 و q_2 در فاصلهٔ r به یکدیگر نیرو وارد می‌کنند که اندازهٔ این نیرو از رابطهٔ زیر به دست می‌آید:

$$F=\frac{k|q_1||q_2|}{r^2}$$

F : اندازهٔ نیرو (N)

k : ثابت کولن $=9\times10^9\ \frac{N.m^2}{C^2}$

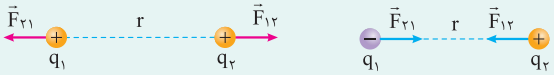
r : فاصلهٔ دو بار از هم (m)

q_1, q_2 : بارهای الکتریکی نقطه‌ای (C)

نیروی بین دو بار در حالتی که دو بار همنام هستند، از نوع دافعه (رانشی) و در حالتی‌که دو بار ناهمنام هستند، از نوع جاذبه (رباینی) است.

بنا بر قانون سوم نیوتون، نیروی الکتروستاتیکی که دو بار بر یکدیگر وارد می‌کنند، هم‌اندازه، هم‌راستا ولی در خلاف جهت یکدیگرند.

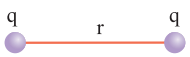
$$|F_{12}|=|F_{21}|$$



براساس قانون کولن، نیروی الکترواستاتیکی بین دو بار با حاصل‌ضرب بارها رابطهٔ مستقیم و با مجذور فاصلهٔ بارها از یکدیگر رابطهٔ عکس دارد:

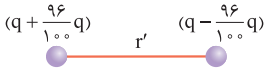
$$\frac{F'}{F}=\frac{q_1'}{q_1}\times\frac{q_2'}{q_2}\times(\frac{r}{r'})^2$$

پاسخ خیلی تشریحی **گام اول:** ابتدا نیروی بین دو بار را در حالت اول محاسبه می‌کنیم:



$$F=\frac{k|q||q|}{r^2}\Rightarrow F=\frac{kq^2}{r^2}$$

گام دوم: سپس نیروی بین آن‌ها را در حالت دوم به دست می‌آوریم:



$$F=\frac{k(\frac{1}{25}q)(\frac{49}{25}q)}{r'^2}$$

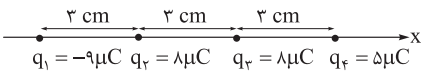
گام سوم: طبق صورت سؤال، نیروها در دو حالت با هم برابرند؛ بنابراین:

$$\frac{kq^2}{r^2}=\frac{kq^2(\frac{49}{25\times25})}{r'^2}\Rightarrow\frac{r'^2}{r^2}=\frac{49}{25\times25}\Rightarrow\frac{r'}{r}=\frac{7}{25}$$

درصد تغییرات فاصله: $\frac{\Delta r}{r}\times100=\frac{r'-r}{r}\times100=\frac{7-25}{25}\times100=-(\%72)$

سنجش کلاد
www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshClouds

۴۳ مطابق شکل، چهار بار الکتریکی نقطه‌ای روی محور x ثابت شده‌اند. بار $q_۳$ روی محور x، چند سانتی‌متر جابه‌جا شود تا نیروی الکتریکی خالص وارد بر بار $q_۴$ در SI برابر با $\vec{F} = -۵۰\vec{i}$ شود؟ $(k = ۹\times۱۰^۹ \frac{N.m^۲}{C^۲})$



۱) ۳

۲) ۶

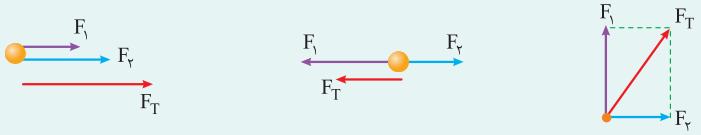
۳) ۹

۴) ۱۲

مشاوره در مبحث الکتریسته ساکن هر سال حداقل یکی از تست‌های کنکور در مورد برایند (نیروها یا میدان‌ها) است. تمامی روش‌های برایندگیری را باید به خوبی بلد باشید.

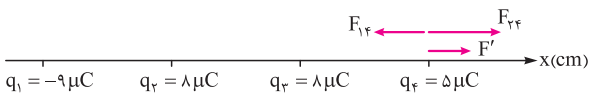
Hint ابتدا $F_{۱۴}$ و $F_{۲۴}$ را به دست آورده و برایند آن‌ها را محاسبه و رسم کنید. سپس با توجه به نیروی خالص وارد بر بار $q_۴$، اندازه و جهت نیروی بار $q_۳$ به $q_۴$ را مشخص کنید و با توجه به این نیرو، اندازهٔ فاصلهٔ جدید را به دست آورید.

درس Box برای محاسبهٔ برایند دو نیروی $F_۱$ و $F_۲$ در کتاب درسی، سه حالت مطابق شکل‌های زیر وجود دارد.



دو نیرو عمود بر هم	دو نیرو هم‌راستا و خلاف جهت	دو نیرو هم‌راستا و هم‌جهت
$F_T = \sqrt{F_۱^۲ + F_۲^۲}$	$F_T = \lvert F_۱ - F_۲ \rvert$	$F_T = F_۱ + F_۲$

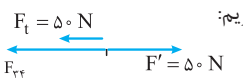
پاسخ خیلی تشریحی **گام اول:** ابتدا نیروی خالص وارد بر بار $q_۴$ را از طرف بارهای $q_۱$ و $q_۲$ محاسبه می‌کنیم:



$$F = \frac{k\lvert q_۱\rvert\lvert q_۲\rvert}{r^۲} \Rightarrow F_{۱۴} = \frac{۹۰\times۹\times۵}{۹^۲} = ۵۰\ N \ ,\ F_{۲۴} = \frac{۹۰\times۸\times۵}{۶^۲} = ۱۰۰\ N$$

$$\vec{F'} = \vec{F}_{۱۴} + \vec{F}_{۲۴} = \lvert ۱۰۰ - ۵۰\rvert = ۵۰\ N$$ به سمت راست

گام دوم: بنابراین برای این‌که نیروی خالص وارد بر $q_۴$ از طرف هر سه بار $\vec{F} = -۵۰\vec{i}$ باشد، داریم:

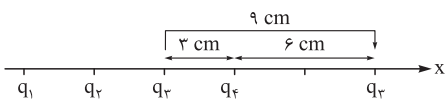


$$\vec{F}_{۳۴} = -۱۰۰\vec{i}$$

گام سوم: اندازهٔ نیروی بار $q_۳$ به $q_۴$ را برابر ۱۰۰ N قرار می‌دهیم تا فاصلهٔ جدید آن‌ها به دست آید:

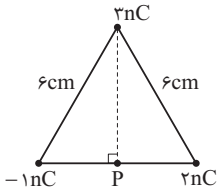
$$F_{۳۴} = ۱۰۰ = \frac{۹۰\times۸\times۵}{r^۲} \Rightarrow r^۲ = ۳۶ \Rightarrow r = ۶\ cm$$

گام چهارم: چون نیروی $q_۳$ به $q_۴$ باید به سمت چپ $(-\vec{i})$ باشد و با توجه به این‌که بارهای آن‌ها همنام هستند، بار $q_۳$ می‌بایست به سمت بار $q_۴$ جابه‌جا شده و در ۶ سانتی‌متری طرف دیگر آن قرار بگیرد. به این ترتیب بار $q_۳$، باید ۹ cm جابه‌جا شود.



سنجش کلاد
www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshClouds

۴۴ مطابق شکل، سه بار الکتریکی نقطه‌ای در رأس‌های مثلث متساوی‌الاضلاعی به ضلع **۶cm** ثابت شده‌اند. بزرگی میدان الکتریکی خالص در نقطهٔ **P**، چند کیلوولت بر متر است؟ $(k = ۹\times۱۰^{۹}\ \frac{N.m^{۲}}{C^{۲}})$



۱) ۱۰

۲) $۱۰\sqrt{۲}$

۳) $۱۰\sqrt{۵}$

۴) $۱۰\sqrt{۱۰}$

Hint ابتدا اندازهٔ میدان حاصل از هر یک از بارها را در نقطهٔ P به دست آورید، سپس بردارهایشان را رسم کرده و با توجه به جهت آن‌ها، میدان خالص را محاسبه کنید.

پاسخ خیلی تشریحی ✔ **گام اول:** اندازهٔ میدان الکتریکی حاصل از بارها را در نقطهٔ P محاسبه می‌کنیم:

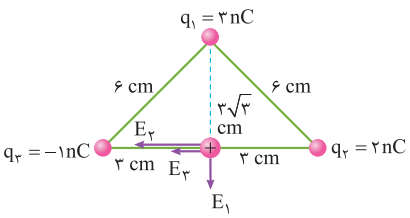
$$E = \frac{k|q|}{r^{۲}}$$

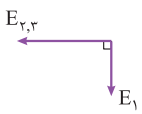
$$E_{۱} = \frac{۹\times۱۰^{۹}\times۳\times۱۰^{-۹}}{(۳\sqrt{۳}\times۱۰^{-۲})^{۲}} \Rightarrow E_{۱} = \frac{۹\times۳}{۲۷\times۱۰^{-۴}} = ۱۰^{۴}\,V/m\times۱۰^{-۳} = ۱۰\,kV/m$$

$$E_{۲} = \frac{۹\times۱۰^{۹}\times۲\times۱۰^{-۹}}{(۳\times۱۰^{-۲})^{۲}} = \frac{۹\times۲}{۹\times۱۰^{-۴}} = ۲\times۱۰^{۴}\,V/m\times۱۰^{-۳} = ۲۰\,kV/m$$

$$E_{۳} = \frac{۹\times۱۰^{۹}\times۱\times۱۰^{-۹}}{(۳\times۱۰^{-۲})^{۲}} = \frac{۹}{۹\times۱۰^{-۴}} = ۱۰^{۴}\,V/m\times۱۰^{-۳} = ۱۰\,kV/m$$

گام دوم: حال با توجه به جهت میدان‌های الکتریکی، برایند آن‌ها را در نقطهٔ P به دست می‌آوریم:





$$E_{۲,۳} = E_{۲} + E_{۳} = ۲۰ + ۱۰ = ۳۰\,kV/m$$

$$E_{t} = \sqrt{E_{۲,۳}^{۲} + E_{۱}^{۲}} \Rightarrow E_{t} = \sqrt{۳۰^{۲} + ۱۰^{۲}} \Rightarrow E_{t} = ۱۰\sqrt{۱۰}\ \frac{kV}{m}$$

www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshClouds

۴۵ در یک میدان الکتریکی یکنواخت به بزرگی $۲\times۱۰^{۴}\ N/C$ که جهت آن قائم و رو به پایین است، ذرهٔ بارداری به جرم $۸g$ معلق و به حال سکون قرار دارد. بار ذره چند میکروکولن است؟ $(g = ۱۰\ N/kg)$

۱) -۴

۲) ۴

۳) -۲

۴) ۲

مشاوره یکی از مباحث مهم در الکتریستهٔ ساکن تعادل یک ذره است، یعنی نیروی خالص وارد بر ذره صفر شود. باید به خوبی بدانید در چه شرایطی با وجود نیروهای مختلف این اتفاق می‌افتد.

Hint اندازهٔ بار را با توجه به این‌که نیروی خالص وارد بر آن صفر است، از رابطهٔ $(E|q| = mg)$ به دست آورید و سپس با توجه به جهت میدان و جهت نیروی وارد بر آن، نوع بار q را مشخص کنید.

درس Box اگر جسمی به جرم m در یک فضا در حال تعادل باشد، باید نیروی خالص وارد بر آن صفر شود. در صورتی که علاوه بر وزن، یک نیروی دیگر به آن وارد شود، این دو نیرو هم‌اندازه و خلاف جهت یکدیگر هستند:

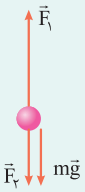


$$|\vec{F}_۱| = |m\vec{g}|$$

و اگر چند نیروی دیگر نیز همراه با نیروی وزن به آن اثر کند، باید برایند آن‌ها با نیروی وزن، صفر شود.

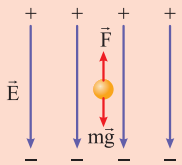


$$|m\vec{g}| = |\vec{F}_۱ + \vec{F}_۲|$$



$$|\vec{F}_۱| = |\vec{F}_۲ + m\vec{g}|$$

پاسخ خیلی تشریحی ✓ با توجه به جهت میدان و جهت نیروی وارد بر ذرهٔ درون میدان، بار ذره منفی است.

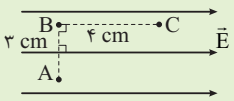


$$|F| = |mg| \Rightarrow E|q| = mg \Rightarrow |q| = \frac{۸\times۱۰^{-۳}\times۱۰}{۲\times۱۰^{۴}}$$

$$|q| = ۴\times۱۰^{-۶}\,C \Rightarrow q = -۴\mu C$$

سنجش کلاد
www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshClouds

۴۶ بار الکتریکی نقطه‌ای $q = -50\mu C$ مطابق شکل زیر در میدان الکتریکی یکنواخت و افقی $E = 4\times10^4\ N/C$، ابتدا به اندازهٔ $3cm$ از نقطهٔ A تا نقطهٔ B و سپس به اندازهٔ $4cm$ از نقطهٔ B تا نقطهٔ C جابه‌جا می‌شود. چه تعداد از موارد زیر درست هستند؟



الف) تغییر انرژی پتانسیل الکتریکی بار از نقطهٔ A تا نقطهٔ C برابر با $+80mJ$ است.

ب) پتانسیل الکتریکی نقطهٔ B به اندازهٔ $1600V$ بیشتر از پتانسیل الکتریکی نقطهٔ C است.

پ) نقاط A و B هم‌پتانسیل‌اند.

ت) کار میدان الکتریکی در جابه‌جایی بار از نقطهٔ B تا نقطهٔ C برابر با $-100mJ$ است.

۱) ۱ ۲) ۲

۳) ۳ ۴) ۴

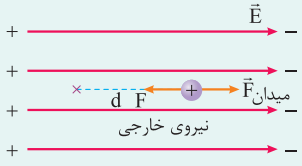
Hint درس‌باکس را به دقت بخوانید و سعی کنید خودتان سؤال را حل کنید.

درس Box

اگر بار الکتریکی q_0 را درون یک میدان الکتریکی یکنواخت با نیرویی هم‌اندازه با نیروی الکتریکی میدان اما در خلاف جهت آن جابه‌جا کنیم، برای این جابه‌جایی کار انجام داده‌ایم که از رابطهٔ زیر قابل محاسبه است:

$$|\vec{F}_{\text{نیروی خارجی}}| = |\vec{F}_{\text{میدان}}| = |\vec{E}q_0|$$

$$W_{\text{نیروی خارجی}} = E|q_0|d\cos\theta$$



$W_{\text{نیروی خارجی}}$: کار نیروی خارجی (J)

E: میدان الکتریکی (N/C)

q_0: بار الکتریکی (C)

d: جابه‌جایی (m)

θ: زاویهٔ بین نیرو و جابه‌جایی

$0^\circ < \theta < 90^\circ \xrightarrow{\cos\theta>0} W > 0$

$90^\circ < \theta < 180^\circ \xrightarrow{\cos\theta<0} W < 0$

اختلاف پتانسیل الکتریکی:

اگر بار الکتریکی q درون میدان الکتریکی از نقطهٔ (۱) به (۲) منتقل شود و انرژی پتانسیل الکتریکی آن از U_1 به U_2 برسد، اختلاف پتانسیل الکتریکی دو نقطهٔ (۱) و (۲) از رابطهٔ مقابل قابل محاسبه است:

$$V_2 - V_1 = \frac{U_2 - U_1}{q} \Rightarrow \Delta V = \frac{\Delta U}{q}$$

ΔV: اختلاف پتانسیل دو نقطه (V)

ΔU: تغییر انرژی پتانسیل الکتریکی (J)

q: بار الکتریکی (C) (لزوماً با علامتش باید لحاظ شود)

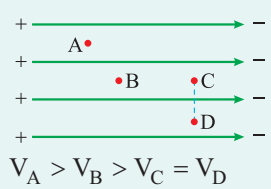
اگر بار الکتریکی در جهت تمایل خود در میدان جابه‌جا شود، $\Delta U < 0$ و $|\Delta U| = |W|$. اگر بار الکتریکی در خلاف جهت تمایل خود در میدان جابه‌جا شود، $\Delta U > 0$ است.

بار الکتریکی منفی:
- در جهت میدان حرکت کند، $\Delta U < 0$.
- خلاف جهت میدان حرکت کند، $\Delta U > 0$.

بار الکتریکی مثبت:
- در جهت میدان حرکت کند، $\Delta U < 0$.
- خلاف جهت میدان حرکت کند، $\Delta U > 0$.

پتانسیل الکتریکی:

این کمیت از ویژگی‌های میدان الکتریکی است و ارتباطی به حضور یا عدم حضور بار الکتریکی درون میدان ندارد. به طوری که درون میدان، پتانسیل الکتریکی در نزدیکی صفحهٔ مثبت بیشتر از پتانسیل در نزدیکی صفحهٔ منفی است؛ پس با حرکت در جهت میدان، پتانسیل کاهش می‌یابد و بالعکس با حرکت در خلاف جهت میدان، پتانسیل افزایش می‌یابد.



دقت کنید که در یک راستای عمود بر خطوط میدان، پتانسیل الکتریکی یکسان است.

سنجش کلاد
www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshClouds

پاسخ خیلی تشریحی ✔ گزینه‌ها را بررسی می‌کنیم:

الف) درست؛

$$|\Delta U_{AC}| = |W_{AC}|$$

$$W_{AC} = W_{AB} + W_{BC} \xrightarrow{W_{AB}=0} W_{AC} = W_{BC} = Eqd_{BC}\cos\alpha$$

$$\Rightarrow W_{AC} = ۴\times۱۰^{۴}\times۵۰\times۱۰^{-۶}\times۴\times۱۰^{-۲}\times۱\,J$$

$$\Rightarrow W_{AC} = ۸\times۱۰^{-۲}\,J\times۱۰^{۳} = ۸۰\,mJ$$

$$\xrightarrow{\text{بار در خلاف جهت تمایل خود حرکت کرده}} \Delta U > ۰ \Rightarrow \Delta U = +۸۰\,mJ$$

ب) درست؛

$$\Delta U_{BC} = +۸۰\,mJ \Rightarrow \Delta V_{BC} = \frac{\Delta U_{BC}}{q} \Rightarrow \Delta V_{BC} = \frac{۸۰\times۱۰^{-۳}}{-۵۰\times۱۰^{-۶}} = -۱۶۰۰\,V$$

$$V_C - V_B = -۱۶۰۰ \Rightarrow V_B > V_C$$

پ) با توجه به توضیحات درس‌باکس درست است.

ت) نادرست؛

$$W_{\text{میدان الکتریکی}} = Eqd\cos\alpha \Rightarrow W_{\text{میدان الکتریکی}} = ۴\times۱۰^{۴}\times۵۰\times۱۰^{-۶}\times۴\times۱۰^{-۲}\times-۱$$

$$\Rightarrow W_{\text{میدان الکتریکی}} = -۸\times۱۰^{-۲}\,J = -۸۰\,mJ$$

سنجش کلاد
www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshClouds

۴۷ به یک کرهٔ رسانای خنثی به شعاع $5\,cm$، $60\,\mu C$ بار الکتریکی می‌دهیم. چه تعداد از عبارت‌های زیر دربارهٔ این کره، درست است؟ $(\pi \simeq 3)$

الف) چگالی سطحی بار الکتریکی این کره در SI برابر 2×10^{-3} است.

ب) میدان الکتریکی درون کره برابر صفر است.

پ) پتانسیل الکتریکی تمام نقاط داخل و سطح این کره، برابر صفر است.

ت) تمامی بار داده‌شده به کره در سطح خارجی آن توزیع می‌شود.

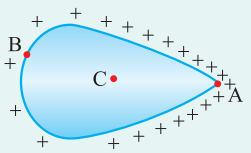
۱) ۱ ۲) ۲

۳) ۳ ۴) ۴

Hint درس‌باکس زیر را به دقت خوانده و سعی کنید پاسخ تست را خودتان بیابید.

درس Box

اگر بار اضافی به یک جسم رسانا داده شود و یا آن جسم در یک میدان الکتریکی خارجی قرار گیرد، پس از مدت‌زمان کوتاهی که جسم در تعادل الکتروستاتیکی قرار می‌گیرد، میدان الکتریکی داخل آن صفر می‌شود. یا اگر یک جسم رسانای خنثی در میدان الکتریکی خارجی قرار بگیرد، الکترون‌های آزاد جسم تحت تأثیر میدان الکتریکی خارجی، طوری روی سطح رسانا قرار می‌گیرند که میدان الکتریکی ناشی از آن‌ها اثر میدان خارجی را در داخل رسانا خنثی کند؛ از این‌رو میدان الکتریکی خالص درون رسانا صفر می‌شود. حال اگر به یک جسم رسانا، بار الکتریکی q را منتقل کنیم، بارها جابه‌جا شده و به سطح جسم منتقل می‌شوند تا در نهایت به تعادل الکتریکی برسند. پس از رسیدن به تعادل الکتریکی، تراکم بار در نزدیکی نقاط نوک‌تیز بیشتر خواهد بود و هنگامی که یک رسانا در تعادل الکترواستاتیکی باشد، پتانسیل الکتریکی تمام نقاط آن با هم برابر است.



$$q_A > q_B$$
$$V_A = V_B = V_C$$

اگر مساحت سطحی که بار روی آن توزیع شده است، برابر A و بار الکتریکی موجود در آن سطح برابر Q باشد، چگالی سطحی بار که با نماد σ نشان داده می‌شود از رابطهٔ زیر به دست می‌آید:

$$\sigma = \frac{Q}{A}$$

σ: چگالی سطحی بار (C/m^2)

Q: بار الکتریکی (C)

A: مساحت (m^2)

پاسخ خیلی تشریحی گزینه‌ها را بررسی می‌کنیم:

الف) درست؛

$$\sigma = \frac{Q}{A} \xrightarrow{A_{کره}=4\pi r^2} \sigma = \frac{Q}{4\pi r^2} \Rightarrow \sigma = \frac{6\times10^{-5}}{4\times3\times25\times10^{-4}} \Rightarrow \sigma = 2\times10^{-3}\,C/m^2$$

ب) درست؛ با توجه به درس‌باکس، این عبارت درست است.

پ) نادرست؛ زیرا پتانسیل الکتریکی تمام نقاط جسم رسانا با هم **برابر** است، نه این‌که صفر باشد!

ت) درست؛ با توجه به توضیحات درس‌باکس، این عبارت درست است.

سنجش کلاد
www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshClouds

۴۸ یک یاختهٔ عصبی را می‌توان با یک خازن تخت مدل‌سازی کرد، به طوری که غشای یاخته به عنوان دی‌الکتریک عمل می‌کند. اگر غشا دارای ثابت دی‌الکتریک $k = ۳$، ضخامت $۹nm$ و مساحت سطح $۱۰^{-۱۰} m^۲$ باشد، ظرفیت این یاختهٔ عصبی چند پیکوفاراد است؟

$(\varepsilon_۰ = ۹\times۱۰^{-۱۲}\frac{C^۲}{N.m^۲})$

۱) ۰/۰۳

۲) ۰/۳

۳) ۳

۴) ۳۰

Hint

با استفاده از رابطهٔ $(C = \frac{\kappa\varepsilon_۰ A}{d})$ ظرفیت خازن را محاسبه کنید و در نهایت آن را به پیکوفاراد تبدیل واحد کنید.

درس Box

عوامل مؤثر بر ظرفیت خازن:

همان‌طور که می‌دانید ظرفیت یک خازن به بار ذخیره‌شده در آن (q) و اختلاف پتانسیل دو سر آن (V) بستگی ندارد، بلکه به ساختمان آن وابسته است.

ظرفیت خازن از رابطهٔ مقابل به دست می‌آید:

$$C = \frac{\kappa\varepsilon_۰ A}{d}$$

κ : ثابت دی‌الکتریک

$\varepsilon_۰$: ضریب گذردهی الکتریکی خلأ $(\varepsilon_۰ = ۸/۸۵\times۱۰^{-۱۲}\frac{C^۲}{N.m^۲})$

پاسخ خیلی تشریحی ✔

$$C = \frac{\kappa\varepsilon_۰ A}{d} \Rightarrow C = \frac{۳\times۹\times۱۰^{-۱۲}\times۱۰^{-۱۰}}{۹\times۱۰^{-۹}} = ۳\times۱۰^{-۱۳}F\times۱۰^{۱۲} = ۰/۳\ pF$$

سنجش کلاد
www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshClouds

۴۹ خازنی به ظرفیت $۱۰\mu F$ دارای بار $۲mC$ بوده و بین صفحات آن هوا است. یک ذره با بار الکتریکی $q = ۱\mu C$، بین صفحات خازن از مجاورت صفحهٔ مثبت، رها می‌شود. اگر جرم ذره ۸ میلی‌گرم باشد، تندی آن در هنگام رسیدن به صفحهٔ مقابل، چند متر بر ثانیه است؟

۱) ۲

۲) ۵

۳) $۵\sqrt{۲}$

۴) ۱۰

مشاوره ترکیب‌کردن سؤالات مربوط به میدان یکنواخت و کار و انرژی از سوژه‌های مورد علاقهٔ طراح‌هاست، بنابراین توصیه می‌کنیم سؤالات این مبحث را به خوبی کار کنید.

Hint ابتدا اختلاف پتانسیل صفحات خازن $(V_+ - V_-)$ را از رابطهٔ $(V = \frac{Q}{C})$ به دست آورید و سپس با استفاده از رابطهٔ $(-\Delta K = \Delta U = q\Delta V)$ می‌توانید سرعت نهایی ذره را محاسبه کنید.

درس Box با اتصال یک خازن به یک باتری، می‌توانیم در آن بار الکتریکی ذخیره کنیم. پس از اتصال خازن به باتری، شارش بار الکتریکی در مدار تا زمانی ادامه می‌یابد که اختلاف پتانسیل دو سر خازن برابر اختلاف پتانسیل باتری شود. صفحه‌ای که به پایانهٔ مثبت باتری متصل است، دارای بار مثبت و صفحهٔ دیگر دارای بار منفی می‌شود.

نکته وقتی می‌گوییم یک خازن دارای بار q است، یعنی یک صفحهٔ آن بار $+q$ و یک صفحهٔ آن بار $-q$ دارد.

ظرفیت خازن: نسبت بار ذخیره‌شده در یک خازن به اختلاف پتانسیل دو سر آن، مقدار ثابتی است که آن را ظرفیت خازن می‌نامند:

$$C = \frac{Q}{V}$$

$$\text{فاراد } (F) = \frac{\text{کولن } (C)}{\text{ولت } (V)}$$

پاسخ خیلی تشریحی **گام اول**: ابتدا اختلاف پتانسیل دو سر خازن را به دست می‌آوریم:

$$C = \frac{Q}{V} \Rightarrow V = \frac{Q}{C} \Rightarrow V = \frac{۲\times۱۰^{-۳}}{۱۰\times۱۰^{-۶}} = ۲۰۰V \Rightarrow V_+ - V_- = ۲۰۰ \ , \ V_- - V_+ = -۲۰۰$$

گام دوم: با استفاده از قضیهٔ پایستگی انرژی مکانیکی می‌توانیم سرعت ذره در صفحهٔ مقابل را به دست آوریم. دقت کنید که ذره از صفحهٔ مثبت به سمت صفحهٔ منفی حرکت کرده؛ بنابراین $\Delta V = V_- - V_+$ است:

$$\Delta U = q\Delta V \Rightarrow \Delta U = ۱\times۱۰^{-۶} \times -۲۰۰ = -۲\times۱۰^{-۴} J$$

$$|\Delta U| = |\Delta K| \xrightarrow{\Delta K = -\Delta U} \Delta K = +۲\times۱۰^{-۴} J$$

$$\Delta K = \frac{۱}{۲}m(v_۲^۲ - v_۱^۲) \Rightarrow +۲\times۱۰^{-۴} = \frac{۱}{۲}\times۸\times۱۰^{-۶}(v_۲^۲ - ۰) \Rightarrow v = ۵\sqrt{۲} \ m/s$$

سنجش کلاد
www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshClouds

۵۰ عایق بین صفحه‌های خازنی، هوا و اندازهٔ میدان الکتریکی بین صفحات آن $۶۰\ V/mm$ است. اندازهٔ چگالی سطحی بار الکتریکی هر یک از صفحه‌های این خازن در SI کدام است؟ $(\varepsilon_{\circ} = ۹\times ۱۰^{-۱۲}\ F/m)$

۱) $۵/۴\times ۱۰^{-۷}$

۲) $۵/۴\times ۱۰^{-۴}$

۳) ۶×۱۰^{-۷}

۴) ۶×۱۰^{-۴}

Hint

با توجه به رابطهٔ $(E=\frac{q}{\kappa\varepsilon_{\circ}A})$ که در درس‌باکس اثبات کردیم، نسبت $\frac{Q}{A}$ که همان چگالی سطحی بار الکتریکی است را به‌دست آورید.

درس Box

میدان الکتریکی بین صفحات خازن:

بین صفحات هر خازن تخت، یک میدان الکتریکی یکنواخت ایجاد می‌شود که اندازهٔ آن از رابطهٔ زیر قابل محاسبه است و همان طور که در شکل می‌بینید، جهت این میدان از صفحهٔ دارای بار مثبت به سمت صفحهٔ دارای بار منفی است:



$$E=\frac{V}{d}$$

E: میدان الکتریکی (V/m)

V: اختلاف پتانسیل بین دو صفحهٔ خازن (V)

d: فاصلهٔ بین دو صفحهٔ خازن (m)

نکته همان‌طور که قبلاً خوانده‌اید، ظرفیت خازن در رابطهٔ $C=\frac{q}{V}$ قرار می‌گیرد و از رابطهٔ $C=\frac{\kappa\varepsilon_{\circ}A}{d}$ به دست می‌آید. حال با ترکیب این دو رابطه و ارتباط آن با فرمول محاسبهٔ میدان الکتریکی بین صفحات خازن، رابطهٔ زیر به دست می‌آید:

$$C=\frac{q}{V}\ ,\ C=\frac{\kappa\varepsilon_{\circ}A}{d}\Rightarrow\frac{q}{V}=\frac{\kappa\varepsilon_{\circ}A}{d}\Rightarrow\frac{V}{d}=\frac{q}{\kappa\varepsilon_{\circ}A}\xrightarrow{E=\frac{V}{d}}E=\frac{q}{\kappa\varepsilon_{\circ}A}$$

پاسخ خیلی تشریحی ✔ همان‌طور که در درس‌باکس اثبات کردیم، رابطهٔ بین میدان الکتریکی و بار الکتریکی درون خازن به صورت زیر است؛ بنابراین:

$$E=\frac{q}{\kappa\varepsilon_{\circ}A}\Rightarrow ۶۰\times ۱۰^{۳}=\frac{q}{۱\times ۹\times ۱۰^{-۱۲}\times A}$$

$$\Rightarrow\frac{q}{A}=۵/۴\times ۱۰^{-۷}\ C/m^{۲}\xrightarrow{\sigma=\frac{q}{A}}\sigma=۵/۴\times ۱۰^{-۷}\ C/m^{۲}$$

سنجش کلاد
www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshClouds

۵۱ در ماشین‌های چمن‌زنی برقی، برای مسافت‌های حداکثر تا $35\ m$ از سیم‌های مسی با قطر $0/8\ mm$ و برای مسافت‌های طولانی‌تر، از سیم‌های مسی با قطر $1/2\ mm$ استفاده می‌شود. مقاومت الکتریکی سیم یک ماشین چمن‌زنی به طول $15\ m$ چند برابر مقاومت الکتریکی سیم یک ماشین چمن‌زنی به طول $45\ m$ است؟

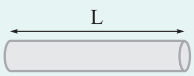
۱) $\frac{3}{4}$ ۲) $\frac{4}{3}$ ۳) $\frac{27}{4}$ ۴) $\frac{4}{27}$

Hint با استفاده از رابطهٔ مقاومت سیم رسانا $(R=\rho\frac{L}{A})$ می‌توانید به صورت مقایسه‌ای، نسبت مقاومت دو سیم را به دست آورید.

درس Box

ساختمان مقاومت:

مقاومت الکتریکی یک سیم رسانا در دمای ثابت به سطح مقطع، طول و جنس آن بستگی دارد و از رابطهٔ زیر به دست می‌آید:



$$R=\rho\frac{L}{A}$$

R: مقاومت الکتریکی سیم (Ω)

ρ: مقاومت ویژهٔ سیم $(\Omega.m)$

L: طول سیم (m)

A: سطح مقطع سیم (m^2)

مقاومت یک سیم با طول و مقاومت ویژهٔ آن رابطهٔ مستقیم و با سطح مقطع آن رابطهٔ عکس دارد:

$$\frac{R_2}{R_1}=\frac{\rho_2}{\rho_1}\times\frac{L_2}{L_1}\times\frac{A_1}{A_2}$$

تذکر: با توجه به این‌که در سیم‌های با مقطع دایره‌ای، سطح مقطع برابر $A=\pi r^2$ می‌باشد؛ بنابراین مقاومت یک سیم فلزی استوانه‌ای با مجذور شعاع مقطع آن رابطهٔ معکوس دارد:

$$\frac{R_2}{R_1}=\frac{\rho_2}{\rho_1}\times\frac{L_2}{L_1}\times(\frac{r_1}{r_2})^2$$

پاسخ خیلی تشریحی ✔

$$R=\rho\frac{L}{A}\xrightarrow{\text{جنس دو سیم یکسان}}\frac{R_2}{R_1}=\frac{L_2}{L_1}\times(\frac{D_1}{D_2})^2$$

سیم ۱۵متری را سیم (۲) و سیم ۴۵متری را سیم (۱) می‌نامیم. با توجه به صورت سؤال قطر سیم (۲)، $0/8\ mm$ و قطر سیم (۱) $1/2\ mm$ است؛ بنابراین:

$$\frac{R_2}{R_1}=\frac{L_2}{L_1}\times(\frac{D_1}{D_2})^2\Rightarrow\frac{R_2}{R_1}=\frac{15}{45}\times(\frac{1/2}{0/8})^2\Rightarrow\frac{R_2}{R_1}=\frac{3}{4}$$

سنجش کلاد
www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshClouds

۵۲ دو سیم مسی هم‌جرم **A** و **B** به طور جداگانه به اختلاف پتانسیل یکسان و ثابتی وصل هستند. اگر شعاع مقطع سیم **A**، **n** برابر شعاع مقطع سیم **B** باشد، در مدت معین، تعداد الکترون‌های عبوری از سیم **A**، چند برابر تعداد الکترون‌های عبوری از سیم **B** است؟

۱) $\frac{۱}{n^۲}$ ۲) $n^۲$

۳) $\frac{۱}{n^۴}$ ۴) $n^۴$

درس Box

کوانتیده‌بودن بار الکتریکی: همواره بار الکتریکی یک جسم، مضرب درستی از یک مقدار پایه (بار بنیادی e) است و هر مقدار دلخواهی نمی‌تواند داشته باشد:

$q = \pm n e \ , \ e = ۱/۶ \times ۱۰^{-۱۹} C$

تعداد الکترون مبادله‌شده

علامت + : برای جسمی که الکترون از دست داده است.

علامت − : برای جسمی که الکترون گرفته است.

آهنگ شارش بار الکتریکی در رسانا، معادل با جریان الکتریکی متوسط عبوری از آن است:

$\bar{I} = \frac{\Delta q}{\Delta t}$

$\text{آمپر} = \frac{\text{کولن}}{\text{ثانیه}}$

$\bar{I}$: جریان الکتریکی متوسط برحسب آمپر (A)

Δq : بار الکتریکی خالص عبوری برحسب کولن (C)

Δt : مدت‌زمان برحسب ثانیه (s)

قانون اهم:

اگر مقاومت الکتریکی یک وسیله در ولتاژهای مختلف (در دمای ثابت) همواره مقدار ثابتی داشته باشد، به آن وسیله، مقاومت یا رسانای اهمی گفته می‌شود. به عبارت دیگر در وسیله‌هایی که از قانون اهم پیروی می‌کنند، نسبت اختلاف پتانسیل دو سر آن‌ها به شدت جریان عبوری از آن‌ها در دمای ثابت، مقداری ثابت است. این مقدار ثابت را مقاومت الکتریکی آن جسم می‌نامیم:

$R = \frac{V}{I}$

R : مقاومت الکتریکی برحسب اهم (Ω)

V : اختلاف پتانسیل برحسب ولت (V)

I : جریان الکتریکی برحسب آمپر (A)

پاسخ خیلی تشریحی ✔ با توجه به درس‌باکس، دقت کنید که روابط زیر توسط کمیت‌های مشترک به هم ارتباط دارند:

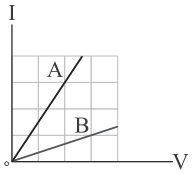
$q = ne \xrightarrow{I=\frac{q}{t}} I = \frac{ne}{t} \xrightarrow{R=\frac{V}{I}} R = \frac{Vt}{ne} \xrightarrow{R=\rho\frac{L}{A}} \rho\frac{L}{A} = \frac{Vt}{ne}$

بنابراین:

$\rho\frac{L}{\pi r^۲} = \frac{Vt}{ne} \Rightarrow r^۲ \propto n \Rightarrow \frac{n_A}{n_B} = (\frac{r_A}{r_B})^۲ = n^۲$

www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshClouds

۵۳ نمودار جریان الکتریکی عبوری از دو رسانای **A** و **B** برحسب اختلاف پتانسیل الکتریکی دو سر آن‌ها به شکل زیر است. اگر این دو رسانا به طور جداگانه، به ترتیب، به اختلاف پتانسیل‌های الکتریکی **V** و **۲V** وصل شوند، جریان الکتریکی عبوری از رسانای **A**، چند برابر جریان الکتریکی عبوری از رسانای **B** می‌شود؟



۱) $\frac{۹}{۴}$

۲) $\frac{۴}{۹}$

۳) ۹

۴) $\frac{۱}{۹}$

Hint ابتدا مقاومت هر یک از رساناهای A و B را از روی نمودار به دست آورید $(\frac{۱}{R}=$ شیب نمودار $I-V)$. سپس با توجه به قانون اهم $(R=\frac{V}{I})$ نسبت جریان A به B را به دست آورید.

پاسخ خیلی تشریحی **گام اول:** با توجه به قانون اهم $(R=\frac{V}{I})$ مقاومت هر یک از رساناهای A و B را از روی نمودار محاسبه می‌کنیم $(R=\frac{۱}{\text{شیب نمودار I-V}})$:

$$R_A=\frac{۲}{۳}R$$

$$R_B=۳R$$

گام دوم: حال با توجه به اتصال مقاومت A به اختلاف پتانسیل V و اتصال مقاومت B به اختلاف پتانسیل ۲V جریان عبوری از هر یک از آن‌ها را به دست می‌آوریم:

$$I=\frac{V}{R}$$

$$I_A=\frac{V}{\frac{۲}{۳}R}=\frac{۳V}{۲R}\ ,\ I_B=\frac{۲V}{۳R}$$

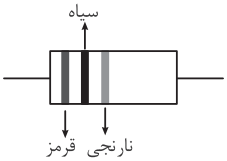
گام سوم: در نهایت نسبت $\frac{I_A}{I_B}$ به صورت زیر به دست می‌آید:

$$\frac{I_A}{I_B}=\frac{\frac{۳}{۲}}{\frac{۲}{۳}}=\frac{۹}{۴}$$

سنجش کلاد
www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshClouds

۵۴ مقاومت الکتریکی مقاومت ترکیبی شکل زیر برابر با چه تعداد از مقادیر زیر می‌تواند باشد؟

رنگ	سیاه	قرمز	نارنجی
کد	۰	۲	۳



الف) ۱۷ kΩ

ب) ۲۰ kΩ

پ) ۲۳ kΩ

ت) ۲۶ kΩ

۱) ۱

۲) ۲

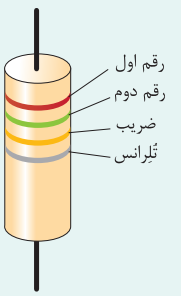
۳) ۳

۴) ۴

Hint با استفاده از رابطهٔ $(R = \overline{ab}\times 10^{n})$ مقدار مقاومت را حساب کنید و با در نظر گرفتن تلرانس، محدودهٔ مقاومت را تعیین کنید.

درس Box

مقاومت‌های ترکیبی: معمولاً از کربن، برخی نیم‌رساناها و یا لایه‌های نازک فلزی ساخته می‌شوند. این مقاومت‌ها را در اندازه‌های خاص استانداردی تولید می‌کنند و مقدار مقاومت آن‌ها یا روی آن‌ها نوشته می‌شود یا عمدتاً به صورت کدی رنگی که شامل ۳ یا ۴ حلقهٔ رنگی است مشخص می‌شوند:



$$R = \overline{ab}\times 10^{n}$$

دقت کنید که حلقهٔ چهارم یک حلقهٔ طلایی یا نقره‌ای رنگ است که تلرانس نامیده می‌شود و مقدار مجاز انحراف از مقدار دقیق مقاومت را برحسب درصد مشخص می‌کند. نبود حلقهٔ چهارم به معنای آن است که تلرانس ۲۰ درصد است.

پاسخ خیلی تشریحی ✔

$$R = 20\times 10^{3}\,\Omega = 20\,k\Omega$$

چون حلقهٔ چهارم در این مقاومت وجود ندارد پس ۲۰ درصد تلرانس داریم:

$$\Delta R = \frac{1}{5}\times 20 = 4k\Omega \Rightarrow R = 20\pm 4\,k\Omega \Rightarrow 16\,k\Omega \le R \le 24\,k\Omega$$

بنابراین مقادیر «الف»، «ب» و «پ» می‌توانند مقدار مقاومت کربنی باشند.

سنجش کلاد
www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshClouds

۵۵ مقاومت یک قطعه سیم آلومینیمی در دمای $۱۰^\circ C$ برابر ۲۵Ω است. از این سیم جریان الکتریکی عبور می‌کند و در اثر افزایش دما، مقاومت الکتریکی آن به $۲۷/۲\Omega$ می‌رسد. دمای سیم در این حالت، چند درجهٔ سلسیوس است؟ $(\alpha_{Al} = ۴/۴\times ۱۰^{-۳} K^{-۱})$

۱) ۲۰

۲) ۳۰

۳) ۴۰

۴) ۵۰

Hint با استفاده از رابطهٔ $(R_۲ = R_۱(۱+\alpha\Delta\theta))$ می‌توانید مقدار تغییر دما و در نتیجه دمای نهایی سیم را به دست آورید.

درس Box

اگر یک رسانای فلزی داشته باشیم، با افزایش دمای آن، تعداد الکترون‌های آزاد آن ثابت می‌ماند ولی ارتعاشات کاتوره‌ای اتم‌ها و یون‌های آن افزایش می‌یابد. این عامل موجب برخورد بیشتر حامل‌های بار با شبکهٔ اتمی رسانای فلزی می‌شود و به این ترتیب مقاومت رسانا در برابر عبور جریان زیاد می‌شود.

$$R_۲ = R_۱(۱+\alpha\Delta T)$$

$R_۲$: مقاومت ثانویه (Ω)

$R_۱$: مقاومت اولیه (Ω)

α: ضریب دمایی مقاومت $K^{-۱}$

ΔT: تغییرات دما (K)

نکته

$$\Delta\theta = \Delta T$$

($\Delta\theta$: تغییرات دما برحسب درجهٔ سلسیوس، ΔT: تغییرات دما برحسب کلوین)

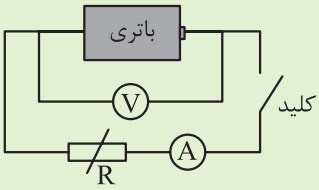
پاسخ خیلی تشریحی ✔

$$R_۲ = R_۱(۱+\alpha\Delta\theta) \Rightarrow ۲۷/۲ = ۲۵(۱+۴/۴\times ۱۰^{-۳}\times\Delta\theta) \Rightarrow ۲/۲ = ۲۵\times ۴/۴\times ۱۰^{-۳}\times\Delta\theta$$

$$\Rightarrow \Delta\theta = ۲۰^\circ C \Rightarrow \theta_۲ - \theta_۱ = ۲۰^\circ C \Rightarrow \theta_۲ - ۱۰ = ۲۰^\circ C \Rightarrow \theta_۲ = ۳۰^\circ C$$

سنجش کلاد
www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshClouds

۵۶ در مدار شکل زیر، در حالتی که کلید باز است، ولت‌سنج آرمانی ۱۹V و در حالتی که کلید بسته است، ولت‌سنج ۱۷V و آمپرسنج آرمانی ۲A را نشان می‌دهد. مقاومت درونی باتری چند اهم است؟



۱) ۰/۵

۲) ۱

۳) ۱/۵

۴) ۲

مشاوره در مبحث مدارها قراردادن یک آمپرسنج و ولت‌سنج داخل مدار بسیار مرسوم است و توصیه می‌کنیم به خوبی نکات مربوط به آن‌ها را یاد بگیرید.

Hint جریان مدار ۲A و نیروی محرکهٔ مولد $\varepsilon = 19\ V$ است، بنابراین از رابطهٔ $V = \varepsilon - rI$ مقاومت درونی مولد را به دست آورید.

درس Box آمپرسنج در مدار به صورت سری بسته می‌شود و جریان کل مدار را نشان می‌دهد:

$$I = \frac{\varepsilon}{R_{eq} + r}$$

مقاومت آمپرسنج آرمانی صفر است؛ بنابراین اگر به اشتباه آن را در مدار به صورت موازی ببندیم مانند اتصال‌کوتاه عمل می‌کند و شاخه‌ای از مدار که به آمپرسنج وصل شده از مدار حذف می‌شود.

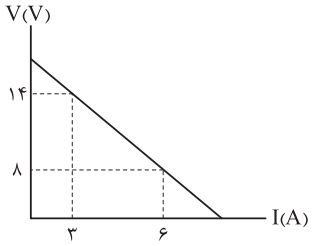
ولت‌سنج در مدار به صورت موازی به هر جزء بسته می‌شود. اگر ولت‌سنج به مقاومت متصل شود، عدد RI را نشان می‌دهد و اگر به مولد متصل شود در صورتی که جریان در مدار برقرار نباشد نیروی محرکهٔ مولد (ε) را نشان می‌دهد و اگر جریان در مدار برقرار باشد، ولت‌سنج عدد $V = \varepsilon - rI$ را نشان می‌دهد. اگر به اشتباه ولت‌سنج آرمانی را در مدار به صورت سری ببندیم به دلیل این‌که مقاومت آن بی‌نهایت است جریان در آن شاخه از مدار صفر می‌شود.

پاسخ خیلی تشریحی ✔ در حالت اول که کلید باز است و $I = 0$ است، ولت‌سنج، نیروی محرکهٔ مولد را نشان می‌دهد؛ بنابراین $\varepsilon = 19\ V$. وقتی کلید را می‌بندیم:

$$V = \varepsilon - rI \Rightarrow 17 = 19 - r(2) \Rightarrow r = 1\Omega$$

سنجش کلاد
www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshClouds

۵۷ نمودار اختلاف پتانسیل الکتریکی دو سر یک باتری برحسب جریان گذرنده از آن، به شکل زیر است. اگر یک مقاومت ۳ اُهمی به دو سر این باتری ببندیم، اختلاف پتانسیل الکتریکی دو سر باتری چند ولت می‌شود؟



۱) ۶

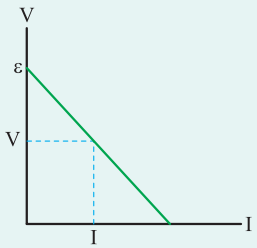
۲) ۸

۳) ۱۲

۴) ۱۶

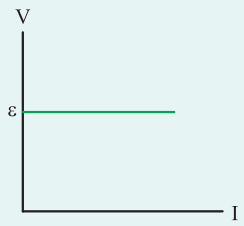
درس Box

نمودار ولتاژ دو سر باتری برحسب شدت جریان عبوری از آن در دو حالت باتری ایده‌آل $(r=0)$ و غیرایده‌آل $(r\neq 0)$ به صورت زیر است:



$r\neq 0 \Rightarrow$ ولتاژ دو سر باتری $V=\varepsilon-rI$

$$\text{شیب نمودار}=\frac{\varepsilon-V}{I}=\frac{rI}{I}=r$$



$r=0 \Rightarrow$ ولتاژ دو سر باتری $V=\varepsilon$

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: ابتدا شیب نمودار که همان مقاومت درونی مولد است را به دست آورده و سپس نیروی محرکهٔ مولد را محاسبه می‌کنیم:

$$r=\frac{۱۴-۸}{۶-۳}=۲\Omega$$

$$V=\varepsilon-rI \Rightarrow ۱۴=\varepsilon-(۲)(۳) \Rightarrow \varepsilon=۲۰\,V$$

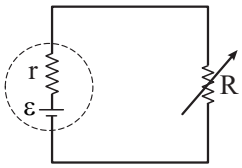
گام دوم: حال براساس مقاومت ۳ اهم، جریان عبوری از باتری را محاسبه می‌کنیم:

$$I=\frac{\varepsilon}{R+r} \Rightarrow I=\frac{۲۰}{۳+۲}=۴A$$

$$V=\varepsilon-rI \Rightarrow V=۲۰-(۲)(۴)=۱۲V$$

سنجش کلاد
www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshClouds

۵۸ در مدار شکل زیر، اگر مقاومت رئوستا از **R** به **۲R** برسد، اختلاف پتانسیل الکتریکی دو سر باتری، ۲۰ درصد افزایش می‌یابد. **R** چند برابر مقاومت درونی باتری است؟



۱) ۱

۲) ۲

۳) ۳

۴) ۴

درس Box

در مدارهایی که باتری فقط به یک مقاومت متصل است، اختلاف پتانسیل دو سر مقاومت با اختلاف پتانسیل دو سر باتری برابر است و به صورت زیر نیز می‌تواند به دست آید:

$$V = \varepsilon - rI = RI \Rightarrow V = \frac{\varepsilon R}{R + r}$$

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: ولتاژ دو سر مولد را در دو حالت محاسبه می‌کنیم:

$$V = \frac{\varepsilon R}{R + r} \Rightarrow V_1 = \frac{\varepsilon R}{R + r} \ , \ V_2 = \frac{2\varepsilon R}{r + 2R}$$

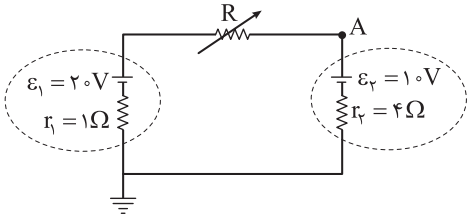
گام دوم: با توجه به این‌که اختلاف پتانسیل دو سر مولد ۲۰ درصد افزایش داشته است:

$$\frac{V_2}{V_1} = 1/2 \Rightarrow \frac{\frac{2\varepsilon R}{r + 2R}}{\frac{\varepsilon R}{r + R}} = \frac{6}{5} \Rightarrow 6r + 12R = 10r + 10R$$

$$2R = 4r \Rightarrow R = 2r$$

سنجش کلاد
www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshClouds

۵۹ در مدار شکل زیر، اگر مقاومت رئوستا از مقادیر بسیار بزرگ تا صفر کاهش یابد، پتانسیل الکتریکی نقطهٔ A چند ولت و چگونه تغییر می‌کند؟



۱) ۲، کاهش می‌یابد.

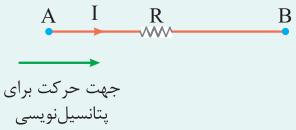
۲) ۸، کاهش می‌یابد.

۳) ۲، افزایش می‌یابد.

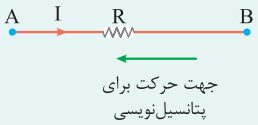
۴) ۸، افزایش می‌یابد.

درس Box

هرگاه در مدار در جهت جریان از مقاومت R یا r بگذریم، پتانسیل الکتریکی به اندازهٔ RI یا rI کاهش می‌یابد و اگر در خلاف جهت جریان حرکت کنیم پتانسیل الکتریکی به همان اندازه افزایش می‌یابد:



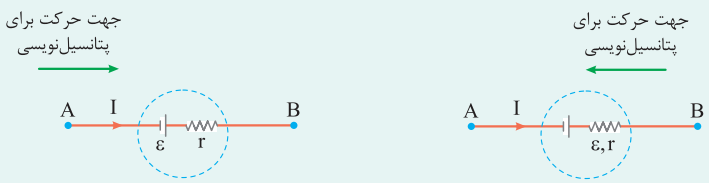
$$V_A - RI = V_B$$



$$V_B + RI = V_A$$

در هنگام عبور از درون باتری و از قطب منفی به مثبت، پتانسیل الکتریکی به اندازهٔ نیروی محرکه افزایش می‌یابد و بالعکس؛ بنابراین در پتانسیل‌نویسی بین دو نقطه هنگامی که به قطب منفی باتری رسیدیم، علامت مثبت می‌گذاریم و بالعکس.

توجه شود که این موضوع از جهت جریان مستقل است و در عملیات پتانسیل‌نویسی با مقاومت درونی باتری مانند یک مقاومت خارجی رفتار می‌کنیم:



$$V_A + \varepsilon - rI = V_B$$

$$V_B - \varepsilon + rI = V_A$$

پاسخ خیلی تشریحی ✔ در حالت اول اگر مقاومت را بی‌نهایت فرض کنیم، داریم:

$$R = \infty \Rightarrow I = 0 \Rightarrow V_A = \varepsilon_1 - \varepsilon_2 = 10\,V$$

و در حالت دوم، اگر $R = 0$ باشد، داریم:

$$R = 0 \Rightarrow I = \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{r_1 + r_2} = \frac{20-10}{1+4} \Rightarrow I = \frac{10}{5} = 2A$$

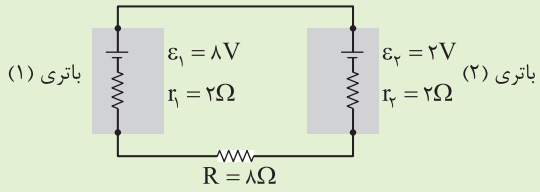
$$V'_A - \varepsilon_2 - r_2 I = 0 \Rightarrow V'_A - 10 - 8 = 0 \Rightarrow V'_A = 18\,V$$

بنابراین:

$$\Delta V_A = V'_A - V_A = 18 - 10 = 8\,V$$

سنجش کلاد
www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshClouds

۶۰ در مدار شکل زیر، اختلاف پتانسیل الکتریکی دو سر باتری (۱)، چند برابر اختلاف پتانسیل الکتریکی دو سر باتری (۲) است؟



۱) ۳

۲) ۴

۳) $\frac{۷}{۴}$

۴) $\frac{۷}{۳}$

پاسخ خیلی تشریحی ✔

گام اول: ابتدا جریان عبوری از مدار را به دست می‌آوریم:

$$I = \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{r_1 + r_2 + R} \Rightarrow I = \frac{8-2}{2+2+8} = 0/5\,A$$

گام دوم: اختلاف پتانسیل دو سر مولدهای ε_1 و ε_2 را به دست می‌آوریم:

$$V_1 = \varepsilon_1 - r_1 I$$

$$V_1 = 8 - 2\times 0/5 = 7\,V$$

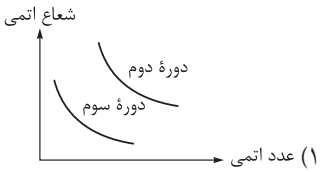
$$V_2 = \varepsilon_2 + r_2 I \quad (\text{چرا؟})$$

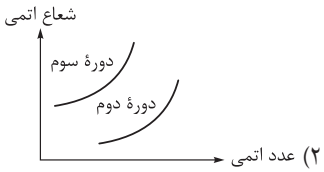
$$V_2 = 2 + 2\times 0/5 = 3\,V$$

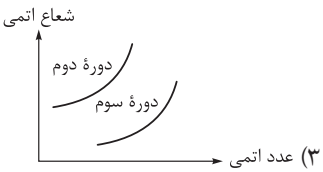
$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{۷}{۳}$$

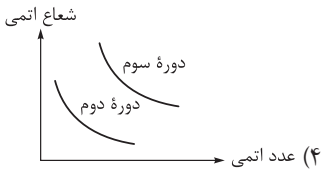
سنجش کلاد
www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshClouds

۶۱ کدام نمودار دربارهٔ روند کلی تغییر شعاع اتمی عنصرهای دوره‌های دوم و سوم جدول تناوبی، درست است؟

۱) 

۲) 

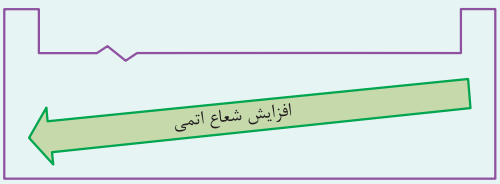
۳) 

۴) 

درس Box

روند تغییر شعاع اتمی در جدول دوره‌ای

در یک دوره از چپ به راست، شعاع اتمی عنصرها کاهش و در یک گروه از بالا به پایین، شعاع اتمی عنصرها افزایش می‌یابد؛ بنابراین هر چه عنصری در جدول دوره‌ای به سمت چپ‌تر و پایین‌تر باشد؛ شعاع آن بیشتر است و بالعکس!



پاسخ خیلی تشریحی ✔ می‌دانیم که در یک گروه جدول از بالا به پایین و با افزایش عدد اتمی عنصرها، شعاع اتمی بیشتر می‌شود؛ بنابراین منحنی بالایی مربوط به عنصرهای دورهٔ سوم و منحنی پایینی، مربوط به عنصرهای دورهٔ دوم جدول است. (رد گزینه‌های (۱) و (۳)) از طرفی در یک دورهٔ جدول از چپ به راست و با افزایش عدد اتمی عنصرها، شعاع اتمی کم‌تر می‌شود؛ بنابراین نمودار شعاع اتمی برحسب عدد اتمی، نزولی است و فقط گزینهٔ (۴) درست می‌باشد.

سنجش کلاد
www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshClouds

۶۲ چه تعداد از ویژگی‌های زیر را می‌توان به بیش از نیمی از عنصرهای دورهٔ سوم جدول تناوبی نسبت داد؟

یعنی ۵ عنصر یا بیشتر (دورهٔ سوم ۸ عنصر دارد.)

- هم‌گروه‌بودن با حداقل یک عنصر واسطه
- داشتن سطح صیقلی و براق
- تشکیل یون تک‌اتمی با آرایش گاز نجیب
- جامدبودن در دما و فشار اتاق
- توانایی از دست دادن الکترون

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۵

مشاوره یکی از مباحث مهم ابتدای فصل ۱، تسلط کامل بر عنصرهای دورهٔ سوم و گروه ۱۴ جدول تناوبی می‌باشد.

درس Box

عنصرهای دورهٔ سوم از سدیم (Na) و منیزیم (Mg) که متعلق به دستهٔ s هستند، شروع می‌شود و با عنصرهای دستهٔ p ادامه می‌یابد. این دوره شامل ۸ عنصر با عددهای اتمی ۱۱ تا ۱۸ است.

فلز		شبه‌فلز	نافلز			
۱۱ Na سدیم	۱۲ Mg منیزیم	۱۳ Al آلومینیم	۱۴ Si سیلیسیم	۱۵ P فسفر	۱۶ S گوگرد	۱۷ Cl کلر	۱۸ Ar آرگون

در دورهٔ سوم جدول تناوبی

- ۸ عنصر وجود دارد.
- ۳ فلز، ۱ شبه‌فلز و ۴ نافلز وجود دارد.
- ۴ عنصر (فلزها و شبه‌فلز) سطح صیقلی و براق دارند.
- در دما و فشار اتاق، ۶ عنصر به حالت جامد و ۲ عنصر به حالت گازند.
- ۶ عنصر می‌توانند یون تک‌اتمی تشکیل دهند.
- زیر لایه‌های ۳s و ۳p در عنصرها در حال پرشدن هستند.

پاسخ خیلی تشریحی ✓ ویژگی‌های سوم و چهارم را می‌توان به بیش از نیمی از عنصرهای دورهٔ سوم جدول تناوبی نسبت داد.

بررسی موارد:

- عناصر واسطه در گروه‌های ۳ تا ۱۲ جدول تناوبی قرار دارند؛ در صورتی که عناصر دورهٔ سوم، در گروه‌های ۱، ۲ و ۱۳ تا ۱۸ جدول جای دارند؛ بنابراین می‌توان گفت که هیچ‌یک از عنصرهای دورهٔ سوم جدول تناوبی با عناصر واسطه هم‌گروه نیستند. ×
- در دورهٔ سوم جدول تناوبی، ۸ عنصر وجود دارد که سه عنصر فلزی آن یا همان عناصر سدیم ($_{11}Na$)، منیزیم ($_{12}Mg$) و آلومینیم ($_{13}Al$) و یک عنصر شبه‌فلزی آن یا همان سیلسیم ($_{14}Si$)، سطح صیقلی و براق دارند؛ پس نسبت تعداد این عناصر به تعداد کل آن‌ها، برابر $\frac{۴}{۸}=\frac{۱}{۲}$ است که این مقدار از نیم بیشتر نمی‌باشد. ×
- به‌جز شبه‌فلز سیلسیم ($_{14}Si$) که الکترون به اشتراک می‌گذارد و به یون تک‌اتمی تبدیل نمی‌شود و گاز نجیب آرگون ($_{18}Ar$) که تمایلی به انجام واکنش ندارد، بقیهٔ عنصرهای دورهٔ سوم، می‌توانند یون تک‌اتمی با آرایش گاز نجیب تشکیل دهند. نسبت تعداد این عناصر به تعداد کل آن‌ها، برابر $\frac{۶}{۸}=\frac{۳}{۴}$ است که این مقدار از نیم بیشتر می‌باشد. ✓

$_{11}Na:[_{10}Ne]3s^1 \Rightarrow {}_{11}Na^+:[_{10}Ne]$

$_{12}Mg:[_{10}Ne]3s^2 \Rightarrow {}_{12}Mg^{2+}:[_{10}Ne]$

$_{13}Al:[_{10}Ne]3s^2 3p^1 \Rightarrow {}_{13}Al^{3+}:[_{10}Ne]$

$_{15}P:[_{10}Ne]3s^2 3p^3 \Rightarrow {}_{15}P^{3-}:[_{18}Ar]$

$_{16}S:[_{10}Ne]3s^2 3p^4 \Rightarrow {}_{16}S^{2-}:[_{18}Ar]$

$_{17}Cl:[_{10}Ne]3s^2 3p^5 \Rightarrow {}_{17}Cl^{-}:[_{18}Ar]$

سنجش کلاد
www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshClouds

- به جز عناصر گازی کلر ($_{17}Cl$) و آرگون ($_{18}Ar$)، بقیهٔ عناصر دورهٔ سوم، در دما و فشار اتاق، جامد هستند؛ پس نسبت تعداد این عناصر به تعداد کل آن‌ها، برابر $\frac{۳}{۴} = \frac{۶}{۸}$ است که این مقدار از نیم بیشتر می‌باشد. ✓
- از میان ۸ عنصر دورهٔ سوم جدول تناوبی، سه عنصر فلزی آن که شامل عناصر سدیم ($_{11}Na$)، منیزیم ($_{12}Mg$) و آلومینیم ($_{13}Al$) است، الکترون از دست می‌دهند و با تشکیل کاتیون به پایداری می‌رسند؛ پس نسبت تعداد این عناصر به تعداد کل آن‌ها برابر $\frac{۳}{۸}$ است که این مقدار از نیم بیشتر نمی‌باشد. ✗

نکته

همهٔ نافلزها به‌جز گازهای نجیب در شرایط مناسب، تمایل به گرفتن و یا به اشتراک گذاشتن الکترون و اغلب فلزها در شرایط مناسب، تمایل به از دست دادن الکترون و تبدیل‌شدن به کاتیون دارند.

www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshClouds

۶۳ دربارهٔ ترکیبی با فرمول شیمیایی C_6H_{12}، کدام مورد نادرست است؟

اتن (C_2H_4)

۱) این مولکول همانند ترکیبی با عنوان عمل‌آورندهٔ کشاورزی، ممکن است رنگ قرمز برم مایع را از بین ببرد.

۲) در اثر سوختن کامل هر مول از این هیدروکربن، ۹ مول گاز اکسیژن مصرف می‌شود.

۳) در ساختار آن به یقین، اتم کربنی وجود ندارد که به یک اتم هیدروژن متصل شده باشد.

۴) در ساختار این ترکیب، قطعاً نسبت تعداد پیوندهای $C-H$ به تعداد پیوندهای $C-C$، کم‌تر از ۴ است.

درس Box

آلکن‌ها و سیکلوآلکان‌ها

فرمول مولکولی سیکلوآلکان‌ها و آلکن‌های هم‌کربن مشابه است (C_nH_{2n})، ولی این دو دسته از هیدروکربن‌ها، ساختار متفاوتی دارند؛ بنابراین آلکن‌ها و سیکلوآلکان‌های هم‌کربن، ایزومر هستند. از اون جایی که سیکلوآلکان‌ها سیرشده هستند، برخلاف آلکن‌ها با H_2 و Br_2 واکنش نمی‌دهند.

آلکن‌ها به دلیل داشتن پیوند دوگانهٔ کربن ـ کربن، **سیرنشده** هستند؛ چون هر یک از این دو اتم کربن مربوط به پیوند دوگانه، به ۳ اتم متصل هستند و تمایل دارند به ۴ اتم متصل شوند؛ به همین دلیل آلکن‌ها واکنش‌پذیری بیشتری از آلکان‌ها داشته و در واکنش‌های شیمیایی گوناگونی شرکت می‌کنند. از واکنش‌های آلکن‌ها، می‌توان به واکنش افزایش هالوژن‌ها به آن‌ها اشاره کرد:

در این واکنش، پیوند یگانهٔ بین دو اتم هالوژن در مولکول دواتمی هالوژن و یکی از پیوندها در پیوند دوگانهٔ کربن ـ کربن شکسته شده و دو اتم هالوژن با پیوند یگانه به اتم‌های کربن وصل می‌شوند.

$$C_nH_{2n} + X_2 \rightarrow C_nH_{2n}X_2$$

مثال: در اثر واکنش برم مایع با گاز اتن، ترکیب سیرشدهٔ ۱،۲ ـ دی برموا‌تان به دست می‌آید. برم مایع قرمزرنگ است که در اثر انجام این واکنش و مصرف آن و تولید فراوردهٔ بی‌رنگ، رنگ قرمز آن از بین می‌رود.

$$CH_2=CH_2(g) + Br-Br(l) \rightarrow \underset{\text{(بی‌رنگ)}}{CH_2(Br)-CH_2(Br)} \quad (\text{مایع قرمز})$$

$$(C_2H_2 + Br_2 \rightarrow C_2H_2Br_2)$$

با اضافه‌کردن مقداری مایع بی‌رنگ ۱ ـ هگزن به برم قرمزرنگ، می‌توان رنگ برم را از بین برد:

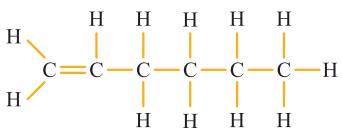
$$\text{۱ ـ هگزن}: CH_2=CH-CH_2-CH_2-CH_2-CH_3 + Br_2 \rightarrow \underset{\text{(بی‌رنگ)}}{CH_2(Br)-CH(Br)-CH_2-CH_2-CH_2-CH_3} \quad (\text{مایع قرمز})$$

پاسخ خیلی تشریحی

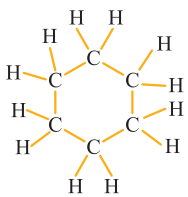
بررسی سایر گزینه‌ها:

گزینهٔ (۱): از گاز اتن که اولین عضو خانوادهٔ آلکن‌هاست، به عنوان عمل‌آورندهٔ کشاورزی استفاده می‌شود؛ این ترکیب همانند هگزن که نوعی آلکن محسوب می‌شود؛ می‌تواند رنگ قرمز برم را از بین ببرد.

ترکیبی با فرمول شیمیایی C_6H_{12} می‌تواند سیکلوهگزان از خانوادهٔ سیکلوآلکان‌ها یا هگزن (۱ ـ هگزن، ۲ـ هگزن یا ۳ ـ هگزن) از خانوادهٔ آلکن‌ها باشد که در ساختار سیکلوهگزان، همهٔ اتم‌های کربن، به دو اتم هیدروژن متصل شده‌اند و اتم کربنی وجود ندارد که به یک اتم هیدروژن متصل شده باشد؛ در صورتی که در ساختار هگزن، اتم‌های کربن به یک یا دو و یا سه اتم هیدروژن متصل شده‌اند.



۱ ـ هگزن (C_6H_{12})



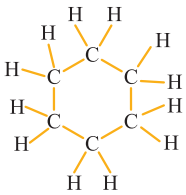
سیکلوهگزان (C_6H_{12})

گزینهٔ (۲): با توجه به معادلهٔ موازنه‌شدهٔ واکنش سوختن کامل ترکیب مورد نظر، در اثر سوختن هر مول هیدروکربن، ۹ مول اکسیژن مصرف می‌شود:

$$C_6H_{12} + 9O_2 \rightarrow 6CO_2 + 6H_2O$$

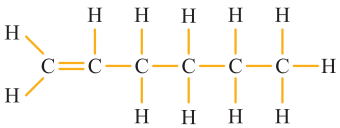
سنجش کلاد
www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshClouds

گزینهٔ (۴): نسبت تعداد پیوندهای $C-H$ به تعداد پیوندهای $C-C$ در ساختار ترکیب‌های سیکلوهگزان و هگزن به ترتیب برابر ۲ و ۳ است که هر دو نسبت کم‌تر از ۴ می‌باشد:



$$\frac{\text{تعداد پیوندهای } C-H}{\text{تعداد پیوندهای } C-C} = \frac{۱۲}{۶} = ۲$$

سیکلوهگزان $(C_۶H_{۱۲})$



$$\frac{\text{تعداد پیوندهای } C-H}{\text{تعداد پیوندهای } C-C} = \frac{۱۲}{۴} = ۳$$

۱- هگزان $(C_۶H_{۱۲})$

سنجش کلاد
www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshClouds

۶۴ براساس واکنش زیر، برای تولید ۱/۱ لیتر فراوردهٔ گازی با چگالی ۲ گرم بر لیتر، چند گرم فلز روی نیاز است؟ (بازده واکنش را ۸۰ درصد در نظر بگیرید؛ $Zn = ۶۵, O = ۱۶, N = ۱۴ : g.mol^{-۱}$)

$$۴Zn(s) + ۱۰HNO_۳(aq) \rightarrow ۴Zn(NO_۳)_۲(aq) + N_xO_y(g) + aH_۲O(l)$$ (موازنهٔ معادلهٔ واکنش کامل شود.)

۱) ۱۳/۰۰

۲) ۱۶/۲۵

۳) ۱۹/۰۰

۴) ۲۰/۳۰

پاسخ خیلی تشریحی ✔

گام اول: ابتدا معادلهٔ واکنش انجام‌شده را به صورت کامل موازنه می‌کنیم تا فرمول شیمیایی فراوردهٔ گازی واکنش مشخص شود، که این عمل با موازنه‌کردن تعداد اتم‌های تک‌تک عنصرها در معادلهٔ واکنش اتفاق می‌افتد:

$$۴Zn(s) + ۱۰HNO_۳(aq) \longrightarrow ۴Zn(NO_۳)_۲(aq) + N_xO_y(g) + aH_۲O(l)$$

موازنهٔ اتم Zn: $۴ = ۴$ ✓

موازنهٔ اتم H: $۱۰ = ۲a \Rightarrow a = \frac{۱۰}{۲} = ۵$

موازنهٔ اتم N: $۱۰ = ۸ + x \Rightarrow x = ۱۰ - ۸ = ۲$

موازنهٔ اتم O: $۳۰ = ۲۴ + y + a \Rightarrow y = ۳۰ - ۲۴ - ۵ = ۱$

$$\Rightarrow N_xO_y : N_۲O$$

گام دوم: با توجه به معادلهٔ موازنه‌شدهٔ واکنش، حجم گاز $N_۲O$ تولید شده، چگالی آن و بازده درصدی واکنش، جرم فلز روی مورد نیاز برای انجام واکنش را محاسبه می‌کنیم:

$$۴Zn(s) + ۱۰HNO_۳(aq) \longrightarrow ۴Zn(NO_۳)_۲(aq) + N_۲O(g) + ۵H_۲O(l)$$

$$\text{بازده درصدی} = \frac{\text{مقدار عملی}}{\text{مقدار نظری}} \times ۱۰۰ \Rightarrow N_۲O \text{ مقدار نظری} = ۱/۱ \times \frac{۱۰۰}{۸۰} L$$

$$۱/۱ \times \frac{۱۰۰}{۸۰} L N_۲O \times \frac{۲ g N_۲O}{۱ L N_۲O} \times \frac{۱ mol N_۲O}{۴۴ g N_۲O} \times \frac{۴ mol Zn}{۱ mol N_۲O} \times \frac{۶۵ g Zn}{۱ mol Zn} \times \frac{۱۰۰}{۸۰} = ۱۶/۲۵ g Zn$$

یه جور دیگه

استفاده از کسر تناسب:

$$\frac{\text{جرم} \times \frac{\text{بازده درصدی}}{۱۰۰}}{\underbrace{\text{جرم مولی} \times \text{ضریب}}_{Zn}} = \frac{\text{حجم} \times \text{چگالی}}{\underbrace{\text{جرم مولی} \times \text{ضریب}}_{N_۲O}} \Rightarrow \frac{x \times \frac{۸۰}{۱۰۰}}{۴ \times ۶۵} = \frac{۲ \times ۱/۱}{۱ \times ۴۴} \Rightarrow x = \frac{۶۵}{۴} = \frac{۶۴}{۴} + \frac{۱}{۴} = ۱۶/۲۵ g Zn$$

سنجش کلاد
www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshClouds

۶۵ کدام مطلب درست است؟

۱) گرمای ویژهٔ همهٔ مواد گازی از گرمای ویژهٔ مواد جامد، کم‌تر است.

ظرفیت گرمایی

۲) هر چه حاصل‌ضرب جرم در گرمای ویژهٔ یک جسم کم‌تر باشد؛ مقاومت آن جسم در برابر تغییر دما بیشتر خواهد بود.

۳) میانگین انرژی جنبشی مولکول‌های یک لیوان آب در دمای اتاق، نسبت به یک قطرهٔ آب در دمای اتاق، بیشتر است.

۴) اگر به جرم برابری از نان و سیب‌زمینی در دمای اتاق، گرمای یکسانی دهیم، در مدت‌زمان برابر، تغییر دمای سیب‌زمینی کم‌تر خواهد بود.

پاسخ خیلی تشریحی

بخش عمدهٔ نان و سیب‌زمینی را نشاسته تشکیل می‌دهد. از طرفی آب موجود در سیب‌زمینی، بیشتر از آب موجود در نان است؛ پس می‌توان گفت که گرمای ویژهٔ سیب‌زمینی در مقایسه با گرمای ویژهٔ نان، بیشتر می‌باشد. حالا اگر مقداری نان و سیب‌زمینی را با جرم و سطح یکسان در دمای اتاق داشته باشیم و به آن‌ها گرمای یکسانی دهیم، نان به علّت داشتن گرمای ویژهٔ کم‌تر نسبت به سیب‌زمینی، زودتر گرما از دست می‌دهد و سریع‌تر با محیط هم‌دما می‌شود؛ بنابراین در مدّت‌زمان برابر، تغییرات دمایی سیب‌زمینی، کم‌تر و تغییرات دمایی نان، بیشتر است.

بررسی سایر گزینه‌ها:

گزینهٔ (۱): نمی‌توان گفت که گرمای ویژهٔ همهٔ مواد گازی از گرمای ویژهٔ مواد جامد کم‌تر است؛ زیرا به طور مثال گرمای ویژهٔ گاز اکسیژن، بیشتر از گرمای ویژهٔ فلزهای آلومینیم، نقره و طلا می‌باشد.

ماده	گرمای ویژه $(J.g^{-1}.^{\circ}C^{-1})$	ماده	گرمای ویژه $(J.g^{-1}.^{\circ}C^{-1})$
آب	۴/۱۸۴	آلومینیم	۰/۹۰۰
سدیم کلرید	۰/۸۵۰	نقره	۰/۲۳۶
اتانول	۲/۴۳۰	طلا	۰/۱۲۸
کربن دی‌اکسید	۰/۸۴۰	اکسیژن	۰/۹۲۰

گزینهٔ (۲): حاصل‌ضرب جرم در گرمای ویژهٔ یک جسم، همان ظرفیت گرمایی آن است. هر چه ظرفیت گرمایی یک جسم کم‌تر باشد؛ دمای جسم زودتر تغییر می‌کند و مقاومت آن جسم در برابر تغییر دما کم‌تر خواهد بود.

گزینهٔ (۳): میانگین انرژی جنبشی مولکول‌ها در دو نمونهٔ هم‌دما، یکسان است؛ بنابراین با توجه به برابربودن دمای مولکول‌های آب در یک لیوان و یک قطره آب، میانگین انرژی جنبشی مولکول‌های آب در آن‌ها برابر می‌باشد.

سنجش کلاد
www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshClouds

۶۶ در یک آلکین، درصد جرمی اتم‌های هیدروژن برابر ۱۲/۵٪ است. چند مورد از مطالب زیر دربارهٔ آلکین مورد نظر، درست است؟ $(C=12, H=1: g.mol^{-1})$

- نام آن می‌تواند ۴ ـ هپتین باشد.
- جرم مولی این آلکین از جرم مولی آلکان هم‌کربن خود، ۴ درصد کم‌تر است.
- تفاوت تعداد اتم‌های کربن در ترکیب مورد نظر با تعداد اتم‌های کربن در سرگروه خانوادهٔ آروماتیک‌ها (بنزن C_6H_6) برابر ۳ است.
- شمار گروه‌های CH_2 در ساختار این هیدروکربن می‌تواند با شمار گروه‌های CH_3 در ساختار ۳،۲ ـ دی‌متیل بوتان برابر باشد.

۱) ۴ ۲) ۳ ۳) ۲ ۴) ۱

پاسخ خیلی تشریحی ✔ موارد دوم و چهارم درست هستند.

فرمول عمومی آلکین‌ها به صورت C_nH_{2n-2} است؛ بنابراین با توجه به درصد جرمی اتم‌های هیدروژن در آلکین مورد نظر، می‌توان فرمول شیمیایی آن را به دست آورد:

$$\text{درصد جرمی اتم‌های هیدروژن} = \frac{\text{جرم اتم‌های هیدروژن}}{\text{جرم کل آلکین مورد نظر}} \times 100 = \frac{2n-2}{14n-2} \times 100$$

$$\Rightarrow 12/5 = \frac{2n-2}{14n-2} \times 100 \Rightarrow \frac{2n-2}{14n-2} = \underbrace{0/125}_{\frac{125}{1000}=\frac{1}{8}} \Rightarrow 16n-16 = 14n-2 \Rightarrow n=7$$

$\Rightarrow$ فرمول شیمیایی آلکین مورد نظر: C_7H_{12}

بررسی عبارت‌ها:

- نام ۴ ـ هپتین برای آلکینی وجود ندارد و به جای این نام، باید از نام ۳ ـ هپتین استفاده کرد؛ زیرا در آلکین‌های راست‌زنجیر از ۴ کربن به بالا یعنی از C_4H_6 به بعد، پیوند سه‌گانه می‌تواند بین دو کربن کنار هم با موقعیت‌های مختلف در زنجیر قرار بگیرد. به همین دلیل باید زنجیرهٔ هیدروکربنی را از سمتی شماره‌گذاری کنیم که زودتر به پیوند سه‌گانه برسیم و باید شمارهٔ نخستین کربنی که پیوند سه‌گانه به آن متصل است را بنویسیم:

$$\overset{(7)}{CH_3}-\overset{(6)}{CH_2}-\overset{(5)}{CH_2}-\overset{(4)}{C}\equiv\overset{(3)}{C}-\overset{(2)}{CH_2}-\overset{(1)}{CH_3} \Rightarrow \text{۳ ـ هپتین}$$

- آلکان هم‌کربن با آلکین مورد نظر، هپتان با فرمول شیمیایی C_7H_{16} است:

جرم مولی آلکین C_7H_{12}: $(7\times12)+(12\times1)=96\ g.mol^{-1}$

جرم مولی آلکان C_7H_{16}: $(7\times12)+(16\times1)=100\ g.mol^{-1}$

$\Rightarrow$ درصد اختلاف جرم مولی آلکین و آلکان ۷ کربنه: $\frac{\text{جرم مولی } C_7H_{16} - \text{جرم مولی } C_7H_{12}}{\text{جرم مولی } C_7H_{16}} \times 100 = \frac{100-96}{100} \times 100 = 4$

- سرگروه ترکیب‌های آروماتیک، بنزن با فرمول شیمیایی C_6H_6 است که تفاوت تعداد اتم‌های کربن در این ترکیب با تعداد اتم‌های کربن در آلکین مورد نظر (C_7H_{12})، برابر $7-6=1$ می‌باشد.
- تنها ساختار ۱- هپتین آلکین مورد نظر دارای ۴ گروه CH_2 است؛ از طرفی شمار گروه‌های CH_3 در ۳،۲ ـ دی‌متیل بوتان برابر ۴ می‌باشد.

۱ ـ هپتین: $CH\equiv C-CH_2-CH_2-CH_2-CH_2-CH_3$ $\Rightarrow$ تعداد گروه‌های CH_2: ۴

آلکان ۲، ۳ ـ دی‌متیل بوتان: $CH_3-\underset{\displaystyle CH_3}{\underset{|}{CH}}-\underset{\displaystyle CH_3}{\underset{|}{CH}}-CH_3$ $\Rightarrow$ تعداد گروه‌های CH_3: ۴

سنجش کلاد
www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshClouds

۶۷ با فرض این‌که گرمای لازم برای تبخیر یک مول آمونیاک مایع، نصف گرمای لازم برای تبخیر یک مول آب است، مقایسهٔ مقدار گرمای مبادله‌شده در واکنش‌های زیر، در کدام گزینه به درستی نشان داده شده است؟ (همهٔ واکنش‌های داده‌شده، گرماده هستند.)

I) $۴NH_۳(g)+۳O_۲(g) \rightarrow ۲N_۲(g)+۶H_۲O(g)$

II) $۴NH_۳(l)+۳O_۲(g) \rightarrow ۲N_۲(g)+۶H_۲O(l)$

III) $۴NH_۳(g)+۳O_۲(g) \rightarrow ۲N_۲(g)+۶H_۲O(l)$

IV) $۴NH_۳(l)+۳O_۲(g) \rightarrow ۲N_۲(g)+۶H_۲O(g)$

۱) $II > III > IV > I$

۲) $IV > II > I > III$

۳) $III > I > II > IV$

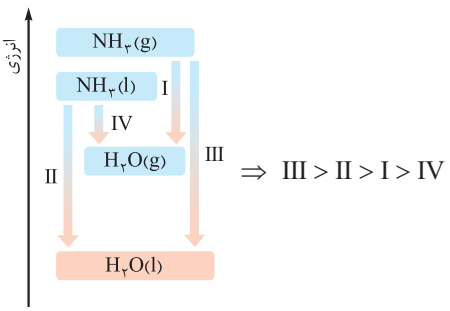
۴) $III > II > I > IV$

پاسخ خیلی تشریحی

همهٔ واکنش‌های داده‌شده، گرماده هستند. تنها با این تفاوت که حالت فیزیکی $NH_۳$ و $H_۲O$ در آن‌ها فرق می‌کند. از آن جایی که سطح انرژی یک ماده در حالت مایع، پایین‌تر از سطح انرژی همان ماده در حالت گاز است؛ پس خواهیم داشت:

سطح انرژی: $NH_۳(g) > NH_۳(l)$ ، $H_۲O(g) > H_۲O(l)$

از طرفی گرمای تبخیر مولی آمونیاک، نصف گرمای تبخیر مولی آب است؛ بنابراین برای تبخیر یک مول آب در مقایسه با تبخیر یک مول آمونیاک، گرمای بیشتری لازم است؛ پس می‌توان گفت که تفاوت سطح انرژی $H_۲O(l)$ و $H_۲O(g)$، بیشتر از تفاوت سطح انرژی $NH_۳(l)$ و $NH_۳(g)$ می‌باشد. لازم به ذکر است که در معادلهٔ موازنه‌شدهٔ واکنش، ضریب استوکیومتری آب، $\frac{۶}{۴}=۱/۵$ ضریب استوکیومتری آمونیاک می‌باشد؛ در نتیجه نمودار سطح انرژی واکنش‌های داده‌شده به صورت زیر است:



$\Rightarrow III > II > I > IV$

همان‌طور که مشاهده می‌کنید، به راحتی می‌توان فهمید که واکنش سوم، بیشترین مقدار گرمای مبادله‌شده و واکنش چهارم کم‌ترین مقدار گرمای مبادله‌شده را دارد (رد گزینه‌های (۱) و (۲))، امّا برای مقایسهٔ مقدار گرمای مبادله‌شده در واکنش‌های اول و دوم باید حواستان به مقایسهٔ گرمای تبخیر مولی آمونیاک و آب باشد!

سنجش کلاد
www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshClouds

۶۸ برای افزایش دمای ۱۰ گرم از هر یک از ماده‌های **A** و **B** به اندازهٔ ۱۰ درجهٔ سلسیوس، به ترتیب ۸۰۰ و ۴۰۰ ژول گرما نیاز است. اگر برای بالارفتن دمای ۱۰ گرم مخلوطی از این دو ماده به اندازهٔ ۱۰ درجهٔ سلسیوس، ۶۵۰ ژول گرما لازم باشد؛ اختلاف جرم دو مادهٔ **A** و **B** در مخلوط مورد نظر چند گرم است؟ (گرمای ویژهٔ دو مادهٔ **A** و **B** با مخلوط‌شدن تغییر نکرده است.)

۱) ۲/۵ ۲) ۳/۷۵ ۳) ۶/۲۵ ۴) ۴/۵

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: با توجه به جرم دو مادهٔ A و B، مقدار افزایش دمای آن‌ها و گرمای مورد نیاز برای این مواد با استفاده از رابطهٔ $Q = mc\Delta\theta$، گرمای ویژهٔ دو مادهٔ مورد نظر را به دست می‌آوریم:

$$Q_A = m_A c_A \Delta\theta_A \Rightarrow ۸۰۰ = ۱۰ \times c_A \times ۱۰ \Rightarrow c_A = \frac{۸۰۰}{۱۰ \times ۱۰} = ۸ J.g^{-۱}.^{\circ}c^{-۱}$$

$$Q_B = m_B c_B \Delta\theta_B \Rightarrow ۴۰۰ = ۱۰ \times c_B \times ۱۰ \Rightarrow c_B = \frac{۴۰۰}{۱۰ \times ۱۰} = ۴ J.g^{-۱}.^{\circ}c^{-۱}$$

گام دوم: از آن‌جایی که گرمای مورد نیاز برای بالارفتن دمای یک مخلوط متشکل از دو ماده از مجموع گرمای مورد نیاز برای بالارفتن دمای هر یک از مواد تشکیل‌دهندهٔ مخلوط به دست می‌آید؛ پس با توجه به جرم مخلوط مورد نظر، مقدار افزایش دمای آن و گرمای مورد نیاز برای این مخلوط، با استفاده از رابطهٔ $Q = mc\Delta\theta$، جرم هر یک از مواد A و B و سپس اختلاف جرم آن‌ها را در مخلوط مورد نظر محاسبه می‌کنیم:

$$m_A + m_B = ۱۰ \Rightarrow m_B = ۱۰ - m_A$$

$$Q_{\text{مخلوط}} = Q_A + Q_B$$

$$Q_{\text{مخلوط}} = (m_A c_A \Delta\theta_A) + (m_B c_B \Delta\theta_B)$$

$$\Rightarrow ۶۵۰ = (m_A \times ۸ \times ۱۰) + ((۱۰ - m_A) \times ۴ \times ۱۰) \Rightarrow ۶۵۰ = ۸۰ m_A + ۴۰۰ - ۴۰ m_A$$

$$\Rightarrow ۶۵۰ - ۴۰۰ = ۴۰ m_A \Rightarrow ۴۰ m_A = ۲۵۰ \Rightarrow m_A = \frac{۲۵۰}{۴۰} = ۶/۲۵ g, m_B = ۱۰ - ۶/۲۵ = ۳/۷۵ g$$

$$m_A - m_B = ۶/۲۵ - ۳/۷۵ = ۲/۵ g$$

سنجش کلاد
www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshClouds

۶۹ اگر در اثر واکنش ۳۸/۴ گرم نفتالن با مقدار کافی گاز هیدروژن، ترکیبی کاملاً سیرشده تولید شود؛ کدام موارد از مطالب زیر نادرست است؟ $(C=۱۲, H=۱: g.mol^{-۱})$

الف) اختلاف جرم فراوردهٔ به‌دست‌آمده با مقدار عددی جرم نفتالن واکنش‌داده، برابر ۳/۶ گرم است. ← $C_۴H_{۱۰}$

ب) شمار الکترون‌های پیوندی در ترکیب تولیدشده با مقدار عددی جرم مولی گاز سوخت فندک برابر است. ← $CH_۴$

پ) تعداد پیوندهای $C-C$ در ساختار فراورده، ۳ برابر تعداد پیوندهای اشتراکی در ساده‌ترین عضو خانوادهٔ آلکان‌ها است.

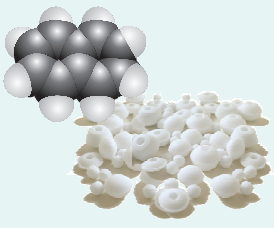
ت) نسبت شمار اتم‌های هیدروژن به شمار اتم‌های کربن در ساختار فراورده، یک واحد بیشتر از این نسبت در نفتالن است.

۱) الف ـ پ ۲) الف ـ ب

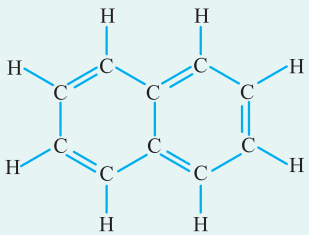
۳) پ ـ ت ۴) ب ـ پ

درس Box

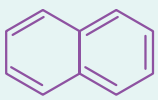
نفتالن $(C_{۱۰}H_۸)$ یکی از هیدروکربن‌های آروماتیک است که در آن دو حلقهٔ بنزنی به هم جوش خورده‌اند! این ترکیب که جامدی سفیدرنگ است، مدت‌ها به عنوان ضدبید برای نگهداری فرش و لباس کاربرد داشته است.



مدل فضاپرکن



ساختار لوویس



فرمول پیوند ـ خط

$C_{۱۰}H_۸$
فرمول مولکولی

همان‌طور که دیدید در ساختار نفتالن، ۲ حلقه، ۵ پیوند دوگانه و در مجموع ۲۴ پیوند اشتراکی وجود دارد. در ضمن هر مول نفتالن می‌تواند با ۵ مول گاز هیدروژن واکنش داده و به یک ترکیب سیرشده تبدیل شود:

$$C_{۱۰}H_۸ + ۵H_۲ \rightarrow C_{۱۰}H_{۱۸}$$

پاسخ خیلی تشریحی ✔ عبارت‌های «الف» و «پ» نادرست هستند.

بررسی عبارت‌ها:

الف) هر مول نفتالن به دلیل وجود پنج پیوند دوگانه با ۵ مول گاز هیدروژن $(H_۲)$ واکنش می‌دهد و ترکیبی کاملاً سیرشده با فرمول شیمیایی $C_{۱۰}H_{۱۸}$ تولید می‌کند. در این واکنش اختلاف جرم مولکول به‌دست‌آمده با جرم نفتالن واکنش‌داده، همان جرم گاز هیدروژن افزوده‌شده می‌باشد:

$$C_{۱۰}H_۸ + ۵H_۲ \rightarrow C_{۱۰}H_{۱۸}$$

$$۳۸/۴\ g\,C_{۱۰}H_۸ \times \frac{۱\ mol\,C_{۱۰}H_۸}{۱۲۸\ g\,C_{۱۰}H_۸} \times \frac{۵\ mol\,H_۲}{۱\ mol\,C_{۱۰}H_۸} \times \frac{۲\ g\,H_۲}{۱\ mol\,H_۲} = \frac{۳۸/۴ \times ۵ \times ۲}{۱۲۸} = ۳\ g\,H_۲$$

(۰/۳ روی ۳۸/۴ و ۱ روی ۱۲۸)

ب)

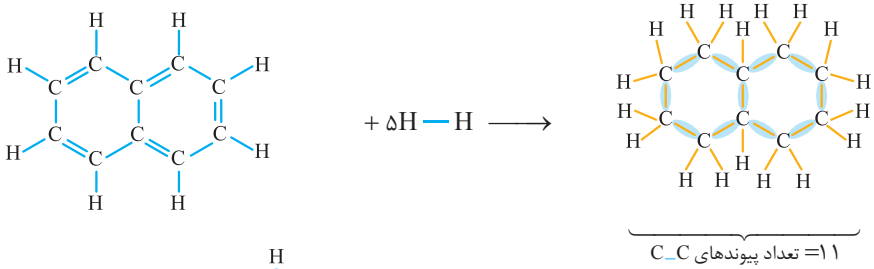
نکته هیدروکربن‌ها از دو عنصر هیدروژن و کربن تشکیل شده‌اند. از اون‌جایی که هر اتم کربن، ۴ الکترون و هر اتم هیدروژن، ۱ الکترون به اشتراک می‌گذارد و از طرفی هر پیوند اشتراکی شامل دو الکترون است، خواهیم داشت:

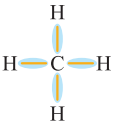
$$\text{تعداد پیوندهای اشتراکی در هیدروکربن‌ها} = \frac{(\text{تعداد اتم‌های هیدروژن} \times ۱) + (\text{تعداد اتم‌های کربن} \times ۴)}{۲}$$

با توجه به توضیحات داده‌شده، ترکیب تولیدشده از واکنش میان مولکول‌های نفتالن و گاز هیدروژن، هیدروکربنی با فرمول شیمیایی $C_{۱۰}H_{۱۸}$ است. تعداد پیوندهای اشتراکی در مولکول مورد نظر برابر $\frac{(۴\times۱۰)+(۱\times۱۸)}{۲} = \frac{۴۰+۱۸}{۲} = \frac{۵۸}{۲} = ۲۹$ می‌باشد. از آن‌جایی که هر پیوند اشتراکی شامل دو الکترون پیوندی است، پس شمار الکترون‌های پیوندی در این ترکیب برابر $۲۹\times۲ = ۵۸$ می‌باشد. از طرفی گاز سوخت فندک، بوتان با فرمول شیمیایی $C_۴H_{۱۰}$ است که مقدار جرم مولی آن نیز برابر $(۴\times۱۲)+(۱۰\times۱) = ۴۸+۱۰ = ۵۸$ می‌باشد.

سنجش کلاد
www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshClouds

پ) ساده‌ترین عضو خانوادهٔ آلکان‌ها، متان با فرمول شیمیایی CH_4 است که تعداد پیوندهای $C-C$ در فراوردهٔ واکنش گفته‌شده، $\frac{11}{4} = 2/75$ برابر تعداد پیوندهای اشتراکی در متان می‌باشد:



متان، ساده‌ترین عضو خانوادهٔ آلکان‌ها:  $\Rightarrow$ تعداد پیوندهای اشتراکی = ۴

ت)

$$\left.\begin{array}{l} C_{10}H_{18}: \text{هیدروکربن تولیدشده از واکنش میان نفتالن و گاز هیدروژن} \Rightarrow \frac{\text{شمار اتم‌های هیدروژن}}{\text{شمار اتم‌های کربن}} = \frac{18}{10} = 1/8 \\ C_{10}H_8: \text{نفتالن} \Rightarrow \frac{\text{شمار اتم‌های هیدروژن}}{\text{شمار اتم‌های کربن}} = \frac{8}{10} = 0/8 \end{array}\right\} \Rightarrow 1/8 - 0/8 = 1$$

سنجش کلاد
www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshClouds

۷۰ اگر آرایش الکترونی یون‌های A^{2+} و M^{3+} به ترتیب به $3p^6$ و $3d^{10}$ ختم شود، تفاوت عدد اتمی دو عنصر A و M، برابر با عدد اتمی ..... است.

۱) اتم سازندهٔ هالوژن مایع — $_{35}Br$

۲) اولین فلز واسطهٔ جدول دوره‌ای — $_{21}Sc$

۳) فلز قلیایی با رنگ شعلهٔ زرد — $_{11}Na$

۴) فلز قلیایی با نماد شیمیایی تک‌حرفی — $_{19}K$

مشاوره این سؤال، شبیه‌ساز یکی از گزینه‌های کنکورهای اخیر بوده است.

پاسخ خیلی تشریحی

عنصری که آرایش الکترونی بیرونی‌ترین زیرلایهٔ یون A^{2+} آن به $3p^6$ ختم می‌شود، کلسیم $(_{20}Ca)$ است:

$$_{20}Ca: 1s^2 2s^2 2p^6 3s^2 3p^6 4s^2 \Rightarrow {}_{20}Ca^{2+}: 1s^2 2s^2 2p^6 3s^2 \underline{3p^6}$$

عنصری که آرایش الکترونی بیرونی‌ترین زیرلایهٔ یون M^{3+} آن به $3d^{10}$ ختم می‌شود، گالیم $(_{31}Ga)$ است:

$$_{31}Ga: 1s^2 2s^2 2p^6 3s^2 3p^6 3d^{10} 4s^2 4p^1 \Rightarrow {}_{31}Ga^{3+}: 1s^2 2s^2 2p^6 3s^2 3p^6 \underline{3d^{10}}$$

اختلاف عدد اتمی دو عنصر A و M برابر $31-20=11$ است. حال به بررسی تک‌تک گزینه‌ها می‌پردازیم تا عنصری با عدد اتمی ۱۱ را بیابیم:

گزینهٔ (۱): هالوژن‌ها همان عناصر گروه ۱۷ جدول تناوبی هستند و تنها هالوژن مایع، برم (Br_2) است که اتم سازندهٔ این عنصر (Br)، قبل از گاز نجیب کریپتون $(_{36}Kr)$ می‌باشد؛ بنابراین عدد اتمی این عنصر، $36-1=35$ است. ✗

گزینهٔ (۲): فلزات واسطه در گروه‌های ۳ تا ۱۲ و در دوره‌های چهارم تا هفتم جدول تناوبی قرار دارند. اوّلین فلز واسطه در گروه ۳ و دورهٔ چهارم جدول جای دارد و سه عنصر بعد از گاز نجیب آرگون $(_{18}Ar)$ می‌باشد؛ بنابراین عدد اتمی آن، $18+3=21$ است. ✗

گزینهٔ (۳): فلزات قلیایی همان عناصر گروه ۱ جدول تناوبی هستند و فلز قلیایی با رنگ شعلهٔ زرد، سدیم (Na) است که این عنصر بعد از گاز نجیب نئون $(_{10}Ne)$ می‌باشد؛ بنابراین عدد اتمی این عنصر، $10+1=11$ است. ✓

گزینهٔ (۴): فلز قلیایی با نماد شیمیایی تک‌حرفی، پتاسیم (K) است که این عنصر بعد از گاز نجیب آرگون $(_{18}Ar)$ می‌باشد؛ بنابراین عدد اتمی این عنصر، $18+1=19$ است. ✗

کدام مورد، نادرست است؟ *(ریاضی خارج - تیر ۱۴۰۳)*

۱) ۴ عنصر در دورهٔ سوم جدول تناوبی، جریان برق را از خود عبور می‌دهند.

۲) در دورهٔ چهارم جدول تناوبی، بیرونی‌ترین زیرلایه در آرایش الکترونی ۸ عنصر واسطه، $4s^2$ است.

۳) تفاوت عدد اتمی پانزدهمین عنصر دستهٔ d با عدد اتمی سیزدهمین عنصر دستهٔ p در جدول تناوبی، برابر با عدد اتمی دومین فلز قلیایی با رنگ شعلهٔ زرد است.

۴) اگر آرایش الکترونی یون های A^{3+} و M^{2+}، به ترتیب به $3p^6$ و $4s^2$ ختم شود، تفاوت عدد اتمی دو عنصر A و M، برابر عدد اتمی فلز قلیایی با رنگ شعلهٔ زرد است.

سنجش کلاد
www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshClouds

$n + (2n + 2) = 20$

۷۱ هر مولکول از آلکان راست‌زنجیر A دارای ۲۰ اتم است و در ساختار آلکان راست‌زنجیر B، ۱۰ پیوند C — H وجود دارد. نقطهٔ جوش آلکان‌های راست‌زنجیر A و B در فشار ۱ atm به ترتیب کدام اعداد برحسب درجهٔ سلسیوس می‌توانند باشند؟

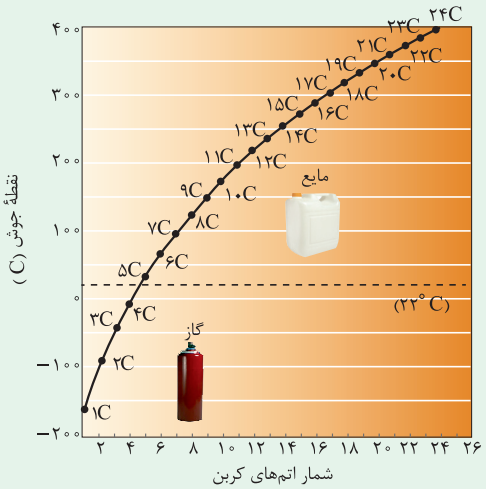
یعنی ۱۰ اتم هیدروژن دارد

۱) ۳۶٫۶۹ ۲) −۱٫۶۹

۳) ۵۶٫۳۸ ۴) −۵۰٫−۱۲

نکته

۱) باتوجه به نمودار زیر، نقطهٔ جوش چهار آلکان راست‌زنجیر نخست یعنی متان (CH_4)، اتان (C_2H_6)، پروپان (C_3H_8) و بوتان (C_4H_{10})، کم‌تر از صفر درجهٔ سلسیوس است.



از آن‌جا که هر ترکیبی در دمای بالاتر از دمای جوش خود به حالت گاز است، پس این چهار هیدروکربن در دمای ۲۲°C گاز *تشریف دارند!*

۲) هیدروکربن‌ها از دو عنصر هیدروژن و کربن تشکیل شده‌اند. تعداد پیوندهای C — H در هیدروکربن‌ها با تعداد اتم‌های هیدروژن در آن‌ها برابر است. با توجه به این‌که فرمول عمومی آلکان‌ها، C_nH_{2n+2} می‌باشد، پس تعداد پیوندهای C — H در آلکان‌ها، $2n + 2$ است.

پاسخ خیلی تشریحی

فرمول عمومی آلکان‌ها، C_nH_{2n+2} است؛ بنابراین آلکان راست‌زنجیری که هر مولکول آن دارای ۲۰ اتم می‌باشد، هگزان با فرمول شیمیایی C_6H_{14} است:

C_nH_{2n+2} :تعداد اتم‌ها در آلکان راست‌زنجیر $n + 2n + 2 = 3n + 2 \Rightarrow 20 = 3n + 2 \Rightarrow 3n = 18 \Rightarrow n = \frac{18}{3} = 6$

$\Rightarrow$ فرمول شیمیایی آلکان A: C_6H_{14}

با توجه به این‌که تعداد پیوندهای C — H در ساختار آلکان‌های راست‌زنجیر، $2n + 2$ است، پس آلکان راست‌زنجیری که هر مولکول آن دارای ۱۰ پیوند C — H می‌باشد، بوتان با فرمول شیمیایی C_4H_{10} است:

C_nH_{2n+2} در آلکان راست‌زنجیر C — H :تعداد پیوندهای $2n+2=10 \Rightarrow 2n=10-2 \Rightarrow 2n=8 \Rightarrow n=\frac{8}{2}=4$

$\Rightarrow$ فرمول شیمیایی آلکان B: C_4H_{10}

آلکان راست‌زنجیر A در دمای اتاق مایع است؛ زیرا تعداد اتم‌های کربن در آن بالاتر از ۴ می‌باشد؛ بنابراین نقطهٔ جوش آن در فشار ۱ atm بالاتر از ۲۲ درجهٔ سلسیوس است؛ پس گزینهٔ (۴) غلط می‌باشد.

آلکان راست‌زنجیر B گاز است؛ زیرا تعداد اتم‌های کربن در آن برابر ۴ می‌باشد؛ بنابراین نقطهٔ جوش آن در فشار ۱ atm کم‌تر از ۲۲ درجهٔ سلسیوس است؛ پس گزینه‌های (۱) و (۳) نیز غلط می‌باشند و تنها گزینهٔ (۲) درست است.

سنجش کلاد
www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshClouds

۷۲ ۲۰ گرم از کربنات فلز X با خلوص ۸۴ درصد، مطابق معادلهٔ زیر تجزیه شده و ۸ گرم اکسید فلز تولید می‌شود. جرم مولی فلز، چند برابر جرم مولی گاز اکسیژن است؟ $(O=16, C=12 : g.mol^{-1})$

$$XCO_3(s) \longrightarrow XO(s) + CO_2(g)$$

۱) ۰/۸ ۲) ۰/۷۵ ۳) ۱/۶ ۴) ۱/۵

پاسخ خیلی تشریحی ابتدا باید با توجه به معادلهٔ موازنه‌شدهٔ واکنش انجام‌شده و محاسبات استوکیومتری، جرم مولی فلز X را به دست آوریم:

$$XCO_3(s) \longrightarrow XO(s) + CO_2(g)$$

جرم مولی XCO_3: $M + 12 + 3(16) = M + 12 + 48 = (M+60)\,g.mol^{-1}$

جرم مولی XO: $(M+16)\,g.mol^{-1}$

$$20\,g\,XCO_3\text{ ناخالص} \times \frac{84\,g\,XCO_3\text{ خالص}}{100\,g\,XCO_3\text{ ناخالص}} \times \frac{1\,mol\,XCO_3}{(M+60)\,g\,XCO_3\text{ خالص}} \times \frac{1\,mol\,XO}{1\,mol\,XCO_3} \times \frac{(M+16)\,g\,XO}{1\,mol\,XO} = 8\,g\,XO$$

$$\Rightarrow \frac{\overset{1}{\cancel{20}} \times 84 \times (M+16)}{\underset{5}{\cancel{100}} \times (M+60)} = 8 \Rightarrow 40M + 2400 = 84M + 1344 \Rightarrow 44M = 1056$$

$$\Rightarrow M = \frac{1056}{44} = 24\,g.mol^{-1}$$

یه‌جور دیگه استفاده از کسر تناسب:

$$\frac{\frac{\text{درصد خلوص}}{100} \times \text{جرم ناخالص}}{\underbrace{\text{جرم مولی} \times \text{ضریب}}_{XCO_3}} = \frac{\text{جرم}}{\underbrace{\text{جرم مولی} \times \text{ضریب}}_{XO}} \Rightarrow \frac{20 \times \frac{84}{100}}{1 \times (M+60)} = \frac{8}{1 \times (M+16)} \Rightarrow$$

$$\overset{1}{\cancel{20}} \times \frac{84}{\underset{5}{\cancel{100}}} \times (M+16) = 8 \times (M+60) \Rightarrow 84M + 1344 = 40M + 2400$$

$$\Rightarrow 44M = 1056 \Rightarrow M = \frac{1056}{44} = 24\,g.mol^{-1}$$

در نهایت نسبت جرم مولی فلز مورد نظر به جرم مولی گاز اکسیژن (O_2) را محاسبه می‌کنیم:

$$\frac{\text{جرم مولی فلز } X}{\text{جرم مولی گاز } O_2} = \frac{\overset{3}{\cancel{24}}}{2 \times \underset{2}{\cancel{16}}} = 0/75$$

گول نخوری اگر نسبت جرم مولی فلز به اتم اکسیژن (O) را حساب کنی $(\frac{24}{16} = 1/5)$، به اشتباه به گزینهٔ (۴) می‌رسی!

سنجش کلاد
www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshClouds

۷۳ چه تعداد از واکنش‌های زیر به طور طبیعی انجام‌پذیر هستند؟

الف) $3Ti(s)+2Fe_2O_3(s) \xrightarrow{\Delta} 4Fe(s)+3TiO_2(s)$

ب) $Zn(s)+2AgNO_3(aq) \longrightarrow Zn(NO_3)_2(aq)+2Ag(s)$

پ) $Zn(s)+CuSO_4(aq) \longrightarrow ZnSO_4(aq)+Cu(s)$

ت) $C(s)+2Cu_2O(s) \xrightarrow{\Delta} CO_2(g)+4Cu(s)$

۱) ۴ ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

درس Box

در هر واکنش شیمیایی که به طور طبیعی انجام می‌شود، واکنش‌پذیری فراورده‌ها از واکنش‌دهنده‌ها کم‌تر است؛ پس اگر یک واکنش به ما بدهند که در دو طرفش یه عنصر آزاد وجود داشته باشد و *بگن به طور طبیعی انجام می‌شه؛ ما فیلی سریع می‌تونیم* واکنش‌پذیری دو عنصر آزاد در دو طرف معادله را با هم مقایسه کنیم.

$$\underset{\text{عنصر}}{C} + \underset{\text{ترکیب}}{AB} \longrightarrow \underset{\text{عنصر}}{B} + \underset{\text{ترکیب}}{AC} \Rightarrow \text{واکنش‌پذیری: } B < C$$

در معادلهٔ کلی بالا، واکنش‌پذیری C از B بیشتر بوده است، به همین دلیل میل بیشتری به تشکیل ترکیب داشته؛ *از این رو جاش* B *رو با* C *عوض کرده!*

پاسخ خیلی تشریحی ✔ همهٔ واکنش‌های داده شده به طور طبیعی انجام‌پذیر هستند. *کافیه* در هر مورد، واکنش‌پذیری دو عنصر مربوطه را مقایسه کنیم:

الف) واکنش‌پذیری فلز تیتانیم از فلز آهن بیشتر است، به همین دلیل می‌تواند جانشین فلز آهن در ترکیبش شود:

$$3Ti(s)+2Fe_2O_3(s) \xrightarrow{\Delta} 3TiO_2(s)+4Fe(s)$$

ب) واکنش‌پذیری فلز روی از فلز نقره بیشتر است، به همین دلیل می‌تواند جانشین فلز نقره در ترکیبش شود:

$$Zn(s)+2AgNO_3(aq) \longrightarrow Zn(NOL_3)_2(aq)+2Ag(s)$$

پ) واکنش‌پذیری فلز روی از فلز مس بیشتر است، به همین دلیل می‌تواند جانشین فلز مس در ترکیبش شود:

$$Zn(s)+CuSO_4(aq) \longrightarrow Cu(s)+ZnSO_4(aq)$$

ت) واکنش‌پذیری کربن از فلز مس بیشتر است، به همین دلیل می‌تواند جانشین فلز مس در ترکیبش شود:

$$C(s)+2Cu_2O(s) \xrightarrow{\Delta} CO_2(g)+4Cu(s)$$

سنجش کلاد
www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshClouds

۷۴ کدام موارد از مطالب زیر، دربارهٔ ششمین عنصر دستهٔ d جدول تناوبی درست است؟ $_{۲۶}Fe$

الف) استخراج آن از سنگ معدن، دشوارتر از استخراج فلز مس از سنگ معدن است.

ب) یون دو بار مثبت آن، یکی از سازنده‌های زنگ آهن است.

پ) می‌توان درصد قابل توجهی از سنگ معدن آن را در فرایند استخراج به فلز تبدیل کرد.

ت) مصرف سالانهٔ آن در جهان از مصرف سالانهٔ فلز طلا در جهان بیشتر است.

۱) ب و پ ۲) الف و پ

۳) ب و ت ۴) الف و ت

پاسخ خیلی تشریحی

عبارت‌های «الف» و «ت» دربارهٔ ششمین عنصر دستهٔ d جدول تناوبی درست هستند.

عناصر دستهٔ d جدول تناوبی در گروه‌های ۳ تا ۱۲ و دوره‌های چهارم تا هفتم جدول قرار دارند؛ پس می‌توان فهمید که ششمین عنصر دستهٔ d جدول تناوبی، در گروه ۸ دورهٔ چهارم جدول جای دارد؛ از آن‌جایی که این فلز، ۸ عنصر بعد از گاز نجیب آرگون $(_{۱۸}Ar)$ است؛ عدد اتمی آن برابر $۱۸ + ۸ = ۲۶$ می‌باشد: $_{۲۶}Fe : [_{۱۸}Ar]۳d^{۶}۴s^{۲}$

بررسی عبارت‌ها:

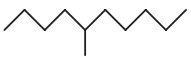
الف) هر چه واکنش‌پذیری یک فلز بیشتر باشد، تمایل آن برای تبدیل‌شدن به ترکیب بیشتر است. به عبارت دیگر ترکیب‌هایش پایدارتر از خودش هستند؛ بنابراین استخراج آن فلز دشوارتر خواهد بود. از آن‌جایی که واکنش‌پذیری فلز آهن، بیشتر از واکنش‌پذیری فلز مس است؛ پس می‌توان گفت که استخراج فلز آهن از سنگ معدن، دشوارتر از استخراج فلز مس از سنگ معدن می‌باشد.

ب) در زنگ آهن یون سه بار مثبت آهن $(Fe^{۳+})$ وجود دارد.

پ) در فرایند استخراج فلزها تنها درصد کمی از سنگ معدن به فلز تبدیل می‌شود.

ت) آهن فلزی است که در سطح جهان بیشترین مصرف سالانه را در بین صنایع گوناگون دارد؛ بنابراین می‌توان گفت که مصرف سالانهٔ فلز آهن در جهان از مصرف سالانهٔ فلز طلا بیشتر است.

www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshClouds

۷۵ اگر فرمول مولکولی ترکیب $(C_2H_5)_2CH(CH_2)_xC(CH_3)_3$ با  یکسان باشد، نام این ترکیب کدام است؟

۱) ۴ ـ اتیل ـ ۲، ۲ ـ دی‌متیل هگزان

۲) ۳ ـ اتیل ـ ۶، ۶ ـ دی‌متیل هپتان

۳) ۵ ـ اتیل ـ ۲، ۲ ـ دی‌متیل هپتان

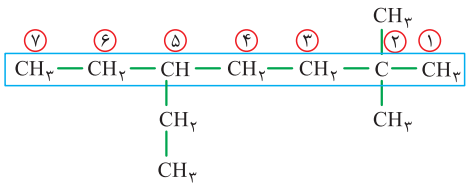
۴) ۶ ـ اتیل ـ ۲، ۲ ـ دی‌متیل اوکتان

پاسخ خیلی تشریحی

ترکیبی با ساختار پیوند ـ خط  دارای ۱۱ اتم کربن است. از آن‌جایی که فرمول مولکولی ترکیب مورد نظر با ساختار پیوند ـ خط داده‌شده یکسان می‌باشد، پس ترکیب مورد نظر نیز دارای ۱۱ اتم کربن می‌باشد؛ بنابراین خواهیم داشت:

$$\underbrace{(C_2H_5)_2}_{4C}\underbrace{CH}_{1C}\underbrace{(CH_2)_x}_{xC}\underbrace{C}_{1C}\underbrace{(CH_3)_3}_{3C} \Rightarrow \text{تعداد اتم‌های کربن در ترکیب}: 4+1+x+1+3 \Rightarrow 9+x=11 \Rightarrow x=11-9=2$$

در نتیجه می‌توان گفت که فرمول مولکولی ترکیب مورد نظر، به صورت $(C_2H_5)_2CH(CH_2)_2C(CH_3)_3$ است. CH_3 فقط می‌تواند در دو سر زنجیر اصلی و یا به صورت شاخهٔ فرعی متیل باشد. C_2H_5 را نیز به صورت $-CH_2-CH_3$ می‌نویسیم؛ بنابراین ساختار گسترده و نام آلکان داده‌شده به صورت زیر است:



۵ ـ اتیل ـ ۲، ۲ ـ دی‌متیل هپتان

سنجش کلاد
www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshClouds

۷۶ با توجه به جدول زیر، کدام مطلب نادرست است ؟

نام سوخت	گرمای آزادشده (kJ / g)	فراورده‌های سوختن	مقدار کربن دی‌اکسید به ازای هر کیلوژول انرژی تولیدشده (g)
بنزین	A	CO_2, CO, H_2O	X
زغال‌سنگ	B	Z, CO_2, NO_2, CO, H_2O	Y

۱) تنوع عنصرهای سازندهٔ بنزین نسبت به زغال‌سنگ، کم‌تر است.

۲) مقدار A، بیشتر از مقدار B و مقدار X، کم‌تر از مقدار Y است.

۳) یکی از راه‌های بهبود کارایی زغال‌سنگ، انجام واکنش $Z(g) + CaO(s) \rightarrow$ است.

۴) از انحلال فراوردهٔ نیتروژن‌دار حاصل از سوختن زغال‌سنگ در آب، محیطی بازی ایجاد می‌شود.

پاسخ خیلی تشریحی ✔ فراوردهٔ نیتروژن‌دار حاصل از سوختن زغال‌سنگ، گاز NO_2 است. از آن‌جا که از انحلال اکسیدهای نافلزی در آب، ترکیب اسیدی تشکیل می‌شود؛ بنابراین می‌توان گفت که از انحلال گاز NO_2 در آب، محیطی اسیدی (نه بازی!) ایجاد می‌شود.

بررسی سایر گزینه‌ها:

گزینهٔ (۱): با توجه به فراورده‌های حاصل از سوختن زغال‌سنگ و بنزین در جدول داده‌شده، زغال‌سنگ از اتم‌های S, N, O, H, C و بنزین از اتم‌های C و H تشکیل شده است؛ بنابراین تنوع عنصرهای سازنده در بنزین نسبت به زغال‌سنگ، کم‌تر می‌باشد.

گزینهٔ (۲): گرمای آزادشده در بنزین $(48\,kJ/g)$ بیشتر از گرمای آزادشده در زغال‌سنگ $(30\,kJ/g)$ است؛ بنابراین مقدار A از مقدار B بیشتر می‌باشد. از طرفی مقدار کربن دی‌اکسید به ازای هر کیلوژول انرژی تولیدشده در بنزین $(0/065\,g)$، کم‌تر از مقدار کربن دی‌اکسید به ازای هر کیلوژول انرژی تولیدشده در زغال‌سنگ $(0/104\,g)$ است؛ بنابراین مقدار X از مقدار Y کم‌تر می‌باشد.

گزینهٔ (۳): Z همان گاز SO_2 است. یکی از راه‌های بهبود کارایی زغال‌سنگ به منظور حذف گاز SO_2، انجام واکنش $SO_2(g) + CaO(s) \rightarrow CaSO_3(s)$ می‌باشد.

www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshClouds

۷۷ یک قطعهٔ فلز مس به جرم ۵۰ گرم و دمای $60^\circ C$ در ۲۵ گرم آب با دمای $5^\circ C$ فرو برده می‌شود. کدام‌یک از مطالب زیر، درست است؟ (از تبادل گرمایی با محیط صرف نظر شود و ظرفیت گرمایی ویژهٔ آب، اتانول و مس به ترتیب برابر ۴/۲، ۲/۴ و ۰/۴ ژول بر گرم بر درجهٔ سلسیوس است.)

۱) طی این فرایند، تفاوت میانگین تندی حرکت ذرات دو ماده افزایش می‌یابد.

۲) مقدار تغییر انرژی گرمایی در قطعهٔ فلز مس، بیشتر از مقدار تغییر انرژی گرمایی در آب است.

۳) در این تعادل گرمایی، تغییرات دمایی قطعهٔ فلز مس، ۵/۲۵ برابر تغییرات دمای آب است.

۴) اگر به جای آب، اتانول با جرم و دمای یکسان به کار رود، دمای پایانی قطعهٔ فلز مس پایین‌تر خواهد بود.

درس Box

مسئله‌هایی از جنس هم‌دمایی!

در یه سری از مسائل گرمایی که تو درس فیزیک هم *فیلی باهاش سروکار دارین!* دو ماده با دمای متفاوت در تماس با هم قرار می‌گیرند تا هم‌دما شوند و *این وسط یه چیزی مچوله!* مثل دمای نهایی، گرمای ویژهٔ یکی از مواد یا... . وقتی دو ماده با دمای متفاوت را در تماس با هم قرار می‌دهیم، ماده با دمای بالاتر گرما از دست می‌دهد و ماده با دمای پایین‌تر، همین مقدار گرما را جذب می‌کند تا جایی که به یک دما برسند.

برای حل این مسائل با صرف نظر از اتلاف گرما، کافی است مقدار گرمایی که از یکی از مواد (مثلاً A) از دست می‌دهد را با مقدار گرمایی که ماده دیگر (مثلاً B) جذب می‌کند، برابر قرار دهیم:

$$|Q_A| = |Q_B|$$

اگر A گرما از دست بدهد: $Q_A = m_A c_A \underbrace{\Delta\theta_A}_{<0}$

اگر B گرما بگیرد: $Q_B = m_B c_B \underbrace{\Delta\theta_B}_{>0}$

$$\Rightarrow |m_A c_A \Delta\theta_A| = |m_B c_B \Delta\theta_B|$$

اگر دمای اولیهٔ A و B را به ترتیب $\theta_1(A)$ و $\theta_1(B)$ و دمای نهایی هر دو را θ_2 در نظر بگیریم، خواهیم داشت:

$$|m_A c_A \underbrace{(\theta_2 - \theta_1(A))}_{<0}| = |m_B c_B \underbrace{(\theta_2 - \theta_1(B))}_{>0}| \xrightarrow{\text{با توجه به ویژگی تابع قدرمطلق}} m_A c_A (\theta_1(A) - \theta_2) = m_B c_B (\theta_2 - \theta_1(B))$$

پاسخ خیلی تشریحی ✔

قطعهٔ فلز مس مقداری گرما از دست می‌دهد تا دمای آن از $60^\circ C$ به دمای تعادل برسد. آب نیز همین گرما را جذب می‌کند تا دمای آن از $5^\circ C$ به دمای تعادل برسد. به این ترتیب قدرمطلق گرمای مبادله‌شده توسط این دو جسم با هم برابر است؛ بنابراین خواهیم داشت:

$$|Q_{\text{فلز مس}}| = |Q_{\text{آب}}|$$

$$|m_{\text{فلز مس}} C_{\text{فلز مس}} \Delta\theta_{\text{فلز مس}}| = |m_{\text{آب}} C_{\text{آب}} \Delta\theta_{\text{آب}}|$$

$$\Rightarrow |۵۰ \times ۰/۴ \times \Delta\theta_{\text{فلز مس}}| = |۲۵ \times ۴/۲ \times \Delta\theta_{\text{آب}}| \Rightarrow \frac{\Delta\theta_{\text{فلز مس}}}{\Delta\theta_{\text{آب}}} = \frac{\overset{۱}{\cancel{۲۵}} \times \overset{۲۱}{\cancel{۴/۲}}}{\underset{۲}{\cancel{۵۰}} \times \underset{۲}{\cancel{۰/۴}}} = \frac{۲۱}{۴} = ۵/۲۵$$

بررسی سایر گزینه‌ها:

گزینهٔ (۱): طی تعادل گرمایی انجام‌شده، دمای قطعهٔ فلز مس کاهش و دمای آب، افزایش می‌یابد؛ بنابراین تفاوت دما یا همان میانگین تندی حرکت ذرات این دو ماده، کاهش *(نه افزایش!)* می‌یابد.

گزینهٔ (۲): همان‌طور که گفته شد، با توجه به این‌که فرایند تعادل گرمایی تنها بین قطعهٔ فلز مس و آب انجام می‌شود؛ بنابراین تغییر انرژی گرمایی در این دو ماده با هم قرینه است ولی مقدار آن‌ها با هم برابر می‌باشد.

گزینهٔ (۴): ظرفیت گرمایی ویژهٔ اتانول، کم‌تر از ظرفیت گرمایی ویژهٔ آب است؛ بنابراین اگر به جای آب، اتانول با جرم و دمای یکسان به کار رود، اتانول گرمای کم‌تری نسبت به آب از قطعهٔ فلز مس جذب می‌کند و دمای قطعهٔ فلز مس را کم‌تر تغییر می‌دهد؛ پس دمای پایانی قطعهٔ فلز مس بالاتر خواهد شد.

سنجش کلاد
www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshClouds

۷۸ مخلوطی به جرم ۱۶ گرم از ۲ـ متیل بوتان و ۲ـ پنتن را در اختیار داریم. اگر با افزودن ۱۶ گرم برم مایع به مخلوط مورد نظر و کامل انجام شدن واکنش(ها)، رنگ قرمز مخلوط به طور کامل از بین برود؛ درصد جرمی ۲ـ متیل بوتان در مخلوط اوّلیه کدام است؟ $(Br = ۸۰, C = ۱۲, H = ۱ : g.mol^{-۱})$

۱) ۳۰

۲) ۴۳ / ۷۵

۳) ۵۶ / ۲۵

۴) ۷۰

مشاوره سؤالات محاسباتی از واکنش هیدروکربن‌ها با گاز هیدروژن یا برم مایع در کنکورهای اخیر، خیلی پرتکرار بوده است.

Hint فقط ۲ ـ پنتن با برم واکنش می‌دهد. از روی جرم برم، ابتدا جرم ۲ ـ پنتن را به دست بیار و سپس به کمک جرم کل مخلوط، جرم ۲ ـ متیل بوتان و درصد جرمی آن را حساب کن!

نکته آلکان‌ها $(C_nH_{۲n+۲})$، سیر شده‌اند و با برم واکنش نمی‌دهند، در حالی که آلکن‌ها $(C_nH_{۲n})$، سیر نشده بوده و در واکنش با برم مایع، رنگ قرمز آن را از بین می‌برند.

$$C_nH_{۲n} + Br_۲ \rightarrow C_nH_{۲n}Br_۲$$

پاسخ خیلی تشریحی **گام اول:** با توجه به جرم برم، جرم ۲ ـ پنتن موجود در مخلوط را حساب می‌کنیم:

$$C_۵H_{۱۰} + Br_۲ \rightarrow C_۵H_{۱۰}Br_۲$$

$$\text{جرم ۲ـ پنتن} : ۱۶\ g Br_۲ \times \frac{۱\ mol Br_۲}{۱۶۰\ g Br_۲} \times \frac{۱\ mol C_۵H_{۱۰}}{۱\ mol Br_۲} \times \frac{۷۰\ g C_۵H_{۱۰}}{۱\ mol C_۵H_{۱۰}} = ۷\ g C_۵H_{۱۰}$$

گام دوم: جرم ۲ ـ متیل بوتان در مخلوط اولیه و درصد جرمی آن را حساب می‌کنیم:

$$\text{جرم ۲ـ متیل بوتان} = \{\text{جرم کل مخلوط}\} - \{\text{جرم ۲ ـ پنتن}\} = ۱۶ - ۷ = ۹\ g$$

$$\text{درصد جرمی ۲ـ متیل بوتان} = \frac{\text{جرم ۲ـ متیل بوتان}}{\text{جرم مخلوط}} \times ۱۰۰ = \frac{۹}{۱۶} \times \frac{۲۵}{۱۰۰} = \frac{۲۲۵}{۴} = ٪۵۶ / ۲۵$$

سنجش کلاد
www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshClouds

۷۹ درستی یا نادرستی عبارت‌های زیر دربارهٔ دورهٔ چهارم جدول تناوبی به چه صورت است؟

- حدود ۴۵ درصد از عنصرهای آن، جز عنصرهای اصلی محسوب می‌شوند.
- آرایش الکترونی اتم ۴ عنصر آن به زیرلایهٔ نیمه‌پر ختم می‌شود.
- ۳ عنصر اول آن، فقط یک کاتیون پایدار تشکیل می‌دهند.
- در آرایش الکترونی ۸ عنصر آن، زیرلایهٔ $3d$ به طور کامل پر است.

۱) درست ـ درست ـ درست ـ درست
۲) درست ـ نادرست ـ درست ـ درست
۳) نادرست ـ درست ـ نادرست ـ نادرست
۴) نادرست ـ نادرست ـ نادرست ـ نادرست

مشاوره شما برای کنکورتون، باید همهٔ عنصرهای دورهٔ چهارم شامل نماد شیمیایی، حالت فیزیکی، عدد اتمی و آرایش الکترونی آن‌ها را به خوبی بشناسید.

پاسخ خیلی تشریحی همهٔ عبارت‌های داده‌شده دربارهٔ دورهٔ چهارم جدول تناوبی درست هستند.

بررسی عبارت‌ها:

عنصرهای دستهٔ s و p جدول دوره‌ای، عنصرهای اصلی هستند. در دورهٔ چهارم جدول تناوبی، عناصر گروه‌های ۱ و ۲ جزء عناصر دستهٔ s، عناصر گروه‌های ۳ تا ۱۲ جزء عناصر دستهٔ d و عناصر گروه‌های ۱۳ تا ۱۸ جز عناصر دستهٔ p هستند؛ بنابراین از میان ۱۸ عنصر موجود در دورهٔ چهارم جدول تناوبی، ۸ عنصر آن‌ها اصلی است که $\frac{۸}{۱۸} \times ۱۰۰ \simeq ۴۵$ درصد از این عناصر را شامل می‌شود.

عناصر دورهٔ چهارم جدول تناوبی در سه دستهٔ s، p و d تقسیم می‌شوند که در عناصر دستهٔ s، یک عنصر (پتاسیم $_{۱۹}K$) به آرایش الکترونی $4s^1$، در عناصر دستهٔ d، دو عنصر (کروم $_{۲۴}Cr$ و مس $_{۲۹}Cu$) به آرایش الکترونی $4s^1$، در عناصر دستهٔ p، یک عنصر (آرسنیک $_{۳۳}As$) به آرایش الکترونی $4p^3$ می‌رسند؛ بنابراین می‌توان گفت که در دورهٔ چهارم جدول تناوبی، آرایش الکترونی اتم ۴ عنصر به زیرلایهٔ نیمه‌پر ختم می‌شوند.

$$_{۱۹}K : [_{۱۸}Ar]\underline{4s^1} \quad , \quad _{۲۴}Cr : [_{۱۸}Ar]3d^5\underline{4s^1}$$

$$_{۲۹}Cu : [_{۱۸}Ar]3d^{10}\underline{4s^1} \quad , \quad _{۳۳}As : [_{۱۸}Ar]3d^{10}4s^2\underline{4p^3}$$

دو عنصر اول دورهٔ چهارم جدول تناوبی، فلزات گروه‌های اول و دوم جدول هستند که تنها یک نوع کاتیون پایدار تشکیل می‌دهند. از طرفی سومین عنصر این دوره، اولین فلز واسطه جدول تناوبی است که این عنصر نیز تنها یک کاتیون نوع پایدار سه بار مثبت تشکیل می‌دهد.

$$_{۱۹}K : [_{۱۸}Ar]4s^1 \Rightarrow {}_{۱۹}K^+ : [_{۱۸}Ar]$$

$$_{۲۰}Ca : [_{۱۸}Ar]4s^2 \Rightarrow {}_{۲۰}Ca^{2+} : [_{۱۸}Ar]$$

$$_{۲۱}Sc : [_{۱۸}Ar]3d^1 4s^2 \Rightarrow {}_{۲۱}Sc^{3+} : [_{۱۸}Ar]$$

در دورهٔ چهارم جدول تناوبی، دو عنصر از عناصر دستهٔ d که همان فلزات مس ($_{۲۹}Cu$) و روی ($_{۳۰}Zn$) هستند، دارای زیرلایهٔ $3d^{10}$ در آرایش الکترونی خود می‌باشند. از طرفی شش عنصر موجود در دستهٔ p این دوره، زیرلایهٔ $3d$ خود را به طور کامل پر کرده‌اند و در حال پرکردن زیرلایهٔ $4p$ خود هستند؛ بنابراین می‌توان گفت که در آرایش الکترونی ۸ عنصر دورهٔ چهارم جدول تناوبی، زیرلایهٔ $3d$ به طور کامل پر است.

$$_{۲۹}Cu : [_{۱۸}Ar]3d^{10}4s^1 \quad , \quad _{۳۰}Zn : [_{۱۸}Ar]3d^{10}4s^2$$

$$_{۳۱}Ga : [_{۱۸}Ar]3d^{10}4s^2 4p^1 \quad , \quad _{۳۲}Ge : [_{۱۸}Ar]3d^{10}4s^2 4p^2$$

$$_{۳۳}As : [_{۱۸}Ar]3d^{10}4s^2 4p^3 \quad , \quad _{۳۴}Se : [_{۱۸}Ar]3d^{10}4s^2 4p^4$$

$$_{۳۵}Br : [_{۱۸}Ar]3d^{10}4s^2 4p^5 \quad , \quad _{۳۶}Kr : [_{۱۸}Ar]3d^{10}4s^2 4p^6$$

سنجش کلاد
www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshClouds

۸۰ از سوختن یکی از آلوتروپ‌های کربن، ۵۶ لیتر گاز در شرایط STP تولید و ۹۸۸/۵ کیلوژول گرما آزاد می‌شود. با توجه به معادلهٔ واکنش‌های زیر، نوع آلوتروپ و جرم آن برحسب گرم، کدام است؟ $(C = 12\ g.mol^{-1})$

$$C(s,\text{گرافیت}) + O_2(g) \longrightarrow CO_2(g) + 393/5\,kJ$$
$$C(s,\text{الماس}) + O_2(g) \longrightarrow CO_2(g) + 395/4\,kJ$$

۱) الماس ـ ۱۵
۲) گرافیت ـ ۱۵
۳) الماس ـ ۳۰
۴) گرافیت ـ ۳۰

پاسخ خیلی تشریحی ✔

جرم مولی گرافیت با جرم مولی الماس برابر است و از سوختن کامل هر مول از آن‌ها، یک مول از گاز کربن دی‌اکسید تولید می‌شود؛ پس نوع آلوتروپ کربن در محاسبهٔ جرم آن تأثیری ندارد و ما می‌توانیم به کمک حجم گاز کربن دی‌اکسید در شرایط STP و معادلهٔ واکنش‌های انجام‌شده، جرم کربن را به دست آوریم:

$$56\ L\,CO_2 \times \frac{1\ mol\,CO_2}{22/4\ L\,CO_2} \times \frac{1\ mol\,C}{1\ mol\,CO_2} \times \frac{12\ g\,C}{1\ mol\,C} = \frac{\overset{1}{\cancel{56}} \times \overset{3}{\cancel{12}}}{\underset{0/1}{\overset{0/4}{\cancel{22/4}}}} = 30\ g\,C$$

برای پیداکردن نوع آلوتروپ کربن، باید مقدار گرمای آزادشده در واکنش مورد نظر را محاسبه کنیم. با توجه به معادلهٔ واکنش‌ها، گرمای واکنش (Q) همان گرمای آزادشده به ازای تولید یک مول گاز کربن دی‌اکسید است؛ بنابراین خواهیم داشت:

$$1\,mol\,CO_2 \times \frac{24/4\ L\,CO_2}{1\ mol\,CO_2} \times \frac{988/5\ kJ}{56\ L\,CO_2} = \frac{\overset{0/4}{\cancel{22/4}} \times 988/5}{\underset{1}{\cancel{56}}} = 395/4\,kJ$$

پس می‌توان نتیجه گرفت که با توجه به گرمای واکنش به‌دست‌آمده، آلوتروپ کربن مورد نظر، همان الماس است.

www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshClouds