

آزمون آزمایشی خیلی سبز

پایه یازدهم

مرحله چهارم

سال تحصیلی ۱۴۰۳-۰۴

تاریخ برگزاری: ۳۰/آذر/۱۴۰۳

رشته ریاضی

بودجه بندی دروس

حسابان (۱)	آمار و احتمال	هندسه (۲)
فصل ۱ (درس ۵) و فصل ۲ صفحه ۲۹ تا ۷۰	فصل ۱ (از ابتدای قوانین و اعمال بین مجموعه ها) و فصل ۲ (درس ۱) صفحه ۲۱ تا ۴۳	فصل ۱ (درس ۲ و ۳) صفحه ۱۸ تا ۳۰
فیزیک (۲)	شیمی (۲)	
فصل ۱ (از ابتدای خازن) و فصل ۲ (تا ابتدای نیروی محرکه الکتریکی و مدارها) صفحه ۳۲ تا ۶۱	فصل ۱ (از ابتدای گنج های اعماق دریا) و فصل ۲ (تا ابتدای تهیه غذای آبپز، تجربه تفاوت دما و گرما) صفحه ۲۵ تا ۵۸	

مواد امتحانی	تعداد سؤال	از شماره	تا شماره	مدت پاسخگویی
حسابان	۲۰	۱	۲۰	۳۰ دقیقه
هندسه	۱۰	۲۱	۳۰	۲۰ دقیقه
آمار و احتمال	۱۰	۳۱	۴۰	۲۰ دقیقه
فیزیک	۲۰	۴۱	۶۰	۳۰ دقیقه
شیمی	۲۰	۶۱	۸۰	۲۰ دقیقه
مجموع		۸۰ سؤال		۱۲۰ دقیقه

استفاده از ماشین حساب مجاز نیست.

این آزمون نمره منفی دارد.

دفتر چه سوالات آزمون های خیلی سبز، از همه نظر (تعداد سؤال ها، زمان پاسخگویی، نوع چینش گزینه ها، نوع صفحه آرای، فونت سوالات، سایز کلمات و اعداد، جای خالی محل انجام محاسبات و...) در شبیه ترین حالت به دفتر چه سوالات کنکور سراسری طراحی می شود.



Azmoon.kheilisabz.com

حسابان یازدهم

۱- به ازای چند عدد طبیعی یک رقمی n ، دو تابع $f(x) = \cos n\pi$ و $g(x) = 1$ با هم برابر هستند؟

- (۱) ۷ (۲) ۶ (۳) ۵ (۴) ۴

۲- کدام تابع یک به یک نیست؟ ($[]$ ، نماد جزء صحیح است.)

- (۱) $y = |x| + 2x$ (۲) $y = x + [-x]$
(۳) $y = |x| - 2x$ (۴) $y = x - [-x]$

۳- دو تابع $f = \{(-1, 2), (1, 6), (2, 9), (3, -1)\}$ و $g(x) = x + \sqrt{x}$ مفروض اند. اگر $(g^{-1} \circ f)(a) = 1$ باشد، مقدار a

کدام است؟

- (۱) -۱ (۲) ۱ (۳) ۲ (۴) ۳

۴- دو تابع $f(x) = \sqrt{x-1}$ و $g(x) = \sqrt{3-x}$ مفروض اند. دامنه تابع $g \circ f$ شامل چند عدد صحیح است؟

- (۱) ۹ (۲) ۸ (۳) ۱۱ (۴) ۱۰

۵- اگر $f(x) = x^2 + 1$ و $(f \circ g)(x) = 1 + x$ باشد، ضابطه تابع g کدام می تواند باشد؟

- (۱) $g(x) = \sqrt{-x}$ (۲) $g(x) = \sqrt{|x|}$
(۳) $g(x) = -\sqrt{x}$ (۴) $g(x) = -\sqrt{|x|}$

۶- اگر دامنه تابع $f(x) = \frac{x(ax-2a)|x|}{x+a}$ به صورت $\mathbb{R} - \{2\}$ باشد، برد تابع $f(x)$ کدام عدد زیر را شامل نمی شود؟

- (۱) ۴ (۲) ۸ (۳) -۴ (۴) -۸

۷- اگر دامنه و برد تابع $f(x) = b\sqrt{(a-2)x + a^2 - 2a - 2 + b^2} - b$ به ترتیب $(-\infty, -3]$ و $[2, +\infty)$ باشد، آن گاه

زوج مرتب (a, b) کدام است؟

- (۱) $(4, -1)$ (۲) $(4, 2)$
(۳) $(1, -1)$ (۴) $(1, 2)$

۸- اگر $[x] = [2x]$ ، آن گاه مجموعه مقادیر $[3x]$ چند عضو دارد؟ ($[]$ ، نماد جزء صحیح است.)

- (۱) ۲ (۲) ۴ (۳) ۵ (۴) ۳

۹- برد تابع $f(x) = \frac{12}{x - [x] + 3}$ کدام است؟ ($[]$ ، نماد جزء صحیح است.)

- (۱) $[2, 5]$ (۲) $(3, 4]$ (۳) $[4, 5]$ (۴) $(1, 2]$

محل انجام محاسبات

۱۰- به ازای چند مقدار صحیح m ، تابع $f(x) = \begin{cases} 2-3x & ; x \leq -\frac{3}{2} \\ 2+2mx-x^2 & ; x > -\frac{3}{2} \end{cases}$ در $\mathbb{R}$ تابعی یک به یک است؟

- (۱) صفر
(۲) ۱
(۳) ۲
(۴) بی شمار

۱۱- اگر تابع $y = \frac{ax+4}{2x-1}$ یک به یک نباشد، مقدار $f(f(f(\frac{\sqrt{2}}{3})))$ کدام است؟

- (۱) ۴
(۲) ۸
(۳) -۴
(۴) -۸

۱۲- اگر $f(x)$ تابع خطی باشد و رابطه $f(x)f^{-1}(x) = (x-1)^2$ برقرار باشد، مقدار $f(5)$ کدام است؟

- (۱) ۱
(۲) -۱
(۳) -۴
(۴) ۲

۱۳- اگر $f(x) = 2x-1$ باشد، دامنه تابع $y = \sqrt{f^{-1}(3x-2)-6x}$ کدام است؟

- (۱) $[\frac{1}{9}, +\infty)$
(۲) $(-\infty, \frac{1}{9}]$
(۳) $[-\frac{1}{9}, +\infty)$
(۴) $(-\infty, -\frac{1}{9}]$

۱۴- اگر $f(x) = x + \sqrt{x}$ و $g(x) = 2x^2 - \sqrt{x}$ ، معادله $(g-f)(x) = 1$ دارای چند ریشه است؟

- (۱) صفر
(۲) ۱
(۳) ۲
(۴) ۳

۱۵- اگر $\begin{cases} g: \{0,1,2,3\} \rightarrow \mathbb{R} \\ g(x) = 2x-1 \end{cases}$ و $\begin{cases} f: \{-2,1,3\} \rightarrow \mathbb{R} \\ f(x) = 3x+1 \end{cases}$ باشد، مجموع اعضای برد تابع $3f+g$ کدام است؟

- (۱) ۵۰
(۲) ۴۹
(۳) ۴۸
(۴) ۴۷

۱۶- اگر $f(x) = 2x+3|x|$ و $g(x) = 3x-2|x|$ ، مجموع اعضای برد تابع $\frac{f}{g}$ کدام است؟

- (۱) $-\frac{24}{5}$
(۲) $\frac{26}{5}$
(۳) $-\frac{26}{5}$
(۴) $\frac{24}{5}$

محل انجام محاسبات

۱۷- نیمساز زاویه حاده بین خط $y = 8 - 2x$ و محور عرض‌ها، خط $y = ax + b$ است. حاصل $4a + b$ کدام است؟

(۱) $4\sqrt{5}$ (۲) $-4\sqrt{5}$

(۳) $3\sqrt{5}$ (۴) $-3\sqrt{5}$

۱۸- اگر در مثلثی میانه‌ها همدیگر را به نسبت ۲ به ۱ قطع کنند و O محل هم‌رسی میانه‌ها و مختصات رأس A به صورت $\begin{pmatrix} 5 \\ 8 \end{pmatrix}$ باشد، مجموع طول و عرض نقاط M در میانه AM کدام است؟

(۱) ۳ (۲) $3/5$ (۳) ۴ (۴) $4/5$

۱۹- نقاط A و B دو رأس از مثلث ABC هستند که رأس C آن روی $y = x^2$ حرکت می‌کند. اگر مساحت مثلث ABC مینیمم باشد، طول نقطه C کدام است؟

(۱) $\frac{1}{2}$ (۲) $\frac{1}{4}$

(۳) $\frac{3}{4}$ (۴) $\frac{1}{8}$

۲۰- خط $x = 2(y + 1)$ معادله یک ضلع و نقطه $A(2, 5)$ یک رأس مستطیل هستند. اگر طول قطر مستطیل $4\sqrt{5}$ باشد، مساحت آن کدام است؟

(۱) ۲۰ (۲) $20\sqrt{3}$

(۳) $20\sqrt{5}$ (۴) $20\sqrt{2}$

محل انجام محاسبات

هندسه یازدهم

۲۱- در مثلث قائم الزاویه‌ای، طول ضلع‌های زاویه قائمه ۵ و ۱۲ هستند. شعاع دایره محاطی داخلی این مثلث کدام است؟

- (۱) ۱ / ۵ (۲)
(۳) ۲ / ۵ (۴)

۲۲- در یک مثلث متساوی الساقین، شعاع‌های دایره‌های محاطی خارجی نظیر ساق و قاعده به ترتیب برابر ۸ و ۱۲ هستند. شعاع دایره محاطی داخلی این مثلث کدام است؟

- (۱) ۳ (۲) ۴
(۳) ۴ / ۵ (۴) ۶

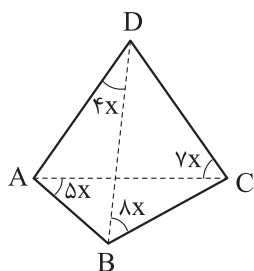
۲۳- نسبت مساحت شش ضلعی منتظم محیطی یک دایره به مساحت شش ضلعی منتظم محاطی آن دایره کدام است؟

- (۱) $\frac{4}{3}$ (۲) $\frac{3}{2}$
(۳) ۲ (۴) $\frac{9}{4}$

۲۴- یک دوزنقه متساوی الساقین با طول قاعده‌های a و $2a$ ، بر دایره‌ای به مساحت 32π محیط است. محیط این دوزنقه کدام است؟

- (۱) ۲۴ (۲) ۳۲
(۳) ۳۶ (۴) ۴۸

۲۵- اگر در شکل زیر چهارضلعی ABCD محاطی باشد، با توجه به اندازه‌های روی شکل، اندازه زاویه $\widehat{BAD}$ چند درجه است؟



- (۱) ۹۷ / ۵
(۲) ۱۰۲ / ۵
(۳) ۱۰۵
(۴) ۱۰۷ / ۵

۲۶- در مثلث ABC، نیمساز داخلی رأس A، قاعده BC و دایره محیطی مثلث را به ترتیب در نقاط D و E قطع کرده است. اندازه $AD \times AE$ برابر کدام است؟

- (۱) $AB \times AC$ (۲) $BD \times DC$ (۳) $BC \times DE$ (۴) BC^2

محل انجام محاسبات

۲۷- در دوزنقه متساوی الساقینی به قاعده‌های ۱ و ۳، طول پاره‌خطی که وسط‌های دو ساق را به یکدیگر وصل می‌کند، با طول ساق برابر است. مساحت این دوزنقه کدام است؟

- (۱) $\sqrt{3}$ (۲) $2\sqrt{3}$
(۳) $\sqrt{5}$ (۴) $2\sqrt{5}$

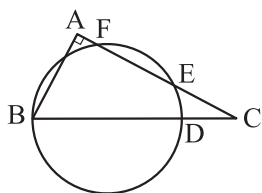
۲۸- به ازای چند مقدار صحیح x ، دو دایره $C(O, 10 - 2x)$ و $C'(O', x + 3)$ با طول خط‌المركزین $d = 3x + 1$ ، متقاطع هستند؟

- (۱) صفر (۲) ۱
(۳) ۲ (۴) ۳

۲۹- دو دایره متقاطع به شعاع‌های ۴ و ۸ مفروض‌اند. خط‌های مماس بر این دایره‌ها در یکی از نقاط تقاطع آن‌ها از مرکزهای دو دایره می‌گذرند. مساحت چهارضلعی حاصل از وصل کردن مراکز دو دایره و نقاط تماس یکی از مماس مشترک خارجی آن‌ها کدام است؟

- (۱) ۳۲ (۲) ۳۶
(۳) ۴۵ (۴) ۴۸

۳۰- در شکل زیر، مثلث ABC قائم‌الزاویه است و دایره‌ای به قطر BD ، اضلاع زاویه قائمه را قطع کرده است. با فرض

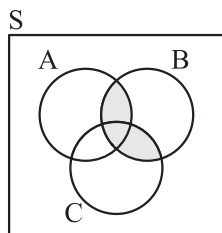


$BD = 28$ ، $CD = 4$ و $CE = 5$ ، طول پاره خط AF کدام است؟

- (۱) $1/4$ (۲) $1/5$
(۳) $1/6$ (۴) $1/8$

آمار و احتمال یازدهم

۳۱- سه مجموعه A ، B و C مطابق شکل زیر، در فضای نمونه‌ای S مفروض‌اند. کدام مورد برای قسمت رنگی نادرست است؟



(۱) $B \cap (A \cup C)$

(۲) $(A \cap B) \cup (B \cap C)$

(۳) $(B - (B - A)) \cup (B - (B - C))$

(۴) $(B - (A \cap B)) \cap (B \cap C)$

۳۲- چه تعداد از موارد زیر نادرست‌اند؟

(الف) $A \cap A' = \emptyset$

(ب) $A - B = A' - B'$

(پ) $A \cap B = A \Leftrightarrow A \subseteq B$

(ت) $(A \subseteq B) \wedge (B \subseteq A) \Leftrightarrow A = B$

(ث) $A \subseteq B \Leftrightarrow B' \subseteq A'$

(ج) $A \cap B = \emptyset \Leftrightarrow A \subseteq B'$

(۱) صفر (۲) ۱ (۳) ۲ (۴) ۳

۳۳- A ، B و C سه مجموعه ناتهی با مجموعه مرجع U هستند. مجموعه $[(A - B) \cup C] \cap (B' - C)$

با کدام یک از مجموعه‌های زیر برابر است؟

(۲) $(A \cup B) - C$

(۱) $(A - B) \cup C$

(۴) $(B - A) \cap C$

(۳) $(A \cap B) \cup C$

۳۴- A و B دو مجموعه ناتهی از مجموعه مرجع U هستند، به طوری که $((A' \cup B) - A) \cup (B' - A) = (A - B) \cup (B - A)$

است. کدام یک از نتیجه‌گیری‌های زیر درست است؟

(۲) $B \subseteq A$

(۱) $A \subseteq B$

(۴) $A' \cap B = U$

(۳) $A \subseteq B'$

۳۵- مجموعه‌های A ، B ، C و D را در نظر بگیرید. تعداد اعضای C ، سه واحد بیشتر از A و تعداد اعضای D ، چهار واحد

کم‌تر از B است. اگر تعداد اعضای مجموعه $C \times B$ ، ۵۰٪ بیشتر از اعضای مجموعه $A \times B$ و ۲ برابر تعداد اعضای مجموعه

$A \times D$ باشد، اختلاف تعداد اعضای مجموعه‌های A و B چه قدر است؟

(۱) ۸ (۲) ۹ (۳) ۱۰ (۴) ۱۲

محل انجام محاسبات

۳۶- اگر $A = [-1, 2]$ ، $B = [\alpha, 4]$ و مساحت ناحیه $A^2 - B^2$ برابر ۵ باشد، مساحت ناحیه $B \times A - A \times B$ کدام است؟

- (۱) ۵ (۲) ۶ (۳) ۷ (۴) ۸

۳۷- عددی به تصادف از بین اعداد طبیعی ۱ تا ۵۰۰ انتخاب می‌کنیم. احتمال آن که عدد انتخابی بر ۶ بخش پذیر باشد ولی بر ۱۴ بخش پذیر نباشد، چه قدر است؟

- (۱) $\frac{39}{250}$ (۲) $\frac{19}{125}$
(۳) $\frac{18}{125}$ (۴) $\frac{79}{500}$

۳۸- دو تاس را با هم پرتاب می‌کنیم. با کدام احتمال عدد ظاهرشده حداقل یکی از تاس‌ها، اول بوده و مجموع اعداد روشده حداکثر ۷ است؟

- (۱) $\frac{1}{4}$ (۲) $\frac{4}{9}$ (۳) $\frac{5}{12}$ (۴) $\frac{7}{12}$

۳۹- در آزمایش پرتاب یک تاس، چند پیشامد سه‌عضوی وجود دارد که اگر حاصل آزمایش $\{2\}$ باشد، رخ می‌دهند؟

- (۱) ۵ (۲) ۶ (۳) ۱۰ (۴) ۱۵

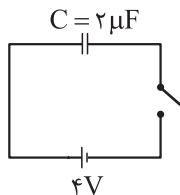
۴۰- A و B دو پیشامد از فضای نمونه‌ای S هستند، به طوری که $P(A) + P(A \cup B) + P(A \cap B) = 3P(A) + P(B) - \frac{5}{9}$

است. احتمال رخ دادن پیشامد A چه قدر است؟

- (۱) $\frac{1}{4}$ (۲) $\frac{1}{5}$ (۳) $\frac{1}{3}$ (۴) $\frac{2}{3}$

فیزیک یازدهم

۴۱- در مدار شکل زیر، خازن بدون باری توسط یک کلید به باتری متصل است. پس از بسته شدن کلید، اندازه بار الکتریکی هر یک از صفحه‌های خازن، به چند میکروکولن می‌رسد؟



(۱) 4×10^{-6}

(۲) 8×10^{-6}

(۳) ۴

(۴) ۸

۴۲- چه تعداد از موارد زیر درست است؟

(الف) اگر فضای بین صفحه‌های خازنی با یک ماده عایق پر شود، ظرفیت آن افزایش می‌یابد.

(ب) NH_3 و HCl ، نمونه‌هایی از دی‌الکتریک قطبی هستند.

(پ) وقتی متان یا بنزن بین صفحات خازن بارداری قرار بگیرند، قطبیده می‌شوند.

(ت) با حضور دی‌الکتریک در خازن، حداکثر ولتاژ قابل تحمل خازن، افزایش می‌یابد.

(۴) ۴

(۳) ۳

(۲) ۲

(۱) ۱

۴۳- در یک صفحه‌کلید خازنی، مساحت هر صفحه خازن 1 cm^2 و فاصله بین دو صفحه $4/5 \text{ mm}$ است که از یک دی‌الکتریک منعطف با ثابت ۴ پر شده است. اگر با فشار دادن کلید، ظرفیت خازن $11/2$ پیکوفاراد تغییر کند، حداقل

فاصله بین دو صفحه خازن به چند میلی‌متر می‌رسد؟ $(\epsilon_0 = 9 \times 10^{-12} \frac{\text{C}^2}{\text{N} \cdot \text{m}^2})$

(۴) $0/15$

(۳) $1/5$

(۲) $0/3$

(۱) ۳

۴۴- مساحت هر یک از صفحه‌های خازن تختی 4 cm^2 و اندازه بار هر صفحه 36 pC است. اگر بزرگی میدان الکتریکی بین صفحه‌ها 2500 N/C باشد، ثابت دی‌الکتریک عایق بین صفحه‌ها کدام است؟ $(\epsilon_0 = 9 \times 10^{-12} \frac{\text{C}^2}{\text{N} \cdot \text{m}^2})$

(۴) ۵

(۳) ۴

(۲) ۳

(۱) ۲

۴۵- در مدار فلاش یک دوربین عکاسی، خازنی وجود دارد که با ولتاژ 200 V شارژ شده است. اگر فلاش دوربین عکاسی روشن شود، تخلیه انرژی در مدت $2 \times 10^{-3} \text{ s}$ و با توان 3000 W انجام می‌شود. ظرفیت این خازن چند فاراد است؟

(۲) 3×10^{-4}

(۱) 3×10^{-3}

(۴) 6×10^{-4}

(۳) 6×10^{-3}

محل انجام محاسبات

۴۶- خازن تختی را که بین صفحات آن هوا است، توسط یک باتری باردار کرده و از باتری جدا می‌کنیم. با توجه به جدول زیر، با اعمال هر یک از تغییرهای A و B، به ترتیب از راست به چپ، انرژی ذخیره‌شده در خازن چگونه تغییر می‌کند؟

A	افزایش فاصله بین صفحات
B	وارد کردن دی‌الکتریک بین صفحات

(۱) افزایش می‌یابد، افزایش می‌یابد.

(۲) کاهش می‌یابد، کاهش می‌یابد.

(۳) افزایش می‌یابد، کاهش می‌یابد.

(۴) کاهش می‌یابد، افزایش می‌یابد.

۴۷- خازن تختی که بین صفحات آن هوا است به یک باتری متصل است. اگر فاصله بین صفحات را ۲۰ درصد کاهش دهیم، انرژی ذخیره‌شده در خازن $8 \mu\text{J}$ تغییر می‌کند. انرژی اولیه ذخیره‌شده در این خازن چند میکروژول است؟

(۲) ۲۴

(۱) ۱۶

(۴) ۴۰

(۳) ۳۲

۴۸- کدام یک از عبارتهای زیر نادرست است؟

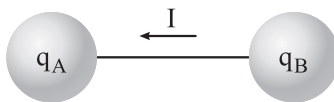
(۱) تندی حرکت کاتوره‌های الکترون‌های آزاد درون رسانا، بسیار زیاد و از مرتبه 10^6 m/s است.

(۲) با ایجاد میدان الکتریکی در درون رسانا، الکترون‌های آزاد با سرعت سوق در جهت میدان الکتریکی حرکت می‌کنند.

(۳) جهت قراردادی جریان الکتریکی در یک رسانا، برخلاف جهت سوق الکترون‌هاست.

(۴) سرعت سوق الکترون‌ها در سیم‌های مسی، بسیار اندک و از مرتبه 10^{-5} m/s یا 10^{-4} m/s است.

۴۹- در شکل زیر، دو کرهٔ رسانای هم‌اندازه با بارهای اولیه q_A و q_B را توسط سیمی رسانا به هم متصل می‌کنیم. اگر تا ایجاد تعادل، به مدت زمان 5 ns در این سیم جریان متوسط $I = 2 \text{ kA}$ ، در جهت نشان داده شده ایجاد شود، در کدام مورد بار اولیه این دو کره به درستی مقایسه شده است؟



$$q_A - q_B = 10 \mu\text{C} \quad (۱)$$

$$q_B - q_A = 10 \mu\text{C} \quad (۲)$$

$$q_A - q_B = 20 \mu\text{C} \quad (۳)$$

$$q_B - q_A = 20 \mu\text{C} \quad (۴)$$

محل انجام محاسبات

۵۰- با اعمال اختلاف پتانسیل الکتریکی 16 V در دو سر یک سیم رسانا، در مدت یک دقیقه، از مقطع این رسانا $1/2 \times 10^{21}$ الکترون عبور می‌کند. مقاومت الکتریکی این رسانا، چند اهم است؟ ($e = 1/6 \times 10^{-19}\text{ C}$)

- (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴) ۵

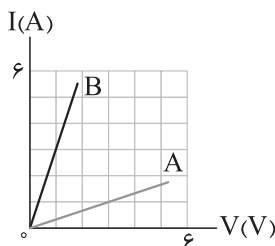
۵۱- مقاومت یک کابل مسی مخصوص انتقال برق، $50\text{ m}\Omega$ است. اگر طول این کابل 2 km باشد، مساحت مقطع آن چند سانتی‌متر مربع است؟ (مقاومت ویژه مس $2 \times 10^{-8}\text{ }\Omega \cdot \text{m}$ است.)

- (۱) ۸ (۲) ۰/۸ (۳) ۴ (۴) ۰/۴

۵۲- اختلاف پتانسیل دو سر یک رسانای اهمی، V است. در آزمایش (۱)، اختلاف پتانسیل را ۲۰ درصد کاهش می‌دهیم، در نتیجه جریان عبوری از رسانا $2/4\text{ A}$ تغییر می‌کند. در آزمایش (۲) در حالتی که اختلاف پتانسیل اولیه دو سر این رسانا V است، اگر اختلاف پتانسیل را ۳۰٪ افزایش دهیم، جریان عبوری از رسانا چند آمپر خواهد شد؟

- (۱) ۱۵/۶ (۲) ۱۴/۴ (۳) ۵ (۴) ۳/۶

۵۳- نمودار $I - V$ برای دو رسانای اهمی A و B به شکل زیر است. اگر به دو سر هر یک از این رساناها، اختلاف پتانسیل الکتریکی 5 V را اعمال کنیم، در مدت یک دقیقه، اختلاف بار الکتریکی عبوری از مقطع‌های این دو رسانا چند کولن خواهد بود؟



- (۱) ۹۰۰
(۲) ۸۰۰
(۳) ۷۵۰
(۴) ۶۰۰

۵۴- مقاومت الکتریکی یک سیم آلومینیمی به مساحت مقطع 10 mm^2 و جرم 40 g ، چند برابر مقاومت الکتریکی یک سیم پلاتینی به مساحت مقطع 20 mm^2 و جرم 56 g است؟ (چگالی پلاتین ۸ برابر چگالی آلومینیم و مقاومت ویژه آن‌ها به ترتیب $10^{-7}\text{ }\Omega \cdot \text{m}$ و $2/8 \times 10^{-8}\text{ }\Omega \cdot \text{m}$ است.)

- (۱) ۶/۴ (۲) ۳/۲ (۳) ۲/۸ (۴) ۱/۶

۵۵- موارد «الف»، «ب» و «پ» به ترتیب از راست به چپ، دربارهٔ کدام یک از مقاومت‌های زیر درست هستند؟
الف) در مدارهای الکترونیکی به عنوان حسگر دما استفاده می‌شود.
ب) با افزایش شدت نور، مقاومت الکتریکی آن کاهش می‌یابد.
پ) جریان الکتریکی را فقط از یک سو عبور می‌دهد.

- (۱) دیود، LDR، ترمیستور
(۲) LDR، ترمیستور، دیود
(۳) ترمیستور، LDR، دیود
(۴) ترمیستور، دیود، LDR

محل انجام محاسبات

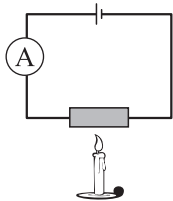
۵۶- در دمای 30°C ، مقاومت پلاتین یک دماسنج مقاومت پلاتینی 160Ω است. وقتی این دماسنج در محلول خاصی قرار گیرد، مقاومت آن 192Ω می‌شود. دمای این محلول چند درجه سلسیوس است؟ ($^{\circ}\text{C}^{-1} = 4 \times 10^{-3}$ پلاتین α)

- (۱) ۵۰ (۲) ۶۰ (۳) ۷۰ (۴) ۸۰

۵۷- طول رسانای فلزی A، دو برابر طول رسانای فلزی B است. رسانای A، سیم توپری به قطر 2mm و رسانای B لوله‌ای توخالی به شعاع خارجی 2mm و شعاع داخلی 1mm است. اگر مقاومت الکتریکی این دو رسانا برابر باشد، مقاومت ویژه رسانای B چند برابر مقاومت ویژه رسانای A است؟

- (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴) ۶

۵۸- در مدار شکل زیر توسط شمع به میله حرارت می‌دهیم، در نتیجه عدد آمپرسنج افزایش می‌یابد. کدام یک از عبارات‌های زیر درباره این میله درست است؟



- (الف) میله، یک قطعه رسانا است.
(ب) میله، یک قطعه نیم‌رسانا است.
(پ) با افزایش دمای میله، ارتعاشات کاتوره‌ای اتم‌های آن افزایش می‌یابد.
(ت) با افزایش دمای میله، تعداد حامل‌های بار میله، ثابت می‌ماند.

- (۱) الف و ت (۲) ب و پ (۳) الف و پ (۴) ب و ت

۵۹- از سیمی به طول 20m و جرم 25g که اختلاف پتانسیل 8V در دو سر آن برقرار است، جریان 5A عبور می‌کند. اگر مقاومت ویژه سیم $2 \times 10^{-8}\Omega \cdot \text{m}$ باشد، چگالی آن چند گرم بر سانتی‌متر مکعب است؟

- (۱) ۵ (۲) ۶ (۳) ۸ (۴) ۱۰

۶۰- مقاومت الکتریکی یک سیم فلزی R است. $\frac{1}{n}$ از این سیم را بریده و کنار می‌گذاریم و قطعه سیم باقی‌مانده را از دستگاه عبور می‌دهیم تا آن را به طور یکنواخت نازک کرده و طولش را به طول اولیه سیم برساند. با ثابت ماندن دما، مقاومت سیم جدید چند برابر R است؟

- (۱) n (۲) n-1 (۳) n(n-1) (۴) $\frac{n}{n-1}$

شیمی یازدهم

۶۱- کدام گزینه نادرست است؟

- (۱) برای استخراج هر کیلوگرم آهن، در مجموع حدود سه کیلوگرم سنگ معدن آهن و منابع معدنی دیگر، مورد نیاز است.
- (۲) از بازگردانی هفت قوطی فولادی آن قدر انرژی ذخیره می شود که می توان ۶ لامپ ۱۰۰ وات را بیش از یک شبانه روز روشن نگه داشت.
- (۳) غلظت گونه های فلزی موجود در کف اقیانوس از ذخایر زیرزمینی آن، بیشتر است.
- (۴) بازیافت فلزها علاوه بر کاهش رد پای کربن دی اکسید و کاهش سرعت گرمایش جهانی، باعث تخریب گونه های زیستی بیشتری می شود.

۶۲- چند مورد از مطالب زیر، درست است؟

- در فرایند دفن کردن پاکت کاغذی برخلاف کیسه پلاستیکی، تجزیه رخ می دهد و گاز CH_4 تولید می شود.
 - فرایند دفع پاکت های کاغذی با روش سوزاندن زباله برخلاف روش بازیافت، سبب آلودگی هوا می شود.
 - فلزات جزء منابع تجدیدناپذیر در طبیعت هستند و با فرایند فرسایش به سنگ معدن خود تبدیل می شوند.
 - مواد اولیه پاکت کاغذی همانند کیسه پلاستیکی ناپایدار بوده و هر دو در طی توزیع و مصرف، باعث آلودگی هوا می شوند.
- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴

۶۳- دانش آموزی ترکیبی را به اشتباه ۵ - اتیل - ۲، ۴ - دی متیل هگزان نام گذاری کرده است. نام درست ترکیب و شمار گروه های CH_3 آن کدام است؟

- (۱) ۵، ۴، ۲ - تری متیل هپتان - ۱ (۲) ۵، ۴، ۲ - تری متیل هپتان - ۲
- (۳) ۶، ۴، ۳ - تری متیل هپتان - ۲ (۴) ۶، ۴، ۳ - تری متیل هپتان - ۱

۶۴- درستی یا نادرستی کدام گزینه با عبارت زیر متفاوت است؟ ($H = 1$, $C = 12 : g.mol^{-1}$)

- «در چهار عضو نخست آلکان ها، پیشوندی که شمار اتم های کربن را معلوم کند، وجود ندارد.»
- (۱) در گذشته اتن به اتیلن و اتین به استیلن معروف بوده است.

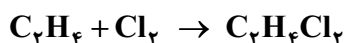
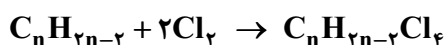
- (۲) اختلاف جرم مولی دومین عضو خانواده سیکلوآلکان ها و سومین عضو خانواده آلکین ها برابر با ۱۰ گرم است.
- (۳) مجموع اعداد به کاررفته در نام گذاری آلکانی با ۲ شاخه فرعی متیل و زنجیره اصلی ۴ کربنه، حداکثر برابر شمار پیوندهای $C-C$ آن است.

- (۴) در فرمول پیوند - خط هیدروکربن ها، اتصال بین اتم های کربن و هیدروژن نشان داده نمی شود.

محل انجام محاسبات

۶۵- در دو ظرف جداگانه مول‌هایی برابر از یک آلکین و اتن را با مقدار کافی کلر واکنش می‌دهیم. اگر جرم فراورده حاصل از واکنش آلکین با کلر به تقریب ۲/۱۲ برابر جرم فراورده حاصل از واکنش اتن با کلر باشد، شمار پیوندهای یگانه کربن - کربن این آلکین کدام است؟

$$(C = 12, Cl = 35.5, H = 1 : g.mol^{-1})$$



۲ (۴)

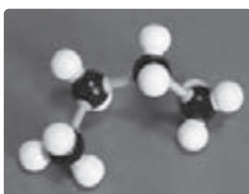
۵ (۳)

۴ (۲)

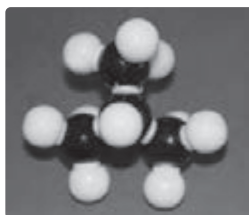
۳ (۱)

۶۶- کدام مورد، درست است؟ ($O = 16, C = 12, H = 1 : g.mol^{-1}$)

(۱) شکل زیر مربوط به مدل فضاپرکن هیدروکربن موجود در گاز فندک است.



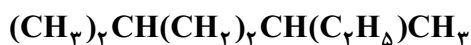
(۲) شکل زیر، ساده‌ترین آلکان شاخه‌دار را نشان می‌دهد که جرم مولی آن کمتر از نصف جرم مولی نفتالن است.



(۳) در هیدروکربن‌های موجود در نفت خام، پیوندهای یگانه و دوگانه برخلاف سه‌گانه مشاهده می‌شود.

(۴) برای سیرشدن مخلوطی از پروپان، پروپن و پروپین با جرم‌های برابر، ترکیبی با جرم مولی بیشتر با مقدار هیدروژن بیشتری واکنش می‌دهد.

۶۷- نام ساختار زیر کدام است و در آن، چند پیوند اشتراکی یگانه بین اتم‌ها وجود دارد؟



(۱) ۳، ۶ - دی‌متیل هپتان - ۲۸

(۲) ۲، ۵ - دی‌متیل هپتان - ۲۸

(۳) ۳، ۶ - دی‌متیل هپتان - ۲۷

(۴) ۲، ۵ - دی‌متیل هپتان - ۲۷

محل انجام محاسبات

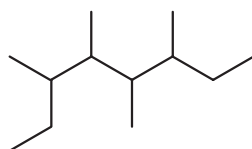
۶۸- کدام مورد درست است؟

- (۱) اگر در ۳- اتیل - ۲، ۴- دی‌متیل پنتان به جای گروه‌های CH_3 ، C_2H_5 و به جای گروه‌های CH_3 ، C_2H_5 قرار دهیم، جرم مولی ترکیب تغییری نمی‌کند.
- (۲) با افزایش شمار اتم‌های کربن در هیدروکربن‌هایی که سرگروه خانواده آن‌ها در جوشکاری کاربردی استفاده می‌شود، فراریت آن‌ها کاهش می‌یابد.
- (۳) با افزایش نسبت شمار پیوندهای $\text{C}-\text{C}$ به $\text{C}-\text{H}$ در آلکان‌های راست‌زنجیر، تمایل به جاری شدن برخلاف نقطه جوش آن‌ها افزایش می‌یابد.
- (۴) اگر به ترکیب ۲- متیل پنتان یک گروه اتیل اضافه کنیم، به طوری که ترکیب حاصل دو شاخه فرعی یکسان داشته باشد، مجموع اعداد در نام آن برابر ۵ خواهد بود.

۶۹- در صنعت برای تهیه اتانول از هیدروکربنی گازی شکل که به عنوان عمل‌آورنده در کشاورزی کاربرد دارد، استفاده می‌شود. اگر اتانول مورد نیاز برای تهیه ۱ لیتر محلول ۶۰ درصد جرمی آن را بخواهیم از واکنش این هیدروکربن با آب به دست آوریم، به چند لیتر هیدروکربن گازی نیاز است؟ (چگالی محلول ضدعفونی‌کننده اتانول در آب را 0.92 g.mL^{-1} و حجم مولی گازها را ۲۴L در نظر بگیرید و $(\text{C} = 12, \text{H} = 1, \text{O} = 16 : \text{g.mol}^{-1})$)

- (۱) ۱۴۴ (۲) ۲۸۸ (۳) ۲۴۰ (۴) ۴۸۰

۷۰- با توجه به ساختارهای زیر، کدام گزینه درست است؟ $(\text{H} = 1, \text{C} = 12, \text{O} = 16 : \text{g.mol}^{-1})$



(الف)



(ب)

- (۱) شمار اتم‌های کربن زنجیر اصلی (الف) و (ب) همانند شمار گروه‌های CH_3 این دو ترکیب، برابر است.
- (۲) به ازای سوختن ۸ / ۱۸ گرم از ترکیب (الف)، جرم برابری از کربن دی‌اکسید و آب تولید می‌شود.
- (۳) اگر به جای گروه‌های CH_3 در ترکیب (ب) هیدروژن قرار دهیم، جرم مولی آن به اندازه جرم یک مول ۱ - هپتن کاهش می‌یابد.
- (۴) درصد جرمی کربن در ترکیب (ب) از (الف) بیشتر بوده و اختلاف شمار اتم‌های هیدروژن آن‌ها، با شمار اتم‌های هیدروژن اتین برابر است.

محل انجام محاسبات

۷۱- کدام موارد از مطالب زیر درست است؟

الف) شمار پیوندهای اشتراکی در ساختار سنگین‌ترین آلکان راست‌زنجیری که در دمای اتاق گاز است، با شمار اتم‌های آن برابر است.

ب) با قراردادن فلز سدیم در هگزان، می‌توان از خوردگی آن جلوگیری کرد.

پ) ویژگی مهم و برجسته آلکان‌ها، ناقطبی بودن و عدم انحلال‌پذیری آن‌ها در چربی است.

ت) بیشترین اختلاف نقطه جوش برای دو آلکان متوالی، مربوط به متان و اتان است.

۱) الف - ب ۲) ب - ت ۳) الف - ت ۴) ب - پ

۷۲- درستی یا نادرستی عبارتهای زیر در کدام گزینه به درستی آمده است؟

• در پالایش نفت خام، نمک، اسید و آب آن را جدا می‌کنند.

• حدود نیمی از نفتی که از چاه‌های نفت بیرون کشیده می‌شود، به عنوان سوخت کاربرد دارد.

• در برج تقطیر نفت خام، مواد بزرگ‌تر و سنگین‌تر در ارتفاع‌های بالاتری از آن جدا می‌شوند که دما بالاتر است.

• نفت خام یکی از سوخت‌های فسیلی است که نقش دوم آن، ماده اولیه در تهیه کالاهای است.

• یکی از مسائل مهم در تأمین سوخت، انتقال آن است که حدود ۶۶ درصد توسط نفتکش جاده‌پیما و کشتی‌ها صورت می‌گیرد.

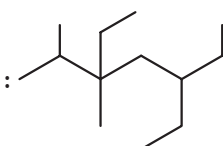
۱) نادرست - درست - نادرست - درست - نادرست ۲) نادرست - درست - درست - درست - نادرست

۳) درست - درست - نادرست - درست - نادرست ۴) درست - درست - نادرست - درست - درست

۷۳- نام کدام آلکان‌ها با فرمول ارائه‌شده مطابقت دارد و اختلاف جرم مولی آن‌ها برحسب گرم کدام است؟

($H = 1$, $C = 12 : g.mol^{-1}$)

الف) $(CH_3)_2CH(CH_2)_2C(CH_3)_3$: ۲، ۵ - دی‌متیل هگزان

ب)  : ۳، ۵ - دی‌اتیل، ۲، ۳ - دی‌متیل هپتان

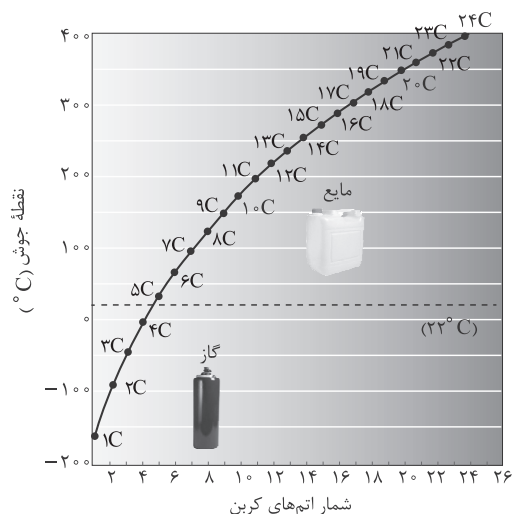
پ) $CH_3-CH_2-CH(CH_3)-CH_2-CH_2-CH_2-CH_3$: ۳ - اتیل، ۲، ۵ - دی‌متیل هپتان

ت) $(C_2H_5)(CH_3)CH(CH_2)_4C(C_2H_5)(CH_3)_2$: ۳، ۸، ۸ - تری‌متیل دکان

۱) الف)، ت) - ۵۶ ۲) پ)، ت) - ۵۶ ۳) ب)، پ) - ۲۸ ۴) الف)، ب) - ۲۸

محل انجام محاسبات

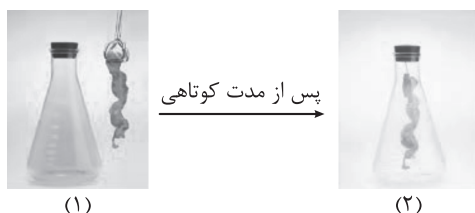
۷۴- با توجه به نمودار زیر که تغییر نقطه جوش آلکان‌های راست‌زنجیر را برحسب شمار اتم‌های کربن آن‌ها در فشار یک اتمسفر نشان می‌دهد، چند مورد از مطالب زیر درست‌اند؟ ($C = 12, H = 1: g.mol^{-1}$)



- اگر آلکان A، C_{67} پیوند اشتراکی داشته باشد، در دمایی به جوش می‌آید که می‌تواند با گاز هیدروژن واکنش دهد.
- در دمای $420K$ ، سه آلکان به حالت گاز می‌باشند.
- در دمایی که اوکتان به جوش می‌آید، آب نیز به حالت بخار یافت می‌شود.
- با کاهش تعداد پیوندهای $C-C$ ، اختلاف نقطه جوش دوآلکان متوالی افزایش می‌یابد.

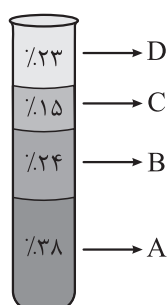
۱ (۱) ۳ (۲) ۲ (۳) ۴ (۴)

۷۵- کدام گزینه در رابطه با واکنش نشان داده شده در شکل زیر، درست است؟



- (۱) نافلز موجود در ظرف، در واکنش با گاز اتن، محلولی بی‌رنگ تولید می‌کند.
- (۲) در ساختار چربی به کاررفته همانند سیکلوهگزان، پیوندهای کربن - کربن یگانه و دوگانه یافت می‌شود.
- (۳) بخار موجود در ظرف (۱) مربوط به عنصری از گروه ۱۷ و دوره چهارم است و دمای انجام این واکنش از $25^\circ C$ بیشتر است.
- (۴) اگر به جای ماده موجود در ارلن از گاز هیدروژن استفاده کنیم، واکنشی انجام نمی‌شود.

۷۶- با توجه به شکل زیر که درصد اجزای سازنده نفت برنت دریای شمال را نشان می‌دهد، کدام موارد از مطالب زیر درست است؟



- الف C، نفت سفید و شامل آلکان‌هایی با ۲۲ تا ۳۲ اتم هیدروژن است.
 - ب) درصد B در این نفت نسبت به سایر نفت‌های عربی و ایران، بیشتر است.
 - پ) A، گازوئیل بوده و نسبت به نفت سفید در ارتفاع بالاتری از برج تقطیر جدا می‌شود.
 - ت) درصد ماده A همانند D در این نفت، از نفت سبک کشورهای عربی بیشتر است.
- ۱) الف - پ ۲) الف - ب ۳) پ - ت ۴) فقط الف

محل انجام محاسبات

۷۷- از سوختن کامل یک مول از نوعی هیدروکربن، $\frac{89}{6}$ لیتر گاز در شرایط STP تولید می شود. کدام گزینه درباره این هیدروکربن نمی تواند درست باشد؟ (درصد جرمی کربن در این هیدروکربن، ۶ برابر هیدروژن است و $C = 12, O = 16, H = 1: g.mol^{-1}$)

(۱) دومین عضو خانواده هیدروکربن های حلقوی سیر شده است و در ساختار آن ۴ پیوند $C-C$ وجود دارد.

(۲) سومین عضو خانواده آلکن ها بوده و شمار پیوندهای $C-H$ در آن، چهار برابر شمار پیوندهای $C-C$ است.

(۳) شمار پیوندهای $C-H$ در ساختار آن با نفتالن برابر است.

(۴) هیدروکربنی سیر شده است و آلکان راست زنجیر هم کربن با آن، در دمای اتاق به حالت مایع است.

۷۸- مخلوطی به حجم ۱۰۰ لیتر از گازهای اتان و اتین را با مقدار کافی هیدروژن در یک ظرف در بسته ترکیب می کنیم تا واکنش (های) مربوطه به طور کامل انجام شود. چنانچه حجم مولی گازها برابر ۲۰ لیتر بر مول باشد، جرم مخلوط نهایی چند گرم خواهد بود؟ ($C = 12, H = 1: g.mol^{-1}$)

(۴) ۹۰

(۳) ۱۸۰

(۲) ۱۲۰

(۱) ۱۵۰

۷۹- اگر در ۳ آزمایش مختلف، ۲ ماده غذایی با جرم های متفاوت را بسوزانیم و شعله حاصل از سوختن آن ها را زیر مقدار یکسانی آب نگه داریم، با توجه به جدول، کدام گزینه نادرست است؟

شماره آزمایش	ماده غذایی	دمای آغازی آب ($^{\circ}C$)	دمای پایانی آب ($^{\circ}C$)
۱	یک گرم یا $\frac{1}{4}$ مغز گردو	۲۰	θ_1
۲	A گرم مغز گردو	۲۰	۴۰
۳	یک گرم ماکارونی	۱۵	θ_2

(۱) اگر در آزمایش (۲) جرم گردوی سوزانده شده دو برابر آزمایش (۱) باشد، رابطه $\theta_1 < 40$ برقرار خواهد بود.

(۲) اگر در آزمایش های (۲) و (۳) به میزان یکسانی گرما آزاد شده باشد، دمای نهایی آزمایش (۳) نیز برابر $40^{\circ}C$ خواهد بود.

(۳) از آزمایش های (۲) و (۳) درمی یابیم که نوع ماده غذایی سوزانده شده در میزان انرژی آزاد شده مؤثر است.

(۴) اگر $\theta_1 = \theta_2$ باشد، می توان دریافت که انرژی حاصل از سوزاندن هر گرم ماکارونی بیشتر از هر گرم گردو خواهد بود.

۸۰- با توجه به شکل های زیر، چند مورد از مطالب زیر درست است؟

(الف) انرژی گرمایی ظرف A از B کم تر است، اما میانگین تندی مولکول های آب در هر دو ظرف یکسان می باشد.

(ب) یکای رایج کمیتی که نشان دهنده میزان گرمی و سردی نمونه های A و B است، kJ است.

(پ) مجموع انرژی جنبشی ذره های سازنده A و B به دلیل یکسان بودن دمای آن ها، برابر است.

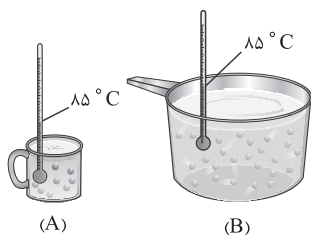
(ت) با افزایش دمای هر دو نمونه، جنبش های نامنظم آن ها تنها بعد از تغییر حالت فیزیکی و تبدیل شدن به گاز، افزایش می یابد.

(۴) ۳

(۳) ۲

(۲) ۱

(۱) صفر



محل انجام محاسبات

- مهم ترین ویژگی های آزمون های خیلی سبز در پایه های دهم و یازدهم:
- ۱- برگزاری دست کم یک آزمون در ماه بر اساس روال تدریس در مدرسه
 - ۲- برگزاری آزمون های ویژه برای زمان های خاص (میان ترم، ترم، پس از عیدو...)
 - ۳- امکان جبران عقب ماندگی ها یا دوره مطالب برای تثبیت آنها

پاسخ نامه تشریحی آزمون را ساعت ۱۶ از صفحه
شخصی خودتان در سایت آزمون خیلی سبز دریافت کنید.



azmoon.kheilisabz.com

اساتید، مشاوران و دانش آموزان گرامی؛
نظرات، پیشنهادات، انتقادات و بازخوردهای خود نسبت به سؤالات این آزمون را می توانید
از طریق آیدی @Kheilisabz_edit در همه پیام رسان ها با ما به اشتراک بگذارید.

پاسخ نامه آزمون آزمایشی خلی سبز



مرحله چهارم

پایه یازدهم

تاریخ برگزاری: ۳۰/آذر/۱۴۰۳

سال تحصیلی ۱۴۰۳-۰۴

نام درس	طراحان به ترتیب حروف الفبا
حسابان	زهره پورشیر - شمیم پهلوان شریف - فرشاد حسن زاده - خشایار خاکی - مجید رفعتی - علی شهبابی محمد گودرزی - میلاد منصوری - حسین نادری - محمدسجاد نقیه
هندسه	امیرحسین ابومحبوب - محمدطاهر شعاعی - صبا مهدوی - حسین هاشمی طاهری
آمار و احتمال	مسعود شفیعی - عطا صادقی - سروش موئینی
فیزیک	یاشار انگوتی - نوید شاهی
شیمی	فاطمه صیقلی - محمد کهنه پوشی - امیرحسین مسلمی

نام درس	مسئول درس	گزینشگر	مؤلف پاسخ نامه	کارشناسان علمی	ویراستاران به ترتیب حروف الفبا
حسابان	محمدسجاد نقیه	محمدسجاد نقیه	عاطفه خان محمدی	سجاد داوطلب عادل حسینی	عادل حسینی سعید خان بابائی
هندسه	امیرحسین ابومحبوب	امیرحسین ابومحبوب	فرزانه خاکپاش	فرزانه خاکپاش	زهره جالینوسی مهدی خوشنویس علی رضایی ماهان فنی فر
آمار و احتمال	مسعود شفیعی	مسعود شفیعی	مسعود شفیعی	امیرحسین ابومحبوب سعید قندچی	علیرضا کاظمی بقا فرزانه خاکپاش ابوالفضل ناصری
فیزیک	نوید شاهی	یاشار انگوتی	علیرضا عبداللہی	علیرضا جباری	مجتبی حسین پور ماهان فنی فر پارسا مرادی ابوالفضل ناصری
شیمی	یاسر عبداللہی	امیرحسین مسلمی	امیرحسین مسلمی	مهسا خاکی	احسان رحیمی هومن زندی متین قنبری

سرپرست محتوایی: فاطمه آقاجانیپور



Azmoon.kheylisabz.com

آزمون آزمایشی خلی سبز

سرپرست تولید	الناز علی یاری زاده
ویراستاران فنی	راضیه سادات خلدی نسب - زهرا صفری محیا غنی فرد - زهرا فرهادی مهر مریم مسلمی زاده - ساعده نمازی
رسام	مونا آندستا ندا فخاری سارا گنجی آزادپور
صفحه آرایی	سحر ازلی تاش - مریم حسین زاده سارا حاتمی - سپیده سخایی مائده صبری - نیلوفر فرخجسته مهدیه گل پور - لیلا نعمت پور



به ازای چند عدد طبیعی یک رقمی n ، دو تابع $f(x) = \cos n\pi$ و $g(x) = 1$ با هم برابر هستند؟

۱

۷ (۱)

۶ (۲)

۵ (۳)

۴ (۴)



پاسخ خیلی تشریحی ✓ می دانیم که $\cos n\pi$ برابر $(-1)^n$ است؛ پس $f(x) = (-1)^n$ و بدیهی است که فقط به ازای مقادیر زوج n دو تابع با هم مساوی می شوند:

$$n \in \{2, 4, 6, 8\}$$

کدام تابع یک به یک نیست؟ ([] ، نماد جزء صحیح است.)

۲

$$y = x + [-x] \quad (۲)$$

$$y = |x| + 2x \quad (۱)$$

$$y = x - [-x] \quad (۴)$$

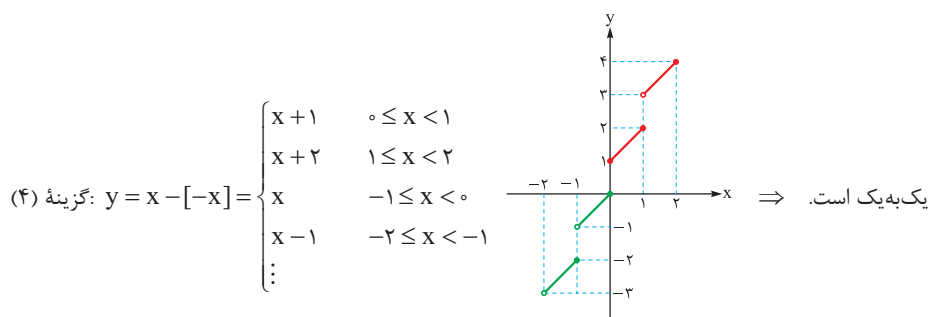
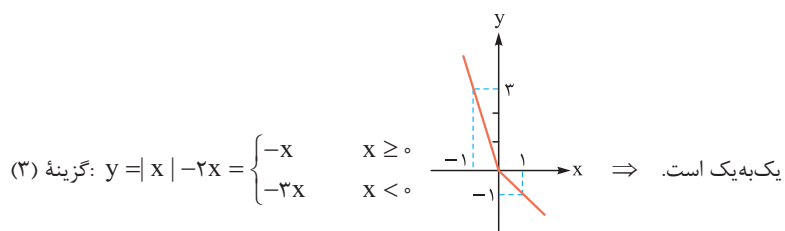
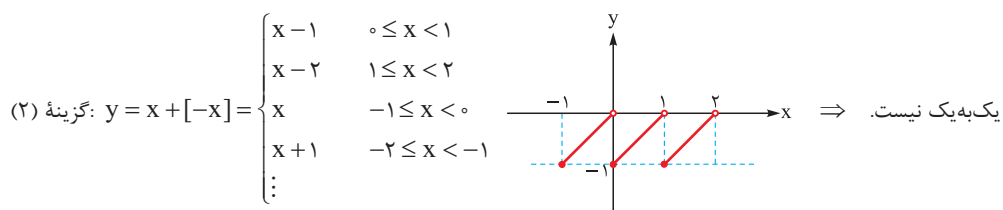
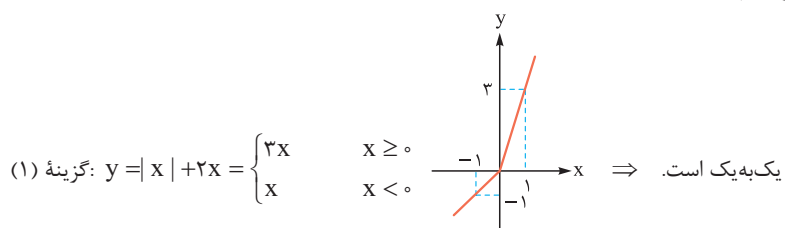
$$y = |x| - 2x \quad (۳)$$



Hint

از رسم نمودار کمک بگیرید.

پاسخ خیلی تشریحی ✓ هر یک از گزینه‌ها را بررسی می‌کنیم:



دو تابع $f = \{(-1, 2), (1, 6), (2, 9), (3, -1)\}$ و $g(x) = x + \sqrt{x}$ مفروض اند. اگر $(g^{-1} \circ f)(a) = 1$ باشد، مقدار a کدام است؟

۳

۳ (۴

۲ (۳

۱ (۲

-۱ (۱



هر کدام از گزینه‌ها رو به جای a جای‌گذاری کن و امتحان کن.

Hint

پاسخ خیلی تشریحی ✓ a عضو دامنه تابع f است و هر کدام را امتحان می‌کنیم:

$$a = -1: f(a = -1) = 2 \Rightarrow g^{-1}(f(a)) = g^{-1}(2) = 1 \xrightarrow{\text{آیا } g(1)=2 \text{ است؟}} g(1) = 1 + 1 = 2$$

جواب را پیدا کردیم، اما گزینه‌های نادرست را هم چک می‌کنیم: $a = 1: f(a = 1) = 6 \Rightarrow g^{-1}(6) = 1 \Rightarrow g(1) \neq 6$

$$a = 2: f(a = 2) = 9 \Rightarrow g^{-1}(f(a)) = g^{-1}(9) = 1 \Rightarrow g(1) \neq 9$$

$$a = 3: f(a = 3) = -1 \Rightarrow g^{-1}(f(a)) = g^{-1}(-1) = 1 \Rightarrow g(1) \neq -1$$

۴ دو تابع $f(x) = \sqrt{x-1}$ و $g(x) = \sqrt{3-x}$ مفروض اند. دامنه تابع $g \circ f$ شامل چند عدد صحیح است؟

۱۰ (۴)

۱۱ (۳)

۸ (۲)

۹ (۱)



درس Box

ترکیب دو تابع f و g را با نماد $f \circ g$ (یا $g \circ f$) نمایش می‌دهیم و به این معنی است که به ازای هر x تابع f ضابطه تابع g گذاشته شود. در تابع مرکب $f \circ g$ موضوع دامنه بسیار مهم است و به صورت زیر حساب می‌کنیم:

$$D_{f \circ g} = \{x \in D_g \mid g(x) \in D_f\}$$

پاسخ خیلی تشریحی ✓ گام اول: ابتدا دامنه‌های دو تابع را حساب می‌کنیم:

$$D_f : x - 1 \geq 0 \Rightarrow x \geq 1$$

$$D_g : 3 - x \geq 0 \Rightarrow x \leq 3$$

گام دوم: حالا می‌رویم سراغ دامنه تابع $g \circ f$ ، طبق تعریف داریم:

$$D_{g \circ f} = \{x \in D_f \mid f(x) \in D_g\}$$

و D_f و D_g را جای‌گذاری می‌کنیم.

$$D_{g \circ f} = \{x \geq 1 \mid \sqrt{x-1} \leq 3\} = \{x \geq 1 \mid x-1 \leq 9\} = \{x \geq 1 \mid x \leq 10\}$$

گام سوم: پس دامنه تابع $g \circ f$ بازه $[1, 10]$ است که شامل ۱۰ عدد صحیح است.

اگر $f(x) = x^2 + 1$ و $(fog)(x) = 1 + x$ باشد، ضابطه تابع g کدام می تواند باشد؟

$$g(x) = \sqrt{|x|} \quad (2)$$

$$g(x) = \sqrt{-x} \quad (1)$$

$$g(x) = -\sqrt{|x|} \quad (4)$$

$$g(x) = -\sqrt{x} \quad (3)$$

Hint به جای x توی ضابطه f عبارت $g(x)$ بذار و یک معادله با مجهول $g(x)$ حل کن.

در ترکیب دو تابع f و g ، سه ضابطه داریم که با داشتن دو ضابطه از آن ها می توانیم به صورت زیر ضابطه سوم را به دست آوریم:

fog	g	f
به جای هر x ضابطه f ضابطه تابع g را می گذاریم.	✓	✓
✓	✓	ضابطه وارون تابع g را در ضابطه تابع fog جای گذاری می کنیم.
✓	به جای x های ضابطه f ، $g(x)$ قرار می دهیم و با ضابطه fog برابر قرار می دهیم تا یک معادله با متغیر $g(x)$ حل کنیم.	✓

پاسخ خیلی تشریحی ✓ گام اول: ابتدا به جای x های ضابطه تابع f عبارت $g(x)$ قرار می دهیم:

$$f(g(x)) = (g(x))^2 + 1$$

$$1 + (g(x))^2 = 1 + x \Rightarrow (g(x))^2 = x$$

$$g(x) = \pm \sqrt{x}$$

و با $1 + x$ برابر قرار می دهیم:

گام دوم: از طرفین تساوی بالا ریشه می گیریم و داریم:

اگر دامنه تابع $f(x) = \frac{x(ax-2a)|x|}{x+a}$ به صورت $\mathbb{R} - \{2\}$ باشد، برد تابع $f(x)$ کدام عدد زیر را شامل نمی‌شود؟

-۸ (۴)

-۴ (۳)

۸ (۲)

۴ (۱)



Hint ریشه مخرج برابر با $x = 2$ است. a را پیدا کنید و در ضابطه f جای‌گذاری کنید.

پاسخ خیلی تشریحی ✓ **گام اول:** به ازای $x = 2$ ، مخرج باید صفر باشد تا دامنه تابع f به صورت $\mathbb{R} - \{2\}$ شود؛ پس داریم:

$$x + a = 0 \xrightarrow{x=2} a = -2$$

گام دوم: مقدار a به‌دست‌آمده را در تابع f جای‌گذاری می‌کنیم:

$$f(x) = \frac{x \overbrace{(-2x+4)}^{-2(x-2)} |x|}{x-2} = -2x |x|, x \neq 2$$

گام سوم: $x \neq 2$ است؛ پس به ازای این مقدار، تابع f تعریف نشده است:

$$f(2) = -2 \times 2 \times 2 = -8$$

پس $y = -8$ شامل برد تابع f نمی‌شود.

۷ اگر دامنه و برد تابع $f(x) = b\sqrt{(a-2)x + a^2 - 2a - 2} + b^2 - b$ به ترتیب $[-3, -\infty)$ و $[2, +\infty)$ باشد، آن گاه زوج مرتب (a, b) کدام است؟

(۴) (۱, ۲)

(۳) (۱, -۱)

(۲) (۲, ۴)

(۱) (-۱, ۴)



پاسخ خیلی تشریحی ✓ گام اول: برای این که دامنه تابع f را پیدا کنیم، باید زیر رادیکال با فرجه زوج نامنفی باشد؛ پس:

$$f(x) = b\sqrt{(a-2)x + a^2 - 2a - 2} + b^2 - b \Rightarrow (a-2)x + (a^2 - 2a - 2) \geq 0$$

از آنجایی که دامنه به صورت $[-3, -\infty)$ داده شده، پس به ازای $x = -3$ عبارت باید صفر باشد و چون یک نامعادله درجه اول داریم، ضریب x باید منفی باشد تا دامنه به صورت $[-3, -\infty)$ تعریف شود؛ پس:

$$1) x = -3 \Rightarrow -3a + 6 + a^2 - 2a - 2 = 0 \Rightarrow a^2 - 5a + 4 = 0 \Rightarrow (a-1)(a-4) = 0 \Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ a = 4 \end{cases}$$

$$2) a - 2 < 0 \Rightarrow a < 2$$

پس $a = 1$ قابل قبول است.

گام دوم: برد تابع به صورت $[2, +\infty)$ تعریف شده است. به ازای $x = -3$ ، حاصل رادیکال برابر با صفر است؛ پس کمترین مقدار برد تابع در این نقطه رخ می دهد:

$$f(-3) = 2 \Rightarrow b^2 - b = 2 \Rightarrow b^2 - b - 2 = 0 \Rightarrow (b-2)(b+1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} b = 2 \\ b = -1 \end{cases}$$

از آنجایی که برد به صورت $[2, +\infty)$ است، باید b مثبت باشد تا در حاصل رادیکال که ضرب می شود، مقادیر برد به سمت $+\infty$ بروند؛ پس $b = 2$ قابل قبول است.

اگر $[x] = [2x]$ ، آن گاه مجموعه مقادیر $[3x]$ چند عضو دارد؟ ([] ، نماد جزء صحیح است.)

۳ (۴

۵ (۳

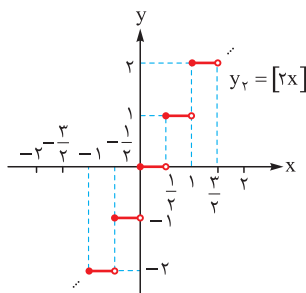
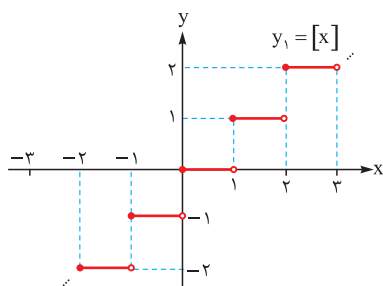
۴ (۲

۲ (۱



Hint دو نمودار $y_1 = [x]$ و $y_2 = [2x]$ را رسم کنید.

پاسخ خیلی تشریحی ✓ گام اول: نمودار دو تابع $y_1 = [x]$ و $y_2 = [2x]$ را رسم می کنیم:



بازه هایی را که در آن ها رابطه $[x] = [2x]$ است را می توان از روی نمودارها مشخص نمود. بازه $x \in [-\frac{1}{4}, \frac{1}{4})$ جواب است.

گام دوم: پس $3x \in [-\frac{3}{4}, \frac{3}{4})$ است و در نتیجه $[3x] = \{-2, -1, 0, 1\}$ می باشد.

۹. برد تابع $f(x) = \frac{12}{x - [x] + 3}$ کدام است؟ ([] ، نماد جزء صحیح است.)

(۱) $(2, 5]$

(۲) $(3, 4]$

(۳) $[4, 5]$

(۴) $(1, 2]$

مشاوره روی ویژگی‌های قدرمطلق و جزء صحیح کار کنید. رد پای آن‌ها در بسیاری از سؤال‌های کنکور دیده می‌شود.

پاسخ خیلی تشریحی ✓

گام اول: رابطه $0 \leq x - [x] < 1$ همواره برقرار است. سعی می‌کنیم ضابطه تابع f را بسازیم. داریم:

$$3 \leq x - [x] + 3 < 4 \xrightarrow{\text{معکوس می‌کنیم}} \frac{1}{4} < \frac{1}{x - [x] + 3} \leq \frac{1}{3} \xrightarrow{\times 12} 3 < \frac{12}{x - [x] + 3} \leq 4$$

گام دوم: بنابراین برد تابع f به صورت $(3, 4]$ است.

ویژگی‌های جزء صحیح: اگر n عددی صحیح باشد:

$$1) \quad n \leq x < n+1 \Leftrightarrow [x] = n$$

$$2) \quad 0 \leq x - [x] < 1$$

$$3) \quad [x] + [-x] = \begin{cases} 0 & x \in \mathbb{Z} \\ -1 & x \notin \mathbb{Z} \end{cases}$$

۱۰ به ازای چند مقدار صحیح m تابع $f(x) = \begin{cases} 2-3x & ; x \leq -\frac{3}{4} \\ 2+2mx-x^2 & ; x > -\frac{3}{4} \end{cases}$ در $\mathbb{R}$ تابعی یک‌به‌یک است؟

(۱) صفر

(۲) ۱

(۳) ۲

(۴) بی‌شمار

مشاوره تابع درجه دوم و ویژگی‌های آن، خیلی خوب با بقیه مطالب ترکیب می‌شوند. به عنوان یک مطلب پایه‌ای روی نمودار سهمی، رأس سهمی، روابط ریشه‌ها و ... کار کنید.

Hint

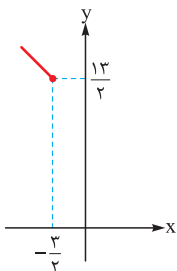
اول تکلیف $y_1 = 2-3x$ را به ازای $x \leq -\frac{3}{4}$ از نظر صعودی یا نزولی بودن تعیین کنید.

تابع یک‌به‌یک

درس‌Box

تابع f یک‌به‌یک است، هرگاه هر x به یک y منحصر به فرد نظیر شود؛ به زبان دیگر هر خط افقی نمودار را حداکثر در یک نقطه قطع کند.

گام اول: ابتدا وضعیت $y = 2-3x$ را به ازای $x \leq -\frac{3}{4}$ مشخص می‌کنیم. از رسم نمودار کمک می‌گیریم. در این بازه، خط نزولی است. **پاسخ خیلی تشریحی ✓**



گام دوم: برای این که تابع f در $\mathbb{R}$ یک‌به‌یک باشد، باید اولاً $y = 2+2mx-x^2$ به ازای $x > -\frac{3}{4}$ یک‌به‌یک باشد و ثانیاً به ازای نقطه مرزی $x = -\frac{3}{4}$ ، حاصل آن بیشتر از $y = \frac{13}{2}$ نباشد.

برای شرط اول، باید طول رأس سهمی بیشتر از $x = -\frac{3}{4}$ نباشد:

$$x_s = -\frac{b}{2a} = -\frac{2m}{-2} = m \leq -\frac{3}{4}$$

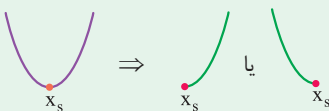
$$x = -\frac{3}{4} \Rightarrow 2 + 2m(-\frac{3}{4}) - (\frac{9}{16}) \leq \frac{13}{2} \Rightarrow 2 - \frac{3m}{2} - \frac{9}{16} \leq \frac{13}{2} \Rightarrow 3m \geq -\frac{27}{4} \Rightarrow m \geq -\frac{9}{4}$$

گام سوم: بنابراین $-\frac{9}{4} \leq m \leq -\frac{3}{4}$ است که در این بازه ۱ عدد صحیح برای m وجود دارد.

ممکن است تابعی یک‌به‌یک نباشد (مثل سهمی با دامنه $\mathbb{R}$)، اما با محدود کردن دامنه یک‌به‌یک شود.

در سهمی‌های $y = ax^2 + bx + c$ اگر دامنه تابع را به $[x_s, +\infty)$ یا $(-\infty, x_s]$ محدود کنیم، تابع یک‌به‌یک می‌شود.

$$(x_s = -\frac{b}{2a})$$



نکته

نکته

۱۱ اگر تابع $y = \frac{ax+4}{2x-1}$ یک به یک نباشد، مقدار $f(f(f(\frac{\sqrt{2}}{3})))$ کدام است؟

۴ (۱)

۸ (۲)

۴ (۳)



تابع هموگرافیک $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$ (ad - bc ≠ ۰, c ≠ ۰) در یک نگاه

دروس Box

$$f'(x) = \frac{ad-bc}{(cx+d)^2} \quad (۱)$$

$$cx+d=0 \Rightarrow x=-\frac{d}{c}$$

(۲) تابع یک مجانب قائم دارد که ریشه مخرج است:

$$y = \frac{a}{c}$$

(۳) تابع یک مجانب افقی دارد که نسبت ضرایب X صورت به مخرج است:

(۴) نمودار تابع به یکی از دو صورت زیر است:

شرط	نمودار	وضعیت یکنوایی	وضعیت تقعر (نقطه عطف ندارد)
$ad-bc > 0$		در هر شاخه صعودی	ابتدا رو به بالا و بعد رو به پایین
$ad-bc < 0$		در هر شاخه نزولی	ابتدا رو به پایین و بعد رو به بالا

$$f^{-1}(x) = \frac{-da+b}{cx-a} \quad (۵) \text{ برای وارون کردن جای } d \text{ و } a \text{ را عوض کرده و آن‌ها را قرینه می‌کنیم.}$$

(۶) اگر $c=0$ ، تابع هموگرافیک نبوده و تبدیل به تابع خطی می‌شود.

(۷) اگر $ad-bc=0$ باشد، صورت و مخرج ساده شده و تابع تبدیل به تابع ثابت می‌گردد.

(۸) اگر بازه شامل مجانب قائم باشد، تابع در آن بازه غیریکنواست.

پاسخ خیلی تشریحی ✓ گام اول: تابع هموگرافیک، زمانی یک به یک نیست که رابطه $ad-bc=0$ برقرار شود $(f(x) = \frac{ax+b}{cx+d})$

$$f(x) = \frac{ax+4}{2x-1} \Rightarrow -a-4=0 \Rightarrow a=-4$$

$$\text{گام دوم: پس } f(x) = \frac{-4(2x-1)}{-2x-1} = -4 \text{ است؛ پس } f(f(f(\frac{\sqrt{2}}{3}))) = -4 \text{ می‌شود.}$$

۱۲ اگر $f(x)$ تابع خطی باشد و رابطه $f(x)f^{-1}(x) = (x-1)^2$ برقرار باشد، مقدار $f(5)$ کدام است؟

۲ (۴)

-۴ (۳)

-۱ (۲)

۱ (۱)



درس Box

برای به دست آوردن ضابطه تابع وارون، مراحل زیر را طی می کنیم:

۱) به جای $f(x)$ قرار می دهیم y .

۲) x را در یک طرف تساوی تنها می کنیم. (x بر حسب y)

۳) جای y و x را عوض می کنیم.

پاسخ خیلی تشریحی ✓ گام اول: تابع خطی f را به صورت $f(x) = ax + b$ در نظر می گیریم. وارون این تابع را پیدا می کنیم:

$$y = ax + b \Rightarrow x = \frac{y-b}{a} \Rightarrow f^{-1}(x) = \frac{x-b}{a}$$

گام دوم: با جای گذاری f و f^{-1} در عبارت داده شده داریم:

$$f(x) \times f^{-1}(x) = (x-1)^2 \Rightarrow (ax+b) \frac{(x-b)}{a} = (x-1)^2$$

$$\Rightarrow ax^2 - abx + bx - b^2 = a(x^2 - 2x + 1) \Rightarrow ax^2 + (b-ab)x - b^2 = ax^2 - 2ax + a$$

$$\xrightarrow{\text{متحدیاهم هستند.}} \begin{cases} b-ab = -2a \\ -b^2 = a \end{cases} \xrightarrow{\text{جای گذاری دومی در اولی}} b+b^2 = 2b^2 \Rightarrow b(b^2 - 2b + 1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} b=0 \\ b=1 \end{cases}$$

مقدار $b=0$ قابل قبول نیست، چون در این صورت $a=0$ و در نتیجه $f(x)=0$ می شود.

به ازای $b=1$ ، $a=-1$ است و $f(x) = -x+1$ می شود.

گام سوم: حاصل $f(5) = -5+1 = -4$ است.

۱۳ اگر $f(x) = 2x - 1$ باشد، دامنه تابع $y = \sqrt{f^{-1}(3x - 2) - 6x}$ کدام است؟

(۲) $(-\infty, \frac{1}{9}]$

(۱) $[\frac{1}{9}, +\infty)$

(۴) $(-\infty, -\frac{1}{9}]$

(۳) $[-\frac{1}{9}, +\infty)$



پاسخ خیلی تشریحی ✓ گام اول: از تابع f داده شده، ابتدا وارون آن را پیدا می کنیم:

$$f(x) = 2x - 1 \Rightarrow y + 1 = 2x \Rightarrow x = \frac{y+1}{2} \Rightarrow f^{-1}(x) = \frac{x+1}{2}$$

گام دوم: حالا $f^{-1}(3x - 2) = \frac{3x - 2 + 1}{2} = \frac{3x - 1}{2}$ را در تابع y قرار داده و دامنه آن را به دست می آوریم:

$$y = \sqrt{f^{-1}(3x - 2) - 6x} = \sqrt{\frac{3x - 1}{2} - 6x} = \sqrt{\frac{3x - 1 - 12x}{2}} = \sqrt{\frac{-9x - 1}{2}}$$

$$\xrightarrow{\text{شرط دامنه}} \frac{-9x - 1}{2} \geq 0 \Rightarrow -9x - 1 \geq 0 \Rightarrow 9x \leq -1 \Rightarrow x \leq -\frac{1}{9}$$

پس دامنه تابع به صورت $(-\infty, -\frac{1}{9}]$ است.

اگر $f(x) = x + \sqrt{x}$ و $g(x) = 2x^2 - \sqrt{x}$ ، معادله $(g-f)(x) = 1$ دارای چند ریشه است؟

۳ (۴)

۲ (۳)

۱ (۲)

۰ (۱)



معادله را تشکیل دهید و از رسم نمودار برای حل معادله کمک بگیرید.

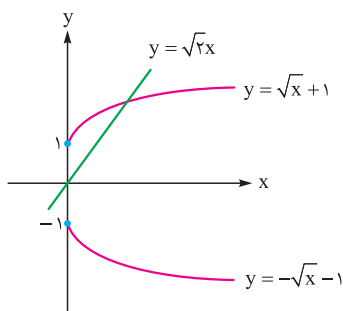
Hint

پاسخ خیلی تشریحی ✓ گام اول: معادله را تشکیل می‌دهیم:

$$(g-f)(x) = g(x) - f(x) = 1 \Rightarrow 2x^2 - \sqrt{x} - (x + \sqrt{x}) = 1 \Rightarrow 2x^2 - \sqrt{x} - x - \sqrt{x} = 1$$

$$\Rightarrow 2x^2 = \underbrace{x + 2\sqrt{x} + 1}_{(\sqrt{x}+1)^2} \Rightarrow \sqrt{2x} = \pm(\sqrt{x} + 1) \Rightarrow \begin{cases} \sqrt{2x} = \sqrt{x} + 1 \\ \sqrt{2x} = -\sqrt{x} - 1 \end{cases}$$

گام دوم: برای حل معادلات بالا در $x > 0$ ، از روش هندسی استفاده می‌کنیم:



از نمودارها مشخص است که معادله مورد نظر فقط یک جواب دارد.

۱۵ اگر $\begin{cases} f: \{-2, 1, 3\} \rightarrow \mathbb{R} \\ f(x) = 3x + 1 \end{cases}$ و $\begin{cases} g: \{0, 1, 2, 3\} \rightarrow \mathbb{R} \\ g(x) = 2x - 1 \end{cases}$ باشد، آن مجموع اعضای برد تابع $3f + g$ کدام است؟

۴۹ (۲)

۵۰ (۱)

۴۷ (۴)

۴۸ (۳)



مشاوره اعمال روی توابع از مهم‌ترین موضوعاتی است که حتماً از آن‌ها در کنکور سؤال می‌آید.

پاسخ خیلی تشریحی ✓ گام اول: هر یک از توابع f و g را با توجه به دامنه داده شده به دست می‌آوریم:

$$\begin{cases} f: \{-2, 1, 3\} \rightarrow \mathbb{R} \\ f(x) = 3x + 1 \end{cases} \Rightarrow f = \{(-2, -5), (1, 4), (3, 10)\}$$

$$\begin{cases} g: \{0, 1, 2, 3\} \rightarrow \mathbb{R} \\ g(x) = 2x - 1 \end{cases} \Rightarrow g = \{(0, -1), (1, 1), (2, 3), (3, 5)\}$$

گام دوم: برای این که تابع $(3f + g)(x)$ را به دست آوریم، ابتدا اشتراک دامنه‌های تابع f و g را مشخص می‌کنیم:

$$D_f \cap D_g = \{1, 3\} \Rightarrow 3f(x) + g(x) = \{(1, 3 \times 4 + 1), (3, 3 \times 10 + 5)\} = \{(1, 13), (3, 35)\}$$

گام سوم: مجموع اعضای برد تابع $3f + g$ ، برابر با ۴۸ می‌شود.

۱۶ اگر $f(x) = 2x + 3|x|$ و $g(x) = 3x - 2|x|$ ، مجموع اعضای برد تابع $\frac{f}{g}$ کدام است؟

$$\frac{26}{5} \quad (2)$$

$$-\frac{24}{5} \quad (1)$$

$$\frac{24}{5} \quad (4)$$

$$-\frac{26}{5} \quad (3)$$

مشاوره در تعیین تابع $\frac{f}{g}$ به ریشه‌های مخرج (صفرهای g) توجه کنید. حواستان باشد آن‌ها را از دامنه خارج کنید.

دکتر Box

به دست آوردن تابع $\frac{f}{g}$

وقتی قرار است یک ورودی به تابع $\frac{f}{g}$ وارد شود، این ورودی باید بتواند وارد هر دو تابع f و g شود؛ پس ورودی‌ها حتماً باید عضو اشتراک دامنه‌های f و g باشند. فرض کنید a ورودی تابع $\frac{f}{g}$ باشد، برای خروجی کافی است $\frac{f(a)}{g(a)}$ را محاسبه کنیم؛ یعنی خروجی f را بر خروجی g تقسیم کنیم. این مقدار وقتی تعریف شده است که $g(a) \neq 0$ ؛ پس اگر a ورودی‌ای باشد که $g(a) = 0$ شود، a نیز نمی‌تواند وارد تابع $\frac{f}{g}$ شود؛ پس:

$$D_{\frac{f}{g}} = D_f \cap D_g - \underbrace{\{x \mid g(x) = 0\}}_{\text{ریشه‌های } g}$$

فرض کنید $f = \{(1, 2), (2, 5), (3, -1)\}$ و $g = \{(1, 5), (2, 0)\}$ ، می‌خواهیم تابع $\frac{f}{g}$ را بسازیم. اول از همه، دامنه مشترک X (های مشترک) را در نظر می‌گیریم و به ازای هر کدام مقدار تابع‌ها (خروجی یا Y ها) را تقسیم می‌کنیم؛ یعنی:

$$\frac{f}{g} = \{(1, \frac{2}{5}), (2, \frac{5}{0})\} = \{(1, \frac{2}{5})\}$$

$\frac{f(1)}{g(1)} = \frac{2}{5}$ $\frac{f(2)}{g(2)} = \frac{5}{0}$ غیر قابل قبول

پاسخ خیلی تشریحی ✓ **گام اول:** برای این که تابع $\frac{f}{g}$ را تشکیل دهیم، ابتدا دامنه آن را مشخص می‌کنیم:

$$D_{\frac{f}{g}} = \{x \mid x \in D_f \cap D_g, g(x) \neq 0\}$$

$$\begin{cases} D_f = \mathbb{R} \\ D_g = \mathbb{R} \end{cases}, g(x) = 3x - 2|x| = 0 \Rightarrow 2|x| = 3x \xrightarrow{x \geq 0} 2x = 3x \Rightarrow x = 0 \Rightarrow D_{\frac{f}{g}} = \mathbb{R} - \{0\}$$

گام دوم: حالا تابع $\frac{f}{g}$ را تشکیل می‌دهیم:

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{2x + 3|x|}{3x - 2|x|} = \begin{cases} \frac{5x}{x} & x > 0 \\ -\frac{1}{5} & x < 0 \end{cases}$$

گام سوم: پس مجموع اعضای برد این تابع، برابر با $5 - \frac{1}{5} = \frac{24}{5}$ است.

نیمساز زاویه حاده بین خط $y = 8 - 2x$ و محور عرض‌ها خط $y = ax + b$ است. حاصل $4a + b$ کدام است؟

۱۷

$-4\sqrt{5}$ (۲)

$4\sqrt{5}$ (۱)

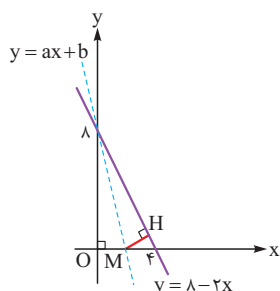
$-3\sqrt{5}$ (۴)

$3\sqrt{5}$ (۳)

Hint

یک نمودار رسم کنید و خط نیمساز را مشخص کنید. از ویژگی نقاط روی نیمساز استفاده کنید.

پاسخ خیلی تشریحی ✓ گام اول: طبق شکل رسم شده، داریم:



به یاد داریم که فاصله هر نقطه روی نیمساز یک زاویه، از دو ضلع آن زاویه به یک فاصله است، پس:

$$MO = MH$$

گام دوم: مختصات نقطه M را $M(\alpha, 0)$ در نظر می‌گیریم:

$$\begin{cases} MO = \alpha \\ MH = \frac{|0 + 2\alpha - 8|}{\sqrt{(-2)^2 + 1^2}} = \frac{|2\alpha - 8|}{\sqrt{5}} \end{cases} \xrightarrow{MO=MH} \frac{|2\alpha - 8|}{\sqrt{5}} = \alpha \xrightarrow{\alpha < 0} 2\alpha - 8 < 0$$

$$\Rightarrow \frac{-2\alpha + 8}{\sqrt{5}} = \alpha \Rightarrow \alpha = \frac{8}{2 + \sqrt{5}}$$

گام سوم: پس شیب خط $y = ax + b$ برابر است با: $a = \frac{-8}{\alpha} = -2 - \sqrt{5}$. همچنین عرض از مبدأ خط برابر $b = 8$ است. در نهایت داریم:

$$4a + b = 4(-2 - \sqrt{5}) + 8 = -4\sqrt{5}$$

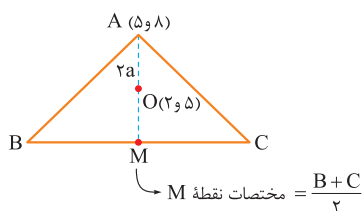
۱۸ اگر در مثلثی میانه‌ها همدیگر را نسبت به ۲ به ۱ قطع کنند و O محل هم‌رسی میانه‌ها و مختصات رأس A به صورت $\begin{vmatrix} 5 \\ 8 \end{vmatrix}$ باشد، مجموع طول و عرض نقاط M در میانه AM کدام است؟

۴ / ۵ (۴)

۴ (۳)

۳ / ۵ (۲)

۳ (۱)



پاسخ خیلی تشریحی ✓ گام اول: اطلاعات داده‌شده را در مثلث ABC مشخص می‌کنیم:

مختصات نقطه‌ای هم‌رسی میانه‌ها (O) از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$O = \frac{A+B+C}{3} \Rightarrow 3(2, 5) = A + \underbrace{(B+C)}_{2M} \Rightarrow 2M = (6, 15) - (5, 8) = (1, 7) \Rightarrow M = \left(\frac{1}{2}, \frac{7}{2}\right)$$

گام دوم: بنابراین مجموع طول و عرض مختصات نقطه M برابر با ۴ است.

نقاط $A(2,0)$ و $B(6,2)$ دو رأس از مثلث ABC هستند که رأس C آن روی $y = x^2$ حرکت می‌کند. اگر مساحت مثلث ABC مینیمم باشد،

طول نقطه C کدام است؟

$C(x, x^2)$

$$\frac{1}{4} (2)$$

$$\frac{1}{8} (4)$$

$$\frac{1}{2} (1)$$

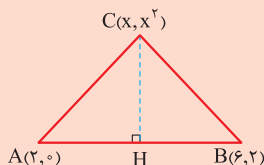
$$\frac{3}{4} (3)$$



مساحت مثلث ABC برابر با $S = \frac{1}{2} AB \times CH$ است به کمک فاصله نقطه از خط، CH را پیدا کنید.

Hint

پاسخ خیلی تشریحی ✓ **گام اول:** شکل زیر را در نظر بگیرید. ارتفاع CH را باید به دست آوریم تا بتوانیم مساحت مثلث ABC را محاسبه کنیم.



پس ابتدا معادله خط گذرنده از AB را به دست می‌آوریم:

$$y - 0 = \frac{2 - 0}{6 - 2}(x - 2) \Rightarrow y = \frac{1}{2}(x - 2) = \frac{1}{2}x - 1 \Rightarrow \frac{1}{2}x - y - 1 = 0$$

گام دوم: حالا فاصله نقطه C از خط را به دست می‌آوریم:

$$CH = \frac{|\frac{1}{2}x - x^2 - 1|}{\sqrt{\frac{1}{4} + 1}} = \frac{|2|x^2 - \frac{1}{2}x + 1|}{\sqrt{5}}$$

گام سوم: به کمک فاصله دو نقطه A و B ، مساحت مثلث ABC را به دست می‌آوریم:

$$AB = \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2} = \sqrt{(2 - 6)^2 + (0 - 2)^2} = \sqrt{16 + 4} = 2\sqrt{5}$$

$$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} AB \times CH = \frac{1}{2} \times 2\sqrt{5} \times \frac{|2|x^2 - \frac{1}{2}x + 1|}{\sqrt{5}} = |2|x^2 - \frac{1}{2}x + 1|$$

عبارت $2|x^2 - \frac{1}{2}x + 1|$ همواره مثبت؛ زیرا $a = 1 > 0$ و $\Delta = \frac{1}{4} - 4 < 0$ است؛ پس داریم:

$$S_{\Delta ABC} = 2x^2 - x + 2$$

گام چهارم: مقدار $S_{\min}$ ، به ازای طول رأس سهمی به دست می‌آید:

$$x_S = -\frac{b}{2a} = \frac{1}{4} \Rightarrow x_C = \frac{1}{4}$$

۲۰ خط $x = 2(y + 1)$ معادله یک ضلع و نقطه $A(2, 5)$ یک رأس مستطیل هستند. اگر طول قطر مستطیل $4\sqrt{5}$ باشد، مساحت آن

کدام است؟

۲۰ (۲) $\sqrt{3}$

۲۰ (۱)

۲۰ (۴) $\sqrt{2}$

۲۰ (۳) $\sqrt{5}$

مشاوره حتماً در سؤالات مربوط به هندسه و هندسه تحلیلی سعی کنید که شکل را رسم کنید، چراکه در حل سؤال کمک زیادی به شما می‌کند.

Hint

فاصله نقطه A از خط $x - 2y - 2 = 0$ را که طول یکی از اضلاع مستطیل است، به دست آورید، سپس با توجه به قضیه فیثاغورس، طول ضلع دیگر را به دست آورید تا مساحت مستطیل به دست آید.

نکته

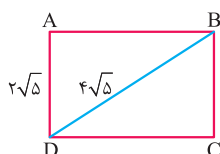
فاصله نقطه (x_0, y_0) از خط به معادله $ax + by + c = 0$ از رابطه زیر به دست می‌آید.

$$d = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

گام اول: ابتدا معادله خط $x = 2(y + 1)$ را به فرم $x - 2y - 2 = 0$ می‌نویسیم. نقطه $A(2, 5)$ ، در این معادله صدق نمی‌کند، پس بر روی ضلع مقابل به آن خط قرار دارد و فاصله نقطه A از خط داده شده برابر با طول یکی از اضلاع مستطیل است؛ پس:

$$d = \frac{|(2) - 2(5) + (-2)|}{\sqrt{1^2 + (-2)^2}} = \frac{10}{\sqrt{5}} \xrightarrow{\text{گویاکردن}} d = \frac{10}{\sqrt{5}} \times \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = \frac{10\sqrt{5}}{5} = 2\sqrt{5}$$

گام دوم: حال با توجه به این که قطر مستطیل داده شده است، طبق قضیه فیثاغورس، طول ضلع دیگر مستطیل را پیدا می‌کنیم: **پاسخ خیلی تشریحی** ✓



$$AB^2 = BD^2 - AD^2 \Rightarrow AB^2 = (4\sqrt{5})^2 - (2\sqrt{5})^2 = 80 - 20 = 60 \\ \Rightarrow AB = \sqrt{60} = 2\sqrt{15}$$

گام سوم: طول و عرض مستطیل را داریم، خواسته سؤال را که مساحت آن است، حساب می‌کنیم:

$$S_{\text{مستطیل}} = AB \times AD = 2\sqrt{15} \times 2\sqrt{5} = 20\sqrt{3}$$

۲۱ در مثلث قائم الزاویه ای، طول ضلع های زاویه قائمه ۵ و ۱۲ هستند. شعاع دایره محاطی داخلی این مثلث کدام است؟

۱/۵ (۲)

۱ (۱)

۲/۵ (۴)

۲ (۳)

مشاوره این سؤال براساس کار در کلاس صفحه (۲۵) کتاب درسی طراحی شده است و احتمال طراحی سؤالی مشابه آن در امتحان نهایی زیاد است.

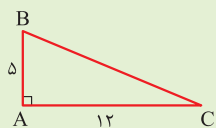
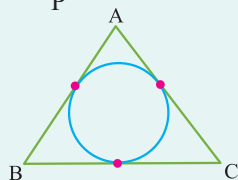
محیط و مساحت مثلث را محاسبه کنید.

Hint

دروس Box

دایره ای که درون یک مثلث قرار دارد و بر هر سه ضلع آن مثلث مماس است، دایره محاطی داخلی مثلث نامیده می شود. مرکز دایره محاطی داخلی هر مثلث، نقطه هم رسی نیمسازهای زوایای داخلی آن مثلث است. اگر مساحت مثلث را با S و نصف محیط آن را با P نمایش دهیم، شعاع دایره محاطی داخلی مثلث برابر است با:

$$r = \frac{S}{P}$$



پاسخ خیلی تشریحی ✓ گام اول: محیط و مساحت مثلث را محاسبه می کنیم:

$$S = \frac{1}{2} AB \times AC = \frac{1}{2} \times 5 \times 12 = 30$$

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 = 5^2 + 12^2 = 13^2 \Rightarrow BC = 13$$

$$P = \frac{AB + AC + BC}{2} = \frac{5 + 12 + 13}{2} = 15$$

گام دوم: با توجه به فرمول شعاع دایره محاطی داخلی مثلث، مقدار آن را به دست می آوریم:

$$r = \frac{S}{P} = \frac{30}{15} = 2$$

در یک مثلث متساوی الساقین، شعاع‌های دایره‌های محاطی خارجی نظیر ساق و قاعده به ترتیب برابر ۸ و ۱۲ هستند. شعاع دایره محاطی

داخلی این مثلث کدام است؟

۴ (۲)

۳ (۱)

۶ (۴)

۴/۵ (۳)

مشاوره این سؤال براساس تمرین ۵ صفحه (۲۹) کتاب درسی طراحی شده است. این تمرین (رابطه) بین شعاع دایره محاطی داخلی و شعاع دایره‌های محاطی خارجی مثلث می‌تواند یکی از سؤالات احتمالی امتحان نهایی باشد.

Hint

دستی Box

به متساوی الساقین بودن مثلث و برابری شعاع دایره‌های محاطی خارجی نظیر ساق‌ها دقت کنید.

(۱) شعاع دایره محاطی خارجی نظیر ضلع به طول a در مثلثی که مساحت آن برابر S و نصف محیط آن برابر P است، از رابطه زیر محاسبه می‌شود:

$$r_a = \frac{S}{P-a}$$

(۲) اگر شعاع دایره محاطی داخلی و r_a ، r_b و r_c شعاع‌های دایره‌های محاطی خارجی مثلث ABC باشد، آن‌گاه داریم:

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{r_a} + \frac{1}{r_b} + \frac{1}{r_c}$$

پاسخ خیلی تشریحی ✓ **گام اول:** در مثلث متساوی الساقین ABC ($AB = AC$)، فرض کنید $r_a = ۱۲$ و $r_b = ۸$ باشد. با توجه به فرمول شعاع دایره

محاطی خارجی داریم:

$$\begin{cases} r_b = \frac{S}{P-b} \\ r_c = \frac{S}{P-c} \end{cases} \xrightarrow{b=c} r_b = r_c = ۸$$

گام دوم: براساس رابطه بین شعاع دایره محاطی داخلی و شعاع‌های دایره‌های محاطی خارجی مثلث ABC داریم:

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{r_a} + \frac{1}{r_b} + \frac{1}{r_c} = \frac{1}{۱۲} + \frac{1}{۸} + \frac{1}{۸} = \frac{۲+۳+۳}{۲۴} = \frac{۸}{۲۴} = \frac{۱}{۳} \Rightarrow r = ۳$$

نسبت مساحت شش ضلعی منتظم محیطی یک دایره به مساحت شش ضلعی منتظم محاطی آن دایره کدام است؟

۲۳

$$\frac{9}{4} (4)$$

$$2 (3)$$

$$\frac{3}{2} (2)$$

$$\frac{4}{3} (1)$$



مشاوره این سؤال براساس تمرین ۷ صفحه (۳۰) کتاب درسی و مشابه سؤالی از کنکور ریاضی داخل ۹۸ طراحی شده است.

دو n ضلعی منتظم همواره متشابه‌اند.

Hint

یک دایره به شعاع r و n ضلعی‌های منتظم محاطی و محیطی آن را در نظر بگیرید. اگر a و b به ترتیب اندازه‌های اضلاع n ضلعی

درس Box

منتظم محیطی و محاطی این دایره باشند، آن‌گاه داریم:

$$\begin{cases} a = 2r \tan \frac{180^\circ}{n} \\ b = 2r \sin \frac{180^\circ}{n} \end{cases}$$

پاسخ خیلی تشریحی ✓ **گام اول:** اندازه اضلاع شش ضلعی‌های منتظم محیطی و محاطی دایره‌ای به شعاع r را محاسبه می‌کنیم:

$$a = 2r \tan \frac{180^\circ}{6} = 2r \tan 30^\circ = 2r \times \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{2\sqrt{3}}{3} r$$

$$b = 2r \sin \frac{180^\circ}{6} = 2r \sin 30^\circ = 2r \times \frac{1}{2} = r$$

گام دوم: هر دو شش ضلعی منتظم همواره متشابه‌اند. از طرفی نسبت مساحت‌های دو n ضلعی متشابه، برابر مربع نسبت تشابه

(نسبت اضلاع متناظر) دو n ضلعی است؛ بنابراین داریم:

$$\frac{\text{مساحت شش ضلعی منتظم محیطی}}{\text{مساحت شش ضلعی منتظم محاطی}} = \frac{S}{S'} = \left(\frac{a}{b}\right)^2 = \left(\frac{\frac{2\sqrt{3}}{3}r}{r}\right)^2 = \left(\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)^2 = \frac{4}{3}$$

یک دوزنقه متساوی الساقین با طول قاعده‌های a و $2a$ ، بر دایره‌ای به مساحت 32π محیط است. محیط این دوزنقه کدام است؟

۳۲ (۲)

۲۴ (۱)

مشاوره این سؤال مشابه
سؤالی از کنکور ریاضی داخل ۱۴۰۱
طراحی شده است.

۴۸ (۴)

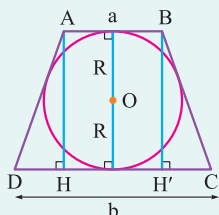
۳۶ (۳)

Hint

درس Box

در دوزنقه متساوی الساقین محیطی، مجموع طول‌های ساق‌ها برابر مجموع طول‌های دو قاعده است.

در هر چهارضلعی محیطی، مجموع اندازه‌های دو ضلع مقابل، برابر مجموع اندازه‌های دو ضلع دیگر است؛ بنابراین در دوزنقه متساوی الساقین ABCD که بر یک دایره محیط است، داریم:



$$AD + BC = AB + CD \xrightarrow{AD=BC} AD = \frac{a+b}{2}$$

اگر از رأس‌های A و B، عمودهای AH و BH' را بر قاعده CD رسم کنیم، آن‌گاه دو مثلث AHD و BH'C همنهشت هستند و در نتیجه داریم:

$$DH = CH' = \frac{b-a}{2}$$

$$\triangle ADH : AH^2 = AD^2 - DH^2 = \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 - \left(\frac{b-a}{2}\right)^2 = \frac{a^2 + b^2 + 2ab - b^2 - a^2 + 2ab}{4}$$

$$\Rightarrow (2R)^2 = \frac{4ab}{4} \Rightarrow 4R^2 = ab$$

به عبارت دیگر اگر دوزنقه متساوی الساقینی به طول قاعده‌های a و b بر دایره‌ای به شعاع R محیط شده باشد، آن‌گاه داریم:

$$4R^2 = ab$$

پاسخ خیلی تشریحی ✓ **گام اول:** ابتدا با توجه به نکته درس‌یابکس، مقدار a را محاسبه می‌کنیم:

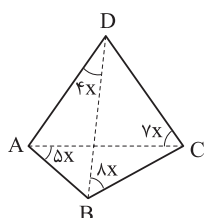
$$S_{\text{دایره}} = \pi R^2 = 32\pi \Rightarrow R^2 = 32$$

$$a \times 2a = 4R^2 \Rightarrow 2a^2 = 4 \times 32 \Rightarrow a^2 = 64 \Rightarrow a = 8$$

گام دوم: در دوزنقه متساوی الساقین محیطی، مجموع طول ساق‌ها برابر مجموع طول قاعده‌هاست، پس داریم:

$$\text{محیط دوزنقه} = 2(a + 2a) = 6a = 6 \times 8 = 48$$

۲۵ اگر در شکل زیر چهارضلعی ABCD محاطی باشد، با توجه به اندازه‌های روی شکل، اندازه زاویه $\hat{BAD}$ چند درجه است؟



۹۷/۵ (۱)

۱۰۲/۵ (۲)

۱۰۵ (۳)

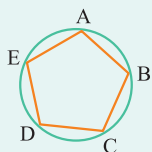
۱۰۷/۵ (۴)

با توجه به محاطی بودن چهارضلعی ABCD، دایره‌ای از رئوس آن عبور می‌کند.

Hint

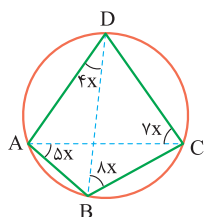
درس Box

یک چندضلعی را محاطی می‌گوییم اگر و فقط اگر دایره‌ای باشد که از همه رئوس آن بگذرد. در این صورت دایره را دایره محاطی آن چندضلعی می‌نامیم. مرکز این دایره محاطی، نقطه هم‌رسی عمودمنصف‌های اضلاع چندضلعی است.



پاسخ خیلی تشریحی ✓ گام اول: چون چهارضلعی محاطی است، پس دایره‌ای وجود دارد که از چهار رأس آن می‌گذرد. می‌دانیم اندازه هر زاویه محاطی

نصف اندازه کمان مقابل آن است، پس با توجه به شکل داریم:



$$\widehat{AB} = 8x, \widehat{BC} = 10x, \widehat{CD} = 16x, \widehat{DA} = 14x$$

گام دوم: مجموع اندازه کمان‌های واقع بر محیط یک دایره 360° درجه است، پس داریم:

$$\widehat{AB} + \widehat{BC} + \widehat{CD} + \widehat{DA} = 360^\circ \Rightarrow 8x + 10x + 16x + 14x = 360^\circ \Rightarrow 48x = 360^\circ \Rightarrow x = 7.5^\circ$$

گام سوم: زاویه $\hat{BAD}$ محاطی و مقابل به کمان BCD است؛ بنابراین داریم:

$$\hat{BAD} = \frac{\widehat{BCD}}{2} = \frac{\widehat{BC} + \widehat{CD}}{2} = \frac{10x + 16x}{2} = 13x = 13 \times 7.5^\circ = 97.5^\circ$$

در مثلث ABC ، نیمساز داخلی رأس A ، قاعده BC و دایره محیطی مثلث را به ترتیب در نقاط D و E قطع کرده است. اندازه $AD \times AE$ برابر کدام است؟

(۲) $BD \times DC$

(۱) $AB \times AC$

(۴) BC^2

(۳) $BC \times DE$

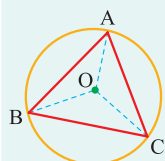
مشاوره این سؤال مشابه سؤالی از کنکور ریاضی خارج از کشور ۹۷ طراحی شده است.

Hint

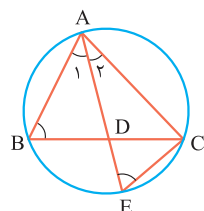
درس Box

دو مثلث متشابه پیدا کنید که شامل اضلاع AD و AE باشند.

دایره‌ای که از سه رأس یک مثلث عبور می‌کند، دایره محیطی آن مثلث نامیده می‌شود. مرکز دایره محیطی هر مثلث، نقطه هم‌رسی عمود منصف‌های اضلاع آن مثلث است.



پاسخ خیلی تشریحی **گام اول:** دایره محیطی مثلث ABC را رسم می‌کنیم. طبق فرض نیمساز داخلی رأس A در مثلث ABC ، ضلع BC را در نقطه D و دایره محیطی مثلث را در نقطه E قطع می‌کند. چون AE نیمساز زاویه A است، پس $\hat{A}_1 = \hat{A}_2$.



گام دوم: دو مثلث ABD و ACE را در نظر بگیرید. برای این دو مثلث داریم:

$$\begin{cases} \hat{B} = \hat{E} = \frac{\widehat{AC}}{2} \Rightarrow \triangle ABD \sim \triangle AEC \Rightarrow \frac{AB}{AE} = \frac{AD}{AC} \Rightarrow AB \times AC = AD \times AE \\ \hat{A}_1 = \hat{A}_2 \end{cases}$$

در دوزنقه متساوی الساقین به قاعده‌های ۱ و ۳، طول پاره‌خطی که وسط‌های دو ساق را به یکدیگر وصل می‌کند، با طول ساق برابر است.

مساحت این دوزنقه کدام است؟

میانگین طول‌های دو قاعده

۲) $2\sqrt{3}$

۴) $2\sqrt{5}$

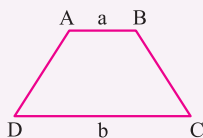
۱) $\sqrt{3}$

۳) $\sqrt{5}$

مشاوره این سؤال براساس نتیجه حاصل از تمرین ۴ صفحه (۲۹) کتاب درسی طراحی شده است.

Hint

دوزنقه متساوی الساقین همواره یک چهارضلعی محاطی است.



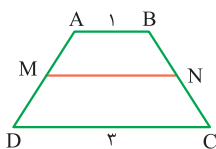
می‌دانیم یک دوزنقه محاطی است اگر و تنها اگر متساوی الساقین باشد. حال در صورتی که دوزنقه متساوی الساقین محیطی باشد، مساحت آن برابر است با میانگین حسابی دو قاعده آن ضرب در میانگین هندسی آن‌ها. به عبارت دیگر اگر طول قاعده‌های این دوزنقه برابر a و b باشد، مساحت آن از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$S = \frac{a+b}{2} \sqrt{ab}$$

درس‌Box

پاسخ‌خیلی تشریحی ✓

گام اول: طبق قضیه میان خط در دوزنقه، طول پاره‌خطی که وسط‌های دو ساق دوزنقه را به هم وصل می‌کند، میانگین طول دو قاعده دوزنقه است. از طرفی طبق فرض طول این پاره‌خط برابر طول ساق دوزنقه است؛ بنابراین داریم:



$$MN = \frac{AB+CD}{2} \xrightarrow{MN=AD} 2AD = AB+CD \xrightarrow{AD=BC} AD+BC = AB+CD$$

بنابراین دوزنقه $ABCD$ ، یک دوزنقه محیطی است.

گام دوم: می‌دانیم هر دوزنقه متساوی الساقین، یک چهارضلعی محاطی است؛ بنابراین دوزنقه $ABCD$ هم محاطی و هم محیطی است و مساحت آن طبق رابطه ارائه‌شده در درس‌باکس برابر است با:

$$S = \frac{1+3}{2} \sqrt{1 \times 3} = 2\sqrt{3}$$

به ازای چند مقدار صحیح x ، دو دایره $C(O, 10 - 2x)$ و $C'(O', x + 3)$ با طول خط‌المركزین $d = 3x + 1$ ، متقاطع هستند؟

۳ (۴)

۲ (۳)

۱ (۲)

۰ (۱) صفر



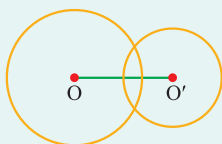
مشاوره این سؤال مشابه سؤالی از کنکور ریاضی داخل ۱۴۰۰ طراحی شده است.

Hint

درس‌Box

رابطه بین شعاع‌های دو دایره و طول خط‌المركزین را در وضعیت‌های مختلف دو دایره همواره به خاطر داشته باشید.

دو دایره $C(O, R)$ و $C'(O', R')$ با طول خط‌المركزین $OO' = d$ در صورتی متقاطع هستند که داشته باشیم:



$$|R - R'| < d < R + R'$$

پاسخ خیلی تشریحی ✓ گام اول: دو دایره C و C' متقاطع هستند، پس شرط متقاطع‌بودن دو دایره را نوشته و مقادیر شعاع‌های دو دایره و طول

خط‌المركزین را در این رابطه جای‌گذاری می‌کنیم:

$$|R - R'| < d < R + R' \Rightarrow |(10 - 2x) - (x + 3)| < 3x + 1 < (10 - 2x) + (x + 3)$$

$$\Rightarrow |3x - 7| < 3x + 1 < 13 - x$$

گام دوم: هر یک از نامساوی‌ها را به طور جداگانه حل کرده و اشتراک جواب‌ها را در نظر می‌گیریم:

$$3x + 1 < 13 - x \Rightarrow 4x < 12 \Rightarrow x < 3$$

$$|3x - 7| < 3x + 1 \Rightarrow -(3x + 1) < 3x - 7 < 3x + 1$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 3x - 7 < 3x + 1 \Rightarrow -7 < 1 \text{ همواره برقرار است} \\ -3x - 1 < 3x - 7 \Rightarrow 6x > 6 \Rightarrow x > 1 \end{cases}$$

اشتراک جواب‌ها به صورت $1 < x < 3$ است.

گام سوم: شعاع دایره‌ها و طول خط‌المركزین باید مقداری مثبت باشند، پس داریم:

$$\begin{cases} R > 0 \Rightarrow 10 - 2x > 0 \Rightarrow x < 5 \\ R' > 0 \Rightarrow x + 3 > 0 \Rightarrow x > -3 \\ d > 0 \Rightarrow 3x + 1 > 0 \Rightarrow x > -\frac{1}{3} \end{cases} \xrightarrow{\text{اشتراک}} -\frac{1}{3} < x < 5$$

گام چهارم: اشتراک مقادیر x در گام‌های دوم و سوم به صورت $1 < x < 3$ و فقط شامل عدد صحیح ۲ است.

دو دایره متقاطع به شعاع‌های ۴ و ۸ مفروض‌اند. خط‌های مماس بر این دایره‌ها در یکی از نقاط تقاطع آن‌ها از مرکزهای دو دایره می‌گذرند.

مساحت چهارضلعی حاصل از وصل کردن مراکز دو دایره و نقاط تماس یکی از مماس‌های مشترک خارجی آن‌ها کدام است؟

خط مماس بر هر دایره در نقطه تقاطع، از مرکز دایره دیگر می‌گذرد.

۳۲ (۱)

۳۶ (۲)

۴۵ (۳)

۴۸ (۴)



خط مماس بر دایره، بر شعاع گذرنده از نقطه تماس، عمود است.

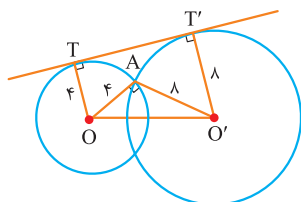
Hint

طول مماس مشترک خارجی دو دایره $C(O, R)$ و $C'(O', R')$ از رابطه $TT' = \sqrt{OO'^2 - (R - R')^2}$ به دست می‌آید.

درس Box

گام اول: چون خط‌های مماس بر دایره‌ها در یک نقطه تقاطع آن‌ها (نقطه A) از مرکز دایره‌ها می‌گذرند، پس دو شعاع OA و O'A بر هم عمودند و در نتیجه مثلث OO'A قائم الزویه است. طبق قضیه فیثاغورس در این مثلث داریم:

پاسخ خیلی تشریحی



$$OO'^2 = OA^2 + O'A^2 = 4^2 + 8^2 = 80 \Rightarrow OO' = 4\sqrt{5}$$

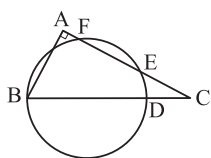
گام دوم: طول مماس مشترک خارجی دو دایره را محاسبه می‌کنیم:

$$TT' = \sqrt{OO'^2 - (R - R')^2} = \sqrt{80 - (4 - 8)^2} = \sqrt{80 - 16} = \sqrt{64} = 8$$

گام سوم: مساحت دوزنقه قائم‌الزاویه OO'T'T برابر است با:

$$S_{OO'T'T} = \frac{1}{2} TT' (OT + O'T') = \frac{1}{2} \times 8 (4 + 8) = 48$$

۳۰ در شکل زیر، مثلث ABC قائم‌الزاویه است و دایره‌ای به قطر BD ، اضلاع زاویه قائمه را قطع کرده است. با فرض $CD = ۴$ ، $BD = ۲۸$ و $CE = ۵$ ، طول پاره خط AF کدام است؟



۱/۴ (۱)

۱/۵ (۲)

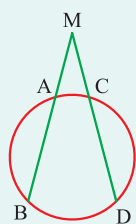
۱/۶ (۳)

۱/۸ (۴)



Hint از مرکز دایره عمودی بر ضلع AC رسم کنید.

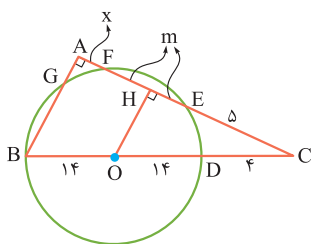
اگر امتداد دو وتر AB و CD مطابق شکل در نقطه M خارج از دایره متقاطع باشند، آن گاه طبق رابطه طولی وترهای متقاطع داریم:



$$MA \times MB = MC \times MD$$

پاسخ خیلی تشریحی ✓ **گام اول:** از مرکز دایره، عمود OH را بر ضلع AC رسم می‌کنیم. می‌دانیم قطر عمود بر یک وتر، آن وتر را نصف می‌کند، پس فرض می‌کنیم طول دو پاره خط EH و FH برابر m باشد. بنا به روابط طولی امتداد وترهای متقاطع EF و BD داریم:

$$CD \times CB = CE \times CF \Rightarrow 4(4 + 28) = 5(5 + 2m) \Rightarrow 5 + 2m = \frac{128}{5} \Rightarrow 2m = \frac{103}{5} \Rightarrow m = \frac{103}{10}$$

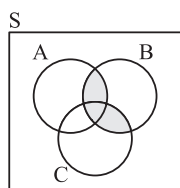


گام دوم: طبق قضیه تالس در مثلث ABC و با فرض $AF = x$ داریم:

$$OH \parallel AB \Rightarrow \frac{AH}{CH} = \frac{OB}{OC} \Rightarrow \frac{x+m}{5+m} = \frac{14}{18} = \frac{7}{9}$$

$$\Rightarrow x + \frac{103}{10} = \frac{7}{9} \left(5 + \frac{103}{10} \right) = \frac{7}{9} \times \frac{153}{10} = \frac{119}{10} \Rightarrow x = \frac{16}{10} = 1/6$$

سه مجموعه A , B و C مطابق شکل زیر، در فضای نمونه‌ای S مفروض‌اند. کدام مورد برای قسمت رنگی نادرست است؟ **۳۱**



$$B \cap (A \cup C) \quad (۱)$$

$$(A \cap B) \cup (B \cap C) \quad (۲)$$

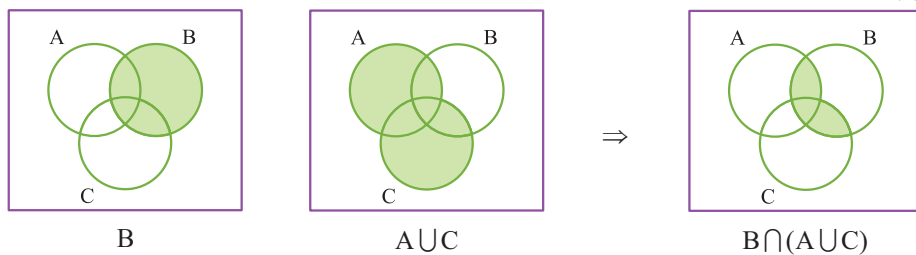
$$(B - (B - A)) \cup (B - (B - C)) \quad (۳)$$

$$(B - (A \cap B)) \cap (B \cap C) \quad (۴)$$

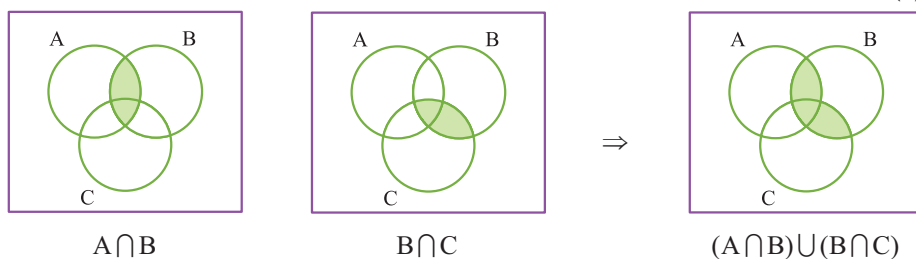


پاسخ خیلی تشریحی ✓ هر مورد را مرحله به مرحله مشخص می‌کنیم:

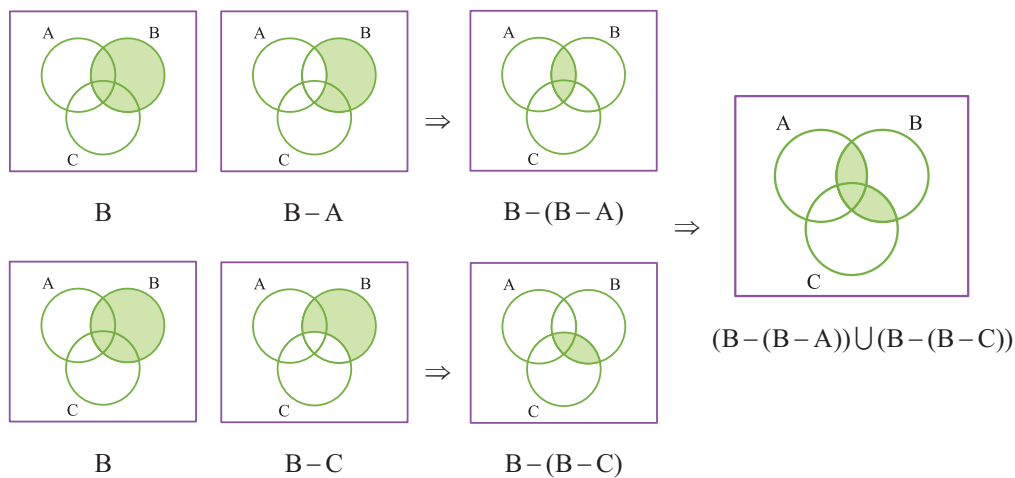
گزینه (۱):



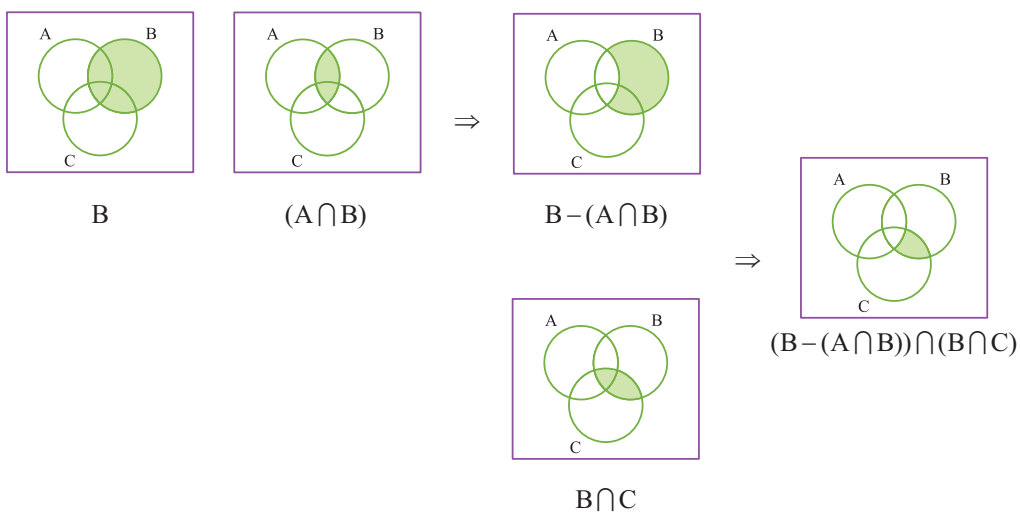
گزینه (۲):



گزینه (۳):



گزینه (۴):



بنابراین، جواب گزینه (۴) است.

۳۲ چه تعداد از موارد زیر نادرست‌اند؟

الف) $A \cap A' = \emptyset$

ب) $A - B = A' - B'$

پ) $A \cap B = A \Leftrightarrow A \subseteq B$

ت) $(A \subseteq B) \wedge (B \subseteq A) \Leftrightarrow A = B$

ث) $A \subseteq B \Leftrightarrow B' \subseteq A'$

ج) $A \cap B = \emptyset \Leftrightarrow A \subseteq B'$

۳ (۴)

۲ (۳)

۱ (۲)

۱ (۱) صفر



قوانین جبر مجموعه‌ها

درس‌Box

۱) $A \cup B = B \cup A$ و $A \cap B = B \cap A$

۲) $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$ و $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$

۳) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ و $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

۴) $A \cap (A \cup B) = A$ و $A \cup (A \cap B) = A$

۵) $A - B = A \cap B'$

۶) $(A \cap B)' = A' \cup B'$ و $(A \cup B)' = A' \cap B'$

۷) $A \cap A' = \emptyset$ و $A \cup A' = U$

۸) $A \cap \emptyset = \emptyset$ و $A \cup \emptyset = A$

۹) $A \cup U = U$ و $A \cap U = A$

۱۰) $(A')' = A$

جابه‌جایی

شرکت‌پذیری

توزیع‌پذیری

جذب

تبدیل تفاضل به اشتراک

دمورگان

نکات زیر را هم به خاطر بسپارید:

۱) تساوی دو مجموعه

$(A \subseteq B) \wedge (B \subseteq A) \Leftrightarrow A = B$

۲) $A \cap B = A \Leftrightarrow A \subseteq B$ و $A \cup B = A \Leftrightarrow B \subseteq A$

۳) $A \subseteq B \Leftrightarrow B' \subseteq A'$

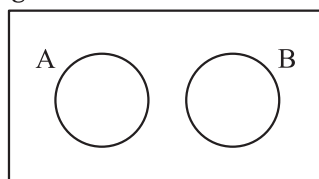
۴) می‌دانیم $A - B = A - (A \cap B)$ است؛ پس $A - B = A$ است اگر و تنها اگر، $A \cap B = \emptyset$ باشد، یعنی:

$A - B = A \Leftrightarrow A \cap B = \emptyset$

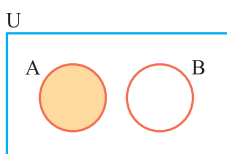
موارد (الف)، (پ)، (ت) و (ث) را در درس‌باکس بالا دیدیم، پس درست‌اند.

پاسخ خیلی تشریحی ✓

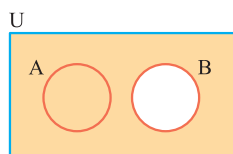
مورد (ج) هم درست است زیرا وقتی $A \cap B = \emptyset$ باشد، A و B دو مجموعه جدا از هم هستند، مثلاً در شکل زیر:



حالا در دو نمودار زیر، A و B' را مشخص کرده‌ایم که با توجه به آن‌ها واضح است که $A \subseteq B'$ می‌شود:



A



B'

$A - B = A \cap B' = B' \cap A = B' - A'$

تبدیل اشتراک به تفاضل جابه‌جایی تبدیل تفاضل به اشتراک

اما مورد (ب) نادرست است، زیرا:

پس $A - B = B' - A'$ است.

۳۳ A، B و C سه مجموعه ناتهی با مجموعه مرجع U هستند. مجموعه $(A - B) \cup C \cap (B' - C) \cup (C' - B')$ با کدام یک از

مجموعه‌های زیر برابر است؟

(۲) $(A \cup B) - C$

(۱) $(A - B) \cup C$

(۴) $(B - A) \cap C$

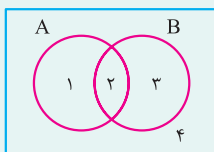
(۳) $(A \cap B) \cup C$

مشاوره سوالات جبر مجموعه‌ها، جزء پای ثابت‌های کنکورهای سراسری هستند که بهترین روش برای حل آن‌ها، روش شماره‌گذاری ناحیه‌ها است.

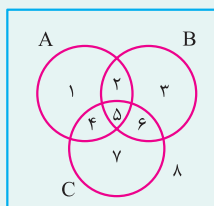
درس‌Box

روش شماره‌گذاری ناحیه‌ها برای حل سوالات جبر مجموعه‌ها

روش شماره‌گذاری ناحیه‌ها برای حل سوالات جبر مجموعه‌ها به این صورت است که اگر ابتدا دو مجموعه داشته باشیم و سؤال هیچ شرطی نداشته باشد؛ نمودار ون را به صورت مقابل در نظر می‌گیریم:



و اگر سه مجموعه داشته باشیم و سؤال هیچ شرطی نداشته باشد، نمودار ون را به صورت زیر در نظر می‌گیریم:



حالا هر قسمت را با مجموعه‌ای از اعداد درون آن نمایش می‌دهیم؛ برای مثال اگر دو مجموعه داشته باشیم:

$A = \{1, 2\}$, $B = \{2, 3\}$, $A \cap B = \{2\}$

مثلاً برای این که بفهمیم حاصل $A \cup (A' \cap B)$ چیست، به صورت زیر عمل می‌کنیم:

$A \cup (A' \cap B) = \{1, 2\} \cup (\{3, 4\} \cap \{2, 3\}) = \{1, 2\} \cup \{3\} = \{1, 2, 3\} = A \cup B$

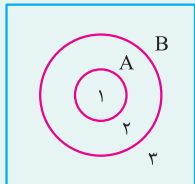
یا اگر $(A - B) \cup (B - A) = A$ باشد، داریم:

$(A - B) \cup (B - A) = A \Rightarrow \{1\} \cup \{3\} = \{1, 2\} \Rightarrow \{1, 3\} = \{1, 2\}$

دقت کنید که در این روش هیچ دو ناحیه‌ای نمی‌توانند با هم مساوی باشند (منظور از ناحیه، اعداد است، برای مثال هیچ وقت $\{1\} = \{4\}$ نمی‌شود)، چون نواحی کاملاً جدا از هم هستند؛ پس برای این که $\{1, 3\} = \{1, 2\}$ شود، باید $\{2\} = \{3\} = \emptyset$ باشد که از آن نتیجه می‌گیریم:

$$\left. \begin{array}{l} A = \{1, 2\} = \{1\} \\ B = \{2, 3\} = \emptyset \end{array} \right\} \Rightarrow B \subseteq A$$

U

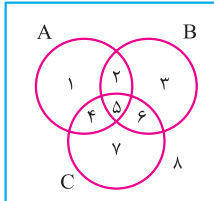


حواستان باشد اگر در سؤالی شرطی برای مجموعه‌ها داشته باشیم، باید نمودار ون را طوری

رسم کنیم که شرط رعایت شود؛ برای مثال اگر در سؤالی دو مجموعه داشته باشیم و گفته

باشد $A \subseteq B$ ، نمودار ون را به صورت مقابل در نظر می‌گیریم:

U



گام اول: سه مجموعه A، B و C را داریم، پس نمودار ون را به شکل مقابل در نظر می‌گیریم: **پاسخ خیلی تشریحی** ✓

گام دوم: با روش شماره گذاری ناحیه ها، مجموعه $[(A-B) \cup C] \cap (B'-C) \cup (C'-B')$ را ساده می کنیم:

$$\begin{array}{ccccccc} \{1,4\} & \{4,5,6,7\} & \{1,4,7,8\} & \{4,5,6,7\} & \{1,2,3,8\} & \{1,4,7,8\} \\ \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ [(A-B) \cup C] & \cap & (B'-C) & \cup & (C'-B') & = \{1\} \cup \{2,3\} = \{1,2,3\} \\ \{1,4,5,6,7\} & & \{1,8\} & & \{2,3\} & \end{array}$$

گام سوم: حالا هر کدام از گزینه ها را هم برحسب شماره های نواحی آن ها می نویسیم تا ببینیم کدام برابر $\{1,2,3\}$ است:

(۱) گزینه $(A-B) \cup C = \{1,4\} \cup \{4,5,6,7\} = \{1,4,5,6,7\}$ ✗

(۲) گزینه $(A \cup B) - C = \{1,2,3,4,5,6\} - \{4,5,6,7\} = \{1,2,3\}$ ✓

(۳) گزینه $(A \cap B) \cup C = \{2,5\} \cup \{4,5,6,7\} = \{2,4,5,6,7\}$ ✗

(۴) گزینه $(B-A) \cap C = \{3,6\} \cap \{4,5,6,7\} = \{6\}$ ✗

پس جواب گزینه (۲) است.

A و B دو مجموعه ناتهی از مجموعه مرجع U هستند، به طوری که $((A' \cup B) - A) \cup (B' - A) = (A - B) \cup (B - A)$ است.

کدام یک از نتیجه گیری های زیر درست است؟

$B \subseteq A$ (۲)

$A \subseteq B$ (۱)

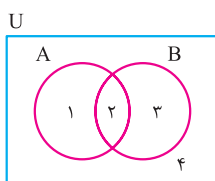
$A' \cap B = U$ (۴)

$A \subseteq B'$ (۳)



پاسخ خیلی تشریحی ✓

گام اول: دو مجموعه A و B داریم، پس نمودار ون را به شکل مقابل فرض می کنیم:



گام دوم: با استفاده از روش شماره گذاری ناحیه ها داریم:

$$\begin{array}{ccccccc} \{3,4\} & \{2,3\} & \{1,2\} & \{1,4\} & \{1,2\} \\ \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ ((A' \cup B) - A) \cup (B' - A) & = & (A - B) \cup (B - A) & \Rightarrow & \{3,4\} \cup \{4\} = \{1,3\} \end{array}$$

$\Rightarrow \{3,4\} = \{1,3\}$

گام سوم: حالا طبق درس باکس سؤال قبل باید $\{1\} = \{4\} = \emptyset$ باشد، پس:

$$\left. \begin{array}{l} A = \{1,2\} \\ \downarrow \\ \emptyset \\ B = \{2,3\} \end{array} \right\} \Rightarrow A \subseteq B$$

مجموعه‌های A , B , C و D را در نظر بگیرید. تعداد اعضای C ، سه واحد بیشتر از A و تعداد اعضای D ، چهار واحد کم‌تر از B است. اگر تعداد اعضای مجموعه $C \times B$ ، 50% بیشتر از اعضای مجموعه $A \times B$ و 2 برابر تعداد اعضای مجموعه $A \times D$ باشد، اختلاف تعداد اعضای مجموعه‌های A و B چه قدر است؟

۱۲ (۴)

۱۰ (۳)

۹ (۲)

۸ (۱)



ضرب دکارتی بین دو مجموعه

درتین Box

اگر A و B دو مجموعه باشند، ضرب دکارتی بین این دو مجموعه را با $A \times B$ نمایش می‌دهیم که به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$A \times B = \{(x, y) \mid x \in A, y \in B\}$$

برای مثال اگر $A = \{1, 2\}$ و $B = \{a, b, c\}$ داریم:

$$A \times B = \{(1, a), (1, b), (1, c), (2, a), (2, b), (2, c)\}$$

تعداد اعضای ضرب دکارتی دو مجموعه، برابر حاصل ضرب تعداد اعضای آن دو مجموعه است، به عبارت دیگر:

$$n(A \times B) = n(A)n(B)$$



پاسخ خیلی تشریحی ✓

گام اول: تعداد اعضای مجموعه‌های A , B , C و D را به ترتیب با $n(A)$, $n(B)$, $n(C)$ و $n(D)$ نمایش می‌دهیم.

گام دوم: طبق گفته سؤال، تعداد اعضای C سه واحد بیشتر از A و تعداد اعضای D چهار واحد کم‌تر از B است، پس:

$$n(C) = n(A) + 3 \quad (I)$$

$$n(D) = n(B) - 4 \quad (II)$$

گام سوم: تعداد اعضای مجموعه $C \times B$ ، 50% بیشتر از تعداد اعضای مجموعه $A \times B$ است:

$$n(C \times B) = \frac{100 + 50}{100} n(A \times B) \Rightarrow n(C) \times n(B) = \frac{3}{2} n(A) \times n(B) \quad (*)$$

$\downarrow$
 50% بیشتر

گام چهارم: دقت کنید تعداد اعضای یک مجموعه نمی‌تواند منفی باشد؛ پس با توجه به تساوی $n(D) = n(B) - 4$ ، نتیجه

می‌گیریم که $n(B) \neq 0$ بوده و بنابراین می‌توانیم طرفین تساوی (*) را به $n(B)$ تقسیم کنیم:

$$n(C) \times n(B) = \frac{3}{2} n(A) \times n(B) \Rightarrow n(C) = \frac{3}{2} n(A)$$

گام پنجم: با جای‌گذاری $n(C) = \frac{3}{2} n(A)$ در تساوی (I) داریم:

$$n(C) = n(A) + 3 \Rightarrow \frac{3}{2} n(A) = n(A) + 3 \Rightarrow \frac{3}{2} n(A) - n(A) = 3$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} n(A) = 3 \Rightarrow n(A) = 6$$

گام ششم: بنابراین:

$$n(C) = \frac{3}{2} n(A) = 9 \Rightarrow n(C) = 9$$

گام هفتم: تعداد اعضای مجموعه $C \times B$ ، 2 برابر تعداد اعضای مجموعه $A \times D$ است:

$$n(C \times B) = 2n(A \times D) \Rightarrow \underbrace{n(C)}_9 \times n(B) = 2 \underbrace{n(A)}_6 \times n(D)$$

$$\Rightarrow \frac{3}{2} n(B) = 2 n(D) \Rightarrow n(B) = \frac{4}{3} n(D)$$

گام هشتم: با جای‌گذاری $n(B) = \frac{4}{3} n(D)$ در تساوی (II) داریم:

$$n(D) = n(B) - 4 \Rightarrow n(D) = \frac{4}{3} n(D) - 4 \Rightarrow \frac{1}{3} n(D) = 4 \Rightarrow n(D) = 12$$

گام نهم: پس:

$$n(B) = \frac{4}{3} n(D) = \frac{4}{3} \times 12 = 16$$

بنابراین، اختلاف تعداد اعضای دو مجموعه A و B برابر $16 - 6 = 10$ است.

۳۶ اگر $B = [\alpha, 4]$ ، $A = [-1, 2]$ و مساحت ناحیه $A^c - B^c$ برابر ۵ باشد، مساحت ناحیه $B \times A - A \times B$ کدام است؟

۸ (۴)

۷ (۳)

۶ (۲)

۵ (۱)



نکاتی درباره ضرب دکارتی دو مجموعه

درس Box

$$۱) A \times \emptyset = \emptyset \times A = \emptyset$$

$$۲) A^c = A \times A$$

$$۳) (A \times B) \cap (C \times D) = (A \cap C) \times (B \cap D)$$

$(A \times B) \cup (C \times D) = (A \cup C) \times (B \cup D)$ خواستون باشه که چنین رابطهای برای اجتماع درست نیست! یعنی تساوی الزاماً درست نیست.

$$۴) A \times B - C \times D = A \times B - ((A \times B) \cap (C \times D)) = A \times B - ((A \cap C) \times (B \cap D))$$

$$۵) A^c \cap B^c = (A \cap B)^c$$

$$۶) A^c - B^c = A^c - A^c \cap B^c = A^c - (A \cap B)^c$$

اگر A بازه‌ای به طول m و B بازه‌ای به طول n باشد، مساحت ناحیه محدود به $A \times B$ برابر mn می‌شود.

نکته

پاسخ خیلی تشریحی ✓ گام اول: طول بازه A برابر $3 - (-1) = 2$ است. حالا اگر طول بازه $A \cap B$ را برابر k در نظر بگیریم، مساحت ناحیه $A^c - B^c$

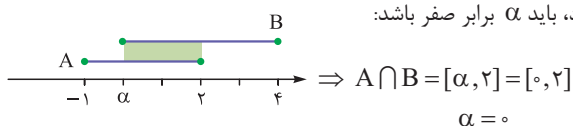
برابر می‌شود با:

$$S_{A^c - B^c} = S_{A^c - (A^c \cap B^c)} = S_{A^c} - S_{(A \cap B)^c} = 2^2 - k^2 = 5$$

$$\Rightarrow 9 - k^2 = 5 \Rightarrow k^2 = 4 \xrightarrow{\text{طول بازه نامنفی}} k = 2$$

پس طول بازه $A \cap B$ برابر ۲ است.

گام دوم: حالا برای این که طول بازه $A \cap B$ برابر ۲ شود، باید α برابر صفر باشد:



پس مجموعه B به صورت $B = [0, 4]$ و $A \cap B = [0, 2]$ است.

گام سوم: حالا مساحت ناحیه $B \times A - A \times B$ برابر است با:

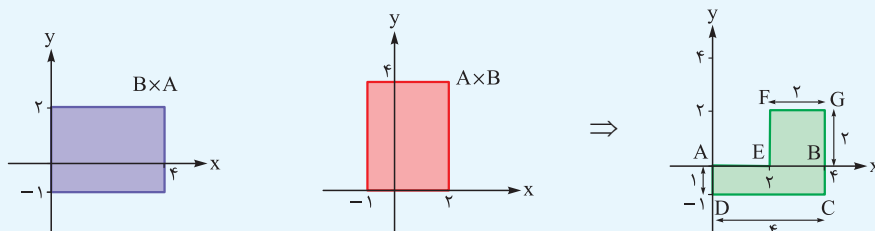
$$S_{B \times A - A \times B} = S_{B \times A - ((B \times A) \cap (A \times B))} = S_{B \times A} - S_{(B \cap A) \times (A \cap B)}$$

$$= S_{B \times A} - S_{(A \cap B)^2} = 4 \times 3 - 2^2 = 12 - 4 = 8$$

طول بازه $A \cap B$ به توان ۲ حاصل ضرب طول ۲ بازه A و B

البته مساحت $B \times A - A \times B$ را به روش رسم هم می‌توانستیم پیدا کنیم:

به‌جور دیگر



ناحیه $B \times A - A \times B$ از مستطیل ABCD (به ابعاد $AD = 1$ و $CD = 4$) با مساحت ۴ و مربع BEFG (به طول ضلع ۲) با مساحت ۴ تشکیل شده، پس مساحت $B \times A - A \times B$ برابر $4 + 4 = 8$ است.

۳۷ عددی به تصادف از بین اعداد طبیعی ۱ تا ۵۰۰ انتخاب می‌کنیم. احتمال آن که عدد انتخابی بر ۶ بخش پذیر باشد ولی بر ۱۴ بخش پذیر نباشد، چه قدر است؟

$$\frac{19}{125} (2)$$

$$\frac{39}{250} (1)$$

$$\frac{79}{500} (4)$$

$$\frac{18}{125} (3)$$



در مجموعه $A = \{1, 2, 3, \dots, n\}$ ، تعداد اعضای بخش پذیر بر k برابر است با $\left[\frac{n}{k}\right]$. مثلاً در مجموعه $A = \{1, 2, 3, \dots, 200\}$ ، تعداد اعضای مضرب ۶ برابر است با:

$$\left[\frac{200}{6}\right] = [33 \frac{2}{3}] = 33$$

درس Box



اعدادی هم بر a بخش پذیرند و هم بر b که بر ک.م.م این دو عدد بخش پذیر باشند.

$$n(A - B) = n(A) - n(A \cap B)$$

احتمال رخ دادن پیشامد A (در فضای نمونه‌ای S) برابر است با:

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)}$$

پاسخ خیلی تشریحی ✓ گام اول: در مجموعه $S = \{1, 2, 3, \dots, 500\}$ ، دو پیشامد A و B را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

A : اعداد مضرب ۶

B : اعداد مضرب ۱۴

گام دوم: احتمال این را می‌خواهیم که یک عدد مضرب ۶ باشد ولی مضرب ۱۴ نباشد، یعنی $P(A - B)$ که برابر است با:

$$P(A - B) = \frac{n(A - B)}{n(S)} = \frac{n(A) - n(A \cap B)}{500}$$

تعداد کل اعداد ۵۰۰ تا است.

گام سوم: $n(A)$ یعنی تعداد اعداد مضرب ۶ که برابر است با:

$$n(A) = \left[\frac{500}{6}\right] = [83 \frac{2}{3}] = 83$$

گام چهارم: $n(A \cap B)$ برابر تعداد اعدادی است که هم مضرب ۶ اند و هم مضرب ۱۴، یعنی اعدادی که مضرب ک.م.م این دو عدد یعنی مضرب ۴۲ اند.

گول نخوری ✗ حواستون باشه یهو نگین اعدادی که مضرب $6 \times 14 = 84$ اند!

گام پنجم: تعداد اعداد مضرب ۴۲ برابر است با:

$$n(A \cap B) = \left[\frac{500}{42}\right] = [11 \frac{8}{7}] = 11$$

گام ششم: پس جواب برابر است با:

$$\frac{n(A) - n(A \cap B)}{500} = \frac{83 - 11}{500} = \frac{72}{500} = \frac{18}{125}$$

۳۸ دو تاس را با هم پرتاب می‌کنیم. با کدام احتمال عدد ظاهرشده حداقل یکی از تاس‌ها، اول بوده و مجموع اعداد روشده حداکثر ۷ است؟

$$\frac{7}{12} \quad (۴)$$

$$\frac{5}{12} \quad (۳)$$

$$\frac{4}{9} \quad (۲)$$

$$\frac{1}{4} \quad (۱)$$



مشاوره به دست آوردن احتمال پرتاب تاس و سکه جزء سؤالات رایج کنکورهای سراسری هستند.

درس‌Box

پرتاب دو تاس

برای حل سؤالاتی که در آن‌ها دو تاس پرتاب می‌شوند و احتمال رخ دادن پیشامدی خاص را می‌خواهیم، روش‌های مختلفی وجود دارد اما بهترین روش این است که جدولی به شکل زیر رسم کنیم و حالات مطلوب را در آن مشخص کنیم. بعد با تقسیم تعداد حالات مطلوب به تعداد کل حالات (تعداد کل حالات در پرتاب ۲ تاس $6 \times 6 = 36$ تا است)، به جواب می‌رسیم.

تاس اول \ تاس دوم	۱	۲	۳	۴	۵	۶
۱						
۲						
۳						
۴						
۵						
۶						

پاسخ خیلی تشریحی ✓ گام اول: طبق درس‌باکس، ابتدا جدولی به شکل زیر رسم کرده و در آن حالات مطلوب را مشخص می‌کنیم:

تاس اول \ تاس دوم	۱	۲	۳	۴	۵	۶
۱		x	x		x	
۲	x	x	x	x	x	
۳	x	x	x	x		
۴		x	x			
۵	x	x				
۶						

گام دوم: با توجه به جدول بالا، در ۱۶ حالت، عدد ظاهرشده حداقل یکی از تاس‌ها اول بوده و مجموع اعداد روشده حداکثر ۷ است؛

پس جواب برابر $\frac{16}{36} = \frac{4}{9}$ می‌شود.

در آزمایش پرتاب یک تاس، چند پیشامد سه‌عضوی وجود دارد که اگر حاصل آزمایش $\{2\}$ باشد، رخ می‌دهند؟

۱۵ (۴)

۱۰ (۳)

۶ (۲)

۵ (۱)



درسی Box

فضای نمونه‌ای: در یک آزمایش تصادفی، به مجموعه تمام حالاتی که ممکن است رخ دهند، فضای نمونه‌ای می‌گوییم. فضای نمونه‌ای را عموماً با S نمایش می‌دهیم.

پیشامد: به هر زیرمجموعه از فضای نمونه‌ای یک پیشامد می‌گوییم. یک پیشامد وقتی رخ می‌دهد که حاصل آزمایش، یکی از اعضای پیشامد باشد.

پاسخ خیلی تشریحی ✓

گام اول: فضای نمونه‌ای پرتاب یک تاس به صورت $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ است.

گام دوم: پیشامدهای سه‌عضوی را می‌خواهیم که اگر حاصل آزمایش $\{2\}$ باشد رخ دهند، یعنی پیشامدهای سه‌عضوی که شامل عضو $\{2\}$ باشند.

گام سوم: عضو $\{2\}$ را درون پیشامد داریم. حالا برای این که پیشامد سه‌عضوی شود، باید ۲ عضو دیگر از میان ۵ عضو دیگر (یعنی از میان ۱ و ۳ و ۴ و ۵ و ۶) درون پیشامد باشند که به $\binom{5}{2} = 10$ حالت می‌توانیم آن‌ها را انتخاب کنیم؛ بنابراین تعداد پیشامدها با شرایط گفته‌شده ۱۰ تا است.

۴۰ $(P(A))^2 + P(A \cup B) + P(A \cap B) = 2P(A) + P(B) - \frac{5}{9}$ که به طوری که S هستند. به طوری که A و B دو پیشامد از فضای نمونه‌ای S هستند. به طوری که A چه قدر است؟ احتمال رخ دادن پیشامد A چه قدر است؟

$$\frac{2}{3} \quad (۴)$$

$$\frac{1}{3} \quad (۳)$$

$$\frac{1}{5} \quad (۲)$$

$$\frac{1}{4} \quad (۱)$$



قوانین احتمال

درس Box

$$۱) 0 \leq P(A) \leq 1$$

$$۲) P(A') = 1 - P(A)$$

$$۳) P(A - B) = P(A) - P(A \cap B)$$

$$۴) P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

پاسخ خیلی تشریحی ✓ گام اول: با استفاده از مورد (۴) درس باکس داریم:

$$(P(A))^2 + P(A \cup B) + P(A \cap B) = 2P(A) + P(B) - \frac{5}{9}$$

$$\Rightarrow (P(A))^2 + P(A) + P(B) - P(A \cap B) + P(A \cap B) = 2P(A) + P(B) - \frac{5}{9}$$

$$\Rightarrow (P(A))^2 - 2P(A) + \frac{5}{9} = 0$$

گام دوم: با روش دلتا، ریشه‌ها را پیدا می‌کنیم:

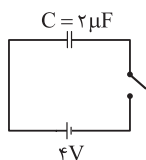
$$\Delta = (-2)^2 - 4 \times 1 \times \frac{5}{9} = 4 - \frac{20}{9} = \frac{16}{9}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} P(A) = \frac{2 + \sqrt{\frac{16}{9}}}{2} = \frac{2 + \frac{4}{3}}{2} = \frac{\frac{10}{3}}{2} = \frac{5}{3} \quad \times \\ P(A) = \frac{2 - \sqrt{\frac{16}{9}}}{2} = \frac{2 - \frac{4}{3}}{2} = \frac{\frac{2}{3}}{2} = \frac{1}{3} \quad \checkmark \end{cases}$$

غ ق ق چون احتمال نمی‌تواند بزرگ‌تر از ۱ باشد.

بنابراین، $P(A) = \frac{1}{3}$ است.

در مدار شکل زیر، خازن بدون باری توسط یک کلید به باتری متصل است. پس از بسته شدن کلید، اندازه بار الکتریکی هر یک از صفحه‌های خازن، به چند میکروکولن می‌رسد؟



(۱) 4×10^{-6}

(۲) 8×10^{-6}

(۳) ۴

(۴) ۸



Hint

درس‌Box

از رابطه $Q = CV$ بار الکتریکی ذخیره شده در هر یک از صفحه‌های خازن را به دست آورید.
با اتصال یک خازن به یک باتری، می‌توانیم در آن بار الکتریکی ذخیره کنیم. پس از اتصال خازن به باتری، شارش بار الکتریکی در مدار تا زمانی ادامه می‌یابد که اختلاف پتانسیل دو سر خازن برابر اختلاف پتانسیل باتری شود. صفحه‌ای که به پایانه مثبت باتری متصل است، دارای بار مثبت و صفحه دیگر دارای بار منفی می‌شود.

وقتی می‌گوییم یک خازن دارای بار Q است، یعنی یک صفحه آن بار $+Q$ و صفحه دیگر آن بار $-Q$ دارد.
ظرفیت خازن: نسبت بار ذخیره شده در یک خازن به اختلاف پتانسیل دو سر آن، مقدار ثابتی است که آن را ظرفیت خازن می‌نامند.

$$C = \frac{Q}{V} \quad \text{کولن (C)} = \frac{\text{فاراد (F)}}{\text{ولت (V)}}$$

$$Q = CV \xrightarrow{C=2 \times 10^{-6} \text{ F}, V=4 \text{ V}} Q = 2 \times 10^{-6} \times 4 = 8 \times 10^{-6} \text{ C} = 8 \mu\text{C}$$

پاسخ خیلی تشریحی ✓

چه تعداد از موارد زیر درست است؟

- (الف) اگر فضای بین صفحه‌های خازنی با یک ماده عایق پر شود، ظرفیت آن افزایش می‌یابد.
 (ب) HCl و NH_3 ، نمونه‌هایی از دی‌الکتریک قطبی هستند.
 (پ) وقتی متان یا بنزن بین صفحات خازن بارداری قرار بگیرند، قطبیده می‌شوند.
 (ت) با حضور دی‌الکتریک در خازن، حداکثر ولتاژ قابل تحمل خازن، افزایش می‌یابد.

۴ (۴)

۳ (۳)

۲ (۲)

۱ (۱)



درس‌باکس را به دقت مطالعه کنید و سعی کنید عبارات درست را بیابید.

Hint

درس‌باکس

عوامل مؤثر بر ظرفیت خازن: همان‌طور که می‌دانید ظرفیت یک خازن به بار ذخیره‌شده (Q) و اختلاف پتانسیل دو سر آن بستگی ندارد، بلکه به ساختمان آن وابسته است.

ظرفیت خازن از رابطه مقابل به دست می‌آید:

κ : ثابت دی‌الکتریک

$$C = \frac{\kappa \epsilon_0 A}{d}$$

$$\epsilon_0: \text{ضریب گذردهی الکتریکی خلأ} \left(\epsilon_0 = \frac{C^2}{N.m} \times 10^{-12} \right)$$

A: مساحت متقابل صفحات خازن (m^2)

d: فاصله جدایی صفحات خازن (m)

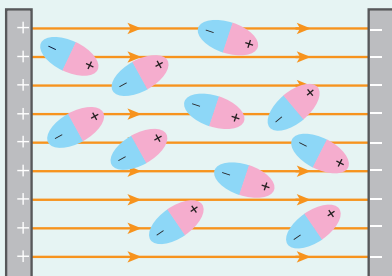
اگر فضای بین صفحات خازن را با یک ماده عایق پر کنیم، به آن ماده عایق، دی‌الکتریک خازن می‌گوییم. ثابت دی‌الکتریک (κ) برای هر عایق، وابسته به جنس آن می‌باشد.

ثابت دی‌الکتریک برای هوا و خلأ، برابر یک است ($\kappa = 1$)، اما برای مواد عایق دیگر، بزرگ‌تر از یک می‌باشد؛ بنابراین اضافه کردن دی‌الکتریک به یک خازن که بین صفحات آن هوا است، ظرفیت خازن را افزایش می‌دهد زیرا ظرفیت خازن با ثابت دی‌الکتریک رابطه مستقیم دارد:

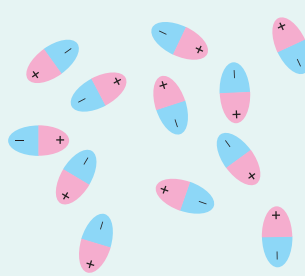
$$\frac{C_2}{C_1} = \frac{\kappa_2}{\kappa_1}$$

هنگامی که یک ماده دی‌الکتریک بین صفحه‌های خازنی که به اختلاف پتانسیل V متصل است قرار می‌گیرد، به دلیل قطبیده شدن مولکول‌های آن، میدان الکتریکی در خلاف جهت میدان الکتریکی خازن ایجاد می‌کند و باعث تضعیف میدان الکتریکی خالص درون خازن می‌شود که این امر حداکثر ولتاژ قابل تحمل خازن را افزایش می‌دهد.

دی‌الکتریک‌ها دو نوع اند: قطبی و غیرقطبی. وقتی یک دی‌الکتریک قطبی (مانند آب، HCl ، NH_3) در میدان الکتریکی بین دو صفحه خازن قرار می‌گیرد، سر منفی مولکول‌های دوقطبی به طرف صفحه مثبت و سر مثبت آن‌ها به طرف صفحه منفی کشیده می‌شود و در نتیجه این مولکول‌های دوقطبی می‌کوشند خود را در جهت میدان الکتریکی بین دو صفحه خازن هم‌ردیف کنند.

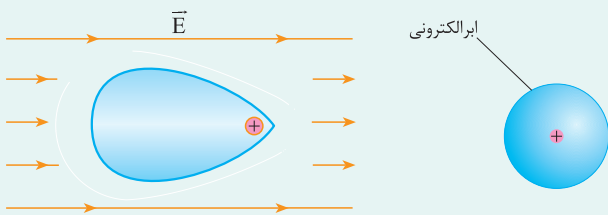


در حضور میدان الکتریکی



در نبود میدان الکتریکی

وقتی یک دی‌الکتریک غیرقطبی (مانند متان، بنزن و ...) در میدان الکتریکی بین دو صفحه خازن قرار می‌گیرد بر اثر القا، قطبیده می‌شود؛ یعنی میدان الکتریکی اعمال شده باعث می‌شود که ابر الکترونی مولکول‌های دی‌الکتریک در خلاف جهت میدان جابه‌جا شود و به این ترتیب، مرکز بارهای مثبت و منفی مولکول‌ها از هم جدا شده و اصطلاحاً مولکول‌ها قطبیده شوند.



پاسخ خیلی تشریحی ✓ با توجه به درس‌باکس تمامی عبارت‌های «الف» تا «ت» صحیح هستند.

در یک صفحه کلید خازنی، مساحت هر صفحه خازن 1 cm^2 و فاصله بین دو صفحه $4/5\text{ mm}$ است که از یک دی الکتریک منعطف با

ثابت $\epsilon_r = 4$ پر شده است. اگر با فشار دادن کلید، ظرفیت خازن $11/2$ پیکوفاراد تغییر کند، حداقل فاصله بین دو صفحه خازن به چند میلی متر

می رسد؟ $(\epsilon_0 = 9 \times 10^{-12} \frac{\text{C}^2}{\text{N} \cdot \text{m}^2})$

۳ (۱)

۰/۳ (۲)

۱/۵ (۳)

۰/۱۵ (۴)

 Hint

ابتدا از رابطه $C = \frac{\kappa \epsilon_0 A}{d}$ ظرفیت اولیه خازن را محاسبه کنید و سپس از طریق رابطه مقایسه ای $(\frac{C_r}{C_1} = \frac{d_1}{d_r})$ ، فاصله جدید بین صفحات خازن را به دست آورید.

پاسخ خیلی تشریحی ✓ گام اول: ابتدا ظرفیت اولیه خازن را با توجه به مشخصات ساختمانی آن محاسبه می کنیم:

$$C = \frac{\kappa \epsilon_0 A}{d} \Rightarrow C_1 = \frac{4 \times 9 \times 10^{-12} \times 1 \times 10^{-4}}{4/5 \times 10^{-3}} = 0/8 \times 10^{-12} \text{ F} = 0/8 \text{ pF}$$

گام دوم: با فشار دادن کلید، فاصله بین صفحات کم شده و ظرفیت خازن افزایش می یابد؛ بنابراین:

$$C_r = C_1 + 11/2 = 0/8 \text{ pF} + 11/2 \text{ pF} = 12 \text{ pF} \Rightarrow \frac{C_r}{C_1} = \frac{d_1}{d_r} \Rightarrow \frac{12}{0/8} = \frac{4/5}{d_r} \Rightarrow d_r = 0/3 \text{ mm}$$

مساحت هر یک از صفحه‌های خازن تختی 4 cm^2 و اندازه بار هر صفحه 36 pC است. اگر بزرگی میدان الکتریکی بین صفحه‌ها

$$(E_0 = 9 \times 10^{-12} \frac{\text{C}^2}{\text{N} \cdot \text{m}^2}) \text{ باشد، ثابت دی‌الکتریک عایق بین صفحه‌ها کدام است؟}$$

۲ (۱)

۳ (۲)

۴ (۳)

۵ (۴)

Hint

با استفاده از رابطه $E = \frac{Q}{\kappa \epsilon_0 A}$ ثابت دی‌الکتریک را به دست آورید. می‌توانید اثبات این رابطه را در درس box ببینید.

درس Box

میدان الکتریکی بین صفحات خازن:



بین صفحات هر خازن تخت یک میدان الکتریکی یکنواخت ایجاد می‌شود که اندازه آن از رابطه زیر قابل محاسبه است و همان‌طور که در شکل می‌بینید، جهت این میدان از صفحه دارای بار مثبت به طرف صفحه دارای بار منفی است.

$$E = \frac{\Delta V}{d}$$

E : میدان الکتریکی (V/m)

ΔV : اختلاف پتانسیل بین دو صفحه خازن (V)

d : فاصله بین دو صفحه خازن (m)

نکته

همان‌طور که قبلاً خوانده‌اید؛ ظرفیت خازن در رابطه $C = \frac{Q}{V}$ قرار می‌گیرد و از رابطه $C = \frac{\kappa \epsilon_0 A}{d}$ به دست می‌آید. حال با ترکیب این دو رابطه و ارتباط آن‌ها با فرمول محاسبه میدان الکتریکی بین صفحات خازن، رابطه زیر به دست می‌آید.

$$C = \frac{Q}{V}, C = \frac{\kappa \epsilon_0 A}{d} \Rightarrow \frac{Q}{V} = \frac{\kappa \epsilon_0 A}{d} \Rightarrow \frac{V}{d} = \frac{Q}{\kappa \epsilon_0 A} \xrightarrow{E = \frac{V}{d}} E = \frac{Q}{\kappa \epsilon_0 A}$$

با توجه به رابطه‌ای که در قسمت درس‌پاکس اثبات کردیم، می‌توانیم ثابت دی‌الکتریک خازن را به صورت زیر به دست آوریم:

$$E = \frac{Q}{\kappa \epsilon_0 A} \Rightarrow 2500 = \frac{36 \times 10^{-12}}{\kappa \times 9 \times 10^{-12} \times 4 \times 10^{-4}} \Rightarrow 2500 \times \kappa \times 36 \times 10^{-16} = 36 \times 10^{-12}$$

$$\Rightarrow \kappa = \frac{10^{-12}}{25 \times 10^{-14}} = \frac{100}{25} \Rightarrow \kappa = 4$$

همان‌طور که قبلاً نیز گفتیم می‌توانیم صفرها، اعشارها و توان‌های 10 را در نظر نگیریم زیرا اعداد گزینه‌ها متفاوت است؛ بنابراین گزینه (۳) یعنی عدد ۴ درست است.

تیزبازی

در مدار فلاش یک دوربین عکاسی، خازنی وجود دارد که با ولتاژ 200 V شارژ شده است. اگر فلاش دوربین عکاسی روشن شود، تخلیه انرژی در مدت $2 \times 10^{-3}\text{ s}$ و با توان 3000 W انجام می‌شود. ظرفیت این خازن چند فاراد است؟

$$3 \times 10^{-3} \quad (1)$$

$$3 \times 10^{-4} \quad (2)$$

$$6 \times 10^{-3} \quad (3)$$

$$6 \times 10^{-4} \quad (4)$$



Hint

با توجه به رابطه توان، انرژی ذخیره شده در خازن را به دست آورید ($U = Pt$)، سپس از رابطه ($U = \frac{1}{2} CV^2$) ظرفیت خازن را محاسبه کنید.

درس‌Box

انرژی الکتریکی ذخیره شده در خازن:

کار انجام شده برای باردار شدن کامل خازن، به صورت انرژی پتانسیل الکتریکی در میدان الکتریکی فضای بین صفحه‌های خازن ذخیره می‌شود:

$$U = \frac{1}{2} QV = \frac{1}{2} CV^2 = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C}$$

U : انرژی پتانسیل الکتریکی خازن (J)

Q : بار خازن (C)

V : اختلاف پتانسیل دو صفحه خازن (V)

C : ظرفیت خازن (F)

پاسخ خیلی تشریحی ✓ گام اول: ابتدا با استفاده از رابطه توان، انرژی ذخیره شده در خازن فلاش دوربین عکاسی را محاسبه می‌کنیم:

$$U = Pt \Rightarrow U = 3000 \times 2 \times 10^{-3} = 6\text{ J}$$

گام دوم: حال طبق اطلاعات سؤال و انتخاب فرمول مناسب انرژی خازن، ظرفیت خازن را به دست می‌آوریم.

$$U = \frac{1}{2} CV^2 \Rightarrow 6 = \frac{1}{2} \times C \times (200)^2 \Rightarrow 12 = C \times 4 \times 10^4 \Rightarrow C = 3 \times 10^{-4}\text{ F}$$

خازن تختی را که بین صفحات آن هوا است، توسط یک باتری باردار کرده و از باتری جدا می‌کنیم. با توجه به جدول زیر، با اعمال هر یک از تغییرهای **A** و **B**، به ترتیب از راست به چپ، انرژی ذخیره‌شده در خازن چگونه تغییر می‌کند؟

افزایش فاصله بین صفحات	A
وارد کردن دی‌الکتریک بین صفحات	B

(۱) افزایش می‌یابد، افزایش می‌یابد.

(۲) کاهش می‌یابد، کاهش می‌یابد.

(۳) افزایش می‌یابد، کاهش می‌یابد.

(۴) کاهش می‌یابد، افزایش می‌یابد.



Hint

طبق فرمول ظرفیت خازن ($C = \frac{\kappa \epsilon_0 A}{d}$) برای هر حالت، ابتدا نوع تغییر ظرفیت خازن را تشخیص دهید و سپس با توجه به رابطه $U = \frac{Q^2}{2C}$ نوع تغییرات انرژی را مشخص کنید.

درس‌Box

با توجه به روابط موجود در مورد انرژی ذخیره‌شده در خازن، این سؤال پیش می‌آید که انرژی خازن با ظرفیت آن رابطه مستقیم دارد یا عکس؟! در جواب این سؤال باید بگوییم که بستگی به کمیت ثابت در خازن دارد. به این صورت که اگر بار خازن ثابت باشد (خازن را از مولد جدا کرده باشیم) انرژی و ظرفیت خازن رابطه عکس دارند:

$$U = \frac{q^2}{2C} \Rightarrow \frac{U_2}{U_1} = \frac{C_1}{C_2}$$

و اگر اختلاف پتانسیل خازن ثابت باشد (خازن به مولد متصل باشد) انرژی و ظرفیت خازن رابطه مستقیم دارند.

$$U = \frac{1}{2} CV^2 \Rightarrow \frac{U_2}{U_1} = \frac{C_2}{C_1}$$

پاسخ خیلی تشریحی ✓ چون خازن از مولد جدا شده است؛ بنابراین بار آن ثابت است:

A حالت: $\downarrow C = \frac{\kappa \epsilon_0 A}{d \uparrow} \Rightarrow \uparrow U = \frac{Q^2}{2C \downarrow}$

بنابراین در این حالت انرژی افزایش می‌یابد.

B حالت: $\uparrow C = \frac{\uparrow \kappa \epsilon_0 A}{d} \Rightarrow \downarrow U = \frac{Q^2}{2C \uparrow}$

بنابراین در این حالت انرژی کاهش می‌یابد.

خازن تختی که بین صفحات آن هوا است به یک باتری متصل است. اگر فاصله بین صفحات را ۲۰ درصد کاهش دهیم، انرژی ذخیره شده در خازن ۸ μJ تغییر می‌کند. انرژی اولیه ذخیره شده در این خازن چند میکروژول است؟

۱۶ (۱)

۲۴ (۲)

۳۲ (۳)

۴۰ (۴)



Hint

ابتدا با توجه به رابطه $(\frac{C_2}{C_1} = \frac{d_1}{d_2})$ نسبت ظرفیت خازن در دو حالت را به دست آورید و سپس طبق رابطه $(U = \frac{1}{2} CV^2)$

تغییرات انرژی را محاسبه کرده و از روی اختلاف انرژی اولیه و ثانویه، انرژی اولیه را محاسبه کنید.

گام اول: نسبت ظرفیت خازن در دو حالت را براساس فاصله بین دو صفحه به دست می‌آوریم:

$$\frac{C_2}{C_1} = \frac{d_1}{d_2} \xrightarrow{d_2 = 0.8d_1} \frac{C_2}{C_1} = \frac{d_1}{0.8d_1} \Rightarrow \frac{C_2}{C_1} = \frac{5}{4}$$

گام دوم: با توجه به این که خازن به مولد متصل است؛ بنابراین اختلاف پتانسیل آن ثابت است:

$$U = \frac{1}{2} CV^2 \Rightarrow \frac{U_2}{U_1} = \frac{C_2}{C_1} = \frac{5}{4} \Rightarrow U_2 = \frac{5}{4} U_1$$

$U_2 > U_1$ است؛ پس انرژی خازن ۸ میکروژول افزایش یافته است:

$$U_2 - U_1 = 8 \mu J \xrightarrow{\frac{5}{4} U_1 - U_1 = 8} \frac{1}{4} U_1 = 8 \Rightarrow U_1 = 32 \mu J$$

پاسخ خیلی تشریحی ✓

کدام یک از عبارت‌های زیر نادرست است؟ ۴۸

(۱) تندی حرکت کاتوره‌ای الکترون‌های آزاد درون رسانا، بسیار زیاد و از مرتبه 10^6 m/s است.

(۲) با ایجاد میدان الکتریکی در درون رسانا، الکترون‌های آزاد با سرعت سوق در جهت میدان الکتریکی حرکت می‌کنند.

(۳) جهت قراردادی جریان الکتریکی در یک رسانا، برخلاف جهت سوق الکترون‌هاست.

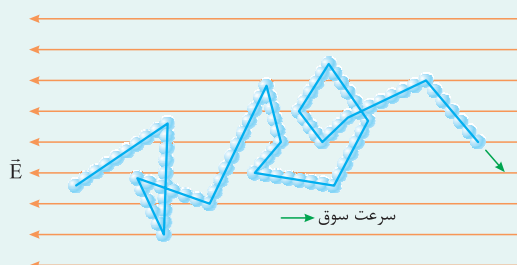
(۴) سرعت سوق الکترون‌ها در سیم‌های مسی، بسیار اندک و از مرتبه 10^{-5} m/s یا 10^{-4} m/s است.

Hint

درس‌Box

درس‌باکس را به دقت بخوانید و خودتان به تست پاسخ دهید.

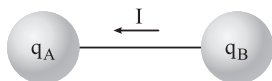
جریان الکتریکی: جریان الکتریکی ناشی از شارش بارهای الکتریکی متحرک از یک مقطع معین است. الکترون‌های آزاد در طول یک سیم رسانا با تندی‌هایی از مرتبه 10^6 m/s در حرکت‌اند، ولی این حرکت به طور کاتوره‌ای در همه جهات است؛ پس شارش خالص محسوب نمی‌شود، اما اگر این سیم را در یک مدار الکتریکی قرار دهیم، اختلاف پتانسیل در دو سر سیم و میدان الکتریکی، درون آن ایجاد می‌شود که باعث حرکت الکترون‌های آزاد در سیم و ایجاد جریان می‌شود. در واقع وقتی میدان الکتریکی درون سیم ایجاد می‌شود، الکترون‌ها حرکت کاتوره‌ای خود را تغییر می‌دهند و با سرعتی موسوم به سرعت سوق که در مقایسه با تندی کاتوره‌ای الکترون‌های آزاد بسیار کم (مثلاً در سیم‌های مسی از مرتبه بزرگی $10^{-5} \frac{\text{m}}{\text{s}}$ یا $10^{-4} \frac{\text{m}}{\text{s}}$ است) و در خلاف جهت میدان، سوق پیدا می‌کنند که این موجب برقراری جریان الکتریکی در رسانا می‌شود. البته توجه کنید که جهت قراردادی جریان، برخلاف جهت سوق الکترون‌هاست.



گزینه (۲) نادرست است زیرا الکترون‌ها (که دارای بار منفی هستند) در خلاف جهت میدان الکتریکی حرکت می‌کنند.

پاسخ خیلی تشریحی ✓

در شکل زیر، دو کره رسانای هم‌اندازه با بارهای اولیه q_A و q_B را توسط سیمی رسانا به هم متصل می‌کنیم. اگر تا ایجاد تعادل، به مدت زمان 5 ns در این سیم جریان متوسط $I = 2\text{ kA}$ ، در جهت نشان داده شده ایجاد شود، در کدام مورد بار اولیه این دو کره به درستی مقایسه شده است؟



(۱) $q_A - q_B = 10\text{ }\mu\text{C}$

(۲) $q_B - q_A = 10\text{ }\mu\text{C}$

(۳) $q_A - q_B = 20\text{ }\mu\text{C}$

(۴) $q_B - q_A = 20\text{ }\mu\text{C}$



 **Hint**

ابتدا با استفاده از رابطه $(I = \frac{\Delta q}{\Delta t})$ مقدار بار جابه‌جاشده را محاسبه کنید و سپس این مقدار را برابر تفاضل بار جدید و بار اولیه یکی از کره‌ها قرار دهید.

 **دروس Box**

آهنگ شارش بار الکتریکی در رسانا، معادل با جریان الکتریکی متوسط عبوری از آن است:

$$I = \frac{\Delta q}{\Delta t} \quad \text{کولن} = \frac{\text{آمپر}}{\text{ثانیه}}$$

I: جریان الکتریکی متوسط برحسب آمپر (A)

Δq : بار الکتریکی خالص عبوری برحسب کولن (C)

Δt : مدت زمان برحسب ثانیه (s)

هرگاه دو کره رسانای هم‌اندازه با بارهای اولیه q_A و q_B را توسط یک رسانا به هم متصل کنیم، پس از تبادل بار بین آن‌ها، بار کره‌ها با یکدیگر برابر می‌شود و مقدار بار هر کره، برابر است با میانگین بارهای اولیه کره‌ها:

$$q'_A = q'_B = \frac{q_A + q_B}{2}$$

پاسخ خیلی تشریحی ✓ گام اول: ابتدا با استفاده از رابطه جریان الکتریکی متوسط عبوری از مقطع یک رسانا، مقدار بار جابه‌جاشده را به دست می‌آوریم:

$$I = \frac{\Delta q}{\Delta t} \Rightarrow \Delta q = 2 \times 10^3 \times 5 \times 10^{-9} = 10^{-5} \text{ C} = 10\text{ }\mu\text{C}$$

گام دوم: حال تغییرات بار در کره A را برابر $10\text{ }\mu\text{C}$ قرار می‌دهیم:

$$\Delta q = q'_A - q_A \Rightarrow 10 = \left(\frac{q_A + q_B}{2} \right) - q_A \Rightarrow 20 = q_A + q_B - 2q_A \Rightarrow q_B - q_A = 20\text{ }\mu\text{C}$$

با اعمال اختلاف پتانسیل الکتریکی 16 V در دو سر یک سیم رسانا، در مدت یک دقیقه، از مقطع این رسانا $1/2 \times 10^{21}$ الکترون عبور می‌کند. مقاومت الکتریکی این رسانا، چند اهم است؟ ($e = 1/6 \times 10^{-19}\text{ C}$)

۲ (۱)

۳ (۲)

۴ (۳)

۵ (۴)



Hint

درس‌Box

ابتدا جریان عبوری را از رابطه $(I = \frac{ne}{t})$ محاسبه کنید و سپس با استفاده از قانون اهم $(R = \frac{V}{I})$ مقاومت رسانا را به دست آورید.

قانون اهم: اگر مقاومت الکتریکی یک وسیله در ولتاژهای مختلف (در دمای ثابت) همواره مقدار ثابتی داشته باشد، به آن وسیله، مقاومت یا رسانای اهمی گفته می‌شود. به عبارت دیگر در وسیله‌هایی که از قانون اهم پیروی می‌کنند؛ نسبت اختلاف پتانسیل دو سر آن‌ها به شدت جریان عبوری از آن‌ها در دمای ثابت، مقداری ثابت است. این مقدار ثابت را مقاومت الکتریکی آن جسم می‌نامیم:

$$R = \frac{V}{I}$$

R: مقاومت الکتریکی برحسب (Ω)

V: اختلاف پتانسیل برحسب ولت (V)

I: جریان الکتریکی برحسب آمپر (A)

پاسخ خیلی تشریحی ✓ گام اول: ابتدا جریان عبوری از رسانا را به دست می‌آوریم:

$$I = \frac{q}{t} \xrightarrow{q=ne} I = \frac{1/2 \times 10^{21} \times 1/6 \times 10^{-19}}{60} = 3/2\text{ A}$$

گام دوم: حال با استفاده از قانون اهم، مقاومت الکتریکی رسانا به راحتی به دست می‌آید:

$$R = \frac{V}{I} \Rightarrow R = \frac{16}{3/2} = 5\Omega$$

مقاومت یک کابل مسی مخصوص انتقال برق، $50 \text{ m}\Omega$ است. اگر طول این کابل 2 km باشد، مساحت مقطع آن چند سانتی متر مربع است؟ (مقاومت ویژه مس $10^{-8} \Omega \cdot \text{m}$ است.)

۸ (۱)

۰/۸ (۲)

۴ (۳)

۰/۴ (۴)

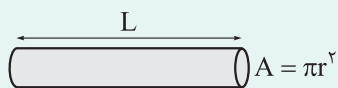
 Hint

 درس Box

می‌توانید به راحتی با جای‌گذاری اطلاعات مسئله در رابطه $(R = \rho \frac{L}{A})$ سطح مقطع کابل را به دست آورید.

ساختمان مقاومت: مقاومت الکتریکی یک سیم رسانا در دمای ثابت به سطح مقطع، طول و جنس آن بستگی دارد و از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$R = \rho \frac{L}{A}$$



R : مقاومت الکتریکی سیم (Ω)

ρ : مقاومت ویژه سیم ($\Omega \cdot \text{m}$)

L : طول سیم (m)

A : سطح مقطع سیم (m^2)

 پاسخ خیلی تشریحی

$$R = \rho \frac{L}{A} \xrightarrow[L=2\text{km}=2 \times 10^3 \text{ m}]{R=50 \text{ m}\Omega=50 \times 10^{-3} \Omega} 50 \times 10^{-3} = \frac{2 \times 10^{-8} \times 2 \times 10^3}{A} \Rightarrow A = \frac{4 \times 10^{-5}}{50 \times 10^{-3}} = 0.8 \times 10^{-3} \text{ m}^2 = 0.8 \text{ cm}^2$$

اختلاف پتانسیل دو سر یک رسانای اهمی، V است. در آزمایش (۱)، اختلاف پتانسیل را ۲۰ درصد کاهش می‌دهیم. در نتیجه جریان عبوری از رسانا $۲/۴ A$ تغییر می‌کند. در آزمایش (۲) در حالتی که اختلاف پتانسیل اولیه دو سر این رسانا V است، اگر اختلاف پتانسیل را ۳۰% افزایش دهیم، جریان عبوری از رسانا چند آمپر خواهد شد؟

۱) $۱۵/۶$

۲) $۱۴/۴$

۳) ۵

۴) $۳/۶$

درس Box

اگر مقدار اولیه جریان را با I_0 و مقدار اولیه اختلاف پتانسیل را با V_0 نشان دهیم، با توجه به قانون اهم می‌توان نوشت:

$$\frac{\Delta V}{V_0} = \frac{\Delta I}{I_0}$$

$$\text{درصد تغییر اختلاف پتانسیل} = \frac{\Delta V}{V_0} \times 100$$

$$\text{درصد تغییر جریان الکتریکی} = \frac{\Delta I}{I_0} \times 100$$

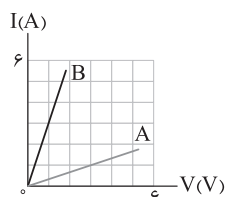
گام اول: اگر مقدار اولیه جریان الکتریکی را I_0 در نظر بگیریم، می‌توانیم با توجه به این که طبق قانون اهم، درصد تغییرات اختلاف پتانسیل و جریان، یکسان هستند، I_0 آن را به دست بیاوریم:

$$\frac{\Delta V}{V_0} = \frac{\Delta I}{I_0} \xrightarrow{\Delta V = -0.2V_0} \frac{-0.2V_0}{V_0} = \frac{-2/4 I_0}{I_0} \Rightarrow -0.2 = \frac{-2/4}{I_0} \Rightarrow 0.2 I_0 = 2/4 \Rightarrow I_0 = \frac{2/4}{0.2} = 12 A$$

گام دوم: در آزمایش (۲) با افزایش اختلاف پتانسیل، جریان الکتریکی نیز با همان نسبت تغییر می‌کند؛ بنابراین:

$$I_2 = 0.3 I_0 + I_0 \Rightarrow I_2 = (0.3 \times 12) + 12 = 15.6 A$$

نمودار $I-V$ برای دو رسانای اهمی A و B به شکل زیر است. اگر به دو سر هر یک از این رساناها، اختلاف پتانسیل الکتریکی ۵ ولت را اعمال کنیم، در مدت یک دقیقه، اختلاف بار الکتریکی عبوری از مقطع‌های این دو رسانا چند کولن خواهد بود؟



(۱) ۹۰۰

(۲) ۸۰۰

(۳) ۷۵۰

(۴) ۶۰۰

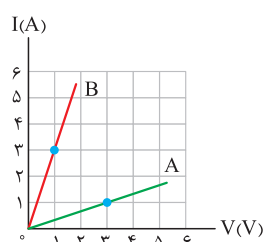


Hint

از روی اطلاعات نمودار، مقاومت الکتریکی هر رسانا ($R = \frac{V}{I}$) و جریان عبوری از آن ($I = \frac{V}{R}$) را به ازای اختلاف پتانسیل ۵V محاسبه کنید و در انتها از رابطه $(\Delta I = \frac{\Delta q}{\Delta t})$ اختلاف بار الکتریکی عبوری را به دست آورید.

گام اول: ابتدا با توجه به نمودار، مقاومت الکتریکی رساناهای A و B را به دست می‌آوریم:

پاسخ خیلی تشریحی ✓



$$R = \frac{V}{I} \Rightarrow R_B = \frac{1}{3} \Omega, R_A = \frac{3}{1} = 3 \Omega$$

گام دوم: سپس جریان عبوری از هر مقاومت را به ازای اختلاف پتانسیل ۵V محاسبه می‌کنیم:

$$I = \frac{V}{R} \Rightarrow I_B = \frac{5}{\frac{1}{3}} = 15 A, I_A = \frac{5}{3} A$$

گام سوم: در نهایت می‌توانیم اختلاف بار الکتریکی عبوری از مقطع دو رسانا را به صورت زیر محاسبه کنیم:

$$I = \frac{q}{t} \Rightarrow \Delta I = \frac{\Delta q}{\Delta t} \xrightarrow{\Delta I = 15 - \frac{5}{3} = \frac{40}{3}} \frac{40}{3} = \frac{\Delta q}{60} \Rightarrow \Delta q = 800 C$$

مقاومت الکتریکی یک سیم آلومینیومی به مساحت مقطع 10 mm^2 و جرم 40 g ، چند برابر مقاومت الکتریکی یک سیم پلاتینی به مساحت مقطع 20 mm^2 و جرم 56 g است؟ (چگالی پلاتین ۸ برابر چگالی آلومینیوم و مقاومت ویژه آن‌ها به ترتیب $10^{-7} \Omega \cdot \text{m}$ و $10^{-8} \Omega \cdot \text{m}$ است.)

۱/۶ (۴)

۲/۸ (۳)

۳/۲ (۲)

۶/۴ (۱)



Hint

ابتدا به کمک رابطه مقایسه‌ای چگالی ($\rho'_1 = \frac{m_1}{V_1} = \frac{m_1}{A_1 \times \frac{L_1}{L_2}} = \frac{m_1}{A_1} \times \frac{L_2}{L_1}$) نسبت طول آلومینیوم به طول پلاتین را به دست آورید. سپس با کمک رابطه مقایسه‌ای مقاومت الکتریکی ($R_2 = \frac{\rho_2}{\rho_1} \times \frac{L_2}{L_1} \times \frac{A_1}{A_2}$) نسبت مقاومت آلومینیوم به مقاومت پلاتین را محاسبه کنید.

درس Box

چگالی هر جسم از رابطه زیر قابل محاسبه است که با جرم جسم رابطه مستقیم و با حجم آن رابطه عکس دارد:

$$\rho' = \frac{m}{V}$$

ρ' : چگالی (kg / m^3)

m : جرم (kg)

V : حجم (m^3)

مقاومت یک سیم با طول و مقاومت ویژه آن رابطه مستقیم و با سطح مقطع آن رابطه عکس دارد:

$$\frac{R_2}{R_1} = \frac{\rho_2}{\rho_1} \times \frac{L_2}{L_1} \times \frac{A_1}{A_2}$$

تذکر: با توجه به این‌که در سیم‌های با مقطع دایره‌ای، سطح مقطع، برابر $A = \pi r^2$ می‌باشد؛ بنابراین مقاومت یک سیم فلزی استوانه‌ای با مربع شعاع مقطع آن رابطه معکوس دارد:

$$\frac{R_2}{R_1} = \frac{\rho_2}{\rho_1} \times \frac{L_2}{L_1} \times \left(\frac{r_1}{r_2} \right)^2$$

در سیم‌های استوانه‌ای حجم سیم به صورت حاصل ضرب طول در سطح مقطع سیم ($V = AL$) به دست می‌آید؛ بنابراین:

$$\rho' = \frac{m}{AL} \Rightarrow \frac{\rho'_1}{\rho'_2} = \frac{m_1}{m_2} \times \frac{A_2}{A_1} \times \frac{L_1}{L_2} \xrightarrow{A = \pi r^2} \frac{\rho'_1}{\rho'_2} = \frac{m_1}{m_2} \times \left(\frac{r_1}{r_2} \right)^2 \times \frac{L_1}{L_2}$$

پاسخ خیلی تشریحی ✓ گام اول: ابتدا با استفاده از رابطه مقایسه‌ای چگالی، نسبت طول سیم‌ها را به دست می‌آوریم (در این سؤال چگالی را با علامت ρ' نمایش داده‌ایم):

$$\frac{\rho'_{\text{پلاتین}}}{\rho'_{\text{آلومینیوم}}} = \frac{m_{\text{پلاتین}}}{m_{\text{آلومینیوم}}} \times \frac{A_{\text{آلومینیوم}}}{A_{\text{پلاتین}}} \times \frac{L_{\text{آلومینیوم}}}{L_{\text{پلاتین}}} \Rightarrow 8 = \frac{56}{40} \times \frac{10}{20} \times \frac{L_{\text{آلومینیوم}}}{L_{\text{پلاتین}}} \Rightarrow \frac{L_{\text{آلومینیوم}}}{L_{\text{پلاتین}}} = \frac{8}{7}$$

گام دوم: با استفاده از رابطه مقاومت الکتریکی داریم:

$$\frac{R_{\text{آلومینیوم}}}{R_{\text{پلاتین}}} = \frac{\rho_{\text{آلومینیوم}}}{\rho_{\text{پلاتین}}} \times \frac{L_{\text{آلومینیوم}}}{L_{\text{پلاتین}}} \times \frac{A_{\text{پلاتین}}}{A_{\text{آلومینیوم}}} \Rightarrow \frac{R_{\text{آلومینیوم}}}{R_{\text{پلاتین}}} = \frac{2/8 \times 10^{-8}}{10 \times 10^{-8}} \times \frac{8}{7} \times \frac{20}{10} = 6/4$$



پاسخ خیلی تشریحی ✓

موارد «الف»، «ب» و «پ» به ترتیب از راست به چپ، دربارهٔ کدام یک از مقاومت‌های زیر درست هستند؟
 الف) در مدارهای الکترونیکی به عنوان حسگر دما استفاده می‌شود.
 ب) با افزایش شدت نور، مقاومت الکتریکی آن کاهش می‌یابد.
 پ) جریان الکتریکی را فقط از یک سو عبور می‌دهد.

۱) دیود، LDR، ترمستور

۲) LDR، ترمستور، دیود

۳) ترمستور، LDR، دیود

۴) ترمستور، دیود، LDR



پاسخ خیلی تشریحی ✓
 • از ترمستور به عنوان حسگر دما در مدارهای الکترونیکی استفاده می‌شود.
 • در LDR با افزایش شدت نور، مقاومت الکتریکی کاهش می‌یابد.
 • دیودها جریان الکتریکی را تنها از یک سو عبور می‌دهند.

در دمای 30°C ، مقاومت پلاتین یک دماسنج مقاومت پلاتینی 160Ω است. وقتی این دماسنج در محلول خاصی قرار گیرد، مقاومت آن 192Ω می‌شود. دمای این محلول چند درجه سلسیوس است؟ ($\alpha_{\text{پلاتین}} = 4 \times 10^{-3} \text{ }^{\circ}\text{C}^{-1}$)

۵۰ (۱)

۶۰ (۲)

۷۰ (۳)

۸۰ (۴)



Hint

با استفاده از رابطه تغییر مقاومت بر حسب تغییر دمای رسانا ($\Delta R = R_1 \alpha \Delta \theta$) می‌توانید دمای ثانویه مقاومت پلاتینی دماسنج را که با محلول در تعادل است به دست آورید.

درس Box

با افزایش دمای یک رسانای فلزی، مقاومت الکتریکی آن افزایش می‌یابد.

$$\Delta R = R_1 \alpha \Delta \theta$$

$\Delta R = R_2 - R_1$: تغییر مقاومت الکتریکی (Ω)

R_1 : مقاومت الکتریکی در دمای θ_1 (Ω)

R_2 : مقاومت الکتریکی در دمای θ_2 (Ω)

α : ضریب دمایی مقاومت ویژه ($\frac{1}{^{\circ}\text{C}}$)

$\Delta \theta = \theta_2 - \theta_1$: تغییر دما ($^{\circ}\text{C}$)

پاسخ خیلی تشریحی ✓

$$\Delta R = R_1 \alpha \Delta \theta \Rightarrow (192 - 160) = 160 \times 4 \times 10^{-3} \times \Delta \theta$$

$$\Delta \theta = \frac{32}{64 \times 10^{-2}} = 50 \Rightarrow \theta_2 - 30 = 50 \Rightarrow \theta_2 = 80^{\circ}\text{C}$$

طول رسانای فلزی A، دو برابر طول رسانای فلزی B است. رسانای A، سیم توپری به قطر ۲ mm و رسانای B لوله‌ای توخالی به شعاع خارجی ۲ mm و شعاع داخلی ۱ mm است. اگر مقاومت الکتریکی این دو رسانا برابر باشد، مقاومت ویژه رسانای B چند برابر مقاومت ویژه رسانای A است؟

۲ (۱)

۳ (۲)

۴ (۳)

۶ (۴)



 Hint

با استفاده از رابطه مقایسه‌ای مقاومت $(\frac{R_2}{R_1} = \frac{\rho_2}{\rho_1} \times \frac{L_2}{L_1} \times \frac{A_1}{A_2})$ می‌توانید نسبت مقاومت ویژه B به مقاومت ویژه A را به دست آورید. دقت کنید که مساحت مقطع سیم استوانه‌ای توخالی از رابطه $(A = \pi(r_{\text{داخلی}}^2 - r_{\text{خارجی}}^2))$ به دست می‌آید.

$$d_A = 2\text{mm} \Rightarrow r_A = 1\text{mm}$$

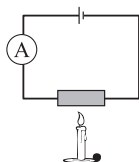
$$\frac{R_B}{R_A} = \frac{\rho_B}{\rho_A} \times \frac{L_B}{L_A} \times \frac{A_A}{A_B} \xrightarrow[A_{\text{توخالی}} = \pi(r_{\text{داخلی}}^2 - r_{\text{خارجی}}^2)]{A_{\text{توپری}} = \pi r_A^2} 1 = \frac{\rho_B}{\rho_A} \times \frac{1}{2} \times \frac{\pi \times 1}{\pi(4-1)}$$

$$\Rightarrow 1 = \frac{\rho_B}{\rho_A} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} \Rightarrow \frac{\rho_B}{\rho_A} = 6$$

پاسخ خیلی تشریحی ✓

در مدار شکل زیر توسط شمع به میله حرارت می‌دهیم، در نتیجه عدد آمپرسنج افزایش می‌یابد. کدام یک از عبارات‌های زیر دربارهٔ این

میله درست است؟



(الف) میله، یک قطعهٔ رسانا است.

(ب) میله، یک قطعهٔ نیم‌رسانا است.

(پ) با افزایش دمای میله، ارتعاشات کاتوره‌ای اتم‌های آن افزایش می‌یابد.

(ت) با افزایش دمای میله، تعداد حامل‌های بار میله، ثابت می‌ماند.

(۱) الف و ت

(۲) ب و پ

(۳) الف و پ

(۴) ب و ت



پاسخ خیلی تشریحی ✓

با افزایش عدد آمپرسنج به این نتیجه می‌رسیم که مقاومت میله کاهش یافته است؛ در نتیجه این میله یک نیم‌رسانا است زیرا نیم‌رساناها با افزایش دما مقاومتشان کاهش می‌یابد. در نیم‌رساناها مانند ژرمانیم یا سیلیسیم گرچه با افزایش دما ارتعاشات کاتوره‌ای اتم‌های آن افزایش می‌یابد و در نتیجه تعداد برخوردهای حامل‌های بار با شبکهٔ اتمی بیشتر می‌شود و می‌خواهد مقاومت الکتریکی را افزایش دهد، اما تأثیر افزایش تعداد حامل‌های بار (الکترون‌های آزاد) در دمای بالا، بیشتر از این برخوردهای کاتوره‌ای است؛ بنابراین در مجموع مقاومت ویژهٔ نیم‌رساناها با افزایش دما کاهش می‌یابد؛ بنابراین عبارات‌های «ب» و «پ» درست است.

۵۹

از سیمی به طول 20 m و جرم 25 g که اختلاف پتانسیل 8 V در دو سر آن برقرار است، جریان 5 A عبور می‌کند. اگر مقاومت ویژه سیم $2 \times 10^{-8}\ \Omega \cdot \text{m}$ باشد، چگالی آن چند گرم بر سانتی‌متر مکعب است؟

۵ (۱)

۶ (۲)

۸ (۳)

۱۰ (۴)

 Hint

ابتدا از طریق قانون اهم ($R = \frac{V}{I}$) و رابطه مقاومت ($R = \rho \frac{L}{A}$) سطح مقطع سیم را به دست آورید. سپس با استفاده از رابطه چگالی ($\rho = \frac{m}{V}$) می‌توانید چگالی سیم را محاسبه کنید.

پاسخ خیلی تشریحی ✓ گام اول: ابتدا با استفاده از قانون اهم، مقاومت سیم را به دست آورده و سپس از رابطه مقاومت، مساحت سطح مقطع سیم را

محاسبه می‌کنیم:

$$R = \frac{V}{I} \Rightarrow R = \frac{8}{5} = 1.6\ \Omega$$

$$R = \rho \frac{L}{A} \Rightarrow 1.6 = \frac{2 \times 10^{-8} \times 20}{A} \Rightarrow A = 2.5 \times 10^{-7}\text{ m}^2$$

گام دوم: حال با استفاده از مساحت به دست آمده، چگالی سیم را به دست می‌آوریم:

$$\rho = \frac{m}{V} \xrightarrow{V=AL} \rho = \frac{25 \times 10^{-3}}{2.5 \times 10^{-7} \times 20} = \frac{1}{2} \times 10^4\text{ kg/m}^3 = 5000\frac{\text{kg}}{\text{m}^3} = 5\text{ g/cm}^3$$

مقاومت الکتریکی یک سیم فلزی R است. $\frac{1}{n}$ از این سیم را بریده و کنار می‌گذاریم و قطعه سیم باقی‌مانده را از دستگاه عبور می‌دهیم تا آن را به طور یکنواخت نازک کرده و طولش را به طول اولیه سیم برساند. با ثابت ماندن دما، مقاومت سیم جدید چند برابر R است؟

$$n \quad (۱)$$

$$n-1 \quad (۲)$$

$$n(n-1) \quad (۳)$$

$$\frac{n}{n-1} \quad (۴)$$



درس‌Box

هرگاه در حجم ثابت و یا در جرم ثابت، طول یا سطح مقطع سیمی را تغییر دهیم مقاومت آن نیز تغییر می‌کند، اما رابطه مقایسه‌ای برای به دست آوردن نسبت مقاومت در دو حالت مختلف به صورت زیر است:

$$\frac{R_2}{R_1} = \left(\frac{L_2}{L_1}\right)^2 \quad \text{یا} \quad \frac{R_2}{R_1} = \left(\frac{D_1}{D_2}\right)^4$$

L : طول سیم (m)
 D : قطر مقطع سیم (m)

پاسخ خیلی تشریحی ✓ **گام اول:** ابتدا نسبت تغییرات مقاومت را پس از بریدن $\frac{1}{n}$ از طول آن به دست می‌آوریم:

$$\frac{R_2}{R_1} = \frac{L_2}{L_1} \xrightarrow{L_1=L, L_2=L-\frac{1}{n}L} \frac{R_2}{R_1} = \frac{L-\frac{1}{n}L}{L} = \frac{n-1}{n} \Rightarrow R_2 = \left(\frac{n-1}{n}\right)R_1$$

گام دوم: وقتی سیم را از دستگاه عبور دهیم تا مجدداً به طول اولیه‌اش برسد، جرم آن ثابت مانده و تغییر نمی‌کند:

$$\frac{R_3}{R_2} = \left(\frac{L_3}{L_2}\right)^2 \xrightarrow{L_2=L_1} \frac{R_3}{R_2} = \left(\frac{L_1}{L_2}\right)^2 = \left(\frac{n}{n-1}\right)^2 \Rightarrow R_3 = \left(\frac{n}{n-1}\right)^2 \times R_2$$

$$\Rightarrow R_3 = \left(\frac{n}{n-1}\right)^2 \times \left(\frac{n-1}{n}\right)R_1 \Rightarrow R_3 = \frac{n}{n-1}R_1$$

۶۱ کدام گزینه نادرست است؟

- (۱) برای استخراج هر کیلوگرم آهن، در مجموع حدود سه کیلوگرم سنگ معدن آهن و منابع معدنی دیگر، مورد نیاز است.
- (۲) از بازگردانی هفت قوطی فولادی آن قدر انرژی ذخیره می شود که می توان ۶ لامپ ۱۰ واتی را بیش از یک شبانه روز روشن نگه داشت.
- (۳) غلظت گونه های فلزی موجود در کف اقیانوس از ذخایر زیرزمینی آن، بیشتر است.
- (۴) باز یافت فلزها علاوه بر کاهش رد پای کربن دی اکسید و کاهش سرعت گرمایش جهانی، باعث تخریب گونه های زیستی بیشتری می شود.



پاسخ خیلی تشریحی ✓

باز یافت فلزها سبب کاهش رد پای کربن دی اکسید، کاهش سرعت گرمایش جهانی و کاهش از بین رفتن گونه های زیستی می شود و به توسعه پایدار کمک می کند.

بررسی سایر گزینه ها:

گزینه (۱): برای استخراج هر هزار کیلوگرم آهن، به تقریب دو هزار کیلوگرم سنگ معدن آن و هزار کیلوگرم مواد معدنی دیگر لازم است.

گزینه (۲): از بازگردانی هفت قوطی فولادی آن قدر انرژی ذخیره می شود که می توان یک لامپ ۱۰ واتی (معادل ۱۰ لامپ ۶۰ واتی) را ۲۵ ساعت (بیش از یک شبانه روز) روشن نگه داشت.

گزینه (۳): منابع اقیانوسی نسبت به ذخایر زیرزمینی، برای گونه های فلزی غنی تر هستند.

چند مورد از مطالب زیر، درست است؟

- در فرایند دفن کردن پاکت کاغذی برخلاف کیسه پلاستیکی، تجزیه رخ می‌دهد و گاز CH_4 تولید می‌شود.
- فرایند دفع پاکت‌های کاغذی با روش سوزاندن زباله برخلاف روش بازیافت، سبب آلودگی هوا می‌شود.
- فلزات جزء منابع تجدیدناپذیر در طبیعت هستند و با فرایند فرسایش به سنگ معدن خود تبدیل می‌شوند.
- مواد اولیه پاکت کاغذی همانند کیسه پلاستیکی ناپایدار بوده و هر دو در طی توزیع و مصرف، باعث آلودگی هوا می‌شوند.

۴ (۴)

۳ (۳)

۲ (۲)

۱ (۱)



چرخه عمر برای پاکت کاغذی و کیسه پلاستیکی

درس Box

کیسه پلاستیکی	پاکت کاغذی	مراحل چرخه عمر
نفت خام	درخت	ماده اولیه یا خام چیست؟
ناپایدار - نفت تجدیدشدنی است.	نسبتاً پایدار - می‌توان تعداد زیادی درخت کاشت	پایداری تأمین ماده اولیه و خام
در استخراج نفت خام انرژی زیادی مصرف می‌شود.	با بردن درختان، زیستگاه جانداران زیادی تخریب می‌شود.	تأثیر تولید ماده خام روی محیط زیست
سبب آلودگی هوا، خاک و آب می‌شود.	آلودگی هوا را به دنبال دارد.	تأثیر حمل و نقل ماده خام روی محیط زیست
در پالایش نفت خام و واکنش پلیمری شدن، انرژی زیادی مصرف می‌شود.	در تولید کاغذ، آب به مقدار زیاد و برخی مواد شیمیایی مضر برای محیط زیست مصرف می‌شود.	تأثیر روی محیط زیست
سبب آلودگی هوا می‌شود.	سبب آلودگی هوا می‌شود.	تأثیر حمل و نقل ماده خام روی محیط زیست
تجزیه نمی‌شود و در زمین برای سالیان طولانی باقی می‌ماند.	تجزیه می‌شود اما گاز متان تولید می‌کند، که آلاینده هوا است.	دفن کردن
سبب انتشار گازهای گلخانه‌ای و آلودگی هوا می‌شود.	سبب انتشار گازهای گلخانه‌ای و آلودگی هوا می‌شود.	سوزاندن زباله
حمل و نقل پسماندهای پلاستیکی و ذوب کردن آن‌ها انرژی مصرف می‌کند و سبب آلودگی هوا می‌شود.	حمل و نقل پسماندهای کاغذی سبب آلودگی هوا می‌شود.	بازیافت

موارد اول و سوم درست است. پاسخ خیلی تشریحی ✓

بررسی موارد:

مورد اول: با توجه به درس Box بالا، این عبارت درست است.

مورد دوم: سوزاندن زباله و بازیافت پاکت کاغذی، هر دو سبب آلودگی هوا می‌شوند.

مورد سوم: فلزات بعد از خوردگی و فرسایش به سنگ معدن خود تبدیل می‌شوند که طی استخراج، دوباره به وسایل فلزی تبدیل می‌شود و با توجه به طولانی بودن این فرایندها، فلزات تجدیدناپذیرند.

مورد چهارم: مواد اولیه پاکت کاغذی نسبتاً پایدار بوده و مواد اولیه کیسه پلاستیکی، ناپایدار است.

۶۳

دانش آموزی ترکیبی را به اشتباه ۵ - اتیل - ۲، ۴ - دی متیل هگزان نام گذاری کرده است. نام درست ترکیب و شمار گروه های CH_3 آن کدام است؟

(۱) ۲، ۴، ۵ - تری متیل هپتان - ۱

(۲) ۲، ۴، ۵ - تری متیل هپتان - ۲

(۳) ۲، ۴، ۶ - تری متیل هپتان - ۲

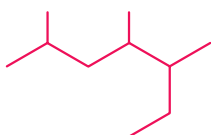
(۴) ۲، ۴، ۶ - تری متیل هپتان - ۱



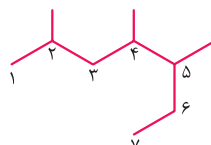
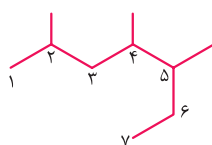
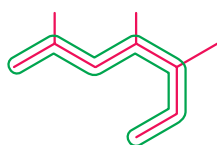
Hint

برای پاسخ به این سؤال ابتدا باید از روی نام اشتباه، فرمول ساختاری یا پیوند - خط هیدروکربن را رسم کنید و با توجه به آن، نام گذاری درست را انجام دهید.

گام اول: رسم فرمول پیوند - خط هیدروکربن داده شده براساس نام اشتباه:



گام دوم: نام گذاری درست:



(۱) زنجیره اصلی با بیشترین تعداد کربن

(۲) شماره گذاری درست

(۳) ۲، ۴، ۵ - تری متیل هپتان

گروه های CH_3 مربوط به کربن هایی است که به دو کربن متصل اند. در ترکیب داده شده، کربن شماره ۳ و ۶ به دو اتم کربن متصل اند.

درستی یا نادرستی کدام گزینه با عبارت زیر متفاوت است؟ ($H=1$, $C=12: g.mol^{-1}$)

«در چهار عضو نخست آلکان‌ها، پیشوندی که شمار اتم‌های کربن را معلوم کند، وجود ندارد.»



(۱) در گذشته اتن به اتیلن و اتین به استیلن معروف بوده است.

(۲) اختلاف جرم مولی دومین عضو خانواده سیکلوآلکان‌ها و سومین عضو خانواده آلکین‌ها برابر با ۱۰ گرم است.



(۳) مجموع اعداد به کاررفته در نام‌گذاری آلکانی با ۲ شاخه فرعی متیل و زنجیره اصلی ۴ کربنه، حداکثر

برابر شمار پیوندهای $C-C$ آن است.

(۴) در فرمول پیوند - خط هیدروکربن‌ها، اتصال بین اتم‌های کربن و هیدروژن نشان داده نمی‌شود.

پاسخ خیلی تشریحی ✓ عبارت داده‌شده درست است و باید دنبال گزینه نادرست بگردیم.

جدول زیر نخستین عضو هر خانواده از هیدروکربن‌ها را نشان می‌دهد.

CH_4	آلکان‌ها
C_2H_4	آلکن‌ها
C_2H_2	آلکین‌ها
C_3H_6	سیکلوآلکان‌ها
C_6H_6	آروماتیک‌ها

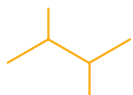
دومین عنصر خانواده سیکلوآلکان‌ها، C_4H_8 و سومین عضو خانواده آلکین‌ها، C_4H_6 است که اختلاف جرم مولی آن‌ها

برابر ۲ گرم است.

بررسی سایر گزینه‌ها:

گزینه (۱): نام قدیمی اتن (C_2H_4)، اتیلن و اتین (C_2H_2)، استیلن بوده است.

گزینه (۳): فرمول پیوند - خط هیدروکربن داده‌شده می‌تواند به حالت‌های زیر باشد:



۲، ۳ - دی متیل بوتان

حالت (۱)



۲، ۲ - دی متیل بوتان

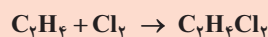
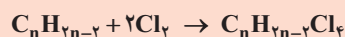
حالت (۲)

مجموع اعداد به کاررفته در حالت (۱) برابر ۵ و حالت (۲)، برابر ۴ است و شمار پیوندهای $C-C$ در ترکیب‌های بالا، برابر ۵ است.

گزینه (۴): درباره همه هیدروکربن‌ها این عبارت درست است.

۶۵

در دو ظرف جداگانه مول‌هایی برابر از یک آلکین و اتن را با مقدار کافی کلر واکنش می‌دهیم. اگر جرم فراورده حاصل از واکنش آلکین با کلر به تقریب ۲/۱۲ برابر جرم فراورده حاصل از واکنش اتن با کلر باشد، شمار پیوندهای یگانه کربن - کربن این آلکین کدام است؟
($C = 12, Cl = 35.5, H = 1: g.mol^{-1}$)



۲ (۴)

۵ (۳)

۴ (۲)

۳ (۱)



مشاوره این سؤال، شبیه‌ساز یکی از سؤالات کنکور نوبت اول ۱۴۰۳ در رشته ریاضی است.

Hint

با توجه به واکنش‌های داده‌شده، فرض می‌کنیم یک مول از هر دو واکنش‌دهنده در اختیار داریم و با توجه به فرمول مولکولی فراورده‌ها، نسبت جرمی آن‌ها را به دست آورده و برابر ۲/۱۲ قرار می‌دهیم.

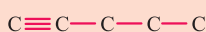
پاسخ خیلی تشریحی ✓ به ازای مصرف هر مول C_nH_{2n-2} ، یک مول $C_nH_{2n-2}Cl_4$ تولید می‌شود که جرم مولی آن برابر $14n + 140$ است و به ازای مصرف هر مول اتن، یک مول $C_2H_2Cl_2$ تولید می‌شود که جرم مولی آن برابر ۹۹ است. بنابراین خواهیم داشت:

$$\frac{140 + 14n}{99} = 2/12 \Rightarrow 140 + 14n = 210 \Rightarrow 14n = 70 \Rightarrow n = 5$$

آلکین مورد نظر دارای ۵ کربن بوده و فرمول آن C_5H_8 است.

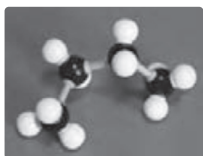
نکته شمار پیوندهای یگانه کربن - کربن در آلکین‌ها و آلکن‌ها برابر $n-2$ و در آلکان‌ها برابر $n-1$ است.

در آلکین ۵ کربنی، ۴ پیوند کربن - کربن وجود دارد که ۳ تای آن‌ها یگانه است.

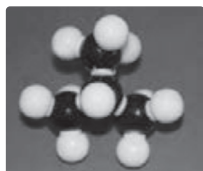


کدام مورد، درست است؟ ($O = 16, C = 12, H = 1: g.mol^{-1}$)

(۱) شکل زیر مربوط به مدل فضاپرکن هیدروکربن موجود در گاز فندک است.



(۲) شکل زیر، ساده‌ترین آلکان شاخه‌دار را نشان می‌دهد که جرم مولی آن کم‌تر از نصف جرم مولی نفتالن است.



(۳) در هیدروکربن‌های موجود در نفت خام، پیوندهای یگانه و دوگانه برخلاف سه‌گانه مشاهده می‌شود.

(۴) برای سیرشدن مخلوطی از پروپان، پروپن و پروپین با جرم‌های برابر، ترکیبی با جرم مولی بیشتر با مقدار هیدروژن بیشتری واکنش می‌دهد.

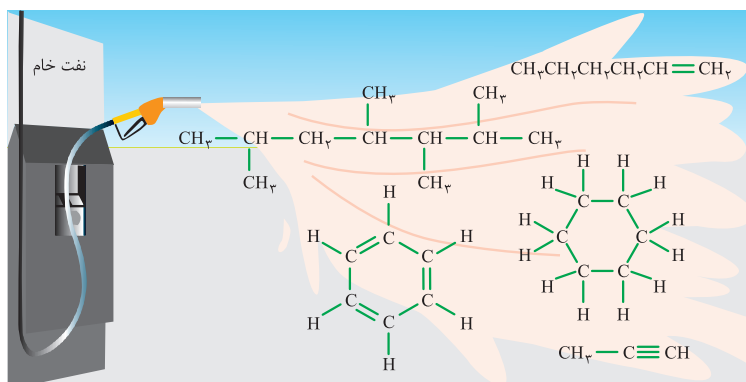


پاسخ خیلی تشریحی

ساده‌ترین آلکان شاخه‌دار $H_3C-CH(CH_3)-CH_3$ است که فرمول مولکولی آن C_4H_{10} بوده و مدل فضاپرکن آن به صورت داده شده است. هم‌چنین جرم مولی آن برابر ۵۸ و جرم مولی نفتالن ($C_{10}H_8$) برابر ۱۲۸ است و $\frac{58}{128} < \frac{1}{2}$ می‌باشد. بررسی سایر گزینه‌ها:

گزینه (۱): ترکیب داده شده مربوط به مدل گلوله و میله (و نه فضاپرکن) گاز فندک (بوتان) است.

گزینه (۳): شکل زیر مربوط به برخی از هیدروکربن‌های موجود در نفت خام است که انواع پیوندهای کربن - کربن در ساختار آن‌ها دیده می‌شود.



گزینه (۴): در مخلوط داده شده، بیشترین جرم مولی مربوط به پروپان است که ترکیبی سیرشده است و با هیدروژن واکنش نمی‌دهد.

نام ساختار زیر کدام است و در آن، چند پیوند اشتراکی یگانه بین اتم‌ها وجود دارد؟



(۱) ۳، ۶ - دی‌متیل هپتان - ۲۸

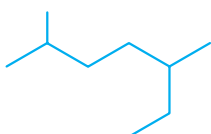
(۲) ۲، ۵ - دی‌متیل هپتان - ۲۸

(۳) ۳، ۶ - دی‌متیل هپتان - ۲۷

(۴) ۲، ۵ - دی‌متیل هپتان - ۲۷



پاسخ خیلی تشریحی ✓ با توجه به فرمول فشرده داده شده، فرمول پیوند - خط هیدروکربن را رسم و نام‌گذاری می‌کنیم:

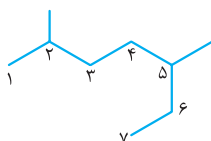


فرمول پیوند - خط هیدروکربن



زنجیره اصلی

با توجه به شکل، نام ترکیب داده شده ۲، ۵ - دی‌متیل هپتان است.



شماره‌گذاری درست

شمار پیوندهای یگانه در آلکان‌ها با فرمول $\text{C}_n\text{H}_{2n+2}$ ، برابر $3n+1$ است.



در آلکانی با نام ۲، ۵ - دی‌متیل هپتان و فرمول مولکولی C_9H_{20} ، در مجموع ۲۸ پیوند اشتراکی یگانه یافت می‌شود.

۶۸ کدام مورد درست است؟

(۱) اگر در ۳-اتیل - ۲، ۴-دی‌متیل پنتان به جای گروه‌های CH_3 ، C_2H_5 و به جای گروه‌های C_2H_5 ، CH_3 قرار دهیم، جرم مولی ترکیب تغییری نمی‌کند.

(۲) با افزایش شمار اتم‌های کربن در هیدروکربن‌هایی که سرگروه خانواده آن‌ها در جوشکاری کاربردی استفاده می‌شود، فراریت آن‌ها کاهش می‌یابد.

(۳) با افزایش نسبت شمار پیوندهای $\text{C}-\text{H}$ به $\text{C}-\text{C}$ در آلکان‌های راست‌زنجیر، تمایل به جاری شدن برخلاف نقطه جوش آن‌ها افزایش می‌یابد.

(۴) اگر به ترکیب ۲-متیل پنتان یک گروه اتیل اضافه کنیم، به طوری که ترکیب حاصل دو شاخه فرعی یکسان داشته باشد، مجموع اعداد در نام آن برابر ۵ خواهد بود.

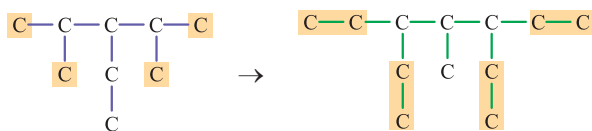


پاسخ خیلی تشریحی ✓

از اتین در جوشکاری کاربردی استفاده می‌شود که سرگروه خانواده آلکین‌هاست. در هیدروکربن‌ها با افزایش شمار کربن‌ها، فراریت کاهش یافته و نقطه جوش و گرانیروی افزایش می‌یابد.

بررسی سایر گزینه‌ها:

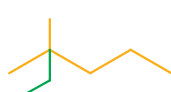
گزینه (۱):



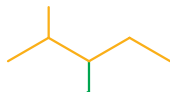
شمار کربن‌ها در ترکیب جدید از ترکیب اولیه بیشتر شده، در نتیجه جرم مولی آن نیز از ترکیب اولیه، بیشتر است.

گزینه (۳): با افزایش شمار کربن‌ها در آلکان‌ها نسبت شمار پیوندهای $\text{C}-\text{C}$ به $\text{C}-\text{H}$ نیز افزایش می‌یابد که با افزایش جرم مولی هیدروکربن‌ها، نقطه جوش و عدم تمایل به جاری شدن (گرانیروی) افزایش می‌یابد.

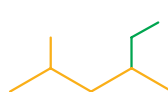
گزینه (۴): گروه اتیل می‌تواند به کربن‌های مختلفی در ۲-متیل پنتان متصل شود که در دو حالت، دو شاخه فرعی متیل خواهیم داشت:



(۱)



(۲)



(۳)

در حالت‌های (۱) و (۳) دو شاخه فرعی متیل خواهیم داشت که نام آن‌ها به صورت ۲، ۴-دی‌متیل هگزان و ۳، ۳-دی‌متیل هگزان است و مجموع اعداد به‌کاررفته در نام آن‌ها برابر ۶ می‌باشد.

در صنعت برای تهیه اتانول از هیدروکربنی گازی شکل که به عنوان عمل آورنده در کشاورزی کاربرد دارد، استفاده می شود. اگر

اتانول مورد نیاز برای تهیه ۱ لیتر محلول ۶۰ درصد جرمی آن را بخواهیم از واکنش این هیدروکربن با آب به دست آوریم، به چند

لیتر هیدروکربن گازی نیاز است؟ (چگالی محلول ضد عفونی کننده اتانول در آب را 0.92 g.mL^{-1} و حجم مولی گازها را 24 L

در نظر بگیرید و $(C = 12, H = 1, O = 16 : \text{g.mol}^{-1})$

اتن (C_2H_6)

۴۸۰ (۴)

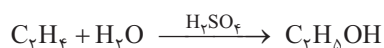
۲۴۰ (۳)

۲۸۸ (۲)

۱۴۴ (۱)



پاسخ خیلی تشریحی ✓ گاز عمل آورنده همان اتن است که واکنش آن با آب و تولید اتانول به صورت زیر است:



گام اول: ابتدا جرم اتانول موجود در محلول ضد عفونی کننده را محاسبه می کنیم:

$$\text{اتانول } 552 \text{ g} = \frac{\text{اتانول } 60 \text{ g}}{\text{محلول } 100 \text{ g}} \times \frac{\text{محلول } 92 \text{ g}}{100} \times \frac{\text{محلول } 1000 \text{ mL}}{\text{محلول } 1 \text{ L}} \times 1 \text{ L}$$

گام دوم: با توجه به جرم اتانول، حجم گاز اتن را به دست می آوریم:

$$\text{اتن } 288 \text{ L} = \frac{552 \text{ g} \times 24}{46} \times \frac{1 \text{ mol اتن}}{46 \text{ g اتن}} \times \frac{1 \text{ mol اتن}}{1 \text{ mol اتن}} \times \frac{24 \text{ L اتن}}{1 \text{ mol اتن}} = \frac{552 \times 24}{46} = \frac{552 \times 12}{23} = 288 \text{ L اتن}$$

به چهره دیگر

از اونجایی که حجم و چگالی و درصد جرمی اتانول را داریم، می توانیم مستقیماً از فرمول $M = \frac{1000 \times d}{\text{جرم مولی}}$ استفاده کنیم و جرم

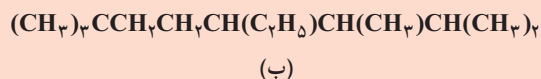
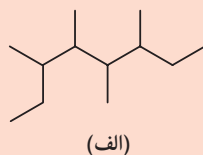
اتانول را محاسبه نکنیم و با توجه به غلظت اتانول و حجم محلولش، بین اتانول و اتن، رابطه استوکیومتری بنویسیم.

$$M_{\text{اتانول}} = \frac{1000 \times 0.92}{46} = 20 \text{ mol/L}$$

$$\frac{\text{حجم محلول} \times \text{غلظت مولار اتانول}}{\text{ضریب}} = \frac{\text{حجم اتن}}{\text{حجم مولی} \times \text{ضریب}} \Rightarrow \frac{12 \times 1}{1} = \frac{x}{24}$$

$$\Rightarrow x = 288 \text{ L اتن}$$

۷۰ با توجه به ساختارهای زیر، کدام گزینه درست است؟ ($H=1$, $C=12$, $O=16 : g.mol^{-1}$)



۱) شمار اتم‌های کربن زنجیر اصلی (الف) و (ب) همانند شمار گروه‌های CH_3 این دو ترکیب، برابر است.

۲) به ازای سوختن $18/8$ گرم از ترکیب (الف)، جرم برابری از کربن دی‌اکسید و آب تولید می‌شود.

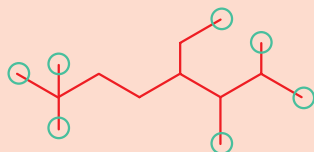
۳) اگر به جای گروه‌های CH_3 در ترکیب (ب) هیدروژن قرار دهیم، جرم مولی آن به اندازه جرم یک مول ۱ - هپتن کاهش می‌یابد.

۴) درصد جرمی کربن در ترکیب (ب) از (الف) بیشتر بوده و اختلاف شمار اتم‌های هیدروژن آن‌ها، با شمار اتم‌های هیدروژن اتین برابر است.



پاسخ خیلی تشریحی ✓ ترکیب (ب) با فرمول پیوند - خط زیر ۷ گروه CH_3 دارد که اگر به جای آن‌ها هیدروژن قرار دهیم، جرم مولی آن به اندازه ۷ گروه

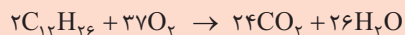
CH_3 یا C_7H_{14} (۱ - هپتن) کاهش می‌یابد.



بررسی سایر گزینه‌ها:

گزینه ۱) نام ترکیب (الف)، ۳، ۴، ۵ - تترامتیل اوکتان و نام ترکیب (ب)، ۵ - اتیل - ۲، ۲، ۶، ۷ - تترامتیل اوکتان است، ولی شمار گروه‌های CH_3 در ترکیب (الف)، برابر ۶ و در ترکیب (ب)، برابر ۷ است.

گزینه ۲) فرمول مولکولی ترکیب (الف) $C_{12}H_{26}$ است و معادله سوختن آن به صورت زیر است:



بنابراین به ازای سوختن هر ۲ مول هیدروکربن، ۲۴ مول کربن دی‌اکسید و ۲۶ مول آب تولید می‌شود که جرم این دو به ازای مصرف هر مقدار مشخصی از هیدروکربن، برابر نخواهد بود.

گزینه ۴) در ترکیب (ب) با فرمول مولکولی $C_{14}H_{30}$ ، شمار اتم‌های کربن و درصد جرمی کربن بیشتر از ترکیب (الف) با فرمول مولکولی $C_{12}H_{26}$ است و اختلاف تعداد هیدروژن‌های آن‌ها نیز برابر ۴ است، در حالی که شمار اتم‌های هیدروژن اتین (C_2H_2) برابر ۲ است.

آلکان ۴ کربنه (C_4H_{10})

کدام موارد از مطالب زیر درست است؟

- (الف) شمار پیوندهای اشتراکی در ساختار سنگین ترین آلکان راست زنجیری که در دمای اتاق گاز است، با شمار اتم های آن برابر است.
 (ب) با قراردادن فلز سدیم در هگزان، می توان از خوردگی آن جلوگیری کرد.
 (پ) ویژگی مهم و برجسته آلکان ها، ناقطبی بودن و عدم انحلال پذیری آن ها در چربی است.
 (ت) بیشترین اختلاف نقطه جوش برای دو آلکان متوالی، مربوط به متان و اتان است.

(۲) ب - ت

(۱) الف - ب

(۴) ب - پ

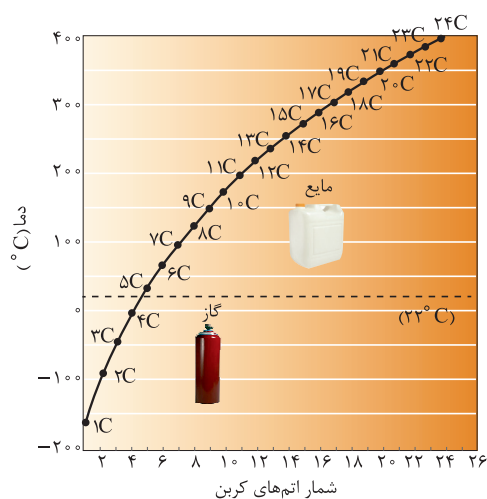
(۳) الف - ت



پاسخ خیلی تشریحی ✓ موارد (ب) و (ت) درست است.

بررسی موارد:

- (الف) سنگین ترین آلکانی که در دمای اتاق به حالت گاز است، بوتان (C_4H_{10}) می باشد که شمار پیوندهای اشتراکی آن برابر ۱۳ و مجموع شمار اتم های آن برابر ۱۴ است.
 (ب) یکی از روش های جلوگیری از خوردگی فلزات، استفاده از هیدروکربن های مایع است که به دلیل ناقطبی بودن سبب کاهش نفوذ پذیری فلزات در برابر آب می شود و از خوردگی آن ها جلوگیری می کند.
 (پ) آلکان ها ناقطبی اند و در آب حل نمی شوند اما در چربی محلول هستند.
 (ت) با توجه به کاهش شیب نمودار نقطه جوش آلکان ها بر حسب شمار اتم های کربن آن ها، بیشترین اختلاف نقطه جوش دو آلکان متوالی، مربوط به متان و اتان است.



درستی یا نادرستی عبارت‌های زیر در کدام گزینه به درستی آمده است؟

- در پالایش نفت خام، نمک، اسید و آب آن را جدا می‌کنند.
- حدود نیمی از نفتی که از چاه‌های نفت بیرون کشیده می‌شود، به عنوان سوخت کاربرد دارد.
- در برج تقطیر نفت خام، مواد بزرگ‌تر و سنگین‌تر در ارتفاع‌های بالاتری از آن جدا می‌شوند که دما بالاتر است.
- نفت خام یکی از سوخت‌های فسیلی است که نقش دوم آن، ماده اولیه در تهیه کالاهای است.
- یکی از مسائل مهم در تأمین سوخت، انتقال آن است که حدود ۶۶ درصد توسط نفتکش جاده‌پیما و کشتی‌ها صورت می‌گیرد.

(۱) نادرست - درست - نادرست - درست - نادرست

(۲) نادرست - درست - درست - درست - نادرست

(۳) درست - درست - نادرست - درست - نادرست

(۴) درست - درست - نادرست - درست - درست

پاسخ خیلی تشریحی ✓ بررسی عبارت‌ها:

عبارت اول: نفت خام را بعد از جداسازی نمک، آب و اسید، پالایش می‌کنند.

عبارت دوم: شکل زیر مربوط به موارد مصرف نفت خام است.

موارد استفاده نفت خام: سوخت < تأمین انرژی الکتریکی < تولید الیاف و ...
حدود ۵۰٪ حدود ۴۰٪ حدود ۱۰٪



عبارت سوم: در فرایند تقطیر نفت خام، مولکول‌های کوچک‌تر در دمای پایین‌تر و سطوح بالاتر و مولکول‌های بزرگ‌تر در دمای

بالاتر و سطوح پایین‌تر از برج تقطیر جدا می‌شوند.

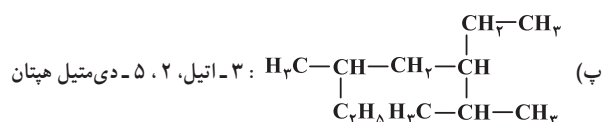
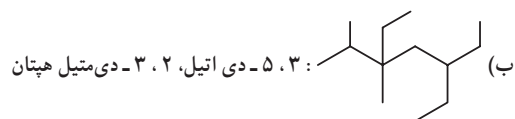
عبارت چهارم: درسته دیگه!

عبارت پنجم: یکی از مسائل مهم در تأمین سوخت، انتقال آن است که حدود ۶۶٪ آن از طریق خطوط لوله و بقیه آن توسط نفتکش‌های

جاده‌پیما و کشتی‌ها جابه‌جا می‌شود.

۷۳ نام کدام آلکان‌ها با فرمول ارائه شده مطابقت دارد و اختلاف جرم مولی آن‌ها برحسب گرم کدام است؟ ($H=1$, $C=12: g.mol^{-1}$)

الف) $(CH_3)_4CH(CH_2)_4C(CH_3)_3$: ۵، ۲ - دی‌متیل هگزان



ت) $(C_2H_5)(CH_3)CH(CH_2)_4C(C_2H_5)(CH_3)_2$: ۸، ۳ - تری‌متیل دکان

۱) الف)، (ت) - ۵۶

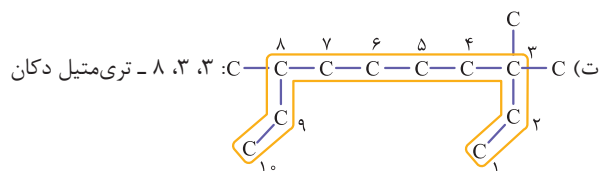
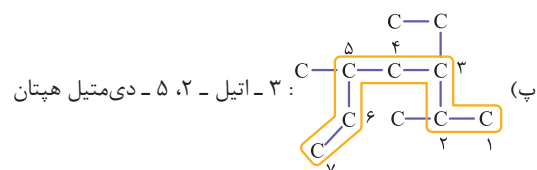
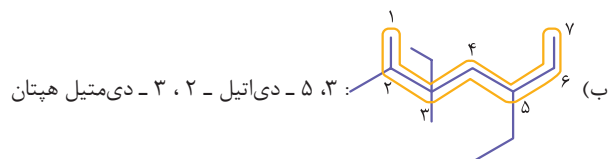
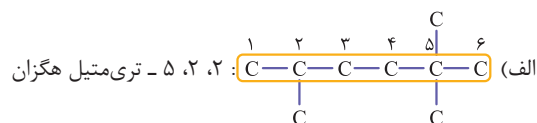
۲) پ)، (ت) - ۵۶

۳) ب)، (پ) - ۲۸

۴) الف)، (ب) - ۲۸



پاسخ خیلی تشریحی ✓ ابتدا نام‌گذاری هر یک از ترکیبات (الف) تا (ت) را براساس قواعد آیوپاک انجام می‌دهیم.

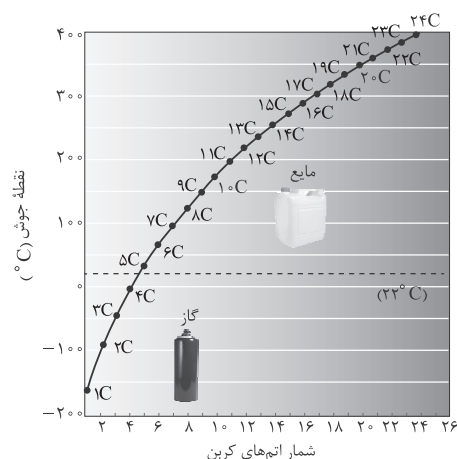


نام‌گذاری ترکیب‌های (ب) و (پ) درست است.

فرمول مولکولی ترکیب (ب)، $C_{13}H_{28}$ و فرمول مولکولی ترکیب (پ)، $C_{11}H_{24}$ است که اختلاف جرم مولی آن‌ها (C_2H_4) برابر ۲۸ گرم است.

با توجه به نمودار زیر که تغییر نقطه جوش آلکان‌های راست‌زنجیر را برحسب شمار اتم‌های کربن آن‌ها در فشار یک اتمسفر نشان می‌دهد،

چند مورد از مطالب زیر درست‌اند؟ ($C = 12, H = 1: g.mol^{-1}$)



- اگر آلکان A، ۶۷ پیوند اشتراکی داشته باشد، در دمایی به جوش می‌آید که بد می‌تواند با گاز هیدروژن واکنش دهد.
- در دمایی 420 K ، سه آلکان به حالت گاز می‌باشند.
- در دمایی که اوکتان به جوش می‌آید، آب نیز به حالت بخار یافت می‌شود.
- با کاهش تعداد پیوندهای $C-C$ ، اختلاف نقطه جوش دو آلکان متوالی افزایش می‌یابد.

۴ (۴)

۲ (۳)

۳ (۲)

۱ (۱)



پاسخ خیلی تشریحی ✓ موارد سوم و چهارم درست‌اند.

بررسی موارد:

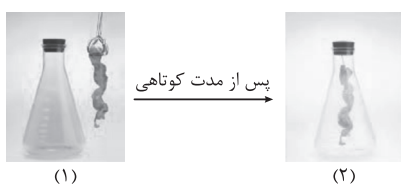
مورد اول: تعداد پیوندهای اشتراکی آلکان n کربنه، برابر $3n + 1$ است؛ بنابراین آلکان A ۲۲ کربنه است که با توجه به نمودار، نقطه جوش آن حدود 35°C است، اما بد در دمایی بالاتر از 40°C با گاز هیدروژن واکنش می‌دهد.

مورد دوم: دمایی 420 K معادل 147°C است که همه آلکان‌های ۱ تا ۸ کربنه در این دما به حالت گاز هستند. (هر ماده‌ای بالاتر از نقطه جوش خود به حالت گاز است).

مورد سوم: نقطه جوش اوکتان بیش از 10°C است که آب در این دما به جوش آمده است.

مورد چهارم: با کاهش تعداد پیوندهای $C-C$ ، تعداد اتم‌های کربن کاهش و اختلاف نقطه جوش دو آلکان متوالی، افزایش می‌یابد.

۷۵ کدام گزینه در رابطه با واکنش نشان داده شده در شکل زیر، درست است؟



(۱) نافلز موجود در ظرف، در واکنش با گاز اتن، محلولی بی‌رنگ تولید می‌کند.

(۲) در ساختار چربی به‌کاررفته همانند سیکلوهگزان، پیوندهای کربن - کربن یگانه و دوگانه یافت می‌شود.

(۳) بخار موجود در ظرف (۱) مربوط به عنصری از گروه ۱۷ و دوره چهارم است و دمای انجام این واکنش از 25°C بیشتر است.

(۴) اگر به جای ماده موجود در ارلن از گاز هیدروژن استفاده کنیم، واکنشی انجام نمی‌شود.

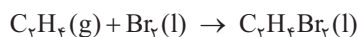
برم



پاسخ خیلی تشریحی ✓

شکل مربوط به واکنش چربی با بخار برم است که به دلیل سیر نشده بودن چربی، وقتی در مجاورت برم قرار می‌گیرد، پیوندهای دوگانه کربن - کربن شکسته می‌شود و اتم‌های Br با آن ترکیب می‌شود و از آن جایی که برم به صورت بخار است، می‌توان نتیجه گرفت دمای انجام واکنش از دمای اتاق که برم به صورت مایع است، بیشتر می‌باشد. بررسی سایر گزینه‌ها:

گزینه (۱): از واکنش برم مایع با اتن گازی، رنگ قرمز برم از بین می‌رود، ولی ترکیب نهایی محلول نیست و ترکیبی مایع می‌باشد.

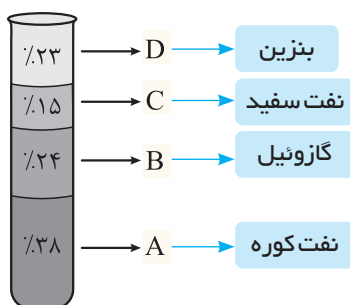


گزینه (۲): سیکلوهگزان، ترکیبی سیر شده و فاقد پیوند دوگانه است.

گزینه (۴): از آن جایی که چربی با برم واکنش داده است، می‌توان فهمید که چربی سیر نشده است. ترکیبات سیر نشده با گاز هیدروژن نیز واکنش می‌دهند و سیر می‌شوند.

با توجه به شکل زیر که درصد اجزای سازنده نفت برنت دریای شمال را نشان می‌دهد، کدام موارد از مطالب زیر درست است؟

الف) C، نفت سفید و شامل آلکان‌هایی با ۲۲ تا ۳۲ اتم هیدروژن است.
ب) درصد B در این نفت نسبت به سایر نفت‌های عربی و ایران، بیشتر است.
پ) A، گازوئیل بوده و نسبت به نفت سفید در ارتفاع بالاتری از برج تقطیر جدا می‌شود.
ت) درصد ماده A همانند D در این نفت، از نفت سبک کشورهای عربی بیشتر است.



۱) الف - پ

۲) الف - ب

۳) پ - ت

۴) فقط الف

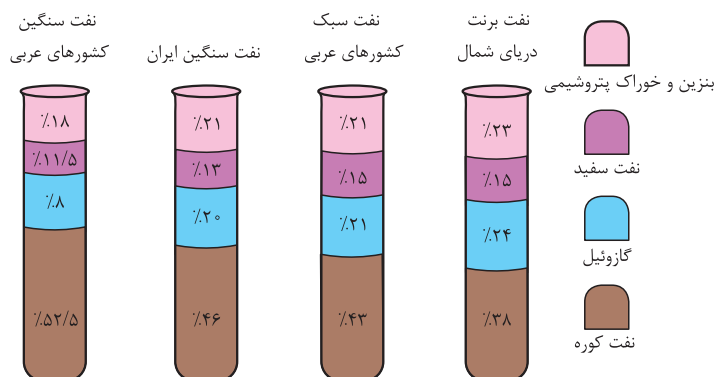
پاسخ خیلی تشریحی

شکل مربوط به اجزای سازنده نفت برنت دریای شمال است که A، B، C و D به ترتیب مربوط به نفت کوره، گازوئیل، نفت سفید و بنزین و خوراک پتروشیمی است.

بررسی عبارت‌ها:

الف) نفت سفید که به عنوان سوخت هواپیما کاربرد دارد، از آلکان‌هایی با ۱۰ تا ۱۵ کربن تشکیل شده است که آلکان ۱۰ کربنه، ۲۲ هیدروژن و آلکان ۱۵ کربنه، ۳۲ اتم هیدروژن دارد.

ب) شکل زیر درصد اجزای انواع نفت‌ها را نشان می‌دهد. همان‌طور که می‌بینید، درصد گازوئیل نفت برنت دریای شمال نسبت به سایر نفت‌ها بیشتر است.



پ) A، نفت کوره است و نسبت به سایر اجزای سازنده نفت خام در سطوح پایین‌تری از برج تقطیر جدا می‌شود.

در برج تقطیر از پایین به بالا، دما کاهش می‌یابد و مولکول‌های درشت‌تر در سطوح پایین‌تری از برج تقطیر جدا می‌شوند.

ت) نفت برنت دریای شمال نسبت به سایر نفت‌ها، بنزین و خوراک پتروشیمی بیشتر و نفت کوره کم‌تری دارد.





از سوختن کامل یک مول از نوعی هیدروکربن، $۸۹/۶$ لیتر گاز در شرایط STP تولید می‌شود. کدام گزینه دربارهٔ این هیدروکربن

نمی‌تواند درست باشد؟ (درصد جرمی کربن در این هیدروکربن، ۶ برابر هیدروژن است و $C=۱۲, O=۱۶, H=۱; g.mol^{-1}$)

می‌تواند آلکن یا سیکلوآلکان (C_nH_{2n}) باشد.

(۱) دومین عضو خانوادهٔ هیدروکربن‌های حلقوی سیر شده است و در ساختار آن ۴ پیوند $C-C$ وجود دارد.

(۲) سومین عضو خانوادهٔ آلکن‌ها بوده و شمار پیوندهای $C-H$ در آن، چهار برابر شمار پیوندهای $C-C$ است.

(۳) شمار پیوندهای $C-H$ در ساختار آن با نفتالن برابر است.

(۴) هیدروکربنی سیر شده است و آلکان راست‌زنجیر هم‌کربن با آن، در دمای اتاق به حالت مایع است.

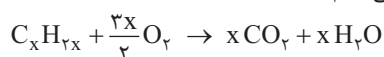


پاسخ خیلی تشریحی ✓ فرمول هیدروکربن مجهول را معادل C_xH_y در نظر می‌گیریم. با توجه به نسبت درصد جرمی کربن به هیدروژن داریم:

$$\frac{\text{درصد جرمی کربن}}{\text{درصد جرمی هیدروژن}} = \frac{\text{تعداد} \times \text{جرم مولی کربن}}{\text{تعداد} \times \text{جرم مولی هیدروژن}} = \frac{۱۲x}{y} = ۶ \Rightarrow y = ۲x$$

بنابراین فرمول کلی این هیدروکربن به صورت C_xH_{2x} است که می‌تواند نوعی سیکلوآلکان یا آلکن باشد.

برای به دست آوردن تعداد کربن این هیدروکربن از معادلهٔ سوختن آن استفاده می‌کنیم:



در شرایط STP فقط کربن دی‌اکسید حالت گازی دارد؛ بنابراین:

$$۱ \text{ mol } C_xH_{2x} \times \frac{x \text{ mol } CO_2}{۱ \text{ mol } C_xH_{2x}} \times \frac{۲۲/۴ \text{ L } CO_2}{۱ \text{ mol } CO_2} = ۸۹/۶ \text{ L} \Rightarrow x = ۴$$

$$\frac{\text{mol هیدروکربن}}{\text{ضریب}} = \frac{\text{حجم گاز کربن دی‌اکسید}}{\text{حجم مولی گازها} \times \text{ضریب}} \Rightarrow \frac{۱}{۱} = \frac{۸۹/۶}{x \times ۲۲/۴} \Rightarrow x = ۴$$

به‌جور دیگر

آلکان هم‌کربن با C_4H_8 ، بوتان است که در دمای اتاق گازی شکل است.

بررسی سایر گزینه‌ها:

گزینهٔ (۱): اگر C_4H_8 را به صورت سیکلوبوتان در نظر بگیریم، ترکیبی حلقوی و سیر شده و دارای ۴ پیوند $C-C$ خواهد بود.

گزینهٔ (۲): اگر C_4H_8 را به صورت آلکن ۴ کربنه در نظر بگیریم، ۸ پیوند $C-H$ و ۲ پیوند $C-C$ در آن وجود دارد و نسبت گفته شده برابر ۴ است.

گزینهٔ (۳): در ساختار C_4H_8 مانند نفتالن، $(C_{10}H_8)$ ، ۸ پیوند $C-H$ وجود دارد.

۷۸

مخلوطی به حجم ۱۰۰ لیتر از گازهای اتان و اتین را با مقدار کافی هیدروژن در یک ظرف دربسته ترکیب می‌کنیم تا واکنش(های) مربوطه به طور کامل انجام شود. چنانچه حجم مولی گازها برابر ۲۰ لیتر بر مول باشد، جرم مخلوط نهایی چند گرم خواهد بود؟ ($C = ۱۲, H = ۱ : g.mol^{-1}$)

- ۱۵۰ (۱) ۱۲۰ (۲) ۱۸۰ (۳) ۹۰ (۴)



پاسخ خیلی تشریحی ✓

با توجه به این که مقدار کافی هیدروژن داریم، همه اتین با هیدروژن ترکیب و به اتان تبدیل می‌شود و مخلوط نهایی فقط شامل گاز اتان است. بنابراین ۱۰۰ لیتر مخلوط اتان و اتین در نهایت به ۱۰۰ لیتر اتان تبدیل می‌شود و با توجه به حجم مولی گازها می‌شه فهمید که در نهایت $\frac{۱۰۰}{۲۰} = ۵$ مول گاز اتان خواهیم داشت که جرم آن، ۱۵۰ g است.

$$\text{اتان } ۱۵۰ \text{ g} = \frac{\text{اتان } ۳۰ \text{ g}}{۱ \text{ mol اتان}} \times \frac{\text{اتان } ۱ \text{ mol}}{۲۰ \text{ L اتان}} \times ۱۰۰ \text{ L اتان}$$

اگر در ۳ آزمایش مختلف، ۲ ماده غذایی با جرم‌های متفاوت را بسوزانیم و شعله حاصل از سوختن آن‌ها را زیر مقدار یکسانی آب نگه داریم، با توجه به جدول، کدام گزینه نادرست است؟

شماره آزمایش	ماده غذایی	دمای آغازی آب (°C)	دمای پایانی آب (°C)
۱	یک گرم یا $\frac{1}{4}$ مغز گردو	۲۰	θ_1
۲	A گرم مغز گردو	۲۰	۴۰
۳	یک گرم ماکارونی	۱۵	θ_2

- (۱) اگر در آزمایش (۲) جرم گردوی سوزانده شده دو برابر آزمایش (۱) باشد، رابطه $\theta_1 < 40$ برقرار خواهد بود.
- (۲) اگر در آزمایش‌های (۲) و (۳) به میزان یکسانی گرما آزاد شده باشد، دمای نهایی آزمایش (۳) نیز برابر 40°C خواهد بود.
- (۳) از آزمایش‌های (۲) و (۳) درمی‌یابیم که نوع ماده غذایی سوزانده شده در میزان انرژی آزاد شده مؤثر است.
- (۴) اگر $\theta_1 = \theta_2$ باشد، می‌توان دریافت که انرژی حاصل از سوزاندن هر گرم ماکارونی بیشتر از هر گرم گردو خواهد بود.

پاسخ خیلی تشریحی ✓

نکته

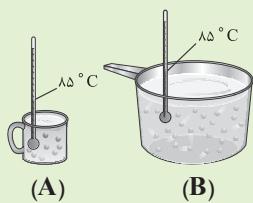
هر ماده غذایی انرژی دارد و میزان انرژی که در اثر سوزاندن آن آزاد می‌شود، به جرم و نوع آن وابسته است.

اگر میزان گرمای آزاد شده در آزمایش‌های (۲) و (۳) برابر باشد، تغییر دمای آب در دو واکنش برابر خواهد بود و نه دمای پایانی آن. بررسی سایر گزینه‌ها:

گزینه (۱): از آنجایی که جرم ماده سوزانده شده در آزمایش (۲) بیشتر است، انرژی آزاد شده و تغییر دمای آب نیز بیشتر است.

گزینه (۳): نوع ماده سازنده با میزان انرژی آزاد شده از سوختن مواد غذایی رابطه دارد.

گزینه (۴): تغییرات دمای آب در اثر سوزاندن یک گرم ماکارونی بیشتر از یک گرم گردو است؛ بنابراین انرژی آزاد شده نیز بیشتر می‌باشد.



(A)

(B)

با توجه به شکل‌های زیر، چند مورد از مطالب زیر درست است؟

۸۰

الف) انرژی گرمایی ظرف A از B کم‌تر است، اما میانگین تندی مولکول‌های آب در هر دو ظرف یکسان می‌باشد.

ب) یکای رایج کمیتی که نشان‌دهنده میزان گرمی و سردی نمونه‌های A و B است، kJ است.

پ) مجموع انرژی جنبشی ذره‌های سازنده A و B به دلیل یکسان بودن دمای آن‌ها، برابر است.

ت) با افزایش دمای هر دو نمونه، جنبش‌های نامنظم آن‌ها تنها بعد از تغییر حالت فیزیکی و تبدیل شدن به گاز، افزایش می‌یابد.

۳ (۴)

۲ (۳)

۱ (۲)

صفر (۱)



پاسخ خیلی تشریحی ✓ فقط عبارت (الف) درست است.

از آنجایی که دمای دو ماده یکسان است، میانگین تندی مولکول‌های آن‌ها نیز برابر و انرژی گرمایی مواد در دمای برابر، به جرم ماده وابسته است؛ بنابراین انرژی گرمایی در ظرف B از A بیشتر است.

بررسی سایر عبارت‌ها:

ب) کمیتی که نشان‌دهنده میزان سردی و گرمی یک ماده است، دما بوده که یکای رایج آن سلسیوس و یکای آن در SI، کلوین است.

پ) مجموع انرژی جنبشی مواد در ظرف B از A بیشتر است؛ زیرا جرم ماده موجود در ظرف B از A بیشتر است.

ت) با افزایش دما در حالت فیزیکی یکسان نیز جنبش‌های نامنظم ماده، افزایش می‌یابد.