آزمون آزمایشی خیلی سبز

رشته ریاضی

پایه یازدهم	مرحله سوم
سال تحصیلی ۰۴-۱۴۰۳	تاریخ برگزاری: ۰۹/آذر/۱۴۰۳

بودجه‌بندی دروس

حسابان(۱)	هندسه(۲)	آمارواحتمال
فصل ۱ و فصل ۲ (درس ۱) صفحهٔ ۱ تا ۴۳	فصل ۱ (درس ۱ و ۲) صفحهٔ ۹ تا ۲۳	فصل ۱ صفحهٔ ۱ تا ۳۴

فیزیک(۲)	شیمی(۲)
فصل ۱ صفحهٔ ۱ تا ۴۴	فصل ۱ (تا ابتدای نفت، هدیه‌ای شگفت‌انگیز) صفحهٔ ۱ تا ۲۹

مواد امتحانی	تعداد سؤال	از شماره	تا شماره	مدت پاسخگویی
حسابان	۲۰	۱	۲۰	۳۰ دقیقه
هندسه	۱۰	۲۱	۳۰	۲۰ دقیقه
آمار و احتمال	۱۰	۳۱	۴۰	۲۰ دقیقه
فیزیک	۲۰	۴۱	۶۰	۳۰ دقیقه
شیمی	۲۰	۶۱	۸۰	۲۰ دقیقه
مجموع	۸۰ سؤال			۱۲۰ دقیقه

اساتید، مشاوران و دانش‌آموزان گرامی؛
نظرات، پیشنهادات، انتقادات و بازخوردهای خود نسبت به سؤالات این آزمون را می‌توانید از طریق آیدی Kheilisabz_edit@ در همهٔ پیام‌رسان‌ها با ما به اشتراک بگذارید.

سنجش کلاد
www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshClouds

Azmoon.kheilisabz.com

حسابان یازدهم

۱- در یک دنبالهٔ حسابی با جملهٔ عمومی a_n، $S_{n-۴} - S_{n-۵} = ۳n - ۱$ است. حاصل $a_۴ - a_۵$ کدام است؟ (S_n مجموع n جملهٔ اول است.)

۱) -۳ ۲) ۳ ۳) -۲ ۴) ۲

۲- دنباله‌های $a_n = ۴^{n-m}$ و $b_n = ۲^{n+m}$ مفروض اند. اگر مجموع ۵ جملهٔ اول دنبالهٔ $c_n = ۳۲a_n - ۱۱b_n$ برابر با صفر باشد، مقدار m کدام است؟

۱) ۱ ۲) $\frac{۴}{۳}$ ۳) $\frac{۵}{۳}$ ۴) ۲

۳- ماشین f به عنوان ورودی، اعداد حقیقی را قبول می‌کند و پس از دریافت هر عدد حقیقی یک واحد از چهار برابر مربع آن کم می‌کند و به عنوان خروجی تحویل می‌دهد. به ازای کدام مقدار ورودی، خروجی تابع ۳۵ خواهد شد؟

۱) $\sqrt{۱۷}$ ۲) -۳ ۳) -۱ ۴) $\frac{۳}{۲}$

۴- هم‌دامنهٔ تابع $f(x) = x(|x| - ۲)$ مجموعهٔ $\{۰, \frac{۱}{۲}, ۱\}$ است. دامنهٔ این تابع حداکثر چند عضو دارد؟

۱) ۵ ۲) ۶ ۳) ۷ ۴) ۸

۵- منحنی $f(x) = ||x^۲ - a| x|| \ (a > ۰)$ از کدام نواحی مختصات نمی‌گذرد؟

۱) اول و دوم ۲) سوم و چهارم ۳) دوم و چهارم ۴) اول، سوم و چهارم

۶- چه تعداد تابع از $A = \{۱,۲,۳\}$ به $B = \{a,b,c,d\}$ می‌توان نوشت به طوری که $f(۳) \neq b$ باشد؟

۱) ۱۹۲ ۲) ۶۴ ۳) ۴۸ ۴) ۸۱

۷- اگر $f(x) = \begin{cases} ۱+a & ; x \leq -a \\ a & ; x > a - ۲ \end{cases}$ باشد، تابع $g(x) = \begin{cases} -۱ & ; x \leq ۰ \\ ۱ & ; x > ۰ \end{cases}$ با کدام تابع مساوی است؟

۱) $y = f(x+۱) - ۳$ ۲) $y = ۳ - ۲f(x+۱)$ ۳) $y = f(x-۱) - ۳$ ۴) $y = ۳ - ۲f(x-۱)$

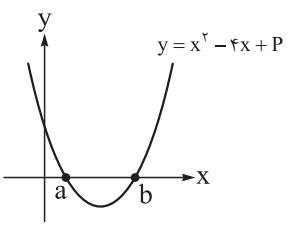
۸- برد تابع $f(x) = \sqrt{x^۲ - ۴|x| + ۴}$ با دامنهٔ $[-m,m]$ شامل ۳ عدد صحیح است. مجموع مقادیر صحیح m کدام است؟

۱) ۴ ۲) ۵ ۳) ۹ ۴) ۱۴

۹- بیشترین مقدار تابع $f(x) = mx^۲ + ۶x + m$ برابر ۸ است. در این صورت $f(۱)$ کدام است؟

۱) ۱۲ ۲) -۹ ۳) ۹ ۴) -۱۲

۱۰- با توجه به شکل زیر، اگر $\sqrt{a} + \sqrt{b} = \sqrt{۶}$ باشد، حاصل $(a + \frac{۱}{b})^۲ + (b + \frac{۱}{a})^۲$ کدام است؟



۱) ۵۶
۲) ۱۶
۳) ۲۶
۴) ۴۶

محل انجام محاسبات

سنجش کلاد
www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshClouds

۱۱- مجموع جواب‌های معادلهٔ $(۲x-۱)^۳-(۲x-۱)^۲=۸(x-۱)$ کدام است؟

۱) ۴ ۲) $\frac{۱}{۲}$ ۳) ۲ ۴) ۱

۱۲- معادلهٔ $\frac{x+۱}{x+۲}+\frac{x-a}{x^۲-۲a}=۱$ با شرط $a\neq ۰$ چند جواب دارد؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۱ یا بی‌شمار ۴) بی‌شمار

۱۳- معادلهٔ $\sqrt{۲x+۷-۲\sqrt{x^۲+۷x+۱۲}}+\sqrt{x+۷+۴\sqrt{x+۳}}=۱۰-x$ چند جواب حقیقی دارد؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

۱۴- اختلاف مجموع و حاصل‌ضرب جواب‌های معادلهٔ $\frac{۸-\sqrt{\frac{۱۶x^۲+۱۶}{x}}}{۲+\sqrt{x+\frac{۱}{x}}}=\frac{۴x-x^۲-۱}{x}$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۱۵- قرینهٔ نقطهٔ $A(۲,-۲)$ نسبت به نقطهٔ $B(۳,۴)$ کدام نقطه است؟

۱) $(۱۰,۴)$ ۲) $(\frac{۵}{۲},۱)$ ۳) $(۱,\frac{۵}{۲})$ ۴) $(۴,۱۰)$

۱۶- خط $mx+۳y+۳=۰$ بر دایره‌ای به شعاع $\sqrt{۱۳}$ و مرکز $O(-۱,۴)$ مماس است. مقدار m کدام می‌تواند باشد؟

۱) ۲ ۲) -۲ ۳) ۱ ۴) -۱

۱۷- در مربع ABCD، قطر BD منطبق بر خط $۳x+۴y+۱۵=۰$ است. اگر یکی از رئوس آن نقطه $A(۵,۳)$ باشد، طول ضلع مربع چند برابر $\sqrt{۲}$ است؟

۱) ۱۰/۵ ۲) ۸/۴ ۳) ۶/۵ ۴) ۱۲/۵

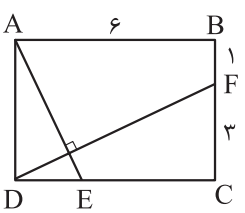
۱۸- دو ضلع یک مربع منطبق بر دو خط $۲x-۲y=۳$ و $y=x+۱$ هستند. مساحت این مربع کدام است؟

۱) $\frac{۹}{۸}$ ۲) $\frac{۹}{۴}$ ۳) $\frac{۲۵}{۸}$ ۴) $\frac{۲۵}{۴}$

۱۹- فاصلهٔ نقاط A و B روی نیمساز ناحیه‌های دوم و چهارم از نقطهٔ $C(۱,-۸)$ برابر با ۵ است. عمودمنصف پاره‌خط AB محور xها را با کدام طول قطع می‌کند؟

۱) ۸ ۲) ۹ ۳) ۱۰ ۴) ۱۱

۲۰- در مستطیل شکل زیر، اندازهٔ AE کدام است؟



۱) $۴\sqrt{۵}$
۲) $۳\sqrt{۵}$
۳) $\sqrt{۵}$
۴) $۲\sqrt{۵}$

محل انجام محاسبات

www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshClouds

هندسه یازدهم

۲۱- از نقطهٔ A در خارج دایره‌ای، مماس AT به طول $۶\sqrt{۲}$ را بر آن دایره رسم نموده‌ایم (T روی دایره قرار دارد). هم‌چنین خطی از A گذرانده‌ایم که دایره را در نقاط B و C قطع کرده است. اگر B بین A و C و $BC = ۱۴$ باشد، طول AB کدام است؟

۱) ۴ ۲) ۶

۳) ۸ ۴) ۱۰

۲۲- اگر طول مماس‌مشترک خارجی دو دایرهٔ $C(O,۳)$ و $C'(O',۸)$ برابر ۱۲ باشد، آن‌گاه طول مماس‌مشترک داخلی این دو دایره کدام است؟

۱) ۹ ۲) $۴\sqrt{۳}$

۳) $\sqrt{۴۲}$ ۴) $۲\sqrt{۶}$

۲۳- طول مماس‌مشترک خارجی دو دایرهٔ مماس‌خارج، $\frac{\sqrt{۳}}{۳}$ برابر شعاع دایرهٔ بزرگ‌تر است. شعاع دایرهٔ بزرگ‌تر، چند برابر شعاع دایرهٔ کوچک‌تر است؟

۱) ۳ ۲) ۶

۳) ۹ ۴) ۱۲

۲۴- اگر دو دایرهٔ $C(O,۲)$ و $C'(O,۵)$ متقاطع باشند، کدام گزینه درست است؟

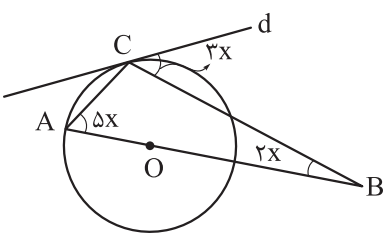
۱) $OO' > ۷$ و OO' عمودمنصف وترمشترک دو دایره است.

۲) $۳ < OO' < ۷$ و وترمشترک دو دایره، عمودمنصف OO' است.

۳) $۳ < OO' < ۷$ و OO' عمودمنصف وترمشترک دو دایره است.

۴) $OO' < ۳$ و وترمشترک دو دایره، عمودمنصف OO' است.

۲۵- در شکل زیر اگر O مرکز دایره و خط d مماس بر دایره باشد، اندازهٔ زاویهٔ $A\hat{C}B$ چند درجه است؟



۱) ۱۰۵°

۲) ۱۱۰°

۳) ۱۱۵°

۴) ۱۲۰°

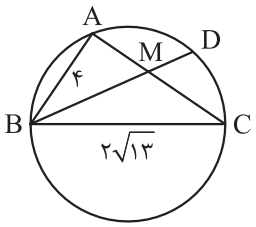
محل انجام محاسبات

www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshClouds

۲۶- مماس‌های رسم‌شده بر دو دایرهٔ متقاطع، در یکی از نقاط تقاطع دو دایره بر هم عمودند. اگر شعاع دایره‌ها به ترتیب ۳ و ۶ باشد، طول خط‌المرکزین دو دایره کدام است؟

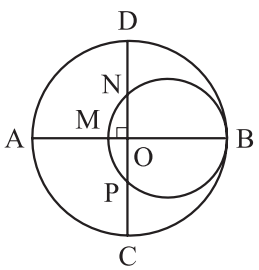
۱) $۲\sqrt{۶}$ ۲) $۳\sqrt{۳}$ ۳) ۳ ۴) $۳\sqrt{۵}$

۲۷- در شکل زیر، BC قطر دایره و M وسط ضلع AC است. اندازهٔ پاره‌خط MD کدام است؟



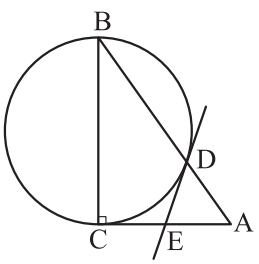
۱) ۱/۵ ۲) ۱/۶
۳) ۱/۸ ۴) ۲

۲۸- در شکل زیر، دو دایره بر هم مماس و دو قطر AB و CD از دایرهٔ بزرگ‌تر بر هم عمود هستند. اگر شعاع دایرهٔ بزرگ‌تر برابر ۷ و $ND = ۲$ باشد، شعاع دایرهٔ کوچک‌تر کدام است؟



۱) ۵ ۲) $\frac{۳۶}{۷}$
۳) $\frac{۳۷}{۷}$ ۴) $\frac{۳۸}{۷}$

۲۹- در شکل زیر، ضلع BC از مثلث قائم‌الزاویهٔ $ABC(\hat{C} = ۹۰^\circ)$ قطر دایره است. خط مماس بر دایره در نقطهٔ D، ضلع AC را در نقطهٔ E قطع می‌کند. کدام‌یک از گزینه‌های زیر ممکن است نادرست باشد؟



۱) $AE = CE$
۲) DE نیمساز زاویهٔ $A\hat{D}C$ است.
۳) $C\hat{E}D = ۲\hat{A}$
۴) $\hat{A} = B\hat{C}D$

۳۰- از نقطهٔ A خارج یک دایره، دو مماس AB و AC را بر آن دایره رسم می‌کنیم. سپس از نقطهٔ C خطی موازی AB رسم می‌کنیم که دایره را در نقطهٔ D قطع کند. اگر $BC = ۱۲$ و $CD = ۶$ باشد، طول این دو مماس کدام است؟

۱) ۲۴ ۲) ۲۷ ۳) ۱۸ ۴) ۲۰

محل انجام محاسبات

www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshClouds

آمار و احتمال

۳۱- در جدول ارزش گزاره‌های زیر، A، B و C به ترتیب کدام‌اند؟

p	q	$(p \wedge q) \Leftrightarrow (p \Rightarrow q)$
د	د	د
د	ن	A
ن	د	B
ن	ن	C

۱) د ـ د ـ ن
۲) ن ـ ن ـ ن
۳) د ـ ن ـ ن
۴) ن ـ ن ـ د

۳۲- در خصوص گزارهٔ منطقی $((p \Rightarrow q) \vee r) \wedge (p \Leftrightarrow q)$ کدام مورد صحیح است؟

۱) ارزش این گزاره فقط زمانی نادرست است که r درست باشد.
۲) ارزش این گزاره فقط زمانی نادرست است که r نادرست باشد.
۳) ارزش این گزاره فقط زمانی نادرست است که p و q هم‌ارزش باشند.
۴) ارزش این گزاره فقط زمانی نادرست است که p و q هم‌ارزش نباشند.

۳۳- ارزش گزارهٔ سوری «$\forall n \in \mathbb{N}; ۳^{n+۱} > (n+۱)^۳$» ..... بوده و نقیض این گزاره به صورت ..... است.

۱) درست ـ $\forall n \in \mathbb{N}; ۳^{n+۱} < (n+۱)^۳$
۲) نادرست ـ $\forall n \in \mathbb{N}; ۳^{n+۱} < (n+۱)^۳$
۳) درست ـ $\exists n \in \mathbb{N}; ۳^{n+۱} \leq (n+۱)^۳$
۴) نادرست ـ $\exists n \in \mathbb{N}; ۳^{n+۱} \leq (n+۱)^۳$

۳۴- از میان گزاره‌های سوری زیر، کدام دو گزاره ارزش نادرست دارند؟

الف) $\exists x \in \mathbb{N}; ۱۷x^۲ - ۵x - ۱۲ = ۰$
ب) $\forall x \in P; ۲^x - ۱ \in P$
پ) $\forall x \in \mathbb{R}; \frac{x^۳ - ۱}{x - ۱} = x^۲ + x + ۱$
ت) $\exists x \in (-\infty, ۰]; |x^۲ - ۱| \leq ۰$

۱) الف ـ ب
۲) الف ـ ت
۳) ب ـ پ
۴) پ ـ ت

۳۵- اگر $n \in \mathbb{N}$ و $A_n = \{m \in \mathbb{Z} \mid |m| \leq ۲n, ۲^m < ۸n\}$، آن‌گاه مجموعهٔ $(A_۱ \cup A_۴) - A_۲$ چند عضو دارد؟

۱) ۳
۲) ۵
۳) ۷
۴) ۸

محل انجام محاسبات

www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshClouds

۳۶- اگر $A-\{۲,۳,۴,۵\}=\varnothing$ و $A\cap\{۲,۵\}=\{۲\}$، چند مجموعه برای A وجود دارد؟

۱) ۴ ۲) ۵ ۳) ۶ ۴) ۸

۳۷- اگر A، B و C سه مجموعهٔ ناتهی باشند، به طوری که $A\cup B'=B\cup C'$، در این صورت کدام نتیجه‌گیری درست است؟

۱) $C\subseteq B\subseteq A$ ۲) $C\subseteq A\subseteq B$

۳) $B\subseteq C\subseteq A$ ۴) $A\cap B\cap C=\varnothing$

۳۸- اگر $A=\{y+۲,۵,z\}$، $B=\{x+۱,۴,-۲\}$ و $A\times B=B\times A$ باشد، حاصل xyz کدام است؟

۱) -۱۶ ۲) -۶۴

۳) -۱۶ یا -۶۴ ۴) -۸ یا -۳۲

۳۹- اگر $A=\{x\mid x\in\mathbb{R},x^۲-۲x<۳\}$ و $B=\{x\mid x\in\mathbb{R},x^۲\le ۴\}$، در این صورت مساحت ناحیهٔ $A\times B-B\times A$ چه‌قدر است؟

۱) ۵ ۲) ۶ ۳) ۷ ۴) ۸

۴۰- نمودار $A\times B$ از سه پاره‌خط به طول ۲ واحد و نمودار $B\times C$ از چهار پاره‌خط به طول ۲ واحد تشکیل شده است. اگر $n(A\cap C)=۱$ باشد، کدام مورد نادرست است؟

۱) نمودار $A\times C$ از ۱۲ نقطه تشکیل شده است.

۲) نمودار $A^۲-C^۲$ از ۸ نقطه تشکیل شده است.

۳) نمودار $(A-C)\times B$ از دو پاره‌خط عمودی تشکیل شده است.

۴) نمودار $(B\times A)\cup(B\times C)$ از هفت پاره‌خط افقی تشکیل شده است.

محل انجام محاسبات

www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshClouds

فیزیک یازدهم

۴۱- دو بار الکتریکی نقطه‌ای $q_1 = 5\mu C$ و $q_2 = -10\mu C$ در فاصلهٔ معینی از هم قرار دارند. اگر نیروی الکتریکی‌ای که بار q_1 به بار q_2 وارد می‌کند، برابر $\vec{F} = (20N)\vec{i}$ باشد، میدان الکتریکی حاصل از بار q_2 در محل بار q_1 برحسب نیوتون بر کولن کدام است؟

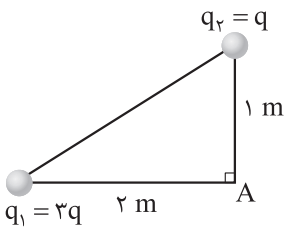
۱) $\vec{E} = (4\times10^6)\vec{i}$

۲) $\vec{E} = (2\times10^6)\vec{i}$

۳) $\vec{E} = -(4\times10^6)\vec{i}$

۴) $\vec{E} = -(2\times10^6)\vec{i}$

۴۲- در شکل زیر، اگر اندازهٔ میدان الکتریکی خالص حاصل از دو بار الکتریکی نقطه‌ای q_1 و q_2، در نقطهٔ A برابر $9\ N/C$ باشد، اندازهٔ بار q برابر چند نانوکولن است؟ $(k = 9\times10^9\ \frac{N.m^2}{C^2})$



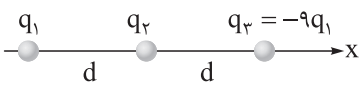
۱) ۰/۸

۲) ۸

۳) ۲/۴

۴) ۲۴

۴۳- در شکل زیر، سه بار الکتریکی نقطه‌ای q_1، q_2 و q_3 روی محور x قرار دارند. اگر بار q_2 به اندازهٔ $\frac{d}{2}$ در خلاف جهت محور x جابه‌جا شود اندازهٔ نیروی خالص وارد بر آن چند برابر می‌شود؟



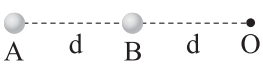
۱) $\frac{3}{2}$

۲) $\frac{2}{3}$

۳) $\frac{3}{4}$

۴) $\frac{4}{5}$

۴۴- دو ذرهٔ باردار A و B که بار الکتریکی آن‌ها به ترتیب q_1 و q_2 است، در محل خود ثابت شده‌اند و میدان الکتریکی خالص در نقطهٔ O برابر $\vec{E}$ است. اگر بار الکتریکی ذرهٔ A، ۲ برابر شود، میدان الکتریکی خالص در نقطهٔ O به $\frac{5}{2}\vec{E}$ می‌رسد، $\frac{q_1}{q_2}$ برابر کدام است؟



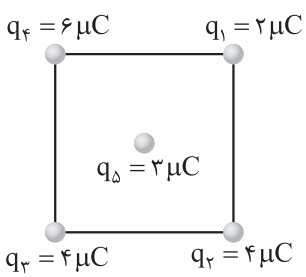
۱) ۶

۲) ۱۲

۳) −۶

۴) −۱۲

۴۵- در شکل زیر، پنج بار الکتریکی در رأس‌ها و مرکز مربعی قرار گرفته‌اند. اگر فقط علامت بار q_1 تغییر کند، اندازهٔ نیروی الکتریکی خالص وارد بر بار واقع در مرکز مربع چند برابر می‌شود؟



۱) ۱

۲) $\sqrt{2}$

۳) $\sqrt{5}$

۴) $\sqrt{10}$

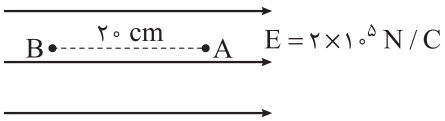
محل انجام محاسبات

سنجش کلاد
www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshClouds

۴۶- یک قطرهٔ روغن خنثی، با گرفتن ۵ الکترون، در میدان الکتریکی یکنواخت و قائم $\vec{E}$، به حالت معلق قرار می‌گیرد. اگر جرم این قطره $۴\times۱۰^{-۱۵}kg$ باشد، $\vec{E}$ چند نیوتون بر کولن و در چه جهتی است؟ ($e=۱/۶\times۱۰^{-۱۹}C$ ، $g=۱۰\ m/s^۲$)

۱) ۵×۱۰^۴، بالا
۲) ۵×۱۰^۴، پایین
۳) ۲×۱۰^۴، بالا
۴) ۲×۱۰^۴، پایین

۴۷- در شکل زیر، بار الکتریکی نقطه‌ای q از نقطهٔ A تا نقطهٔ B، موازی خطوط میدان الکتریکی یکنواخت $\vec{E}$ جابه‌جا می‌شود. اگر در طی این جابه‌جایی انرژی پتانسیل الکتریکی بار، ۳mJ کاهش یابد، q چند نانوکولن است؟



۱) ۷۵
۲) ۵۰
۳) −۷۵
۴) −۵۰

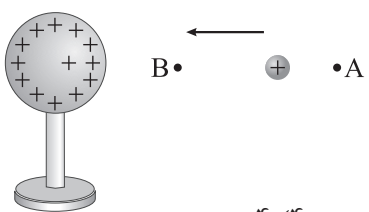
۴۸- ذره‌ای به بار الکتریکی $-۲mC$ را از نقطهٔ A با پتانسیل الکتریکی ۱۰V تا نقطهٔ B جابه‌جا می‌کنیم. اگر در این جابه‌جایی کار نیروی الکتریکی برابر $-۰/۰۸J$ باشد، پتانسیل الکتریکی نقطهٔ B برابر چند ولت است؟

۱) ۳۰
۲) ۵۰
۳) −۳۰
۴) −۵۰

۴۹- ذره‌ای با بار الکتریکی q در خلاف جهت خطوط میدان الکتریکی یکنواختی با تندی اولیهٔ $v_۰$ پرتاب شده و پس از طی مسافت d، متوقف می‌شود. اگر این ذره، در جهت خطوط همین میدان الکتریکی با تندی $v_۰$ پرتاب شود، پس از طی مسافت ۳d، تندی آن به v می‌رسد. v چند برابر $v_۰$ است؟

۱) ۱
۲) $\sqrt{۲}$
۳) $\sqrt{۳}$
۴) ۲

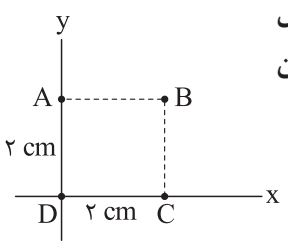
۵۰- در شکل زیر ذرهٔ باردار مثبت و کوچکی را از حالت سکون، از نقطهٔ A به سمت کرهٔ باردار که روی پایهٔ عایقی قرار دارد، نزدیک می‌کنیم و در نقطهٔ B قرار می‌دهیم. در این جابه‌جایی، چه تعداد از عبارت‌های زیر درست است؟



الف) کار نیروی الکتریکی وارد بر ذره، مثبت است.
ب) انرژی پتانسیل الکتریکی ذره کاهش می‌یابد.
پ) اندازهٔ نیروی الکتریکی وارد بر ذره کاهش می‌یابد.
ت) پتانسیل الکتریکی نقطهٔ B، بیشتر از پتانسیل الکتریکی نقطهٔ A است.

۱) ۱
۲) ۲
۳) ۳
۴) ۴

۵۱- در صفحهٔ مختصات شکل مقابل، میدان الکتریکی یکنواخت $\vec{E}$ وجود دارد. اگر پتانسیل الکتریکی نقطه‌های A، B، C و D به ترتیب برابر ۲۰V، ۵V، −۱۰V و ۵V باشد، میدان الکتریکی $\vec{E}$ چند نیوتون بر کولن و در چه جهتی است؟



۱) $۷۵۰\sqrt{۲}$، ↘
۲) $۷۵۰\sqrt{۲}$، ↖
۳) $۳۷۵\sqrt{۲}$، ↘
۴) $۳۷۵\sqrt{۲}$، ↖

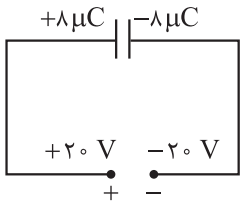
محل انجام محاسبات

سنجش کلاد
www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshClouds

۵۲- شعاع کرهٔ رسانای B، ۲ برابر شعاع کرهٔ رسانای A و چگالی سطحی بار الکتریکی کرهٔ A، ۴ برابر چگالی سطحی بار الکتریکی کرهٔ B است. چند درصد از بار کرهٔ A را به کرهٔ B منتقل کنیم، تا چگالی سطحی بار این دو کره برابر شود؟

۱) ۲۰ ۲) ۸۰ ۳) ۴۰ ۴) ۶۰

۵۳- در شکل روبه‌رو، خازنی به دو سر مولدی متصل است که پتانسیل الکتریکی پایانه‌های مثبت و منفی آن به ترتیب $+20V$ و -20 است. اگر بار الکتریکی دو صفحهٔ خازن $+8\mu C$ و $-8\mu C$ باشد، ظرفیت خازن چند میکروفاراد است؟



۱) ۰/۲
۲) ۰/۴
۳) ۲/۵
۴) ۵

۵۴- اختلاف پتانسیل بین دو صفحهٔ یک خازن را ۲۵ درصد افزایش می‌دهیم؛ اگر با این کار $15\mu C$ بر بار ذخیره‌شده در خازن افزوده شود، بار اولیهٔ ذخیره‌شده در این خازن چند میکروکولن است؟

۱) ۳۰ ۲) ۴۵
۳) ۶۰ ۴) ۷۵

۵۵- فاصلهٔ بین صفحه‌های یک خازن تخت $5mm$ و مساحت هر یک از صفحه‌های آن $10cm^2$ است. بین دو صفحهٔ خازن از یک مادهٔ دی‌الکتریک انعطاف‌پذیر با ثابت دی‌الکتریک $\kappa = 5$ پر شده است. اگر فاصلهٔ بین صفحه‌ها را ۴۰ درصد کاهش دهیم، ظرفیت خازن چند پیکوفاراد افزایش می‌یابد؟ $(\varepsilon_0 \simeq 9\times10^{-12}\ F/m)$

۱) ۶ ۲) ۹ ۳) ۱۲ ۴) ۱۵

۵۶- مدار فلاش یک دوربین عکاسی، انرژی را تحت اختلاف پتانسیل $100V$ در یک خازن ذخیره می‌کند. انرژی ذخیره‌شده در این خازن در مدت $2ms$ به طور کامل تخلیه می‌شود. اگر توان متوسط خروجی فلاش $50W$ باشد. ظرفیت خازن این دوربین چند میکروفاراد است؟

۱) ۱۰۰ ۲) ۲۰۰ ۳) ۱۰ ۴) ۲۰

۵۷- یک خازن تخت بدون دی‌الکتریک به یک باتری بسته شده است تا باردار شود. پس از مدتی در حالی که باتری هم‌چنان به خازن متصل است، فاصلهٔ بین صفحات خازن را دو برابر می‌کنیم. کدام‌یک از موارد زیر درست است؟

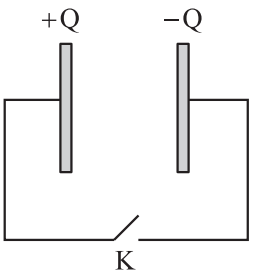
الف) میدان الکتریکی میان صفحه‌ها نصف می‌شود.
ب) اختلاف پتانسیل میان صفحه‌ها، ۲ برابر می‌شود.
پ) بار الکتریکی ذخیره‌شده در خازن، ۲ برابر می‌شود.
ت) انرژی الکتریکی ذخیره‌شده در خازن، نصف می‌شود.

۱) الف و پ ۲) الف و ت ۳) ب و پ ۴) ب و ت

محل انجام محاسبات

سنجش کلاد
www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshClouds

۵۸- در شکل زیر، دو صفحهٔ خازن تخت بارداری را با بستن کلید K، به هم وصل می‌کنیم؛ در نتیجه جرقه‌ای زده می‌شود. با انجام کدام‌یک از اقدامات زیر، با بسته‌شدن کلید K، الزاماً جرقهٔ بزرگ‌تری حاصل می‌شود؟



الف) با ثابت‌ماندن بار صفحه‌ها، فاصلهٔ بین آن‌ها را افزایش دهیم.

ب) با ثابت‌ماندن بار صفحه‌ها، یک دی‌الکتریک بین آن‌ها قرار دهیم.

پ) بار اولیهٔ روی صفحه‌ها را افزایش و فاصلهٔ بین آن‌ها را کاهش دهیم.

ت) بار اولیهٔ روی صفحه‌ها را افزایش و مساحت آن‌ها را کاهش دهیم.

۱) الف و پ ۲) ب و پ

۳) ب و ت ۴) الف و ت

۵۹- ظرفیت خازنی $5\mu F$ و بار الکتریکی آن Q است. اگر $+10mC$ بار الکتریکی را از صفحهٔ منفی خازن جدا کرده و به صفحهٔ مثبت آن منتقل کنیم، انرژی ذخیره‌شده در خازن $30J$ افزایش می‌یابد. انرژی اولیهٔ ذخیره‌شده در خازن چند ژول بوده است؟

۱) ۵ ۲) ۱۰

۳) ۱۵ ۴) ۲۰

۶۰- خازنی به ظرفیت $60\mu F$، که بین صفحه‌های آن هوا است، به یک باتری با اختلاف پتانسیل $20V$ متصل است. اگر در این حالت، فاصلهٔ بین صفحه‌های آن را ۵۰٪ افزایش داده و بین صفحات آن یک عایق با ثابت دی‌الکتریک ۶ قرار دهیم، انرژی ذخیره‌شده در خازن چند میلی‌ژول افزایش می‌یابد؟

۱) ۱۲ ۲) ۲۴

۳) ۳۶ ۴) ۴۸

محل انجام محاسبات

www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshClouds

شیمی یازدهم

۶۱- کدام مطلب درست است؟

۱) بیش از ۵۰ درصد عنصرهای دورهٔ سوم جدول تناوبی، رسانایی الکتریکی و گرمایی ندارند.

۲) گاز فلوئور در دمای $-۱۰۰^{\circ}C$ با گاز هیدروژن واکنش نمی‌دهد.

۳) اختلاف شعاع اتمی گوگرد و سیلیسیم، از اختلاف شعاع اتمی کلر و آلومینیم، کم‌تر است.

۴) عنصری که در دورهٔ چهارم جدول تناوبی بوده و دارای هفت الکترون ظرفیتی است، به یقین چکش‌خوار نیست.

۶۲- در گروه هالوژن‌ها، ..... گروه فلزهای قلیایی، با افزایش عدد اتمی، شعاع اتمی عنصرها ..... می‌یابد و در این گروه، ..... گروه فلزهای قلیایی، واکنش‌پذیری عنصرها از بالا به پایین، ..... می‌یابد.

۱) همانند ـ افزایش ـ همانند ـ کاهش

۲) برخلاف ـ افزایش ـ برخلاف ـ کاهش

۳) همانند ـ افزایش ـ برخلاف ـ کاهش

۴) برخلاف ـ کاهش ـ همانند ـ افزایش

۶۳- کدام گزینه درست است؟

۱) در جدول دوره‌ای فقط یک فلز با ۳ الکترون ظرفیتی وجود دارد.

۲) در جدول دوره‌ای فقط یک نافلز به دستهٔ s تعلق دارد.

۳) در جدول دوره‌ای فقط یک نافلز با ۴ الکترون ظرفیتی وجود دارد.

۴) در جدول دوره‌ای فقط یک نافلز جامد وجود دارد.

۶۴- دانشجویی در آزمایشگاه یک نوار منیزیم را وارد محلول هیدروکلریک اسید می‌کند. با توجه به جدول زیر که پس از ناپدیدشدن نوار منیزیم به دست آمده است، جرم نوار منیزیم اولیه برحسب گرم و بازده درصدی واکنش کدام است؟

$(Mg = ۲۴ g.mol^{-1})$

$$Mg(s) + ۲HCl(aq) \rightarrow MgCl_۲(aq) + H_۲(g)$$

نماد شیمیایی ماده	حجم گاز در شرایط استاندارد (لیتر)
$H_۲$ (فراورده‌ای که دانشجو به دست آورده است.)	۲/۱
$H_۲$ (فراورده‌ای که انتظار داشتیم به دست آید.)	۲/۸

۱) ۷۵ ـ ۲/۲۵ ۲) ۷۵ ـ ۳ ۳) ۸۰ ـ ۲/۲۵ ۴) ۸۰ ـ ۳

۶۵- هر یک از توصیف‌های زیر، مربوط به یک یا چند عنصر جدول دوره‌ای است. کدام عنصر داده‌شده در گزینه‌ها، با هیچ‌یک از این عبارت‌ها تطابق ندارد؟

- **عنصری فلزی است که بیشترین مصرف سالانه را در جهان دارد.**
- **عنصری است که به شکل آزاد نیز در طبیعت وجود دارد.**
- **دارای چند دگرشکل است که دگرشکل سفید آن را زیر آب نگه می‌دارند.**
- **ترکیب‌های رنگی دارد و رنگ سرخ زیبای یاقوت را می‌توان به وجود یون سه بار مثبت آن نسبت داد.**

۱) $_{۱۶}A$ ۲) $_{۲۶}X$ ۳) $_{۱۳}D$ ۴) $_{۲۴}M$

محل انجام محاسبات

سنجش کلاد
www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshClouds

۶۶- عنصر A یکی از شبه‌فلزهای جدول تناوبی است. اگر در گروه شامل A، فقط یک عنصر نافلزی X وجود داشته باشد، کدام مطلب درست است؟

۱) حالت فیزیکی عنصرهای A و X در دمای اتاق متفاوت است.

۲) A می‌تواند با پنجمین گاز نجیب جدول تناوبی، هم‌دوره باشد.

۳) تفاوت عدد اتمی عنصر X با نخستین فلز گروه خود، برابر با عدد اتمی هفتمین عنصر واسطهٔ دورهٔ پنجم است.

۴) عدد اتمی A، به یقین از عدد اتمی هالوژن مایع جدول دوره‌ای، کوچک‌تر است.

۶۷- اگر محلولی حاوی ۶ گرم سدیم هیدروکسید، ۰/۰۵ مول کلریدی از آهن را رسوب دهد؛ رنگ رسوب تولیدشده و شمار الکترون‌ها با $l = ۲$ در کاتیون آهن موجود در محلول، کدام است؟ $(H = ۱, O = ۱۶, Na = ۲۳ : g.mol^{-۱})$

۱) سبز ـ ۶ ۲) قرمز قهوه‌ای ـ ۵ ۳) سبز ـ ۵ ۴) قرمز قهوه‌ای ـ ۶

۶۸- مقایسهٔ واکنش‌پذیری سه فلز اصلی A، B و C به صورت $C > B > A$ است. با توجه به آن، پاسخ درست پرسش‌های زیر در کدام گزینه آمده است؟

الف) در شرایط یکسان کدام واکنش روبه‌رو انجام‌پذیر است؟

I) $ASO_۴(aq) + B(s) \rightarrow$

II) $B(s) + C(NO_۳)_۲(aq) \rightarrow$

ب) اگر A و C در یک دورهٔ جدول دوره‌ای عنصرها باشند، عدد اتمی کدام‌یک بیشتر است؟

۱) A ـ I ۲) A ـ II ۳) C ـ I ۴) C ـ II

۶۹- یک کود شیمیایی دارای آمونیوم سولفات $((NH_۴)_۲SO_۴)$ و مقداری ناخالصی است. اگر درصد خلوص یون سولفات در این کود برابر ۶۰٪ باشد، یک کیلوگرم از این کود، چند گرم نیتروژن برای گیاه تأمین می‌کند؟ (در ناخالصی‌ها یون سولفات و نیتروژن وجود ندارد؛ $H = ۱, N = ۱۴, O = ۱۶, S = ۳۲ : g.mol^{-۱}$)

۱) ۸۷/۵ ۲) ۹۰ ۳) ۱۷۵ ۴) ۲۴۰

۷۰- درستی یا نادرستی مطالب زیر دربارهٔ نخستین فلز واسطهٔ جدول دوره‌ای، به ترتیب چگونه است؟

- **در اتم آن، ۷ زیرلایه از الکترون پر شده‌اند.**
- **تفاوت عدد اتمی آن با نخستین فلز قلیایی جدول، برابر عدد اتمی سومین گاز نجیب جدول است.**
- **شمار الکترون‌های ظرفیتی آن با شمار الکترون‌های ظرفیتی نخستین عنصر دستهٔ p برابر است.**
- **کاتیون حاصل از آن به آرایش پایدار گاز نجیب نمی‌رسد.**

۱) درست ـ درست ـ نادرست ـ نادرست ۲) نادرست ـ درست ـ درست ـ نادرست

۳) نادرست ـ نادرست ـ درست ـ درست ۴) درست ـ نادرست ـ درست ـ نادرست

۷۱- با توجه به معادلهٔ زیر، از تجزیهٔ ۵۰/۴ گرم واکنش‌دهنده (آمونیوم دی‌کرومات) با خلوص ۶۰٪، چند لیتر گاز تولید می‌شود؟ (در شرایط انجام واکنش، حجم مولی گازها برابر ۲۵ L است، معادلهٔ واکنش موازنه شود.)

$(Cr = ۵۲, O = ۱۶, N = ۱۴, H = ۱ : g.mol^{-۱})$

$(NH_۴)_۲Cr_۲O_۷(s) \rightarrow N_۲(g) + Cr_۲O_۳(s) + H_۲O(g)$

۱) ۱۵ ۲) ۱۲ ۳) ۹ ۴) ۶

محل انجام محاسبات

www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshClouds

۷۲- اگر شمار نوترون‌های اتم ^{72}M، ۲۵ درصد از شمار پروتون‌هایش بیشتر باشد، عنصر M یک ..... است و عنصری که عدد اتمی آن با شمار نوترون‌های M برابر است، جزء عنصرهای ..... جدول تناوبی به شمار می‌آید.

۱) نافلز ـ واسطه
۲) شبه‌فلز ـ اصلی
۳) نافلز ـ اصلی
۴) شبه‌فلز ـ واسطه

۷۳- با توجه به واکنش‌های (I) تا (IV)، کدام موارد از مطالب زیر، درست است؟ $(Cu = ۶۴, Al = ۲۷ : g.mol^{-1})$

I) $Li + AlCl_3 \rightarrow LiCl + Al$

II) $C + S_8 \rightarrow CS_2$

III) $Cu_2S + O_2 \rightarrow Cu + SO_2$

IV) $Al + CuSO_4 \rightarrow Cu + Al_2(SO_4)_3$

الف) مجموع ضرایب واکنش‌دهنده‌ها در واکنش‌های (II) و (IV)، یکسان است.
ب) اگر در واکنش (I) به جای Li از Ti استفاده کنیم، واکنش با سرعت کم‌تری انجام می‌شود.
پ) آرایش الکترونی یون مس شرکت‌کننده در واکنش‌های (III) و (IV)، یکسان است.
ت) از واکنش ۹ گرم فلز آلومینیم با خلوص ۹۰ درصد با مقدار کافی محلول مس (II) سولفات، ۲۸/۸ گرم فلز مس آزاد می‌شود.

۱) ب ـ پ
۲) الف ـ ب
۳) پ ـ ت
۴) الف ـ ت

۷۴- اگر $n + l$، برای a الکترون بیرونی‌ترین زیرلایهٔ اتم عنصر نافلزی X برابر ۳ و مجموع $n + l$ برای همهٔ الکترون‌های ظرفیتی آن برابر ۱۹ باشد؛ چند مورد از مطالب زیر به یقین در رابطه با عنصر X درست است؟

- **در دورهٔ سوم قرار دارد و $a = ۵$ است.**
- **در دمای اتاق به صورت مولکول‌های دواتمی پایدار است.**
- **در مقایسه با کلر، واکنش‌پذیری بیشتری دارد.**
- **شعاع اتمی آن در مقایسه با گوگرد کوچک‌تر است.**

۱) یک
۲) دو
۳) سه
۴) چهار

۷۵- کدام مورد، نادرست است؟

۱) در استخراج آهن، نسبت جرم «سنگ معدن آهن» استفاده‌شده به جرم «منابع معدنی دیگر» مصرف‌شده به تقریب، برابر ۲ است.
۲) از بازگردانی هفت قوطی فولادی می‌توان یک لامپ ۶۰واتی را در حدود ۲۵ ساعت روشن نگه داشت.
۳) در استخراج فلز، تنها درصد کمی از سنگ معدن به فلز تبدیل می‌شود.
۴) ارزیابی چرخهٔ عمر برای ارزیابی میزان تأثیر یک فراورده بر روی محیط زیست در فرایند تولید آن به کار می‌رود.

محل انجام محاسبات

www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshClouds

۷۶- با توجه به جدول زیر، فلزهای X و Y در توضیحات داده‌شده، به ترتیب کدام فلزها هستند؟

- بازده فرایند استخراج فلز X از سنگ معدن ۲۰ درصد و از ۱/۵ تن سنگ معدن، ۱/۵ کیلوگرم فلز استخراج می‌شود.
- درصد جرمی فلز Y در ۱۶۰ گرم خاکستری که از یک کیلوگرم گیاه برای پالایش آن به کار می‌رود، برابر ۲۵٪ است.

نماد شیمیایی فلز	قیمت هر کیلوگرم فلز (ریال)	بیشترین مقدار فلز در یک کیلوگرم از گیاه (گرم)	درصد جرمی فلز در سنگ معدن
Au	۱,۲۰۰,۰۰۰,۰۰۰	۰/۱	۰/۰۰۲
Ni	۸۲۰,۰۰۰	۳۸	۲
Cu	۴۲۵,۰۰۰	۱۴	۰/۵
Zn	۱۵۵,۰۰۰	۴۰	۵

۱) مس ـ روی ۲) نیکل ـ طلا ۳) نیکل ـ مس ۴) مس ـ طلا

۷۷- اگر برای تهیهٔ $۶/۰۲\times۱۰^{۲۲}$ مولکول کربن مونواکسید مطابق واکنش زیر، به ۱۶ گرم $MO_۲$ نیاز باشد، جرم مولی فلز M چند گرم بر مول است؟ (بازده واکنش را ۷۵ درصد در نظر بگیرید؛ $O=۱۶\,g.mol^{-۱}$)

$$۳MO_۲(s)+۴C(s)+۶Cl_۲(g)\rightarrow ۳MCl_۴(s)+۲CO_۲(g)+۲CO(g)$$

۱) ۳۲ ۲) ۴۸ ۳) ۵۵ ۴) ۶۴

۷۸- چند مورد از مطالب زیر، نادرست است؟

- آهنگ مصرف و استخراج فلزها با آهنگ برگشت آن‌ها به طبیعت به شکل سنگ معدن، به تقریب برابر است.
- فلزها جزء منابع تجدیدناپذیر هستند و بازیافت آن‌ها سبب کاهش سرعت گرمایش کرهٔ زمین می‌شود.
- کاهش ردپای کربن دی‌اکسید، کمک به توسعهٔ پایدار کشور و از بین رفتن گونه‌های زیستی کم‌تر، برخی از مزایای بازیافت فلزها است.
- غلظت گونه‌های موجود در کف اقیانوس نسبت به ذخایر زمینی، کم‌تر است.

۱) ۴ ۲) ۲ ۳) ۱ ۴) ۳

۷۹- در دما و فشار یکسان، جرم یکسانی از دی‌نیتروژن پنتااکسید و آلومینیم در واکنش‌های زیر به طور کامل مصرف می‌شوند. اگر حجم گاز تولیدشده در واکنش II، چهار برابر حجم گاز اکسیژن تولیدشده در واکنش I باشد، نسبت بازده درصدی واکنش I به II کدام است؟ ($N=۱۴, O=۱۶, Al=۲۷ : g.mol^{-۱}$)

$$I)\ ۲N_۲O_۵(s)\rightarrow ۴NO_۲(g)+O_۲(g)$$
$$II)\ ۲Al(s)+۶HCl(aq)\rightarrow ۲AlCl_۳(aq)+۳H_۲(g)$$

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۵

۸۰- در مراحل چرخهٔ عمر، موارد «پایداری تأمین مادهٔ اولیه و خام»، «تأثیر حمل‌ونقل مادهٔ خام روی محیط زیست» و «دفن‌کردن»، برای پاکت کاغذی و کیسهٔ پلاستیکی، به ترتیب نسبت به هم چگونه است؟

۱) متفاوت ـ مشابه ـ متفاوت ۲) مشابه ـ متفاوت ـ متفاوت
۳) متفاوت ـ مشابه ـ مشابه ۴) مشابه ـ متفاوت ـ مشابه

محل انجام محاسبات

سنجش کلاد
www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshClouds

مهم‌ترین ویژگی‌های آزمون‌های خیلی سبز در پایه‌های دهم و یازدهم:

۱- برگزاری دست‌کم یک آزمون در ماه بر اساس روال تدریس در مدرسه
۲- برگزاری آزمون‌های ویژه برای زمان‌های خاص (میان‌ترم، ترم، پس از عید و...)
۳- امکان جبران عقب‌ماندگی‌ها یا دوره مطالب برای تثبیت آن‌ها

پاسخ‌نامهٔ تشریحی آزمون را ساعت ۱۶ از صفحهٔ شخصی خودتان در سایت آزمون خیلی سبز دریافت کنید.

azmoon.kheilisabz.com

سنجش کلاد
www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshClouds

پاسخ‌نامه آزمون آزمایشی خیلی سبز

رشته ریاضی

پایه یازدهم	مرحله سوم
سال تحصیلی ۰۴-۱۴۰۳	تاریخ برگزاری: ۰۹/آذر/۱۴۰۳

نام درس	طراحان به ترتیب حروف الفبا
حسابان	زهرا پورشیر ـ شمیم پهلوان شریف ـ فرشاد حسن‌زاده ـ خشایار خاکی ـ مجید رفعتی ـ علی شهرابی محمد گودرزی ـ میلاد منصوری ـ حسین نادری ـ محمدسجاد نقیه
هندسه	امیرحسین ابومحبوب ـ محمدطاهر شعاعی ـ صبا مهدوی ـ حسین هاشمی طاهری
آمار و احتمال	مسعود شفیعی ـ عطا صادقی ـ سروش موئینی
فیزیک	یاشار انگوتی ـ نوید شاهی
شیمی	یاسر عبداللهی ـ علی فرزاد تبار ـ محدثه ملک‌پور

نام درس	مسئول درس	گزینشگر	مولف پاسخ‌نامه	کارشناسان علمی	ویراستاران به ترتیب حروف الفبا
حسابان	محمدسجاد نقیه	محمدسجاد نقیه	علیرضا کاظمی بقا	سجاد داوطلب عادل حسینی علی شهرابی	عادل حسینی ـ علی رضایی ماهان فنی‌فر
هندسه	امیرحسین ابومحبوب	امیرحسین‌ابومحبوب	فرزانه خاکپاش	فرزانه خاکپاش	مهدی خوشنویس علی رضایی ماهان فنی‌فر ـ ابوالفضل ناصری
آمار و احتمال	مسعود شفیعی	مسعود شفیعی	مسعود شفیعی	امیرحسین ابومحبوب سعید قندچی	ماهان فنی‌فر علیرضا کاظمی بقا ابوالفضل ناصری ـ مریم نظری
فیزیک	نوید شاهی	یاشار انگوتی	محمد باغبان	علیرضا جباری	مهدی خوشنویس ـ ماهان فنی‌فر پارسا مرادی ـ ابوالفضل ناصری
شیمی	یاسر عبداللهی	محدثه ملک‌پور	محدثه ملک‌پور	احسان رحیمی	احسان رحیمی محمدرضا طاهری‌نژاد صدرا عبادی

سرپرست محتوایی: فاطمه آقاجانپور

ویژه یازدهمی‌های ۱۴۰۳

Azmoon.kheilisabz.com

سنجش کلاد
www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshClouds

آزمون آزمایشی خیلی سبز

سرپرست تولید	الناز علی‌یاری‌زاده
ویراستاران فنی	منیژه حق‌دوست ـ راضیه سادات خلدی‌نسب زهرا صفری ـ محیا غنی‌فرد زهرا فرهادی‌مهر ـ مریم مسلمی‌زاده ساعده نمازی
رسام	مونا آندستا سارا گنجی آزادپور
صفحه‌آرایی	سحر ازلی تاش ـ فاطمه بخششی مریم حسین‌زاده ـ سپیده سخایی مائده صبری ـ نیلوفر فرخجسته مهدیه گل‌پور ـ لیلا نعمت‌پور

Azmoon.kheilisabz.com

www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshClouds

حسابان یازدهم

۱ در یک دنبالهٔ حسابی با جملهٔ عمومی a_n، $S_{n-۴} - S_{n-۵} = ۳n - ۱$ است. حاصل $a_۴ - a_۵$ کدام است؟ (S_n مجموع n جملهٔ اول است.)

اختلاف دو جملهٔ متوالی که برابر $-d$ است.

۱) -۳
۲) ۳
۳) -۲
۴) ۲

مشاوره دنباله‌های حسابی و هندسی همیشه مورد توجه طراحان کنکور بوده است و معمولاً در هر کنکور از هر کدام از آن‌ها یک سؤال طرح می‌شود.

Hint

ابتدا محاسبه کنید که $S_{n-۴} - S_{n-۵}$ برابر کدام جمله می‌شود، سپس با توجه به جملهٔ عمومی دنبالهٔ حسابی آن جمله را برحسب n و d بنویسید و آن را برابر $۳n - ۱$ قرار دهید، d به دست می‌آید.

درس Box

جملهٔ عمومی دنبالهٔ حسابی: جملهٔ nاُم یک دنبالهٔ حسابی به صورت زیر نوشته می‌شود که همان جملهٔ عمومی دنبالهٔ حسابی است:

$$a_n = a_۱ + (n-۱)d$$

به عنوان مثال:

$$a_۴ = a_۱ + ۳d \text{ یا } a_{۱۰} = a_۱ + ۹d$$

مجموع n جملهٔ اول دنبالهٔ حسابی: در یک دنبالهٔ حسابی، مجموع n جملهٔ اول دنباله را با S_n نمایش می‌دهیم و از طریق رابطه‌های زیر آن را محاسبه می‌کنیم:

$$S_n = \frac{n}{۲}(۲a_۱ + (n-۱)d)$$

$$S_n = \frac{n}{۲}(a_۱ + a_n)$$

توجه: دنبالهٔ عددی همان دنبالهٔ حسابی است.

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: می‌دانیم که $S_{n-۴}$، مجموع $n-۴$ جملهٔ اول و $S_{n-۵}$ مجموع $n-۵$ جملهٔ اول است، پس حاصل $S_{n-۴} - S_{n-۵}$ برابر می‌شود با جملهٔ $n-۴$اُم:

$$\underbrace{\underbrace{a_۱ + a_۲ + \ldots + a_{n-۵}}_{S_{n-۵}} + a_{n-۴} + \ldots + a_n}_{S_{n-۴}}$$

$$S_{n-۴} - S_{n-۵} = a_{n-۴} \xrightarrow[S_{n-۴}-S_{n-۵}=۳n-۱]{\text{طبق صورت سؤال}} ۳n-۱ = a_{n-۴} \quad (*)$$

گام دوم: با توجه به جملهٔ عمومی دنبالهٔ حسابی، جملهٔ $n-۴$اُم به صورت $a_{n-۴} = a_۱ + (n-۴-۱)d$ نوشته می‌شود؛ پس طبق رابطهٔ (*) خواهیم داشت:

$$۳n-۱ = a_{n-۴} \Rightarrow ۳n-۱ = a_۱ + \overbrace{(n-۴-۱)}^{n-۵}d \Rightarrow ۳n-۱ = a_۱ + nd - ۵d \xrightarrow{\text{ضریب } n \text{ در دو طرف یکسان}} d = ۳$$

گام سوم: حال به سراغ خواستهٔ سؤال که $a_۴ - a_۵$ است می‌رویم:

$$a_۴ - a_۵ = (a_۱ + ۳d) - (a_۱ + ۴d) = \cancel{a_۱} + ۳d - \cancel{a_۱} - ۴d = -d \xrightarrow{d=۳} a_۴ - a_۵ = -۳$$

سنجش کلاد
www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshClouds

۲ دنباله‌های $a_n = ۴^{n-m}$ و $b_n = ۲^{n+m}$ مفروض‌اند. اگر مجموع ۵ جملهٔ اول دنبالهٔ $c_n = ۳۲a_n - ۱۱b_n$ برابر با صفر باشد، مقدار m کدام است؟

۱) ۱ ۲) $\frac{۴}{۳}$ ۳) $\frac{۵}{۳}$ ۴) ۲

Hint

مجموع ۵ جملهٔ اول دنبالهٔ $۳۲a_n$ و مجموع ۵ جملهٔ اول دنبالهٔ $۱۱b_n$ رو برابر قرار بده.

درس Box

دنبالهٔ $t_n = t_۱r^{n-۱}$ دنبالهٔ هندسی است که در آن نسبت دو جملهٔ متوالی، مقدار ثابتی است. این مقدار ثابت، قدرنسبت دنباله است (همان r یا q).

مجموع n جملهٔ اول این دنباله از رابطهٔ $S_n = \frac{t_۱(r^n - ۱)}{r - ۱}$ به دست می‌آید.

مثلاً $t_n = ۳ \times ۲^{۲n-۱}$ یک دنبالهٔ هندسی با قدرنسبت ۴ که مجموع n جملهٔ اول آن به صورت زیر به دست می‌آید:

$$t_۱ = ۳ \times ۲^{۲-۱} = ۶$$

$$\Rightarrow S_n = \frac{۶ \times (۴^n - ۱)}{۴ - ۱} = ۲ \times (۴^n - ۱) = ۲^{۲n+۱} - ۲$$

پاسخ خیلی تشریحی ✔

گام اول: ابتدا برویم سراغ دنبالهٔ c_n و ببینیم برای محاسبهٔ ۵ جملهٔ اول آن به چه چیزهایی نیاز داریم:

$$c_n = ۳۲a_n - ۱۱b_n$$

$$\Rightarrow c_۱ + c_۲ + \ldots + c_۵ = ۳۲a_۱ - ۱۱b_۱ + ۳۲a_۲ - ۱۱b_۲ + \ldots + ۳۲a_۵ - ۱۱b_۵$$

$$= ۳۲(a_۱ + a_۲ + \ldots + a_۵) - ۱۱(b_۱ + b_۲ + \ldots + b_۵)$$

پس می‌توانیم بنویسیم:

$$S_{۵,c} = ۳۲S_{۵,a} - ۱۱S_{۵,b}$$

که $S_{۵,a}$، $S_{۵,b}$ و $S_{۵,c}$ نمادگذاری خودمان برای تفکیک مجموع ۵ جملهٔ اول دنباله‌های a، b و c است.

گام دوم: $S_{۵,c}$ را مساوی صفر قرار می‌دهیم و داریم:

$$۳۲S_{۵,a} - ۱۱S_{۵,b} = ۰ \Rightarrow ۳۲S_{۵,a} = ۱۱S_{۵,b} \quad (*)$$

گام سوم: پس باید مجموع ۵ جملهٔ اول دنباله‌های a و b را حساب کنیم:

$$a_n = ۴^{۱-m} \times ۴^{n-۱} \Rightarrow S_{۵,a} = ۴^{۱-m} \times \frac{۴^۵ - ۱}{۴ - ۱} = ۴^{۱-m} \times \frac{۱۰۲۴ - ۱}{۳}$$

$$\Rightarrow S_{۵,a} = ۴^{۱-m} \times ۳۴۱$$

$$b_n = ۲^{۱+m} \times ۲^{n-۱} \Rightarrow S_{۵,b} = ۲^{۱+m} \times \frac{۲^۵ - ۱}{۲ - ۱} = ۲^{۱+m} \times ۳۱$$

گام چهارم: در تساوی (*) جای‌گذاری می‌کنیم:

$$۳۲ \times ۴^{۱-m} \times \underbrace{۳۴۱}_{۱۱ \times ۳۱} = ۱۱ \times ۲^{۱+m} \times ۳۱ \Rightarrow ۳۲ \times ۲^{۲-۲m} = ۲^{۱+m}$$

$$\Rightarrow ۲^{۱+m+۲m-۲} = ۳۲ \Rightarrow ۲^{۳m-۱} = ۲^۵ \Rightarrow ۳m - ۱ = ۵ \Rightarrow m = ۲$$

سنجش کلاد
www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshClouds

۳ ماشین **f** به عنوان ورودی اعداد حقیقی را قبول می‌کند و پس از دریافت هر عدد حقیقی یک واحد از چهار برابر مربع آن کم می‌کند و به عنوان خروجی تحویل می‌دهد. به ازای کدام مقدار ورودی، خروجی تابع ۳۵ خواهد شد؟

۱) $\sqrt{۱۷}$ ۲) -۳ ۳) -۱ ۴) $\frac{۳}{۲}$

پاسخ خیلی تشریحی ✔

گام اول: در ابتدا ضابطهٔ تابع را می‌نویسیم:

$$x:\text{عدد حقیقی} \xrightarrow{\text{مربع عدد}} x^۲ \xrightarrow{\text{۴ برابر عدد}} ۴x^۲ \xrightarrow{\text{یک واحد کم می‌کند}} ۴x^۲ - ۱$$

پس $f(x) = ۴x^۲ - ۱$ است.

گام دوم: ضابطه را برابر ۳۵ قرار می‌دهیم:

$$۴x^۲ - ۱ = ۳۵ \Rightarrow ۴x^۲ = ۳۶ \Rightarrow x^۲ = ۹ \Rightarrow x = \pm ۳$$

www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshClouds

۴ هم‌دامنهٔ تابع $f(x)=x(|x|-۲)$ مجموعهٔ $\left\{۰,\frac{۱}{۲},۱\right\}$ است. دامنهٔ این تابع حداکثر چند عضو دارد؟

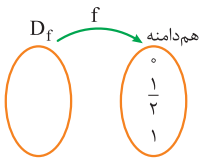
۱) ۵ ۲) ۶ ۳) ۷ ۴) ۸

Hint $f(x)$ را با اعضای مجموعهٔ داده‌شده برابر قرار بده و ۳ معادله حل کن.

درس Box در تعریف تابع f به صورت $\begin{cases}A\to B\\ y=f(x)\end{cases}$ مجموعهٔ A دامنه و مجموعهٔ B هم‌دامنه است و به این معناست که خروجی تابع (برد) چه مقادیری را می‌تواند بپذیرد؛ در واقع برد تابع زیرمجموعهٔ هم‌دامنه است.

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: نمایش پیکانی این تابع به صورت مقابل است:



پس برای به دست آوردن دامنهٔ تابع f کافی است محاسبه کنیم به ازای چه مقدار یا مقادیری، خروجی تابع برابر مقادیر ۰، $\frac{۱}{۲}$ یا ۱ می‌شود.

گام دوم: پس باید معادله‌های زیر را حل کنیم:

الف) $(|x|-۲)x=۰ \Rightarrow \begin{cases}|x|-۲=۰ \Rightarrow x=\pm ۲\\ x=۰\end{cases}$

ب) $(|x|-۲)x=\frac{۱}{۲} \Rightarrow \begin{cases}x>۰: x^۲-۲x-\frac{۱}{۲}=۰ \xrightarrow{x>۰} x=۱+\sqrt{\frac{۳}{۲}}\\ x<۰: -x^۲-۲x=\frac{۱}{۲} \Rightarrow x^۲+۲x+\frac{۱}{۲}=۰ \Rightarrow x=-۱\pm\sqrt{\frac{۱}{۲}}\end{cases}$

پ) $(|x|-۲)x=۱ \Rightarrow \begin{cases}x>۰: x^۲-۲x-۱=۰ \xrightarrow{x>۰} x=۱+\sqrt{۲}\\ x<۰: -x^۲-۲x=۱ \Rightarrow x^۲+۲x+۱=۰ \Rightarrow x=-۱\end{cases}$

گام سوم: پس در مجموع به ازای ۸ عضو مجموعهٔ $\left\{\pm ۲,-۱,۰,-۱\pm\sqrt{\frac{۱}{۲}},۱+\sqrt{\frac{۳}{۲}},۱+\sqrt{۲}\right\}$ برد تابع f زیرمجموعهٔ $\left\{۰,\frac{۱}{۲},۱\right\}$ است، یعنی دامنهٔ تابع f حداکثر ۸ عضو دارد.

سنجش کلاد
www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshClouds

۵ منحنی $f(x)=|x^۲-a|x||$ $(a>۰)$ از کدام نواحی مختصات نمی‌گذرد؟

۱) اول و دوم
۲) سوم و چهارم
۳) دوم و چهارم
۴) اول، سوم و چهارم

مشاوره برای حل این سؤال کافی است که به رسم سهمی مسلط باشید.

Hint تابع $y=x^۲-a|x|$ را به صورت دوضابطه‌ای بنویسید و با توجه به مثبت‌بودن a، آن را رسم کنید، سپس تابع f که در سؤال داده شده است را از روی آن رسم کنید تا به خواستهٔ سؤال برسید.

نکته برای رسم یک سهمی لازم است که عرض از مبدأ، ریشه‌ها و مختصات رأس را داشته باشیم.

پاسخ خیلی تشریحی ✔ **گام اول:** ابتدا تابع $y=x^۲-a|x|$ را به صورت دوضابطه‌ای می‌نویسیم:

$$x^۲-a|x|=\begin{cases}x^۲-ax & x>۰\\ x^۲+ax & x<۰\end{cases}$$

گام دوم: عرض از مبدأ ضابطه‌های به‌دست‌آمده برابر صفر است، حال ریشه‌ها و رأس هر یک را به دست می‌آوریم تا بتوانیم سهمی $y=x^۲-a|x|$ را رسم کنیم:

$x>۰: y=x^۲-ax$

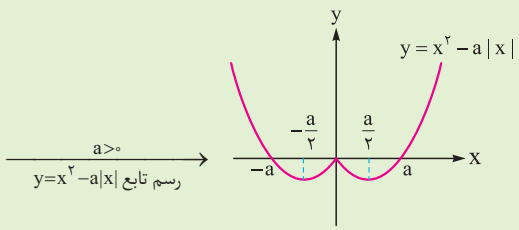
رأس: $x_s=\frac{-(-a)}{۲}=\frac{a}{۲}$

ریشه‌ها: $x^۲-ax=۰ \Rightarrow x(x-a)=۰ \Rightarrow \begin{cases}x=۰\\ x=a\end{cases}$

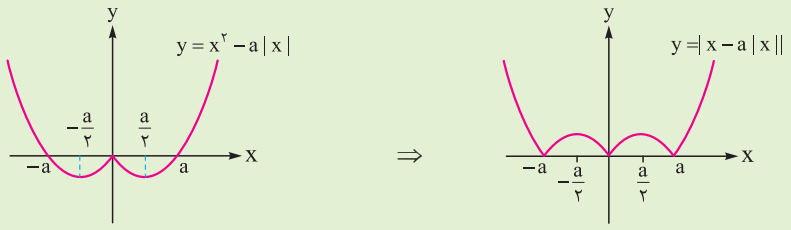
$x<۰: y=x^۲+ax$

رأس: $x_s=-\frac{a}{۲}$

ریشه‌ها: $x^۲+ax=۰ \Rightarrow x(x+a)=۰ \Rightarrow \begin{cases}x=۰\\ x=-a\end{cases}$



گام سوم: با توجه به نمودار تابع $y=x^۲-a|x|$، نمودار تابع $y=|x^۲-a|x||$ را رسم می‌کنیم، به این صورت که هر قسمت از نمودار $y=x^۲-a|x|$ که زیر محور xها قرار دارد را نسبت به همان محور قرینه و سپس آن را حذف می‌کنیم:



همان‌طور که می‌بینید تابع رسم‌شده از نواحی سوم و چهارم نمی‌گذرد.

تیزبازی نیازی به رسم نیست. می‌دانیم چون قدرمطلق همواره مثبت است، قطعاً از ربع‌های سوم و چهارم نمی‌گذرد؛ پس به راحتی گزینهٔ (۲) را می‌زنیم.

سنجش کلاد
www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshClouds

۶ چه تعداد تابع از $A=\{۱,۲,۳\}$ به $B=\{a,b,c,d\}$ می‌توان نوشت به طوری که $f(۳)\neq b$ باشد؟

۱) ۱۹۲ ۲) ۶۴

۳) ۴۸ ۴) ۸۱

مشاوره با سؤال آسانی مواجه هستید و کافی است بتوانید از اصل ضرب به درستی استفاده کنید.

Hint ببینید که برای هر عضو از A چند انتخاب وجود دارد، با توجه به شرط سؤال و اصل ضرب، جواب را به دست آورید.

درس Box

تعداد توابع از مجموعهٔ A به مجموعهٔ B

تعداد توابع ممکن که می‌توان از مجموعهٔ A به مجموعهٔ B نوشت برابر است با:

$$(n(B))^{n(A)}$$

چراکه هر عضو از مجموعهٔ A به تعداد اعضای مجموعهٔ B، یعنی $n(B)$ انتخاب خواهد داشت، پس طبق اصل ضرب خواهیم داشت:

$$\underbrace{n(B)\times n(B)\times ...n(B)}_{\text{تا}n(A)}$$

توجه: اگر در مسئله شرطی وجود داشته باشد، با توجه به شرط، تعداد انتخاب‌های اعضای مجموعهٔ A کم می‌شود.

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: برای این‌که از A به B یک تابع داشته باشیم، عضو ۱ از مجموعهٔ A چهار عضو از مجموعهٔ B را می‌تواند انتخاب کند، هم‌چنین عضو ۲ نیز چهار عضو را می‌تواند انتخاب کند، اما طبق صورت سؤال $f(۳)\neq b$، پس عضو ۳، نمی‌تواند b را انتخاب کند؛ پس ۳ انتخاب برایش باقی می‌ماند.

گام دوم: با توجه به اصل ضرب و توضیحات داده‌شده در گام اول، خواستهٔ سؤال را به دست می‌آوریم:

$$\underset{\text{تعداد عضوهایی که ۳ انتخاب می‌کند}}{۳} \times \underset{\text{تعداد عضوهایی که ۲ انتخاب می‌کند}}{۴} \times \underset{\text{تعداد عضوهایی که ۱ انتخاب می‌کند.}}{۴} = ۴۸$$

سنجش کلاد
www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshClouds

۷ اگر $f(x)=\begin{cases}1+a & ;x\le -a\\ a & ;x>a-2\end{cases}$ باشد، تابع $g(x)=\begin{cases}-1 & ;x\le 0\\ 1 & ;x>0\end{cases}$ با کدام تابع مساوی است؟

۱) $y=f(x+1)-3$

۲) $y=3-2f(x+1)$

۳) $y=f(x-1)-3$

۴) $y=3-2f(x-1)$

Hint اول a رو به دست بیار، حالا چه‌جوری به دست میاری؟ ... از روی دامنه، ضابطهٔ f به دست میاد. کار خاصی نداری، نهایتاً گزینه‌های مختلف رو امتحان می‌کنی.

درس Box

دو تابع با هم مساوی هستند، اگر دو شرط زیر برقرار باشد:

۱) دامنهٔ دو تابع برابر باشد.

۲) ضابطه‌های دو تابع به ازای همهٔ اعضای دامنه برابر باشند.

در مسائل تساوی توابع، در ابتدا دامنه‌ها را چک می‌کنیم، اگر برابر نباشند، تکلیف مشخص است، اما اگر برابر باشند، می‌رویم سراغ ضابطه‌ها و غالباً ضابطه‌ها به گونه‌ای هستند که قابلیت تبدیل‌شدن به یکدیگر را دارند، مثل $|x|,\sqrt{x^2}$.

انتقال

نوع تبدیل	نماد ریاضی $(a,b>0)$	تأثیر روی $f(x)$
انتقال افقی	$f(x-a)$	a واحد به راست
	$f(x+a)$	a واحد به چپ
انتقال عمودی	$f(x)+b$	b واحد به بالا
	$f(x)-b$	b واحد به پایین
قرینه‌یابی	$-f(x)$	قرینه نسبت به محور xها
تبدیل قدرمطلقی	$\lvert f(x)\rvert$	قسمت زیر محور x را نسبت به محور xها قرینه می‌کنیم.

پاسخ خیلی تشریحی ✔

گام اول: در ابتدا باید پارامتر a را حساب کنیم. دقت کنید که دامنهٔ تابع g برابر $\mathbb{R}$ است و با انتقال این تابع نیز هم‌چنان دامنهٔ $\mathbb{R}$ خواهد بود، این یعنی دامنهٔ تابع f باید $\mathbb{R}$ باشد و این زمانی امکان‌پذیر است که $-a$ و $a-2$ با هم برابر باشند.

$$\Rightarrow a-2=-a \Rightarrow 2a=2 \Rightarrow a=1$$

گام دوم: پس ضابطهٔ تابع f پیدا شد:

$$f(x)=\begin{cases}2 & ;x\le -1\\ 1 & ;x>-1\end{cases}$$

و برای این‌که انتقال‌یافتهٔ نمودار تابع f را با نمودار تابع g یکسان بگیریم، لازم است نمودار تابع f را یک واحد به راست انتقال دهیم:

$$f(x-1)=\begin{cases}2 & ;x-1\le -1\\ 1 & ;x-1>-1\end{cases}=\begin{cases}2 & ;x\le 0\\ 1 & ;x>0\end{cases}$$

گام سوم: پس یکی از گزینه‌های (۳) یا (۴) درست است. حال هر دوی این ضابطه‌ها را چک می‌کنیم تا ببینیم کدام‌یک با تابع g مساوی می‌شود:

گزینهٔ (۳):
$$f(x-1)-3=\begin{cases}2-3 & ;x\le 0\\ 1-3 & ;x>0\end{cases}=\begin{cases}-1 & ;x\le 0\\ -2 & ;x>0\end{cases}$$

گزینهٔ (۴):
$$3-2f(x-1)=\begin{cases}3-2(2) & ;x\le 0\\ 3-2(1) & ;x>0\end{cases}=\begin{cases}-1 & ;x\le 0\\ 1 & ;x>0\end{cases}$$ ✓

سنجش کلاد
www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshClouds

۸ برد تابع $f(x)=\sqrt{x^۲-۴|x|}+۴$ با دامنهٔ $[-m,m]$ شامل ۳ عدد صحیح است. مجموع مقادیر صحیح m کدام است؟

۱) ۴
۲) ۵
۳) ۹
۴) ۱۴

مشاوره بر روی رسم توابع باید تبحر خاصی داشته باشید، چراکه در حل سؤالات به صورت مستقیم و غیرمستقیم به کمک شما می‌آید.

Hint

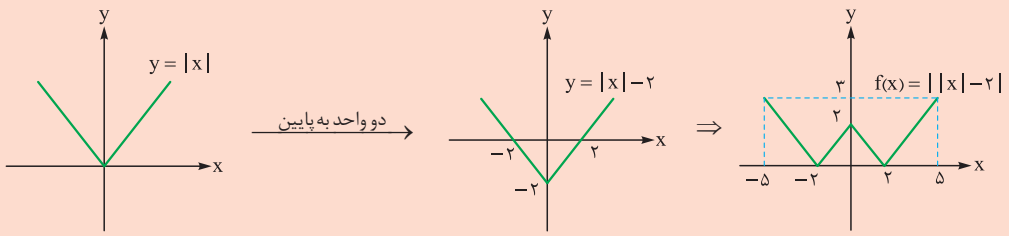
تابع $f(x)=\sqrt{x^۲-۴|x|}+۴$ را به صورت $f(x)=\sqrt{|x|^۲-۴|x|}+۴$ بنویسید و سپس به کمک اتحاد مربع دوجمله‌ای ضابطه را ساده‌تر کنید، حالا نوبت رسم تابع است تا به خواستهٔ سؤال برسید.

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: چون $x^۲=|x|^۲$، ابتدا تابع $f(x)=\sqrt{x^۲-۴|x|}+۴$ را به صورت $f(x)=\sqrt{|x|^۲-۴|x|}+۴$ می‌نویسیم:

$$f(x)=\sqrt{x^۲-۴|x|}+۴ \xrightarrow{x^۲=|x|^۲} f(x)=\sqrt{|x|^۲-۴|x|}+۴ \Rightarrow f(x)=\sqrt{(|x|-۲)^۲}$$
$$\Rightarrow f(x)=||x|-۲|$$

گام دوم: نمودار تابع $f(x)=||x|-۲|$ را به ترتیب از روی نمودار $y=|x|$ به کمک قوانین انتقال رسم می‌کنیم:



گام سوم: طبق فرض سؤال برد تابع f در بازهٔ $[-m,m]$ شامل سه عدد صحیح است. با کمی دقت متوجه می‌شویم که آن سه عدد صحیح ۰، ۱ و ۲ هستند و طبق نمودار، m می‌تواند در بازهٔ $[۲,۵)$ متغیر باشد.

گام چهارم: پس مقادیر صحیح m می‌تواند ۲، ۳ و ۴ باشد که مجموع آن‌ها برابر ۹ است.

سنجش کلاد
www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshClouds

۹ بیشترین مقدار تابع $f(x)=mx^2+6x+m$ برابر -8 است. در این صورت $f(1)$ کدام است؟

عرض رأس سهمی $=-8$

۱) ۱۲
۲) -9
۳) ۹
۴) -12

Hint به کمک رابطهٔ مربوط به عرض رأس سهمی، m رو به دست بیار. حالا می‌تونی $f(1)$ رو به دست بیاری.

درس Box

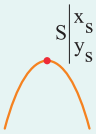
سهمی $f(x)=ax^2+bx+c$ را در نظر بگیرید.

رأس یک سهمی، بالاترین یا پایین‌ترین نقطهٔ آن سهمی است.

- اگر $a>0$ باشد (دهانهٔ سهمی رو به بالا باشد)، رأس سهمی نقطهٔ مینیمم سهمی است و برد آن $[y_s,+\infty)$ است.



- اگر $a<0$ باشد (دهانهٔ سهمی رو به پایین باشد) رأس سهمی نقطهٔ ماکزیمم سهمی است و برد آن $(-\infty,y_s]$ است.



به دست آوردن مختصات رأس سهمی:

طول رأس سهمی: $x_s=-\frac{b}{2a}$

عرض رأس سهمی
- می‌توانیم مقدار سهمی را به ازای x_s را به دست آوریم. $f(x_s)$
- یا
- می‌توانیم از رابطهٔ $y_s=-\frac{\Delta}{4a}$ استفاده کنیم. $(\Delta=b^2-4ac)$

پس مختصات رأس سهمی برابر است با:

$$(-\frac{b}{2a},\underbrace{-\frac{\Delta}{4a}}_{\downarrow})$$
$$=f(x_s)$$

محور تقارن یک سهمی برابر است با:

$$x=-\frac{b}{2a}$$

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول (به دست آوردن m):

با توجه به فرض سؤال عرض رأس سهمی (مقدار ماکزیمم) برابر -8 است، پس:

$$y_s=-\frac{\Delta}{4a}=-8 \Rightarrow \frac{\Delta}{4a}=8 \xrightarrow{\Delta=6^2-4m(m)} \frac{36-4m^2}{4m}=8$$

$$36-4m^2=32m \Rightarrow 4m^2+32m-36=0 \xrightarrow{\div 4} m^2+8m-9=0 \Rightarrow (m+9)(m-1)=0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} m=-9 \\ m=1 \end{cases}$$

با توجه به این‌که سهمی ماکزیمم دارد، دهانهٔ سهمی رو به پایین است $(m<0)$؛ بنابراین $m=-9$ قابل قبول است و $m=1$ غیر قابل قبول.

گام دوم (محاسبهٔ f(1)):

با جای‌گذاری $m=-9$ در ضابطهٔ سهمی داریم:

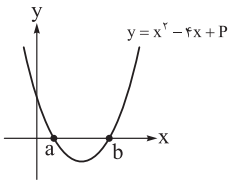
$$f(x)=-9x^2+6x-9$$

بنابراین:

$$f(1)=-9(1)^2+6(1)-9=-9+6-9=-12$$

سنجش کلاد
www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshClouds

۱۰ با توجه به شکل زیر، اگر $\sqrt{a}+\sqrt{b}=\sqrt{6}$ باشد، حاصل $(a+\frac{1}{b})^2+(b+\frac{1}{a})^2$ کدام است؟



۱) ۵۶

۲) ۱۶

۳) ۲۶

۴) ۴۶

Hint با توجه به مجموع ریشه‌ها در رابطهٔ داده‌شده می‌تونی حاصل‌ضرب ریشه‌ها رو به دست بیاری و ... .

درس Box

در یک معادلهٔ درجه‌دوم به فرم $ax^2+bx+c=0$ که در آن $\Delta>0$ باشد؛ مجموع ریشه‌ها، حاصل‌ضرب ریشه‌ها و تفاضل ریشه‌ها طبق جدول زیر به دست می‌آیند (α و β را ریشه‌های معادله در نظر می‌گیریم):

D تفاضل ریشه‌ها	P حاصل‌ضرب ریشه‌ها	S: مجموع ریشه‌ها
$\lvert\alpha-\beta\rvert=\frac{\sqrt{\Delta}}{\lvert a\rvert}=\sqrt{S^2-4P}$	$P=\alpha\beta=\frac{c}{a}$	$S=\alpha+\beta=-\frac{b}{a}$

با توجه به S و P برای روابط بین ریشه‌ها داریم:

اثبات: $(\alpha+\beta)^2=\alpha^2+\beta^2+2\alpha\beta$ $\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta=S^2-2P$	مجموع مربعات ریشه‌ها: $\alpha^2+\beta^2=S^2-2P$
اثبات: $(\alpha+\beta)^3=\alpha^3+\beta^3+3\alpha\beta(\alpha+\beta)$ $\alpha^3+\beta^3=(\alpha+\beta)^3-3\alpha\beta(\alpha+\beta)$ $\alpha^3+\beta^3=S^3-3PS$	مجموع مکعبات ریشه‌ها: $\alpha^3+\beta^3=S^3-3SP$
اثبات: $\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}=\frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta}=\frac{S}{P}$	مجموع معکوس ریشه‌ها: $\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}=\frac{S}{P}$

نکته اگر ریشه‌ها قرینه باشند، یعنی به صورت α و $\beta=-\alpha$ باشند، جمع ریشه‌ها برابر صفر است.

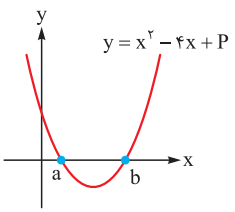
$S=\alpha+\beta=\alpha+(-\alpha)=0$

اگر ریشه‌ها معکوس هم باشند، یعنی به صورت α و $\beta=\frac{1}{\alpha}$ باشند، حاصل‌ضرب ریشه‌ها برابر یک است.

$P=\alpha\beta=\alpha(\frac{1}{\alpha})=1$

پاسخ خیلی تشریحی **گام اول (به دست آوردن حاصل‌ضرب ریشه‌ها):**

با توجه به سهمی داده‌شده، a و b صفرهای (ریشه‌های) سهمی $y=x^2-4x+P$ هستند؛ بنابراین مجموع آن‌ها برابر است با:



$$S=a+b=-\frac{-4}{1}=4 \quad (*)$$

سنجش کلاد
www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshClouds

از طرفی، طبق فرض سؤال تساوی $\sqrt{a}+\sqrt{b}=\sqrt{6}$ برقرار است؛ پس داریم:

$$\sqrt{a}+\sqrt{b}=\sqrt{6} \xrightarrow{\text{طرفین را به توان ۲ می‌رسانیم.}} (\sqrt{a}+\sqrt{b})^2=(\sqrt{6})^2 \Rightarrow a+b+2\sqrt{a}\sqrt{b}=6$$

$$a+b+2\sqrt{ab}=6 \Rightarrow S+2\sqrt{P}=6$$

که با جای‌گذاری (*) در آن داریم:

$$S+2\sqrt{P}=6 \xrightarrow{S=4} 4+2\sqrt{P}=6 \Rightarrow 2\sqrt{P}=2 \Rightarrow \sqrt{P}=1 \Rightarrow P=1$$

گام دوم (به دست آوردن حاصل $(a+\frac{1}{b})^2+(b+\frac{1}{a})^2$):

از آن‌جا که از گام قبل $P=1$ به دست آمد، پس حاصل‌ضرب ریشه‌ها برابر یک است، بنابراین یکی از ریشه‌ها معکوس دیگری است.

$$P=ab=1 \Rightarrow \begin{cases} b=\frac{1}{a} \\ a=\frac{1}{b} \end{cases}$$

بنابراین داریم:

$$(a+\frac{1}{b})^2+(b+\frac{1}{a})^2 \xrightarrow{b=\frac{1}{a},\ a=\frac{1}{b}} (a+a)^2+(b+b)^2=(2a)^2+(2b)^2$$

$$=4a^2+4b^2=4(a^2+b^2) \xrightarrow{a^2+b^2=S^2-2P} 4(S^2-2P)=4(4^2-2(1))=4(16-2)=4\times 14=56$$

سنجش کلاد
www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshClouds

۱۱ مجموع جواب‌های معادلهٔ $۸(x-۱) = (۲x-۱)^۲ - (۲x-۱)^۳$ کدام است؟

۱) ۴ ۲) $\frac{۱}{۲}$ ۳) ۲ ۴) ۱

Hint به تغییر متغیر $t = ۲x-۱$ فکر کن.

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: در سمت چپ تساوی واضح است که می‌توان $۲x-۱$ را یک متغیر جدید در نظر گرفت، اما سمت راست تساوی ناواضح است؛ پس سعی می‌کنیم در سمت راست هم عبارت $۲x-۱$ را بسازیم:

$$۸(x-۱) = ۴(۲x-۲) = ۴((۲x-۱)-۱)$$

پس اگر $۲x-۱$ را t در نظر بگیریم، معادلهٔ ما به صورت زیر بازنویسی می‌شود:

$$t^۳ - t^۲ = ۴(t-۱) \Rightarrow t^۳ - t^۲ - ۴t + ۴ = ۰$$

گام دوم: با تجزیه سعی می‌کنیم این معادلهٔ درجه‌سوم را ساده‌تر حل کنیم:

$$t^۲(t-۱) - ۴(t-۱) = ۰ \Rightarrow (t^۲-۴)(t-۱) = ۰ \Rightarrow (t-۲)(t+۲)(t-۱) = ۰$$

$$\Rightarrow t = ۲, -۲, ۱$$

گام سوم: $۲x-۱$ را مساوی مقادیر به‌دست‌آمده قرار می‌دهیم تا جواب‌های x به دست بیاید:

$$\begin{cases} ۲x_۱ - ۱ = -۲ \Rightarrow x_۱ = -\frac{۱}{۲} \\ ۲x_۲ - ۱ = ۱ \Rightarrow x_۲ = ۱ \\ ۲x_۳ - ۱ = ۲ \Rightarrow x_۳ = \frac{۳}{۲} \end{cases}$$

پس مجموع جواب‌ها $x_۱ + x_۲ + x_۳ = ۲$ است.

سنجش کلاد
www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshClouds

۱۲ معادلهٔ $\frac{x+1}{x+2}+\frac{x-a}{x^2-2a}=1$ با شرط $a\neq 0$ چند جواب دارد؟

۱) صفر
۲) ۱
۳) ۱ یا بی‌شمار
۴) بی‌شمار

درس Box

به معادلاتی که در آن عبارت گویا $\left(\frac{\text{چندجمله‌ای}}{\text{چندجمله‌ای}}\right)$ باشد، معادلهٔ گویا می‌گوییم. روش حل این معادلات به این صورت است که دو طرف تساوی را با مخرج‌مشترک‌گیری به یک کسر واحد تبدیل می‌کنیم و پس از آن با طرفین‌وسطین معادله را از حالت کسری خارج و حل می‌کنیم. فقط حواسمان به ریشه‌های مخرج باشد.

مثال: $\frac{2x-1}{3x+1}+1=\frac{x+3}{x-2}$

$$\underbrace{\frac{2x-1+3x+1}{3x+1}}_{\text{مخرج مشترک‌گیری}}=\frac{x+3}{x-2}\Rightarrow\frac{5x}{3x+1}=\frac{x+3}{x-2}\xrightarrow{\text{طرفین‌وسطین}}5x(x-2)=(3x+1)(x+3)$$

$$\Rightarrow 5x^2-10x=3x^2+10x+3\Rightarrow 2x^2-20x-3=0$$

$$\xrightarrow{\Delta=424=4\times 106}x=\frac{20\pm\sqrt{4\times 106}}{4}=\frac{10\pm\sqrt{106}}{2}$$

پاسخ خیلی تشریحی ✔

گام اول: سمت چپ تساوی را با مخرج‌مشترک‌گیری به یک کسر واحد تبدیل می‌کنیم:

$$\frac{(x+1)(x^2-2a)+(x-a)(x+2)}{(x+2)(x^2-2a)}=1\Rightarrow\frac{x^3+x^2-2ax-2a+x^2+(2-a)x-2a}{x^3+2x^2-2ax-4a}=1$$

گام دوم: حالا طرفین‌وسطین می‌کنیم:

$$\Rightarrow x^3+2x^2+(2-3a)x-4a=x^3+2x^2-2ax-4a$$

$$\Rightarrow (2-3a)x=-2ax$$

گام سوم: در معادلهٔ بالا اگر $2-3a$ و $-2a$ با هم برابر باشند، معادله بی‌شمار جواب دارد:

$$2-3a=-2a\Rightarrow a=2$$

و اگر $a\neq 2$ باشد، تنها جواب معادله $x=0$ خواهد بود.

سنجش کلاد
www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshClouds

۱۳ معادلهٔ $\sqrt{x+7+4\sqrt{x+3}}+\sqrt{2x+7-2\sqrt{x^2+7x+12}}=10-x$ چند جواب حقیقی دارد؟

۱) صفر ۲) ۱

۳) ۲ ۴) ۳

مشاوره اگر سر جلسهٔ آزمون به این سؤال پاسخ ندادید، نگران نباشید. این سؤال از سؤالات دشوار آزمون بوده است. پاسخ را ببینید و ایده را به ذهن بسپارید.

Hint

با استفاده از اتحاد مربع دوجمله‌ای عبارت‌های زیر رادیکال‌ها را تجزیه کنید، سپس توان‌های ۲ با فرجهٔ رادیکال‌ها ساده می‌شوند و می‌توانید جواب(های) معادله را به دست آورید.

درس Box

معادلات گنگ

برای حل معادلات گنگ باید عبارت رادیکالی را در یک طرف تنها کرده و سپس طرفین را به توان ۲ رساند.

توجه:

۱) بعد از حل معادلهٔ گنگ حتماً باید جواب‌های به‌دست‌آمده را در معادلهٔ اولیه قرار دهید؛ اگر در آن صدق کند، جواب قابل قبول و اگر در آن صدق نکند، جواب غیر قابل قبول است.

۲) برخی معادلات گنگ دارای ظاهر پیچیده‌ای هستند و بیش از یک رادیکال در آن‌ها وجود دارد که به توان ۲ رساندن کار را پیچیده می‌کند. در این قبیل معادلات باید با استفاده از مواردی از قبیل تغییر متغیر، تجزیه و ... معادله را ساده کرد.

رادیکال‌های مرکب

معمولاً رادیکال‌هایی که به صورت $\sqrt{A\pm\sqrt{B}}$ نوشته می‌شود، رادیکال مرکب نامیده می‌شود. در این‌جا برای این‌که این رادیکال‌های را ساده کنیم، از اتحاد مربع دوجمله‌ای کمک می‌گیریم؛ به عنوان مثال خواهیم داشت:

$$\sqrt{11+6\sqrt{2}}=\sqrt{9+6\sqrt{2}+2}=\sqrt{(3+\sqrt{2})^2}=\overbrace{|3+\sqrt{2}|}^{+}=3+\sqrt{2}$$

$$\sqrt{4-2\sqrt{3}}=\sqrt{1-2\sqrt{3}+3}=\sqrt{(1-\sqrt{3})^2}=\overbrace{|1-\sqrt{3}|}^{-}=\sqrt{3}-1$$

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: ابتدا به کمک اتحادهای مربع دوجمله‌ای و رادیکال‌های مرکب، رادیکال‌های سمت چپ را ساده می‌کنیم:

$$\sqrt{x+7+4\sqrt{x+3}}=\sqrt{x+3+4\sqrt{x+3}+4}=\sqrt{(2+\sqrt{x+3})^2}$$

$$\xrightarrow{\text{توان ۲ با فرجهٔ رادیکال ساده می‌شود.}}\sqrt{x+7+4\sqrt{x+3}}=|2+\sqrt{x+3}|$$

$$\xrightarrow[\text{داخل قدرمطلق مثبت است.}]{2+\sqrt{x+3}>0}\sqrt{x+7+4\sqrt{x+3}}=2+\sqrt{x+3}$$

$$\sqrt{2x+7-2\underbrace{\sqrt{x^2+7x+12}}_{\sqrt{(x+3)(x+4)}}}=\sqrt{(\sqrt{x+3}-\sqrt{x+4})^2}$$

$$\xrightarrow{\text{توان ۲ با فرجهٔ رادیکال ساده می‌شود.}}\sqrt{2x+7-2\sqrt{x^2+7x+12}}=|\sqrt{x+3}-\sqrt{x+4}|$$

$$\xrightarrow[\text{پس داخل قدرمطلق منفی است.}]{\sqrt{x+4}>\sqrt{x+3}\ ,\ x\geq -3\ \text{به ازای هر}}\sqrt{2x+7-2\sqrt{x^2+7x+12}}=-\sqrt{x+3}+\sqrt{x+4}$$

گام دوم: با توجه به عبارت‌های به‌دست‌آمده، معادله را بازنویسی می‌کنیم:

$$\sqrt{x+7+4\sqrt{x+3}}+\sqrt{2x+7-2\sqrt{x^2+7x+12}}=10-x\Rightarrow 2+\cancel{\sqrt{x+3}}-\cancel{\sqrt{x+3}}+\sqrt{x+4}=10-x$$

$$\Rightarrow 2+\sqrt{x+4}=10-x\Rightarrow\sqrt{x+4}=8-x\quad(*)$$

سنجش کلاد
www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshClouds

گام سوم: دو طرف معادلهٔ (*) را به توان ۲ می‌رسانیم تا به خواستهٔ سؤال برسیم:

$$\sqrt{x+4}=8-x \xrightarrow{\text{دو طرف به توان ۲}} x+4=64-16x+x^2 \Rightarrow x^2-17x+60=0$$

$$\Rightarrow (x-12)(x-5)=0 \Rightarrow \begin{cases} x=5 \\ x=12 \end{cases}$$

جواب‌های به‌دست‌آمده را در (*) جای‌گذاری می‌کنیم:

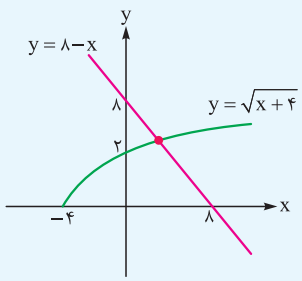
$x=12 \Rightarrow \sqrt{12+4}=8-12 \Rightarrow 4=-4$ ✗

$x=5 \Rightarrow \sqrt{5+4}=8-5 \Rightarrow 3=3$ ✓

پس تنها جواب معادله $x=5$ است و معادلهٔ داده‌شده فقط یک جواب دارد.

یه‌جور دیگه

در گام دوم، به روش هندسی نیز می‌توانیم خواستهٔ سؤال را به دست آوریم، چراکه سؤال فقط تعداد جواب‌های معادله را می‌خواهد. نگاه کنید:



می‌بینیم که نمودارها در یک نقطه یکدیگر را قطع می‌کنند؛ پس معادلهٔ داده‌شده فقط یک جواب دارد.

سنجش کلاد
www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshClouds

۱۴ اختلاف مجموع و حاصل‌ضرب جواب‌های معادلهٔ $\frac{۴x-x^۲-۱}{x}=\frac{۸-\sqrt{\frac{۱۶x^۲+۱۶}{x}}}{۲+\sqrt{x+\frac{۱}{x}}}$ کدام است؟

$|S-P|$

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

مشاوره در معادلات عجیب و غریب و پیچیده مثل معادلهٔ این سؤال، اولین چیزی که باید به ذهنتان بیاید، تغییر متغیر است.

Hint

ابتدا در سمت چپ به کمک تفکیک کسرها و در سمت راست به کمک فاکتورگیری عبارت را ساده کنید و سپس از تغییر متغیر $t=\sqrt{x+\frac{۱}{x}}$ استفاده کنید تا به خواستهٔ سؤال برسید.

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: ابتدا سمت چپ را به کمک تفکیک کسرها ساده می‌کنیم:

$$\frac{۴x-x^۲-۱}{x}=\frac{۴x}{x}-\frac{x^۲}{x}-\frac{۱}{x}==۴-x-\frac{۱}{x}=۴-(x+\frac{۱}{x})$$

گام دوم: حال به سراغ ساده‌سازی سمت راست می‌رویم:

$$\frac{۸-\sqrt{\frac{۱۶x^۲+۱۶}{x}}}{۲+\sqrt{x+\frac{۱}{x}}}=\frac{۸-\sqrt{\frac{۱۶(x^۲+۱)}{x}}}{۲+\sqrt{x+\frac{۱}{x}}}=\frac{۸-۴\sqrt{\frac{x^۲+۱}{x}}}{۲+\sqrt{x+\frac{۱}{x}}}=\frac{۸-۴\sqrt{x+\frac{۱}{x}}}{۲+\sqrt{x+\frac{۱}{x}}}$$

گام سوم: در معادلهٔ به‌دست‌آمده از تغییر متغیر $t=\sqrt{x+\frac{۱}{x}}$ استفاده می‌کنیم:

$$۴-(x+\frac{۱}{x})=\frac{۸-۴\sqrt{x+\frac{۱}{x}}}{۲+\sqrt{x+\frac{۱}{x}}}\xrightarrow{t=\sqrt{x+\frac{۱}{x}}}۴-t^۲=\frac{۸-۴t}{۲+t}\xrightarrow{\text{طرفین‌وسطین}}۸-۴t=(۴-t^۲)(۲+t)$$

$$\Rightarrow ۴(۲-t)=(۲-t)(۲+t)^۲\Rightarrow\begin{cases}۲-t=۰\Rightarrow t=۲\\ \text{یا}\\ ۴=(۲+t)^۲=۴+۴t+t^۲\Rightarrow t(t+۴)=۰\Rightarrow t=۰\text{ یا }-۴\end{cases}$$

هر دو غیرقابل‌قبول

نکته برای هر $x\in\mathbb{R}$ همواره خواهیم داشت:

$$x>۰: x+\frac{۱}{x}\geq ۲$$

$$x<۰: x+\frac{۱}{x}\leq -۲$$

به عبارت دیگر مجموع هر عدد حقیقی مثبت با معکوسش همواره بزرگ‌تر یا مساوی ۲ و مجموع هر عدد حقیقی منفی با معکوسش همواره کوچک‌تر یا مساوی -۲ است.

گام چهارم: با توجه به مقدار به‌دست‌آمده برای t به سراغ حل نهایی معادله می‌رویم:

$$t=\sqrt{x+\frac{۱}{x}}=۲\Rightarrow x+\frac{۱}{x}=۴\Rightarrow x^۲-۴x+۱=۰$$

مجموع جواب‌های این معادله برابر $S=۴$ و حاصل‌ضرب آن‌ها برابر $P=۱$ است؛ در نتیجه داریم:

$$|S-P|=۳$$

سنجش کلاد
www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshClouds

۱۵ قرینهٔ نقطهٔ $A(۲,-۲)$ نسبت به نقطهٔ $B(۳,۴)$ کدام نقطه است؟

۱) $(۱۰,۴)$ ۲) $(\frac{۵}{۲},۱)$

۳) $(۱,\frac{۵}{۲})$ ۴) $(۴,۱۰)$

Hint از مفاهیم مختصات نقطه وسط یک پاره‌خط استفاده کن و سؤال رو حل کن.

درس Box

مختصات نقطهٔ وسط یک پاره‌خط

اگر M وسط پاره‌خط AB باشد، مختصات نقطهٔ M برابر است با:

$$x_M = \frac{x_A + x_B}{۲} \quad , \quad y_M = \frac{y_A + y_B}{۲}$$

این نقطهٔ وسط در خیلی از سؤال‌ها می‌تونه کاربرد داشته باشد، مثل چی؟



مسئلهٔ قرینهٔ نقطه نسبت به نقطه: اگر بخواهیم قرینهٔ نقطه‌ای مانند A را نسبت به M پیدا کنیم از نقطهٔ A به M وصل می‌کنیم و سپس به اندازهٔ AM از سمت دیگر M امتداد می‌دهیم تا به نقطهٔ A' برسیم. مشخص است که نقطهٔ M وسط A و A' است.

پس:

$$\frac{A+A'}{۲} = M \Rightarrow A' = ۲M - A \Rightarrow \begin{cases} x_{A'} = ۲x_M - x_A \\ y_{A'} = ۲y_M - y_A \end{cases}$$

پاسخ خیلی تشریحی ✔ اگر قرینهٔ نقطهٔ $A(۲,-۲)$ نسبت به نقطهٔ $B(۳,۴)$ را $A'(x_{A'}, y_{A'})$ در نظر بگیریم، با توجه به درس‌باکس داریم:

$$x_{A'} = ۲x_B - x_A = ۲(۳) - ۲ = ۴$$

$$y_{A'} = ۲y_B - y_A = ۲(۴) - (-۲) = ۸ + ۲ = ۱۰$$

بنابراین مختصات A' به صورت $A'(۴,۱۰)$ است.

سنجش کلاد
www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshClouds

۱۶ خط $mx+۳y+۳=۰$ بر دایره‌ای به شعاع $\sqrt{۱۳}$ و مرکز $O(-۱,۴)$ مماس است. مقدار m کدام می‌تواند باشد؟

۱) ۲ ۲) -۲ ۳) ۱ ۴) -۱

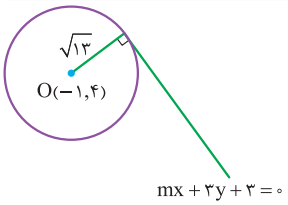
مشاوره این سؤال از سؤالات آسان این آزمون است و فقط کمی محاسباتش طولانی است.

Hint با توجه به نکتهٔ گفته‌شده فاصلهٔ نقطهٔ O از خط را برابر $\sqrt{۱۳}$ قرار دهید و با توجه به فرمول فاصلهٔ نقطه از خط، پاسخ را به دست آورید.

نکته خط مماس بر دایره، در نقطهٔ تماس بر شعاع دایره عمود است.

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: می‌دانیم که خط مماس بر دایره در نقطهٔ تماس، بر شعاع عمود است، چون شعاع دایره $\sqrt{۱۳}$ است و مرکز آن $O(-۱,۴)$ است، پس فاصلهٔ نقطهٔ $O(-۱,۴)$ از خط $mx+۳y+۳=۰$ برابر $\sqrt{۱۳}$ است. با توجه به فرمول فاصله نقطهٔ از خط خواهیم داشت:



فاصلهٔ نقطهٔ $O\ (-۱,۴)$ از $mx+۳y+۳=۰$: $\dfrac{|m(-۱)+۳(۴)+۳|}{\sqrt{m^۲+۳^۲}}=\sqrt{۱۳}$

$$\Rightarrow \frac{|-m+۱۵|}{\sqrt{m^۲+۹}}=\sqrt{۱۳} \xrightarrow{\text{دو طرف به توان ۲}} \frac{m^۲-۳۰m+۲۲۵}{m^۲+۹}=۱۳$$

$$\xrightarrow{\text{طرفین‌وسطین}} m^۲-۳۰m+۲۲۵=۱۳m^۲+۱۱۷ \Rightarrow ۱۲m^۲+۳۰m-۱۰۸=۰$$

گام دوم: معادلهٔ به‌دست‌آمده در گام اول را حل می‌کنیم:

$$۱۲m^۲+۳۰m-۱۰۸=۰ \xrightarrow{\div ۳} ۴m^۲+۱۰m-۳۶=۰ \Rightarrow (۲m+۹)(۲m-۴)=۰ \Rightarrow \begin{cases} ۲m+۹=۰ \Rightarrow m=\dfrac{-۹}{۲} \\ ۲m-۴=۰ \Rightarrow m=۲ \end{cases}$$

$m=۲$ در گزینه‌ها موجود است؛ پس پاسخ گزینهٔ (۱) است.

یه‌جور دیگه در انتهای همان گام اول با جای‌گذاری گزینه‌ها در معادلهٔ به‌دست‌آمده، می‌توانستیم به پاسخ برسیم.

سنجش کلاد
www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshClouds

۱۷ در مربع **ABCD**، قطر **BD** منطبق بر خط $3x+4y+15=0$ است. اگر یکی از رئوس آن نقطه $A(5,3)$ باشد، طول ضلع مربع چند برابر $\sqrt{2}$ است؟

۱) ۱۰/۵ ۲) ۸/۴

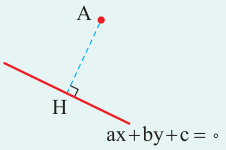
۳) ۶/۵ ۴) ۱۲/۵

Hint به کمک فاصلهٔ نقطه از خط، اندازهٔ قطر رو به دست بیار. حالا می‌تونی اندازهٔ ضلع هم به دست بیاری.

درس Box

فاصلهٔ نقطه از خط

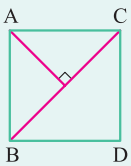
اگر بخواهیم فاصلهٔ نقطهٔ $A(x_0,y_0)$ از خط $ax+by+c=0$ را به دست آوریم از رابطهٔ زیر استفاده می‌کنیم:



$$AH=\frac{|ax_0+by_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

از کاربردهای فاصلهٔ نقطه از خط، محاسبهٔ اندازهٔ قطر مربع است.

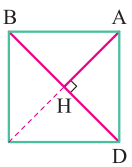
قطر مربع: فاصلهٔ رأس A تا قطر BC برابر نصف قطر است.



پاسخ خیلی تشریحی ✔

گام اول (محاسبهٔ اندازهٔ نصف قطر):

رأس $A(5,3)$ در معادلهٔ خط شامل قطر BD یعنی $3x+4y+15=0$ صدق نمی‌کند، بنابراین این رأس روی این قطر قرار ندارد و روبه‌روی آن است:



$$\left.\begin{matrix}A(5,3)\\3x+4y+15=0\end{matrix}\right\}\xrightarrow{\text{فاصلهٔ نقطه از خط}}AH=\frac{|3(5)+4(3)+15|}{\sqrt{3^2+4^2}}=\frac{42}{\sqrt{25}}=\frac{42}{5}$$

گام دوم (محاسبهٔ اندازهٔ قطر):

آن‌چه در گام اول به دست آوردیم برابر نصف قطر است، پس اندازهٔ قطر ۲ برابر آن است.

$$\text{قطر }(d)=2(\frac{42}{5})=\frac{84}{5}$$

گام سوم (محاسبهٔ طول ضلع):

$$\text{طول ضلع}=\frac{\text{قطر}}{\sqrt{2}}=\frac{84}{5\sqrt{2}}=\frac{84\sqrt{2}}{10}=8/4\sqrt{2}$$

سنجش کلاد
www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshClouds

۱۸ دو ضلع یک مربع منطبق بر دو خط $۲x-۲y=۳$ و $y=x+۱$ هستند. مساحت این مربع کدام است؟

۱) $\frac{۹}{۸}$ ۲) $\frac{۹}{۴}$

۳) $\frac{۲۵}{۸}$ ۴) $\frac{۲۵}{۴}$

مشاوره برای حل این سؤال باید درک خوبی از وضعیت دو خط نسبت به هم داشته باشید.

Hint ابتدا وضعیت دو خط را مشخص کنید و سپس به کمک نکات گفته‌شده، طول ضلع مربع را محاسبه کنید.

درس Box

فاصلهٔ دو خط موازی

برای پیداکردن فاصلهٔ دو خط موازی، از دو روش زیر می‌توانیم استفاده کنیم:

۱) یک نقطه به دلخواه از یکی از خطوط انتخاب کنیم و فاصلهٔ آن نقطه از خط دیگر را به دست آوریم.

۲) دو خط را به فرم‌های $ax+by+c=۰$ و $ax+by+c'=۰$ دربیاوریم (یعنی ضرایب x و y یکسان شود) و سپس از فرمول زیر استفاده کنیم:

$$d=\frac{|c-c'|}{\sqrt{a^۲+b^۲}}$$

نکته اگر معادله یک خط را به فرم کلی $ax+by+c=۰$ بنویسیم، شیب آن برابر می‌شود با:

$$m=\frac{-a}{b}$$

نکته اگر شیب دو خط برابر باشد، آن دو خط با هم موازی‌اند و بالعکس.

$$m_l=m_{l'} \Leftrightarrow l \parallel l'$$

پاسخ خیلی تشریحی **گام اول:** با توجه به نکتهٔ گفته‌شده، شیب خطوط داده‌شده برابر هستند با:

$$y=x+۱ \xrightarrow[ax+by+c=۰]{\text{تبدیل به فرم}} x-y+۱=۰ \Rightarrow \text{شیب}=-(\frac{-۱}{۱})=۱$$

$$۲x-۲y=۳ \xrightarrow[ax+by+c=۰]{\text{تبدیل به فرم}} ۲x-۲y-۳=۰ \Rightarrow \text{شیب}=\frac{-۲}{-۲}=۱$$

شیب این دو خط برابر است؛ پس با هم موازی‌اند.

گام دوم: طول ضلع مربع برابر است با فاصلهٔ این دو خط موازی. با دو روشی که در درس‌باکس گفتیم، آن را به دست می‌آوریم:

در معادلهٔ خط $x-y+۱=۰$، به دلخواه $x=۰$ را جای‌گذاری می‌کنیم تا مختصات یک نقطه بر روی آن پیدا شود و سپس فاصلهٔ آن نقطه از خط $۲x-۲y-۳=۰$ را که برابر با طول ضلع مربع است را به دست می‌آوریم:

$$x-y+۱=۰ \xrightarrow{x=۰} ۰-y+۱=۰ \Rightarrow y=۱$$

پس نقطهٔ $(۰,۱)$ روی خط $x-y+۱=۰$ قرار دارد. فاصلهٔ این نقطه از خط $۲x-۲y-۳=۰$ برابر می‌شود با:

فاصله $(۰,۱)$ از $۲x-۲y-۳=۰$: $\frac{\overbrace{|۲(۰)-۲(۱)-۳|}^{|-۵|}}{\sqrt{۲^۲+۲^۲}}=\frac{۵}{\sqrt{۸}}$

پس مساحت مربع برابر می‌شود با:

$$S_{\text{مربع}}=(\frac{۵}{\sqrt{۸}})^۲=\frac{۲۵}{۸}$$

یه جور دیگه ضرایب معادلهٔ خط $x-y+۱=۰$ را در ۲ ضرب می‌کنیم تا به معادلهٔ $۲x-۲y+۲=۰$ تبدیل شود و از فرمول فاصلهٔ دو خط موازی استفاده می‌کنیم تا ضلع مربع به دست آید:

$$\left.\begin{matrix}۲x-۲y+۲=۰\\ ۲x-۲y-۳=۰\end{matrix}\right\} \xrightarrow{\text{فاصلهٔ دو خط موازی}} \frac{|۲-(-۳)|}{\sqrt{۲^۲+۲^۲}}=\frac{۵}{\sqrt{۸}}$$

پس مساحت مربع برابر می‌شود با:

$$S_{\text{مربع}}=(\frac{۵}{\sqrt{۸}})^۲=\frac{۲۵}{۸}$$

سنجش کلاد
www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshClouds

۱۹ فاصلهٔ نقاط A و B روی نیمساز ناحیه‌های دوم و چهارم از نقطهٔ C(۱,−۸) برابر با ۵ است. عمودمنصف پاره‌خط AB محور xها را با کدام طول قطع می‌کند؟

خط $y=-x$

۱) ۸ ۲) ۹ ۳) ۱۰ ۴) ۱۱

Hint ابتدا به کمک فاصلهٔ دو نقطه، مختصات نقاط A و B رو به دست بیار. بعد معادلهٔ عمودمنصف AB رو به دست بیار و ... .

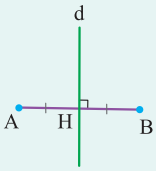
درس Box

فاصلهٔ دو نقطه: اگر بخواهیم فاصلهٔ دو نقطهٔ $A(x_1,y_1)$ و $B(x_2,y_2)$ را به دست آوریم از رابطهٔ زیر استفاده می‌کنیم:

$$AB=\sqrt{\underbrace{(x_2-x_1)^2}_{\text{مجذور تفاضل طول‌ها}}+\underbrace{(y_2-y_1)^2}_{\text{مجذور تفاضل عرض‌ها}}}$$

عمودمنصف پاره‌خط AB:

عمودمنصف پاره‌خط AB، خطی است که پاره‌خط AB را در نقطه‌ای مانند H نصف می‌کند و بر آن عمود است؛ پس اگر بخواهیم معادلهٔ عمودمنصف پاره‌خط AB (معادلهٔ خط d) را بنویسیم به صورت زیر عمل می‌کنیم.



به دست آوردن مختصات H: H وسط پاره‌خط AB است، پس داریم:

$$(x_H,y_H)=\left(\frac{x_A+x_B}{2},\frac{y_A+y_B}{2}\right)$$

به دست آوردن شیب خط d (عمودمنصف):

می‌دانیم d بر AB عمود است، پس شیب خط d قرینه و معکوس شیب خط شامل پاره‌خط AB است.

$$m_d=-\frac{1}{m_{AB}}$$

نوشتن معادلهٔ خط d:

حال با داشتن شیب (m_d) و یک نقطه از عمودمنصف (H) معادلهٔ آن برابر است با:

$$y-y_H=m_d(x-x_H)$$

پاسخ خیلی تشریحی ✔

گام اول (به دست آوردن مختصات نقاط A و B):

از آن‌جا که نقاط A و B روی نیمساز ناحیهٔ دوم و چهارم $(y=-x)$ قرار دارند، پس مختصات آن‌ها به صورت $(\alpha,-\alpha)$ است، که فاصلهٔ آن‌ها تا نقطهٔ $C(1,-8)$ برابر ۵ است؛ پس داریم:

$$\left.\begin{matrix}(\alpha,-\alpha)\\(1,-8)\end{matrix}\right\}\xrightarrow{\text{فاصلهٔ دو نقطه}=5}\sqrt{(\alpha-1)^2+(-\alpha-(-8))^2}=5$$

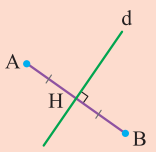
برای این‌که رادیکال از بین برود، طرفین را به توان ۲ می‌رسانیم:

$$(\alpha-1)^2+(-\alpha+8)^2=25\Rightarrow\alpha^2-2\alpha+1+\alpha^2-16\alpha+64=25$$

$$2\alpha^2-18\alpha+40=0\xrightarrow{\div 2}\alpha^2-9\alpha+20=0$$

$$(\alpha-4)(\alpha-5)=0\Rightarrow\begin{cases}\alpha_1=4,-\alpha_1=-4\Rightarrow A(4,-4)\\\alpha_2=5,-\alpha_2=-5\Rightarrow B(5,-5)\end{cases}$$

گام دوم (به دست آوردن نقطهٔ H):



عمودمنصف پاره‌خط AB آن را در نقطه‌ای مانند H نصف می‌کند، یعنی نقطهٔ H وسط پاره‌خط AB قرار دارد؛ بنابراین:

$$(x_H,y_H)=\left(\frac{x_A+x_B}{2},\frac{y_A+y_B}{2}\right)=\left(\frac{4+5}{2},\frac{-4-5}{2}\right)=\left(\frac{9}{2},-\frac{9}{2}\right)$$

سنجش کلاد
www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshClouds

گام سوم (به دست آوردن شیب عمودمنصف (خط d)):

از آن‌جا که عمودمنصف (خط d) بر پاره‌خط AB عمود است؛ پس:

$$m_d = -\frac{۱}{m_{AB}}$$

بنابراین لازم است ابتدا شیب پاره‌خط AB را به دست آوریم:

$$m_{AB} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} \xrightarrow[B(۵,-۵)]{A(۴,-۴)} \frac{-۵-(-۴)}{۵-۴} = \frac{-۱}{۱} = -۱$$

بنابراین شیب خط d برابر است با:

$$m_d = -\frac{۱}{m_{AB}} = -\frac{۱}{-۱} = ۱$$

گام چهارم (به دست آوردن معادلهٔ خط d (عمودمنصف)):

حال با داشتن شیب (گام سوم) یک نقطه از خط (گام دوم) می‌توانیم معادلهٔ خط d را بنویسیم:

$$y - y_H = m_d(x - x_H) \xrightarrow[(x_H,y_H)=(\frac{۹}{۲},-\frac{۹}{۲})]{m_d=۱} y-(-\frac{۹}{۲}) = ۱(x-\frac{۹}{۲})$$

$$y+\frac{۹}{۲} = x-\frac{۹}{۲} \Rightarrow y = x-\frac{۱۸}{۲} = x-۹$$

بنابراین معادلهٔ خط d به صورت $y = x-۹$ است.

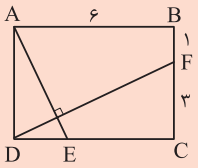
گام پنجم (به دست آوردن محل برخورد با محور xها):

برای به دست آوردن محل برخورد با محور xها باید معادلهٔ $y = x-۹ = ۰$ را حل کنیم.

$$x-۹ = ۰ \Rightarrow x = ۹$$

www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshClouds

۲۰ در مستطیل شکل زیر، اندازهٔ AE کدام است؟



۱) $۴\sqrt{۵}$

۲) $۳\sqrt{۵}$

۳) $\sqrt{۵}$

۴) $۲\sqrt{۵}$

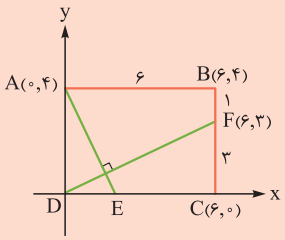
مشاوره در سؤالات این‌چنینی که فاصلهٔ نقاط مطرح است، می‌توان رئوس را به دستگاه مختصات انتقال داد تا بتوان از فرمول‌های هندسهٔ تحلیلی استفاده کرد.

Hint

مستطیل را بر روی دستگاه مختصات قرار دهید به‌گونه‌ای که D روی مبدأ قرار بگیرد، سپس معادلهٔ خط گذرنده از AE را بنویسید و با توجه به این‌که A روی محور طول‌ها قرار دارد مختصات E را پیدا کنید تا بتوانید فاصلهٔ A از E را به دست آورید.

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: مستطیل داده‌شده را اگر به گونه‌ای وارد دستگاه مختصات کنیم که رأس D روی مبدأ مختصات و دو ضلع مستطیل روی محورها قرار بگیرد، با توجه به اندازهٔ اضلاع مختصات رئوس دیگر به صورت مقابل خواهند شد.



گام دوم: برای به دست آوردن طول AE کافی است مختصات E را پیدا کنیم و سپس فاصلهٔ آن از A را محاسبه کنیم. برای این‌کار ابتدا باید معادلهٔ خط گذرنده از AE را پیدا کنیم، AE عمود بر DF است و شیب خط‌های گذرنده از آن‌ها قرینه و معکوس یکدیگر است؛ پس:

$$m_{DF}=\frac{y_F-y_D}{x_F-x_D}=\frac{۳-۰}{۶-۰}=\frac{۱}{۲}\xrightarrow[m_{DF}\text{ قرینه و معکوس }m_{AE}]{\text{DF و AE عمود بر هم}} m_{AE}=-۲$$

گام سوم: با توجه به این‌که مختصات A و شیب خط گذرنده از AE را داریم، معادلهٔ آن را می‌نویسیم:

$$\text{معادلهٔ خط AE: } y-y_A=m_{AE}(x-x_A)\Rightarrow y-۴=-۲(x-۰)\Rightarrow y-۴=-۲x$$

گام چهارم: نقطهٔ E روی محور طول‌ها قرار دارد، پس عرض آن صفر است، هم‌چنین E روی خط $y-۴=-۲x$ نیز قرار دارد، پس در این معادله، y را برابر صفر قرار می‌دهیم تا طول E پیدا شود:

$$y-۴=-۲x\xrightarrow{y=۰}۰-۴=-۲x\Rightarrow x=۲\Rightarrow E(۲,۰)$$

گام پنجم: حال که هم مختصات A و هم مختصات E را داریم، خواستهٔ سؤال را به دست می‌آوریم:

$$\left.\begin{matrix}A(۰,۴)\\E(۲,۰)\end{matrix}\right\}\Rightarrow AE=\sqrt{(۰-۲)^۲+(۴-۰)^۲}=\sqrt{۴+۱۶}=\sqrt{۲۰}=۲\sqrt{۵}$$

سنجش کلاد
www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshClouds

هندسه یازدهم

۲۱ از نقطهٔ **A** در خارج دایره‌ای، مماس **AT** به طول $۶\sqrt{۲}$ را بر آن دایره رسم نموده‌ایم (**T** روی دایره قرار دارد). هم‌چنین خطی از **A** گذرانده‌ایم که دایره را در نقاط **B** و **C** قطع کرده است. اگر **B** بین **A** و **C** و $BC = ۱۴$ باشد، طول **AB** کدام است؟

۱) ۴

۲) ۶

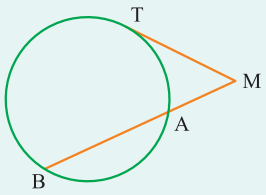
۳) ۸

۴) ۱۰

مشاوره این سؤال دقیقاً مشابه تمرین ۲ صفحهٔ ۲۳ کتاب درسی طراحی شده است. این سؤال به همین شکل و یا با تغییراتی مانند مشخص‌بودن مقدار AB و خواستن مقدار BC می‌تواند از سؤالات امتحان نهایی باشد.

Hint رابطهٔ طولی مماس و قاطع را برای حل این سؤال بنویسید.

درس Box اگر از نقطهٔ M خارج یک دایره، یک مماس و یک قاطع نسبت به دایره رسم شود، آن‌گاه طول مماس واسطهٔ هندسی بین اندازه‌های دو قطعهٔ قاطع است.

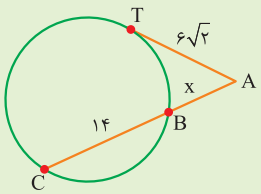


$$MT^۲ = MA \times MB$$

پاسخ خیلی تشریحی **گام اول:** فرض کنید $AB = x$ باشد. در این صورت طبق روابط طولی بین مماس و قاطع نسبت به دایره داریم:

$$AT^۲ = AB \times AC \Rightarrow (۶\sqrt{۲})^۲ = x(x+۱۴)$$

گام دوم: با حل معادلهٔ درجه‌دوم، مقدار x را پیدا می‌کنیم.



$$x(x+۱۴) = (۶\sqrt{۲})^۲ \Rightarrow x^۲ + ۱۴x - ۷۲ = ۰$$

$$\Rightarrow (x+۱۸)(x-۴) = ۰ \Rightarrow \begin{cases} x = -۱۸ & \text{غ ق} \\ x = ۴ & \text{ق} \end{cases}$$

سنجش کلاد
www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshClouds

۲۲ اگر طول مماس‌مشترک خارجی دو دایرهٔ $C(O,۳)$ و $C'(O',۸)$ برابر ۱۲ باشد، آن‌گاه طول مماس‌مشترک داخلی این دو دایره کدام است؟

۱) ۹
۲) $۴\sqrt{۳}$
۳) $\sqrt{۴۲}$
۴) $۲\sqrt{۶}$

مشاوره فرمول‌های طول مماس‌مشترک داخلی و خارجی دایره از مهم‌ترین فرمول‌های فصل دایره هستند و احتمال طرح مسئلهٔ عددی از آن‌ها در امتحان نهایی زیاد است.

Hint طول خط‌المرکزین دایره را به کمک طول مماس‌مشترک خارجی محاسبه کنید.

درس Box دو دایرهٔ $C(O,R)$ و $C'(O',R')$ را در نظر بگیرید. اگر طول خط‌المرکزین دو دایره برابر $OO'=d$ باشد، آن‌گاه داریم:

$$\text{طول مماس مشترک داخلی} = \sqrt{d^۲-(R+R')^۲}$$

$$\text{طول مماس مشترک خارجی} = \sqrt{d^۲-(R-R')^۲}$$

پاسخ خیلی تشریحی ✔

گام اول: ابتدا به کمک رابطهٔ طول مماس‌مشترک خارجی، طول خط‌المرکزین دو دایره را پیدا می‌کنیم:

$$\text{طول مماس مشترک خارجی} = \sqrt{d^۲-(R-R')^۲} \Rightarrow ۱۲=\sqrt{d^۲-(۳-۸)^۲}$$

$$\xrightarrow{\text{به توان ۲}} ۱۴۴=d^۲-۲۵ \Rightarrow d^۲=۱۶۹ \Rightarrow d=۱۳$$

گام دوم: با داشتن طول خط‌المرکزین و شعاع‌های دو دایره، طول مماس‌مشترک داخلی را محاسبه می‌کنیم:

$$\text{طول مماس مشترک داخلی} = \sqrt{d^۲-(R+R')^۲} = \sqrt{۱۳^۲-(۳+۸)^۲} = \sqrt{۱۶۹-۱۲۱} = \sqrt{۴۸} = ۴\sqrt{۳}$$

سنجش کلاد
www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshClouds

۲۳ طول مماس‌مشترک خارجی دو دایرهٔ مماس‌خارج، $\frac{\sqrt{۳}}{۳}$ برابر شعاع دایرهٔ بزرگ‌تر است. شعاع دایرهٔ بزرگ‌تر، چند برابر شعاع دایرهٔ کوچک‌تر است؟

۱) ۳ ۲) ۶

۳) ۹ ۴) ۱۲

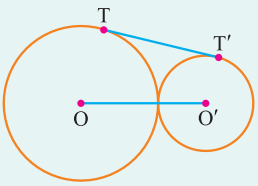
مشاوره این سؤال مشابه سؤالی از کنکور ریاضی خارج از کشور ۱۴۰۱ طراحی شده است و حل آن به کمک حالت خاص فرمول طول مماس‌مشترک خارجی برای دو دایرهٔ مماس‌خارج بسیار ساده است.

Hint

در دو دایرهٔ مماس‌خارج، طول خط‌المرکزین برابر مجموع طول‌های شعاع دو دایره است.

درس Box

اگر دو دایرهٔ $C(O,R)$ و $C'(O',R')$ مماس‌خارج باشند، آن‌گاه رابطهٔ $d = OO' = R + R'$ برقرار است. با جای‌گذاری مقدار d برحسب دو شعاع در فرمول طول مماس‌مشترک خارجی داریم:



$$TT' = \sqrt{d^۲ - (R - R')^۲} = \sqrt{(R + R')^۲ - (R - R')^۲} = \sqrt{۴RR'} = ۲\sqrt{RR'}$$

پاسخ خیلی تشریحی ✔

فرض کنید شعاع دایرهٔ بزرگ‌تر برابر R و شعاع دایرهٔ کوچک‌تر برابر R' باشد. طبق صورت سؤال دو دایره مماس‌خارج هستند، پس با استفاده از فرمول طول مماس‌مشترک خارجی دو دایرهٔ مماس‌خارج و فرض مسئله داریم:

$$TT' = ۲\sqrt{RR'} \Rightarrow \frac{\sqrt{۳}}{۳}R = ۲\sqrt{RR'} \xrightarrow{\text{به توان ۲}} \frac{۱}{۳}R^۲ = ۴RR' \Rightarrow R = ۱۲R'$$

سنجش کلاد
www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshClouds

۲۴ اگر دو دایرهٔ $C(O,2)$ و $C'(O,5)$ متقاطع باشند، کدام گزینه درست است؟

۱) $OO' > 7$ و OO' عمودمنصف وترمشترک دو دایره است.

۲) $3 < OO' < 7$ و وترمشترک دو دایره، عمودمنصف OO' است.

۳) $3 < OO' < 7$ و OO' عمودمنصف وترمشترک دو دایره است.

۴) $OO' < 3$ و وترمشترک دو دایره، عمودمنصف OO' است.

مشاوره بررسی حالت‌های دو دایره نسبت به هم با توجه به طول خط‌المرکزین و شعاع‌های دو دایره می‌تواند از سؤالات احتمالی امتحان نهایی باشد.

Hint شرط متقاطع‌بودن دو دایره را بر حسب اندازهٔ شعاع‌ها و طول خط‌المرکزین بنویسید.

درس Box

دو دایرهٔ $C(O,R)$ و $C'(O',R')$ با طول خط‌المرکزین $OO' = d$ یکی از حالت‌های زیر را نسبت به هم دارا هستند:

۱) متخارج: $d > R + R'$

۲) مماس‌برون: $d = R + R'$

۳) متقاطع: $|R - R'| < d < R + R'$

۴) مماس‌درون: $d = |R - R'|$

۵) متداخل: $d < |R - R'|$

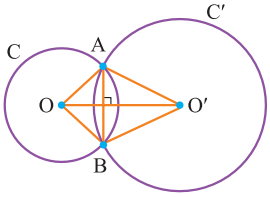
۶) هم‌مرکز: $d = 0$

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: دو دایرهٔ C و C' متقاطع‌اند، پس داریم:

$$|R - R'| < d < R + R' \Rightarrow |2 - 5| < OO' < 2 + 5 \Rightarrow 3 < OO' < 7$$

گام دوم: می‌دانیم پاره‌خط AB که نقاط تقاطع دو دایره را به هم وصل می‌کند، وترمشترک نامیده می‌شود. با توجه به تعریف دایره داریم:

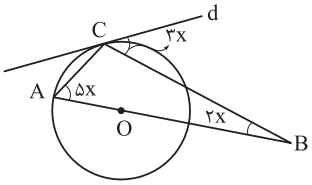


$$\left.\begin{array}{l} OA = OB = R \Rightarrow O \text{ روی عمودمنصف } AB \text{ است.} \\ O'A = O'B = R' \Rightarrow O' \text{ روی عمودمنصف } AB \text{ است.} \end{array}\right\} \Rightarrow OO' \text{ عمودمنصف } AB \text{ است.}$$

بنابراین OO' (خط‌المرکزین دو دایره)، عمودمنصف AB (وترمشترک دو دایره) است.

سنجش کلاد
www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshClouds

۲۵ در شکل زیر اگر **O** مرکز دایره و خط d مماس بر دایره باشد، اندازهٔ زاویهٔ $\hat{ACB}$ چند درجه خواهد بود؟



۱) ۱۰۵°

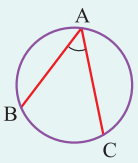
۲) ۱۱۰°

۳) ۱۱۵°

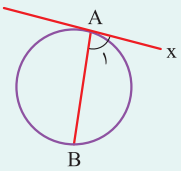
۴) ۱۲۰°

Hint مقادیر تمام کمان‌های نیم‌دایرهٔ بالایی را بر حسب x بنویسید.

درس Box ۱) اندازهٔ زوایای محاطی و ظلی در دایره نصف اندازهٔ کمان مقابل آن‌ها است. یعنی:

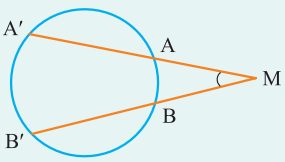


$$\hat{A} = \frac{\overset{\frown}{BC}}{۲}$$



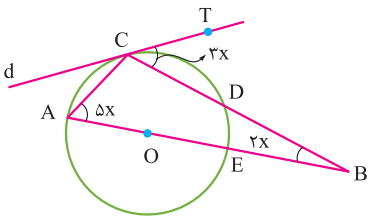
$$\hat{A}_۱ = \frac{\overset{\frown}{AB}}{۲}$$

۲) اگر امتداد وترهای AA' و BB' یکدیگر را در نقطهٔ M واقع در بیرون دایره قطع کنند، آن‌گاه داریم:



$$\hat{M} = \frac{\overset{\frown}{A'B'} - \overset{\frown}{AB}}{۲}$$

پاسخ خیلی تشریحی ✔ **گام اول:** زوایای $\hat{A}$ و $B\hat{C}T$ به ترتیب زوایای محاطی و ظلی هستند، پس داریم:



$$\left.\begin{array}{l} (\text{ظلی})\ B\hat{C}T = \frac{\overset{\frown}{CD}}{۲} \Rightarrow \frac{\overset{\frown}{CD}}{۲} = ۳x \Rightarrow \overset{\frown}{CD} = ۶x \\ (\text{محاطی})\ \hat{A} = \frac{\overset{\frown}{CE}}{۲} \Rightarrow \frac{\overset{\frown}{CE}}{۲} = ۵x \Rightarrow \overset{\frown}{CE} = ۱۰x \end{array}\right\} \Rightarrow \overset{\frown}{DE} = ۱۰x - ۶x = ۴x$$

گام دوم: زاویهٔ B، زاویهٔ بین امتداد دو وتر AE و CD است؛ بنابراین داریم:

$$\hat{B} = \frac{\overset{\frown}{AC} - \overset{\frown}{DE}}{۲} \Rightarrow ۲x = \frac{\overset{\frown}{AC} - ۴x}{۲} \Rightarrow \overset{\frown}{AC} = ۸x$$

گام سوم: AE قطر دایره است، پس داریم:

$$\overset{\frown}{AC} + \overset{\frown}{CD} + \overset{\frown}{DE} = ۱۸۰^\circ \Rightarrow ۸x + ۶x + ۴x = ۱۸۰^\circ \Rightarrow ۱۸x = ۱۸۰^\circ \Rightarrow x = ۱۰^\circ$$

$$\overset{\Delta}{ABC}: A\hat{C}B = ۱۸۰^\circ - (۵x + ۲x) = ۱۸۰^\circ - ۷۰^\circ = ۱۱۰^\circ$$

سنجش کلاد
www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshClouds

۲۶ مماس‌های رسم‌شده بر دو دایرهٔ متقاطع، در یکی از نقاط تقاطع دو دایره بر هم عمودند. اگر شعاع دایره‌ها به ترتیب ۳ و ۶ باشد، طول خط‌المرکزین دو دایره کدام است؟

خط مماس بر هر دایره در نقطهٔ تقاطع از مرکز دایرهٔ دیگر می‌گذرد.

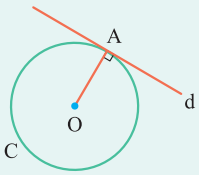
۱) $۲\sqrt{۶}$ ۲) $۳\sqrt{۳}$ ۳) ۳ ۴) $۳\sqrt{۵}$

مشاوره این سؤال مشابه سؤالی از کنکور ریاضی داخل تیر ۱۴۰۳ طراحی شده است.

Hint به ارتباط شعاع‌ها و خط مماس بر هر دایره در نقطهٔ تقاطع دو دایره دقت کنید.

درس Box

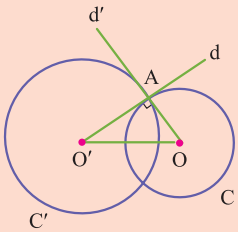
۱) اگر خط d در نقطهٔ A بر دایرهٔ C مماس باشد، آن‌گاه خط d بر شعاع OA عمود است.



۲) اگر خط d در نقطهٔ A بر دایرهٔ C مماس باشد، خط عمود بر d در نقطهٔ A، از مرکز دایرهٔ C عبور می‌کند.

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: مطابق شکل فرض کنید خطوط d و d' در نقطهٔ A به ترتیب بر دایره‌های C و C' مماس باشند. این دو خط بر یکدیگر عمودند، پس خط d از O' (مرکز دایرهٔ C') و خط d' از O (مرکز دایرهٔ C) عبور می‌کند.



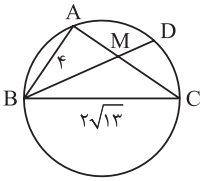
گام دوم: با توجه به توضیحات گام اول، شعاع‌های OA و $O'A$ در نقطهٔ A بر هم عمودند، در نتیجه مثلث OAO' قائم‌الزاویه است و طبق قضیهٔ فیثاغورس در این مثلث داریم:

$$OO'^{۲} = OA^{۲} + O'A^{۲} = ۳^{۲} + ۶^{۲} = ۴۵ \Rightarrow OO' = \sqrt{۴۵} = ۳\sqrt{۵}$$

سنجش کلاد
www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshClouds

۲۷ در شکل زیر، **BC** قطر دایره و **M** وسط ضلع **AC** است. اندازهٔ پاره‌خط **MD** کدام است؟

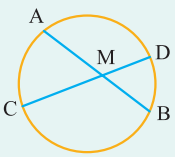
مثلث **ABC** قائم‌الزاویه است



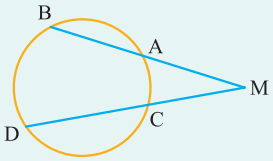
۱) ۱/۵ ۲) ۱/۶ ۳) ۱/۸ ۴) ۲

Hint به یاد داشته باشید که اندازهٔ زاویهٔ محاطی روبه‌رو به قطر دایره برابر ۹۰° است.

درس Box روابط طولی برای وترهای متقاطع درون یا بیرون دایره به صورت زیر نوشته می‌شوند:

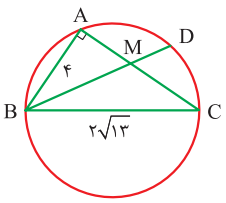


$MA \times MB = MC \times MD$



$MA \times MB = MC \times MD$

پاسخ خیلی تشریحی ✔ **گام اول:** چون زاویهٔ A محاطی و روبه‌رو به قطر BC است، پس قائمه می‌باشد $(\hat{A} = ۹۰^\circ)$. به کمک قضیهٔ فیثاغورس، طول ضلع AC را در مثلث ABC پیدا می‌کنیم.



$$AC^۲ = BC^۲ - AB^۲ = (۲\sqrt{۱۳})^۲ - ۴^۲ = ۵۲ - ۱۶ = ۳۶ \Rightarrow AC = ۶$$

گام دوم: طول میانهٔ BM در مثلث ABC را به کمک قضیهٔ فیثاغورس در مثلث ABM به دست می‌آوریم.

$$AM = \frac{AC}{۲} = ۳$$

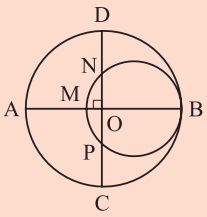
$$BM^۲ = AB^۲ + AM^۲ = ۴^۲ + ۳^۲ = ۲۵ \Rightarrow BM = ۵$$

گام سوم: به کمک روابط طولی وترهای متقاطع درون دایره داریم:

$$AM \times MC = BM \times MD \Rightarrow ۳ \times ۳ = ۵MD \Rightarrow MD = \frac{۹}{۵} = ۱/۸$$

سنجش کلاد
www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshClouds

۲۸ در شکل زیر، دو دایره بر هم مماس و دو قطر **AB** و **CD** از دایرهٔ بزرگ‌تر بر هم عمود هستند. اگر شعاع دایرهٔ بزرگ‌تر برابر ۷ و $ND = ۲$ باشد، شعاع دایرهٔ کوچک‌تر کدام است؟

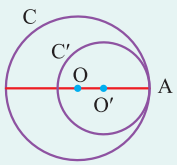


۱) ۵ ۲) $\frac{۳۶}{۷}$ ۳) $\frac{۳۷}{۷}$ ۴) $\frac{۳۸}{۷}$

مشاوره این سؤال مشابه تمرین ۳ صفحهٔ ۲۳ کتاب درسی طراحی شده است و مشابه آن در کنکور ریاضی خارج از کشور ۱۴۰۰ نیز دیده می‌شود.

Hint روابط طولی وترهای متقاطع را برای دایرهٔ کوچک‌تر بنویسید.

درس Box اگر دو دایرهٔ $C(O,R)$ و $C'(O',R')$ مماس‌داخل باشند، آن‌گاه رابطهٔ $OO' = |R - R'|$ برقرار است. هم‌چنین نقطهٔ تماس دو دایره روی امتداد خط‌المرکزین آن‌ها واقع است، یعنی در شکل زیر، نقاط A، O' و O در یک امتداد قرار دارند.



پاسخ خیلی تشریحی **گام اول:** می‌دانیم قطر عمود بر یک وتر، آن وتر و کمان‌های نظیر آن وتر را نصف می‌کند، پس مطابق شکل داریم:

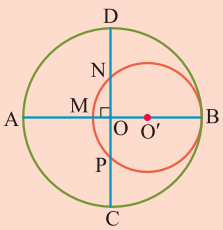
$$OP = ON = OD - ND = ۷ - ۲ = ۵$$

گام دوم: فرض کنید $AM = x$ باشد، در این صورت طبق روابط طولی در دایرهٔ کوچک‌تر داریم:

$$OB \times OM = ON \times OP \Rightarrow ۷(۷ - x) = ۵ \times ۵ \Rightarrow ۴۹ - ۷x = ۲۵$$

$$\Rightarrow ۷x = ۲۴ \Rightarrow x = \frac{۲۴}{۷}$$

گام سوم: دو دایره مماس‌داخل‌اند، پس O' (مرکز دایرهٔ کوچک‌تر) روی قطر AB قرار دارد و در نتیجه داریم:

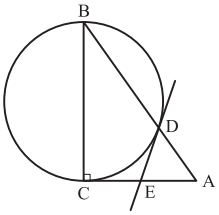


$$BM = AB - AM \Rightarrow ۲R' = ۲ \times ۷ - \frac{۲۴}{۷} \Rightarrow R' = ۷ - \frac{۱۲}{۷} = \frac{۳۷}{۷}$$

سنجش کلاد
www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshClouds

۲۹ در شکل زیر، ضلع BC از مثلث قائم‌الزاویهٔ $ABC(\hat{C}=۹۰^\circ)$ قطر دایره است. خط مماس بر دایره در نقطهٔ D، ضلع AC را در نقطهٔ E قطع می‌کند. کدام‌یک از گزینه‌های زیر ممکن است نادرست باشد؟

AC مماس بر دایره است



۱) $AE = CE$

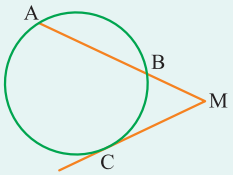
۲) DE نیمساز زاویهٔ $A\hat{D}C$ است.

۳) $C\hat{E}D = ۲\hat{A}$

۴) $\hat{A} = B\hat{C}D$

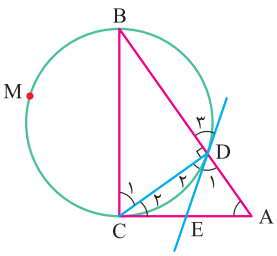
Hint از C به D وصل کنید و سعی کنید اندازهٔ زاویه‌های موجود در گزینه‌ها را بر حسب طول کمان‌ها به دست آورید.

درس Box اگر امتداد یک وتر و یک مماس از دایره یکدیگر را در نقطهٔ M قطع کنند، آن‌گاه داریم:



$$\hat{M} = \frac{\overset{\frown}{AC} - \overset{\frown}{BC}}{۲}$$

پاسخ خیلی تشریحی **گام اول:** زاویهٔ A، زاویهٔ بین مماس و امتداد یک وتر از دایره و زاویهٔ $B\hat{C}D$ یک زاویهٔ محاطی است. پس داریم:



$$\left.\begin{array}{l}\hat{A} = \dfrac{\overset{\frown}{BMC} - \overset{\frown}{CD}}{۲} = \dfrac{\overset{\frown}{BDC} - \overset{\frown}{CD}}{۲} = \dfrac{\overset{\frown}{BD}}{۲} \\ (\text{محاطی})\ B\hat{C}D = \dfrac{\overset{\frown}{BD}}{۲}\end{array}\right\} \Rightarrow \hat{A} = B\hat{C}D \quad (\text{گزینهٔ ۴})$$

گام دوم: می‌دانیم اندازهٔ هر زاویهٔ ظلی نصف اندازهٔ کمان مقابل آن زاویه است، پس داریم:

$$\left.\begin{array}{l}(\text{ظلی})\ \hat{D}_۲ = \dfrac{\overset{\frown}{CD}}{۲} \\ (\text{ظلی})\ \hat{C}_۲ = \dfrac{\overset{\frown}{CD}}{۲}\end{array}\right\} \Rightarrow \hat{D}_۲ = \hat{C}_۲ \xrightarrow{\Delta CDE} CE = DE \quad (*)$$

طبق گام اول $\hat{A} = \dfrac{\overset{\frown}{BD}}{۲}$، از طرفی $\hat{D}_۱$ و $\hat{D}_۳$ زوایای متقابل به رأس هستند و با هم برابرند؛ بنابراین داریم:

$$\left.\begin{array}{l}\hat{A} = \dfrac{\overset{\frown}{BD}}{۲} \\ \hat{D}_۱ = \hat{D}_۳ = \dfrac{\overset{\frown}{BD}}{۲}\end{array}\right\} \Rightarrow \hat{A} = \hat{D}_۱ \Rightarrow AE = DE \quad (**)$$

$$(*)\ ,\ (**) \Rightarrow AE = CE \quad (\text{گزینهٔ ۱})$$

گام سوم: زاویهٔ $C\hat{E}D$ زاویهٔ خارجی برای مثلث ADE است؛ بنابراین داریم:

$$C\hat{E}D = \hat{D}_۱ + \hat{A} \xrightarrow{\hat{A}=\hat{D}_۱} C\hat{E}D = ۲\hat{A} \quad (\text{گزینهٔ ۳})$$

سنجش کلاد
www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshClouds

۳۰ از نقطهٔ **A** خارج یک دایره، دو مماس **AB** و **AC** را بر آن دایره رسم می‌کنیم. سپس از نقطهٔ **C** خطی موازی **AB** رسم می‌کنیم که دایره را در نقطهٔ **D** قطع کند. اگر **BC = ۱۲** و **CD = ۶** باشد، طول این دو مماس کدام است؟

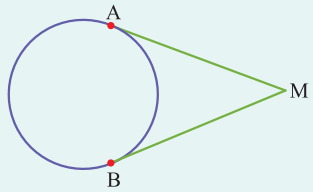
۱) ۲۴ ۲) ۲۷ ۳) ۱۸ ۴) ۲۰

مشاوره روش رسم مماس بر دایره یکی از مهم‌ترین سؤالات رسم به کمک خط‌کش و پرگار در فصل دایره و یکی از سؤالات مورد توجه امتحان نهایی خواهد بود.

Hint نشان دهید مثلث‌های ABC و BCD متشابه‌اند.

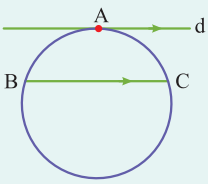
درس Box

۱) طول مماس‌های رسم‌شده از یک نقطهٔ خارج دایره بر آن دایره برابر یکدیگرند، یعنی در شکل زیر داریم:



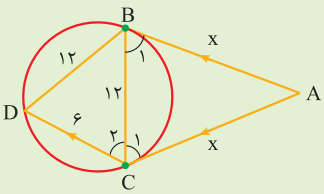
$MA = MB$

۲) اگر خط d با وتر BC موازی و در نقطهٔ A بر دایره مماس باشد، آن‌گاه داریم:



$\overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{AC}$

پاسخ خیلی تشریحی **گام اول:** شکل مناسبی برای سؤال رسم می‌کنیم. خط AB بر دایره مماس بوده و با وتر CD موازی است؛ بنابراین $\overset{\frown}{BC} = \overset{\frown}{BD}$ و در نتیجه وترهای BC و BD نیز برابر یکدیگرند.



$\overset{\frown}{BC} = \overset{\frown}{BD} \Rightarrow BC = BD = ۱۲$

گام دوم: با توجه به نتیجهٔ گام اول، هر دو مثلث ABC و BCD متساوی‌الساقین هستند. از طرفی زوایای $C_۱$ و D به ترتیب زوایای ظلی و محاطی روبه‌رو به کمان $\overset{\frown}{BC}$ هستند، پس با هم برابرند، پس زوایای نظیر ساق‌ها در دو مثلث متساوی‌الساقین با هم برابرند و در نتیجه دو مثلث به حالت تساوی دو زاویه متشابه‌اند.

گام سوم: نسبت اضلاع متناظر را برای دو مثلث متشابه ABC و BCD می‌نویسیم:

$$\frac{AB}{BC} = \frac{BC}{CD} \Rightarrow \frac{x}{۱۲} = \frac{۱۲}{۶} \Rightarrow x = ۲۴$$

سنجش کلاد
www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshClouds

آمار و احتمال

۳۱ در جدول ارزش گزاره‌های زیر، **A**، **B** و **C** به ترتیب کدام‌اند؟

p	q	$(p \wedge q) \Leftrightarrow (p \Rightarrow q)$
د	د	د
د	ن	**A**
ن	د	**B**
ن	ن	**C**

۱) د ـ د ـ ن

۲) ن ـ ن ـ ن

۳) د ـ ن ـ ن

۴) ن ـ ن ـ د

درس Box

جبر گزاره‌ها

۱) نقیض یک گزاره: نقیض گزارهٔ p را با $\sim p$ نمایش می‌دهیم و آن را «چنین نیست که p» می‌خوانیم.

نکته

- اگر ارزش p درست باشد، ارزش $\sim p$ نادرست است و برعکس:

p	$\sim p$
د	ن
ن	د

- ارزش نقیضِ نقیض یک گزاره، با ارزش خود گزاره یکسان است: $\sim (\sim p) \equiv p$

۲) ترکیب‌های فصلی و عطفی دو گزاره: اگر دو گزاره را با حرف ربط «یا» به هم مرتبط کنیم، ترکیب فصلی دو گزاره به وجود می‌آید که آن را می‌خوانیم «p یا q» و می‌نویسیم « $p \vee q$ ».

اگر دو گزاره را با حرف ربط «و» به هم مرتبط کنیم، ترکیب عطفی دو گزاره به وجود می‌آید که آن را می‌خوانیم «p و q» و می‌نویسیم « $p \wedge q$ ».

نکته

ارزش $p \vee q$ زمانی درست است که ارزش دست کم یکی از دو گزارهٔ p یا q درست باشد و ارزش $p \wedge q$ زمانی درست است که ارزش هر دو گزارهٔ p و q درست باشد:

p	q	$p \wedge q$	$p \vee q$
د	د	د	د
د	ن	ن	د
ن	د	ن	د
ن	ن	ن	ن

۳) ترکیب شرطی دو گزاره: به گزارهٔ $p \Rightarrow q$ ترکیب شرطی دو گزاره می‌گوییم و آن را به صورت «اگر p آن‌گاه q» می‌خوانیم. ارزش یک گزارهٔ شرطی تنها در حالتی نادرست است که p درست و q نادرست باشد:

p	q	$p \Rightarrow q$
د	د	د
د	ن	ن
ن	د	د
ن	ن	د

نکته

- در ترکیب شرطی $p \Rightarrow q$، به p «مقدم» و به q «تالی» یا «حکم» می‌گوییم.
- گزارهٔ شرطی $p \Rightarrow q$ را به دو صورت مقابل نیز می‌خوانیم:

q شرط لازم است برای p

p شرط کافی است برای q

- اگر $p \Rightarrow q$ یک گزارهٔ شرطی باشد:

به $q \Rightarrow p$ عکس گزارهٔ شرطی می‌گوییم؛

به $\sim q \Rightarrow \sim p$ عکس نقیض گزارهٔ شرطی می‌گوییم که با $p \Rightarrow q$ هم‌ارزش است، یعنی: $p \Rightarrow q \equiv \sim q \Rightarrow \sim p$؛

و به $\sim (p \Rightarrow q)$ نقیض عکس گزارهٔ شرطی می‌گوییم.

- انتفای مقدم: در گزارهٔ شرطی $p \Rightarrow q$، اگر p یا «مقدم» نادرست باشد، **گزاره به انتفای مقدم درست است**:

$p \equiv F \xrightarrow{\text{در این صورت}} p \Rightarrow q \equiv T$

- درست بودن تالی: در گزارهٔ شرطی $p \Rightarrow q$، اگر q یا «تالی» درست باشد، $p \Rightarrow q$ همواره درست است:

$q \equiv T \xrightarrow{\text{در این صورت}} p \Rightarrow q \equiv T$

سنجش کلاد
www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshClouds

۴) ترکیب دوشرطی: اگر دو گزارهٔ شرطی $p \Rightarrow q$ و $q \Rightarrow p$ را با ترکیب عطفی « $\wedge$ » به هم مرتبط کنیم، ترکیب دوشرطی $p \Leftrightarrow q$ به دست می‌آید که آن را به صورت «p اگر و تنها اگر q» یا «p شرط لازم و کافی برای q است» می‌خوانیم.

نکته

- ارزش $p \Leftrightarrow q$ فقط در حالتی درست است که p و q هم‌ارزش باشند:

p	q	$p \Leftrightarrow q$
د	د	د
د	ن	ن
ن	د	ن
ن	ن	د

- نقیض $p \Leftrightarrow q$ را به یکی از صورت‌های زیر می‌توان نوشت:

$\sim (p \Leftrightarrow q) \equiv p \Leftrightarrow \sim q$ $\quad$ $\sim (p \Leftrightarrow q) \equiv \sim p \Leftrightarrow q$

- ترکیب دوشرطی یک گزاره با خودش همواره درست و ترکیب دوشرطی یک گزاره با نقیضش همواره نادرست است:

$p \Leftrightarrow \sim p \equiv F$ $\quad$ $p \Leftrightarrow p \equiv T$

هم‌ارزی‌های منطقی:

۱) جابه‌جایی	$p \wedge q \equiv q \wedge p$	$p \vee q \equiv q \vee p$
۲) شرکت‌پذیری	$(p \wedge q) \wedge r \equiv p \wedge (q \wedge r)$	$(p \vee q) \vee r \equiv p \vee (q \vee r)$
۳) توزیع‌پذیری	$p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$	$p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$
۴) دمورگان	$\sim (p \vee q) \equiv \sim p \wedge \sim q$	$\sim (p \wedge q) \equiv \sim p \vee \sim q$
۵) جذب	$p \vee (p \wedge q) \equiv p$	$p \wedge (p \vee q) \equiv p$

$p \Rightarrow q \equiv \sim p \vee q$

$p \Leftrightarrow q \equiv (p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p) \equiv (\sim p \wedge \sim q) \vee (p \wedge q)$

پاسخ خیلی تشریحی ✔

گام اول: جدول ارزش گزاره‌ها را رسم می‌کنیم:

p	q	$p \wedge q$	$p \Rightarrow q$	$(p \wedge q) \Leftrightarrow (p \Rightarrow q)$
د	د	د	د	د
د	ن	ن	ن	د
ن	د	ن	د	ن
ن	ن	ن	د	ن

گام دوم: پس A، B و C به ترتیب د ـ ن ـ ن هستند.

سنجش کلاد
www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshClouds

۳۲ در خصوص گزارهٔ منطقی $((p \Rightarrow q) \vee r) \wedge (p \Leftrightarrow q)$ کدام مورد صحیح است؟

۱) ارزش این گزاره فقط زمانی نادرست است که r درست باشد.

۲) ارزش این گزاره فقط زمانی نادرست است که r نادرست باشد.

۳) ارزش این گزاره فقط زمانی نادرست است که p و q هم‌ارزش باشند.

۴) ارزش این گزاره فقط زمانی نادرست است که p و q هم‌ارزش نباشند.

پاسخ خیلی تشریحی جدول ارزش گزاره‌ها را رسم می‌کنیم:

p	q	r	$p \Rightarrow q$	$(p \Rightarrow q) \vee r$	$p \Leftrightarrow q$	$((p \Rightarrow q) \vee r) \wedge (p \Leftrightarrow q)$
T	T	T	T	T	T	T
T	T	F	T	T	T	T
T	F	T	F	T	F	F
T	F	F	F	F	F	F
F	T	T	T	T	F	F
F	T	F	T	T	F	F
F	F	T	T	T	T	T
F	F	F	T	T	T	T

گام دوم: با توجه به جدول رسم‌شده واضح است که دو گزارهٔ $((p \Rightarrow q) \vee r) \wedge (p \Leftrightarrow q)$ و $p \Leftrightarrow q$ هم‌ارزش‌اند.

گام سوم: می‌دانیم ارزش گزارهٔ $p \Leftrightarrow q$ فقط زمانی نادرست است که p و q ارزش یکسانی نداشته باشند؛ پس ارزش گزارهٔ $((p \Rightarrow q) \vee r) \wedge (p \Leftrightarrow q)$ هم، زمانی نادرست است که p و q هم‌ارزش نباشند.

یه جور دیگه

گام اول: با استفاده از هم‌ارزی‌های منطقی، گزاره را ساده می‌کنیم:

$$((p \Rightarrow q) \vee r) \wedge (p \Leftrightarrow q) \equiv ((p \Rightarrow q) \vee r) \wedge ((p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)) \equiv (((p \Rightarrow q) \vee r) \wedge (p \Rightarrow q)) \wedge (q \Rightarrow p)$$

گام دوم: با استفاده از قانون جذب، $\underbrace{\overbrace{((p \Rightarrow q)}^{s} \vee r) \wedge \overbrace{(p \Rightarrow q)}^{s}}_{(s \vee r) \wedge s \equiv s \equiv p \Rightarrow q}$ هم‌ارز $p \Rightarrow q$ است؛ پس:

$$(((p \Rightarrow q) \vee r) \wedge (p \Rightarrow q)) \wedge (q \Rightarrow p) \equiv (p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p) \equiv p \Leftrightarrow q$$

مابقی راه حل مانند راه قبل است.

www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshClouds

۳۳ ارزش گزارهٔ سوری «$\forall n \in \mathbb{N} ; ۳^{n+۱} > (n+۱)^۳$» ..... بوده و نقیض این گزاره به صورت ..... است.

۱) درست ـ $\forall n \in \mathbb{N}; ۳^{n+۱} < (n+۱)^۳$

۲) نادرست ـ $\forall n \in \mathbb{N}; ۳^{n+۱} < (n+۱)^۳$

۳) درست ـ $\exists n \in \mathbb{N}; ۳^{n+۱} \leq (n+۱)^۳$

۴) نادرست ـ $\exists n \in \mathbb{N}; ۳^{n+۱} \leq (n+۱)^۳$

درس Box

سورها

برای بیان عبارت‌ها با استفاده از نمادهای ریاضی به جای «به ازای هر»، یا «به ازای جمیع مقادیر» از نماد $\forall$ و به جای «وجود دارد»، یا «به ازای بعضی مقادیر» از نماد $\exists$ استفاده می‌کنیم. نماد $\forall$ سور عمومی و نماد $\exists$ سور وجودی نامیده می‌شود.

نکته

- ارزش گزاره‌های سوری با سور عمومی (یا همان $\forall$)، زمانی درست است که ارزش گزاره‌نما به ازای تمام اعضای دامنهٔ متغیر درست باشد.
- ارزش گزاره‌های سوری با سور وجودی (یا همان $\exists$)، زمانی درست است که ارزش گزاره‌نما به ازای حداقل یکی از اعضای دامنهٔ متغیر درست باشد.
- برای نقیض‌کردن یک گزارهٔ سوری، باید:

۱) سور را برعکس کنیم! یعنی اگر سوری وجودی داشتیم، به جای آن سور عمومی قرار دهیم و اگر سور عمومی داشتیم به جای آن سور وجودی قرار دهیم.

۲) گزاره‌نما را نقیض کنیم.

به عبارت دیگر:

$$\sim (\forall x \in A; P(x)) \equiv \exists x \in A; \sim P(x)$$

$$\sim (\exists x \in A; P(x)) \equiv \forall x \in A; \sim P(x)$$

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: ارزش این گزاره نادرست است، چون به ازای $n = ۲$ داریم:

$$۳^{n+۱} = ۳^۳ = ۲۷$$

$$(n+۱)^۳ = ۳^۳ = ۲۷$$

پس نامساوی $۳^{n+۱} > (n+۱)^۳$ برقرار نیست!

گام دوم: نقیض این گزاره به صورت زیر است:

$$\sim (\forall n \in \mathbb{N}; ۳^{n+۱} > (n+۱)^۳) \equiv \exists n \in \mathbb{N}; ۳^{n+۱} \leq (n+۱)^۳$$

سنجش کلاد
www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshClouds

۳۴ از میان گزاره‌های سوری زیر، کدام دو گزاره ارزش نادرست دارند؟

الف) $\exists x \in \mathbb{N}; 17x^2 - 5x - 12 = 0$

ب) $\forall x \in P; 2^x - 1 \in P$

پ) $\forall x \in \mathbb{R}; \frac{x^3 - 1}{x - 1} = x^2 + x + 1$

ت) $\exists x \in (-\infty, 0]; |x^2 - 1| \leq 0$

۱) الف ـ ب ۲) الف ـ ت

۳) ب ـ پ ۴) پ ـ ت

درس Box

برای پیداکردن ریشه‌های معادلهٔ درجه‌دوم $ax^2 + bx + c = 0$، دو حالت خاص داریم:

الف) اگر $a + b + c = 0$، ریشه‌ها $x = 1$ و $x = \frac{c}{a}$ اند.

ب) اگر $a + c = b$، ریشه‌ها $x = -1$ و $x = -\frac{c}{a}$ اند.

پاسخ خیلی تشریحی گزاره‌ها را بررسی می‌کنیم:

الف)

$$17x^2 - 5x - 12 = 0 \xrightarrow{\text{مجموع ضرایب صفر}} \begin{cases} x = 1 \\ x = \frac{c}{a} = -\frac{12}{17} \end{cases}$$

این معادله ریشهٔ طبیعی $x = 1$ دارد؛ پس ارزش گزارهٔ $\exists x \in \mathbb{N}; 17x^2 - 5x - 12 = 0$ درست است.

ب)

$x = 11$ عددی اول است، اما $2^x - 1 = 2^{11} - 1 = 2048 - 1 = 2047 = 89 \times 23$؛ پس $2^{11} - 1$ اول نیست و بنابراین ارزش گزارهٔ $\forall x \in p; 2^x - 1 \in p$ نادرست است.

گول نخوری پ) حواستون باشه کسر $\frac{x^3 - 1}{x - 1}$ به ازای $x = 1$ تعریف نشده هست؛ پس ارزش گزارهٔ $\forall x \in \mathbb{R}; \frac{x^3 - 1}{x - 1} = x^2 + x + 1$ نادرسته!

ت) اول از همه دقت کنید که نامساوی $|x^2 - 1| \leq 0$، فقط زمانی برقرار می‌شود که $|x^2 - 1| = 0$ یا همان $x^2 - 1 = 0$ باشد. این اتفاق به ازای $x = -1$ و $x = +1$ رخ می‌دهد که $-1 \in (-\infty, 0]$؛ پس ارزش گزارهٔ $\exists x \in (-\infty, 0]; |x^2 - 1| \leq 0$ هم درست است.

سنجش کلاد
www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshClouds

۳۵ اگر $n \in \mathbb{N}$ و $A_n = \{m \in \mathbb{Z} \mid |m| \le 2n, 2^m < 8n\}$، آن‌گاه مجموعهٔ $(A_1 \cup A_4) - A_2$ چند عضو دارد؟

۱) ۳ ۲) ۵ ۳) ۷ ۴) ۸

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: با جای‌گذاری $n = 1$، $n = 2$ و $n = 4$ در $A_n = \{m \in \mathbb{Z} \mid |m| \le 2n, 2^m < 8n\}$ داریم:

$$A_1 = \{m \in \mathbb{Z} \mid \underbrace{|m| \le 2}_{-2 \le m \le 2}, \underbrace{2^m < \overset{2^3}{8}}_{m<3}\} = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$$

$$A_2 = \{m \in \mathbb{Z} \mid \underbrace{|m| \le 4}_{-4 \le m \le 4}, \underbrace{2^m < \overset{2^4}{16}}_{m<4}\} = \{-4, -3, -2, \ldots, 3\}$$

$$A_4 = \{m \in \mathbb{Z} \mid \underbrace{|m| \le 8}_{-8 \le m \le 8}, \underbrace{2^m < \overset{2^5}{32}}_{m<5}\} = \{-8, -7, -6, \ldots, 4\}$$

گام دوم: پس:

$$A_1 \cup A_4 = \{-2, -1, 0, 1, 2\} \cup \{-8, -7, -6, \ldots, 4\} = \{-8, -7, -6, \ldots, 4\}$$

$$\Rightarrow (A_1 \cup A_4) - A_2 = \{-8, -7, -6, \ldots, 4\} - \{-4, -3, -2, \ldots, 3\} = \{-8, -7, -6, -5, 4\}$$

بنابراین مجموعهٔ حاصل ۵ عضوی است.

سنجش کلاد
www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshClouds

۳۶ اگر $A-\{۲,۳,۴,۵\}=\varnothing$ و $A\cap\{۲,۵\}=\{۲\}$، چند مجموعه برای A وجود دارد؟

۱) ۴ ۲) ۵ ۳) ۶ ۴) ۸

درس Box

تعداد زیرمجموعه‌های یک مجموعهٔ nعضوی، ۲^n تا است، زیرا هر کدام از اعضا دو حالت دارند، در زیرمجموعه باشند یا نباشند:

$\{۱,۲,۳,\ldots,n\}$ (۲ حالت، ۲ حالت، ۲ حالت) $\xrightarrow{\text{تعداد زیرمجموعه‌ها}}$ $\underbrace{۲\times۲\times۲\times\ldots\times۲}_{n\text{ بار}}=۲^n$

نکته اگر $A-B=\varnothing$، در این صورت $A\subseteq B$.

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: $A\cap\{۲,۵\}=\{۲\}$ یعنی مجموعهٔ A عضو ۲ را دارد، ولی عضو ۵ را ندارد.

گام دوم: طبق گفتهٔ سؤال $A-\{۲,۳,۴,۵\}=\varnothing$؛ پس $A\subseteq\{۲,۳,۴,۵\}$.

گام سوم: بنابراین A زیرمجموعه‌ای از $\{۲,۳,۴,۵\}$ است که عضو ۲ را دارد، ولی عضو ۵ را ندارد. حالا واضح است هر کدام از دو عضو ۳ و ۴ دو حالت دارند، در A باشند یا نباشند؛ پس مجموعهٔ A، $۲\times۲=۴$ حالت دارد:

$\{۲,۳,۴,۵\}\Rightarrow ۱\times۲\times۲\times۱=۴$

(۱ حالت (باید باشد)، ۲ حالت (باشد یا نباشد)، ۲ حالت (باشد یا نباشد)، ۱ حالت (نباید باشد))

بد نیست این ۴ مجموعه را ببینید:

$\{۲\},\{۲,۳\},\{۲,۴\},\{۲,۳,۴\}$

سنجش کلاد
www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshClouds

۳۷ اگر A، B و C سه مجموعهٔ ناتهی باشند، به طوری که $A \cup B' = B \cup C'$، در این صورت کدام نتیجه‌گیری درست است؟

۱) $C \subseteq B \subseteq A$

۲) $C \subseteq A \subseteq B$

۳) $B \subseteq C \subseteq A$

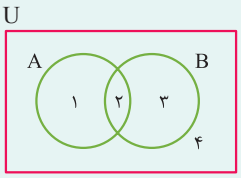
۴) $A \cap B \cap C = \varnothing$

مشاوره سؤالات جبر مجموعه‌ها، پای ثابت کنکورهای سراسری هستند که بهترین روش برای حل آن‌ها، روش شماره‌گذاری ناحیه‌ها است.

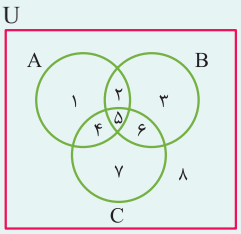
درس Box

روش شماره‌گذاری ناحیه‌ها برای حل سؤالات جبر مجموعه‌ها

روش شماره‌گذاری ناحیه‌ها برای حل سؤالات جبر مجموعه‌ها به این صورت است: اگر دو مجموعه داشته باشیم و سؤال هیچ شرطی نداشته باشد؛ نمودار ون را به صورت مقابل در نظر می‌گیریم:



و اگر سه مجموعه داشته باشیم و سؤال هیچ شرطی نداشته باشد، نمودار ون را به صورت مقابل در نظر می‌گیریم:



حالا هر قسمت را با مجموعه‌ای از اعداد درون آن نمایش می‌دهیم؛ برای مثال اگر دو مجموعه داشته باشیم:

$$A = \{۱,۲\} \ , \ B = \{۲,۳\} \ , \ A \cap B = \{۲\}$$

مثلاً برای این‌که بفهمیم حاصل $A \cup (A' \cap B)$ چیست، به صورت زیر عمل می‌کنیم:

$$A \cup (A' \cap B) = \{۱,۲\} \cup (\{۳,۴\} \cap \{۲,۳\}) = \{۱,۲\} \cup \{۳\} = \{۱,۲,۳\} = A \cup B$$

و یا به عنوان مثال اگر $(A - B) \cup (B - A) = A$ باشد، داریم:

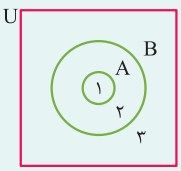
$$(A - B) \cup (B - A) = A \ \Rightarrow \ \{۱\} \cup \{۳\} = \{۱,۲\} \ \Rightarrow \ \{۱,۳\} = \{۱,۲\}$$

دقت کنید که در این روش هیچ دو ناحیه‌ای نمی‌توانند با هم مساوی باشند (منظور از ناحیه، اعداد است، برای مثال هیچ‌وقت $\{۱\} = \{۴\}$ نمی‌شود!)، چون نواحی کاملاً جدا از هم هستند؛ پس برای این‌که $\{۱,۲\} = \{۱,۳\}$ شود، باید $\{۲\} = \{۳\} = \varnothing$ باشند که از آن نتیجه می‌گیریم:

$$\left.\begin{array}{l} A = \{۱, \overset{\uparrow}{۲}\} = \{۱\} \\ B = \{\underset{\downarrow}{۲}, \underset{\downarrow}{۳}\} = \varnothing \end{array}\right\} \Rightarrow B \subseteq A$$

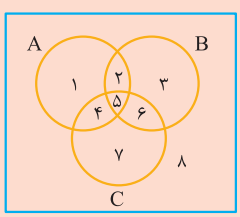
$\varnothing$ $\varnothing$ $\varnothing$

هواستون باشه اگر در سؤالی، شرطی برای مجموعه‌ها داشته باشیم، باید نمودار ون را طوری رسم کنیم که آن شرط رعایت شود؛ برای مثال اگر در سؤالی دو مجموعه داشته باشیم و گفته باشد $A \subseteq B$، نمودار ون را به صورت مقابل در نظر می‌گیریم:



پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: سه مجموعهٔ A، B و C داریم، پس نمودار وِن را به صورت مقابل فرض می‌کنیم:



گام دوم: از تساوی $A \cup B' = B \cup C'$ داریم:

$$A \cup B' = B \cup C' \ \Rightarrow \ \{۱,۲,۴,۵\} \cup \{۱,۴,۷,۸\} = \{۲,۳,۵,۶\} \cup \{۱,۲,۳,۸\}$$

$$\Rightarrow \ \{۱,۲,۴,۵,۷,۸\} = \{۱,۲,۳,۵,۶,۸\}$$

سنجش کلاد
www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshClouds

گام سوم: ناحیه‌های ۱، ۲، ۵ و ۸ در هر دو مجوعهٔ بالا مشترک‌اند؛ پس برای این‌که تساوی بالا برقرار شود، باید مابقی ناحیه‌ها (ناحیه‌هایی که فقط در یکی از این دو مجموعه هستند)، یعنی ۳، ۴، ۶ و ۷ تهی باشند.

گام چهارم: حالا داریم:

$$A = \{۱,۲,\underset{\varnothing}{۴},۵\} = \{۱,۲,۵\}$$

$$B = \{۲,\underset{\varnothing}{۳},۵,\underset{\varnothing}{۶}\} = \{۲,۵\}$$

$$C = \{\underset{\varnothing}{۴},۵,\underset{\varnothing}{۶},\underset{\varnothing}{۷}\} = \{۵\}$$

پس $C \subseteq B \subseteq A$.

www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshClouds

۳۸ اگر $A=\{y+۲,۵,z\}$ ، $B=\{x+۱,۴,-۲\}$ و $A\times B=B\times A$ باشد، حاصل xyz کدام است؟

۱) -۱۶

۲) -۶۴

۳) -۱۶ یا -۶۴

۴) -۸ یا -۳۲

Hint باید $A=B$ باشد.

درس Box

ضرب دکارتی بین دو مجموعه

اگر A و B دو مجموعه باشند، ضرب دکارتی بین این دو مجموعه را با $A\times B$ نمایش می‌دهیم که به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$A\times B=\{(x,y)\mid x\in A, y\in B\}$$

برای مثال اگر $A=\{۱,۲\}$ و $B=\{a,b,c\}$، داریم:

$$A\times B=\{(۱,a),(۱,b),(۱,c),(۲,a),(۲,b),(۲,c)\}$$

نکته

- تعداد اعضای ضرب دکارتی دو مجموعه، برابر حاصل‌ضرب تعداد اعضای آن دو مجموعه است، به عبارت دیگر:

$$n(A\times B)=n(A)\,n(B)$$

- $A\times B=B\times A \Rightarrow A=\varnothing$ یا $B=\varnothing$ یا $A=B$
- دو مجموعهٔ A و B با هم برابراند (یعنی $A=B$)، اگر هر عضو مجموعهٔ A در مجموعهٔ B باشد و برعکس.

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: $A\times B=B\times A$ است، پس با توجه به نکتهٔ گفته‌شده در درس‌باکس، $A=\varnothing$ یا $B=\varnothing$ یا $A=B$. واضح است که دو مجموعهٔ A و B ناتهی‌اند؛ پس باید $A=B$ باشد.

گام دوم: مجموعهٔ A عضو ۵ را دارد، پس ۵ باید عضوی از مجموعهٔ B هم باشد. این اتفاق زمانی رخ می‌دهد که $x+۱=۵$ یعنی $x=۴$ باشد.

گام سوم: مجموعهٔ B دو عضو ۴ و -۲ را دارد؛ پس این دو عضو باید در مجموعهٔ A هم باشند. حالا برای این‌که این اتفاق بیفتد، دو حالت داریم:

- حالت اول:

$$\begin{cases} y+۲=۴ \Rightarrow y=۲ \\ z=-۲ \end{cases}$$

که در این حالت:

$$xyz=۴\times ۲\times(-۲)=-۱۶$$

- حالت دوم:

$$\begin{cases} y+۲=-۲ \Rightarrow y=-۴ \\ z=۴ \end{cases}$$

که در این حالت:

$$xyz=۴\times(-۴)\times ۴=-۶۴$$

گام چهارم: بنابراین $xyz=-۱۶$ یا -۶۴ است.

سنجش کلاد
www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshClouds

۳۹ اگر $A=\{x \mid x\in\mathbb{R}, x^۲-۲x<۳\}$ و $B=\{x \mid x\in\mathbb{R}, x^۲\le ۴\}$، در این صورت مساحت ناحیهٔ $A\times B - B\times A$ چه‌قدر است؟

۱) ۵ ۲) ۶ ۳) ۷ ۴) ۸

درس Box

نکاتی دربارهٔ ضرب دکارتی دو مجموعه

۱) $A\times\varnothing=\varnothing\times A=\varnothing$

۲) $A^۲=A\times A$

۳) $(A\times B)\cap(C\times D)=(A\cap C)\times(B\cap D)$

$(A\times B)\cup(C\times D)=(A\cup C)\times(B\cup D)$ حواستون باشه که چنین رابطه‌ای برای اجتماع درست نیست! یعنی تساوی الزاماً درست نیست.

۴) $A\times B-C\times D=A\times B-((A\times B)\cap(C\times D))=A\times B-((A\cap C)\times(B\cap D))$

۵) $A^۲\cap B^۲=(A\cap B)^۲$

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: ابتدا اعضای دو مجموعه را پیدا می‌کنیم:

$$A=\{x \mid x\in\mathbb{R},\ \underbrace{x^۲-۲x<۳}\}$$

$$x^۲-۲x-۳<۰ \Rightarrow (x-۳)(x+۱)<۰ \xrightarrow{\text{بین ریشه‌ها}} -۱<x<۳$$

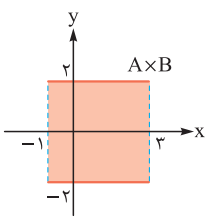
$$\Rightarrow A=(-۱,۳)$$

$$B=\{x \mid x\in\mathbb{R},\ \underbrace{x^۲\le ۴}\}$$

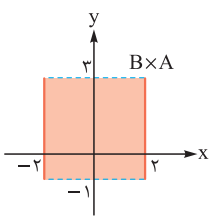
$$x^۲-۴\le۰ \Rightarrow (x-۲)(x+۲)\le۰ \xrightarrow{\text{بین ریشه‌ها}} -۲\le x\le ۲$$

$$\Rightarrow B=[-۲,۲]$$

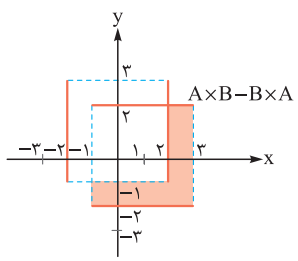
گام دوم: نمودار $A\times B$ را رسم می‌کنیم:



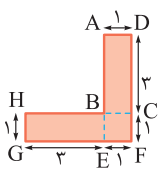
گام سوم: نمودار $B\times A$ را رسم می‌کنیم:



گام چهارم: بنابراین نمودار $A\times B - B\times A$ به صورت مقابل است:



گام پنجم: ناحیهٔ حاصل به شکل مقابل است که مساحت آن برابر است با:



$$S_{\text{رنگی}}=\underbrace{S_{ABCD}}_{۱\times۳}+\underbrace{S_{BCFE}}_{۱\times۱}+\underbrace{S_{BEGH}}_{۳\times۱}=۳+۱+۳=۷$$

سنجش کلاد
www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshClouds

نکته اگر A بازه‌ای به طول m و B بازه‌ای به طول n باشد، مساحت ناحیهٔ محدود به $A\times B$ برابر mn می‌شود.

یه‌جور دیگه

گام اول: مساحت ناحیهٔ محدود به $A\times B-B\times A$ را می‌خواهیم. ابتدا به کمک درس‌باکس داریم:

$$A\times B-B\times A=A\times B-((A\times B)\cap(B\times A))=A\times B-((A\cap B)\times(B\cap A))=A\times B-(A\cap B)^{2}$$

گام دوم: در گام اول روش قبل دیدیم: $A=(-1,3)$ و $B=[-2,2]$ است؛ پس $A\cap B=(-1,2]$ می‌شود. حالا برای به دست آوردن مساحت ناحیهٔ $A\times B-(A\cap B)^{2}$، کافی است مساحت ناحیهٔ $(A\cap B)^{2}$ را از مساحت $A\times B$ کم کنیم:

$$\begin{cases}\text{مساحت } A\times B=\text{طول بازهٔ } A\times\text{طول بازهٔ } B=4\times4=16\\ \text{مساحت } (A\cap B)^{2}=(\text{طول بازهٔ } A\cap B)^{2}=3^{2}=9\end{cases}\Rightarrow \text{مساحت } A\times B-(A\cap B)^{2}=16-9=7$$

سنجش کلاد
www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshClouds

۴۰ نمودار $A\times B$ از سه پاره‌خط به طول ۲ واحد و نمودار $B\times C$ از چهار پاره‌خط به طول ۲ واحد تشکیل شده است. اگر $n(A\cap C)=1$ باشد، کدام مورد نادرست است؟

۱) نمودار $A\times C$ از ۱۲ نقطه تشکیل شده است.

۲) نمودار A^2-C^2 از ۸ نقطه تشکیل شده است.

۳) نمودار $(A-C)\times B$ از دو پاره‌خط عمودی تشکیل شده است.

۴) نمودار $(B\times A)\cup(B\times C)$ از هفت پاره‌خط افقی تشکیل شده است.

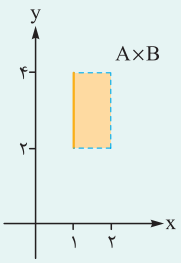
درس Box

نمودار ضرب دکارتی زیر ذره‌بین

اگر A و B دو مجموعه باشند، نمودار $A\times B$، ۳ حالت دارد:

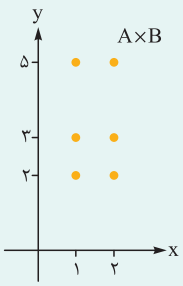
حالت اول: اگر A و B هر دو بازه باشند، نمودار $A\times B$ به صورت مساحت یک ناحیه می‌شود، برای مثال:

$A=[1,2)$
$B=(2,4)$ $\Rightarrow$



حالت دوم: اگر A و B مجموعه‌هایی متناهی باشند (هیچ‌کدام بازه نباشند)، نمودار $A\times B$ از تعدادی نقطه تشکیل می‌شود:

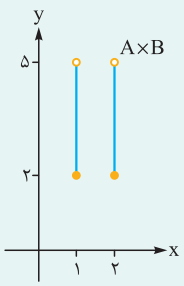
$A=\{1,2\}$
$B=\{2,3,5\}$ $\Rightarrow$



نکته $n(A\times B)=n(A)\times n(B)$

حالت سوم: اگر یکی از دو مجموعهٔ A و B متناهی و دیگری بازه باشد، نمودار $A\times B$ از تعدادی خط یا پاره‌خط تشکیل می‌شود:

$A=\{1,2\}$
$B=[2,5)$ $\Rightarrow$



پاسخ خیلی تشریحی ✔

گام اول: نمودار $A\times B$ از سه پاره‌خط به طول ۲ واحد تشکیل شده؛ پس یکی از مجموعه‌های A یا B باید سه‌عضوی باشد و دیگری باید بازه‌ای به طول ۲ واحد باشد.

گام دوم: نمودار $B\times C$ از چهار پاره‌خط به طول ۲ واحد تشکیل شده؛ پس یکی از مجموعه‌های B یا C باید چهارعضوی باشد و دیگری باید بازه‌ای به طول ۲ واحد باشد.

گام سوم: زمانی هر دو اتفاق بالا رخ می‌دهد که A مجموعه‌ای سه‌عضوی، B بازه‌ای به طول ۲ واحد و C مجموعه‌ای چهارعضوی باشد.

سنجش کلاد
www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshClouds

گام چهارم: حالا گزینه‌ها را بررسی می‌کنیم:

گزینهٔ (۱): A مجموعه‌ای سه‌عضوی و C مجموعه‌ای چهارعضوی است؛ پس $A\times C$ از $۳\times۴=۱۲$ نقطه تشکیل می‌شود.

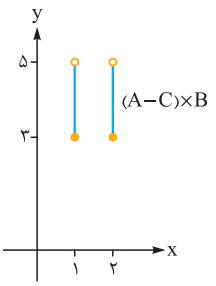
گزینهٔ (۲): با توجه به درس‌باکس سؤال قبل داریم:

$$n(A^۲-C^۲)=n(A^۲)-n\underbrace{(A^۲\cap C^۲)}_{(A\cap C)^۲}=n(A)^۲-n(A\cap C)^۲=۳^۲-۱^۲=۸$$

پس نمودار $A^۲-C^۲$ از ۸ نقطه تشکیل شده است.

گزینهٔ (۳): ابتدا دقت کنید که:

$$n(A-C)=n(A)-n(A\cap C)=۳-۱=۲$$



هم‌چنین B بازه‌ای به طول ۲ واحد است؛ پس $(A-C)\times B$ از دو پاره‌خط تشکیل می‌شود. حالا دقت کنید در نمودار $(A-C)\times B$، $A-C$ مربوط به محور x و B مربوط به محور y است؛ پس به موازات محور y بازه‌ای به طول ۲ واحد داریم که با توجه به آن، دو پاره‌خط مورد نظر عمودی می‌شوند. برای درک بهتر، اگر فرض کنیم $A-C=\{۱,۲\}$ و $B=[۳,۵)$، داریم:

گزینهٔ (۴): ابتدا دقت کنید که:

$$(B\times A)\cup(B\times C)=B\times(A\cup C)$$

از طرفی:

$$n(A\cup C)=\underbrace{n(A)}_{۳}+\underbrace{n(C)}_{۴}-\underbrace{n(A\cap C)}_{۱}=۶$$

پس نمودار $(B\times A)\cup(B\times C)$ از شش پاره‌خط افقی تشکیل می‌شود.

www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshClouds

فیزیک یازدهم

۴۱ دو بار الکتریکی نقطه‌ای $q_1 = 5\mu C$ و $q_2 = -10\mu C$ در فاصلهٔ معینی از هم قرار دارند. اگر نیروی الکتریکی‌ای که بار q_1 به بار q_2 وارد می‌کند، برابر $\vec{F} = (20N)\vec{i}$ باشد، میدان الکتریکی حاصل از بار q_2 در محل بار q_1 برحسب نیوتون بر کولن کدام است؟

۱) $\vec{E} = (4\times10^6)\vec{i}$

۲) $\vec{E} = (2\times10^6)\vec{i}$

۳) $\vec{E} = -(4\times10^6)\vec{i}$

۴) $\vec{E} = -(2\times10^6)\vec{i}$

مشاوره ظاهر سؤال ساده است اما مفهوم و مشخص‌کردن جهت‌ها در نیروهای الکتریکی و میدان الکتریکی به شدت مهم است.

Hint ابتدا نیرویی که بار q_2 به بار q_1 وارد می‌کند را مشخص کنید، سپس از رابطهٔ $\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q}$ برای محاسبهٔ میدان الکتریکی استفاده کنید.

درس Box

میدان الکتریکی، خاصیتی از فضای اطراف یک بار الکتریکی است که به واسطهٔ آن به بارهای دیگر در این فضا، نیروی الکتریکی وارد می‌شود.

برای مشخص‌کردن میدان الکتریکی در یک نقطه، بار آزمون مثبتی $(+q_\circ)$ را در نقطهٔ مورد نظر قرار می‌دهیم و نیروی وارد بر آن را به دست می‌آوریم. در این صورت میدان الکتریکی از رابطهٔ زیر به دست می‌آید:

$$\text{میدان الکتریکی } (N/C) \leftarrow \vec{E} = \frac{\vec{F}}{q_\circ} \quad \begin{matrix}\uparrow \text{ نیروی وارد بر بار آزمون } q_\circ \\ \downarrow \text{ بار آزمون}\end{matrix}$$

میدان الکتریکی کمیتی برداری است و برای تعیین جهت آن کافی است، جهت نیروی وارد بر بار آزمون $+q_\circ$ را تشخیص دهیم.

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: نیروهای الکتریکی بین دو ذرهٔ باردار، هم‌اندازه، هم‌راستا و در خلاف جهت هم هستند، نیروی وارد بر بار q_1 از طرف بار q_2 را به دست می‌آوریم:

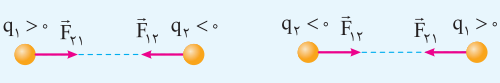
$$\vec{F}_{12} = (20N)\vec{i} \Rightarrow \vec{F}_{21} = (-20N)\vec{i}$$

گام دوم: با توجه به این‌که $\vec{F}_{21} = (-20N)\vec{i}$ است، به کمک رابطهٔ $\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q_\circ}$، میدان الکتریکی حاصل از بار q_2 را در محل بار q_1 به دست می‌آوریم:

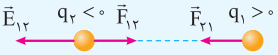
$$\underbrace{\vec{E}_{21}}_{\substack{\text{میدان الکتریکی}\\ \text{حاصل از بار } q_2 \text{ در محل بار } q_1}} = \frac{\vec{F}_{21}}{q_1} \Rightarrow \vec{E}_{21} = \frac{-20\vec{i}}{5\times10^{-6}} = (-4\times10^6\,N/C)\vec{i}$$

یه جور دیگه

گام اول: با توجه به این‌که نیروی الکتریکی‌ای که بار q_1 به بار q_2 وارد می‌کند $(\vec{F}_{12})$ در جهت $+\vec{i}$ است، وضعیت بار q_1 و q_2 را مشخص می‌کنیم:



گام دوم: جهت میدان الکتریکی ناشی از بار q_2 را در محل بار q_1 مشخص می‌کنیم:



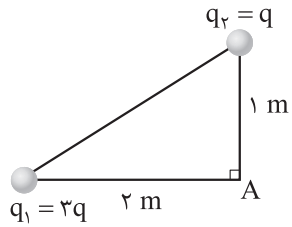
گام سوم: اندازهٔ میدان الکتریکی را به دست می‌آوریم:

$$E = \frac{F}{q_1} = \frac{20}{5\times10^{-6}} = 4\times10^6\ N/C$$

از آن‌جا که $(\vec{E})$ در خلاف جهت محور x است، پس $\vec{E} = (-4\times10^6\,N/C)\vec{i}$.

سنجش کلاد
www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshClouds

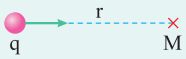
۴۲ در شکل زیر، اگر اندازهٔ میدان الکتریکی خالص حاصل از دو بار الکتریکی نقطه‌ای q_1 و q_2، در نقطهٔ A برابر $9\ N/C$ باشد، اندازهٔ بار q برابر چند نانوکولن است؟ $(k = 9\times10^9\ \frac{N.m^2}{C^2})$



۱) ۰/۸
۲) ۸
۳) ۲/۴
۴) ۲۴

Hint اندازهٔ میدان الکتریکی ناشی از بارهای q_1 و q_2 در نقطهٔ A را از رابطهٔ $E = \frac{k|q|}{r^2}$ به دست آورید. سپس میدان خالص را محاسبه کرده و برابر با $9\ N/C$ قرار دهید و در نهایت q را به دست آورید.

درس Box برای محاسبهٔ اندازهٔ میدان الکتریکی در فاصلهٔ r از بار q از رابطهٔ زیر استفاده می‌کنیم:

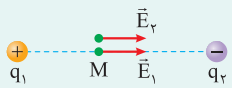


$$E_M = \frac{k|q|}{r^2}$$

در محاسبهٔ میدان خالص در یک نقطه با سه حالت زیر روبه‌رو می‌شویم:

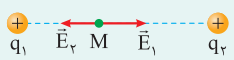
همراستا و هم‌جهت

$$E_{tM} = E_1 + E_2$$



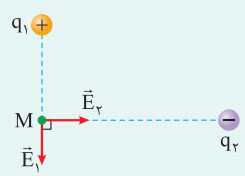
همراستا و خلاف جهت

$$E_{tM} = |E_1 - E_2|$$



عمود بر هم

$$E_{tM} = \sqrt{E_1^2 + E_2^2}$$



پاسخ خیلی تشریحی **گام اول:** با استفاده از رابطهٔ $E = \frac{k|q|}{r^2}$، اندازهٔ میدان الکتریکی ناشی از بارهای q_1 و q_2 در نقطهٔ A را به دست می‌آوریم:

$$E_1 = \frac{k|q_1|}{r_1^2} = \frac{k(3q)}{(2)^2} = \frac{3}{4}kq$$

$$E_2 = \frac{k|q_2|}{r_2^2} = \frac{k(q)}{(1)^2} = kq$$

سنجش کلاد
www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshClouds

گام دوم: میدان‌های الکتریکی ناشی از بارهای q_1 و q_2 در نقطهٔ A عمود بر هم هستند؛ بنابراین اندازهٔ میدان خالص (برایند) را از رابطهٔ فیثاغورس به دست می‌آوریم:

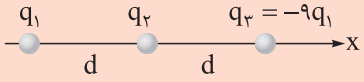
$$E_A = \sqrt{E_1^2 + E_2^2} = \sqrt{(\frac{3}{4}kq)^2 + (kq)^2} = \frac{5}{4}kq$$

گام سوم: میدان خالص (برایند) در نقطهٔ A، $9\ N/C$ است؛ بنابراین q به دست می‌آید:

$$\frac{5}{4}kq = 9 \Rightarrow \frac{5}{4} \times 9 \times 10^9 \times q = 9 \Rightarrow q = 0/8 \times 10^{-9} C = 0/8\ nC$$

سنجش کلاد
www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshClouds

۴۳ در شکل زیر، سه بار الکتریکی نقطه‌ای q_1، q_2 و q_3 روی محور x قرار دارند. اگر بار q_2 به اندازهٔ $\frac{d}{2}$ در خلاف جهت محور x جابه‌جا شود اندازهٔ نیروی خالص وارد بر آن چند برابر می‌شود؟



۱) $\frac{۳}{۲}$

۲) $\frac{۲}{۳}$

۳) $\frac{۳}{۴}$

۴) $\frac{۴}{۵}$

مشاوره این سبک سؤال تازگی مُد شده است، آن را جدّی بگیرید. منتظر این نوع سؤالات در کنکورهای آینده باشید.

Hint

ابتدا برایند نیروهای وارد بر بار q_2 را در حالت اول برحسب $\frac{kq_1q_2}{d^2}$ به دست آورید، سپس در حالت دوم به کمک مقایسهٔ نیروها، اندازهٔ برایند نیروها را با در نظر گرفتن تغییرات فاصله برحسب $\frac{kq_1q_2}{d^2}$ به دست آورید و در نهایت نسبت برایند نیروها را محاسبه کنید.

درس Box

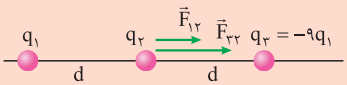
طبق قانون کولن، اندازهٔ نیروی الکتریکی بین دو ذرهٔ باردار با حاصل‌ضرب اندازهٔ بارها نسبت مستقیم و با مربع فاصلهٔ بین آن‌ها نسبت وارون دارد و اندازهٔ این نیرو از رابطهٔ زیر به دست می‌آید:

$$F = \frac{k|q_1||q_2|}{r^2}$$

همان‌طور که دیدیم، اندازهٔ نیروی الکتریکی بین دو ذرهٔ باردار با مربع فاصلهٔ بین دو ذره، نسبت وارون دارد. مثلاً اگر فاصلهٔ بین دو بار ۲ برابر شود، اندازهٔ نیروی بین دو بار $(\frac{۱}{۴})$ برابر می‌شود. از این تکنیک در حل این سؤال استفاده شده است.

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: جهت نیروهای وارد بر بار q_2 از طرف بارهای q_1 و q_3 را مشخص می‌کنیم (فرض می‌کنیم $q_1 > ۰$ و $q_2 > ۰$ است):

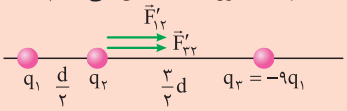


گام دوم: اندازهٔ نیروهایی که از طرف بارهای q_1 و q_3 به بار q_2 وارد می‌شود را محاسبه کرده و در نهایت برایند نیروها را به دست می‌آوریم:

$$\begin{cases} F_{12} = \frac{k|q_1||q_2|}{r_{12}^2} = \frac{kq_1q_2}{d^2} \\ F_{32} = \frac{k|q_3||q_2|}{r_{32}^2} = \frac{k|-9q_1||q_2|}{d^2} = \frac{9kq_1q_2}{d^2} \end{cases} \Rightarrow F_{tq_2} = F_{12} + F_{32} = \frac{10kq_1q_2}{d^2}$$

دو نیروی F_{12} و F_{32} هم‌جهت و هم‌راستا هستند و برای محاسبهٔ اندازهٔ برایند آن‌ها کافی است جمع جبری نیروها را به دست آوریم.

گام سوم: جهت نیروهای وارد بر بار q_2 را با جابه‌جایی به اندازهٔ $\frac{d}{2}$ به سمت چپ (خلاف جهت محور x) مشخص می‌کنیم:



گام چهارم: اندازهٔ نیروهای وارد بر بار q_2 از طرف بارهای q_1 و q_3 را در حالت جدید به دست می‌آوریم (F'_{32}, F'_{12}) و سپس برایند نیروهای خالص وارد بر q_2 را محاسبه می‌کنیم. فاصلهٔ بین بار q_1 و q_2 در حالت اول d بوده و در حالت جدید به $\frac{d}{2}$ می‌رسد؛ بنابراین اندازهٔ نیرو ۴ برابر می‌شود.

$$F'_{12} = 4F_{12} = 4(\frac{kq_1q_2}{d^2})$$

فاصلهٔ بین بار q_3 و q_2 در حالت اول d بوده و در حالت جدید به $\frac{3d}{2}$ می‌رسد، فاصله، $\frac{3}{2}$ برابر شده و اندازهٔ نیرو $\frac{4}{9}$ برابر می‌شود:

$$F'_{32} = \frac{4}{9}F_{32} = \frac{4}{9}(\frac{9kq_1q_2}{d^2}) = \frac{4kq_1q_2}{d^2}$$

سنجش کلاد
www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshClouds

اندازهٔ برایند نیروی خالص وارد بر بار q_2 در حالت جدید برابر است با:

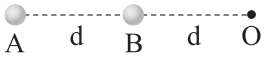
$$F'_{tq_2} = F'_{12} + F'_{32} = \frac{4kq_1q_2}{d^2} + \frac{4kq_1q_2}{d^2} = \frac{8kq_1q_2}{d^2}$$

گام پنجم: نسبت نیروی خالص وارد بر بار q_2 را در حالت دوم به حالت اول به دست می‌آوریم:

$$\frac{F'_{tq_2}}{F_{tq_2}} = \frac{\frac{8kq_1q_2}{d^2}}{\frac{10kq_1q_2}{d^2}} = \frac{8}{10} = \frac{4}{5}$$

www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshClouds

۴۴ دو ذرهٔ باردار **A** و **B** که بار الکتریکی آن‌ها به ترتیب q_1 و q_2 است، در محل خود ثابت شده‌اند و میدان الکتریکی خالص در نقطهٔ **O** برابر $\vec{E}$ است. اگر بار الکتریکی ذرهٔ **A**، ۲ برابر شود، میدان الکتریکی خالص در نقطهٔ **O** به $\frac{5}{2}\vec{E}$ می‌رسد، $\frac{q_1}{q_2}$ برابر کدام است؟



۱) ۶
۲) ۱۲
۳) −۶
۴) −۱۲

Hint

میدان الکتریکی در نقطهٔ (O) ناشی از بارهای q_1 و q_2 در حالت اول برابر E است $(\vec{E}_1+\vec{E}_2=\vec{E})$، در حالت دوم بار q_1 تغییر می‌کند؛ در این حالت میدان ناشی از بار q_1 تغییر کرده و لازم است که معادله‌ای جدید به سبک حالت اول بنویسید تا به کمک دستگاه بین این دو حالت، رابطه‌ای بین E_1 و E_2 پیدا کنید. سپس با به‌کاربردن رابطهٔ مقایسه‌ای، نسبت بارهای خواسته‌شده را به دست آورید:

$$\frac{E_2}{E_1}=\frac{|q_2|}{|q_1|}\times(\frac{r_1}{r_2})^2$$

درس Box

برای محاسبهٔ اندازهٔ میدان الکتریکی ناشی از بار q در نقطه‌ای که در فاصلهٔ r از آن قرار دارد از رابطهٔ زیر استفاده می‌کنیم:

$$E=\frac{k|q|}{r^2}$$

همان‌طور که از رابطهٔ بالا مشخص است، میدان الکتریکی با مربع فاصله از بار الکتریکی نسبت وارون دارد، مثلاً با نصف‌شدن فاصله ($\frac{1}{2}$ برابرشدن)، اندازهٔ میدان الکتریکی ۴ برابر می‌شود.

در صورتی‌که علامت بار تغییر کند، جهت میدان الکتریکی تغییر می‌کند. فرض کنید اندازهٔ بار الکتریکی ۵ برابر شود و علامت آن هم تغییر کند، در این صورت اندازهٔ میدان الکتریکی ۵ برابر شده و جهت آن نیز تغییر می‌کند.

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: در حالت اول، اندازهٔ میدان الکتریکی ناشی از بارهای q_1 و q_2 در نقطهٔ (O) برابر $\vec{E}$ است؛ بنابراین رابطهٔ زیر برقرار است:

$$\vec{E}_1+\vec{E}_2=\vec{E}$$

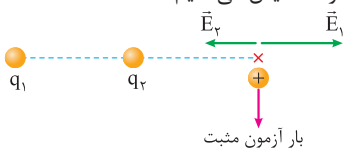
گام دوم: با دو برابر کردن اندازهٔ بار الکتریکی q_1، اندازهٔ میدان الکتریکی ناشی از بار q_1 نسبت به حالت قبل دو برابر می‌شود $(E\propto|q|)$.

$$2\vec{E}_1+\vec{E}_2=\frac{5}{2}\vec{E}$$

گام سوم: به کمک دستگاه، رابطهٔ بین E_1 و E_2 را مشخص می‌کنیم:

$$\begin{cases}\vec{E}_1+\vec{E}_2=\vec{E}\\ 2\vec{E}_1+\vec{E}_2=\frac{5}{2}\vec{E}\end{cases}\Rightarrow \vec{E}_1=1/5\vec{E}\ ,\ \vec{E}_2=-0/5\vec{E}$$

گام چهارم: با فرض این‌که جهت مثبت به طرف راست است، علامت بارهای q_1 و q_2 را تشخیص می‌دهیم.



$$\Rightarrow q_1>0\ ,\ q_2<0$$

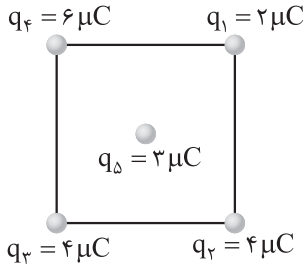
گام پنجم: نسبت اندازهٔ بار q_1 به q_2 را به کمک رابطهٔ مقایسه‌ای میدان‌های الکتریکی به دست می‌آوریم:

$$\frac{E_1}{E_2}=\left|\frac{q_1}{q_2}\right|\times(\frac{r_2}{r_1})^2\Rightarrow\frac{1/5E}{0/5E}=\left|\frac{q_1}{q_2}\right|\times(\frac{d}{2d})^2\Rightarrow 3=\left|\frac{q_1}{q_2}\right|\times(\frac{1}{4})$$

$$\Rightarrow\left|\frac{q_1}{q_2}\right|=12\xrightarrow{\text{ناهمنام هستند}}\frac{q_1}{q_2}=-12$$

سنجش کلاد
www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshClouds

۴۵ در شکل زیر، پنج بار الکتریکی در رأس‌ها و مرکز مربعی قرار گرفته‌اند. اگر فقط علامت بار q_1 تغییر کند، اندازهٔ نیروی الکتریکی خالص وارد بر بار واقع در مرکز مربع چند برابر می‌شود؟



۱) ۱

۲) $\sqrt{2}$

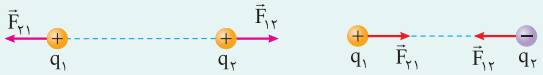
۳) $\sqrt{5}$

۴) $\sqrt{10}$

مشاوره در حل سؤالات الکتریسیتهٔ ساکن، گاهی نیاز به محاسبات طاقت‌فرسا نیست و با به‌کاربردن رابطهٔ مقایسه‌ای به راحتی می‌توانید روند حل را ساده‌تر کنید (به حل سؤال توجه کن تا متوجه منظورم بشی!)

Hint ابتدا نیروی وارد بر بار q_5 از طرف سایر بارها را به دست آورید. (برای راحت‌تر شدن کار، فاصلهٔ بین مرکز مربع تا رأس‌های مربع را d فرض کنید) و سپس برایند نیروهای وارد بر بار q_5 را به دست آورید؛ حال در مرحلهٔ دوم کار ساده‌تر است چون فقط علامت یک بار تغییر می‌کند. در حالت جدید برایند نیروهای وارد بر بار q_5 را محاسبه کنید و در نهایت هم نسبت نیروی خالص در دو حالت را به راحتی به دست آورید.

درس Box اگر دو بار همنام باشند، یکدیگر را دفع می‌کنند و اگر ناهمنام باشند، یکدیگر را جذب می‌کنند.



طبق قانون سوم نیوتون، نیرویی که دو ذرهٔ باردار به هم وارد می‌کنند هم‌اندازه، هم‌راستا و در خلاف جهت هستند.

نکته اگر علامت **یکی از بارها** تغییر کند، جهت نیرویی که دو ذره به هم وارد می‌کنند تغییر می‌کند.

پاسخ خیلی تشریحی ✔ اگر فاصلهٔ بین بارهای q_1، q_2، q_3 و q_4 تا بار q_5 را d فرض کنیم، اندازهٔ نیروی الکتریکی وارد بر بار q_5، از طرف سایر بارها برابر است با:

$$F_{15} = \frac{k|q_1||q_5|}{r_{15}^2} = \frac{k\times 2\times 10^{-6}\times 3\times 10^{-6}}{d^2} = 6\times\frac{k\times 10^{-12}}{d^2}$$

$$F_{25} = \frac{k|q_2||q_5|}{r_{25}^2} = \frac{k\times 4\times 10^{-6}\times 3\times 10^{-6}}{d^2} = 12\times\frac{k\times 10^{-12}}{d^2}$$

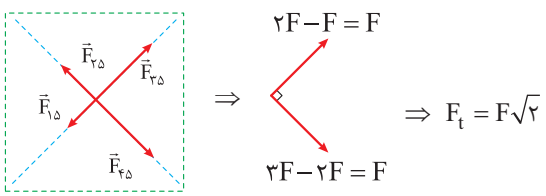
$$F_{35} = \frac{k|q_3||q_5|}{r_{35}^2} = \frac{k\times 4\times 10^{-6}\times 3\times 10^{-6}}{d^2} = 12\times\frac{k\times 10^{-12}}{d^2}$$

$$F_{45} = \frac{k|q_4||q_5|}{r_{45}^2} = \frac{k\times 6\times 10^{-6}\times 3\times 10^{-6}}{d^2} = 18\times\frac{k\times 10^{-12}}{d^2}$$

گام دوم: اگر اندازهٔ نیرویی که بار q_1 به بار q_5 وارد می‌کند را F در نظر بگیریم، در این صورت داریم:

$$F_{15} = F \;,\; F_{25} = F_{35} = 2F \;,\; F_{45} = 3F$$

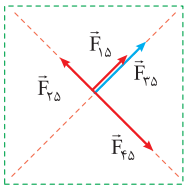
گام سوم: شکل زیر نیروهای وارد بر بار q_5 را از طرف سایر بارها نشان می‌دهد، برایند نیروهای وارد بر بار q_5 را برحسب F به دست می‌آوریم.

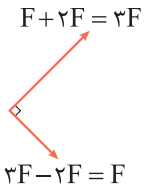


گام چهارم: در حالت دوم فقط علامت بار q_1 تغییر می‌کند؛ بنابراین فقط جهت نیروی وارد بر بار q_5 از طرف q_1 تغییر می‌کند،

سنجش کلاد
www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshClouds

حال نیروهای وارد بر بار q_5 را به کمک شکلی که در گام سوم کشیدیم، در شکل زیر نشان می‌دهیم و نیروی خالص وارد بر بار q_5 را برحسب F به دست می‌آوریم:





$$\Rightarrow F'_t = \sqrt{F^2 + (3F)^2} = F\sqrt{10}$$

گام پنجم: در نهایت نسبت نیروی خالص را در حالت دوم به حالت اول به دست می‌آوریم:

$$\frac{F'_t}{F_t} = \frac{F\sqrt{10}}{F\sqrt{2}} = \sqrt{5}$$

سنجش کلاد
www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshClouds

۴۶ یک قطرهٔ روغن خنثی، با گرفتن ۵ الکترون، در میدان الکتریکی یکنواخت و قائم $\vec{E}$، به حالت معلق قرار می‌گیرد. اگر جرم این قطره $۴\times۱۰^{-۱۵}kg$ باشد، $\vec{E}$ چند نیوتون بر کولن و در چه جهتی است؟ ($e=۱/۶\times۱۰^{-۱۹}C$ ، $g=۱۰\,m/s^۲$)

۱) ۵×۱۰^۴، بالا

۲) ۵×۱۰^۴، پایین

۳) ۲×۱۰^۴، بالا

۴) ۲×۱۰^۴، پایین

مشاوره این سؤال برگرفته از تمرین کتاب درسی است، تمرین‌های کتاب درسی را جدی بگیرید.

Hint

ابتدا بار الکتریکی قطرهٔ روغن را از رابطهٔ $q=\pm ne$ به دست آورید، سپس با استفاده از شرایط قطرهٔ روغن، با برابر قرار دادن mg با F_E، به خواستهٔ سؤال یعنی میدان الکتریکی برسید.

برای تعیین جهت میدان الکتریکی هم بدانید که در صورت مثبت‌بودن بار الکتریکی، F_E و E هم‌جهت هستند، اما در حالتی که بار الکتریکی منفی باشد، F_E و E خلاف جهت هم هستند.

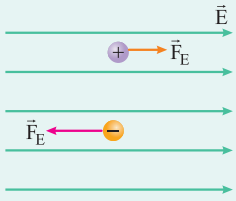
درس Box

مقدار بار الکتریکی از رابطهٔ $q=\pm ne$ به دست می‌آید. n بیانگر اختلاف تعداد الکترون‌ها و پروتون‌ها است و e هم مقدار بار الکتریکی الکترون که معادل $۱/۶\times۱۰^{-۱۹}C$ است.

اگر تعداد الکترون‌ها بیشتر از پروتون‌ها باشد، در رابطهٔ بالا، علامت منفی را به کار می‌بریم و اگر تعداد پروتون‌ها بیشتر از الکترون‌ها باشد از علامت مثبت استفاده می‌کنیم.

اگر ذره‌ای با بار q در فضایی تحت تأثیر میدان الکتریکی E قرار گیرد، نیرویی هم‌راستا با میدان الکتریکی به بزرگی $F_E=E|q|$ از طرف میدان الکتریکی به ذرهٔ باردار وارد می‌شود.

اگر ذره دارای بار مثبت باشد، جهت نیروی وارد بر ذره هم‌جهت با میدان الکتریکی است و اگر دارای بار منفی باشد، جهت نیروی وارد بر ذره در خلاف جهت میدان الکتریکی است.



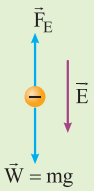
پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: بار الکتریکی روغن را به کمک رابطهٔ $q=\pm ne$ به دست می‌آوریم.

$$q=-ne=-۵\times۱/۶\times۱۰^{-۱۹}=-۸\times۱۰^{-۱۹}C$$

(جسم خنثی الکترون گرفته)

گام دوم: شکل زیر وضعیت تعادل قطرهٔ روغن را نشان می‌دهد، نیروی وزن رو به پایین است؛ بنابراین نیرویی که از طرف میدان الکتریکی به قطرهٔ روغن وارد می‌شود باید رو به بالا باشد. چون بار قطرهٔ روغن منفی است، طبق رابطهٔ $\vec{F}_E=\vec{E}q$، جهت میدان الکتریکی باید رو به پایین باشد:



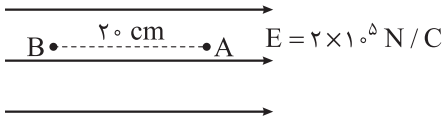
گام سوم: شرط تعادل این است که اندازهٔ نیروهای F_E و W برابر باشد:

$$F_E=mg \Rightarrow E|q|=mg \Rightarrow E\times۸\times۱۰^{-۱۹}=۴\times۱۰^{-۱۵}\times۱۰$$

$$E=\frac{۴\times۱۰^{-۱۴}}{۸\times۱۰^{-۱۹}}=\frac{۴۰\times۱۰^۴}{۸}=۵\times۱۰^۴\ N/C$$

سنجش کلاد
www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshClouds

۴۷ در شکل زیر، بار الکتریکی نقطه‌ای **q** از نقطهٔ **A** تا نقطهٔ **B**، موازی خطوط میدان الکتریکی یکنواخت $\vec{E}$ جابه‌جا می‌شود. اگر در طی این جابه‌جایی انرژی پتانسیل الکتریکی بار، **۳mJ** کاهش یابد، **q** چند نانوکولن است؟



۱) ۷۵

۲) ۵۰

۳) −۷۵

۴) −۵۰

مشاوره مبحث پتانسیل الکتریکی و تغییرات انرژی پتانسیل الکتریکی، جزء مباحث خوش‌قلق الکتریسیته ساکن است که می‌توان به راحتی به جواب رسید؛ بنابراین در حل تست‌ها، این مبحث را در اولویت قرار دهید.

Hint

به کمک تحلیل و استنباط نوع بار q را تشخیص دهید (مثلاً می‌توانید از رابطهٔ $\Delta U = q\Delta V$ استفاده کنید)، سپس به کمک رابطهٔ $\Delta U = -E|q|d\cos\alpha$، اندازهٔ بار الکتریکی را محاسبه کنید.

درس Box

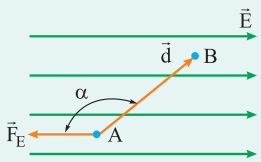
هرگاه ذره‌ای باردار در جهت میدان الکتریکی حرکت کند، پتانسیل الکتریکی آن کاهش می‌یابد، به عبارتی جهت میدان الکتریکی از پتانسیل بیشتر به پتانسیل کم‌تر است و هیچ ربطی هم به نوع و اندازهٔ بار الکتریکی ندارد.

اگر پتانسیل الکتریکی ذرهٔ باردار q در یک جابه‌جایی به اندازهٔ ΔV تغییر کند، تغییرات انرژی پتانسیل الکتریکی از رابطهٔ $\Delta U = q\Delta V$ به دست می‌آید:

$$\Delta U = q\Delta V$$

در این رابطه q را با علامت قرار می‌دهیم.

برای محاسبهٔ تغییرات انرژی پتانسیل الکتریکی از رابطهٔ $\Delta U_E = -E|q|d\cos\alpha$ استفاده می‌کنیم، در این رابطه α زاویهٔ بین $\vec{F}_E$ و $\vec{d}$ است.



$$\Delta U_E = -E|q|d\cos\alpha$$

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: به کمک رابطهٔ $\Delta U = q\Delta V$ نوع بار (مثبت یا منفی بودن) را تشخیص می‌دهیم. در جابه‌جایی از A تا B، ذره در خلاف جهت میدان جابه‌جا شده است، پس پتانسیل الکتریکی آن افزایش می‌یابد $(\Delta V > 0)$.

$$\underbrace{\Delta U}_{\text{کاهش}} = q\overbrace{\Delta V}^{\Delta V>0} \Rightarrow q < 0$$

طبق صورت سؤال، انرژی پتانسیل الکتریکی کاهش یافته است

$\Delta U < 0$

گام دوم: از رابطهٔ $|\Delta U| = E|q|d$ برای محاسبهٔ اندازهٔ بار الکتریکی استفاده می‌کنیم:

$$|\Delta U| = E|q|d \Rightarrow ۳\times۱۰^{-۳} = ۲\times۱۰^{۵}|q|\times۲\times۱۰^{-۱} \Rightarrow |q| = ۷/۵\times۱۰^{-۸}\,C$$

$$|q| = ۷۵\times۱۰^{-۹}\,C \Rightarrow q = -۷۵\,nC$$

سنجش کلاد
www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshClouds

۴۸ ذره‌ای به بار الکتریکی $-۲mC$ را از نقطهٔ **A** با پتانسیل الکتریکی $۱۰V$ تا نقطهٔ **B** جابه‌جا می‌کنیم. اگر در این جابه‌جایی کار نیروی الکتریکی برابر $-۰/۰۸J$ باشد، پتانسیل الکتریکی نقطهٔ **B** برابر چند ولت است؟

۱) ۳۰ ۲) ۵۰

۳) -۳۰ ۴) -۵۰

Hint به کمک رابطهٔ $\Delta U_E = -W_E$، تغییرات انرژی پتانسیل الکتریکی را به دست آورید. سپس از رابطهٔ $\Delta U = q\Delta V$ برای محاسبهٔ پتانسیل الکتریکی در نقطهٔ B استفاده کنید.

درس Box

تغییرات انرژی پتانسیل الکتریکی، قرینهٔ کار نیروی الکتریکی است:

$$\Delta U_E = -W_E$$

اگر تغییرات پتانسیل الکتریکی در جابه‌جایی بار q از A تا B برابر ΔV باشد، انرژی پتانسیل الکتریکی به اندازه ΔU_E تغییر می‌کند و رابطهٔ زیر برقرار است:

$$\Delta U_E = q\,\Delta V$$

$$U_B - U_A = q\,(V_B - V_A)$$

توجه کنید در این رابطه q با علامت گذاشته شود.

پاسخ خیلی تشریحی ✔ **گام اول:** تغییرات انرژی پتانسیل الکتریکی (ΔU_E) قرینهٔ کار نیروی الکتریکی (W_E) است:

$$\Delta U_E = -W_E = -(-۰/۰۸) = +۰/۰۸\ J$$

گام دوم: از رابطهٔ $\Delta U = q\Delta V$ برای محاسبهٔ پتانسیل الکتریکی نقطهٔ B استفاده می‌کنیم:

$$\Delta U = q\,\Delta V \Rightarrow U_B - U_A = q\,(V_B - V_A)$$

$$+۰/۰۸ = \underbrace{-۲\times۱۰^{-۳}}_{\text{بار الکتریکی بر حسب کولن و با علامت}}(V_B - ۱۰) \Rightarrow \frac{۸\times۱۰^{-۲}}{-۲\times۱۰^{-۳}} = V_B - ۱۰ \Rightarrow -۴۰ = V_B - ۱۰ \Rightarrow V_B = -۳۰V$$

سنجش کلاد
www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshClouds

۴۹ ذره‌ای با بار الکتریکی q در خلاف جهت خطوط میدان الکتریکی یکنواختی با تندی اولیهٔ v_0 پرتاب شده و پس از طی مسافت d، متوقف می‌شود. اگر این ذره، در جهت خطوط همین میدان الکتریکی با تندی v_0 پرتاب شود، پس از طی مسافت $3d$، تندی آن به v می‌رسد. v چند برابر v_0 است؟

۱) ۱ ۲) $\sqrt{2}$ ۳) $\sqrt{3}$ ۴) ۲

Hint

در حالت اول، رابطهٔ $\Delta U_E + \Delta K = 0$ را به کار ببرید تا رابطه‌ای بین Eqd و $\frac{1}{2}mv_0^2$ که همان انرژی جنبشی اولیه است بیابید.
رابطهٔ $\Delta U_E + \Delta K = 0$ را در شرایط جدید به کار ببرید و از رابطه‌ای که در مرحلهٔ اول به دست آورده‌اید در حالت دوم استفاده کنید تا تندی v را برحسب v_0 بیابید.

درس Box

طبق اصل پایستگی انرژی در صورتی که اتلاف انرژی وجود نداشته باشد، اگر در طی جابه‌جایی بار q انرژی پتانسیل الکتریکی به اندازهٔ ΔU_E و انرژی پتانسیل گرانشی به اندازهٔ ΔU_g تغییر کند، رابطهٔ زیر برقرار است:

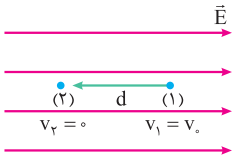
$$\Delta U_E + \Delta U_g + \Delta K = 0$$

ΔU_E: تغییرات انرژی پتانسیل الکتریکی
ΔU_g: تغییرات انرژی پتانسیل گرانشی
ΔK: تغییرات انرژی جنبشی

معمولاً در جابه‌جایی‌های کم، از تغییرات انرژی پتانسیل گرانشی صرف نظر می‌کنیم.

پاسخ خیلی تشریحی

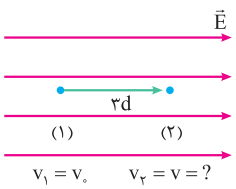
گام اول: شکل زیر، وضعیتی را نشان می‌دهد که بار q در خلاف جهت میدان الکترکیی یکنواخت با تندی اولیهٔ v_0 پرتاب می‌شود و پس از طی مسافت d متوقف می‌شود. با توجه به توقف ذرهٔ باردار q در نقطهٔ (۲)، نیروی الکتریکی به سمت راست است؛ بنابراین علامت بار q مثبت است:



گام دوم: طبق اصل پایستگی انرژی $(\Delta U_E + \Delta K = 0)$ در حالت اول داریم:

$$\Delta U_E + \Delta K = 0 \Rightarrow Eqd + \frac{1}{2}m(0^2 - v_0^2) = 0 \Rightarrow Eqd = \frac{1}{2}mv_0^2$$

گام سوم: در حالت دوم، مطابق شکل زیر، همان ذره با تندی v_0 در جهت میدان الکتریکی پرتاب شده است و خواستهٔ سؤال، تندی ذره پس از طی مسافت $3d$ است:



گام چهارم: اصل پایستگی انرژی را برای حالت دوم به کار می‌بریم:

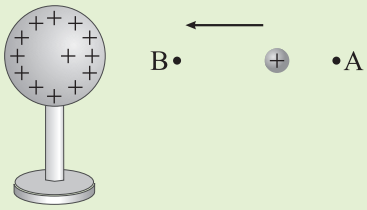
$$\Delta U_E + \Delta K = 0 \Rightarrow -Eq(3d) + \frac{1}{2}m(v^2 - v_0^2) = 0$$

$$3Eqd = \frac{1}{2}m(v^2 - v_0^2) \xrightarrow[Eqd=\frac{1}{2}mv_0^2]{\text{در گام دوم متوجه شدیم}} 3(\frac{1}{2}mv_0^2) = \frac{1}{2}m(v^2 - v_0^2)$$

$$3v_0^2 = v^2 - v_0^2 \Rightarrow v^2 = 4v_0^2 \Rightarrow v = 2v_0 \rightarrow \frac{v}{v_0} = 2$$

سنجش کلاد
www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshClouds

۵۰ در شکل زیر ذرهٔ باردار مثبت و کوچکی را از حالت سکون، از نقطهٔ **A** به سمت کرهٔ باردار که روی پایهٔ عایقی قرار دارد، نزدیک می‌کنیم و در نقطهٔ **B** قرار می‌دهیم. در این جابه‌جایی، چه تعداد از عبارت‌های زیر درست است؟



الف) کار نیروی الکتریکی وارد بر ذره، مثبت است.

ب) انرژی پتانسیل الکتریکی ذره کاهش می‌یابد.

پ) اندازهٔ نیروی الکتریکی وارد بر ذره کاهش می‌یابد.

ت) پتانسیل الکتریکی نقطهٔ **B**، بیشتر از پتانسیل الکتریکی نقطهٔ **A** است.

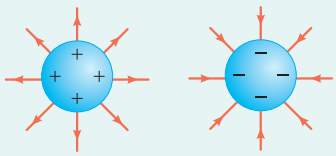
۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

Hint

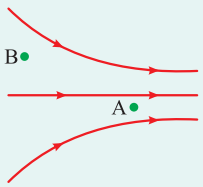
ابتدا خطوط میدان الکتریکی را در اطراف کرهٔ باردار رسم کنید و جهت نیروی الکتریکی را مشخص کنید. سپس علامت کار میدان الکتریکی را از رابطهٔ $W_E = F_E d\cos\theta$ مشخص کنید و پس از آن از رابطهٔ $\Delta U_E = -W_E$ و برای تعیین علامت تغییرات انرژی پتانسیل الکتریکی استفاده کنید.

درس Box

جهت خطوط میدان الکتریکی در اطراف بارهای مثبت به سمت بیرون و در اطراف بارهای منفی به سمت داخل است:

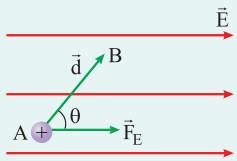


هرگاه در جهت میدان الکتریکی حرکت کنیم، پتانسیل الکتریکی کاهش می‌یابد، به عبارت دیگر جهت خطوط میدان الکتریکی از پتانسیل بیشتر به سمت پتانسیل کم‌تر است. تراکم خطوط میدان الکتریکی، بیانگر اندازه و شدت میدان الکتریکی است، در شکل مقابل میدان الکتریکی در نقطهٔ A بزرگ‌تر از نقطهٔ B است.



$E_A > E_B$

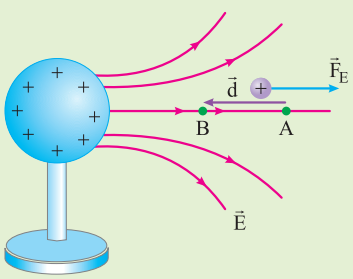
برای محاسبهٔ کار نیروی الکتریکی از رابطهٔ $W_{F_E} = E|q|d\cos\theta$ استفاده می‌کنیم که θ در این رابطه زاویهٔ بین $\vec{F}_E$ و $\vec{d}$ است.



$W_{F_E} = E|q|d\cos\theta$

پاسخ خیلی تشریحی ✔ فقط مورد «ت» درست است.

گام اول: ابتدا مطابق شکل زیر جهت میدان الکتریکی و نیروی الکتریکی را مشخص می‌کنیم:



گام دوم: جهت نیروی الکتریکی $(\vec{F}_E)$ به سمت راست و جهت جابه‌جایی بار $(\vec{d})$ به سمت چپ است؛ بنابراین کار نیروی الکتریکی منفی است:

$$W_{F_E} = F_E d\cos\theta \xrightarrow[\cos\theta=-1]{\theta=180^\circ} W_{F_E} < 0$$

سنجش کلاد
www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshClouds

گام سوم: تغییرات انرژی پتانسیل الکتریکی، قرینهٔ کار نیروی الکتریکی است؛ بنابراین انرژی پتانسیل الکتریکی افزایش می‌یابد:

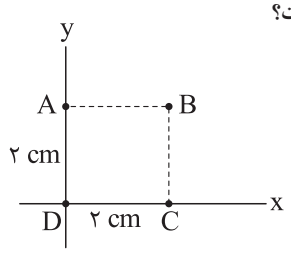
$$\Delta U_E = -W_E \Rightarrow \Delta U_E > 0$$

گام چهارم: نیروی الکتریکی وارد بر ذره از رابطهٔ $F_E = Eq$ به دست می‌آید و در اثر جابه‌جایی از A تا B تراکم خطوط میدان الکتریکی بیشتر شده و میدان الکتریکی قوی‌تر می‌شود، بنابراین نیروی الکتریکی وارد بر ذره افزایش می‌یابد.

گام پنجم: بدون توجه به اندازه و نوع بار، هرگاه در خلاف جهت میدان الکتریکی حرکت کنیم، پتانسیل الکتریکی افزایش می‌یابد $(V_B > V_A)$؛ بنابراین، فقط مورد آخر درست است.

سنجش کلاد
www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshClouds

۵۱ در صفحهٔ مختصات شکل زیر، میدان الکتریکی یکنواخت $\vec{E}$ وجود دارد. اگر پتانسیل الکتریکی نقطه‌های **A**، **B**، **C** و **D** به ترتیب برابر $۲۰V$، $۵V$، $-۱۰V$ و $۵V$ باشد، میدان الکتریکی $\vec{E}$ چند نیوتون بر کولن و در چه جهتی است؟



۱) $۷۵۰\sqrt{۲}$، ↘

۲) $۷۵۰\sqrt{۲}$، ↖

۳) $۳۷۵\sqrt{۲}$، ↘

۴) $۳۷۵\sqrt{۲}$، ↖

Hint

دو نقطهٔ هم‌پتانسیل را به هم وصل کنید (نقاط B و D). سپس خطی عمود بر این خط هم‌پتانسیل، از سمت پتانسیل بیشتر به سمت پتانسیل کم‌تر رسم کنید تا جهت میدان الکتریکی مشخص شود. در نهایت به کمک دو نقطهٔ غیر هم‌پتانسیل و نوشتن رابطهٔ $E = \frac{|\Delta V|}{d}$ اندازهٔ میدان الکتریکی را به دست آورید (فقط توجه کنید d جابه‌جایی در راستای میدان الکتریکی است).

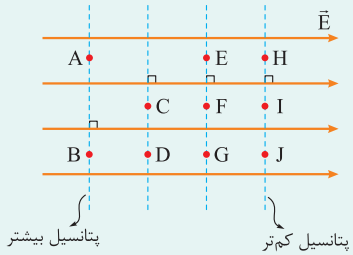
درس Box

میدان الکتریکی یکنواخت، میدانی است که اندازه و جهت آن در فضای مورد نظر ثابت است و تغییر نمی‌کند.

خطوط میدان الکتریکی یکنواخت، موازی، مستقیم، هم‌فاصله و در یک جهت هستند مانند آن چیزی که در شکل زیر مشخص شده است.



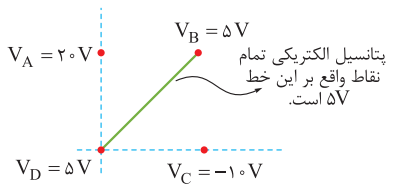
اگر نقاطی که پتانسیل یکسان دارند را به هم وصل کنیم، خطوط هم‌پتانسیل ایجاد می‌شود و از آن‌جا که در میدان الکتریکی یکنواخت و خطوط موازی و مستقیم هستند؛ خطوط هم‌پتانسیل، به صورت یک خط راست هستند:



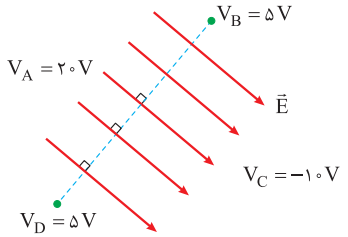
$$V_A = V_B$$
$$V_C = V_D$$
$$V_E = V_F = V_G$$
$$V_H = V_I = V_J$$

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: پتانسیل نقاط A، B، C و D را بر روی شکل مشخص می‌کنیم.



گام دوم: با توجه به یکنواخت‌بودن میدان الکتریکی، خطوط آن عمود بر خطوط هم‌پتانسیل و از پتانسیل بیشتر به پتانسیل کم‌تر هستند.



گام سوم: از رابطهٔ $E = \frac{\Delta V}{d}$ بین دو نقطهٔ A و C برای محاسبهٔ میدان الکتریکی استفاده می‌کنیم:

$$E = \frac{\Delta V}{d} = \frac{V_A - V_C}{d_{AC}} = \frac{۲۰-(-۱۰)}{۲\sqrt{۲}\times۱۰^{-۲}} = \frac{۳۰}{۲\sqrt{۲}\times۱۰^{-۲}} = \frac{۱۵۰۰}{\sqrt{۲}} = \frac{۱۵۰۰\sqrt{۲}}{۲} = ۷۵۰\sqrt{۲}\ N/C$$

d_{AC}: $۲\sqrt{۲}cm$ قطر مربع

سنجش کلاد
www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshClouds

۵۲ شعاع کرهٔ رسانای **B**، ۲ برابر شعاع کرهٔ رسانای **A** و چگالی سطحی بار الکتریکی کرهٔ **A**، ۴ برابر چگالی سطحی بار الکتریکی کرهٔ **B** است. چند درصد از بار کرهٔ **A** را به کرهٔ **B** منتقل کنیم، تا چگالی سطحی بار این دو کره برابر شود؟

۱) ۲۰ ۲) ۸۰

۳) ۴۰ ۴) ۶۰

Hint ابتدا به کمک رابطهٔ $\frac{\sigma_A}{\sigma_B}=\frac{|Q_A|}{|Q_B|}\times(\frac{r_B}{r_A})^2$، نسبت بار کرهٔ A به B را مشخص کنید. سپس حالتی را بررسی کنید که باید چگالی سطحی دو کره برابر باشد و در این حالت، اندازهٔ بارها را مشخص کنید و در نهایت در مقایسه با حالت اول تعیین کنید چه مقدار بار از کدام کره به کرهٔ دیگر منتقل شده است.

درس Box اگر بار الکتریکی یک رسانا با سطح خارجی A، برابر با Q باشد، چگالی سطحی بار الکتریکی از رابطهٔ زیر به دست می‌آید:

$$\sigma=\frac{|Q|}{A}$$

سطح خارجی کره به شعاع r از رابطهٔ $A=4\pi r^2$ به دست می‌آید. رابطهٔ چگالی سطحی به صورت مقایسه‌ای به صورت زیر بیان می‌شود:

$$\frac{\sigma_A}{\sigma_B}=\frac{|Q_A|}{|Q_B|}\times\frac{A_B}{A_A}\xrightarrow{\text{اگر دو رسانا کروی باشند}}\frac{\sigma_A}{\sigma_B}=\frac{|Q_A|}{|Q_B|}\times(\frac{r_B}{r_A})^2$$

پاسخ خیلی تشریحی ✔ **گام اول**: با به‌کاربردن رابطهٔ چگالی سطحی به صورت مقایسه‌ای، نسبت اندازهٔ بار دو کره را به دست می‌آوریم:

$$\frac{\sigma_A}{\sigma_B}=\left|\frac{Q_A}{Q_B}\right|\times(\frac{r_B}{r_A})^2\Rightarrow 4=\left|\frac{Q_A}{Q_B}\right|\times(2)^2\Rightarrow|Q_A|=|Q_B|$$

گام دوم: در این مرحله باید تشخیص دهیم، دو کره دارای بار همنام هستند یا ناهمنام! باید با یک دید کاملاً مفهومی به این مسئله نگاه کنیم. اگر بار کره‌ها ناهمنام باشند، چون مجموع بارهای دو کره برابر صفر است و طبق اصل پایستگی بار در اثر انتقال بار از یک کره به کرهٔ دیگر هم‌چنان مجموع بارها صفر خواهد بود و نسبت اندازهٔ بارها تغییر نخواهد کرد؛ بنابراین بار دو کره باید همنام باشد.

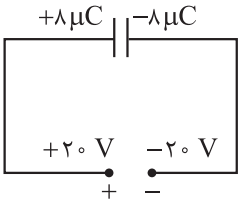
گام سوم: اگر باری که از کرهٔ A به کرهٔ B انتقال داده می‌شود تا چگالی سطحی بار دو کره برابر شود را x در نظر بگیریم در این صورت داریم:

$$\sigma'_A=\sigma'_B\Rightarrow\frac{|Q_A-x|}{r_A^2}=\frac{|Q_B+x|}{r_B^2}\xrightarrow{r_B=2r_A}\frac{|Q_B+x|}{|Q_A-x|}=4$$

$$\begin{cases}Q_B+x=4Q_A-4x\xrightarrow{Q_A=Q_B}3Q_A=5x\Rightarrow x=\frac{3}{5}Q_A\rightarrow x_{\%}=\frac{3}{5}Q_A\times100=60\%Q_A\\ Q_B+x=-4Q_A+4x\xrightarrow{Q_A=Q_B}5Q_A=3x\Rightarrow x=\frac{5}{3}Q_A\ \text{غ.ق.ق}\end{cases}$$

سنجش کلاد
www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshClouds

۵۳ در شکل زیر، خازنی به دو سر مولدی متصل است که پتانسیل الکتریکی پایانه‌های مثبت و منفی آن به ترتیب $+۲۰V$ و -۲۰ است. اگر بار الکتریکی دو صفحهٔ خازن $+۸\mu C$ و $-۸\mu C$ باشد، ظرفیت خازن چند میکروفاراد است؟



۱) ۰/۲

۲) ۰/۴

۳) ۲/۵

۴) ۵

مشاوره در چنین سؤالاتی، ترتیب براساس عبارت‌ها مشخص می‌شود، نه جدول؛ بنابراین ابتدا باید هر عبارت را بخوانید و سپس تشخیص دهید که هر مورد، در کدام قسمت از جدول قرار می‌گیرد! حال در این سؤال، باید به این امر مهم دقت کنید که ترتیب جاهای خالی در جدول هم به هم ریخته است و الزاماً از «الف» شروع نمی‌شود! سخت شد، نه؟

Hint

به کمک رابطهٔ $V_{باتری} = V_+ - V_-$ اختلاف پتانسیل دو سر باتری که همان اختلاف پتانسیل دو سر خازن (V) است را به دست آورید. سپس از رابطهٔ $C = \frac{Q}{V}$ برای محاسبهٔ ظرفیت خازن استفاده کنید.

درس Box

هر باتری شامل دو پایانهٔ مثبت و منفی است و بنا به قرارداد، اختلاف پتانسیل الکتریکی دو سر باتری برابر با پتانسیل پایانهٔ مثبت منهای پتانسیل پایانهٔ منفی آن است:

پتانسیل الکتریکی پایانهٔ مثبت

$$\Delta V = V_+ - V_-$$

اختلاف پتانسیل دو سرباتری — پتانسیل الکتریکی پایانهٔ منفی

اگر یک خازن با ظرفیت C را به دو سر یک باتری با اختلاف پتانسیل $V_۱$ وصل کنیم، بار ذخیره‌شده روی خازن برابر با $Q_۱$ می‌شود و اگر اختلاف پتانسیل الکتریکی دو سر خازن را به $V_۲$ برسانیم، بار ذخیره‌شده روی آن $Q_۲$ خواهد شد؛ در این صورت روابط زیر برقرار است:

$$C = \frac{Q_۱}{V_۱} = \frac{Q_۲}{V_۲} = \frac{\Delta Q}{\Delta V}$$

توجه کنید در رابطهٔ بالا چون ساختمان خازن تغییر نکرده است، ظرفیت خازن ثابت است.

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: اختلاف پتانسیل باتری برابر با اختلاف پتانسیل پایانهٔ مثبت و منفی آن است؛ بنابراین اختلاف پتانسیل باتری که همان اختلاف پتانسیل دو سر خازن شارژشده است را به دست می‌آوریم:

$$V_{خازن} = V_{باتری} = V_+ - V_- = (۲۰) - (-۲۰) = +۴۰V$$

گام دوم: ظرفیت خازن را به کمک رابطهٔ $C = \frac{Q}{V}$ به دست می‌آوریم.

$$C = \frac{Q}{V} = \frac{۸\,\mu C}{۴۰V} = ۰/۲\,\mu F$$

گول نخوری

اختلاف پتانسیل دو سر باتری را $۲۰V$ در نظر نگیرید، اختلاف پتانسیل دو سر باتری برابر با اختلاف پتانسیل الکتریکی پایانهٔ مثبت و پایانهٔ منفی آن است.

سنجش کلاد
www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshClouds

۵۴ اختلاف پتانسیل بین دو صفحهٔ یک خازن را ۲۵ درصد افزایش می‌دهیم؛ اگر با این کار $15\ \mu C$ بر بار ذخیره‌شده در خازن افزوده شود، بار اولیهٔ ذخیره‌شده در این خازن چند میکروکولن است؟

۱) ۳۰ ۲) ۴۵

۳) ۶۰ ۴) ۷۵

Hint به کمک رابطهٔ $C=\frac{Q_1}{V_1}=\frac{\Delta Q}{\Delta V}$ و رابطهٔ $\Delta V=0/25V_1$ به راحتی می‌توانید بار اولیهٔ ذخیره‌شده در خازن را به دست آورید.

درس Box ظرفیت خازن فقط به ساختمان خازن (مساحت سطح متقابل صفحات، فاصلهٔ بین صفحات و جنس عایق بین صفحات) آن وابسته است و با تغییر اختلاف پتانسیل دو سر خازن، بار ذخیره‌شده روی صفحات آن به گونه‌ای تغییر می‌کند که نسبت $\frac{Q}{V}$ که بیانگر ظرفیت خازن است، ثابت بماند و رابطهٔ زیر برقرار است:

$$C=\frac{Q_1}{V_1}=\frac{Q_2}{V_2}=\frac{\Delta Q}{\Delta V}$$

پاسخ خیلی تشریحی ✔ **گام اول:** ظرفیت خازن از رابطهٔ $C=\frac{Q_1}{V_1}=\frac{\Delta Q}{\Delta V}$ به دست می‌آید. تغییرات بار الکتریکی $15\ \mu C$ است و اختلاف پتانسیل ۲۵ درصد افزایش یافته است، بنابراین داریم:

$$\frac{Q_1}{V_1}=\frac{\Delta Q}{\Delta V}\xrightarrow[\Delta Q=15\mu C]{V_2=1/25V_1}\frac{Q_1}{V_1}=\frac{15}{1/25V_1-V_1}\Rightarrow\frac{Q_1}{V_1}=\frac{15}{0/25V_1}\Rightarrow Q_1=60\ \mu C$$

سنجش کلاد
www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshClouds

۵۵ فاصلهٔ بین صفحه‌های یک خازن تخت $5mm$ و مساحت هر یک از صفحه‌های آن $10cm^2$ است. بین دو صفحهٔ خازن از یک مادهٔ دی‌الکتریک انعطاف‌پذیر با ثابت دی‌الکتریک $\kappa = 5$ پر شده است. اگر فاصلهٔ بین صفحه‌ها را ۴۰ درصد کاهش دهیم، ظرفیت خازن چند پیکوفاراد افزایش می‌یابد؟ $(\varepsilon_0 \simeq 9\times10^{-12}\ F/m)$

۱) ۶
۲) ۹
۳) ۱۲
۴) ۱۵

Hint

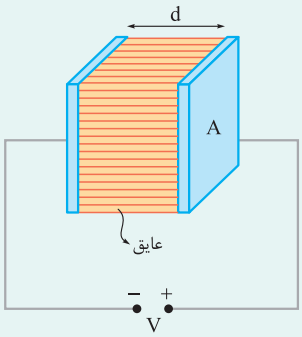
ظرفیت خازن در این سؤال فقط به دلیل تغییر فاصلهٔ بین صفحات، دچار تغییرات شده است و می‌توانیم تغییرات ظرفیتی خازن را از رابطهٔ مقابل به دست آوریم:

$$\Delta C = \kappa\varepsilon_0 A\left(\frac{1}{d_2}-\frac{1}{d_1}\right)$$

درس Box

ظرفیت خازن (C)، فقط به ساختمان خازن وابسته است و در صورتی که اختلاف پتانسیل دو سر خازن تغییر کند بار الکتریکی ذخیره‌شده در آن به صورتی تغییر می‌کند تا نسبت $\frac{Q}{V}$ ثابت بماند.

ظرفیت خازن به جنس عایق بین دو صفحه (دی‌الکتریک)، فاصله بین دو صفحهٔ خازن (d) و مساحت مشترک بین صفحات خازن (A) وابسته است و از رابطهٔ زیر به دست می‌آید:



$$C = \frac{\kappa\varepsilon_0 A}{d}$$

ظرفیت خازن (F) ← C

κ: ثابت دی الکتریک

A: مساحت مشترک بین دو صفحه (m^2)

d: فاصلهٔ بین دو صفحه (m)

ثابت دی‌الکتریک عددی بدون یکا است و برای خلأ و هوا برابر با یک است. ε_0 ضریب گذردهی الکتریکی خلأ است $(\varepsilon_0 = 8/85\times10^{-12}\ F/m)$.

پاسخ خیلی تشریحی ✔

گام اول: ظرفیت خازن از رابطهٔ $C = \frac{\kappa\varepsilon_0 A}{d}$ به دست می‌آید و در این سؤال فقط فاصلهٔ بین صفحات تغییر کرده است؛ بنابراین برای محاسبهٔ تغییرات ظرفیت خازن از رابطهٔ زیر استفاده می‌کنیم:

$$\Delta C = \kappa\varepsilon_0 A\left(\frac{1}{d_2}-\frac{1}{d_1}\right)$$

گام دوم: تغییرات ظرفیت خازن را محاسبه می‌کنیم $(d_2 = 0/6d_1 = 0/6\times5 = 3mm)$.

$$\Delta C = \kappa\varepsilon_0 A\left(\frac{1}{d_2}-\frac{1}{d_1}\right) = 5\times9\times10^{-12}\times(10\times10^{-4})\left(\frac{1}{3\times10^{-3}}-\frac{1}{5\times10^{-3}}\right)$$

$$\Rightarrow \Delta C = 45\times10^{-12}\times10^{-3}\left(\frac{1000}{3}-\frac{1000}{5}\right) = 45\times10^{-12}\times10^{-3}\left(\frac{2000}{15}\right) = 6\times10^{-12}F = 6pF$$

سنجش کلاد
www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshClouds

۵۶ مدار فلاش یک دوربین عکاسی، انرژی را تحت اختلاف پتانسیل $۱۰۰V$ در یک خازن ذخیره می‌کند. انرژی ذخیره‌شده در این خازن در مدت $۲ms$ به طور کامل تخلیه می‌شود. اگر توان متوسط خروجی فلاش $۵۰W$ باشد. ظرفیت خازن این دوربین چند میکروفاراد است؟

۱) ۱۰۰ ۲) ۲۰۰

۳) ۱۰ ۴) ۲۰

Hint ابتدا به کمک رابطهٔ $P_{av}=\frac{U}{t}$، انرژی ذخیره‌شده در خازن را به دست آورید، سپس از رابطهٔ $U=\frac{۱}{۲}CV^۲$ ظرفیت خازن به راحتی قابل محاسبه است.

درس Box اگر خازنی با ظرفیت C به اختلاف پتانسیل V وصل شده و بار ذخیره‌شده روی صفحه‌های آن Q باشد، به واسطهٔ وجود میدان الکتریکی بین صفحات آن، انرژی پتانسیل الکتریکی ذخیره‌شده است و از روابط زیر به دست می‌آید:

$$U=\frac{۱}{۲}CV^۲$$

$$U=\frac{۱}{۲}QV$$

$$U=\frac{Q^۲}{۲C}$$

اگر بار ذخیره‌شده در خازن در مدت زمان t تخلیه شود، آهنگ متوسط تخلیهٔ انرژی (توان متوسط) از رابطهٔ زیر به دست می‌آید:

$$P_{av}=\frac{U}{t}$$

P_{av} ↓ توان متوسط تخلیهٔ انرژی خازن (W)

U → انرژی ذخیره‌شده در خازن (J)

t → مدت‌زمان تخلیهٔ بار الکتریکی خازن (S)

پاسخ خیلی تشریحی ✔ **گام اول:** توان متوسط خروجی فلاش $۵۰W$ است، طبق رابطهٔ $P_{av}=\frac{U}{t}$، انرژی تخلیه‌شدهٔ خازن را به دست می‌آوریم:

$$۵۰=\frac{U}{۲\times۱۰^{-۳}} \Rightarrow U=۰/۱J$$

گام دوم: از رابطهٔ $U=\frac{۱}{۲}CV^۲$ برای محاسبهٔ ظرفیت خازن استفاده می‌کنیم:

$$U=\frac{۱}{۲}CV^۲ \Rightarrow ۰/۱=\frac{۱}{۲}C(۱۰۰)^۲ \Rightarrow C=۰/۲\times۱۰^{-۴}=۲۰\times۱۰^{-۶}F=۲۰\mu F$$

سنجش کلاد
www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshClouds

۵۷ یک خازن تخت بدون دی‌الکتریک به یک باتری بسته شده است تا باردار شود. پس از مدتی در حالی که باتری هم‌چنان به خازن متصل است، فاصلهٔ بین صفحات خازن را دو برابر می‌کنیم. کدام‌یک از موارد زیر درست است؟

الف) میدان الکتریکی میان صفحه‌ها نصف می‌شود.

ب) اختلاف پتانسیل میان صفحه‌ها، ۲ برابر می‌شود.

پ) بار الکتریکی ذخیره‌شده در خازن، ۲ برابر می‌شود.

ت) انرژی الکتریکی ذخیره‌شده در خازن، نصف می‌شود.

۱) الف و پ ۲) الف و ت ۳) ب و پ ۴) ب و ت

مشاوره این سؤال برگرفته از تمرین‌های آخر فصل کتاب درسی است، سؤالی که در کنکور سال ۱۳۹۹ آمده و باز هم احتمال دارد مطرح شود.

Hint

ابتدا با توجه به متصل‌بودن خازن به باتری، تشخیص دهید کدام‌یک از متغیرهای بار ذخیره‌شده در خازن یا اختلاف پتانسیل دو سر آن ثابت است. سپس در مرحلهٔ دوم به کمک رابطهٔ $\frac{C_2}{C_1}=\frac{\kappa_2}{\kappa_1}\times\frac{A_2}{A_1}\times\frac{d_1}{d_2}$، مشخص کنید ظرفیت خازن چگونه تغییر می‌کند.

در مرحلهٔ سوم از رابطهٔ $E=\frac{\Delta V}{d}$ برای بررسی تغییرات میدان الکتریکی استفاده کنید. و در نهایت از یکی از روابط $U=\frac{1}{2}QV=\frac{1}{2}CV^2=\frac{Q^2}{2C}$ برای بررسی تغییرات انرژی خازن بهره بگیرید.

درس Box

تا زمانی که خازن به باتری متصل است، اختلاف پتانسیل دو سر خازن ثابت است و تغییر نمی‌کند. اگر خازن را از باتری جدا کنیم (رابطه‌ای با باتری ندارد و تبادل بار الکتریکی نمی‌کند)، بار ذخیره‌شده در خازن ثابت است و تغییر نمی‌کند.

ظرفیت خازن، فقط به ساختمان خازن وابسته است و با تغییر اختلاف پتانسیل الکتریکی و بار ذخیره‌شده در خازن، ظرفیت خازن تغییر نمی‌کند. خازنی را در نظر بگیرید که اختلاف پتانسیل دو سر آن V و بار ذخیره‌شده در آن Q است، میدان الکتریکی بین صفحات این خازن از رابطهٔ زیر به دست می‌آید:

$$E=\frac{V}{d}=\frac{Q}{\kappa\varepsilon_0 A}$$

d فاصلهٔ بین صفحات خازن، κ ثابت دی‌الکتریک و A مساحت مشترک بین صفحات خازن است.

انرژی ذخیره‌شده در خازن از سه رابطهٔ زیر قابل محاسبه است:

V = اختلاف پتانسیل (V)

Q = بار الکتریکی (C)

C = ظرفیت (F)

U = انرژی (J)

$$U=\frac{1}{2}QV=\frac{1}{2}CV^2=\frac{Q^2}{2C}$$

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: تا زمانی که خازن به باتری متصل است، اختلاف پتانسیل دو سر خازن ثابت است و تغییر نمی‌کند (عبارت «ب» نادرست است).

گام دوم: تغییرات ظرفیت خازن را به دست می‌آوریم، فقط فاصلهٔ بین صفحات خازن دو برابر شده است:

$$\frac{C_2}{C_1}=\underbrace{\frac{\kappa_2}{\kappa_1}}_{\text{ثابت}}\times\underbrace{\frac{A_2}{A_1}}_{\text{ثابت}}\times\frac{d_1}{d_2}=1\times1\times\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$$

ظرفیت خازن نصف شده است.

گام سوم: به کمک رابطهٔ $Q=CV$، تغییرات بار الکتریکی ذخیره‌شده در خازن را بررسی می‌کنیم:

$$Q=C\underbrace{V}_{\text{ثابت}}\Rightarrow\frac{Q_2}{Q_1}=\underbrace{\frac{1}{2}}_{\text{نصف شده}}$$

بنابراین عبارت «پ» نادرست است.

گام چهارم: برای بررسی تغییرات میدان الکتریکی، از رابطهٔ $E=\frac{\Delta V}{d}$ استفاده می‌کنیم:

$$E=\frac{\overbrace{\Delta V}^{\text{ثابت}}}{\underbrace{d}_{\text{دوبرابر}}}\Rightarrow$$ درستی «الف» $\Rightarrow$ میدان الکتریکی بین صفحات نصف می‌شود.

سنجش کلاد
www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshClouds

گام پنجم: برای بررسی تغییرات انرژی ذخیره‌شده در خازن از رابطهٔ $U = \frac{1}{2}CV^2$ کمک می‌گیریم:

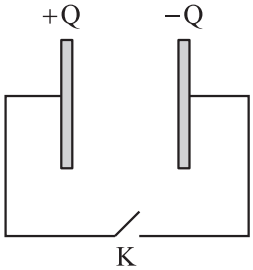
ثابت ↑

$U = \frac{1}{2}CV^2$ ⇒ درستی «ت» ⇒ انرژی ذخیره‌شده در خازن نصف می‌شود.

↓ نصف شده

سنجش کلاد
www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshClouds

۵۸ در شکل زیر، دو صفحهٔ خازن تخت بارداری را با بستن کلید K، به هم وصل می‌کنیم؛ در نتیجه جرقه‌ای زده می‌شود. با انجام کدام‌یک از اقدامات زیر، با بسته‌شدن کلید K، الزاماً جرقهٔ بزرگ‌تری حاصل می‌شود؟



الف) با ثابت‌ماندن بار صفحه‌ها، فاصلهٔ بین آن‌ها را افزایش دهیم.

ب) با ثابت‌ماندن بار صفحه‌ها، یک دی‌الکتریک بین آن‌ها قرار دهیم.

پ) بار اولیهٔ روی صفحه‌ها را افزایش و فاصلهٔ بین آن‌ها را کاهش دهیم.

ت) بار اولیهٔ روی صفحه‌ها را افزایش و مساحت آن‌ها را کاهش دهیم.

۱) الف و پ ۲) ب و پ

۳) ب و ت ۴) الف و ت

Hint در حالتی که انرژی ذخیره‌شده در خازن بیشتر باشد، جرقهٔ ایجادشده در خازن بزرگ‌تر خواهد شد. حال به کمک رابطهٔ $C=\frac{\kappa\varepsilon_{\circ}A}{d}$ و $U=\frac{Q^{۲}}{۲C}$، تک‌تک گزاره‌ها را بررسی کنید که مقدار بار ذخیره‌شده و ظرفیت خازن چگونه تغییر می‌کند تا در نهایت تغییرات انرژی ذخیره‌شدهٔ خازن را تحلیل کنید.

پاسخ خیلی تشریحی در این سؤال باید بررسی کنیم در کدام حالت انرژی ذخیره‌شده در خازن افزایش می‌یابد.

گام اول: بررسی عبارت «الف»: با ثابت‌ماندن بار صفحه‌ها (Q)، فاصلهٔ بین آن‌ها را افزایش دهیم. با افزایش فاصلهٔ بین صفحه‌ها، ظرفیت خازن طبق رابطهٔ $C=\frac{\kappa\varepsilon_{\circ}A}{d}$ کاهش می‌یابد.

$$U=\frac{Q^{۲}}{۲C}\ \xrightarrow[\text{کاهش}]{\text{ثابت}}\ \Rightarrow$$ ✓ انرژی ذخیره‌شده در خازن افزایش می‌یابد

گام دوم: بررسی عبارت «ب»: با ثابت‌ماندن بار صفحه‌ها (Q) و افزودن دی‌الکتریک، ظرفیت خازن افزایش می‌یابد:

$$U=\frac{Q^{۲}}{۲C}\ \xrightarrow[\text{افزایش}]{\text{ثابت}}\ \Rightarrow$$ ✗ انرژی ذخیره‌شده در خازن کاهش می‌یابد

گام سوم: بررسی عبارت «پ»: با افزایش بار اولیهٔ صفحه‌ها (Q) و کاهش فاصلهٔ بین صفحات خازن، تغییرات انرژی ذخیره‌شده در خازن را بررسی می‌کنیم. کاهش فاصلهٔ بین صفحات خازن طبق رابطهٔ $(C=\frac{\kappa\varepsilon_{\circ}A}{d})$ باعث افزایش ظرفیت خازن می‌شود.

$$U=\frac{Q^{۲}}{۲C}\ \xrightarrow[\text{افزایش}]{\text{افزایش}}\ \Rightarrow$$ ✗ نمی‌توانیم تغییرات انرژی ذخیره‌شده در خازن را تشخیص دهیم

گام چهارم: بررسی عبارت «ت»: با کاهش مساحت صفحات خازن، ظرفیت خازن کاهش می‌یابد:

$$U=\frac{Q^{۲}}{۲C}\ \xrightarrow[\text{کاهش}]{\text{افزایش}}\ \Rightarrow$$ ✓ انرژی ذخیره‌شده در خازن افزایش می‌یابد

www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshClouds

۵۹ ظرفیت خازنی $۵\mu F$ و بار الکتریکی آن Q است. اگر $+۱۰mC$ بار الکتریکی را از صفحهٔ منفی خازن جدا کرده و به صفحهٔ مثبت آن منتقل کنیم، انرژی ذخیره‌شده در خازن $۳۰J$ افزایش می‌یابد. انرژی اولیهٔ ذخیره‌شده در خازن چند ژول بوده است؟

۱) ۵ ۲) ۱۰

۳) ۱۵ ۴) ۲۰

مشاوره این سؤال که تقریباً سخت به حساب می‌آید برگرفته از مسائل آخر فصل کتاب درسی است. سؤالی که در کنکور ۱۳۹۷ خارج از کشور، ۱۳۹۹ خارج از کشور و ۱۴۰۰ داخل مطرح شده است. (خلاصه بگم که مهمه!)

Hint

ابتدا با توجه به انتقال بار، تغییرات بار الکتریکی را به دست آورید؛ به عبارتی $Q_۲$ را برحسب $Q_۱$ بنویسید. سپس از رابطهٔ $\Delta U = \frac{Q_۲^۲ - Q_۱^۲}{۲C}$ برای محاسبهٔ بار $Q_۱$ استفاده کنید و در نهایت انرژی ذخیره‌شده در خازن در حالت اول $(U_۱ = \frac{Q_۱^۲}{۲C})$ را به دست آورید.

درس Box

خازنی با ظرفیت C را در نظر بگیرید که بار ذخیره‌شده روی آن Q باشد. اگر بار $+q$ را از صفحهٔ مثبت به صفحهٔ منفی خازن انتقال دهیم یا بار $-q$ را از صفحهٔ منفی به صفحهٔ مثبت انتقال دهیم، اندازهٔ بار ذخیره‌شده در خازن کاهش یافته و برابر با $(Q-q)$ خواهد شد و در نتیجه انرژی ذخیره‌شده در خازن کاهش می‌یابد.

(بار ذخیره‌شده در خازن کاهش یافته) $\Rightarrow Q_۲ = Q - q$

$$U = \frac{Q_۲^۲}{۲C} \quad (\uparrow \text{ثابت} \downarrow)$$

اگر بار $-q$ را از صفحهٔ مثبت به صفحهٔ منفی خازن انتقال دهیم یا بار $+q$ را از صفحهٔ منفی به صفحهٔ مثبت انتقال دهیم، اندازهٔ بار ذخیره‌شده در خازن افزایش می‌یابد و به $(Q+q)$ می‌رسد و در نتیجه انرژی ذخیره‌شده در خازن افزایش می‌یابد.

(بار ذخیره‌شده در خازن افزایش یافته) $\Rightarrow Q_۲ = Q + q$

$$U = \frac{Q_۲^۲}{۲C} \quad (\uparrow \text{ثابت} \downarrow)$$

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: اگر بار ذخیره‌شده در خازن Q باشد، با جدا کردن $۱۰\,mC$ بار الکتریکی از صفحهٔ منفی و انتقال به صفحهٔ مثبت، بار ذخیره‌شده در خازن $(Q+۱۰)mC$ خواهد شد (توجه کنید بار Q را برحسب میلی‌کولن در نظر گرفتیم).

گام دوم: تغییرات انرژی ذخیره‌شده در خازن را به کمک رابطهٔ $\Delta U = \frac{Q_۲^۲ - Q_۱^۲}{۲C}$ مشخص می‌کنیم تا Q را به دست آوریم:

$$\Delta U = \frac{Q_۲^۲ - Q_۱^۲}{۲C} = \frac{(Q_۲ - Q_۱)(Q_۲ + Q_۱)}{۲C} = \frac{(۱۰)(۲Q_۱ + ۱۰)}{۲(۵)} = ۳۰$$

$$۲Q_۱ + ۱۰ = ۳۰ \Rightarrow ۲Q_۱ = ۲۰ \Rightarrow Q_۱ = ۱۰\,mC$$

گام سوم: انرژی ذخیره‌شدهٔ اولیه را به دست می‌آوریم:

$$U_۱ = \frac{Q_۱^۲}{۲C} = \frac{(۱۰\times۱۰^{-۳})^۲}{۲\times۵\times۱۰^{-۶}} = \frac{۱۰^{-۴}}{۱۰^{-۵}} = ۱۰\,J$$

سنجش کلاد
www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshClouds

۶۰ خازنی به ظرفیت $۶۰\mu F$، که بین صفحه‌های آن هوا است، به یک باتری با اختلاف پتانسیل $۲۰V$ متصل است. اگر در این حالت، فاصلهٔ بین صفحه‌های آن را ٪۵۰ افزایش داده و بین صفحات آن یک عایق با ثابت دی‌الکتریک ۶ قرار دهیم، انرژی ذخیره‌شده در خازن چند میلی‌ژول افزایش می‌یابد؟

۱) ۱۲ ۲) ۲۴

۳) ۳۶ ۴) ۴۸

Hint

ابتدا انرژی ذخیره‌شده در خازن را در حالت اول به کمک رابطهٔ $U_۱ = \frac{۱}{۲}C_۱V_۱^۲$ به دست آورید، سپس به کمک رابطهٔ $\frac{C_۲}{C_۱} = \frac{\kappa_۲}{\kappa_۱} \times \frac{A_۲}{A_۱} \times \frac{d_۱}{d_۲}$، ظرفیت خازن را در حالت دوم به دست آورید. در نهایت انرژی ذخیره‌شده در خازن را در حالت دوم به کمک رابطهٔ $U_۲ = \frac{۱}{۲}C_۲V_۲^۲$ محاسبه کنید تا به خواستهٔ سؤال، یعنی تغییرات انرژی ذخیره‌شده در خازن برسید.

درس Box

تا زمانی که خازن به باتری وصل است، اختلاف پتانسیل دو سر آن تغییر نمی‌کند. ظرفیت خازن، فقط به ساختمان خازن وابسته است که به صورت نسبی (مقایسه‌ای) به صورت زیر بیان می‌شود:

$$\frac{C_۲}{C_۱} = \frac{\kappa_۲}{\kappa_۱} \times \frac{A_۲}{A_۱} \times \frac{d_۱}{d_۲}$$

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: انرژی ذخیره‌شده در خازن را در حالت اول به دست می‌آوریم:

$$U_۱ = \frac{۱}{۲}C_۱v_۱^۲ = \frac{۱}{۲}(۶۰)(۲۰)^۲ = ۱۲۰۰۰\,\mu J = ۱۲mJ$$

گام دوم: در حالت دوم، خازن به باتری وصل است (اختلاف پتانسیل دو سر خازن تغییر نکرده) ولی فاصلهٔ بین صفحات ۵۰ درصد افزایش یافته و بین صفحات آن یک عایق با ثابت دی‌الکتریک $\kappa = ۶$ قرار داده می‌شود؛ بنابراین ظرفیت خازن تغییر می‌کند:

$$\frac{C_۲}{C_۱} = \frac{\kappa_۲}{\kappa_۱} \times \frac{A_۲}{A_۱} \times \frac{d_۱}{d_۲} = \frac{۶}{۱} \times ۱ \times \frac{۱}{۱/۵} = ۴$$

$$C_۲ = ۴C_۱ = ۴(۶۰) = ۲۴۰\,\mu F$$

گام سوم: انرژی ذخیره‌شده در خازن را در حالت دوم به دست می‌آوریم:

$$U_۲ = \frac{۱}{۲}C_۲(V_۱^۲) = \frac{۱}{۲}(۲۴۰)(۲۰)^۲ = ۴۸۰۰۰\,\mu J = ۴۸mJ$$

گام چهارم: تغییرات انرژی ذخیره‌شده در خازن را محاسبه می‌کنیم:

$$\Delta U = U_۲ - U_۱ = ۴۸ - ۱۲ = ۳۶\,mJ$$

سنجش کلاد
www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshClouds

شیمی یازدهم

۶۱ کدام مطلب درست است؟

۱) بیش از ۵۰ درصد عنصرهای دورهٔ سوم جدول تناوبی، رسانایی الکتریکی و گرمایی ندارند.

۲) گاز فلوئور در دمای $-۱۰۰^{\circ}C$ با گاز هیدروژن واکنش نمی‌دهد.

۳) اختلاف شعاع اتمی گوگرد و سیلیسیم، از اختلاف شعاع اتمی کلر و آلومینیم، کم‌تر است.

۴) عنصری که در دورهٔ چهارم جدول تناوبی بوده و دارای هفت الکترون ظرفیتی است، به یقین چکش‌خوار نیست.

$_{25}Mn$ (گروه ۷) و $_{35}Br$ (گروه ۱۷)

پاسخ خیلی تشریحی ✔ بررسی گزینه‌ها:

گزینهٔ (۱): از هشت عنصر دورهٔ سوم، چهار عنصر $(_{11}Na, _{12}Mg, _{13}Al$ و $_{14}Si)$، رسانایی الکتریکی و گرمایی دارند و چهار عنصر $(_{15}P, _{16}S, _{17}Cl$ و $_{18}Ar)$، رسانایی الکتریکی و گرمایی ندارند، *یعنی ۵۰ − ۵۰ مساوی!*

گزینهٔ (۲): گاز فلوئور حتی در دمای $-۲۰۰^{\circ}C$ با گاز هیدروژن واکنش می‌دهد؛ بنابراین در دمای $-۱۰۰^{\circ}C$ که دمای بالاتری است نیز قطعاً واکنش انجام می‌شود.

نکته شرایط واکنش هالوژن‌ها با گاز هیدروژن در جدول زیر آمده است:

نام هالوژن	شرایط واکنش با گاز هیدروژن
فلوئور	حتی در دمای $-۲۰۰^{\circ}C$ به سرعت واکنش می‌دهد.
کلر	در دمای اتاق به آرامی واکنش می‌دهد.
برم	در دمای $۲۰۰^{\circ}C$ واکنش می‌دهد.
ید	در دمای بالاتر از $۴۰۰^{\circ}C$ واکنش می‌دهد.

کاهش واکنش‌پذیری ↓ — افزایش دمای لازم برای انجام واکنش ↓

گزینهٔ (۳): هر چهار عنصر متعلق به دورهٔ سوم هستند. در یک دوره از چپ به راست، شعاع اتمی کاهش می‌یابد.

با توجه به این‌که در دورهٔ سوم، فاصلهٔ گوگرد و سیلیسیم کم‌تر از فاصلهٔ کلر و آلومینیم است؛ اختلاف شعاع اتمی گوگرد و سیلیسیم کم‌تر می‌باشد:

$$\text{شعاع اتمی}: Na > Mg > \underbrace{Al > \overbrace{Si > P > S}^{\text{اختلاف کم‌تر}}}_{\text{اختلاف بیشتر}} > Cl$$

گزینهٔ (۴):

نکته برای عنصرهای گروه‌های ۱ تا ۱۲، شمار الکترون‌های ظرفیتی با شمارهٔ گروه برابر است اما برای عنصرهای گروه ۱۳ تا ۱۸ (به‌جز هلیم) شمار الکترون‌های ظرفیت برابر با عدد یکان شمارهٔ گروه است.

در دورهٔ چهارم، عنصر گروه ۷ $(_{25}Mn)$ و عنصر گروه ۱۷ $(_{35}Br)$، دارای ۷ الکترون ظرفیتی هستند؛ بنابراین اگر عنصر مورد نظر، فلز منگنز باشد، چکش‌خوار است.

سنجش کلاد
www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshClouds

۶۲ در گروه هالوژن‌ها، ..... گروه فلزهای قلیایی، با افزایش عدد اتمی، شعاع اتمی عنصرها ..... می‌یابد و در این گروه، ..... گروه فلزهای قلیایی، واکنش‌پذیری عنصرها از بالا به پایین، ..... می‌یابد.

۱) همانند ـ افزایش ـ همانند ـ کاهش

۲) برخلاف ـ افزایش ـ برخلاف ـ کاهش

۳) همانند ـ افزایش ـ برخلاف ـ کاهش

۴) برخلاف ـ کاهش ـ همانند ـ افزایش

مشاوره شما برای کنکور، باید به روندهای تناوبی جدول کاملاً مسلط باشید. یکی از این روندها که ممکنه بعضی‌ها رو گول بزنه، چگونگی تغییر واکنش‌پذیری عنصرهااست.

درس Box

روندهای تناوبی در دسته‌های s و p جدول دوره‌ای

در یک دوره از چپ به راست	در یک گروه از بالا به پایین
شعاع اتمی عنصرها کاهش می‌یابد.	شعاع اتمی عنصرها افزایش می‌یابد.
خصلت فلزی عنصرها کاهش می‌یابد.	خصلت فلزی عنصرها افزایش می‌یابد.
خصلت نافلزی عنصرها افزایش می‌یابد.	خصلت نافلزی عنصرها کاهش می‌یابد.
واکنش‌پذیری فلزها کاهش می‌یابد.	واکنش‌پذیری فلزها افزایش می‌یابد.
واکنش‌پذیری نافلزها افزایش می‌یابد.	واکنش‌پذیری نافلزها کاهش می‌یابد.

پاسخ خیلی تشریحی ✔

در همهٔ گروه‌های جدول تناوبی مانند هالوژن‌ها، فلزهای قلیایی و...، با افزایش عدد اتمی عنصرها از بالا به پایین، شعاع اتمی افزایش می‌یابد، اما روند تغییر واکنش‌پذیری عنصرها در گروه‌های فلزی و نافلزی با هم متفاوت است. برای فلزها هر چه شعاع اتمی بیشتر باشد، جاذبهٔ هسته روی الکترون‌های ظرفیتی کم‌تر شده و فلز راحت‌تر الکترون از دست داده، یعنی خصلت فلزی و واکنش‌پذیری هم بیشتر می‌شود. *برای نافلزها قضیه برعکسه!* یعنی واکنش‌پذیری و خصلت نافلزی در گروه، با شعاع اتمی رابطهٔ عکس دارد:

واکنش‌پذیری فلزهای قلیایی: $Li < Na < K < Rb < Cs$

واکنش‌پذیری هالوژن‌ها: $F_2 > Cl_2 > Br_2 > I_2$

سنجش کلاد
www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshClouds

۶۳ کدام گزینه درست است؟

۱) در جدول دوره‌ای فقط یک فلز با ۳ الکترون ظرفیتی وجود دارد.

۲) در جدول دوره‌ای فقط یک نافلز به دستهٔ s تعلق دارد.

۳) در جدول دوره‌ای فقط یک نافلز با ۴ الکترون ظرفیتی وجود دارد.

۴) در جدول دوره‌ای فقط یک نافلز جامد وجود دارد.

نکته برای عنصرهای گروه ۱ تا ۱۲، شمار الکترون‌های ظرفیتی با شمارهٔ گروه برابر است، اما برای عنصرهای گروه ۱۳ تا ۱۸ (به‌جز هلیم) شمار الکترون‌های ظرفیت برابر با یکان شمارهٔ گروه است.

پاسخ خیلی تشریحی ✔

بررسی گزینه‌ها:

گزینهٔ (۱): عنصرهای گروه ۳ و ۱۳ جدول تناوبی، دارای ۳ الکترون ظرفیتی هستند. در این دو گروه، چندین فلز وجود دارد و نه فقط ۱ فلز! مثلاً $_{21}Sc$ از گروه ۳ و $_{13}Al$ و $_{31}Ga$ از گروه ۱۳، فلز هستند.

گزینهٔ (۲): دو نافلز هیدروژن و هلیم به دستهٔ s تعلق دارند و بقیهٔ نافلزها متعلق به دستهٔ p هستند.

گزینهٔ (۳): عنصرهای گروه ۴ و ۱۴ جدول تناوبی، دارای ۴ الکترون ظرفیتی هستند. عنصرهای گروه ۴ همگی فلز هستند، اما در گروه ۱۴، هم فلز، هم نافلز و هم شبه‌فلز وجود دارد که در بین آن‌ها، فقط کربن، نافلز است.

تنها نافلز دارای ۴ الکترون ظرفیتی ← $_{6}C$ از گروه ۱۴

گزینهٔ (۴): حداقل دو تا نافلز جامد رو که همه *می‌شناسن*: کربن و گوگرد.

سنجش کلاد
www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshClouds

۶۴ دانشجویی در آزمایشگاه یک نوار منیزیم را وارد محلول هیدروکلریک اسید می‌کند. با توجه به جدول زیر که پس از ناپدیدشدن نوار منیزیم به دست آمده است، جرم نوار منیزیم اولیه برحسب گرم و بازده درصدی واکنش کدام است؟ $(Mg = 24\,g.mol^{-1})$

$$Mg(s) + 2HCl(aq) \rightarrow MgCl_2(aq) + H_2(g)$$

نماد شیمیایی ماده	حجم گاز در شرایط استاندارد (لیتر)
H_2 (فراورده‌ای که دانشجو به دست آورده است.)	۲/۱
H_2 (فراورده‌ای که انتظار داشتیم به دست آید.)	۲/۸

۱) ۷۵ ـ ۲/۲۵
۲) ۷۵ ـ ۳
۳) ۸۰ ـ ۲/۲۵
۴) ۸۰ ـ ۳

نکته به بیشترین مقدار فراورده‌های قابل انتظار از محاسبه‌های استوکیومتری (با فرض مصرف کامل یک یا تمام واکنش‌دهنده‌ها)، مقدار نظری می‌گویند؛ در حالی که به مقدار فراورده‌هایی که در عمل به دست آیند، مقدار عملی می‌گویند.

به علت پاره‌ای از مشکلات! مقدار عملی فراورده‌ها کم‌تر از مقدار نظری آن‌ها است، بازده درصدی که نشان‌دهندهٔ نسبت این دو مقدار است و کارایی یک واکنش را نشان می‌دهد طبق رابطهٔ زیر تعریف می‌شود:

$$\text{بازده درصدی واکنش} = \frac{\text{مقدار عملی}}{\text{مقدار نظری}} \times 100$$

پاسخ خیلی تشریحی ✔ مقدار عملی و نظری فراورده مشخص است؛ بنابراین خیلی راحت می‌توانیم بازده درصدی واکنش را حساب کنیم:

$$\text{بازده درصدی} = \frac{\text{مقدار عملی}}{\text{مقدار نظری}} \times 100 = \frac{2/1}{2/8} \times 100 = \frac{3 \times \cancel{7}}{4 \times \cancel{7}} \times 100 = \%75$$

برای محاسبهٔ جرم اولیهٔ منیزیم می‌توانیم از مقدار نظری فراورده استفاده کنیم:

$$2/8\,L\,H_2 \times \frac{1\,mol\,H_2}{22/4\,L\,H_2} \times \frac{1\,mol\,Mg}{1\,mol\,H_2} \times \frac{24\,g\,Mg}{1\,mol\,Mg} = \frac{\overset{1}{\cancel{28}} \times 24}{\underset{8}{\cancel{224}}} = 3\,g\,Mg$$

گول نخوری ✘ *هواستون باشه که* اگر بخواهیم از مقدار عملی فراورده به مقدار واکنش‌دهنده برسیم، حتماً باید بازده درصدی را در محاسبات وارد کنیم:

$$2/1\,L\,H_2\text{عملی} \times \underbrace{\frac{100\,L\,H_2\text{نظری}}{75\,L\,H_2\text{عملی}}}_{\text{مفهوم بازده درصدی}} \times \frac{1\,mol\,H_2}{22/4\,L\,H_2} \times \frac{1\,mol\,Mg}{1\,mol\,H_2} \times \frac{24\,g\,Mg}{1\,mol\,Mg} = 3\,g\,Mg$$

سنجش کلاد
www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshClouds

۶۵ هر یک از توصیف‌های زیر، مربوط به یک یا چند عنصر جدول دوره‌ای است. کدام عنصر داده‌شده در گزینه‌ها، با هیچ‌یک از این عبارت‌ها تطابق ندارد؟

- عنصری فلزی است که بیشترین مصرف سالانه را در جهان دارد.
- عنصری است که به شکل آزاد نیز در طبیعت وجود دارد.
- دارای چند دگرشکل است که دگرشکل سفید آن را زیر آب نگه می‌دارند.
- ترکیب‌های رنگی دارد و رنگ سرخ زیبای یاقوت را می‌توان به وجود یون سه بار مثبت آن نسبت داد.

۱) $_{16}A$ ۲) $_{26}X$ ۳) $_{13}D$ ۴) $_{24}M$

پاسخ خیلی تشریحی ✔ عنصر $_{13}D$ با هیچ‌یک از عناصر توصیف‌شده در عبارت‌های داده‌شده تطابق ندارد.

بررسی عبارت‌ها:

- آهن با نماد شیمیایی $_{26}Fe$، فلزی است که در سطح جهان بیشترین مصرف سالانه را در بین صنایع گوناگون دارد. (رد گزینهٔ (۲))
- اغلب عنصرها در طبیعت به شکل ترکیب یافت می‌شوند، ولی برخی نافلزها مانند اکسیژن با نماد شیمیایی $_{8}O$، گوگرد با نماد شیمیایی $_{16}S$ و ... به شکل آزاد در طبیعت وجود دارد و وجود نمونه‌هایی از فلزهای نقره، مس و پلاتین نیز در طبیعت گزارش شده است. (رد گزینهٔ (۱))

نکته

شکل حضور عنصرها در طبیعت
- به شکل ترکیب (اغلب عنصرها)
  - نافلز: فلوئور، اکسیژن و ...
  - فلز: سدیم، آهن و ...
- به شکل آزاد
  - نافلز: اکسیژن، نیتروژن، گازهای نجیب و ...
  - فلز: نقره، مس، پلاتین، طلا و ...

- فسفر $_{15}P$ دارای چند دگرشکل است که نوع سفید آن را زیر آب نگه می‌دارند. (در گزینه‌ها به این عنصر اشاره نشده است.)
- فلزهای واسطه ترکیب‌های رنگی دارند؛ در نتیجه این عبارت می‌تواند مربوط به عنصر $_{24}M$ (فلز واسطهٔ کروم) باشد. دقت کنید که عنصر $_{13}D$ (آلومینیم) یک فلز اصلی است و ترکیب رنگی ندارد.

سنجش کلاد
www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshClouds

۶۶ عنصر A یکی از شبه‌فلزهای جدول تناوبی است. اگر در گروه شامل A، فقط یک عنصر نافلزی X وجود داشته باشد، کدام مطلب درست است؟

۱) حالت فیزیکی عنصرهای A و X در دمای اتاق متفاوت است.

۲) A می‌تواند با پنجمین گاز نجیب جدول تناوبی، هم‌دوره باشد.

۳) تفاوت عدد اتمی عنصر X با نخستین فلز گروه خود، برابر با عدد اتمی هفتمین عنصر واسطهٔ دورهٔ پنجم است.

۴) عدد اتمی A، به یقین از عدد اتمی هالوژن مایع جدول دوره‌ای، کوچک‌تر است.

مشاوره این سؤال، یک سؤال مفهومی به‌سبک کنکورهای ۱۴۰۳ است.

پاسخ خیلی تشریحی

همهٔ شبه‌فلزها در گروه‌های ۱۴ تا ۱۷ جدول تناوبی قرار دارند. در میان این گروه‌ها، فقط گروه چهاردهم است که فقط دارای یک نافلز می‌باشد؛ بنابراین عنصر A یکی از شبه‌فلزات سیلیسیم ($_{14}Si$) یا ژرمانیم ($_{32}Ge$) و عنصر X همان نافلز کربن ($_{6}C$) است.

بررسی گزینه‌ها:

گزینهٔ (۱): حالت فیزیکی همهٔ عناصر موجود در گروه چهاردهم جدول تناوبی در دمای اتاق، جامد است و مشابه یکدیگر می‌باشد.

گزینهٔ (۲): شبه‌فلز سیلیسیم ($_{14}Si$) در دورهٔ سوم جدول تناوبی و شبه‌فلز ژرمانیم ($_{32}Ge$) در دورهٔ چهارم جدول تناوبی قرار دارد؛ بنابراین عنصر A نمی‌تواند با پنجمین گاز نجیب جدول تناوبی یا همان گاز نجیب موجود در دورهٔ پنجم جدول، هم‌دوره باشد.

گزینهٔ (۳): نخستین فلز گروه چهاردهم جدول تناوبی، قلع ($_{50}Sn$) است که تفاوت عدد اتمی این عنصر با عدد اتمی عنصر کربن ($_{6}C$) برابر $۵۰ - ۶ = ۴۴$ می‌باشد. عدد اتمی عنصرهای واسطهٔ دورهٔ پنجم، از ۳۹ تا ۴۸ است؛ بنابراین عدد اتمی هفتمین عنصر واسطهٔ دورهٔ پنجم برابر با ۴۵ است.

نکته با توجه به قرارداشتن فلزهای واسطه در گروه‌های ۳ تا ۱۲ و عدد اتمی گازهای نجیب، می‌توان محدودهٔ عدد اتمی فلزهای واسطهٔ هر دوره را به دست آورد:

شمارهٔ دوره	عدد اتمی عنصرهای دستهٔ d (فلزهای واسطه)
۴	۲۱ ـ ۳۰
۵	۳۹ ـ ۴۸
۶	۷۱ ـ ۸۰
۷	۱۰۳ ـ ۱۱۲

گزینهٔ (۴): هالوژن مایع جدول تناوبی، برم ($_{35}Br$) است که عدد اتمی آن از عدد اتمی هر دو شبه‌فلز سیلیسیم ($_{14}Si$) و ژرمانیم ($_{32}Ge$)، بزرگ‌تر است.

سنجش کلاد
www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshClouds

۶۷ اگر محلولی حاوی ۶ گرم سدیم هیدروکسید، ۰/۰۵ مول کلریدی از آهن را رسوب دهد؛ رنگ رسوب تولیدشده و شمار الکترون‌ها با $l = ۲$ در کاتیون آهن موجود در محلول، کدام است؟ $(H = ۱, O = ۱۶, Na = ۲۳ : g.mol^{-۱})$

۱) سبز ـ ۶
۲) قرمز قهوه‌ای ـ ۵
۳) سبز ـ ۵
۴) قرمز قهوه‌ای ـ ۶

Hint با توجه به نامعلوم‌بودن بار کاتیون آهن شرکت‌کننده در واکنش، فرمول شیمیایی کلرید آهن مورد نظر را به صورت $FeCl_n$ در نظر بگیر و معادلهٔ موازنه‌شدهٔ واکنش آن با سدیم هیدروکسید را بنویس؛ سپس با توجه به مقادیر مصرفی $NaOH$ و $FeCl_n$ در واکنش، n را به دست بیار. در نهایت با توجه به مقدار n به‌دست‌آمده، رنگ رسوب و با توجه به آرایش الکترونی کاتیون، شمار الکترون‌های زیرلایهٔ d آن را مشخص کن.

نکته آهن $(_{۲۶}Fe)$ دارای دو نوع کاتیون پایدار $Fe^{۲+}$ و $Fe^{۳+}$ می‌باشد؛ در نتیجه دو نوع کلرید با فرمول‌های $FeCl_۲$ و $FeCl_۳$ تشکیل می‌دهد. محلول آبی این ترکیب‌ها، مطابق معادله‌های زیر می‌تواند با محلول سدیم هیدروکسید واکنش داده و رسوبی سبزرنگ یا قرمز ـ قهوه‌ای رنگ تشکیل دهد:

$$FeCl_۲(aq) + ۲NaOH(aq) \rightarrow \underbrace{Fe(OH)_۲(s)}_{\text{رسوب سبزرنگ}} + ۲NaCl(aq)$$

$$FeCl_۳(aq) + ۳NaOH(aq) \rightarrow \underbrace{Fe(OH)_۳(s)}_{\text{رسوب قرمز ـ قهوه‌ای رنگ}} + ۳NaCl(aq)$$

پاسخ خیلی تشریحی **گام اول:** ابتدا با توجه به این‌که بار کاتیون فلز آهن مشخص نمی‌باشد؛ فرمول شیمیایی کلرید آهن را به صورت $FeCl_n$ در نظر می‌گیریم و معادلهٔ موازنه‌شدهٔ واکنش انجام‌شده را می‌نویسیم:

$$FeCl_n(aq) + nNaOH(aq) \rightarrow Fe(OH)_n(s) + nNaCl(aq)$$

گام دوم: با توجه به مقدار سدیم هیدروکسید $(NaOH)$ و کلرید آهن $(FeCl_n)$ مصرف‌شده در واکنش، بار نامعلوم کاتیون آهن را به دست می‌آوریم و سپس رنگ رسوب هیدروکسید تولیدشده از آن را تشخیص می‌دهیم:

$$۶\,g\,NaOH \times \frac{۱\,mol\,NaOH}{۴۰\,g\,NaOH} \times \frac{۱\,mol\,FeCl_n}{n\,mol\,NaOH} = ۰/۰۵\,mol\,FeCl_n$$

$$\Rightarrow \frac{\overset{۳}{\cancel{۶}}}{\underset{۲۰}{\cancel{۴۰}} \times n} = ۰/۰۵ \Rightarrow n = \frac{۳}{۲۰ \times ۰/۰۵} = ۳ \Rightarrow \text{رسوب تولیدشده} : Fe(OH)_۳ \Rightarrow \text{رسوب قرمز ـ قهوه‌ای رنگ}$$

گام سوم: عدد کوانتومی $l = ۲$ مربوط به زیرلایهٔ d است. در آرایش الکترونی کاتیون $_{۲۶}Fe^{۳+}$، ۵ الکترون در زیرلایهٔ $۳d$ وجود دارد:

$$_{۲۶}Fe : [_{۱۸}Ar]\,۳d^۶\,۴s^۲ \Rightarrow {}_{۲۶}Fe^{۳+} : [_{۱۸}Ar]\,۳d^۵$$

سنجش کلاد
www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshClouds

۶۸ مقایسهٔ واکنش‌پذیری سه فلز اصلی **A**، **B** و **C** به صورت $C > B > A$ است. با توجه به آن، پاسخ درست پرسش‌های زیر در کدام گزینه آمده است؟

مشاوره این سؤال عیناً از امتحان نهایی خرداد ۱۴۰۳ برای شما انتخاب شده است.

الف) در شرایط یکسان کدام واکنش روبه‌رو انجام‌پذیر است؟

I) $ASO_4(aq) + B(s) \rightarrow$

II) $B(s) + C(NO_3)_2(aq) \rightarrow$

ب) اگر **A** و **C** در یک دورهٔ جدول دوره‌ای عنصرها باشند، عدد اتمی کدام‌یک بیشتر است؟

۱) A _ I

۲) A _ II

۳) C _ I

۴) C _ II

درس Box

در هر واکنش شیمیایی که به طور طبیعی انجام می‌شود، واکنش‌پذیری فراورده‌ها از واکنش‌دهنده‌ها کم‌تر است.

پس اگر یک واکنش به ما بدهند که در دو طرفش یک عنصر آزاد وجود داشته باشد *و بگن به طور طبیعی انجام می‌شه، ما خیلی سریع می‌تونیم* واکنش‌پذیری دو عنصر آزاد در دو طرف معادله را با هم مقایسه کنیم.

$$\underset{\text{ترکیب}}{AB} + \underset{\text{عنصر}}{C} \rightarrow \underset{\text{ترکیب}}{AC} + \underset{\text{عنصر}}{B} \Rightarrow \text{واکنش‌پذیری} : B < C$$

در معادلهٔ کلی بالا، واکنش‌پذیری C بیشتر بوده است به همین دلیل میل بیشتری به تشکیل ترکیب داشته؛ از این رو *جاشو با* B *عوض کرده!*

پاسخ خیلی تشریحی ✔

الف) عنصری با واکنش‌پذیری بیشتر می‌تواند جای عنصری با واکنش‌پذیری کم‌تر را در ترکیبش بگیرد؛ بنابراین در شرایط یکسان، واکنش (I) انجام‌پذیر است، زیرا واکنش‌پذیری فلز B از واکنش‌پذیری فلز A بیشتر است؛ در صورتی که واکنش (II)، انجام‌ناپذیر است؛ زیرا واکنش‌پذیری فلز B از واکنش‌پذیری فلز C کم‌تر می‌باشد.

ب) در یک دورهٔ جدول تناوبی از چپ به راست با افزایش عدد اتمی فلزها، واکنش‌پذیری و خصلت فلزی آن‌ها کاهش می‌یابد؛ بنابراین با توجه به این‌که واکنش‌پذیری فلز A از واکنش‌پذیری فلز C کم‌تر است؛ پس عدد اتمی فلز A، بیشتر از عدد اتمی فلز C می‌باشد (یا هر چه واکنش‌پذیری فلزی بیشتر باشد، شعاع آن در دوره، بزرگ‌تر است و عدد اتمی آن کوچک‌تر می‌باشد).

سنجش کلاد
www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshClouds

۶۹ یک کود شیمیایی دارای آمونیوم سولفات ($(NH_4)_2SO_4$) و مقداری ناخالصی است. اگر درصد خلوص یون سولفات در این کود برابر ۶۰٪ باشد، یک کیلوگرم از این کود، چند گرم نیتروژن برای گیاه تأمین می‌کند؟ (در ناخالصی‌ها یون سولفات و نیتروژن وجود ندارد؛ $H=1, N=14, O=16, S=32 : g.mol^{-1}$)

۱) ۸۷/۵ ۲) ۹۰ ۳) ۱۷۵ ۴) ۲۴۰

پاسخ خیلی تشریحی ابتدا از جرم کود به جرم یون سولفات می‌رسیم و سپس با توجه به فرمول آمونیوم سولفات و مقدار سولفات، جرم نیتروژن موجود در کود را حساب می‌کنیم:

$$(NH_4)_2SO_4 \sim 2NH_4^+ + SO_4^{2-}$$

$$1kg\ \text{کود} \times \frac{1000g\ \text{کود}}{1kg\ \text{کود}} \times \frac{60g\ SO_4^{2-}}{100g\ \text{کود}} \times \frac{1mol\ SO_4^{2-}}{96g\ SO_4^{2-}} \times \frac{2mol\ NH_4^+}{1mol\ SO_4^{2-}} \times \frac{1mol\ N}{1mol\ NH_4^+} \times \frac{14g\ N}{1mol\ N}$$

$$= \frac{\overset{1}{\cancel{12}} \times 14 \times 100}{\underset{8}{\cancel{96}}} = \frac{1400}{8} = \frac{700}{4} = \frac{350}{2} = 175g\ N$$

سنجش کلاد
www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshClouds

۷۰ درستی یا نادرستی مطالب زیر دربارهٔ نخستین فلز واسطهٔ جدول دوره‌ای، به ترتیب چگونه است؟

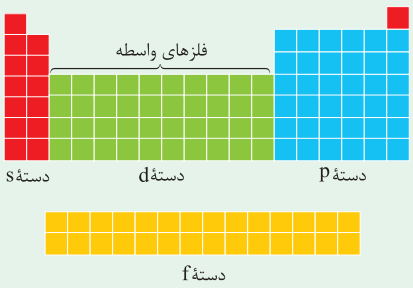
$_{21}Sc$ ← $_{3}Li$ ← $_{18}Ar$ ← $_{5}B$

- در اتم آن، ۷ زیرلایه از الکترون پر شده‌اند.
- تفاوت عدد اتمی آن با نخستین فلز قلیایی جدول، برابر عدد اتمی سومین گاز نجیب جدول است.
- شمار الکترون‌های ظرفیتی آن با شمار الکترون‌های ظرفیتی نخستین عنصر دستهٔ **p** برابر است.
- کاتیون حاصل از آن به آرایش پایدار گاز نجیب نمی‌رسد.

۱) درست ـ درست ـ نادرست ـ نادرست
۲) نادرست ـ درست ـ درست ـ نادرست
۳) نادرست ـ نادرست ـ درست ـ درست
۴) درست ـ نادرست ـ درست ـ نادرست

نکته فلزهای دستهٔ d به فلزهای واسطه معروف‌اند و در جدول دوره‌ای بین عنصرهای دستهٔ s و p قرار دارند.

در دوره‌های اول تا سوم، عنصر دستهٔ d وجود ندارد و هر یک از دوره‌های چهارم تا هفتم، شامل ۱۰ عنصر دستهٔ d (عنصرهای گروه‌های ۳ تا ۱۲) می‌باشند.



پاسخ خیلی تشریحی ✔ عبارت‌های اول و چهارم، نادرست و عبارت‌های دوم و سوم، درست‌اند.

فلزات واسطهٔ جدول دوره‌ای در گروه‌های ۳ تا ۱۲ و دوره‌های چهارم تا هفتم جدول قرار دارند که نخستین فلز واسطهٔ جدول تناوبی در گروه ۳ و دورهٔ چهارم جدول جای گرفته است. از طرفی با توجه به گاز نجیب دورهٔ قبل این عنصر که آرگون ($_{18}Ar$) می‌باشد؛ می‌توان گفت که عدد اتمی فلز مورد نظر، $۱۸ + ۳ = ۲۱$ است که همان اسکاندیم ($_{21}Sc$) می‌باشد.

بررسی عبارت‌ها:

- در اتم فلز اسکاندیم ($_{21}Sc$)، ۷ زیرلایهٔ اشغال‌شده از الکترون وجود دارد که فقط ۶ زیرلایه از الکترون پر شده است.

$$_{21}Sc: \underline{\underline{1s^2}}\,\underline{\underline{2s^2}}\,\underline{\underline{2p^6}}\,\underline{\underline{3s^2}}\,\underline{\underline{3p^6}}\,3d^1\,\underline{\underline{4s^2}}$$

- نخستین فلز قلیایی، $_{3}Li$ و سومین گاز نجیب جدول، $_{18}Ar$ است:

$$\underbrace{21}_{\text{عدد اتمی Sc}} - \underbrace{3}_{\text{عدد اتمی Li}} = \underbrace{18}_{\text{عدد اتمی Ar}}$$

- نخستین عنصر دستهٔ p (عنصر دورهٔ دوم و گروه ۱۳)، همان $_{5}B$ است که دارای ۳ الکترون ظرفیتی می‌باشد. از طرفی، شمار الکترون‌های ظرفیتی فلز اسکاندیم ($_{21}Sc$) نیز برابر ۳ می‌باشد.

نکته شمار الکترون‌های ظرفیتی عناصر گروه‌های ۱ تا ۱۲ جدول تناوبی با شمارهٔ گروه آن‌ها و شمار الکترون‌های ظرفیتی عناصر گروه‌های ۱۳ تا ۱۸ جدول تناوبی (به‌جز هلیم) با رقم یکان شمارهٔ گروه آن‌ها برابر است.

- فلز اسکاندیم ($_{21}Sc$) با از دست دادن ۳ الکترون ظرفیتی خود به آرایش پایدار گاز نجیب دورهٔ قبل خود یا همان گاز آرگون ($_{18}Ar$) می‌رسد.

$$_{21}Sc^{3+}: 1s^2 2s^2 2p^6 3s^2 3p^6 \quad \text{یا} \quad [_{18}Ar]$$

سنجش کلاد
www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshClouds

۷۱ با توجه به معادلهٔ زیر، از تجزیهٔ ۵۰/۴ گرم واکنش‌دهنده (آمونیوم دی‌کرومات) با خلوص ۶۰٪، چند لیتر گاز تولید می‌شود؟ (در شرایط انجام واکنش، حجم مولی گازها برابر ۲۵ L است، معادلهٔ واکنش موازنه شود. $(Cr=52, O=16, N=14, H=1: g.mol^{-1})$

$$(NH_4)_2Cr_2O_7(s) \rightarrow N_2(g) + Cr_2O_3(s) + H_2O(g)$$

۱) ۱۵ ۲) ۱۲ ۳) ۹ ۴) ۶

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: واکنش داده‌شده را موازنه می‌کنیم:

$$(NH_4)_2Cr_2O_7(s) \rightarrow N_2(g) + Cr_2O_3(s) + 4H_2O(g)$$

گام دوم: حجم گازهای تولیدشده را محاسبه می‌کنیم.

استفاده از کسر تبدیل:

به ازای مصرف ۱ مول واکنش‌دهنده، در مجموع ۵ مول گاز (۱مول N_2 و ۴ مول H_2) تولید می‌شود.

$$50/4\,g(NH_4)_2Cr_2O_7 \times \frac{60\,g(NH_4)_2Cr_2O_7}{100\,g(NH_4)_2Cr_2O_7} \times \frac{1\,mol(NH_4)_2Cr_2O_7}{252\,g(NH_4)_2Cr_2O_7} \times \frac{5\,mol\,gas}{1\,mol(NH_4)_2Cr_2O_7} \times \frac{25\,L\,gas}{1\,mol\,gas}$$

$$= 15\,L\,gas$$

یه‌جور دیگه

استفاده از کسر تناسب:

$$\frac{\frac{\text{درصد خلوص}}{100} \times \text{جرم ناخالص}}{\underbrace{\text{جرم مولی} \times \text{ضریب}}_{(NH_4)_2Cr_2O_7}} = \frac{\text{حجم}}{\underbrace{\text{حجم مولی} \times \text{ضریب}}_{N_2+H_2O}} \Rightarrow \frac{\frac{60}{100} \times 50/4}{1 \times 252} = \frac{x}{(1\times25)+(4\times25)}$$

$$\Rightarrow x = \frac{\overset{0/2}{\cancel{50/4}} \times 0/6 \times 5 \times 25}{\underset{1}{\cancel{252}}} = 0/6 \times 25 = 15\,L \text{ گاز}$$

سنجش کلاد
www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshClouds

۷۲ اگر شمار نوترون‌های اتم $M^{۷۲}$، ۲۵ درصد از شمار پروتون‌هایش بیشتر باشد، عنصر **M** یک ..... است و عنصری که عدد اتمی آن با شمار نوترون‌های **M** برابر است، جزء عنصرهای ..... جدول تناوبی به شمار می‌آید.

$N = ۱/۲۵P$

۱) نافلز ـ واسطه
۲) شبه‌فلز ـ اصلی
۳) نافلز ـ اصلی
۴) شبه‌فلز ـ واسطه

نکته به عنصرهای دستهٔ s و p، عنصرهای اصلی و به عنصرهای دستهٔ d، عنصرهای واسطه می‌گویند. عنصرهای اصلی در گروه‌های ۱، ۲ و ۱۳ تا ۱۸ قرار دارند، در حالی که عنصرهای واسطه متعلق به گروه‌های ۳ تا ۱۲ جدول دوره‌ای هستند.

پاسخ خیلی تشریحی ابتدا با توجه به اطلاعات داده‌شده، عدد اتمی عنصر **M** را به صورت زیر به دست می‌آوریم:

$$\left.\begin{matrix} N = ۱/۲۵P \\ N + P = ۷۲ \end{matrix}\right\} \Rightarrow ۱/۲۵P + P = ۷۲ \Rightarrow ۲/۲۵P = ۷۲ \Rightarrow P = \frac{۷۲}{۲/۲۵} = ۳۲ \text{ و } N = ۴۰$$

عدد اتمی عنصر **M**، ۳۲ است که با نزدیک‌ترین گاز نجیب به آن که همان گاز کریپتون ($_{۳۶}Kr$) می‌باشد، ۴ عنصر فاصله دارد و از آن عقب‌تر است؛ پس این عنصر در دورهٔ چهارم و گروه $۱۴ = ۴ - ۱۸$ جدول تناوبی قرار دارد که همان عنصر ژرمانیم ($_{۳۲}Ge$) می‌باشد و شبه‌فلز است.

عنصری که عدد اتمی آن برابر ۴۰ است، با نزدیک‌ترین گاز نجیب به خود که همان کریپتون ($_{۳۶}Kr$) می‌باشد، ۴ عنصر فاصله دارد ولی از آن جلوتر است؛ پس این عنصر در دورهٔ پنجم و گروه ۴ جدول تناوبی قرار دارد. از آن‌جایی که فلزات واسطه در گروه‌های ۳ تا ۱۲ و دوره‌های چهارم تا هفتم جدول دوره‌ای جای دارند؛ بنابراین عنصر مورد نظر، یک عنصر واسطه محسوب می‌شود.

سنجش کلاد
www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshClouds

۷۳ با توجه به واکنش‌های (I) تا (IV)، کدام موارد از مطالب زیر، درست است؟ $(Cu = ۶۴, Al = ۲۷ : g.mol^{-۱})$

I) $Li + AlCl_۳ \rightarrow LiCl + Al$

II) $C + S_۸ \rightarrow CS_۲$

III) $Cu_۲S + O_۲ \rightarrow Cu + SO_۲$

IV) $Al + CuSO_۴ \rightarrow Cu + Al_۲(SO_۴)_۳$

الف) مجموع ضرایب واکنش‌دهنده‌ها در واکنش‌های (II) و (IV)، یکسان است.

ب) اگر در واکنش (I) به جای Li از Ti استفاده کنیم، واکنش با سرعت کم‌تری انجام می‌شود.

پ) آرایش الکترونی یون مس شرکت‌کننده در واکنش‌های (III) و (IV)، یکسان است.

ت) از واکنش ۹ گرم فلز آلومینیم با خلوص ۹۰ درصد با مقدار کافی محلول مس (II) سولفات، ۲۸/۸ گرم فلز مس آزاد می‌شود.

۱) ب ـ پ　　۲) الف ـ ب

۳) پ ـ ت　　۴) الف ـ ت

پاسخ خیلی تشریحی ✔ عبارت‌های «الف» و «ت» درست‌اند.

بررسی عبارت‌ها:

الف) معادلهٔ موازنهٔ واکنش‌های (II) و (IV)، به صورت زیر است:

$۴C + S_۸ \rightarrow ۴CS_۲$

$۲Al + ۳CuSO_۴ \rightarrow ۳Cu + Al_۲(SO_۴)_۳$

مجموع ضرایب واکنش‌دهنده‌ها در هر دو واکنش، برابر ۵ است.

ب) اگر در واکنش (I) به جای Li از Ti استفاده کنیم، واکنش انجام نمی‌شود! زیرا واکنش‌پذیری Ti از Al کم‌تر است!

نکته مقایسهٔ کلی واکنش‌پذیری برخی عنصرهای مهم به صورت زیر است:

واکنش‌پذیری : فلزهای قلیایی > فلزهای قلیایی خاکی > Al > C > Zn و Ti > Fe > Cu > Ag > Au

پ) در واکنش (III)، یون Cu^{+} و در واکنش (IV)، یون $Cu^{۲+}$ وجود دارد. *واضح که* آرایش الکترونی این دو یون با هم یکسان نیست.

$$_{۲۹}Cu : [_{۱۸}Ar]۳d^{۱۰}۴s^{۱} \begin{cases} _{۲۹}Cu^{+} : [_{۱۸}Ar]\,۳d^{۱۰} \\ _{۲۹}Cu^{۲+} : [_{۱۸}Ar]\,۳d^{۹} \end{cases}$$

ت)

$$۹\,g\,Al_{\text{ناخالص}} \times \frac{۹۰\,g\,Al_{\text{خالص}}}{۱۰۰\,g\,Al_{\text{ناخالص}}} \times \frac{۱\,mol\,Al}{۲۷\,g\,Al} \times \frac{۳\,mol\,Cu}{۲\,mol\,Al} \times \frac{۶۴\,g\,Cu}{۱\,mol\,Cu} = ۲۸/۸\,g\,Cu$$

تیزپازی عبارت‌های «ب» و «پ» در این سؤال، عبارت‌های ساده‌تری هستند و فقط با بررسی آن‌ها می‌توان به جواب رسید و اصلاً نیازی به بررسی عبارت‌های «الف» و «ت» نبود!

سنجش کلاد
www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshClouds

۷۴ اگر $n+l$، برای a الکترون بیرونی‌ترین زیرلایهٔ اتم عنصر نافلزی X برابر ۳ و مجموع $n+l$ برای همهٔ الکترون‌های ظرفیتی آن برابر ۱۹ باشد؛ چند مورد از مطالب زیر به یقین در رابطه با عنصر X درست است؟

- در دورهٔ سوم قرار دارد و $a=5$ است.
- در دمای اتاق به صورت مولکول‌های دواتمی پایدار است.
- در مقایسه با کلر، واکنش‌پذیری بیشتری دارد.
- شعاع اتمی آن در مقایسه با گوگرد کوچک‌تر است.

۱) یک ۲) دو ۳) سه ۴) چهار

پاسخ خیلی تشریحی ✔ عبارت‌های دوم، سوم و چهارم درست‌اند.

دو زیرلایه با $n+l=3$ وجود دارد: $2p$ $(3=2+1)$ و $3s$ $(3=3+0)$! اگر آخرین زیرلایهٔ عنصر $3s$ باشد، آن عنصر فلز است، زیرا در گروه‌های اول و دوم قرار دارد:

$$_{11}Na:[_{10}Ne]\,3s^1 \quad \text{و} \quad _{12}Mg:[_{10}Ne]\,3s^2$$

بنابراین آخرین زیرلایهٔ عنصر مورد نظر، $2p$ و الکترون‌های ظرفیتی آن در زیرلایه‌های $2s2p$ قرار دارد:

$$2s^2 2p^x \Rightarrow \text{الکترون‌های ظرفیتی } (n+l)=\underbrace{2(2+0)}_{2s^2}+\underbrace{x(2+1)}_{2p^x}=19$$

$$\Rightarrow 4+3x=19 \Rightarrow 3x=15 \Rightarrow x=5$$

$$\Rightarrow X:[_2He]2s^2 2p^5 \Rightarrow {}_9F \quad \text{(عنصر مورد نظر همان فلوئور است.)}$$

بررسی عبارت‌ها:

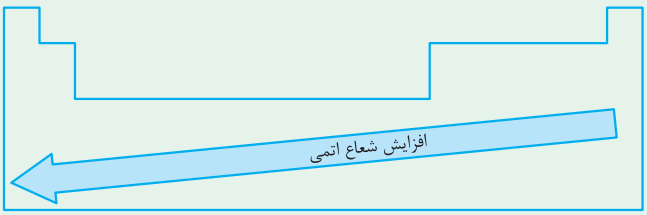
الف) دیدیم که a (شمار الکترن‌ها در بیرونی‌ترین زیرلایه) برابر ۵ است اما عنصر $_9F$ در دورهٔ دوم $(2\le Z\le 10)$ قرار دارد.

ب) هالوژن‌ها در دما و فشار اتاق به شکل مولکول‌های دواتمی $(F_2, Cl_2, Br_2$ و $I_2)$ وجود دارند.

پ) فلوئور نسبت به همهٔ نافلزها، واکنش‌پذیری بیشتری دارد.

ت) $_9F$ نسبت به $_{16}S$، در قسمت سمت راست‌تر و بالاتر جدول تناوبی قرار دارد؛ بنابراین شعاع اتمی آن کوچک‌تر است.

نکته با توجه به روند تغییر شعاع اتمی در یک گروه و دوره (در یک دوره از چپ به راست، کاهش و در یک گروه از بالا به پایین، افزایش)، هر چه عنصری در جدول دوره‌ای، سمت چپ‌تر و پایین‌تر باشد، شعاع آن بیشتر است و بالعکس! هر چه عنصری، سمت راست‌تر و بالاتر باشد، شعاع آن کم‌تر است.



سنجش کلاد
www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshClouds

۷۵ کدام مورد، نادرست است؟

۱) در استخراج آهن، نسبت جرم «سنگ معدن آهن» استفاده‌شده به جرم «منابع معدنی دیگر» مصرف‌شده به تقریب، برابر ۲ است.

۲) از بازگردانی هفت قوطی فولادی می‌توان یک لامپ ۶۰واتی را در حدود ۲۵ ساعت روشن نگه داشت.

۳) در استخراج فلز، تنها درصد کمی از سنگ معدن به فلز تبدیل می‌شود.

۴) ارزیابی چرخهٔ عمر برای ارزیابی میزان تأثیر یک فراورده بر روی محیط زیست در فرایند تولید آن به کار می‌رود.

مشاوره گزینه‌های این سؤال، عبارت‌های کاملاً حفظی از متن کتاب درسی است؛ اما گزینهٔ (۱) این سؤال، عیناً از کنکور اردیبهشت ۱۴۰۳ رشتهٔ ریاضی انتخاب شده است؛ به همین دلیل بهتره همهٔ نکات حفظی کتاب درسی را هم خوب بخونید.

پاسخ خیلی تشریحی ✔ بررسی گزینه‌ها:

گزینهٔ (۱):

در استخراج ۱۰۰۰ کیلوگرم آهن، تقریباً از ۲۰۰۰ کیلوگرم سنگ معدن آهن و ۱۰۰۰ کیلوگرم منابع معدنی دیگر استفاده می‌شود.

$$\frac{\text{جرم سنگ معدن آهن}}{\text{جرم منابع معدنی دیگر}} = \frac{۲۰۰۰}{۱۰۰۰} = ۲ \Leftarrow$$

گزینه‌های (۲) و (۳) متن کتاب درسی است.

گزینهٔ (۴): ارزیابی چرخهٔ عمر برای ارزیابی میزان تأثیر یک فراورده بر روی محیط زیست در مدت طول عمر آن (شامل تولید، مصرف و دفع) به کار می‌رود و نه فقط در فرایند تولید!

سنجش کلاد
www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshClouds

۷۶ با توجه به جدول زیر، فلزهای X و Y در توضیحات داده‌شده، به ترتیب کدام فلزها هستند؟

- بازده فرایند استخراج فلز X از سنگ معدن ۲۰ درصد و از ۱/۵ تن سنگ معدن، ۱/۵ کیلوگرم فلز استخراج می‌شود.
- درصد جرمی فلز Y در ۱۶۰ گرم خاکستری که از یک کیلوگرم گیاه برای پالایش آن به کار می‌رود، برابر ۲۵٪ است.

نماد شیمیایی فلز	قیمت هر کیلوگرم فلز (ریال)	بیشترین مقدار فلز در یک کیلوگرم از گیاه (گرم)	درصد جرمی فلز در سنگ معدن
Au	۱,۲۰۰,۰۰۰,۰۰۰	۰/۱	۰/۰۰۲
Ni	۸۲۰,۰۰۰	۳۸	۲
Cu	۴۲۵,۰۰۰	۱۴	۰/۵
Zn	۱۵۵,۰۰۰	۴۰	۵

۱) مس ـ روی
۲) نیکل ـ طلا
۳) نیکل ـ مس
۴) مس ـ طلا

پاسخ خیلی تشریحی

بیایید موارد داده‌شده را به ترتیب بررسی کنیم:

با توجه به این‌که صحبت از استخراج فلز از سنگ معدن است، باید با توجه به اطلاعات داده‌شده، درصد جرمی فلز در سنگ معدن را حساب کرده و با توجه به ستون آخر جدول، فلز X را مشخص کنیم. فرض می‌کنیم درصد فلز در سنگ معدن a٪ است:

$$\text{فلز}\ 1/5\,\text{kg} = \underbrace{\frac{20}{100}}_{\text{بازده استخراج}} \times \frac{1\,\text{kg فلز}}{1000\,\text{g فلز}} \times \frac{a\,\text{g فلز}}{100\,\text{g سنگ معدن}} \times \text{سنگ معدن}\ 1/5\times10^{6}\,\text{g}$$

$$\Rightarrow 3a = 1/5 \Rightarrow a = 0/5 \Rightarrow$$ درصد مس (Cu) در سنگ معدن برابر ۰/۵ است.

برای این مورد، باید از ستون سوم جدول استفاده کنیم؛ یعنی ببینیم در یک کیلوگرم گیاه، حداکثر چند گرم فلز Y وجود دارد.

$$\text{درصد جرمی Y در خاکستر} = \frac{\text{جرم Y در یک کیلوگرم گیاه}}{\text{جرم خاکستر}} \times 100 \Rightarrow 25 = \frac{\text{جرم Y در یک کیلوگرم گیاه}}{160} \times \frac{4}{100}$$

$$\Rightarrow \text{جرم Y در یک کیلوگرم گیاه} = \frac{160}{4} = 40 \Rightarrow$$ Y همان فلز روی (Zn) است.

سنجش کلاد
www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshClouds

۷۷ اگر برای تهیهٔ $۶/۰۲\times۱۰^{۲۲}$ مولکول کربن مونواکسید مطابق واکنش زیر، به ۱۶ گرم $MO_۲$ نیاز باشد، جرم مولی فلز **M** چند گرم بر مول است؟ (بازده واکنش را ۷۵ درصد در نظر بگیرید؛ $O = ۱۶ g.mol^{-۱}$)

$$۳MO_۲(s)+۴C(s)+۶Cl_۲(g) \rightarrow ۳MCl_۴(s)+۲CO_۲(g)+۲CO(g)$$

۱) ۳۲ ۲) ۴۸ ۳) ۵۵ ۴) ۶۴

پاسخ خیلی تشریحی ✔ با توجه به اطلاعات داده‌شده در سؤال، جرم مولی فلز مورد نظر را به صورت زیر به دست می‌آوریم:

$$\underbrace{\frac{\text{بازده درصدی}}{۱۰۰}\times\text{جرم}}_{\text{(واکنش دهنده) } MO_۲}=\underbrace{\frac{\text{شمار مولکول‌ها}}{\text{عدد آووگادرو}\times\text{ضریب}}}_{\text{(فراورده) } CO}\times\frac{\text{ضریب}}{\text{جرم مولی}} \Rightarrow \frac{۱۶\times\frac{\frac{۳}{۴}\cancel{۷۵}}{\cancel{۱۰۰}}}{۳\times(x+۳۲)}=\frac{\cancel{۶/۰۲\times۱۰^{۲۲}}}{۲\times\cancel{۶/۰۲\times۱۰^{۲۳}}_{۱۰}} \Rightarrow \frac{۴}{x+۳۲}=\frac{۱}{۲۰}$$

$$\Rightarrow x+۳۲=۸۰ \Rightarrow x=۴۸ g.mol^{-۱}$$

سنجش کلاد
www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshClouds

۷۸ چند مورد از مطالب زیر، نادرست است؟

- آهنگ مصرف و استخراج فلزها با آهنگ برگشت آن‌ها به طبیعت به شکل سنگ معدن، به تقریب برابر است.
- فلزها جزء منابع تجدیدناپذیر هستند و بازیافت آن‌ها سبب کاهش سرعت گرمایش کرهٔ زمین می‌شود.
- کاهش ردپای کربن دی‌اکسید، کمک به توسعهٔ پایدار کشور و از بین رفتن گونه‌های زیستی کم‌تر، برخی از مزایای بازیافت فلزها است.
- غلظت گونه‌های موجود در کف اقیانوس نسبت به ذخایر زمینی، کم‌تر است.

۱) ۴ ۲) ۲ ۳) ۱ ۴) ۳

پاسخ خیلی تشریحی

عبارت‌های اول و چهارم، نادرست‌اند.

عبارت اول: آهنگ مصرف و استخراج فلزها بیشتر از آهنگ برگشت آن‌ها به طبیعت است. به همین دلیله که فلزها تجدیدناپذیر به حساب می‌آیند.

عبارت چهارم: غلظت گونه‌های فلزی موجود در کف اقیانوس نسبت به ذخایر زمینی، بیشتر است.

www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshClouds

۷۹ در دما و فشار یکسان، جرم یکسانی از دی‌نیتروژن پنتااکسید و آلومینیم در واکنش‌های زیر به طور کامل مصرف می‌شوند. اگر حجم گاز تولیدشده در واکنش **II**، چهار برابر حجم گاز اکسیژن تولیدشده در واکنش **I** باشد، نسبت بازده درصدی واکنش **I** به **II** کدام است؟

$(N = ۱۴, O = ۱۶, Al = ۲۷ : g.mol^{-1})$

I) $۲N_۲O_۵(s) \rightarrow ۴NO_۲(g) + O_۲(g)$

II) $۲Al(s) + ۶HCl(aq) \rightarrow ۲AlCl_۳(aq) + ۳H_۲(g)$

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۵

پاسخ خیلی تشریحی

در دما و فشار یکسان، حجم مولی گازها با هم برابر است؛ بنابراین وقتی حجم $H_۲$ تولیدشده، چهار برابر حجم $O_۲$ تولیدشده است، مول $H_۲$ تولیدی هم چهار برابر مول $O_۲$ تولیدی است. برای راحتی، جرم $N_۲O_۵$ و آلومینیم مصرف‌شده را ۱ گرم و بازده درصدی واکنش‌های I و II را به ترتیب برابر x و y در نظر می‌گیریم.

$$\text{مول } O_۲ \text{ تولیدی} : ۱g\,N_۲O_۵ \times \frac{۱mol\,N_۲O_۵}{۱۰۸g\,N_۲O_۵} \times \frac{۱mol\,O_۲}{۲mol\,N_۲O_۵} \times \underbrace{\frac{x}{۱۰۰}}_{\text{بازده واکنش}} = \frac{x}{۱۰۸ \times ۲ \times ۱۰۰} mol\,O_۲$$

$$\text{مول } H_۲ \text{ تولیدی} : ۱g\,Al \times \frac{۱mol\,Al}{۲۷g\,Al} \times \frac{۳mol\,H_۲}{۲mol\,Al} \times \underbrace{\frac{y}{۱۰۰}}_{\text{بازده واکنش}} = \frac{y}{۹ \times ۲ \times ۱۰۰} mol\,H_۲$$

با توجه به فرض سؤال، مول $H_۲$ را چهار برابر مول $O_۲$ قرار می‌دهیم و نسبت بازده درصدی دو واکنش را حساب می‌کنیم:

$$\text{مول } H_۲ = ۴(\text{مول } O_۲) = \frac{y}{۹ \times ۲ \times ۱۰۰} = \overset{۱}{\cancel{۴}} \times \underbrace{\frac{x}{۱۰۸ \times ۲ \times ۱۰۰}}_{۲۷} \Rightarrow \frac{x}{y} = \frac{۲۷}{۹} = ۳$$

www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshClouds

۸۰ در مراحل چرخهٔ عمر، موارد «پایداری تأمین مادهٔ اولیه و خام»، «تأثیر حمل‌ونقل مادهٔ خام روی محیط زیست» و «دفن‌کردن»، برای پاکت کاغذی و کیسهٔ پلاستیکی، به ترتیب نسبت به هم چگونه است؟

۱) متفاوت ـ مشابه ـ متفاوت

۲) مشابه ـ متفاوت ـ متفاوت

۳) متفاوت ـ مشابه ـ مشابه

۴) مشابه ـ متفاوت ـ مشابه

پاسخ خیلی تشریحی ✔

در مراحل چرخهٔ عمر پاکت کاغذی و کیسهٔ پلاستیکی خواهیم داشت:

- **پایداری تأمین مادهٔ اولیه و خام**
  - پاکت کاغذی: نسبتاً پایدار
  - کیسهٔ پلاستیکی: ناپایدار
- **تأثیر حمل‌ونقل مادهٔ خام روی محیط زیست**
  - پاکت کاغذی: موجب آلودگی هوا می‌شود.
  - کیسه پلاستیکی: موجب آلودگی هوا، خاک و آب می‌شود.
- **دفن‌کردن**
  - پاکت کاغذی: تجزیه می‌شود.
  - کیسهٔ پلاستیکی: تجزیه نمی‌شود.

سنجش کلاد
www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshClouds