آزمون آزمایشی خیلی سبز

رشته ریاضی

پایه یازدهم	مرحله دوم
سال تحصیلی ۰۴-۱۴۰۳	تاریخ برگزاری: ۱۸/آبان/۱۴۰۳

بودجه‌بندی دروس

حسابان(۱)	هندسه(۲)	آمار و احتمال
فصل ۱ (درس ۱ تا ۴) صفحهٔ ۱ تا ۲۸	فصل ۱ (درس ۱) صفحهٔ ۹ تا ۱۷	فصل ۱ (درس ۱ و ۲ تا ابتدای قوانین و اعمال بین مجموعه‌ها) صفحهٔ ۱ تا ۲۰

فیزیک(۲)	شیمی(۲)
فصل ۱ (تا ابتدای خازن) صفحهٔ ۱ تا ۳۲	فصل ۱ (تا ابتدای گنج‌های اعماق دریا) صفحهٔ ۱ تا ۲۵

مواد امتحانی	تعداد سؤال	از شماره	تا شماره	مدت پاسخگویی
حسابان	۲۰	۱	۲۰	۳۰ دقیقه
هندسه	۱۰	۲۱	۳۰	۲۰ دقیقه
آمار و احتمال	۱۰	۳۱	۴۰	۲۰ دقیقه
فیزیک	۲۰	۴۱	۶۰	۳۰ دقیقه
شیمی	۲۰	۶۱	۸۰	۲۰ دقیقه
مجموع	۸۰ سؤال			۱۲۰ دقیقه

اساتید، مشاوران و دانش‌آموزان گرامی؛
نظرات، پیشنهادات، انتقادات و بازخوردهای خود نسبت به سؤالات این آزمون را می‌توانید از طریق آیدی Kheilisabz_edit@ در همهٔ پیام‌رسان‌ها با ما به اشتراک بگذارید.

ویژه یازدهمی‌های ۱۴۰۳

Azmoon.kheilisabz.com

سنجش کلاد
www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshClouds

حسابان یازدهم

۱- اگر a جواب معادلهٔ $\sqrt{۲x-۱}=x-۲$ باشد، مجموع ارقام عدد $۴a$ کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۵

۲- تعداد جواب‌های معادلهٔ $\frac{۳x+۳}{۲x-۴}=\frac{x+۷}{x+۲}+\frac{۲۰}{x^۲-۴}$ کدام است؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

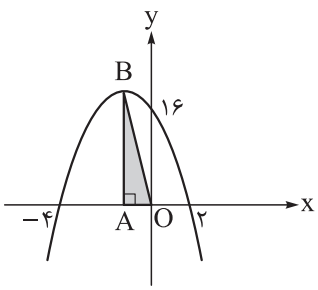
۳- اگر جملات اول و نهم یک دنبالهٔ هندسی با قدرنسبت مثبت به ترتیب ۳ و ۲۴۳ باشد، مجموع ۸ جملهٔ اول این دنباله کدام است؟

۱) $۲۴۰(\sqrt{۳}+۱)$ ۲) $۲۴۰(\sqrt{۳}-۱)$ ۳) $۱۲۰(\sqrt{۳}+۱)$ ۴) $۱۲۰(\sqrt{۳}-۱)$

۴- در دنبالهٔ هندسی a_n، مجموع شش جملهٔ اول، ۹ برابر مجموع سه جملهٔ اول است. مقدار $\frac{a_{۱۰}}{a_۵}$ کدام است؟

۱) ۱۶ ۲) ۳۲ ۳) ۶۴ ۴) ۱۲۸

۵- با توجه به نمودار سهمی رسم‌شده، مساحت مثلث OAB کدام است؟



۱) ۱۲
۲) ۱۴
۳) ۹
۴) ۱۸

۶- در سهمی $f(x)=ax^۲+bx+c$ با ضرایب صحیح، مجموع صفرها برابر ۳ و حاصل‌ضرب آن‌ها برابر -۸ است. کم‌ترین مقدار ممکن برای $f^۲(-۱)$ کدام است؟

۱) صفر ۲) ۱۶ ۳) ۴ ۴) ۱

۷- حاصل $A=|۳-\sqrt{۳}-\sqrt{۲}|-\sqrt{۵+۲\sqrt{۶}}$ کدام است؟

۱) $۳-۲\sqrt{۳}-۲\sqrt{۲}$ ۲) $۲\sqrt{۳}+۲\sqrt{۲}-۳$ ۳) ۳ ۴) -۳

۸- فرض کنید a_n دنباله‌ای حسابی از اعداد طبیعی باشد، به طوری که $a_۱+a_۲+...+a_۷<۶۰$ باشد. چند مقدار مختلف برای $a_۵$ وجود دارد؟

۱) ۱۸ ۲) ۱۵ ۳) ۱۲ ۴) ۱۰

۹- در دنبالهٔ $a_n=۲^{n-۱}+۲^{۱۲-n}$، مجموع ۱۰ جملهٔ اول برابر $S_{۱۰}$ است. باقی‌ماندهٔ تقسیم $S_{۱۰}$ بر ۱۰ کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۷ ۳) ۵ ۴) ۹

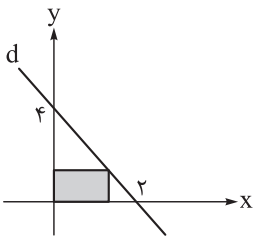
۱۰- در معادلهٔ $x^۳+۲x^۲-۴x-۵=۰$ مجموع مربعات ریشه‌های حقیقی معادله کدام است؟

۱) ۱۱ ۲) ۱۰ ۳) ۱۲ ۴) ۱۳

محل انجام محاسبات

سنجش کلاد
www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshClouds

۱۱- در شکل مقابل، یکی از رئوس مستطیل روی خط d در ناحیهٔ اول و دو ضلع آن روی محورهای مختصات واقع شده است. ماکزیمم مساحت مستطیل رنگی کدام است؟



۱) ۱
۲) ۲
۳) ۳
۴) ۴

۱۲- تعداد ریشه‌های متمایز معادلهٔ $x^۴ - ۳x^۲ + k^۳ - ۳k + ۱ = ۰$ عددی فرد است. مجموع مربعات ریشه‌های آن کدام است؟

۱) ۳
۲) ۶
۳) ۹
۴) ۱۲

۱۳- اگر یکی از ریشه‌های معادلهٔ $\frac{۲x-۱}{۵-x} + k = \frac{x^۲-۴}{x^۲-۵x+۶}$ دو برابر معکوس ریشهٔ دیگر باشد، جمع مقدار k و ریشه‌ها کدام است؟

۱) ۵
۲) ۵/۵
۳) ۶
۴) ۶/۵

۱۴- جواب معادلهٔ $\sqrt{۸x + \sqrt{۴ - x^۲}} = \sqrt{x-۲} + a$ در معادلهٔ $ax^۲ + bx + c = ۰$ نیز صدق می‌کند. اگر اختلاف جواب‌های معادلهٔ درجه‌دوم ۳/۵ باشد، اختلاف مقادیر ممکن برای c کدام است؟

۱) ۳۲
۲) ۴۰
۳) ۴۶
۴) ۵۶

۱۵- اگر $\cot ۱۰^\circ$ و $\cot ۲۰^\circ$ ریشه‌های معادلهٔ $x^۲ - ax + b = ۰$ باشد، در این صورت معادله‌ای که ریشه‌های آن، $\tan ۱۰^\circ$ و $\tan ۲۰^\circ$ هستند، کدام است؟

۱) $bx^۲ + ax + ۱ = ۰$
۲) $bx^۲ - ax + ۱ = ۰$
۳) $ax^۲ - bx + ۱ = ۰$
۴) $ax^۲ + bx + ۱ = ۰$

۱۶- مجموع ریشه‌های معادلهٔ $x^۲ + \frac{۲۵x^۲}{(x-۵)^۲} = ۷۵$ کدام است؟

۱) ۱۵-
۲) ۵-
۳) ۱۰
۴) ۲۰

۱۷- اگر تفاضل ریشه‌های معادلهٔ $|x-۲| + |x-b| = a$ برابر ۱۳ باشد، حداکثر مقدار تابع $y = \frac{۲}{|x-a| + |x-۳|}$ کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۴}$
۲) $\frac{۱}{۵}$
۳) $\frac{۱}{۱۱}$
۴) $\frac{۱}{۲۰}$

۱۸- خط $y = k$ نمودار تابع f با ضابطهٔ $f(x) = \frac{|x^۲ + x|}{x}$ را در دو نقطه قطع می‌کند، حدود k کدام است؟

۱) $۰ < k < ۱$
۲) $-۱ \le k < ۰$
۳) $۰ < k \le ۱$
۴) $-۱ < k < ۰$

۱۹- اگر مساحت سطح محدود به نمودار تابع $f(x) = ۳ - |ax-۱|$ و محور xها برابر ۴/۵ واحد مربع باشد، مقدار مثبت a کدام است؟

۱) ۱
۲) $\frac{۱}{۲}$
۳) ۲
۴) $\frac{۳}{۲}$

۲۰- اگر $|x-۳| + |۱-y| = x - y - ۲$، $|y+۲| = y - x + ۸$ و $x + y$ متعلق به بازهٔ $[\alpha, \beta]$ باشد، بیشترین مقدار $(\beta - \alpha)$ کدام است؟

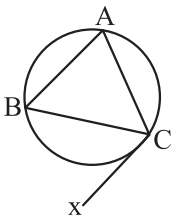
۱) ۵
۲) ۶
۳) ۹
۴) ۱۱

محل انجام محاسبات

www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshClouds

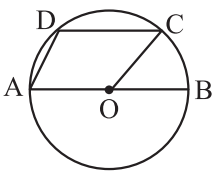
هندسه یازدهم

۲۱- در شکل زیر $AB = AC$ ، $\overset{\frown}{AB} = 126^\circ$ و نیم‌خط Cx در نقطهٔ C بر دایره مماس است. اندازهٔ زاویهٔ $B\hat{C}x$ چند درجه است؟



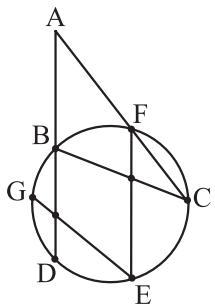
۱) ۴۲
۲) ۴۴
۳) ۵۲
۴) ۵۴

۲۲- در شکل زیر، وتر CD به طول ۶ موازی قطر AB است. اگر شعاع دایره برابر ۵ باشد، مساحت چهارضلعی $AOCD$ کدام است؟



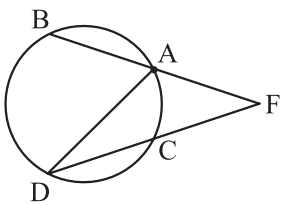
۱) ۱۶
۲) ۱۸
۳) ۲۲
۴) ۲۴

۲۳- در شکل زیر، F وسط کمان $\overset{\frown}{BC}$ و G وسط کمان $\overset{\frown}{BD}$ قرار دارد. اگر $\hat{A} = 3x$ ، $\hat{C} = x$ و $\hat{E} = x + 15^\circ$ باشد، مقدار x کدام‌است؟



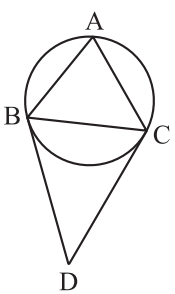
۱) 18°
۲) 20°
۳) 25°
۴) 30°

۲۴- اگر در شکل زیر $\overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{BD} = \overset{\frown}{DC}$ و $\hat{F} = 2\hat{D}$ باشد، اندازهٔ زاویهٔ F چند درجه است؟



۱) ۳۰
۲) ۳۶
۳) ۴۰
۴) ۴۵

۲۵- رأس‌های مثلث متساوی‌الساقین ABC $(AB = AC$ و $\hat{A} < 90^\circ)$ مطابق شکل بر روی یک دایره واقع شده‌اند و مماس‌های رسم‌شده در نقاط B و C بر این دایره در نقطهٔ D متقاطع‌اند. اگر $A\hat{B}C = 2\hat{D}$ باشد، آن‌گاه اندازهٔ زاویهٔ A چه کسری از 180° است؟

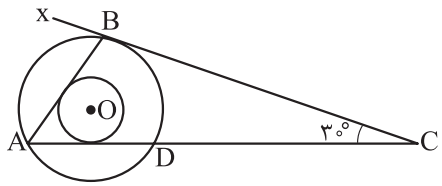


۱) $\frac{3}{7}$
۲) $\frac{4}{9}$
۳) $\frac{5}{11}$
۴) $\frac{6}{13}$

محل انجام محاسبات

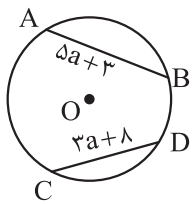
www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshClouds

۲۶- در شکل زیر دو دایره هم‌مرکز هستند و Cx در نقطهٔ B بر دایرهٔ بزرگ‌تر مماس است. اگر AB و AC بر دایرهٔ کوچک‌تر مماس باشند، اندازهٔ زاویهٔ $A\hat{B}x$ چند درجه است؟



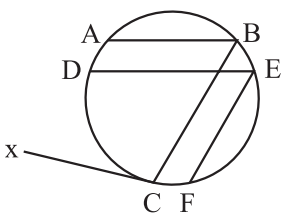
۱) ۵۰
۲) ۶۰
۳) ۷۰
۴) ۸۰

۲۷- دایرهٔ $C(O,۱۲)$ مطابق شکل مفروض است. به ازای چند عدد طبیعی a، وتر AB نسبت به وتر CD به مرکز دایره نزدیک‌تر است؟



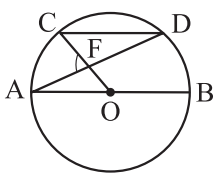
۱) ۱
۲) ۲
۳) ۳
۴) بی‌شمار

۲۸- در شکل زیر $AB \parallel DE$ ، $BC \parallel EF$ و Cx بر دایره مماس است. اگر اندازهٔ کمان $\overset{\frown}{EF}$ میانگین اندازه‌های دو کمان $\overset{\frown}{AB}$ و $\overset{\frown}{CD}$ $(\overset{\frown}{CD} > \overset{\frown}{AB})$ و $B\hat{C}x = ۱۰۰^\circ$ باشد، اندازهٔ کمان $\overset{\frown}{EF}$ چند درجه است؟



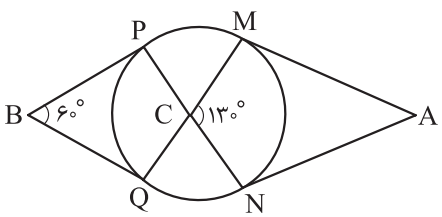
۱) ۶۰
۲) ۷۰
۳) ۷۵
۴) ۸۰

۲۹- در شکل زیر $AB \parallel CD$ ، $AB = ۶$ و $CD = ۳\sqrt{۲}$ است. اندازهٔ زاویهٔ AFC کدام است؟



۱) $۶۷/۵^\circ$
۲) ۷۰°
۳) $۷۲/۵^\circ$
۴) ۷۵°

۳۰- در شکل زیر پاره‌خط‌های BP ، AN ، AM و BQ بر دایره مماس‌اند. اندازهٔ کمان $\overset{\frown}{MN}$ چند درجه است؟



۱) ۱۱۰
۲) ۱۲۰
۳) ۱۳۰
۴) ۱۴۰

محل انجام محاسبات

www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshClouds

آمار و احتمال

۳۱- کدام‌یک از هم‌ارزی‌های زیر نادرست است؟

۱) $p \Rightarrow q \equiv \sim p \vee q$
۲) $p \wedge (p \vee q) \equiv q$
۳) $\sim (p \vee q) \equiv \sim p \wedge \sim q$
۴) $p \Leftrightarrow q \equiv (p \wedge q) \vee (\sim p \wedge \sim q)$

۳۲- در چند حالت از جدول ارزش گزاره‌های p، q و r، ارزش گزارهٔ $(p \wedge q) \Rightarrow r$ نادرست است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۳۳- اگر هر دو گزارهٔ $(p \Rightarrow q) \Rightarrow r$ و $(r \Rightarrow q) \Rightarrow p$ ارزش نادرست داشته باشند، کدام‌یک از گزاره‌های زیر نیز ارزش نادرست دارد؟

۱) q ۲) $p \vee r$ ۳) $p \Rightarrow q$ ۴) $r \Rightarrow q$

۳۴- گزارهٔ «هر عدد حقیقی، کوچک‌تر یا مساوی مربع خودش است» با استفاده از سورها به صورت ..... نوشته می‌شود و ارزش آن ..... است.

۱) $\forall x \in \mathbb{R}; x \leq x^2$ ـ درست
۲) $\forall x \in \mathbb{R}; x \leq x^2$ ـ نادرست
۳) $\exists x \in \mathbb{R}; x \leq x^2$ ـ درست
۴) $\exists x \in \mathbb{R}; x \leq x^2$ ـ نادرست

۳۵- ارزش گزارهٔ «$\forall A \subseteq \mathbb{N}, \forall m \in \mathbb{N}, \exists B \subseteq \mathbb{Z}, n(B-A) = m$».....است و نقیض این گزاره به صورت.....است.

۱) درست ـ $\forall A \subseteq \mathbb{N}, \forall m \in \mathbb{N}, \exists B \subseteq \mathbb{Z}; n(B-A) \neq m$
۲) درست ـ $\exists A \subseteq \mathbb{N}, \exists m \in \mathbb{N}, \forall B \subseteq \mathbb{Z}; n(B-A) \neq m$
۳) نادرست ـ $\forall A \subseteq \mathbb{N}, \forall m \in \mathbb{N}, \exists B \subseteq \mathbb{Z}; n(B-A) \neq m$
۴) نادرست ـ $\exists A \subseteq \mathbb{N}, \exists m \in \mathbb{N}, \forall B \subseteq \mathbb{Z}; n(B-A) \neq m$

۳۶- اگر $A = \{1\}$، $B = \{\{1\}, 2\}$ و $C = \{1, \{1\}, \{\{1\}, 2\}, 2\}$، در این‌صورت کدام گزینه نادرست است؟

۱) $A \in B$ و $B \in C$
۲) $A \subseteq B$ و $B \subseteq C$
۳) $A \in C$ و $A \subseteq C$
۴) $B \in C$ و $B \subseteq C$

۳۷- مجموعهٔ $A = \{1,2,3,4,5,6,7\}$ چند زیرمجموعه دارد، به طوری که اختلاف بزرگ‌ترین و کوچک‌ترین عضو آن برابر ۴ باشد؟

۱) ۱۶ ۲) ۲۰ ۳) ۲۱ ۴) ۲۴

۳۸- اگر k عضو به مجموعهٔ A اضافه کنیم، تعداد زیرمجموعه‌های آن ۴۴۸ واحد زیاد می‌شود. مجموعهٔ اولیهٔ A چند زیرمجموعهٔ حداقل ۳ عضوی دارد؟

۱) ۱۵ ۲) ۲۰ ۳) ۳۲ ۴) ۴۲

محل انجام محاسبات

سنجش کلاد
www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshClouds

۳۹- چه تعداد از گزاره‌های زیر صحیح است؟

الف) $A' \subseteq B \Leftrightarrow \forall x;(x \notin A \Leftrightarrow x \in B)$

ب) $A \not\subseteq B \Leftrightarrow \exists x;(x \in A \vee x \notin B)$

پ) $A - B = \{x \mid x \in A \wedge x \notin B\}$

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

۴۰- درون هر یک از خانه‌های جدول زیر، یک عدد طبیعی طوری قرار می‌دهیم به طوری که مجموع عددهای روی هر سطر، هر ستون و هر قطرِ آن برابر باشد. اگر مجموعهٔ اعداد واقع بر سطر اول با مجموعهٔ اعداد واقع بر سطر دوم برابر باشد، جمع اعداد واقع بر هر سطر چه‌قدر است؟

		۵
۹		

۱) ۱۵

۲) ۲۷

۳) ۱۵ یا ۲۷

۴) ۲۷ یا ۳۲

محل انجام محاسبات

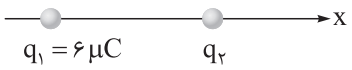
سنجش کلاد
www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshClouds

فیزیک یازدهم

۴۱- یک میلهٔ پلاستیکی خنثی را با پارچهٔ پشمی مالش می‌دهیم. پس از مالش، بار الکتریکی میلهٔ پلاستیکی $-۱۲/۸nC$ می‌شود؛ بین میله و پارچه چند الکترون و چگونه مبادله شده است؟ $(e = ۱/۶\times۱۰^{-۱۹}C)$

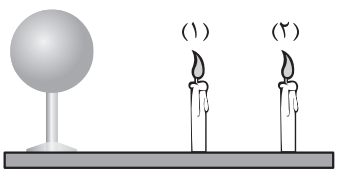
۱) ۸×۱۰^{۱۰}، از پارچه به میله
۲) ۸×۱۰^{۱۰}، از میله به پارچه
۳) ۸×۱۰^{۹}، از پارچه به میله
۴) ۸×۱۰^{۹}، از میله به پارچه

۴۲- در شکل زیر، دو بار الکتریکی نقطه‌ای $q_۱$ و $q_۲$ روی محور x، در فاصلهٔ ۶ cm از هم قرار دارند. اگر نیروی الکتریکی که بار $q_۱$ به بار $q_۲$ وارد می‌کند، برابر $(۳۰N)\vec{i}$ باشد، بار $q_۲$ چند میکروکولن است؟ $(k = ۹\times۱۰^{۹}\frac{N.m^۲}{C^۲})$



۱) ۲
۲) -۲
۳) ۲۰
۴) -۲۰

۴۳- در شکل زیر، دو شمع روشن در نزدیکی کرهٔ رسانایی قرار دارند. اگر به این کره، بار الکتریکی مثبت دهیم، کدام‌یک از موارد زیر دربارهٔ انحراف شعلهٔ شمع‌ها درست است؟



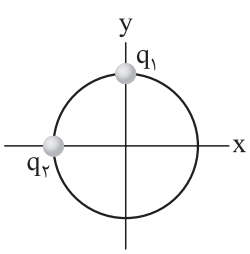
الف) شعلهٔ شمع‌ها به سمت راست منحرف می‌شود.
ب) شعلهٔ شمع‌ها به سمت چپ منحرف می‌شود.
پ) شعلهٔ شمع‌ها به یک اندازه منحرف می‌شود.
ت) شعلهٔ شمع (۱)، بیشتر از شعلهٔ شمع (۲) منحرف می‌شود.

۱) الف و پ
۲) الف و ت
۳) ب و پ
۴) ب و ت

۴۴- میدان الکتریکی بار نقطه‌ای q در فاصلهٔ r از آن برابر با $E = ۴\times۱۰^{۵}N/C$ است، این بار از فاصلهٔ $\frac{r}{۲}$ بر بار الکتریکی نقطه‌ای ۵ میکروکولنی، چند نیوتون نیرو وارد می‌کند؟

۱) ۲
۲) ۴
۳) ۵
۴) ۸

۴۵- در شکل روبه‌رو، دو ذرهٔ باردار $q_۱$ و $q_۲$ روی محیط دایره‌ای به قطر ۶cm قرار دارند. اگر میدان الکتریکی برایند در مرکز دایره (مبدأ مختصات)، در SI به صورت $\vec{E} = ۴\times۱۰^{۴}\vec{i} + ۳\times۱۰^{۴}\vec{j}$ باشد، بارهای $q_۱$ و $q_۲$ به ترتیب از راست به چپ، چند نانوکولن هستند؟ $(k = ۹\times۱۰^{۹}\frac{N.m^۲}{C^۲})$

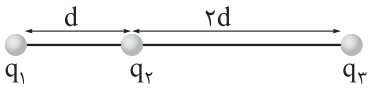


۱) -۳ و ۴
۲) ۳ و ۴
۳) -۱۲ و ۱۶
۴) ۱۲ و ۱۶

محل انجام محاسبات

www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshClouds

۴۶- در شکل زیر، سه ذرهٔ باردار، روی خط راستی قرار دارند. اگر نیروی الکتریکی خالص وارد بر هر کدام از ذره‌ها برابر صفر باشد، کدام گزینه درست است؟



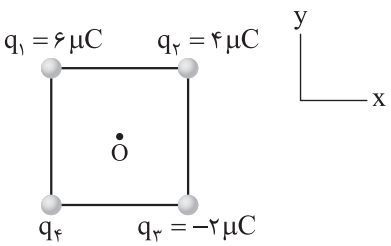
۱) $\frac{q_1}{q_2}=\frac{9}{4}$

۲) $\frac{q_1}{q_2}=-\frac{9}{4}$

۳) $\frac{q_3}{q_2}=\frac{9}{4}$

۴) $\frac{q_3}{q_2}=-\frac{9}{4}$

۴۷- در شکل مقابل، چهار ذرهٔ باردار در رأس‌های مربعی به ضلع ۲۰ cm ثابت شده‌اند. اگر میدان الکتریکی خالص در نقطهٔ O (مرکز مربع) در جهت محور x باشد، اندازهٔ این میدان خالص در SI چند واحد است؟ $(k=9\times10^9\ \frac{N.m^2}{C^2})$



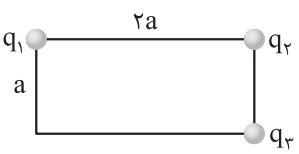
۱) 18×10^5

۲) 36×10^5

۳) $18\sqrt{2}\times10^5$

۴) $36\sqrt{2}\times10^5$

۴۸- سه ذرهٔ باردار در رأس مستطیل مطابق شکل زیر، ثابت نگه داشته شده‌اند و میدان الکتریکی حاصل، در رأس چهارم مستطیل، صفر است. q_3، چند برابر q_1 است؟



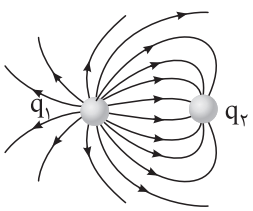
۱) ۸

۲) −۸

۳) ۲

۴) −۲

۴۹- خطوط میدان الکتریکی برای دو کرهٔ رسانای باردار کوچک به شکل زیر هستند. در رابطه با نوع بار هر کره و مقایسهٔ اندازهٔ بار آن‌ها کدام درست است؟



۱) $|q_1|>|q_2|, q_2<0, q_1>0$

۲) $|q_1|<|q_2|, q_2<0, q_1>0$

۳) $|q_1|>|q_2|, q_2>0, q_1<0$

۴) $|q_1|<|q_2|, q_2>0, q_1<0$

۵۰- قطرهٔ روغنی در فضای بین دو صفحهٔ افقی که اختلاف پتانسیل معینی دارند، معلق است. اگر جرم این قطره $1/2\times10^{-14}\ kg$ و اندازهٔ میدان الکتریکی یکنواخت بین دو صفحه برابر $1/25\times10^5\ V/m$ باشد، دربارهٔ تعداد الکترونی که این قطره نسبت به حالت خنثی، جذب کرده یا از دست داده، کدام درست است؟ $(e=1/6\times10^{-19}C, g=10\ m/s^2)$

۱) ۶ الکترون جذب کرده است.

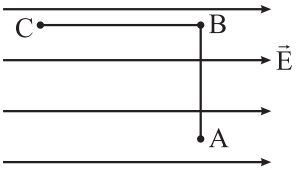
۲) ۶ الکترون از دست داده است.

۳) ۸ الکترون جذب کرده است.

۴) ۸ الکترون از دست داده است.

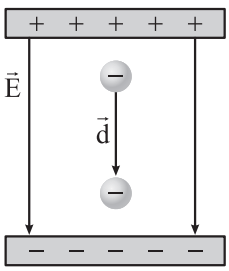
محل انجام محاسبات

سنجش کلاد
www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshClouds



۵۱- در شکل مقابل، بار $q = -5\mu C$ را در میدان الکتریکی یکنواخت $8\times10^{5}\ N/C$، نخست از نقطهٔ A تا نقطهٔ B و سپس تا نقطهٔ C جابه‌جا می‌کنیم. اگر $AB = 30\ cm$ و $BC = 40\ cm$ باشد، کاری که نیروی الکتریکی در این جابه‌جایی انجام می‌دهد، چند ژول است؟

۱) ۲ ۲) ۱/۶
۳) −۲ ۴) −۱/۶



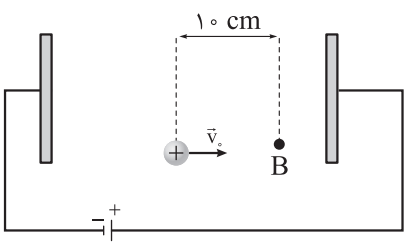
۵۲- مطابق شکل مقابل، یک ذره با بار منفی را در جهت خطوط میدان الکتریکی جابه‌جا می‌کنیم. چه تعداد از عبارت‌های زیر دربارهٔ جابه‌جایی این ذره، درست هستند؟

الف) کار میدان الکتریکی منفی است.
ب) کار عامل خارجی مثبت است.
پ) انرژی پتانسیل الکتریکی ذره، افزایش می‌یابد.
ت) پتانسیل الکتریکی، کاهش می‌یابد.

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۵۳- اختلاف پتانسیل الکتریکی پایانه‌های باتری خودرو برابر $12V$ است. اگر بار الکتریکی -48 کولن از پایانهٔ منفی به پایانهٔ مثبت باتری جابه‌جا شود، انرژی پتانسیل الکتریکی آن چند ژول و چگونه تغییر می‌کند؟

۱) ۵۷۶، افزایش می‌یابد. ۲) ۵۷۶، کاهش می‌یابد.
۳) ۴، افزایش می‌یابد. ۴) ۴، کاهش می‌یابد.



۵۴- در شکل مقابل، اندازهٔ میدان الکتریکی یکنواخت بین دو صفحه برابر $2/0\times10^{3}\ N/C$ است. پروتونی از نقطهٔ A با سرعت $\vec{v}_0$ در خلاف جهت میدان الکتریکی پرتاب شده است و سرانجام در نقطهٔ B متوقف می‌شود. اگر بار پروتون $1/6\times10^{-19}\ C$ و جرم آن $1/6\times10^{-27}\ kg$ باشد، تندی پرتاب پروتون (v_0) چند متر بر ثانیه است؟ (از وزن پروتون و مقاومت هوا چشم‌پوشی شود.)

۱) 10^{4} ۲) 2×10^{4} ۳) 10^{5} ۴) 2×10^{5}

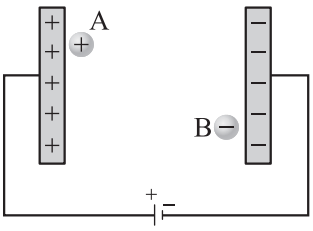
۵۵- ذره‌ای به جرم $4\mu g$ و بار $6nC$، در یک میدان الکتریکی از نقطهٔ A به پتانسیل الکتریکی $V_A = 40V$ تا نقطهٔ B به پتانسیل الکتریکی V_B، فقط تحت تأثیر میدان الکتریکی جابه‌جا می‌شود و تندی آن از $4\ m/s$ به $8\ m/s$ می‌رسد. V_B چند ولت است؟

۱) ۲۴ ۲) ۱۶ ۳) −۱۶ ۴) −۲۴

محل انجام محاسبات

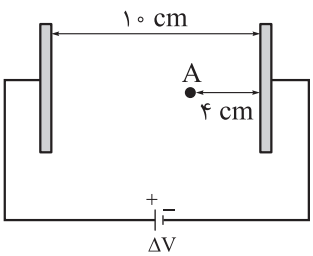
www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshClouds

۵۶- مطابق شکل مقابل، ذرهٔ A با بار $q_A = |q|$ و جرم $m_A = m$ را از نزدیکی صفحهٔ مثبت و ذرهٔ B با بار $q_B = -|q|$ و جرم $m_B = 4m$ را از نزدیکی صفحهٔ منفی، رها می‌کنیم تا در نهایت به صفحهٔ مقابلشان برسند. اگر کار میدان الکتریکی روی این دو ذره به ترتیب W_A و W_B و تندی آن‌ها در لحظهٔ رسیدن به صفحهٔ مقابلشان V_A و V_B باشد، کدام گزینه درست است؟ (از اثر مقاومت هوا و نیروی وزن صرف نظر کنید.)



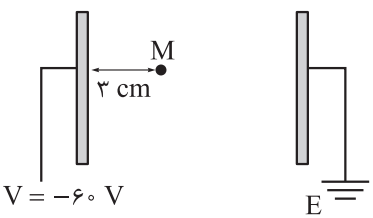
۱) $V_B = V_A \, , W_A = W_B$
۲) $V_A = 2V_B \, , W_A = W_B$
۳) $V_A = V_B \, , W_A = -W_B$
۴) $V_A = 2V_B \, , W_A = -W_B$

۵۷- در شکل مقابل، ذره‌ای با بار الکتریکی $q = -50\mu C$ را در نقطهٔ A رها می‌کنیم تا در نهایت به یکی از صفحه‌های باردار برخورد کند. اگر در طی این جابه‌جایی انرژی پتانسیل الکتریکی ذره $3mJ$ تغییر کند، اختلاف پتانسیل الکتریکی بین دو صفحه چند ولت است؟ (از اثر وزن ذره صرف نظر کنید.)



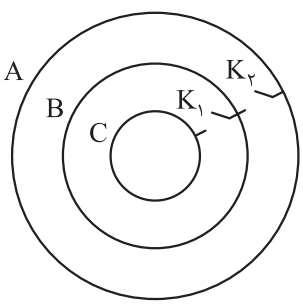
۱) ۴۰
۲) ۶۰
۳) ۱۰۰
۴) ۱۲۰

۵۸- در شکل روبه‌رو، در فضای بین دو صفحهٔ رسانای موازی، میدان الکتریکی یکنواخت $E = 500\ N/C$ ایجاد شده است. به ترتیب، فاصلهٔ بین دو صفحه چند سانتی‌متر و پتانسیل الکتریکی نقطهٔ M چند ولت است؟



۱) ۱۲ و ۴۵−
۲) ۱۲ و ۱۵−
۳) ۶ و ۴۵−
۴) ۶ و ۱۵−

۵۹- در شکل مقابل، سه پوستهٔ کروی و رسانای A، B و C، دارای بارهای الکتریکی $q_A = 10\mu C$، $q_B = -4\mu C$ و $q_C = 5\mu C$ هستند. ابتدا کلید K_2 را بسته و سپس باز می‌کنیم و در ادامه کلید K_1 را می‌بندیم. بار الکتریکی نهایی کره‌های A، B و C به ترتیب از راست به چپ، برحسب میکروکولن، کدام است؟



۱) ۶ ـ ۵ ـ صفر
۲) ۳ ـ ۳/۵ ـ ۳/۵
۳) ۱۱ ـ صفر ـ صفر
۴) ۶ ـ ۲/۵ ـ ۲/۵

۶۰- یک ماهواره به صورت مکعبی فلزی به ضلع $50cm$ است. اگر این ماهواره در اثر عبور از یکی از لایه‌های جو زمین دارای بار الکتریکی شده و اندازهٔ چگالی سطحی بار الکتریکی روی سطح آن $4\frac{nC}{cm^2}$ باشد، اندازهٔ بار موجود در سطح این ماهواره چند میکروکولن است؟ (از تجمع بار بر روی لبه‌ها چشم‌پوشی شود.)

۱) ۱
۲) ۱۰
۳) ۶
۴) ۶۰

محل انجام محاسبات

www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshClouds

شیمی یازدهم

۶۱- کدام عدد اتمی مربوط به عنصری از دستهٔ d جدول تناوبی است؟

۱) ۳۷ ۲) ۴۸ ۳) ۳۱ ۴) ۲۰

۶۲- در بین فلزهای قلیایی دوره‌های اول تا چهارم جدول تناوبی، بیشترین شعاع اتمی مربوط به ..... بوده و بیشترین خاصیت نافلزی در گروه ۱۷ مربوط به عنصری است که ..... .

۱) $_{19}K$ ـ در دمای اتاق به آرامی با گاز هیدروژن واکنش می‌دهد.

۲) $_{19}K$ ـ در دمای ۷۳ کلوین به سرعت با گاز هیدروژن واکنش می‌دهد.

۳) $_{3}Li$ ـ در دمای اتاق به آرامی با گاز هیدروژن واکنش می‌دهد.

۴) $_{3}Li$ ـ در دمای ۷۳ کلوین به سرعت با گاز هیدروژن واکنش می‌دهد.

۶۳- با توجه به واکنش‌های زیر، کدام مورد درست است؟

I) $FeCl_2(aq) + 2NaOH(aq) \rightarrow X + 2NaCl(aq)$

II) $Y + 3NaOH(aq) \rightarrow 3NaCl(aq) + Fe(OH)_3(s)$

III) $2Fe_2O_3(s) + 3C(s) \rightarrow 4Z(s) + 3CO_2(g)$

۱) حالت فیزیکی ترکیب Y همانند فراورده‌های واکنش (I) بوده و محلول در آب است.

۲) Z یک عنصر است و آرایش الکترونی اتم آن به زیرلایه‌ای با گنجایش ۱۰ الکترون ختم می‌شود.

۳) رنگ فراوردهٔ نامحلول واکنش (II)، طول موج بلندتری نسبت به رنگ محلول کلردار واکنش‌دهندهٔ این واکنش دارد.

۴) نسبت شمار آنیون به کاتیون در ترکیب X، همانند نسبت شمار کاتیون به آنیون در واکنش‌دهندهٔ اکسیژن‌دار واکنش (III) است.

۶۴- اگر در نمونه‌ای ناخالص از کلسیم کربنات به جرم ۲۵۰ گرم، ۳۶ گرم کلسیم وجود داشته باشد، درصد خلوص این نمونه کدام است و اگر به این نمونه، ۱۶۰ گرم کلسیم کربنات با خلوص ۳۷/۵ ٪ اضافه کنیم، به تقریب چند درصد جرم نمونهٔ نهایی را ناخالصی تشکیل می‌دهد؟ (در ناخالصی‌ها، کلسیم وجود ندارد و $(Ca = 40 , O = 16 , C = 12 : g.mol^{-1})$

۱) ۹۰ ـ ۳۷ ۲) ۳۶ ـ ۶۳

۳) ۹۰ ـ ۶۳ ۴) ۳۶ ـ ۳۷

۶۵- کدام عبارت دربارهٔ عنصری که آرایش لایهٔ ظرفیت آن به ns^2np^2 ختم می‌شود، درست است؟

۱) اگر شمار الکترون‌های با $l = 2$ آن برابر اتم مس باشد، این عنصر رسانایی کم‌تری نسبت به عناصر هم‌گروهی پایین‌تر از خود دارد.

۲) اگر سطح براق و درخشانی داشته باشد، به طور حتم چکش‌خواری و رسانایی خوبی نیز دارد.

۳) اگر در واکنش با سایر عناصر، الکترون به اشتراک بگذارد، به طور حتم، $n < 4$ خواهد بود.

۴) اگر کاتیون پایدار تشکیل دهد، عدد اتمی آن می‌تواند برابر ۵۲ باشد.

محل انجام محاسبات

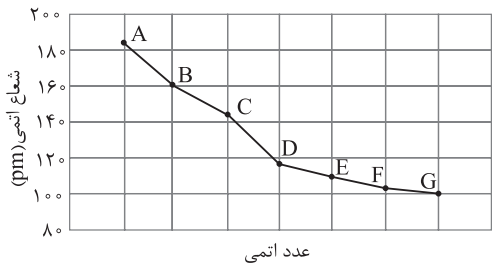
سنجش کلاد
www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshClouds

۶۶- با توجه به معادلهٔ داده‌شده، اگر ۱۶۰ گرم هیدرویدیک اسید با مقدار کافی پتاسیم پرمنگنات واکنش دهد و جرم فراوردهٔ اکسیژن‌دار تولیدی برابر ۱/۸ گرم باشد، بازدهٔ درصدی واکنش کدام است؟ $(H=1, O=16, I=127 : g.mol^{-1})$

(معادلهٔ واکنش موازنه نشده است.) $KMnO_4(s) + HI(aq) \rightarrow MnI_2(aq) + H_2O(l) + KI(aq) + I_2(s)$

۱) ۱۶ ۲) ۳۲ ۳) ۴۰ ۴) ۲۰

۶۷- با توجه به نمودار زیر که مربوط به تغییرات شعاع اتمی عناصر در دورهٔ سوم است، کدام موارد درست است؟



الف) جمع جبری بار یون‌های پایدار عنصرهای مورد نظر برابر صفر است.

ب) حالت فیزیکی عناصر F و G در دمای اتاق، برخلاف رنگ آن‌ها متفاوت است.

پ) آرایش یون پایدار عنصر D همانند عنصر E به گاز نجیب آرگون می‌رسد.

ت) عنصر F به شکل آزاد در طبیعت یافت می‌شود و اتم آن، ۶ الکترون ظرفیتی دارد.

۱) الف ـ ب ۲) الف ـ ب ـ ت ۳) پ ـ ت ۴) ب ـ پ ـ ت

۶۸- در کدام گزینه مقایسهٔ انجام‌شده به نادرستی صورت گرفته است؟

۱) واکنش‌پذیری: $_{20}Ca > {}_{30}Zn > {}_{29}Cu$ ۲) شعاع اتمی: $_{14}Si > {}_{7}N > {}_{8}O$

۳) خصلت نافلزی: $_{7}N > {}_{14}Si > {}_{15}P$ ۴) خصلت فلزی: $_{37}Rb > {}_{19}K > {}_{11}Na$

۶۹- کدام موارد از مطالب زیر، به یقین درست‌اند؟

الف) اولین هالوژن جدول دوره‌ای که لایهٔ الکترونی چهارم آن اشغال می‌شود، در دمای $250^{\circ}C$ با گاز هیدروژن واکنش می‌دهد.

ب) آرایش الکترونی کاتیون‌های حاصل از فلزهای واسطه به آرایش الکترونی گاز نجیب نمی‌رسند.

پ) بدون در نظرگرفتن گاز نجیب، در عناصر دورهٔ دوم جدول دوره‌ای، بیشترین اختلاف شعاع اتمی بین لیتیم و فلوئور است.

ت) مجموع $(n+l)$ الکترون‌های ظرفیتی عنصر گازی دورهٔ چهارم جدول دوره‌ای برابر ۳۳ است.

۱) ب ـ ت ۲) الف ـ پ ۳) الف ـ ت ۴) ب ـ پ

۷۰- درستی یا نادرستی عبارت‌های زیر در کدام گزینه، به درستی اشاره شده است؟

الف) آهن (II) اکسید به عنوان رنگ قرمز در نقاشی کاربرد دارد.

ب) از آلومینیم مذاب تولیدشده در فرایند ترمیت برای جوشکاری خطوط ریل راه‌آهن استفاده می‌شود.

پ) از اولین فلز واسطهٔ دورهٔ چهارم، برای تهیهٔ وسایلی مانند تلویزیون رنگی و برخی شیشه‌ها استفاده می‌شود.

ت) استخراج فلزهای روی و نیکل از لابه‌لای خاک و گیاه، برخلاف طلا و مس، مقرون‌به‌صرفه نیست.

۱) نادرست ـ نادرست ـ درست ـ نادرست ۲) نادرست ـ درست ـ نادرست ـ نادرست

۳) درست ـ نادرست ـ درست ـ نادرست ۴) نادرست ـ نادرست ـ درست ـ درست

محل انجام محاسبات

www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshClouds

۷۱- اگر در واکنش مقدار کافی کربن با Fe_2O_3 که برای استخراج آهن در فولاد مبارکه استفاده می‌شود، ۲۸ تن آهن تولید شود، به تقریب چند تن آهن (III) اکسید با خلوص ۷۵ درصد، مصرف شده است؟

$(Fe = 56 , O = 16 , C = 12 : g.mol^{-1})$

۱) ۵۳ / ۳ ۲) ۱۰۶ / ۶ ۳) ۲۶ / ۶ ۴) ۱۶۰

۷۲- با توجه به جایگاه چند عنصر که در جدول تناوبی زیر نشان داده شده است، کدام گزینه درست است؟

												Y				
R											D			A	X	
	E		G			M						Z				

۱) عنصر X برخلاف عنصر Z، در اثر ضربه خرد نمی‌شود.

۲) برای نام‌گذاری ترکیب‌های M، نیازی به استفاده از اعداد رومی نیست.

۳) عنصر D همانند عنصرهای دارای رسانایی الکتریکی هم‌دورهٔ خود، با تشکیل کاتیون به پایداری می‌رسد.

۴) اگر مجموع اعداد کوانتومی اصلی و فرعی الکترون‌های ظرفیت یکی از عنصرهای نشان داده شده در جدول برابر ۱۳ باشد، عدد اتمی آن از عدد اتمی عنصر G کم‌تر است.

۷۳- کدام مورد درست است؟ (X = فلز واسطه، Y = فلز اصلی)

۱) اگر واکنش: $Cl_2(g) + 2YI \rightarrow 2YCl + I_2$ به طور طبیعی انجام‌پذیر باشد، در همین شرایط، واکنش $Br_2(l) + 2\,YCl \rightarrow 2\,YBr + Cl_2$ نیز به طور طبیعی انجام‌پذیر است.

۲) اگر واکنش: $2X_2O_3(s) + 3Ti(s) \rightarrow 4X(s) + 3TiO_2(s)$ به طور طبیعی انجام‌پذیر باشد، واکنش $ZnO(s) + X(s) \rightarrow X_2O_3(s) + Zn(s)$ نیز به طور طبیعی انجام‌پذیر است.

۳) با توجه به واکنش: $X + 2HCl \rightarrow XCl_2 + H_2$ که به طور طبیعی انجام نمی‌پذیرد، می‌توان دریافت که واکنش‌پذیری کلر از X بیشتر است.

۴) اگر واکنش: $2X_2O_3(s) + 3C(s) \rightarrow 4X(s) + 3CO_2(g)$ به طور طبیعی انجام‌پذیر باشد، واکنش $X_2O_3(s) + 6\,Y(s) \rightarrow 2X(s) + 3\,Y_2\,O(s)$ نیز به طور طبیعی انجام‌پذیر است.

۷۴- اگر m گرم نیتروگلیسیرین با خلوص ۶۰ درصد مطابق واکنش زیر تجزیه شود و حجم گاز نیتروژن تولیدشده برابر ۳ / ۶ لیتر باشد، m کدام است؟ (بازده واکنش ۸۰ درصد و حجم مولی گازها در شرایط واکنش، ۲۲ / ۷ لیتر است، $H = 1 , C = 12 , N = 14 , O = 16 : g.mol^{-1}$)

$C_3H_5(NO_3)_3(s) \rightarrow H_2O(g) + CO_2(g) + N_2(g) + O_2(g)$ (معادلهٔ واکنش موازنه شود.)

۱) ۵۰ ۲) ۴۰ ۳) ۳۶ ۴) ۲۴

محل انجام محاسبات

www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshClouds

۷۵- همهٔ عبارت‌های زیر دربارهٔ طلا درست است، به‌جز ..... .

۱) رسانایی الکتریکی آن بسیار بالا است و این فلز همانند نقره به صورت آزاد در طبیعت یافت می‌شود

۲) مقدار طلا در معادن آن بسیار کم است و برای استخراج میزان اندکی از آن، حجم انبوهی خاک معدن استفاده می‌شود

۳) به اندازه‌ای چکش‌خوار و نرم است که چند گرم از آن را می‌توان به صفحه‌ای با مساحت چند متر مربع تبدیل کرد

۴) واکنش‌ندادن آن با گازهای موجود در هواکره و مواد موجود در بدن انسان همراه با بازتاب اندک پرتوهای خورشیدی، سبب شده تقاضای جهانی برای این فلز افزایش یابد

۷۶- تیتانیم اغلب در طبیعت به شکل مخلوطی از ماسه و ایلمنیت ($FeTiO_3$) یافت می‌شود. استخراج تیتانیم از این مخلوط به صورت زیر انجام می‌شود:

$$I)\ FeTiO_3(s) + Cl_2(g) + C(s) \rightarrow CO(g) + FeCl_2(s) + TiCl_4(g)$$

$$II)\ TiCl_4(g) + Mg(s) \rightarrow MgCl_2(l) + Ti(s)$$

مجموع ضرایب استوکیومتری فراورده‌های واکنش (II) به ضریب CO در واکنش (I) کدام است و اگر درصد جرمی ایلمنیت ($FeTiO_3$) در مخلوط آن با ماسه، برابر ۲۵ درصد باشد، از واکنش ۰/۰۱ کیلوگرم مخلوط ماسه و ایلمنیت، چند میلی‌گرم فلز تیتانیم به دست می‌آید؟ (بازده درصدی واکنش‌های (I) و (II) را به ترتیب برابر ۱۰۰٪ و ۷۶٪ در نظر بگیرید، معادلهٔ واکنش‌ها موازنه شود. $O = 16, Cl = 35/5, Ti = 48, Fe = 56 : g.mol^{-1}$)

۱) $\frac{3}{2}$، ۶۰۰ ۲) $\frac{3}{2}$، ۷۶۰ ۳) ۱، ۶۰۰ ۴) ۱، ۷۶۰

۷۷- کدام مطلب نادرست است؟ (هر هکتار معادل با ده هزار متر مربع است.)

۱) در فرایند استخراج فلز مس با استفاده از گیاهان، درصد جرمی فلز در خاکستر گیاه، بیشتر از درصد جرمی آن در خاک است.

۲) فلزی که در سطح جهان بیشترین مصرف سالانه را در بین صنایع گوناگون دارد، در طبیعت به صورت کانه هماتیت یافت می‌شود.

۳) هر چه واکنش‌پذیری فلزی بیشتر باشد، استخراج آن از سنگ معدن، دشوارتر خواهد بود.

۴) اگر در هر هکتار زمین بتوان ۱۰ تن گیاه برداشت کرد، در ۵۰۰ متر مربع، می‌توان 2×10^5 گرم فلز روی پالایش کرد (هر کیلوگرم گیاه، حاوی ۴۰ گرم روی است).

۷۸- توصیف زیر نشان‌دهندهٔ ویژگی‌های یکی از عناصر جدول تناوبی است. ویژگی ذکرشده در کدام گزینه، در مورد آن درست است؟

«عنصری با سطح صیقلی که در واکنش با فلوئور، الکترون از دست می‌دهد و شمار الکترون‌های ظرفیتی آن برابر شمار الکترون‌های ظرفیتی عنصری زردرنگ و جامد از دورهٔ سوم است و آرایش یون پایدار اولین عنصر هم‌دسته با آن به گاز نجیب آرگون می‌رسد.»

۱) عنصر بعدی آن، شبه‌فلزی است که رسانایی الکتریکی کمی دارد.

۲) به دستهٔ p و دورهٔ چهارم جدول تعلق دارد.

۳) عدد اتمی عنصر هم‌گروه آن در دورهٔ بعدی، برابر با ۴۲ است.

۴) آرایش الکترونی آن مطابق قاعدهٔ آفبا به $4s^1$ ختم می‌شود.

محل انجام محاسبات

سنجش کلاد
www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshClouds

۷۹- در اثر واکنش ۵ گرم کلسیم کربنات با مقدار کافی محلول هیدروکلریک اسید، به تقریب چند مولکول در فراورده‌ها تولید می‌شود؟ (۲۰ درصد نمونهٔ کلسیم کربنات را ناخالصی تشکیل می‌دهد و بازده درصدی واکنش برابر ۶۰ درصد است، $(Ca = ۴۰ , O = ۱۶ , C = ۱۲ : g.mol^{-۱})$

$CaCO_۳(s) + HCl(aq) \rightarrow CaCl_۲(aq) + CO_۲(g) + H_۲O(l)$ (معادله موازنه شود.)

۱) $۳/۰۱ \times ۱۰^{۲۲}$ ۲) $۳/۰۱ \times ۱۰^{۲۱}$

۳) $۲/۸۸ \times ۱۰^{۲۱}$ ۴) $۲/۸۸ \times ۱۰^{۲۲}$

۸۰- اگر جرم برابری گلوکز در واکنش‌های سوختن (واکنش I) و تخمیر بی‌هوازی آن (واکنش II) شرکت کند و اختلاف حجم کربن دی‌اکسید تولیدی در این دو واکنش برابر ۲۰ لیتر باشد، اختلاف جرم الکل و آب تولیدی در آن‌ها چند گرم خواهد بود؟ (بازده واکنش (I) دو برابر واکنش (II) است و حجم مولی گازها در شرایط واکنش، ۲۵ لیتر است، $(H = ۱ , C = ۱۲ , O = ۱۶ : g.mol^{-۱})$

I) $C_۶H_{۱۲}O_۶ + ۶O_۲ \rightarrow ۶CO_۲ + ۶H_۲O$

II) $C_۶H_{۱۲}O_۶ \rightarrow ۲CO_۲ + ۲C_۲H_۵OH$

۱) ۴/۱۶ ۲) ۹/۹۲ ۳) ۶/۱۴ ۴) ۹/۲۹

مهم‌ترین ویژگی‌های آزمون‌های خیلی سبز در پایه‌های دهم و یازدهم:

۱- برگزاری دست‌کم یک آزمون در ماه بر اساس روال تدریس در مدرسه

۲- برگزاری آزمون‌های ویژه برای زمان‌های خاص (میان ترم، ترم، پس از عیدو...)

۳- امکان جبران عقب‌ماندگی‌ها یا دوره مطالب برای تثبیت آن‌ها

پاسخ‌نامهٔ تشریحی آزمون را ساعت ۱۶ از صفحهٔ شخصی خودتان در سایت آزمون خیلی سبز دریافت کنید.

azmoon.kheilisabz.com

محل انجام محاسبات

سنجش کلاد
www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshClouds

پاسخ‌نامه آزمون آزمایشی خیلی سبز

رشته ریاضی

پایه یازدهم	مرحله دوم
سال تحصیلی ۰۴-۱۴۰۳	تاریخ برگزاری: ۱۸/آبان/۱۴۰۳

نام درس	طراحان به ترتیب حروف الفبا
حسابان	زهرا پورشیر ـ شمیم پهلوان شریف ـ فرشاد حسن‌زاده ـ خشایار خاکی ـ مجید رفعتی ـ علی شهرابی محمد گودرزی ـ میلاد منصوری ـ حسین نادری ـ محمدسجاد نقیه
آمار و احتمال	علیرضا شریف خطیبی ـ مسعود شفیعی ـ عطا صادقی ـ سروش موئینی
هندسه	امیرحسین ابومحبوب ـ محمدطاهر شعاعی ـ صبا مهدوی ـ حسین هاشمی طاهری
فیزیک	یاشار انگوتی ـ نوید شاهی
شیمی	حمید ذبحی ـ وحید فارسیان ـ امیرحسین مسلمی

نام درس	مسئول درس	گزینشگر	مولف پاسخ‌نامه	کارشناسان علمی	ویراستاران به ترتیب حروف الفبا
حسابان	محمدسجاد نقیه	محمدسجاد نقیه	شمیم پهلوان‌شریف	سجاد داوطلب علی شهرابی شقایق راهبریان	عادل حسینی ـ علی رضایی ماهان فنی‌فر
آمار و احتمال	مسعود شفیعی	مسعود شفیعی	مسعود شفیعی	مریم نظری	علیرضا کاظمی بقا ماهان فنی‌فر
هندسه	امیرحسین ابومحبوب	امیرحسین ابومحبوب	فرزانه خاکپاش	زهرا جالینوسی	مهدی خوش‌نویس ماهان فنی‌فر ابوالفضل ناصری
فیزیک	نوید شاهی	یاشار انگوتی	علیرضا عبداللهی	علیرضا عبداللهی	ماهان فنی‌فر ـ امیر محمودی انزابی پارسا مرادی ـ ابوالفضل ناصری
شیمی	یاسر عبداللهی	امیرحسین مسلمی	امیرحسین مسلمی	احسان رحیمی	سید علی حسین‌زاده پارسا طاهری

سرپرست محتوایی: فاطمه آقاجانپور

ویژه یازدهمی‌های ۱۴۰۳

Azmoon.kheilisabz.com

سنجش کلاد
www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshClouds

آزمون آزمایشی خیلی سبز

سرپرست تولید	الناز علی‌یاری‌زاده
ویراستاران فنی	منیژه حق‌دوست ـ راضیه سادات خلدی‌نسب زهرا صفری ـ محیا غنی‌فرد زهرا فرهادی‌مهر ـ مریم مسلمی‌زاده ساعده نمازی ـ مریم نوری‌نیا
رسام	مونا آندستا سارا گنجی آزادپور
صفحه‌آرایی	سحر ازلی تاش ـ فاطمه بخششی مریم حسین‌زاده ـ سپیده سخایی مائده صبری ـ نیلوفر فرخجسته مهدیه گل‌پور ـ لیلا نعمت‌پور

Azmoon.kheilisabz.com

www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshClouds

حسابان یازدهم

۱ اگر a جواب معادلهٔ $\sqrt{2x-1}=x-2$ باشد، مجموع ارقام عدد $4a$ کدام است؟

۱) ۲ ● ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۵

پاسخ خیلی تشریحی ✔

گام اول: برای حل معادله، دو طرف را به توان دو می‌رسانیم:

$$(\sqrt{2x-1}=x-2)^2 \Rightarrow 2x-1=x^2-4x+4 \Rightarrow x^2-6x+5=0$$

$$\Rightarrow (x-1)(x-5)=0 \begin{cases} x=1 \text{ غ ق ق} \\ x=5 \checkmark \end{cases}$$

(سمت راست منفی می‌شه و رادیکال نمی‌تونه برابر با عدد منفی باشه.)

گام دوم: $a=5$ جواب قابل قبول ما است؛ پس $4a$ برابر است با ۲۰ و مجموع ارقام ۲۰ می‌شود:

$$0+2=2$$

سنجش کلاد
www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshClouds

۲ تعداد جواب‌های معادلهٔ $\frac{۳x+۳}{۲x-۴}=\frac{x+۷}{x+۲}+\frac{۲۰}{x^۲-۴}$ کدام است؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

پاسخ خیلی تشریحی ✔

گام اول: برای حل معادله در قدم اول نیاز به مخرج‌مشترک‌گیری داریم. برای این کار مخرج کسرها را کمی ساده‌تر می‌کنیم. مخرج اولین کسر با استفاده از اتحاد مزدوج تجزیه می‌شود و در مخرج کسر حاصل، می‌توانیم از عدد ۲ فاکتور بگیریم:

$$\underbrace{\frac{۲۰}{x^۲-۴}}_{\text{مزدوج}}+\frac{x+۷}{x+۲}=\underbrace{\frac{۳x+۳}{۲x-۴}}_{\text{فاکتورگیری}}\Rightarrow\frac{۲۰}{(x-۲)(x+۲)}+\frac{x+۷}{x+۲}=\frac{۳x+۳}{۲(x-۲)}$$

گام دوم: حالا مخرج‌مشترک می‌گیریم:

$$\frac{۲۰\times۲}{(x-۲)(x+۲)\times۲}+\frac{\overbrace{(x+۷)(x-۲)}^{x^۲+۵x-۱۴}\times۲}{(x+۲)(x-۲)\times۲}=\frac{(۳x+۳)(x+۲)}{۲(x-۲)(x+۲)}$$

$$\Rightarrow\frac{۴۰+۲x^۲+۱۰x-۲۸}{۲(x-۲)(x+۲)}=\frac{۳x^۲+۹x+۶}{۲(x-۲)(x+۲)}$$

گام سوم: با در نظر گرفتن این‌که $x=۲$ و $x=-۲$ به علت این‌که ریشه‌های مخرج هستند، نمی‌توانند جواب معادله باشند، مخرج‌ها را ساده می‌کنیم؛ پس داریم:

$$۲x^۲+۱۰x+۱۲=۳x^۲+۹x+۶\Rightarrow x^۲-x-\underbrace{۶}_{۲\times۳}=۰\Rightarrow(x-۳)(x+۲)=۰\begin{cases}x=۳ & \checkmark\\ x=-۲ & \text{غ ق ق}\end{cases}$$

سنجش کلاد
www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshClouds

۳ اگر جملات اول و نهم یک دنبالهٔ هندسی با قدرنسبت مثبت به ترتیب ۳ و ۲۴۳ باشد، مجموع ۸ جملهٔ اول این دنباله کدام است؟

۱) $۲۴۰(\sqrt{۳}+۱)$ ۲) $۲۴۰(\sqrt{۳}-۱)$

۳) $۱۲۰(\sqrt{۳}+۱)$ ۴) $۱۲۰(\sqrt{۳}-۱)$

Hint به کمک جملهٔ اول و نهم، قدرنسبت (r) دنباله رو به دست بیار، بعد مجموع ۸ جملهٔ اول رو به دست بیار.

درس Box

به دنباله‌ای که در آن هر جمله از ضرب یک مقدار ثابت در جملهٔ قبلی‌اش به دست می‌آید، دنبالهٔ هندسی می‌گویند. در واقع، در این دنباله حاصل تقسیم هر دو جملهٔ متوالی برابر است با قدرنسبت آن. (قدرنسبت دنبالهٔ هندسی را معمولاً با r یا q نشان می‌دهند.)

$$\frac{a_n}{a_{n-۱}} = r$$

مانند:

$$\underset{\times ۲}{۳} , \underset{\times ۲}{۶} , \underset{\times ۲}{۱۲} , ۲۴ , \ldots$$

$$r = \frac{۶}{۳} = \frac{۱۲}{۶} = \frac{۲۴}{۱۲} = ۲$$

جملهٔ عمومی دنبالهٔ هندسی: اگر جملهٔ اول یک دنبالهٔ هندسی $a_۱$ و قدرنسبت آن r باشد، جملهٔ عمومی دنباله برابر است با:

$$a_n = a_۱ . r^{n-۱}$$

که در آن:

a_n: جملهٔ nاُم

$a_۱$: جملهٔ اول

r: قدرنسبت

n: شمارهٔ جمله

مجموع جملات دنبالهٔ هندسی:

مجموع n جملهٔ اول یک دنبالهٔ هندسی (S_n) با جملهٔ اول $a_۱$ و قدرنسبت r برابر است با:

$$S_n = \frac{a_۱(۱-r^n)}{۱-r}$$

پاسخ خیلی تشریحی ✔

گام اول (به دست آوردن r (قدرنسبت)):

با توجه به سؤال، جملهٔ اول $(a_۱)$ برابر ۳ و جملهٔ نهم $(a_۹)$ برابر ۲۴۳ است؛ پس با توجه به جملهٔ عمومی دنبالهٔ هندسی داریم:

$$a_n = a_۱ r^{n-۱} \xrightarrow[a_۹=۲۴۳]{a_۱=۳ , n=۹} ۲۴۳ = ۳ \times r^{۹-۱} \Rightarrow ۸۱ = r^۸ \Rightarrow ۳^۴ = r^۸ \Rightarrow r = \pm\sqrt{۳}$$

که با توجه به فرض سؤال که $r > ۰$ است؛ پس $r = \sqrt{۳}$ می‌باشد.

گام دوم (به دست آوردن مجموع ۸ جملهٔ اول):

طبق فرمول مجموع n جملهٔ اول دنبالهٔ هندسی داریم:

$$S_n = \frac{a_۱(۱-r^n)}{۱-r} \xrightarrow[n=۸]{a_۱=۳ , r=\sqrt{۳}} S_n = \frac{۳(۱-(\sqrt{۳})^۸)}{۱-\sqrt{۳}}$$

$$\Rightarrow S_۸ = \frac{۳-۳(\sqrt{۳})^۸}{۱-\sqrt{۳}} = \frac{۳-۳(۳^۴)}{۱-\sqrt{۳}} = \frac{۳-۳^۵}{۱-\sqrt{۳}} = \frac{-۲۴۰}{۱-\sqrt{۳}} \times \frac{۱+\sqrt{۳}}{۱+\sqrt{۳}}$$

گویاکردن

$$\Rightarrow S_۸ = \frac{-۲۴۰ \times (۱+\sqrt{۳})}{۱-۳} = \frac{-۲۴۰(۱+\sqrt{۳})}{-۲} = ۱۲۰(۱+\sqrt{۳})$$

سنجش کلاد
www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshClouds

۴ در دنبالهٔ هندسی a_n، مجموع شش جملهٔ اول، ۹ برابر مجموع سه جملهٔ اول است. مقدار $\frac{a_{۱۰}}{a_۵}$ کدام است؟

۱) ۱۶ ۲) ۳۲ ۳) ۶۴ ۴) ۱۲۸

Hint ابتدا به کمک نسبت مجموع‌های داده‌شده قدرنسبت (r) رو به دست بیار. حالا می‌تونی $\frac{a_{۱۰}}{a_۵}$ رو به دست بیاری.

پاسخ خیلی تشریحی **گام اول (به دست آوردن قدرنسبت (r)):**

با توجه به درس‌باکس سؤال قبل داریم:

$$S_n = \frac{a_۱(۱-r^n)}{۱-r}$$

از طرفی، با توجه به صورت سؤال $\frac{S_۶}{S_۳} = ۹$ است؛ پس داریم:

$$\frac{S_۶}{S_۳} = \frac{\frac{a_۱(۱-r^۶)}{۱-r}}{\frac{a_۱(۱-r^۳)}{۱-r}} = \frac{۱-r^۶}{۱-r^۳} = ۹ \xrightarrow{\text{تجزیهٔ صورت به کمک اتحاد مزدوج}} \frac{(۱-r^۳)(۱+r^۳)}{۱-r^۳} = ۹$$

$$\Rightarrow ۱+r^۳ = ۹ \Rightarrow r^۳ = ۹-۱ = ۸ \Rightarrow r = ۲$$

گام دوم (محاسبهٔ مقدار $\frac{a_{۱۰}}{a_۵}$):

با توجه به درس‌باکس سؤال قبل، جملهٔ عمومی یک دنبالهٔ هندسی برابر است با:

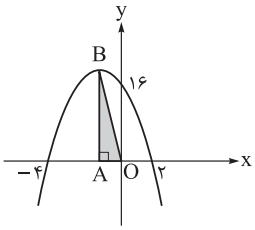
$$a_n = a_۱ \times r^{n-۱}$$

خواستهٔ سؤال مقدار $\frac{a_{۱۰}}{a_۵}$ است؛ پس داریم:

$$\frac{a_{۱۰}}{a_۵} = \frac{a_۱ \times r^{۱۰-۱}}{a_۱ \times r^{۵-۱}} = \frac{a_۱ \times r^۹}{a_۱ \times r^۴} = r^۵ \xrightarrow{r=۲} \frac{a_{۱۰}}{a_۵} = ۲^۵ = ۳۲$$

سنجش کلاد
www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshClouds

۵ با توجه به نمودار سهمی رسم‌شده، مساحت مثلث **OAB** کدام است؟



۱) ۱۲
۲) ۱۴
۳) ۹
۴) ۱۸

درس Box

- میانگین طول نقاط برخورد سهمی با نمودار، طول رأس سهمی (x_S) را به ما می‌دهد. البته x رأس سهمی با داشتن معادلهٔ سهمی از رابطهٔ $\frac{-b}{۲a}$ نیز قابل محاسبه است.
- با جای‌گذاری x رأس سهمی در معادلهٔ سهمی، y رأس سهمی (y_S) به دست می‌آید که البته از رابطهٔ $\frac{-\Delta}{۴a}$ نیز قابل محاسبه است.
- در سهمی به معادلهٔ $ax^۲+bx+c=۰$، c محل برخورد نمودار با محور yها است.

پاسخ خیلی تشریحی

برای به دست آوردن مساحت مثلث OAB، نیاز به به دست آوردن اندازهٔ قاعدهٔ مثلث (OA) و ارتفاع مثلث (AB) داریم.

گام اول (به دست آوردن x رأس سهمی): طبق نمودار، x_A با x رأس سهمی یعنی x_B برابر است که به راحتی با محاسبهٔ میانگین نقاط برخورد نمودار با محور افقی قابل محاسبه است:

$$x_A=\frac{۲+(-۴)}{۲}=\frac{-۲}{۲}=-۱ \Rightarrow |OA|=۱$$

گام دوم (به دست آوردن معادلهٔ سهمی): برای محاسبهٔ AB، نیاز داریم، معادلهٔ سهمی را به دست آورده و $x=-۱$ را در آن قرار دهیم:

$$f(x)=ax^۲+bx+\underbrace{۱۶}_{\text{محل برخورد نمودار با محور عمودی}}$$

نقاط $(۲,۰)$ و $(-۴,۰)$ که روی سهمی قرار دارند را در آن جای‌گذاری کرده و با حل دستگاه دو معادله دو مجهول، a و b را به دست می‌آوریم:

$$(۲,۰) \Rightarrow a(۲)^۲+b(۲)+۱۶=۰ \Rightarrow ۴a+۲b=-۱۶ \xrightarrow{\text{ساده به ۲}} ۲a+b=-۸$$
$$(-۴,۰) \Rightarrow a(-۴)^۲+b(-۴)+۱۶=۰ \Rightarrow ۱۶a-۴b=-۱۶ \xrightarrow{\text{ساده به ۴}} ۴a-b=-۴$$

$$\oplus \quad ۶a=-۱۲ \Rightarrow a=-۲$$

$a=-۲$ را در یکی از معادلات جای‌گذاری می‌کنیم: $۲a+b=-۸ \Rightarrow ۲(-۲)+b=-۸ \Rightarrow b=-۸+۴=-۴$

پس معادلهٔ سهمی به فرم $f(x)=-۲x^۲-۴x^۲+۱۶$ درآمد.

گام سوم (به دست آوردن ارتفاع مثلث): طول AB یا همان $f(-۱)$ برابر است با:

$$f(-۱)=-۲(-۱)^۲-۴(-۱)+۱۶=-۲+۴+۱۶=۱۸$$

گام چهارم (به دست آوردن مساحت مثلث): مساحت مثلث OAB برابر است با:

$$S=\frac{۱۸\times ۱}{۲}=\frac{۱۸}{۲}=۹$$

سنجش کلاد
www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshClouds

۶ در سهمی $f(x)=ax^۲+bx+c$ با ضرایب صحیح، مجموع صفرها برابر ۳ و حاصل‌ضرب آن‌ها برابر -۸ است. کم‌ترین مقدار ممکن برای $f^۲(-۱)$ کدام است؟

۱) صفر ۲) ۱۶ ۳) ۴ ۴) ۱

Hint با توجه به مجموع و حاصل‌ضرب جواب‌ها، روابط بین ضرایب معادلهٔ درجه‌دوم رو به دست بیار.

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول (رابطهٔ بین جمع ریشه‌ها و ضرایب): یک تابع درجه‌دوم به صورت $f(x)=ax^۲+bx+c$ با ضرایب صحیح را در نظر بگیرید.

می‌دانیم جمع ریشه‌ها برابر با $S=-\frac{b}{a}$ است که طبق صورت سؤال برابر ۳ است؛ پس:

$$S=-\frac{b}{a}=۳ \quad (I)$$

گام دوم (رابطهٔ بین ضرب ریشه‌ها و ضرایب): ضرب ریشه‌ها به صورت $P=\frac{c}{a}$ است که با توجه به سؤال برابر -۸ است؛ پس:

$$P=\frac{c}{a}=-۸ \quad (III)$$

گام سوم (رابطهٔ بین ضرایب a، b و c): حال طرفین تساوی‌های (I) و (II) را با هم جمع می‌کنیم و داریم:

$$\begin{cases} S=-\frac{b}{a}=۳ \\ P=\frac{c}{a}=-۸ \end{cases} \xrightarrow{+} -\frac{b}{a}+\frac{c}{a}=۳+(-۸)=-۵ \Rightarrow \frac{-b+c}{a}=-۵$$

$$-b+c=-۵a \quad (*)$$

گام چهارم (محاسبهٔ مقدار $f^۲(-۱)$): با جای‌گذاری $x=-۱$ در $f(x)=ax^۲+bx+c$ داریم:

$$f(-۱)=a(-۱)^۲+b(-۱)+c=a-b+c$$

که با توجه به $(*)$، $-b+c=-۵a$ است؛ پس داریم:

$$f(-۱)=a-b+c=a+(-۵a)=-۴a$$

ما به دنبال کم‌ترین مقدار $f^۲(-۱)$ هستیم؛ پس:

$$f^۲(-۱)=(-۴a)^۲=۱۶a^۲$$

از آن‌جا که ضرایب معادله، صحیح هستند و ضریب $x^۲$، (a) باید مخالف صفر باشد، پس $a^۲\geq ۱$ است؛ بنابراین:

$$f^۲(-۱)=۱۶a^۲ \xrightarrow{a^۲\geq ۱} f^۲(-۱)\geq ۱۶$$

پس کم‌ترین مقدار ممکن برای $f^۲(-۱)$ برابر ۱۶ است.

سنجش کلاد
www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshClouds

۷ حاصل $A=|۳-\sqrt{۳}-\sqrt{۲}|-\sqrt{۵+۲\sqrt{۶}}$ کدام است؟

۱) $۳-۲\sqrt{۳}-۲\sqrt{۲}$ ۲) $۲\sqrt{۳}+۲\sqrt{۲}-۳$ ۳) ۳ ۴) -۳

Hint تکلیف رادیکال رو به کمک قوانین رادیکال مرکب مشخص کن. علامت عبارت داخل قدرمطلق را هم مشخص کن، ببین چی از داخل قدرمطلق خارج می‌شه، کار تمومه.

درس Box فاصلهٔ x از مبدأ روی محور xها را $|x|$ می‌نامیم و می‌گوییم:

$$|x|=\begin{cases}x & x\geq ۰\\ -x & x<۰\end{cases}$$

هرگاه بخواهیم قدرمطلق را برداریم، ابتدا علامت عبارت درون قدرمطلق را مشخص می‌کنیم، چنان‌چه مثبت باشد، قدرمطلق آن برابر است با خود عبارت و چنان‌چه منفی باشد، قدرمطلق آن برابر است با قرینهٔ عبارت.

رادیکال مرکب:

در $\sqrt{A\pm\sqrt{B}}$ می‌توان به کمک اتحاد مربع دوجمله‌ای عبارت زیر رادیکال را بازنویسی کرد و آن را از زیر رادیکال خارج کرد.

$$\sqrt{A\pm\sqrt{B}}=\sqrt{\frac{A+C}{۲}}\pm\sqrt{\frac{A-C}{۲}}$$

$$C^۲=A^۲-B^۲$$

پاسخ خیلی تشریحی ✔

گام اول (به دست آوردن حاصل $\sqrt{۵+۲\sqrt{۶}}$):

با توجه به آن‌چه که در درس‌باکس گفته شد:

$$\sqrt{\underbrace{۵}_{A}+\underbrace{۲\sqrt{۶}}_{B}}\xrightarrow[C^۲=۲۵-۲۴=۱]{C^۲=A^۲-B^۲}=\sqrt{\frac{۵+۱}{۲}}+\sqrt{\frac{۵-۱}{۲}}=\sqrt{۳}+\sqrt{۲}$$

گام دوم (به دست آوردن حاصل $|۳-\sqrt{۳}-\sqrt{۲}|$):

عبارت $۳-\sqrt{۳}-\sqrt{۲}$ منفی است؛ بنابراین از درون قدرمطلق قرینهٔ آن بیرون می‌آید.

$$|۳-\sqrt{۳}-\sqrt{۲}|=-(۳-\sqrt{۳}-\sqrt{۲})=\sqrt{۳}+\sqrt{۲}-۳$$

گام سوم (به دست آوردن حاصل عبارت A):

$$|۳-\sqrt{۳}-\sqrt{۲}|-\sqrt{۵+۲\sqrt{۶}}=\sqrt{۳}+\sqrt{۲}-۳-\sqrt{۳}-\sqrt{۲}=-۳$$

سنجش کلاد
www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshClouds

۸ فرض کنید a_n دنباله‌ای حسابی از اعداد طبیعی باشد، به طوری که $a_1 + a_2 + ... + a_7 < 60$ باشد. چند مقدار مختلف برای a_5 وجود دارد؟

۱) ۱۸ ۲) ۱۵ ۳) ۱۲ ۴) ۱۰

Hint

جمع ۷ جملهٔ اول دنبالهٔ حسابی داده‌شده رو برحسب a_1 و d به دست بیار و با توجه به مقادیر مختلف d، مقادیر قابل قبول برای a_1 و در نتیجه a_5 رو به دست بیار.

درس Box

دنبالهٔ حسابی: به دنباله‌ای که در آن هر جمله با عددی ثابت (قدرنسبت) جمع شده و جملهٔ بعدی به دست می‌آید، دنبالهٔ حسابی می‌گویند. در واقع، در این دنباله اختلاف هر دو جملهٔ متوالی برابر است با قدرنسبت آن. (قدرنسبت را معمولاً با d نمایش می‌دهند.)

$$a_n - a_{n-1} = d$$

مانند:

$$d = 4 \Rightarrow 1 \underset{+4}{,} 5 \underset{+4}{,} 9 \underset{+4}{,} 13 \underset{+4}{,} 17 \ , \ldots$$

جملهٔ عمومی دنبالهٔ حسابی: اگر جملهٔ اول یک دنبالهٔ حسابی a_1 و قدرنسبت آن d باشد، جملهٔ عمومی دنباله برابر است با:

$$a_n = a_1 + (n-1)d$$

که در آن:

a_n: جملهٔ nاُم

a_1: جملهٔ اول

d: قدرنسبت

n: شمارهٔ جمله

مجموع n جملهٔ اول دنبالهٔ حسابی: مجموع n جملهٔ اول یک دنبالهٔ حسابی که آن را با S_n نمایش می‌دهیم، برابر است با:

۱) اگر جملهٔ اول و آخر و تعداد جملات را داشته باشیم از رابطهٔ مقابل استفاده می‌کنیم: $S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)$

۲) اگر جملهٔ اول، قدرنسبت و تعداد جملات را داشته باشیم از رابطهٔ مقابل استفاده می‌کنیم: $S_n = \frac{n}{2}(2a_1 + (n-1)d)$

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول (محاسبهٔ $a_1 + a_2 + ... + a_7$):

با توجه به رابطهٔ جمع جملات دنبالهٔ حسابی داریم:

$$S_7 = \frac{7}{2}(a_1 + a_7) = 7\left(\frac{a_1 + a_7}{2}\right) = 7\left(\frac{a_1 + a_1 + 6d}{2}\right) = 7\left(\frac{2a_1 + 6d}{2}\right) = 7(a_1 + 3d)$$

گام دوم (حل نامعادله و به دست آوردن خواستهٔ سؤال):

$$a_1 + a_2 + ... + a_7 < 60 \Rightarrow 7(a_1 + 3d) < 60$$

$$a_1 + 3d < \frac{60}{7} \simeq 8/57 \Rightarrow a_1 + 3d \leq 8$$

حالا با توجه به مقادیر مختلف d، مقادیر قابل قبول a_1 و در نتیجه a_5 را به دست می‌آوریم:

$$a_1 + 3d \leq 8 \Rightarrow \begin{cases} d = 0 \Rightarrow a_1 \in \{1,2,3,4,5,6,7,8\} \Rightarrow a_5 = a_1 \in \{1,2,...,8\} \\ d = 1 \Rightarrow a_1 + 3 \leq 8 \Rightarrow a_1 \leq 5 \Rightarrow a_1 \in \{1,2,3,4,5\} \xrightarrow{a_5 = a_1 + 4d} a_5 \in \{5,6,7,8,9\} \\ d = 2 \Rightarrow a_1 + 6 \leq 8 \Rightarrow a_1 \leq 2 \Rightarrow a_1 = 1,2 \xrightarrow{a_5 = a_1 + 4d} a_5 \in \{9,10\} \end{cases}$$

بنابراین مقادیر مختلف a_5 برابر است با:

$$a_5 \in \{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$$

در نتیجه، ۱۰ مقدار مختلف برای a_5 وجود دارد.

سنجش کلاد
www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshClouds

۹ در دنبالهٔ $a_n = ۲^{n-۱} + ۲^{۱۲-n}$، مجموع ۱۰ جملهٔ اول برابر $S_{۱۰}$ است. باقی‌ماندهٔ تقسیم $S_{۱۰}$ بر ۱۰ کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۷ ۳) ۵ ۴) ۹

Hint دنبالهٔ داده‌شده در صورت سؤال جمع دو دنبالهٔ هندسیه. مجموع ۱۰ جملهٔ اول هر کدام از اون دنباله‌ها رو به دست بیار ... .

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول (مشخص‌کردن دو دنبالهٔ هندسی):

دنبالهٔ a_n را به صورت جمع دو دنبالهٔ هندسی در نظر می‌گیریم:

$$a_n = \underbrace{۲^{n-۱}}_{b_n} + \underbrace{۲^{۱۲-n}}_{c_n}$$

حالا جملهٔ اول و قدرنسبت هر کدام از دنباله‌های هندسی b_n و c_n را به دست می‌آوریم:

$$b_n = ۲^{n-۱} \Rightarrow \begin{cases} \text{جملهٔ اول} \Rightarrow n = ۱ : b_۱ = ۲^{۱-۱} = ۲^{۰} = ۱ \\ \text{قدرنسبت} \Rightarrow r = \dfrac{b_۲}{b_۱} = \dfrac{۲^{۲-۱}}{۲^{۱-۱}} = \dfrac{۲}{۱} = ۲ \end{cases}$$

$$c_n = ۲^{۱۲-n} \Rightarrow \begin{cases} \text{جملهٔ اول} \Rightarrow n = ۱ : c_۱ = ۲^{۱۲-۱} = ۲^{۱۱} \\ \text{قدرنسبت} \Rightarrow r = \dfrac{c_۲}{c_۱} = \dfrac{۲^{۱۲-۲}}{۲^{۱۲-۱}} = \dfrac{۲^{۱۰}}{۲^{۱۱}} = \dfrac{۱}{۲} \end{cases}$$

گام دوم (به دست آوردن مجموع ۱۰ جملهٔ اول دنباله‌های b_n و c_n):

می‌دانیم با توجه به درس‌باکس سؤال ۳، مجموع n جملهٔ اول دنبالهٔ هندسی از رابطهٔ زیر به دست می‌آید:

$$S_n = \frac{a_۱(۱-r^n)}{۱-r}$$

پس برای دنباله‌های b_n و c_n داریم:

$$b_n \text{ دنبالهٔ } : S'_{۱۰} = \frac{۱(۱-۲^{۱۰})}{۱-۲} = \frac{۱-۲^{۱۰}}{-۱} = ۲^{۱۰} - ۱$$

$$c_n \text{ دنبالهٔ } : S''_{۱۰} = \frac{۲^{۱۱}(۱-(\frac{۱}{۲})^{۱۰})}{۱-\frac{۱}{۲}} = \frac{۲^{۱۱}-۲}{\frac{۱}{۲}} = ۲^{۱۲} - ۲^{۲} = ۲^{۱۲} - ۴$$

گام سوم (به دست آوردن مجموع جملات دنبالهٔ هندسی a_n):

از آن‌جا که مجموع جملات دنباله‌های هندسی a_n (S)، برابر مجموع جملات دنبالهٔ هندسی b_n (S') و مجموع جملات دنبالهٔ هندسی c_n (S'') است، داریم:

$$S_{۱۰} = S'_{۱۰} + S''_{۱۰} = (۲^{۱۰} - ۱) + (۲^{۱۲} - ۴) = ۲^{۱۰} + ۲^{۱۲} - ۵ = ۱۰۲۴ + ۴۰۹۶ - ۵ = ۵۱۱۵$$

گام چهارم (به دست آوردن باقی‌مانده):

با توجه به یکان این عدد، باقی‌ماندهٔ تقسیم آن بر ۱۰ برابر ۵ است.

سنجش کلاد
www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshClouds

۱۰ در معادلهٔ $x^۳+۲x^۲-۴x-۵=۰$ مجموع مربعات ریشه‌های حقیقی معادله کدام است؟

۱) ۱۱ ۲) ۱۰ ۳) ۱۲ ۴) ۱۳

Hint با حدس متوجه می‌شی $x=-۱$ یکی از ریشه‌هاست، عبارت درجه‌سه رو بر عامل $x+۱$ تقسیم کن تا بقیهٔ ریشه‌ها هم به دست بیان.

درس Box

اگر بخواهیم معادلهٔ درجه‌سومی را که عامل $x-a$ دارد حل کنیم، به صورت زیر عمل می‌کنیم.

۱) یک ریشه را با اعداد ۱، ۱-، ۲ یا ۲- حدس می‌زنیم تا ببینیم کدام‌یک در معادله صدق می‌کند. (آن را ریشهٔ a می‌نامیم.)

عبارت درجه۳	$x-a$
⋮	عبارت درجه۲
۰	

۲) عبارت درجه۳ را بر $x-a$ تقسیم می‌کنیم تا عامل‌های دیگر به دست آیند.

عبارت درجه۳ $=(x-a)$(عبارت درجه۲) $=۰$

۳) که یا باید $x-a$ صفر باشد یا عبارت درجه۲. از حل آن‌ها می‌توان جواب‌های معادله را به دست آورد.

در یک معادلهٔ درجه۲ به فرم $ax^۲+bx+c=۰$ و $(a\neq ۰)$ جمع ریشه‌ها و ضرب ریشه‌ها و تفاضل ریشه‌ها طبق جدول زیر به دست می‌آیند (α و β را ریشه‌های معادله در نظر می‌گیریم):

S: جمع ریشه‌ها	P: ضرب ریشه‌ها	D: تفاضل ریشه‌ها
$S=\alpha+\beta=-\frac{b}{a}$	$P=\alpha\beta=\frac{c}{a}$	$\lvert\alpha-\beta\rvert=\frac{\sqrt{\Delta}}{\lvert a\rvert}=\sqrt{S^۲-۴P}$

با توجه به S و P برای روابط بین ریشه‌ها داریم:

اثبات: $(\alpha+\beta)^۲=\alpha^۲+\beta^۲+۲\alpha\beta$ $\alpha^۲+\beta^۲=(\alpha+\beta)^۲-۲\alpha\beta=S^۲-۲P$	مجموع مربعات ریشه: $\alpha^۲+\beta^۲=S^۲-۲P$
اثبات: $(\alpha+\beta)^۳=\alpha^۳+\beta^۳+۳\alpha\beta(\alpha+\beta)$ $\alpha^۳+\beta^۳=(\alpha+\beta)^۳-۳\alpha\beta(\alpha+\beta)$ $\alpha^۳+\beta^۳=S^۳-۳PS$	مجموع مکعبات ریشه‌ها: $\alpha^۳+\beta^۳=S^۳-۳PS$
اثبات: $\frac{۱}{\alpha}+\frac{۱}{\beta}=\frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta}=\frac{S}{P}$	مجموع معکوس ریشه‌ها: $\frac{۱}{\alpha}+\frac{۱}{\beta}=\frac{S}{P}$

پاسخ خیلی تشریحی ✔

گام اول (به دست آوردن ریشه‌ها و عامل‌های عبارت درجه۳):

با حدس $x=-۱$ متوجه می‌شویم که در معادله صدق می‌کند: $(-۱)^۳+۲(-۱)^۲-۴(-۱)-۵=۰$

حالا عبارت درجه۳ را بر $(x-(-۱))=x+۱$ تقسیم می‌کنیم تا عامل‌های دیگر به دست آیند.

$x^۳+۲x^۲-۴x-۵$	$x+۱$
$-x^۳-x^۲$	$x^۲+x-۵$
$x^۲-۴x-۵$	
$-x^۲-x$	
$-۵x-۵$	
$۵x+۵$	
۰	

پس داریم: $x^۳+۲x^۲-۴x-۵=(x+۱)(x^۲+x-۵)=۰$

سنجش کلاد
www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshClouds

گام دوم (محاسبهٔ جمع مربعات ریشه‌ها):

با توجه به معادلهٔ $x^{۳}+۲x^{۲}-۴x-۵=(x+۱)(x^{۲}+x-۵)=۰$ یا باید $x+۱$ برابر صفر باشد یا $x^{۲}+x-۵$؛ پس:

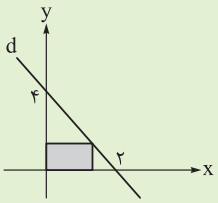
$$x+۱=۰ \Rightarrow x=-۱ \xrightarrow{\text{مربع ریشه}} (-۱)^{۲}=۱$$

$$x^{۲}+x-۵=۰ \xrightarrow[S=-۱,\ P=-۵]{\text{مجموع مربعات ریشه‌ها}} S^{۲}-۲P=(-۱)^{۲}-۲(-۵)=۱۱$$

بنابراین مجموع مربعات ریشه‌ها برابر $۱۲=۱۱+۱$ است.

سنجش کلاد
www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshClouds

۱۱ در شکل مقابل، یکی از رئوس مستطیل روی خط **d** در ناحیهٔ اول و دو ضلع آن روی محورهای مختصات واقع شده است. ماکزیمم مساحت مستطیل رنگی کدام است؟



۱) ۱ ۲) ۲

۳) ۳ ۴) ۴

Hint

ابتدا معادلهٔ خط رو به دست بیار. با توجه به این‌که یکی از رئوس مستطیل روی خط قرار داره، می‌تونی طول و عرض مستطیل رو هم برحسب x به دست بیاری و این‌جوری مساحت برحسب x به‌دست میاد. حالا ماکزیمم مقدار مساحت رو به دست بیار.

درس Box

- **خط:** فرم کلی ضابطه تابع خطی به صورت $y = mx + h$ می‌باشد که در آن m (ضریب x) نشان‌دهندهٔ شیب خط است. اگر $m > 0$ باشد، یک خط با شیب مثبت (صعودی) و اگر $m < 0$ یک خط با شیب منفی (نزولی) خواهیم داشت و h عرض از مبدأ خط می‌باشد که نشان‌دهندهٔ محل برخورد با محور yهاست.
- **نوشتن معادلهٔ خط:** برای نوشتن معادلهٔ خط نیاز به شیب و مختصات یک نقطه از آن خط داریم.
- **شیب خط:** شیب یک خط برابر است با تانژانت زاویه‌ای که خط با جهت مثبت محور xها می‌سازد.

از طرفی، اگر دو نقطه از یک خط (x_1, y_1) و (x_2, y_2) را داشته باشیم، شیب خط برابر است با:

$$\text{شیب} = m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

حالا با داشتن m (شیب) و یک نقطه از خط به عنوان مثال (x_1, y_1)، می‌توانیم معادلهٔ خط را به صورت زیر بنویسیم:

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

- **مسائل کاربردی بیشترین و کم‌ترین مقدار تابع درجه‌دوم:**

در سؤالاتی ما باید با توجه به اطلاعات سؤال ابتدا به یک تابع درجه‌دوم (سهمی) به صورت $f(x) = ax^2 + bx + c$ برسیم. سپس با استفاده از این نکته که رأس سهمی فقط مینیمم یا ماکزیمم یک سهمی است، می‌توانیم بیشترین یا کم‌ترین مقدار سهمی (تابع درجه‌دوم) را به دست آوریم.

برای به دست آوردن طول و عرض رأس سهمی به صورت زیر عمل می‌کنیم:

در یک معادلهٔ درجه‌دوم به ضابطهٔ $f = ax^2 + bx + c$ طول رأس سهمی از رابطهٔ $x_s = -\frac{b}{2a}$ به دست می‌آید و برای محاسبهٔ عرض رأس سهمی به دو شکل می‌توانیم عمل کنیم.

۱) از رابطهٔ زیر استفاده کنیم:

$$y_s = -\frac{\Delta}{4a}$$

۲) با جای‌گذاری طول رأس سهمی در ضابطهٔ سهمی می‌توانیم عرض سهمی را به دست آوریم. یعنی:

$$y_s = f(x_s) = f\left(-\frac{b}{2a}\right)$$

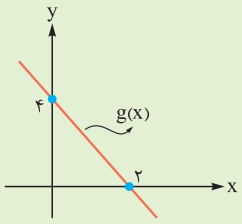
پاسخ خیلی تشریحی

گام اول (نوشتن معادلهٔ خط):

از آن‌جا که برای نوشتن معادلهٔ خط نیاز به شیب و یک نقطه از خط داریم. ابتدا شیب را به دست می‌آوریم. طبق شکل خط از نقاط $(2, 0)$ و $(0, 4)$ می‌گذرد؛ بنابراین داریم:

$$m = \frac{4 - 0}{0 - 2} = -2$$

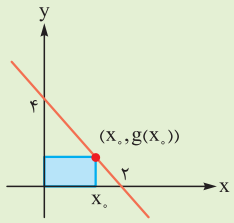
که با داشتن نقطهٔ $(0, 4)$ و شیب $(m = -2)$ می‌توانیم معادلهٔ خط را بنویسیم.



$$\left.\begin{matrix} m = -2 \\ (0, 4) \end{matrix}\right\} \Rightarrow y - 4 = -2(x - 0) \Rightarrow y = -2x + 4 \Rightarrow g(x) = -2x + 4$$

سنجش کلاد
www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshClouds

گام دوم (نوشتن مساحت مستطیل برحسب x):



با توجه به شکل مختصات نقاط دیگر قطر مستطیل $(۰,۰)$ و $(x_\circ,۰)$ است؛ بنابراین اندازهٔ طول مستطیل است.

$$\text{طول مستطیل} = |x_\circ - ۰| = x_\circ$$

و مختصات نقاط دوسر عرض مستطیل به صورت $(x_\circ,۰)$ و $(x_\circ, g(x_\circ))$ است؛ بنابراین با توجه به هم‌طول‌بودن این دو نقطه عرض مستطیل برابر است با:

$$\text{عرض مستطیل} = |g(x_\circ) - ۰| = g(x_\circ) \xrightarrow{g(x)=-۲x+۴} g(x_\circ) = -۲x_\circ + ۴$$

پس مساحت مستطیل برابر است با:

$$S_{\text{مستطیل}} = \text{طول} \times \text{عرض} = x_\circ(-۲x_\circ + ۴) = -۲x_\circ^۲ + ۴x_\circ$$

بنابراین مساحت مستطیل برحسب $x_\circ$ یک عبارت درجه‌دوم است.

گام سوم (به دست آوردن ماکزیمم مساحت مستطیل):

از آن‌جاکه مساحت مستطیل یک عبارت درجه‌دوم می‌باشد، پس برای به دست آوردن ماکزیمم مقدار مساحت مستطیل باید عرض رأس سهمی را به دست آورد؛ پس داریم:

$$S(x_\circ) = -۲x_\circ^۲ + ۴x_\circ \Rightarrow x_s = \frac{-b}{۲a} = \frac{-۴}{۲(-۲)} = ۱ \Rightarrow y_s = S(۱) = -۲(۱)^۲ + ۴(۱) = -۲ + ۴ = ۲$$

www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshClouds

۱۲ تعداد ریشه‌های متمایز معادلهٔ $x^۴ - ۳x^۲ + k^۳ - ۳k + ۱ = ۰$ عددی فرد است. مجموع مربعات ریشه‌های آن کدام است؟

۱) ۳ ۲) ۶ ۳) ۹ ۴) ۱۲

درس Box

حل معادله به کمک تغییر متغیر

معادلهٔ $(x^۲ - ۲x)^۲ - ۷(x^۲ - ۲x) - ۸ = ۰$ را در نظر بگیرید. در این معادله، عبارت $x^۲ - ۲x$ در معادله تکرار شده است. برای حل معادله این گام‌ها را انجام می‌دهیم:

گام اول: عبارتی که تکرار شده است را t می‌گیریم: $t = x^۲ - ۲x$

گام دوم: معادله را برحسب t می‌نویسیم و حل می‌کنیم:

$$t^۲ - ۷t - ۸ = ۰ \xrightarrow{a+c=b} \begin{cases} t_۱ = -۱ \\ t_۲ = \frac{-c}{a} = ۸ \end{cases}$$

گام سوم: حالا $x^۲ - ۲x$ را برابر با -۱ و ۸ قرار می‌دهیم:

$$\begin{cases} x^۲ - ۲x = -۱ \Rightarrow x^۲ - ۲x + ۱ = ۰ \Rightarrow (x-۱)^۲ = ۰ \Rightarrow x = ۱ \\ x^۲ - ۲x = ۸ \Rightarrow x^۲ - ۲x - ۸ = ۰ \Rightarrow (x-۴)(x+۲) = ۰ \Rightarrow x = ۴ \text{ و } -۲ \end{cases}$$

چند مورد دیگر از معادلاتی که با تغییر متغیر حل می‌شوند را ببینید:

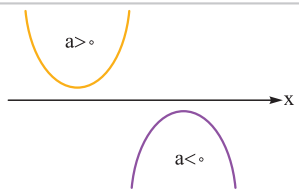
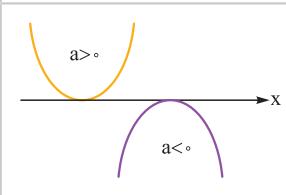
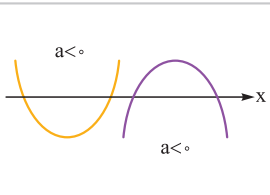
$$x^۶ - ۵x^۳ - ۶ = ۰ \xrightarrow{x^۳ = t} t^۲ - ۵t - ۶ = ۰ \Rightarrow \cdots$$

$$۴^x - ۲^{x+۱} - ۸ = ۰ \Rightarrow (۲^x)^۲ - ۲(۲^x) - ۸ = ۰ \xrightarrow{۲^x = t} t^۲ - ۲t - ۸ = ۰ \Rightarrow \cdots$$

$$\sin^۲ x + \cos x - \frac{۵}{۴} = ۰ \xrightarrow{\sin^۲ x = ۱ - \cos^۲ x} ۱ - \cos^۲ x + \cos x - \frac{۵}{۴} = ۰ \xrightarrow{\cos x = t} t^۲ - t + \frac{۱}{۴} = ۰ \Rightarrow \cdots$$

درس Box

در معادلهٔ درجه‌دو، با توجه به علامت Δ، تعداد ریشه‌ها را تعیین می‌کنیم:

$f(x) = ax^۲ + bx + c$	$\Delta < ۰$	$\Delta = ۰$	$\Delta > ۰$
	ریشهٔ حقیقی ندارد.	یک ریشهٔ مضاعف دارد.	دو ریشهٔ متمایز دارد.
			

پاسخ خیلی تشریحی ✔

گام اول: با استفاده از تغییر متغیر، $x^۲ = t$ در نظر می‌گیریم، داریم:

$$x^۴ - ۳x^۲ + k^۳ - ۳k + ۱ = ۰ \xrightarrow{x^۲ = t} t^۲ - ۳t + k^۳ - ۳k + ۱ = ۰$$

به یک معادلهٔ درجه‌دو می‌رسیم.

- اگر این معادلهٔ درجه‌دو، دو جواب مثبت (غیرصفر) داشته باشد، معادلهٔ اصلی دارای چهار جواب خواهد بود؛ پس این حالت مد نظر ما نیست.
- اگر این معادلهٔ درجه‌دو، دو جواب منفی داشته باشد، معادلهٔ اصلی جواب نخواهد داشت (عدد منفی $\neq x^۲$)؛ پس این حالت نیز مد نظر ما نیست.
- اگر این معادلهٔ درجه‌دو، یک جواب مثبت غیرصفر و یک جواب منفی داشته باشد، معادلهٔ اصلی دارای دو جواب خواهد بود (فقط به ازای ریشهٔ مثبت)؛ پس این حالت هم مد نظر ما نیست.
- کافی است این معادلهٔ درجه‌دو دارای یک ریشهٔ صفر و یک ریشهٔ مثبت باشد. در این صورت معادلهٔ اصلی دارای سه جواب خواهد شد که چون تعداد آن فرد است، مورد قبول ما است. ✓

گام دوم: پس در معادلهٔ درجه‌دو $t^۲ - ۳t + k^۳ - ۳k + ۱ = ۰$، اگر بخواهیم یکی از جواب‌ها صفر باشد، باید قسمت عدد ثابت، یعنی $k^۳ - ۳k + ۱$ برابر با صفر شود؛ پس:

$$t^۲ - ۳t + \underbrace{k^۳ - ۳k + ۱}_{\text{باید صفر باشد.}} = ۰ \Rightarrow t^۲ - ۳t = ۰ \Rightarrow t(t-۳) = ۰ \Rightarrow t = ۰, t = ۳$$

در تغییر متغیر $x^۲ = t$ در نظر گرفته بودیم؛ پس:

$$t = ۰ \Rightarrow x = ۰$$

$$t = ۳ \Rightarrow x^۲ = ۳ \Rightarrow x = \pm\sqrt{۳}$$

گام سوم: مجموع مربعات ریشه‌ها، برابر است با:

$$x_۱^۲ + x_۲^۲ + x_۳^۲ = ۰^۲ + (\sqrt{۳})^۲ + (-\sqrt{۳})^۲ = ۳ + ۳ = ۶$$

سنجش کلاد
www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshClouds

۱۳ اگر یکی از ریشه‌های معادلهٔ $\frac{x^۲-۴}{x^۲-۵x+۶}+k=\frac{۲x-۱}{۵-x}$ دو برابر معکوس ریشهٔ دیگر باشد، جمع مقدار k و ریشه‌ها کدام است؟

۱) ۵ ۲) ۵/۵

۳) ۶ ۴) ۶/۵

درس Box

برای حل معادلات گویا ابتدا مخرج را تجزیه می‌کنیم، مخرج‌مشترک را به دست می‌آوریم و دو طرف معادله را در آن ضرب می‌کنیم تا از حالت کسری خارج شوند. معادلهٔ جدید به‌دست‌آمده را حل می‌کنیم و جواب‌ها را چک می‌کنیم. چنان‌چه هیچ‌کدام از مخرج‌ها صفر نشوند، جواب‌ها مورد قبول هستند.

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول (تجزیهٔ مخرج و صورت کسرها):

می‌دانیم:

$$x^۲-۴=(x-۲)(x+۲)$$

$$x^۲-۵x+۶=(x-۲)(x-۳)$$

پس داریم:

$$\frac{x^۲-۴}{x^۲-۵x+۶}+k=\frac{۲x-۱}{۵-x}\Rightarrow\frac{(x-۲)(x+۲)}{(x-۲)(x-۳)}+k=\frac{۲x-۱}{۵-x}$$

$$\frac{x+۲}{x-۳}+k=\frac{۲x-۱}{۵-x}\Rightarrow\frac{x+۲}{x-۳}+\frac{۲x-۱}{x-۵}+k=۰$$

گام دوم (محاسبهٔ مخرج‌مشترک و ضرب آن در دو طرف معادله):

$$\text{مخرج‌مشترک}=(x-۳)(x-۵)=x^۲-۸x+۱۵$$

$$(x-۳)(x-۵)\left(\frac{x+۲}{x-۳}+\frac{۲x-۱}{x-۵}+k=۰\right)$$

$$(x-۵)(x+۲)+(۲x-۱)(x-۳)+k(x-۳)(x-۵)=۰$$

$$x^۲-۳x-۱۰+۲x^۲-۷x+۳+k(x^۲-۸x+۱۵)=۰$$

$$۳x^۲-۱۰x-۷+kx^۲-۸kx+۱۵k=۰$$

$$(۳+k)x^۲-(۸k+۱۰)x+۱۵k-۷=۰\quad(*)$$

گام سوم (محاسبهٔ k):

با توجه به صورت سؤال، یکی از ریشه‌ها دو برابر معکوس ریشهٔ دیگر است. به عبارتی، اگر یکی از ریشه‌ها α باشد، دیگری دو برابر معکوس آن یعنی $۲\times\frac{۱}{\alpha}=\frac{۲}{\alpha}$ است؛ پس ضرب ریشه‌ها برابر است با:

$$\text{ضرب ریشه‌ها}=\alpha\left(\frac{۲}{\alpha}\right)=۲$$

از طرفی، در یک معادلهٔ درجه۲ به فرم $ax^۲+bx+c=۰$ ضرب ریشه‌ها از رابطهٔ $P=\frac{c}{a}$ به دست می‌آید که در $(*)$ برابر است با:

$$P=\frac{۱۵k-۷}{۳+k}$$

پس باید تساوی زیر برقرار باشد:

$$P=\frac{۱۵k-۷}{k+۳}=۲$$

$$۲k+۶=۱۵k-۷\Rightarrow ۱۳k=۱۳\Rightarrow k=۱$$

گام چهارم (به دست آوردن خواستهٔ سؤال):

ما به دنبال جمع مقدار k و ریشه‌ها هستیم. جمع دو ریشه در معادلهٔ $ax^۲+bx+c=۰$ از رابطهٔ $S=-\frac{b}{a}$ به دست می‌آید که در معادلهٔ $(*)$ برابر است با:

$$S=-\frac{b}{a}=-\frac{-(۸k+۱۰)}{(۳+k)}=\frac{۸k+۱۰}{۳+k}\xrightarrow{k=۱}S=\frac{۸+۱۰}{۳+۱}=\frac{۱۸}{۴}=۴/۵$$

بنابراین جمع ریشه‌ها و مقدار k برابر است با:

$$S+k=۴/۵+۱=۵/۵$$

سنجش کلاد
www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshClouds

۱۴ جواب معادلهٔ $\sqrt{۸x+\sqrt{۴-x^۲}}=\sqrt{x-۲}+a$ در معادلهٔ $ax^۲+bx+c=۰$ نیز صدق می‌کند. اگر اختلاف جواب‌های معادلهٔ درجه‌دوم $۳/۵$ باشد، اختلاف مقادیر ممکن برای c کدام است؟

۱) ۳۲ ۲) ۴۰ ۳) ۴۶ ۴) ۵۶

Hint

به کمک دامنه معادلهٔ رادیکالی رو حل کن. بعد با توجه به اختلاف جواب‌ها، اختلاف مقادیر ممکن c رو هم به دست بیار.

درس Box

در بسیاری از معادلات رادیکالی می‌توانیم به کمک دامنه‌ها، معادلهٔ رادیکالی را به سرعت حل کنیم.

به عنوان مثال معادلهٔ $\sqrt{۱-x}+\sqrt{x-۲}=۴$ اصلاً جواب ندارد، چراکه باید $۱-x\geq ۰$ و در نتیجه $x\leq ۱$ و $x-۲\geq ۰$؛ در نتیجه $x\geq ۲$ باشد که برقراری این دو شرط هم‌زمان امکان ندارد.

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول (تعیین دامنه و تعیین جواب):

می‌دانیم عبارت زیر رادیکال با توجه به فرجهٔ زوج باید نامنفی باشد.

$$\left.\begin{array}{l} ۴-x^۲\geq ۰ \Rightarrow x^۲\leq ۴ \Rightarrow -۲\leq x\leq ۲ \\ x-۲\geq ۰ \Rightarrow x\geq ۲ \end{array}\right\} \xrightarrow{\cap} x=۲$$

بنابراین تنها جواب ممکن برای معادلهٔ رادیکالی داده‌شده $x=۲$ است.

گام دوم (به دست آوردن مقدار a):

$x=۲$ باید سبب برقراری تساوی $\sqrt{۸x+\sqrt{۴-x^۲}}=\sqrt{x-۲}+a$ شود؛ بنابراین:

$$\sqrt{۸(۲)+\sqrt{۴-۴}}=\sqrt{۲-۲}+a \Rightarrow a=\sqrt{۱۶}=۴$$

گام سوم (پیداکردن مقادیر ضریب c):

با مشخص‌شدن a متوجه می‌شویم معادلهٔ $ax^۲+bx+c=۰$ به صورت $۴x^۲+bx+c=۰$ است. از طرفی، $x=۲$ در این معادله صدق می‌کند و اختلاف جواب‌های این معادله $۳/۵$ است؛ پس ریشهٔ دیگر $-۱/۵$ یا $۵/۵$ است.

پس ضرب ریشه‌ها می‌تواند حالات زیر را داشته باشد:

$$۱)\ x_۱, x_۲ = -۱/۵ , ۲ \Rightarrow P=۲(-۱/۵)=-۳=\frac{c}{۴} \Rightarrow c=-۱۲$$

$$۲)\ x_۱, x_۲ = ۵/۵ , ۲ \Rightarrow P=۲(۵/۵)=۱۱=\frac{c}{۴} \Rightarrow c=۴۴$$

گام چهارم (اختلاف مقادیر c):

$$\text{اختلاف مقادیر } c = ۴۴-(-۱۲)=۵۶$$

سنجش کلاد
www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshClouds

۱۵ اگر $\cot ۱۰^\circ$ و $\cot ۲۰^\circ$ ریشه‌های معادلهٔ $x^۲ - ax + b = ۰$ باشد، در این صورت معادله‌ای که ریشه‌های آن، $\tan ۱۰^\circ$ و $\tan ۲۰^\circ$ هستند، کدام است؟

۱) $bx^۲ + ax + ۱ = ۰$

۲) $bx^۲ - ax + ۱ = ۰$

۳) $ax^۲ - bx + ۱ = ۰$

۴) $ax^۲ + bx + ۱ = ۰$

درس Box

۱) در معادلهٔ درجه‌دوم $ax^۲ + bx + c = ۰$ با شرط $\Delta > ۰$ داریم:

اختلاف ریشه‌ها	ضرب ریشه‌ها	جمع ریشه‌ها
$D = \frac{\sqrt{\Delta}}{\lvert a \rvert}$	$P = \frac{c}{a}$	$S = \frac{-b}{a}$

۲) معادلهٔ درجه‌دومی که مجموع ریشه‌هایش S و حاصل‌ضربشان P باشد، به صورت $x^۲ - Sx + P = ۰$ است.

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول (به دست آوردن مجموع و حاصل‌ضرب معادلهٔ اولیه): $\cot ۱۰^\circ$ و $\cot ۲۰^\circ$، ریشه‌های معادلهٔ $x^۲ - ax + b = ۰$ هستند. حاصل‌ضرب و مجموع ریشه‌ها را به دست می‌آوریم:

$$S = \cot ۱۰^\circ + \cot ۲۰^\circ = a \quad (I)$$

$$P = \cot ۱۰^\circ \times \cot ۲۰^\circ = b \quad (II)$$

گام دوم (به دست آوردن مجموع و حاصل‌ضرب ریشه‌های معادلهٔ جدید از روی معادلهٔ اولیه): حالا می‌خواهیم، معادله‌ای بنویسیم که ریشه‌هایش $\tan ۱۰^\circ$ و $\tan ۲۰^\circ$ باشد؛ مجدد حاصل‌ضرب و مجموع ریشه‌ها را به دست می‌آوریم:

$$S = \tan ۱۰^\circ + \tan ۲۰^\circ = \frac{۱}{\cot ۱۰^\circ} + \frac{۱}{\cot ۲۰^\circ} \overset{\text{مخرج‌مشترک}}{=\!=} \frac{\cot ۱۰^\circ + \cot ۲۰^\circ}{\cot ۱۰^\circ . \cot ۲۰^\circ} \overset{\text{طبق (I) و (II)}}{=\!=} \frac{a}{b}$$

$$P = \tan ۱۰^\circ . \tan ۲۰^\circ = \frac{۱}{\cot ۱۰^\circ} . \frac{۱}{\cot ۲۰^\circ} = \frac{۱}{\cot ۱۰^\circ . \cot ۲۰^\circ} \overset{\text{طبق (II)}}{=\!=} \frac{۱}{b}$$

گام سوم (نوشتن معادلهٔ جدید با ریشه‌های مد نظر): حالا معادلهٔ درجه‌دومی که مجموع و حاصل‌ضرب ریشه‌هایش را داشته باشیم، برابر است با:

$$x^۲ - Sx + P = ۰ \Rightarrow x^۲ - \frac{a}{b}x + \frac{۱}{b} = ۰ \xrightarrow{\times b} bx^۲ - ax + ۱ = ۰$$

نکته

برای نوشتن معادله‌ای درجه‌دومی که ریشه‌های آن معکوس ریشه‌های معادلهٔ اولیهٔ $ax^۲ + bx + c = ۰$ باشد، کافی است جای a و c را عوض کنیم:

$$cx^۲ + bx + a = ۰$$

تیزبازی

طبق نکتهٔ بالا، بدون هیچ محاسبهٔ خاصی، معادله‌ای که ریشه‌هایش معکوس معادلهٔ $x^۲ - ax + b = ۰$ باشد، به صورت $bx^۲ - ax + ۱ = ۰$ است.

سنجش کلاد
www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshClouds

۱۶ مجموع ریشه‌های معادلهٔ $x^۲ + \frac{۲۵x^۲}{(x-۵)^۲} = ۷۵$ کدام است؟

۱) -۱۵ ۲) -۵ ۳) ۱۰ ۴) ۲۰

پاسخ خیلی تشریحی ✔

گام اول (بازنویسی طرف چپ معادله برحسب معادلهٔ درجه۲):

$$x^۲ + \frac{۲۵x^۲}{(x-۵)^۲} = \underbrace{\frac{x^۲}{a^۲}} + \underbrace{(\frac{۵x}{x-۵})^۲}_{b^۲}$$

می‌دانیم $a^۲ + b^۲ = (a+b)^۲ - ۲ab$ است؛ پس داریم:

$$x^۲ + (\frac{۵x}{x-۵})^۲ = ۷۵ \Rightarrow (x + \frac{۵x}{x-۵})^۲ - ۲x(\frac{۵x}{x-۵}) = ۷۵ \Rightarrow (\frac{x^۲ - ۵x + ۵x}{x-۵})^۲ - ۱۰(\frac{x^۲}{x-۵}) = ۷۵$$

$$\Rightarrow (\frac{x^۲}{x-۵})^۲ - ۱۰(\frac{x^۲}{x-۵}) = ۷۵$$

گام دوم (استفاده از تغییر متغیر):

$\frac{x^۲}{x-۵}$ را برابر t می‌گیریم:

$$t^۲ - ۱۰t = ۷۵ \Rightarrow t^۲ - ۱۰t - ۷۵ = ۰$$

$$(t-۱۵)(t+۵) = ۰ \Rightarrow \begin{cases} t = -۵ \\ t = ۱۵ \end{cases}$$

گام سوم (به دست آوردن خواستهٔ سؤال):

از آن‌جا که $\frac{x^۲}{x-۵}$ را برابر t قرار داده بودیم؛ پس داریم:

$$t = -۵ \Rightarrow \frac{x^۲}{x-۵} = -۵ \Rightarrow x^۲ = -۵x + ۲۵ \Rightarrow x^۲ + ۵x - ۲۵ = ۰$$

که جمع ریشه‌های آن برابر $-\frac{b}{a} = -۵$ است.

$$t = ۱۵ \Rightarrow \frac{x^۲}{x-۵} = ۱۵ \Rightarrow x^۲ = ۱۵x - ۷۵ \Rightarrow x^۲ - ۱۵x + ۷۵ = ۰ \Rightarrow \Delta = (-۱۵)^۲ - ۴(۱)(۷۵) < ۰$$

این معادله اصلاً ریشه ندارد.

سنجش کلاد
www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshClouds

۱۷ اگر تفاضل ریشه‌های معادلهٔ $|x-b|+|x-2|=a$ برابر ۱۳ باشد، حداکثر مقدار تابع $y=\frac{2}{|x-a|+|x-3|}$ کدام است؟

۱) $\frac{1}{4}$ ۲) $\frac{1}{5}$ ۳) $\frac{1}{11}$ ۴) $\frac{1}{20}$

مشاوره در این‌گونه سؤالات از رسم نمودار غافل نشوید. خیلی به کارمان می‌آید.

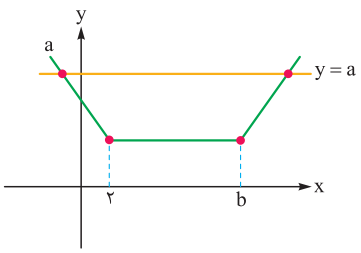
درس Box

توابع گلدانی

ضابطه	نمودار	تقارن	برد
$y=\|x-a\|+\|x-b\|$	$x=a$ و $x=b$	محور تقارن $=\frac{a+b}{2}$	$[\|b-a\|,+\infty)$

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: اگر نمودار $|x-b|+|x-2|=a$ را به صورت حدودی رسم کنیم، داریم:



همان‌طور که در نمودار مشخص است، خط $y=a$، نمودار گلدانی را در دو نقطه قطع می‌کند. طبق نمودار دو حالت داریم:
یا نقطهٔ تقاطع از ۲ و b بزرگ‌تر است و یا از آن‌ها کوچک‌تر است؛ پس:

اگر بزرگ‌تر باشد: $|x-2|+|x-b|=a \Rightarrow x-2+x-b=a \Rightarrow 2x-2-b=a \Rightarrow x_1=\frac{a+b+2}{2}$

اگر کوچک‌تر باشد: $|x-2|+|x-b|=a \Rightarrow -x+2-x+b=a \Rightarrow -2x+2+b=a \Rightarrow x_2=\frac{2+b-a}{2}$

گام دوم: تفاضل ریشه‌ها برابر ۱۳ است، پس $|x_1-x_2|=13$؛ پس داریم:

$$|x_1-x_2|=13 \Rightarrow \left|\frac{a+b+2}{2}-\frac{2+b-a}{2}\right|=13 \Rightarrow \left|\frac{2a}{2}\right|=13 \Rightarrow |a|=13 \begin{cases} a=13 \checkmark \\ a=-13 \times \text{(مجموع دو قدرمطلق نمی‌تواند منفی شود.)} \end{cases}$$

نکته اگر معادلهٔ $|x-\alpha|+|x-\beta|=c$ دو جواب داشته باشد، مجموع جواب‌ها برابر $\frac{\alpha+\beta}{2}$ و تفاضل آن‌ها برابر c است.

گام سوم: در مخرج کسر داده‌شده، یک تابع گلدانی داریم:

$$|x-a|+|x-3|=|x-13|+|x-3|$$

طبق درس‌باکس، بُرد برابر است با:

$$[|13-3|,+\infty)=[10,+\infty)$$

پس:

$$|x-3|+|x-3|\geq 10 \Rightarrow \frac{2}{|x-13|+|x-3|}\leq\frac{2}{10} \Rightarrow \frac{2}{|x-13|+|x-3|}\leq\frac{1}{5}$$

پس حداکثر مقدار y برابر $\frac{1}{5}$ است.

سنجش کلاد
www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshClouds

۱۸ خط $y=k$ نمودار تابع f با ضابطهٔ $f(x)=\frac{|x^2+x|}{x}$ را در دو نقطه قطع می‌کند، حدود k کدام است؟

۱) $0<k<1$

۲) $-1\leq k<0$

۳) $0<k\leq 1$

۴) $-1<k<0$

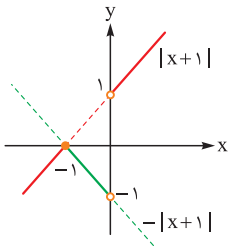
Hint $f(x)$ را در دو بازهٔ $x>0$ و $x<0$ به صورت دوضابطه‌ای بنویسید تا ساده‌تر شود.

پاسخ خیلی تشریحی

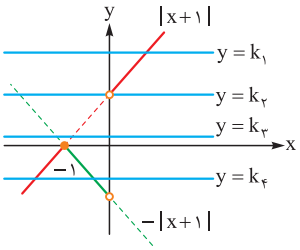
گام اول (بازنویسی ضابطهٔ $f(x)$):

$$f(x)=\frac{|x^2+x|}{x}=\frac{|x(x+1)|}{x}=\frac{|x|}{x}|x+1|=\begin{cases}\frac{x}{x}|x+1|=|x+1| & x>0\\ \frac{-x}{x}|x+1|=-|x+1| & x<0\end{cases}$$

گام دوم (رسم تابع f):



گام سوم (بررسی نقطهٔ برخورد $y=k$ و تابع f):



اگر خطوط $y=k$ را در حالت‌های مختلف رسم کنیم، می‌بینیم که تنها خط‌های شبیه $y=k_4$ هستند که نمودار تابع f را در دو نقطه قطع می‌کنند؛ بنابراین با توجه به شکل، محدودهٔ k باید بین -1 و صفر باشد، یعنی $-1<k<0$ (چون نقطهٔ $(0,-1)$ توخالی است؛ پس $y=-1$ مطلوب نیست.)

سنجش کلاد
www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshClouds

۱۹ اگر مساحت سطح محدود به نمودار تابع $f(x)=۳-|ax-۱|$ و محور xها برابر $۴/۵$ واحد مربع باشد، مقدار مثبت a کدام است؟

۱) ۱ ۲) $\frac{۱}{۲}$ ۳) ۲ ۴) $\frac{۳}{۲}$

Hint ابتدا نمودار تابع $f(x)$ را به صورت تقریبی (ریشه‌ها برحسب a) رسم کن و بعد با توجه به مساحت داده‌شده مقدار a رو به دست بیار.

پاسخ خیلی تشریحی ✔ **گام اول (رسم نمودار $f(x)$):**

ابتدا ریشه‌های تابع $f(x)$ را به دست می‌آوریم. (یعنی $f(x)=۰$ را حل می‌کنیم.)

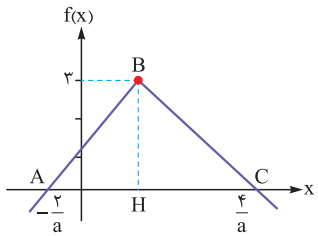
$$f(x)=۳-|ax-۱|=۰ \Rightarrow |ax-۱|=۳ \xrightarrow{|x|=\alpha \leftrightarrow x=\pm\alpha} ax-۱=\pm ۳$$

$$\begin{cases} ax-۱=۳ \Rightarrow ax=۴ \Rightarrow x=\frac{۴}{a} \\ ax-۱=-۳ \Rightarrow ax=-۲ \Rightarrow x=-\frac{۲}{a} \end{cases}$$

می‌دانیم حاصل قدرمطلق همواره نامنفی است، یعنی: $|ax-۱|\geq ۰$؛ پس:

$$|ax-۱|\geq ۰ \xrightarrow{\times(-۱)} -|ax-۱|\leq ۰ \xrightarrow{+۳} ۳-|ax-۱|\leq ۳$$

بنابراین ماکزیمم تابع f برابر ۳ است (در نقطه‌ای به طول H، عرض برابر ۳ است)، پس با توجه به موارد داده‌شده، نمودار تابع f به شکل مقابل است:



توجه: با توجه به متن سؤال، a را مثبت می‌گیریم.

گام دوم (نوشتن رابطهٔ مساحت):

می‌دانیم در یک مثلث مساحت برابر است با:

$$S=\frac{۱}{۲}\times \text{قاعده} \times \text{ارتفاع}$$

در شکل رسم‌شده در گام قبل دیدیم که سطح محدود به نمودار تابع $f(x)$ و محور xها یک مثلث است که قاعده و ارتفاع آن برابر است با:

$$\text{قاعده} = |AC| = \frac{۴}{a}-(-\frac{۲}{a})=\frac{۶}{a}$$

$$\text{ارتفاع} = |BH| = ۳$$

بنابراین مساحت برابر است با:

$$S=\frac{۱}{۲}(\frac{۶}{a})\times ۳=\frac{۹}{a}$$

گام سوم (به دست آوردن مقدار a):

با توجه به صورت سؤال مساحت برابر $۴/۵$ است؛ پس:

$$S=\frac{۹}{a}=۴/۵ \Rightarrow a=۲$$

سنجش کلاد
www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshClouds

۲۰ اگر $|x-y-۲|=|x-۳|+|۱-y|$، $|y+۲|+|۶-x|=y-x+۸$ و $x+y$ متعلق به بازهٔ $[\alpha,\beta]$ باشد، بیشترین مقدار $(\beta-\alpha)$ کدام است؟

۱) ۵ ۲) ۶ ۳) ۹ ۴) ۱۱

درس Box

چند قانون مهم قدرمطلق

۱) $|x+y|\le|x|+|y|$

۲) $|x-y|\ge|x|-|y|$

۳) $|a+b|=|a|+|b| \Rightarrow ab\ge ۰$ a و b هم‌علامت‌اند.

۴) $|a+b|<|a|+|b| \Rightarrow ab<۰$ a و b مختلف‌العلامت‌اند.

۵) $|a+b|=a+b \Rightarrow a\ge ۰, b\ge ۰$

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول (بررسی تساوی اول):

با توجه به درس‌باکس، اگر $|a+b|=|a|+|b|$ باشد، $a\ge ۰$ و $b\ge ۰$ است که در تساوی $|x-۳|+|۱-y|=x-y-۲$ داریم:

$$\underbrace{|x-۳|}_{a}+\underbrace{|۱-y|}_{b}=\underbrace{x-۳}_{a}+\underbrace{۱-y}_{b}=\underbrace{x-y-۲}_{a+b}$$

بنابراین می‌توانیم نتیجه بگیریم: $a=x-۳\ge ۰, b=۱-y\ge ۰$ است؛ پس:

$a=x-۳\ge ۰ \Rightarrow x\ge ۳$ (۱)

$b=۱-y\ge ۰ \Rightarrow y\le ۱$ (۲)

گام دوم (بررسی تساوی دوم):

در تساوی $|۶-x|+|y+۲|=y-x+۸$ نیز داریم:

$$\underbrace{|۶-x|}_{a'}+\underbrace{|y+۲|}_{b'}=\underbrace{۶-x}_{a'}+\underbrace{y+۲}_{b'}=\underbrace{y-x+۸}_{a'+b'}$$

بنابراین می‌توانیم نتیجه بگیریم $a'=۶-x\ge ۰$ و $b'=y+۲\ge ۰$ است؛ پس:

$a'=۶-x\ge ۰ \Rightarrow x\le ۶$ (۳)

$b'=y+۲\ge ۰ \Rightarrow y\ge -۲$ (۴)

گام سوم (به دست آوردن حدود x و y):

از (۱) و (۳) داریم:

(I) $\quad ۳\le x\le ۶$

از (۲) و (۴) داریم:

(II) $\quad -۲\le y\le ۱$

گام چهارم (به دست آوردن حدود $x+y$):

که از جمع طرفین (I) و (II) خواهیم داشت:

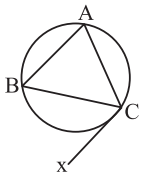
$$\left.\begin{array}{l}۳\le x\le ۶\\ -۲\le y\le ۱\end{array}\right\}\xrightarrow{+} ۳+(-۲)\le x+y\le ۶+۱ \longrightarrow ۱\le x+y\le ۷$$

بنابراین $x+y$ متعلق به بازهٔ $[۱,۷]$ می‌باشد؛ پس بیشترین مقدار $\beta-\alpha$ برابر $۷-۱=۶$ است.

سنجش کلاد
www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshClouds

هندسه یازدهم

۲۱ در شکل زیر $AB = AC$ ، $\overset{\frown}{AB} = ۱۲۶^\circ$ و نیم‌خط Cx در نقطهٔ C بر دایره مماس است. اندازهٔ زاویهٔ $B\hat{C}x$ چند درجه است؟

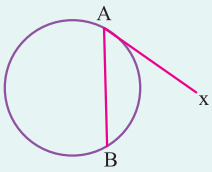


۱) ۴۲
۲) ۴۴
۳) ۵۲
۴) ۵۴

Hint دقت کنید که زاویهٔ $B\hat{C}x$ ، یک زاویهٔ ظلی است.

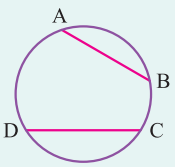
درس Box

۱) اندازهٔ هر زاویهٔ ظلی برابر نصف اندازهٔ کمان مقابل به آن زاویه است.



$$B\hat{A}x = \frac{\overset{\frown}{AB}}{۲}$$

۲) کمان‌های نظیر دو وتر مساوی در یک دایره برابر یکدیگرند و برعکس، وترهای نظیر دو کمان مساوی در یک دایره با یکدیگر برابرند.



$$AB = CD \Leftrightarrow \overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{CD}$$

پاسخ خیلی تشریحی ✔

گام اول: چون وترهای AB و AC برابر یکدیگرند، پس کمان‌های نظیر آن‌ها مساوی یکدیگرند، یعنی $\overset{\frown}{AC} = \overset{\frown}{AB} = ۱۲۶^\circ$ و در نتیجه داریم:

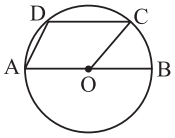
$$\overset{\frown}{AB} + \overset{\frown}{AC} + \overset{\frown}{BC} = ۳۶۰^\circ \Rightarrow \overset{\frown}{BC} = ۳۶۰^\circ - ۲\times ۱۲۶^\circ = ۱۰۸^\circ$$

گام دوم: زاویهٔ $B\hat{C}x$ زاویه‌ای ظلی و اندازهٔ آن نصف اندازهٔ کمان مقابل آن است، پس داریم:

$$B\hat{C}x = \frac{\overset{\frown}{BC}}{۲} = \frac{۱۰۸^\circ}{۲} = ۵۴^\circ$$

سنجش کلاد
www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshClouds

۲۲ در شکل زیر، وتر **CD** به طول ۶ موازی قطر **AB** است. اگر شعاع دایره برابر ۵ باشد، مساحت چهارضلعی **AOCD** کدام است؟

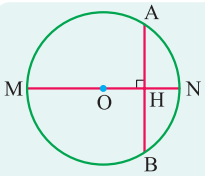


۱) ۱۶
۲) ۱۸
۳) ۲۲
۴) ۲۴

مشاوره قضیه‌های مربوط به وتر در دایره (فعالیت ۱ تا ۶ صفحهٔ ۱۳) از مهم‌ترین سؤالات کتاب درسی است و احتمال طرح یکی از آن‌ها در امتحان نهایی بسیار زیاد است.

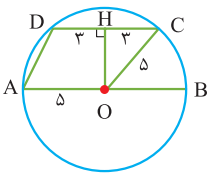
Hint از مرکز دایره عمودی بر وتر CD رسم کنید.

درس Box اگر قطری از یک دایره بر وتری از آن دایره عمود باشد، آن وتر و کمان نظیر آن وتر را نصف می‌کند.



$$MN \perp AB \Rightarrow \begin{cases} AH = BH \\ \overset{\frown}{AM} = \overset{\frown}{BM} \ , \ \overset{\frown}{AN} = \overset{\frown}{BN} \end{cases}$$

پاسخ خیلی تشریحی **گام اول:** از مرکز دایره، عمود OH را بر وتر CD رسم می‌کنیم.



می‌دانیم قطر عمود بر یک وتر، آن وتر را نصف می‌کند، پس $CH = DH = ۳$ است و در مثلث قائم‌الزاویهٔ OCH، طبق قضیهٔ فیثاغورس داریم:

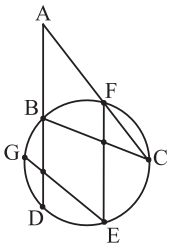
$$OH^۲ = OC^۲ - CH^۲ = ۵^۲ - ۳^۲ = ۱۶ \Rightarrow OH = ۴$$

گام دوم: طبق فرض $OA \parallel CD$، پس چهارضلعی AOCD ذوزنقه است و مساحت آن از رابطهٔ زیر به دست می‌آید.

$$S = \frac{OH(OA + CD)}{۲} = \frac{۴(۵ + ۶)}{۲} = ۲۲$$

سنجش کلاد
www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshClouds

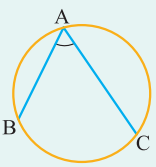
۲۳ در شکل زیر، **F** وسط کمان $\overset{\frown}{BC}$ و **G** وسط کمان $\overset{\frown}{BD}$ قرار دارد. اگر $\hat{A} = 3x$ ، $\hat{C} = x$ و $\hat{E} = x + 15^\circ$ باشد، مقدار **x** کدام است؟



۱) 18°
۲) 20°
۳) 25°
۴) 30°

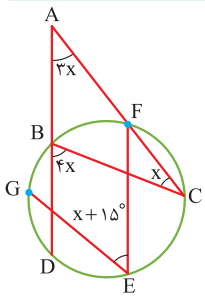
Hint زاویهٔ $D\hat{B}C$ زاویهٔ خارجی برای مثلث ABC است.

درس Box اندازهٔ هر زاویهٔ محاطی در یک دایره برابر نصف اندازهٔ کمان مقابل به آن زاویه است.



$$\hat{A} = \frac{\overset{\frown}{BC}}{2}$$

پاسخ خیلی تشریحی **گام اول:** زاویهٔ $D\hat{B}C$ برای مثلث ABC زاویهٔ خارجی است، پس داریم:



$$D\hat{B}C = \hat{A} + \hat{C} = 3x + x = 4x$$

از طرفی $D\hat{B}C$ زاویهٔ محاطی روبه‌رو به کمان $\overset{\frown}{CED}$ است. بنابراین داریم:

$$D\hat{B}C = \frac{\overset{\frown}{CED}}{2} = 4x \Rightarrow \overset{\frown}{CED} = 8x$$

گام دوم: F وسط کمان $\overset{\frown}{BC}$ و G وسط کمان $\overset{\frown}{BD}$ است، پس $\overset{\frown}{BF} = \overset{\frown}{FC}$ و $\overset{\frown}{DG} = \overset{\frown}{GB}$ و در نتیجه می‌توان نوشت:

$$\overset{\frown}{DG} + \overset{\frown}{GB} + \overset{\frown}{BF} + \overset{\frown}{FC} = 360^\circ - \overset{\frown}{CED} \Rightarrow 2\overset{\frown}{GB} + 2\overset{\frown}{BF} = 360^\circ - 8x$$

$$\Rightarrow \overset{\frown}{GB} + \overset{\frown}{BF} = 180^\circ - 4x \Rightarrow \overset{\frown}{GBF} = 180^\circ - 4x$$

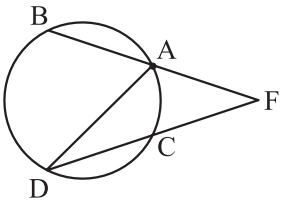
گام سوم: زاویهٔ E زاویهٔ محاطی روبه‌رو به کمان GBF است، بنابراین داریم:

$$\hat{E} = \frac{\overset{\frown}{GBF}}{2} \Rightarrow x + 15^\circ = \frac{180^\circ - 4x}{2} \Rightarrow 2x + 30^\circ = 180^\circ - 4x$$

$$\Rightarrow 6x = 150^\circ \Rightarrow x = 25^\circ$$

سنجش کلاد
www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshClouds

۲۴ اگر در شکل مقابل $\overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{BD} = \overset{\frown}{DC}$ و $\hat{F} = ۲\hat{D}$ باشد، اندازهٔ زاویهٔ **F** چند درجه است؟



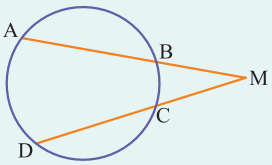
۱) ۳۰ ۲) ۳۶

۳) ۴۰ ۴) ۴۵

مشاوره این سؤال مشابه تمرین‌های صفحهٔ ۱۶ کتاب درسی هندسه ۲ طراحی شده و امکان طرح چنین سؤالاتی در امتحان نهایی بسیار زیاد است.

Hint به کمک رابطهٔ $\hat{F} = ۲\hat{D}$، رابطهٔ بین اندازهٔ کمان‌های موجود در دایره را به دست آورید.

درس Box اگر امتداد وترهای AB و DC در نقطه‌ای مانند M در بیرون دایره با یکدیگر برخورد کنند، اندازهٔ زاویهٔ M برابر نصف اختلاف اندازهٔ کمان‌های محصور بین دو وتر است، یعنی داریم:



$$\hat{M} = \frac{\overset{\frown}{AD} - \overset{\frown}{BC}}{۲}$$

پاسخ خیلی تشریحی **گام اول:** فرض کنید $\overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{BD} = \overset{\frown}{DC} = \alpha$ و $\overset{\frown}{AC} = \beta$ باشد. زاویهٔ D محاطی و زاویهٔ F، زاویهٔ بین امتداد دو وتر است، بنابراین داریم:

$$\hat{F} = ۲\hat{D} \Rightarrow \frac{\overset{\frown}{BD} - \overset{\frown}{AC}}{۲} = ۲ \times \frac{\overset{\frown}{AC}}{۲} \Rightarrow \frac{\alpha - \beta}{۲} = ۲ \times \frac{\beta}{۲}$$
$$\Rightarrow \alpha - \beta = ۲\beta \Rightarrow \alpha = ۳\beta$$

گام دوم: مجموع اندازه‌های کمان‌های یک دایره برابر ۳۶۰° است، پس داریم:

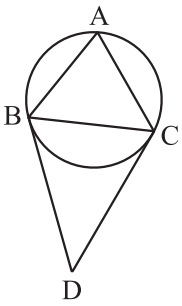
$$\overset{\frown}{AB} + \overset{\frown}{BD} + \overset{\frown}{DC} + \overset{\frown}{AC} = ۳۶۰^\circ \Rightarrow ۳\alpha + \beta = ۳۶۰^\circ \xrightarrow{\alpha = ۳\beta} ۱۰\beta = ۳۶۰^\circ$$
$$\Rightarrow \beta = ۳۶^\circ \Rightarrow \alpha = ۳ \times ۳۶^\circ = ۱۰۸^\circ$$

گام سوم: اندازهٔ زاویهٔ F برابر است با:

$$\hat{F} = \frac{\alpha - \beta}{۲} = \frac{۱۰۸^\circ - ۳۶^\circ}{۲} = ۳۶^\circ$$

سنجش کلاد
www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshClouds

۲۵ رأس‌های مثلث متساوی‌الساقین ABC $(AB = AC)$ و $\hat{A} < 90^\circ$ مطابق شکل بر روی یک دایره واقع شده‌اند و مماس های رسم شده در نقاط B و C بر این دایره در نقطهٔ D متقاطع‌اند. اگر $A\hat{B}C = 2\hat{D}$ باشد، آن‌گاه اندازهٔ زاویهٔ A چه کسری از 180° است؟



۱) $\frac{3}{7}$ ۲) $\frac{4}{9}$ ۳) $\frac{5}{11}$ ۴) $\frac{6}{13}$

Hint از مرکز دایره به نقاط B و C وصل کنید تا زاویهٔ مرکزی $B\hat{O}C$ ایجاد شود.

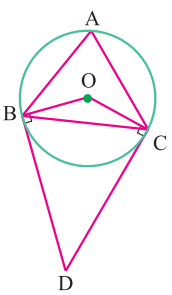
درس Box

۱) اندازهٔ هر زاویهٔ مرکزی برابر اندازهٔ کمان مقابل به آن زاویه و اندازهٔ هر زاویهٔ محاطی برابر نصف اندازهٔ کمان مقابل به آن زاویه است، پس اندازهٔ زاویهٔ مرکزی روبه‌رو به یک کمان دو برابر اندازهٔ هر زاویهٔ محاطی روبه‌رو به آن کمان است.

۲) یک خط و یک دایره بر هم مماس‌اند، اگر و تنها اگر این خط در نقطهٔ تماس با دایره بر شعاع گذرنده از آن نقطه عمود باشد.

پاسخ خیلی تشریحی ✔

گام اول: از مرکز دایره به نقاط B و C وصل می‌کنیم. چون DB و DC بر دایره مماس هستند، پس شعاع‌های OB و OC در این دو نقطه بر این مماس‌ها عمودند.



در چهارضلعی $OBDC$ داریم:

$$\hat{O} + O\hat{B}D + \hat{D} + O\hat{C}D = 360^\circ$$

$$\Rightarrow \hat{O} + \hat{D} = 360^\circ - 2\times 90^\circ = 180^\circ \quad (*)$$

از طرفی داریم:

$$\left.\begin{array}{l} (\text{زاویهٔ مرکزی})\hat{O} = \overset{\frown}{BC} \\ (\text{زاویهٔ محاطی})\hat{A} = \frac{\overset{\frown}{BC}}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow \hat{O} = 2\hat{A} \xrightarrow{(*)} 2\hat{A} + \hat{D} = 180^\circ$$

گام دوم: طبق فرض $A\hat{B}C = 2\hat{D}$ و مثلث ABC متساوی‌الساقین است، بنابراین:

$$\hat{A} + A\hat{B}C + A\hat{C}B = 180^\circ \xrightarrow{A\hat{B}C = A\hat{C}B = 2\hat{D}} \hat{A} + 4\hat{D} = 180^\circ$$

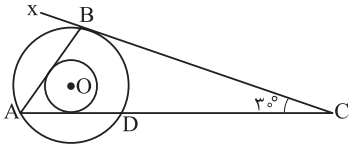
گام سوم: با حل دستگاه دو معادله دو مجهول زاویهٔ A را پیدا می‌کنیم.

$$\begin{cases} 2\hat{A} + \hat{D} = 180^\circ \\ \hat{A} + 4\hat{D} = 180^\circ \end{cases} \Rightarrow 4(2\hat{A} + \hat{D}) - (\hat{A} + 4D) = 4\times 180^\circ - 180^\circ \Rightarrow 7\hat{A} = 3\times 180^\circ$$

$$\Rightarrow \hat{A} = \frac{3}{7}\times 180^\circ$$

سنجش کلاد
www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshClouds

۲۶ در شکل زیر دو دایره هم‌مرکز هستند و **Cx** در نقطهٔ **B** بر دایرهٔ بزرگ‌تر مماس است. اگر **AB** و **AC** بر دایرهٔ کوچک‌تر مماس باشند، اندازهٔ زاویهٔ $A\hat{B}x$ چند درجه است؟

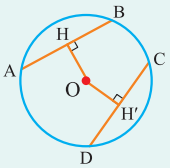


۱) ۵۰ ۲) ۶۰ ۳) ۷۰ ۴) ۸۰

Hint تمام مماس‌های رسم‌شده بر یک دایره از مرکز آن دایره به یک فاصله هستند.

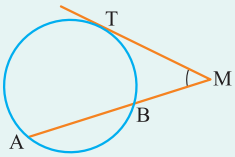
درس Box

۱) اگر دو وتر در یک دایره برابر یکدیگر باشند، فاصلهٔ یکسانی از مرکز دایره دارند و برعکس، هر دو وتر در یک دایره که از مرکز دایره به یک فاصله باشند، برابر یکدیگرند.



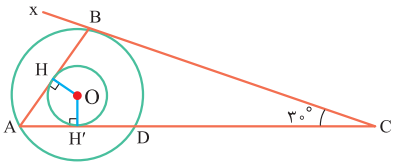
$$AB = CD \Leftrightarrow OH = OH'$$

۲) زاویهٔ بین یک وتر و یک مماس از رابطهٔ زیر به دست می‌آید:



$$\hat{M} = \frac{\overset{\frown}{AT} - \overset{\frown}{BT}}{۲}$$

پاسخ خیلی تشریحی ✔ **گام اول:** وترهای AB و AD از دایرهٔ بزرگ‌تر به دایرهٔ کوچک‌تر مماس‌اند، بنابراین فاصلهٔ مرکز دایرهٔ کوچک‌تر (نقطهٔ O) از این دو وتر برابر شعاع دایرهٔ کوچک‌تر بوده و چون AB و AD از مرکز دایرهٔ بزرگ‌تر به یک فاصله‌اند، پس برابر یکدیگرند و در نتیجه کمان‌های $\overset{\frown}{AB}$ و $\overset{\frown}{AD}$ برابرند.



گام دوم: با فرض $\overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{AD} = x$ و $\overset{\frown}{BD} = y$ داریم:

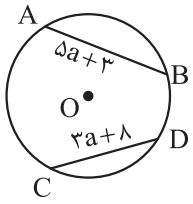
$$\left.\begin{array}{l} \overset{\frown}{AB} + \overset{\frown}{BD} + \overset{\frown}{AD} = ۳۶۰^\circ \Rightarrow ۲x + y = ۳۶۰^\circ \\ \hat{C} = \dfrac{\overset{\frown}{AB} - \overset{\frown}{BD}}{۲} \Rightarrow ۳۰^\circ = \dfrac{x-y}{۲} \Rightarrow x - y = ۶۰^\circ \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{cases} x = ۱۴۰^\circ \\ y = ۸۰^\circ \end{cases}$$

گام سوم: زاویهٔ $A\hat{B}x$، زاویهٔ ظلی روبه‌رو به کمان $\overset{\frown}{AB}$ است، پس داریم:

$$A\hat{B}x = \frac{\overset{\frown}{AB}}{۲} = \frac{۱۴۰^\circ}{۲} = ۷۰^\circ$$

سنجش کلاد
www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshClouds

۲۷ دایرهٔ $C(O,۱۲)$ مطابق شکل مفروض است. به ازای چند عدد طبیعی **a**، وتر **AB** نسبت به وتر **CD** به مرکز دایره نزدیک‌تر است؟

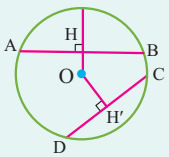


۱) ۱
۲) ۲
۳) ۳
۴) بی‌شمار

مشاوره این سؤال براساس تمرین ۸ صفحهٔ ۱۷ کتاب درسی هندسه ۲ طراحی شده است. اثبات این تمرین می‌تواند از سؤال‌های مورد توجه در امتحان نهایی باشد.

Hint به رابطهٔ بین طول وتر و فاصلهٔ آن از مرکز دایره توجه کنید.

درس Box از بین دو وتر، هر کدام که بزرگ‌تر باشد به مرکز دایره نزدیک‌تر است و برعکس، از بین دو وتر، هر کدام به مرکز دایره نزدیک‌تر باشد، از دیگری بزرگ‌تر است.



$AB > CD \Leftrightarrow OH < OH'$

پاسخ خیلی تشریحی **گام اول:** وتر AB نسبت به وتر CD، به مرکز دایره نزدیک‌تر است، پس وتر AB از وتر CD بزرگ‌تر است.

$$AB > CD \Rightarrow ۵a+۳ > ۳a+۸ \Rightarrow ۲a > ۵ \Rightarrow a > \frac{۵}{۲}$$

گام دوم: طول وتر مقداری مثبت است، پس داریم:

$$\left.\begin{array}{l} ۵a+۳ > ۰ \Rightarrow a > -\frac{۳}{۵} \\ ۳a+۸ > ۰ \Rightarrow a > -\frac{۸}{۳} \end{array}\right\} \Rightarrow a > -\frac{۳}{۵}$$

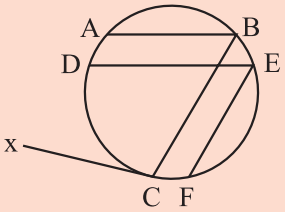
گام سوم: قطر دایره بزرگ‌ترین وتر دایره است، پس طول وتر AB (وتر بزرگ‌تر) باید از قطر دایره کم‌تر باشد:

$$۵a+۳ < ۲۴ \Rightarrow ۵a < ۲۱ \Rightarrow a < \frac{۲۱}{۵}$$

گام چهارم: اشتراک جواب‌های مراحل قبل به صورت $\frac{۵}{۲} < a < \frac{۲۱}{۵}$ است، پس تنها دو مقدار طبیعی ۳ و ۴ برای a قابل قبول است.

سنجش کلاد
www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshClouds

۲۸ در شکل زیر $AB \parallel DE$ ، $EF \parallel BC$ و Cx بر دایره مماس است. اگر اندازهٔ کمان $\overset{\frown}{EF}$ میانگین اندازه‌های دو کمان $\overset{\frown}{AB}$ و $\overset{\frown}{CD}$ $(\overset{\frown}{CD} > \overset{\frown}{AB})$ و $B\hat{C}x = 100^\circ$ باشد، اندازهٔ کمان $\overset{\frown}{EF}$ چند درجه است؟

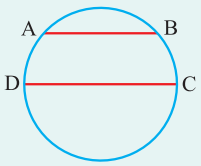


۱) ۶۰
۲) ۷۰
۳) ۷۵
۴) ۸۰

مشاوره این سؤال براساس ایدهٔ وترهای موازی در دایره و با الهام از سؤالی از کنکور ریاضی خارج از کشور ۱۴۰۱ طراحی شده است. مشابه چنین سؤالی بارها در کنکور تکرار شده است.

Hint دقت کنید که به محاسبهٔ اندازهٔ هر کدام از کمان‌های $\overset{\frown}{AB}$ و $\overset{\frown}{CD}$ نیاز نداریم و تنها مجموع اندازهٔ این دو کمان مهم است.

درس Box دو وتر که یکدیگر را درون دایره قطع نمی‌کنند با هم موازی‌اند، اگر و تنها اگر اندازهٔ کمان‌های محدود بین آن‌ها مساوی باشد.



$$AB \parallel CD \Leftrightarrow \overset{\frown}{AD} = \overset{\frown}{BC}$$

یعنی از موازی‌بودن وترهای AB و CD نتیجه می‌گیریم کمان‌های $\overset{\frown}{AD}$ و $\overset{\frown}{BC}$ برابر یکدیگرند و برعکس از مساوی‌بودن کمان‌های $\overset{\frown}{AD}$ و $\overset{\frown}{BC}$ و این حقیقت که AB و CD یکدیگر را درون دایره قطع نمی‌کنند، نتیجه می‌گیریم $AB \parallel CD$.

پاسخ خیلی تشریحی **گام اول:** فرض کنید $\overset{\frown}{EF} = x$ باشد. در این صورت داریم:

$$\overset{\frown}{EF} = \frac{\overset{\frown}{AB} + \overset{\frown}{CD}}{2} = x \Rightarrow \overset{\frown}{AB} + \overset{\frown}{CD} = 2x$$

هم‌چنین فرض کنید $\overset{\frown}{AD} = y$ باشد. چون $AB \parallel DE$، پس $\overset{\frown}{BE} = y$ و به دلیل مشابه $\overset{\frown}{CF} = y$ است.

گام دوم: مجموع کمان‌های دایره 360° است:

$$\underbrace{(\overset{\frown}{AB} + \overset{\frown}{CD})}_{2x} + \underbrace{\overset{\frown}{EF}}_{x} + \underbrace{(\overset{\frown}{AD} + \overset{\frown}{BE} + \overset{\frown}{CF})}_{3y} = 360^\circ \Rightarrow 3x + 3y = 360^\circ \Rightarrow x + y = 120^\circ$$

گام سوم: زاویهٔ $B\hat{C}x$، زاویهٔ ظلی روبه‌رو به کمان $\overset{\frown}{BAC}$ است، پس داریم:

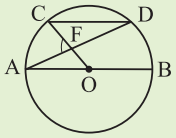
$$B\hat{C}x = \frac{\overset{\frown}{BAC}}{2} \Rightarrow 100^\circ = \frac{\overset{\frown}{AB} + \overset{\frown}{AD} + \overset{\frown}{CD}}{2} \Rightarrow 2x + y = 200^\circ$$

گام چهارم: با کم‌کردن روابط به‌دست‌آمده در گام‌های دوم و سوم داریم:

$$(2x + y) - (x + y) = 200^\circ - 120^\circ \Rightarrow x = 80^\circ \Rightarrow \overset{\frown}{EF} = 80^\circ$$

سنجش کلاد
www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshClouds

۲۹ در شکل زیر $AB \parallel CD$، $AB = ۶$ و $CD = ۳\sqrt{۲}$ است. اندازهٔ زاویهٔ AFC کدام است؟

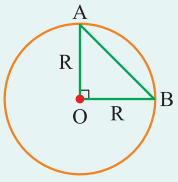


۱) $۶۷/۵^\circ$
۲) ۷۰°
۳) $۷۲/۵^\circ$
۴) ۷۵°

مشاوره این سؤال براساس تمرین ۴ صفحهٔ ۱۷ کتاب درسی طراحی شده است و به جای معلوم‌گرفتن اندازهٔ زاویهٔ AFC، این بار اندازهٔ کمان CD در صورت سؤال داده شده است.

Hint رابطهٔ بین اندازهٔ کمان برحسب درجه با طول وتر متناظر آن کمان برحسب شعاع دایره را به خاطر داشته باشید.

درس Box اندازهٔ کمان نظیر وتری از دایره که طول آن $\sqrt{۲}$ برابر شعاع دایره باشد، ۹۰° است، زیرا مطابق شکل داریم:



$$AB^۲ = OA^۲ + OB^۲ = ۲R^۲ \Rightarrow AB = \sqrt{۲}R$$
$$AB = \sqrt{۲}R \Leftrightarrow \overset{\frown}{AB} = ۹۰^\circ$$

پاسخ خیلی تشریحی **گام اول:** شعاع دایره برابر $R = ۳$ و طول وتر CD برابر $۳\sqrt{۲}$ است، پس طول وتر CD، $\sqrt{۲}$ برابر شعاع دایره بوده و در نتیجه $\overset{\frown}{CD} = ۹۰^\circ$ است. از طرفی $CD \parallel AB$، پس $\overset{\frown}{AC} = \overset{\frown}{BD}$ و در نتیجه داریم:

$$۲\overset{\frown}{AC} + ۹۰^\circ = ۱۸۰^\circ \Rightarrow \overset{\frown}{AC} = \overset{\frown}{BD} = ۴۵^\circ$$

گام دوم: زاویهٔ A، زاویهٔ محاطی روبه‌رو به کمان $\overset{\frown}{BD}$ و زاویهٔ AOC، زاویهٔ مرکزی روبه‌رو به کمان $\overset{\frown}{AC}$ است، پس داریم:

$$\hat{A} = \frac{\overset{\frown}{BD}}{۲} = \frac{۴۵^\circ}{۲} = ۲۲/۵^\circ$$

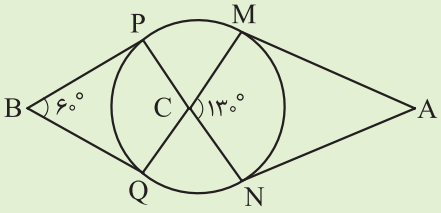
$$A\hat{O}C = \overset{\frown}{AC} = ۴۵^\circ$$

گام سوم: زاویهٔ $A\hat{F}C$، زاویهٔ خارجی مثلث OAF است، بنابراین:

$$A\hat{F}C = A\hat{O}C + \hat{A} = ۴۵^\circ + ۲۲/۵^\circ = ۶۷/۵^\circ$$

سنجش کلاد
www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshClouds

۳۰ در شکل زیر پاره‌خط‌های BP، AN، AM و BQ بر دایره مماس‌اند. اندازهٔ کمان $\overset{\frown}{MN}$ چند درجه است؟



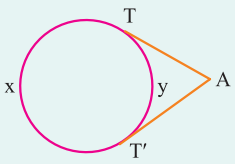
۱) ۱۱۰ ۲) ۱۲۰ ۳) ۱۳۰ ۴) ۱۴۰

مشاوره این سؤال براساس تمرین ۳ صفحهٔ ۱۷ کتاب درسی هندسه ۲ و با الهام از سؤالی از کنکور ریاضی خارج از کشور ۱۴۰۰ طراحی شده است.

Hint با توجه به اندازهٔ زاویهٔ B، اندازهٔ کمان $\overset{\frown}{PQ}$ را محاسبه کنید.

درس Box

۱) اگر از نقطهٔ A خارج یک دایره، دو مماس بر آن دایره رسم کنیم، آن‌گاه داریم:

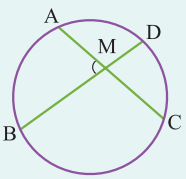


$$\hat{A} = \frac{x-y}{۲}$$

با در نظر گرفتن $x+y=۳۶۰^\circ$ و $x-y=۲\hat{A}$ داریم:

$$\begin{cases} x+y=۳۶۰^\circ \\ x-y=۲\hat{A} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=۱۸۰^\circ+\hat{A} \\ y=۱۸۰^\circ-\hat{A} \end{cases}$$

۲) زاویهٔ بین دو وتر متقاطع در دایره از رابطهٔ زیر به دست می‌آید:



$$A\hat{M}B = \frac{\overset{\frown}{AB}+\overset{\frown}{CD}}{۲}$$

پاسخ خیلی تشریحی **گام اول:** فرض کنید $\overset{\frown}{MN}=x$، $\overset{\frown}{PQ}=y$، $\overset{\frown}{MP}=z$ و $\overset{\frown}{QN}=t$ باشد. در این صورت طبق رابطهٔ زاویهٔ بین دو مماس داریم:

$$B = \frac{\overset{\frown}{PMQ}-\overset{\frown}{PQ}}{۲} \Rightarrow ۶۰^\circ = \frac{x+z+t-y}{۲} \Rightarrow (x-y)+(z+t)=۱۲۰^\circ$$

$$M\hat{C}N = ۱۳۰^\circ \Rightarrow M\hat{C}P = ۱۸۰^\circ - ۱۳۰^\circ = ۵۰^\circ$$

گام دوم:

طبق رابطهٔ زاویهٔ بین وترهای متقاطع در دایره داریم:

$$M\hat{C}P = \frac{\overset{\frown}{MP}+\overset{\frown}{QN}}{۲} \Rightarrow ۵۰^\circ = \frac{z+t}{۲} \Rightarrow z+t=۱۰۰^\circ \Rightarrow x-y=۲۰^\circ$$

$$M\hat{C}N = \frac{\overset{\frown}{MN}+\overset{\frown}{PQ}}{۲} \Rightarrow ۱۳۰^\circ = \frac{x+y}{۲} \Rightarrow x+y=۲۶۰^\circ$$

گام سوم:

$$\begin{cases} x+y=۲۶۰^\circ \\ x-y=۲۰^\circ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=۱۴۰^\circ \\ y=۱۲۰^\circ \end{cases} \Rightarrow \overset{\frown}{MN}=۱۴۰^\circ$$

تیزبازی **گام اول:** با توجه به مورد اول درس‌باکس داریم:

$$\overset{\frown}{PQ} = ۱۸۰^\circ - \hat{B} = ۱۸۰^\circ - ۶۰^\circ = ۱۲۰^\circ$$

گام دوم: وترهای MQ و PN در نقطهٔ C متقاطع‌اند، بنابراین:

$$M\hat{C}N = \frac{\overset{\frown}{PQ}+\overset{\frown}{MN}}{۲} \Rightarrow ۱۳۰^\circ = \frac{۱۲۰^\circ+\overset{\frown}{MN}}{۲} \Rightarrow \overset{\frown}{MN}=۱۴۰^\circ$$

سنجش کلاد
www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshClouds

آمارواحتمال

۳۱ کدام‌یک از هم‌ارزی‌های زیر نادرست است؟

۱) $p \Rightarrow q \equiv \sim p \vee q$

۲) $p \wedge (p \vee q) \equiv q$

۳) $\sim (p \vee q) \equiv \sim p \wedge \sim q$

۴) $p \Leftrightarrow q \equiv (p \wedge q) \vee (\sim p \wedge \sim q)$

درس Box

جبر گزاره‌ها

۱) نقیض یک گزاره: نقیض گزارهٔ p را با $\sim p$ نمایش می‌دهیم و آن را «چنین نیست که p» می‌خوانیم.

نکته اگر ارزش p درست باشد، ارزش $\sim p$ نادرست است و برعکس:

p	$\sim p$
د	ن
ن	د

ارزش نقیضِ نقیض یک گزاره، با ارزش خود گزاره یکسان است: $\sim (\sim p) \equiv p$

۲) ترکیب‌های فصلی و عطفی دو گزاره: اگر دو گزاره را با حرف ربط «یا» به هم مرتبط کنیم، ترکیب فصلی دو گزاره به وجود می‌آید که آن را می‌خوانیم «p یا q» و می‌نویسیم « $p \vee q$ ».

اگر دو گزاره را با حرف ربط «و» به هم مرتبط کنیم، ترکیب عطفی دو گزاره به وجود می‌آید که آن را می‌خوانیم «p و q» و می‌نویسیم « $p \wedge q$ ».

نکته ارزش $p \vee q$ زمانی درست است که ارزش دست کم یکی از دو گزارهٔ p یا q درست باشد و ارزش $p \wedge q$ زمانی درست است که ارزش هر دو گزارهٔ p و q درست باشد:

p	q	$p \wedge q$	$p \vee q$
د	د	د	د
د	ن	ن	د
ن	د	ن	د
ن	ن	ن	ن

۳) ترکیب شرطی دو گزاره: به گزارهٔ $p \Rightarrow q$ ترکیب شرطی دو گزاره می‌گوییم و آن را به صورت «اگر p آن‌گاه q» می‌خوانیم.

ارزش یک گزارهٔ شرطی تنها در حالتی نادرست است که p درست و q نادرست باشد:

p	q	$p \Rightarrow q$
د	د	د
د	ن	ن
ن	د	د
ن	ن	د

نکته در ترکیب شرطی $p \Rightarrow q$، به p «مقدم» یا «فرض» و به q «تالی» یا «حکم» می‌گوییم.

گزارهٔ شرطی $p \Rightarrow q$ را به این دو صورت نیز می‌خوانیم:
- q شرط لازم است برای p
- p شرط کافی است برای q

اگر $p \Rightarrow q$ یک گزارهٔ شرطی باشد:

به $q \Rightarrow p$ عکس گزارهٔ شرطی می‌گوییم؛

به $\sim q \Rightarrow \sim p$ عکس نقیض یک گزارهٔ شرطی می‌گوییم که با $p \Rightarrow q$ هم‌ارزش است، یعنی $p \Rightarrow q \equiv \sim q \Rightarrow \sim p$؛

و به $\sim (q \Rightarrow p)$ نقیض عکس یک گزارهٔ شرطی می‌گوییم.

انتفای مقدم: در گزارهٔ شرطی $p \Rightarrow q$، اگر p یا «مقدم» نادرست باشد، **گزاره به انتفای مقدم درست است**:

$p \equiv F \xrightarrow{\text{در این صورت}} p \Rightarrow q \equiv T$

درست‌بودن تالی: در گزارهٔ شرطی $p \Rightarrow q$، اگر q یا «تالی» درست باشد، $p \Rightarrow q$ همواره درست است:

$q \equiv T \xrightarrow{\text{در این صورت}} p \Rightarrow q \equiv T$

سنجش کلاد
www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshClouds

۴) ترکیب دوشرطی: اگر دو گزارهٔ شرطی $p \Rightarrow q$ و $q \Rightarrow p$ را با ترکیب عطفی «$\wedge$» به هم مرتبط کنیم، ترکیب دوشرطی $p \Leftrightarrow q$ به دست می‌آید که آن را به صورت «p اگر و تنها اگر q» یا «p شرط لازم و کافی برای q است» می‌خوانیم.

نکته

- ارزش $p \Leftrightarrow q$ فقط در حالتی درست است که p و q هم‌ارزش باشند.

p	q	$p \Leftrightarrow q$
د	د	د
د	ن	ن
ن	د	ن
ن	ن	د

- نقیض $p \Leftrightarrow q$ را به یکی از صورت‌های زیر می‌توان نوشت:

$$\sim (p \Leftrightarrow q) \equiv p \Leftrightarrow \sim q \qquad \sim (p \Leftrightarrow q) \equiv \sim p \Leftrightarrow q$$

- ترکیب دوشرطی یک گزاره با خودش همواره درست و ترکیب دوشرطی یک گزاره با نقیضش همواره نادرست است:

$$p \Leftrightarrow \sim p \equiv F \qquad p \Leftrightarrow p \equiv T$$

هم‌ارزی‌های منطقی

۱) جابه‌جایی	$p \wedge q \equiv q \wedge p$	$p \vee q \equiv q \vee p$
۲) شرکت‌پذیری	$(p \wedge q) \wedge r \equiv p \wedge (q \wedge r)$	$(p \vee q) \vee r \equiv p \vee (q \vee r)$
۳) توزیع‌پذیری	$p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$	$p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$
۴) قانون دمورگان	$\sim (p \vee q) \equiv \sim p \wedge \sim q$	$\sim (p \wedge q) \equiv \sim p \vee \sim q$
۵) جذب	$p \vee (p \wedge q) \equiv p$	$p \wedge (p \vee q) \equiv p$
۶) هم‌ارزی گزارهٔ شرطی	$p \Rightarrow q \equiv \sim p \vee q$	
۷) هم‌ارزی‌های گزارهٔ دوشرطی	$p \Leftrightarrow q \equiv (p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p) \equiv (\sim p \wedge \sim q) \vee (p \wedge q)$	

پاسخ خیلی تشریحی ✔ گزینهٔ (۱): همان هم‌ارزی گزارهٔ شرطی؛

گزینهٔ (۳): همان قانون دمورگان؛

گزینهٔ (۴): همان هم‌ارزی گزارهٔ دو شرطی است.

اما دو گزارهٔ گزینهٔ (۲) یعنی $p \wedge (p \vee q)$ و q هم‌ارز نیستند، زیرا طبق قانون جذب داریم:

$$\overbrace{\underbrace{p \wedge (p \vee q)}_{p} \equiv q}^{\text{هم‌ارزی گزینهٔ (۲)}} \xrightarrow{\text{پس}} p \equiv q$$

که چنین هم‌ارزی درست نیست.

سنجش کلاد
www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshClouds

۳۲ در چند حالت از جدول ارزش گزاره‌های p، q و r، ارزش گزارهٔ $(p \wedge q) \Rightarrow r$ نادرست است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

پاسخ خیلی تشریحی **گام اول:** جدول ارزش گزاره‌ها را رسم می‌کنیم:

p	q	r	$p \wedge q$	$(p \wedge q) \Rightarrow r$
T	T	T	T	T
T	T	F	T	F
T	F	T	F	T
T	F	F	F	T
F	T	T	F	T
F	T	F	F	T
F	F	T	F	T
F	F	F	F	T

گام دوم: با توجه به جدول رسم‌شده، ارزش گزارهٔ $(p \wedge q) \Rightarrow r$ فقط در یک حالت نادرست است.

یه‌جور دیگه **گام اول:** با توجه به درس‌باکس سؤال قبل، ارزش گزارهٔ شرطی تنها زمانی نادرست است که ارزش مقدم درست و ارزش تالی نادرست باشد. یعنی ارزش گزارهٔ $(p \wedge q) \Rightarrow r$ تنها زمانی نادرست است که ارزش $p \wedge q$ درست و ارزش r نادرست باشد.

گام دوم: ارزش گزارهٔ عطفی $p \wedge q$ تنها زمانی درست می‌شود که ارزش p و q درست باشد؛ بنابراین ارزش گزارهٔ $(p \wedge q) \Rightarrow r$ تنها زمانی نادرست است که p درست، q درست و r نادرست باشد، یعنی فقط در یک حالت ارزش این گزاره نادرست است.

سنجش کلاد
www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshClouds

۳۳ اگر هر دو گزارهٔ $r \Rightarrow (p \Rightarrow q)$ و $p \Rightarrow (r \Rightarrow q)$ ارزش نادرست داشته باشند، کدام‌یک از گزاره‌های زیر نیز ارزش نادرست دارد؟

۱) q

۲) $p \vee r$

۳) $p \Rightarrow q$

۴) $r \Rightarrow q$

پاسخ خیلی تشریحی ✔ **گام اول:** جدول ارزش گزاره‌ها را رسم می‌کنیم:

p	q	r	$p \Rightarrow q$	$r \Rightarrow q$	$(p \Rightarrow q) \Rightarrow r$	$(r \Rightarrow q) \Rightarrow p$	$p \vee r$
T	T	T	T	T	T	T	T
T	T	F	T	T	F	T	T
T	F	T	F	F	T	T	T
T	F	F	F	T	T	T	T
F	T	T	T	T	T	F	T
F	T	F	T	T	F	F	F
F	F	T	T	F	T	T	T
F	F	F	T	T	F	F	F
	گزینهٔ (۱)		گزینهٔ (۳)	گزینهٔ (۴)			گزینهٔ (۲)

گام دوم: با توجه به جدول بالا، در دو سطر رنگ‌شده، ارزش هر دو گزارهٔ $r \Rightarrow (p \Rightarrow q)$ و $p \Rightarrow (r \Rightarrow q)$ نادرست است. حالا ارزش گزارهٔ گزینهٔ (۲) هم در این دو سطر نادرست است؛ پس جواب گزینهٔ (۲) می‌شود. (با توجه به جدول، در دو سطر گفته‌شده، ارزش گزارهٔ گزینهٔ (۱) در یک سطر درست و در سطر دیگر نادرست است و ارزش گزاره‌های گزینه‌های (۳) و (۴) در هر دو سطر درست است.)

یه‌جور دیگه

گام اول: ارزش گزارهٔ $(p \Rightarrow q) \Rightarrow r$ نادرست است؛ پس باید $p \Rightarrow q$ درست و r نادرست باشد.

گام دوم: ارزش گزارهٔ $(r \Rightarrow q) \Rightarrow p$ نادرست است؛ پس باید $r \Rightarrow q$ درست و p نادرست باشد.

گام سوم: پس ارزش دو گزارهٔ p و r نادرست بوده و بنابراین ارزش گزارهٔ $\underbrace{p}_{F} \vee \underbrace{r}_{F}$ نادرست است.

سنجش کلاد
www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshClouds

۳۴ گزارهٔ «هر عدد حقیقی، کوچک‌تر یا مساوی مربع خودش است» با استفاده از سورها به صورت ..... نوشته می‌شود و ارزش آن ..... است.

۱) $\forall x \in \mathbb{R}; x \leq x^2$ ـ درست

۲) $\forall x \in \mathbb{R}; x \leq x^2$ ـ نادرست

۳) $\exists x \in \mathbb{R}; x \leq x^2$ ـ درست

۴) $\exists x \in \mathbb{R}; x \leq x^2$ ـ نادرست

درس Box

سورها

برای بیان عبارت‌ها با استفاده از نمادهای ریاضی به جای «به ازای هر»، یا «به ازای جمیع مقادیر» از نماد $\forall$ و به جای «وجود دارد»، یا «به ازای بعضی مقادیر» از نماد $\exists$ استفاده می‌کنیم. نماد $\forall$ سور عمومی و نماد $\exists$ سور وجودی نامیده می‌شود.

نکته

۱) ارزش گزاره‌های سوری با سور عمومی (یا همان $\forall$)، زمانی درست است که ارزش گزاره، به ازای تمام اعضای دامنهٔ متغیر درست باشد.

۲) ارزش گزاره‌های سوری با سور وجودی (یا همان $\exists$)، زمانی درست است که ارزش گزاره، به ازای حداقل یکی از اعضای دامنهٔ متغیر درست باشد.

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: گزارهٔ «$\underbrace{\text{هر عدد حقیقی}}_{\forall x \in \mathbb{R}}$، $\underbrace{\text{کوچک‌تر یا مساوی مربع خودش است}}_{x \leq x^2}$» با استفاده از سورها به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$\forall x \in \mathbb{R}; x \leq x^2$$

گام دوم: ارزش این گزاره نادرست است، برای مثال به ازای $x = \frac{1}{2}$ داریم:

$$x = \frac{1}{2} > \frac{1}{4} = x^2$$

سنجش کلاد
www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshClouds

۳۵ ارزش گزارهٔ « $\forall A \subseteq \mathbb{N}, \forall m \in \mathbb{N}, \exists B \subseteq \mathbb{Z}, n(B-A)=m$ » ..... است و نقیض این گزاره به صورت ..... است.

۱) درست ـ $\forall A \subseteq \mathbb{N}, \forall m \in \mathbb{N}, \exists B \subseteq \mathbb{Z}; n(B-A) \neq m$

۲) درست ـ $\exists A \subseteq \mathbb{N}, \exists m \in \mathbb{N}, \forall B \subseteq \mathbb{Z}; n(B-A) \neq m$

۳) نادرست ـ $\forall A \subseteq \mathbb{N}, \forall m \in \mathbb{N}, \exists B \subseteq \mathbb{Z}; n(B-A) \neq m$

۴) نادرست ـ $\exists A \subseteq \mathbb{N}, \exists m \in \mathbb{N}, \forall B \subseteq \mathbb{Z}; n(B-A) \neq m$

برای هر مجموعه مثل A که زیرمجموعهٔ اعداد طبیعی باشد و هر عدد طبیعی مثل m، وجود دارد مجموعه‌ای مثل B که زیرمجموعهٔ اعداد صحیح باشد و تعداد اعضای مجموعهٔ $B-A$ برابر m باشد.

درس Box

نقیض یک گزارهٔ سوری

برای نقیض‌کردن یک گزارهٔ سوری، باید:

۱) سور را برعکس کنیم! یعنی اگر سور وجودی داشتیم، به جای آن سور عمومی قرار دهیم و اگر سور عمومی داشتیم، به جای آن سور وجودی قرار دهیم.

۲) گزاره نما را نقیض کنیم.

به عبارت دیگر:

$$\sim (\forall x \in A; p(x)) \equiv \exists x \in A \; ; \sim p(x)$$

$$\sim (\exists x \in A; p(x)) \equiv \forall x \in A \; ; \sim p(x)$$

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: با توجه به تعبیر، ارزش گزاره درست است، چون هر مجموعه مثل A را که در نظر بگیریم، کافی است مجموعهٔ B را به این صورت تشکیل دهیم که شامل تمام اعضای مجموعهٔ A باشد و علاوه بر اعضای مجموعهٔ A، m عضو دیگر هم داشته باشد. برای مثال اگر $A=\{۲,۴\}$ و $m=۳$ باشد، با فرض $B=\{-۱,۲,۴,۵,۶\}$، $B-A=\{-۱,۵,۶\}$ شده و $n(B-A)=۳=m$ می‌شود.

گام دوم: با توجه به درس‌باکس، نقیض این گزاره به صورت زیر می‌شود:

$$\sim (\forall A \subseteq \mathbb{N}, \forall m \in \mathbb{N}, \exists B \subseteq \mathbb{Z} \; ; \; n(B-A)=m)$$

$$\equiv \exists A \subseteq \mathbb{N}, \exists m \in \mathbb{N}, \forall B \subseteq \mathbb{Z} \; ; \; n(B-A) \neq m$$

سنجش کلاد
www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshClouds

۳۶ اگر $A=\{\{۱\}\}$ ، $B=\{\{۱\},۲\}$ و $C=\{۱,\{۱\},\{\{۱\}\},\{\{۱\},۲\},۲\}$ ، در این‌صورت کدام گزینه نادرست است؟

۱) $A\in B$ و $B\in C$

۲) $A\subseteq B$ و $B\subseteq C$

۳) $A\in C$ و $A\subseteq C$

۴) $B\in C$ و $B\subseteq C$

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: $A\in B$ ، $A\in C$ و $B\in C$ است، زیرا:

$$B=\{\underbrace{\{۱\}}_{A},۲\}\Rightarrow A\in B$$

$$C=\{۱,\underbrace{\{۱\}}_{A},\underbrace{\{\{۱\},۲\}}_{B},۲\}\Rightarrow B\in C$$

پس تا این‌جا گزینهٔ (۱) درست است.

گام دوم: A زیرمجموعهٔ B نیست، زیرا زیرمجموعه‌های B به صورت زیر هستند:

$$B=\{\{۱\},۲\}\xrightarrow{\text{زیرمجموعه‌های B}}\varnothing,\{\{۱\}\},\{۲\},\{\{۱\},۲\}$$

پس $A\not\subseteq B$ و گزینهٔ (۲) نادرست می‌شود.

تا همین‌جا به جواب رسیدیم، ولی درستی $A\subseteq C$ و $B\subseteq C$ را هم بررسی می‌کنیم.

گام سوم: زیرمجموعه‌های C به صورت زیرند:

$$C=\{۱,\{۱\},\{\{۱\},۲\},۲\}\xrightarrow{\text{زیرمجموعه‌های C}}\varnothing,\underbrace{\{۱\}}_{A},\{۲\},\{۱,\{۱\}\},\underbrace{\{\{۱\},۲\}}_{B},\ldots$$

در بین زیرمجموعه‌های A، C و B هم دیده می‌شوند، پس $A\subseteq C$ و $B\subseteq C$ و گزینه‌های (۳) و (۴) هم درست هستند.

www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshClouds

۳۷ مجموعهٔ $A=\{۱,۲,۳,۴,۵,۶,۷\}$ چند زیرمجموعه دارد، به طوری که اختلاف بزرگ‌ترین و کوچک‌ترین عضو آن برابر ۴ باشد؟

۱) ۱۶ ۲) ۲۰ ۳) ۲۱ ۴) ۲۴

درس Box

تعداد زیرمجموعه‌های یک مجموعهٔ n عضوی، ۲^n تا است، زیرا هر یک از n عضو دو حالت دارند که در زیرمجموعه باشند یا نباشند.

$$A=\{\underset{\text{۲ حالت}}{۱}\ ,\ \underset{\text{۲ حالت}}{۲}\ ,\ \underset{\text{۲ حالت}}{۳}\ ,\ \dots\ ,\ \underset{\text{۲ حالت}}{n}\} \xrightarrow{\text{تعداد زیرمجموعه‌ها}} \underbrace{۲\times۲\times۲\times\dots\times۲}_{\text{n بار}}=۲^n$$

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: برای این‌که اختلاف بزرگ‌ترین و کوچک‌ترین عضو ۴ باشد، سه حالت داریم:

- حالت اول: کوچک‌ترین عضو برابر ۱ و بزرگ‌ترین عضو برابر ۵ باشد: در این حالت هر کدام از اعضای بین ۱ و ۵ (یعنی ۲، ۳ و ۴)، دو حالت دارند که در زیرمجموعه باشند یا نباشند؛ پس تعداد زیرمجموعه‌ها برابر $۲\times۲\times۲=۸$ تا می‌شود.

$$\{۱\ ,\ \underset{\text{۲ حالت}}{۲}\ ,\ \underset{\text{۲ حالت}}{۳}\ ,\ \underset{\text{۲ حالت}}{۴}\ ,۵\}$$

- حالت دوم: کوچک‌ترین عضو برابر ۲ و بزرگ‌ترین عضو برابر ۶ باشد: در این حالت هر کدام از اعضای بین ۲ و ۶ (یعنی ۳، ۴ و ۵)، دو حالت دارند که در زیرمجموعه باشند یا نباشند؛ پس تعداد زیرمجموعه‌ها برابر $۲\times۲\times۲=۸$ تا می‌شود.

$$\{۲\ ,\ \underset{\text{۲ حالت}}{۳}\ ,\ \underset{\text{۲ حالت}}{۴}\ ,\ \underset{\text{۲ حالت}}{۵}\ ,۶\}$$

- حالت سوم: کوچک‌ترین عضو برابر ۳ و بزرگ‌ترین عضو برابر ۷ باشد: در این حالت هر کدام از اعضای بین ۳ و ۷ (یعنی ۴، ۵ و ۶)، دو حالت دارند که در زیرمجموعه باشند یا نباشند؛ پس تعداد زیرمجموعه‌ها برابر $۲\times۲\times۲=۸$ تا می‌شود.

$$\{۳\ ,\ \underset{\text{۲ حالت}}{۴}\ ,\ \underset{\text{۲ حالت}}{۵}\ ,\ \underset{\text{۲ حالت}}{۶}\ ,۷\}$$

گام دوم: بنابراین تعداد کل زیرمجموعه‌هایی که اختلاف کوچک‌ترین و بزرگ‌ترین عضو آن‌ها ۴ باشد، برابر $۸+۸+۸=۲۴$ تا است.

سنجش کلاد
www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshClouds

۳۸ اگر k عضو به مجموعهٔ A اضافه کنیم، تعداد زیرمجموعه‌های آن ۴۴۸ واحد زیاد می‌شود. مجموعهٔ اولیهٔ A چند زیرمجموعهٔ حداقل ۳عضوی دارد؟

۱) ۱۵ ۲) ۲۰ ۳) ۳۲ ۴) ۴۲

درس Box

تعداد زیرمجموعه‌های mعضوی یک مجموعهٔ nعضوی برابر است با:

$$\binom{n}{m}=\frac{n!}{m!(n-m)!}$$

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: اگر تعداد اعضای مجموعهٔ A را n فرض کنیم، تعداد زیرمجموعه‌های آن 2^nتا می‌شود.

گام دوم: اگر به مجموعهٔ A، k عضو اضافه کنیم، تعداد اعضای آن $n+k$ و تعداد زیرمجموعه‌های آن 2^{n+k} می‌شود.

گام سوم: طبق گفتهٔ سؤال، با این کار تعداد زیرمجموعه‌ها ۴۴۸تا زیاد می‌شود:

$$2^{n+k}=2^n+448 \Rightarrow 2^{n+k}-2^n=\underbrace{448}_{64\times7}$$

$$\Rightarrow 2^n(2^k-1)=2^6\times(2^3-1) \Rightarrow \begin{cases}2^n=2^6 \Rightarrow n=6\\ 2^k-1=2^3-1 \Rightarrow 2^k=2^3 \Rightarrow k=3\end{cases}$$

گام چهارم: مجموعهٔ اولیهٔ A شش عضو داشت؛ پس تعداد زیرمجموعه‌های حداقل سه‌عضوی آن برابر می‌شود با:

$$\underbrace{\binom{6}{3}}_{\text{تعداد زیرمجموعه‌های ۳عضوی}}+\underbrace{\binom{6}{4}}_{\text{تعداد زیرمجموعه‌های ۴عضوی}}+\underbrace{\binom{6}{5}}_{\text{تعداد زیرمجموعه‌های ۵عضوی}}+\underbrace{\binom{6}{6}}_{\text{تعداد زیرمجموعه‌های ۶عضوی}}$$

$$=20+15+6+1=42$$

سنجش کلاد
www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshClouds

۳۹ چه تعداد از گزاره‌های زیر صحیح است؟

الف) $A' \subseteq B \Leftrightarrow \forall x;(x \notin A \Leftrightarrow x \in B)$

ب) $A \not\subseteq B \Leftrightarrow \exists x;(x \in A \vee x \notin B)$

پ) $A - B = \{x \mid x \in A \wedge x \notin B\}$

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

درس Box

تعریف زیرمجموعه (و روابط بین مجموعه‌ها) به کمک نمادهای ریاضی

$A \subseteq B \Leftrightarrow \forall x;(x \in A \Rightarrow x \in B)$

$A \not\subseteq B \Leftrightarrow \exists x;(x \in A \wedge x \notin B)$

$A' = \{x \mid x \notin A\}$

$A \cap B = \{x \mid x \in A \wedge x \in B\}$

$A \cup B = \{x \mid x \in A \vee x \in B\}$

$A - B = \{x \mid x \in A \wedge x \notin B\}$

پاسخ خیلی تشریحی ✔ با توجه به درس‌باکس، «پ» درست است، اما «الف» و «ب» نادرست‌اند. اصلاح‌شدهٔ موارد «الف» و «ب» به صورت زیر است:

الف) $A' \subseteq B \Leftrightarrow \forall x;(x \notin A \Rightarrow x \in B)$

ب) $A \not\subseteq B \Leftrightarrow \exists x;(x \in A \wedge x \notin B)$

سنجش کلاد
www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshClouds

۴۰ درون هر یک از خانه‌های جدول زیر، یک عدد طبیعی طوری قرار می‌دهیم به طوری که مجموع عددهای روی هر سطر، هر ستون و هر قطرِ آن برابر باشد. اگر مجموعهٔ اعداد واقع بر سطر اول با مجموعهٔ اعداد واقع بر سطر دوم برابر باشد، جمع اعداد واقع بر هر سطر چه‌قدر است؟

		۵
۹		

۱) ۱۵ ۲) ۲۷

۳) ۱۵ یا ۲۷ ۴) ۲۷ یا ۳۲

درس Box دو مجموعهٔ مساوی: اگر هر عضو مجموعهٔ A، عضوی از مجموعهٔ B و هر عضو مجموعهٔ B، عضوی از مجموعهٔ A باشد، در این صورت دو مجموعهٔ A و B برابرند و می‌نویسیم $A = B$.

پاسخ خیلی تشریحی **گام اول:** عدد واقع در خانهٔ وسط را برابر x و عدد واقع در خانهٔ سمت راست آن را برابر y در نظر می‌گیریم که در این صورت جمع اعداد واقع بر سطر دوم برابر $x+y+۹$ می‌شود.

قطر B ↘ ↙ قطر A

a	b	۵
۹	x	y
c	d	e

گام دوم: مجموع عددهای واقع بر هر سطر، هر ستون و هر قطر برابر است؛ پس:

مجموع اعداد واقع بر قطر A : $۵+x+c=x+y+۹ \Rightarrow c=y+۴$

جمع اعداد واقع بر ستون سمت چپ : $a+۹+\underbrace{c}_{y+۴}=x+y+۹ \Rightarrow a+۹+y+۴=x+y+۹ \Rightarrow a=x-۴$

جمع اعداد واقع بر سطر اول : $\underbrace{a}_{x-۴}+b+۵=x+y+۹ \Rightarrow x-۴+b+۵=x+y+۹ \Rightarrow b=y+۸$

گام سوم: بنابراین تا این‌جا جدول به شکل زیر می‌شود:

A →	$x-۴$	$y+۸$	۵
B →	۹	x	y
	$y+۴$	d	e

گام چهارم: مجموعهٔ اعداد واقع بر سطر اول به صورت $A=\{x-۴, y+۸, ۵\}$ و مجموعهٔ اعداد واقع بر سطر دوم به صورت $B=\{۹, x, y\}$ است. طبق گفتهٔ سؤال، $A=B$. در مجموعهٔ A عضو ۵ را داریم؛ پس در مجموعهٔ B هم باید این عضو را داشته باشیم که در دو حالت امکان‌پذیر است:

- حالت اول: اگر $x=۵$ باشد، دو مجموعهٔ A و B به شکل زیر می‌شوند:

$A=\{۱, y+۸, ۵\}$

$B=\{۹, ۵, y\}$

که واضح است در این صورت، برای برابربودن دو مجموعه کافی است $y=۱$ باشد، بنابراین در این حالت اعداد واقع بر سطر اول، ۵، ۹ و ۱ می‌شوند که جمع آن‌ها برابر $۱۵=۵+۹+۱$ است؛ پس جمع اعداد واقع بر هر سطر ۱۵ می‌شود.

سنجش کلاد
www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshClouds

بد نیست کامل‌شدهٔ جدول در این حالت را ببینید:

۱	۹	۵
۹	۵	۱
۵	۱	۹

حالت دوم: اگر $y = ۵$ باشد، دو مجموعهٔ A و B به شکل زیر می‌شوند:

$$A = \{x - ۴, ۱۳, ۵\}$$

$$B = \{۹, x, ۵\}$$

که واضح است در این صورت، برای برابربودن دو مجموعه کافی است $x = ۱۳$ باشد که در این صورت جدول به شکل زیر می‌شود:

(با جای‌گذاری $y = ۵$ و $x = ۱۳$ در جدول گام سوم به این جدول رسیدیم.)

B

۹	۱۳	۵
۹	۱۳	۵
۹	d	e

جمع اعداد واقع بر سطر اول در این حالت برابر $۹ + ۱۳ + ۵ = ۲۷$ است؛ پس:

جمع اعداد واقع بر ستون وسط : $۱۳ + ۱۳ + d = ۲۷ \Rightarrow d = ۱$

جمع اعداد واقع بر ستون سمت راست : $۵ + ۵ + e = ۲۷ \Rightarrow e = ۱۷$

اما چنین چیزی غیرممکن است، چون در این صورت، جمع اعداد واقع بر قطر B برابر $۹ + ۱۳ + ۱۷ = ۳۹$ می‌شود؛ بنابراین امکان ندارد حالت دوم رخ دهد و جواب صحیح، همان جواب به‌دست‌آمده در حالت اول یعنی ۱۵ است.

سنجش کلاد
www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshClouds

فیزیک یازدهم

۴۱ یک میلهٔ پلاستیکی خنثی را با پارچهٔ پشمی مالش می‌دهیم. پس از مالش، بار الکتریکی میلهٔ پلاستیکی $-۱۲/۸nC$ می‌شود؛ بین میله و پارچه چند الکترون و چگونه مبادله شده است؟ $(e=۱/۶\times۱۰^{-۱۹}C)$

۱) ۸×۱۰^{۱۰}، از پارچه به میله

۲) ۸×۱۰^{۱۰}، از میله به پارچه

۳) ۸×۱۰^{۹}، از پارچه به میله

۴) ۸×۱۰^{۹}، از میله به پارچه

Hint از رابطهٔ $q=\pm ne$، تعداد الکترون مبادله‌شده را محاسبه کنید. دقت کنید جسمی که بار آن منفی شده است، الکترون گرفته است.

درس Box **کوانتیده‌بودن بار الکتریکی:** همواره بار الکتریکی یک جسم، مضرب صحیحی از یک مقدار پایه (بار بنیادی e) است و هر مقدار دلخواهی نمی‌تواند داشته باشد.

$$q=\pm ne \quad , \quad e=۱/۶\times۱۰^{-۱۹}C$$

(n: تعداد الکترون مبادله‌شده)

علامت $+$: برای جسمی که الکترون از دست داده است.

علامت $-$: برای جسمی که الکترون گرفته است.

پاسخ خیلی تشریحی ✔ **گام اول:** وقتی بار الکتریکی میلهٔ پلاستیکی منفی شده، پس الکترون از پارچهٔ پشمی به میلهٔ پلاستیکی منتقل شده است. بنابراین گزینه‌های (۲) و (۴) رد می‌شوند.

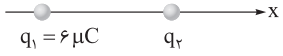
گام دوم:

$$|q|=ne \Rightarrow ۱۲/۸\times۱۰^{-۹}=n\times۱/۶\times۱۰^{-۱۹}$$

$$n=\frac{۱۲/۸\times۱۰^{-۹}}{۱/۶\times۱۰^{-۱۹}}=۸\times۱۰^{۱۰} \text{ الکترون}$$

سنجش کلاد
www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshClouds

۴۲ در شکل زیر، دو بار الکتریکی نقطه‌ای q_1 و q_2 روی محور x، در فاصلهٔ ۶ cm از هم قرار دارند. اگر نیروی الکتریکی که بار q_1 به بار q_2 وارد می‌کند، برابر $(۳۰\text{N})\vec{i}$ باشد، بار q_2 چند میکروکولن است؟ $(k = ۹\times۱۰^۹ \frac{\text{N.m}^۲}{\text{C}^۲})$



۱) ۲
۲) -۲
۳) ۲۰
۴) -۲۰

Hint با توجه به نوع نیروی بین بارها، علامت بار q_2 را تشخیص دهید. سپس با استفاده از قانون کولن $\left(F = \frac{k\,|q_1||q_2|}{r^۲}\right)$، مقدار بار q_2 را به دست آورید.

درس Box اگر دو بار ذره‌ای q_1 و q_2 در فاصلهٔ r از هم قرار داشته باشند، اندازهٔ نیرویی که این دو ذرهٔ باردار به هم وارد می‌کنند از رابطهٔ $F = \frac{k\,|q_1||q_2|}{r^۲}$ به دست می‌آید.

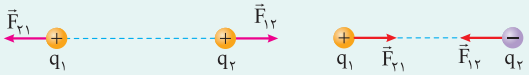
$F =$ اندازهٔ نیرو (N)

$k =$ ثابت کولن $= ۹\times۱۰^۹ \frac{\text{N.m}^۲}{\text{C}^۲}$

$r =$ فاصلهٔ بین دو بار (m)

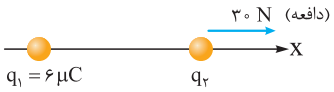
q_1 و $q_2 =$ بارهای الکتریکی نقطه‌ای (C)

این نیرو، در صورت ناهمنام‌بودن بارها، از نوع جاذبه و در صورت همنام‌بودن بارها، از نوع دافعه است.



براساس قانون سوم نیوتون، نیروهای الکتریکی که این دو بار بر یکدیگر وارد می‌کنند، هم‌اندازه، هم‌راستا و در خلاف جهت یکدیگر هستند.

پاسخ خیلی تشریحی **گام اول:** با توجه به جهت نیروی وارد بر بار q_2، متوجه می‌شویم که علامت آن مثبت است. بنابراین گزینه‌های (۲) و (۴) رد می‌شوند.



گام دوم:

$$F = \frac{k\,|q_1||q_2|}{r^۲} \Rightarrow ۳۰ = \frac{۹\times۱۰^۹\times۶\times۱۰^{-۶}\times q_2}{(۶\times۱۰^{-۲})^۲} \Rightarrow ۳۰ = \frac{۹\times۶\times۱۰^{+۳}\times q_2}{۳۶\times۱۰^{-۴}}$$

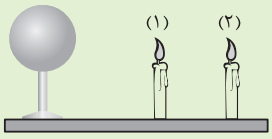
$$q_2 = ۲۰\times۱۰^{-۷}\,C = ۲\mu c$$

تیزبازی هرگاه اندازهٔ دو بار برحسب میکروکولن باشد و فاصلهٔ آن‌ها نیز برحسب سانتی‌متر داده شده باشد، نیروی کولنی بین دو بار بدون تبدیل واحد از رابطهٔ زیر قابل محاسبه است:

$$F = \frac{۹۰\,|q_1||q_2|}{r^۲} \Rightarrow ۳۰ = \frac{۹۰\times۶\times q_2}{۶^۲} \Rightarrow q_2 = ۲\mu c$$

سنجش کلاد
www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshClouds

۴۳ در شکل زیر، دو شمع روشن در نزدیکی کرهٔ رسانایی قرار دارند. اگر به این کره، بار الکتریکی مثبت دهیم، کدام‌یک از موارد زیر دربارهٔ انحراف شعلهٔ شمع‌ها درست است؟



الف) شعلهٔ شمع‌ها به سمت راست منحرف می‌شود.

ب) شعلهٔ شمع‌ها به سمت چپ منحرف می‌شود.

پ) شعلهٔ شمع‌ها به یک اندازه منحرف می‌شود.

ت) شعلهٔ شمع (۱)، بیشتر از شعلهٔ شمع (۲) منحرف می‌شود.

۱) الف و پ
۲) الف و ت
۳) ب و پ
۴) ب و ت

Hint با توجه به این‌که شعلهٔ شمع حاوی یون‌های مثبت است و هر چه از کره دورتر می‌شویم، میدان الکتریکی ضعیف‌تر می‌شود، تست را پاسخ دهید.

پاسخ خیلی تشریحی در شعلهٔ شمع، تعداد بسیار زیادی یون مثبت وجود دارد و یون‌های منفی در اقلیت هستند (تقریباً ناچیز) و صفر در نظر گرفته می‌شوند؛ بنابراین به دلیل هم نام‌بودن بار کره و شعله، نیروی بین آن‌ها دافعه بوده و شعله‌ها به سمت راست منحرف می‌شوند. (مورد «الف» صحیح است)، اما نیروی وارد بر شعلهٔ شمع (۱)، بیشتر از نیروی وارد بر شعلهٔ شمع (۲) است؛ زیرا به کره نزدیک‌تر است. (مورد «ت» صحیح است.)

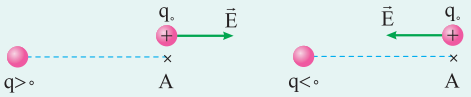
سنجش کلاد
www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshClouds

۴۴ میدان الکتریکی بار نقطه‌ای q در فاصلهٔ r از آن برابر با $E = ۴\times۱۰^{۵}\,N/C$ است، این بار از فاصلهٔ $\frac{r}{۲}$ بر بار الکتریکی نقطه‌ای ۵ میکروکولنی، چند نیوتون نیرو وارد می‌کند؟

۱) ۲ ۲) ۴ ۳) ۵ ۴) ۸

Hint ابتدا از رابطهٔ مقایسه‌ای $\frac{E_۲}{E_۱} = (\frac{r_۱}{r_۲})^{۲}$، میدان را در فاصلهٔ $\frac{r}{۲}$ به دست آورید؛ سپس از رابطهٔ $F = Eq$، اندازهٔ نیروی وارد بر بار ۵ میکروکولنی را به دست آورید.

درس Box برای محاسبهٔ اندازهٔ میدان الکتریکی ناشی از بار q در فاصلهٔ r از آن، از رابطهٔ $E = \frac{k|q|}{r^{۲}}$ استفاده می‌کنیم. برای تشخیص جهت میدان الکتریکی، بار آزمون $(q_۰ > ۰)$ را در نقطهٔ مورد نظر قرار می‌دهیم، جهت نیرویی که بار q به بار آزمون وارد می‌کند، جهت میدان را در آن نقطه نشان می‌دهد.



میدان الکتریکی در یک نقطه، به اندازهٔ بار q که آن میدان را ایجاد کرده و هم‌چنین به فاصله از بار بستگی دارد.

$$\frac{E_۲}{E_۱} = \frac{q_۲}{q_۱} \times (\frac{r_۱}{r_۲})^{۲}$$

اگر بار الکتریکی $q_۰$ در میدان الکتریکی $\vec{E}$ قرار بگیرد، از طرف میدان به آن نیروی F وارد می‌شود. $\vec{F} = \vec{E}.q_۰$

پاسخ خیلی تشریحی **گام اول:** ابتدا میدان الکتریکی را در فاصلهٔ $\frac{r}{۲}$ از بار q، محاسبه می‌کنیم:

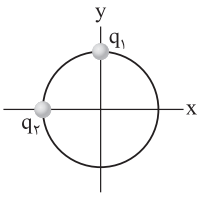
$$\frac{E_۲}{E_۱} = (\frac{r_۱}{r_۲})^{۲} \Rightarrow \frac{E_۲}{۴\times۱۰^{۵}} = (\frac{r}{\frac{r}{۲}})^{۲} \Rightarrow E_۲ = ۱۶\times۱۰^{۵}\,N/C$$

گام دوم: نیروی وارد بر بار $q_۰ = ۵\,\mu C$ را محاسبه می‌کنیم:

$$F = E_۲ \times q_۰ \Rightarrow F = ۱۶\times۱۰^{۵}\times۵\times۱۰^{-۶} = ۸\,N$$

سنجش کلاد
www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshClouds

۴۵ در شکل روبه‌رو، دو ذرهٔ باردار q_1 و q_2 روی محیط دایره‌ای به قطر $6cm$ قرار دارند. اگر میدان الکتریکی برایند در مرکز دایره (مبدأ مختصات)، در SI به صورت $\vec{E} = 4\times10^4\vec{i} + 3\times10^4\vec{j}$ باشد، بارهای q_1 و q_2 به ترتیب از راست به چپ، چند نانوکولن هستند؟ $(k = 9\times10^9 \frac{N.m^2}{C^2})$



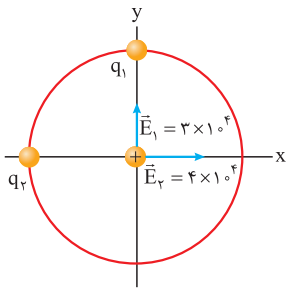
۱) -3 و ۴
۲) ۳ و ۴
۳) -12 و ۱۶
۴) ۱۲ و ۱۶

Hint

با توجه به جهت بردارهای i و j، علامت بارهای q_1 و q_2 را تعیین کنید و سپس با استفاده از رابطهٔ $E = \frac{k|q|}{r^2}$، اندازهٔ هر بار را به دست آورید.

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: مؤلفه‌های میدان الکتریکی را روی شکل رسم می‌کنیم و مطابق شکل، با توجه به راستا و جهت میدان‌ها متوجه می‌شویم که میدان الکتریکی حاصل از بار q_1 در راستای محور y و میدان حاصل از بار q_2 در راستای محور xها است. بنابراین با توجه به تعریف میدان الکتریکی، بار q_1 منفی و بار q_2 مثبت خواهد بود (گزینه‌های (۲) و (۴) رد می‌شوند).



گام دوم: اندازهٔ باری که هر میدان الکتریکی را ایجاد کرده، محاسبه می‌کنیم:

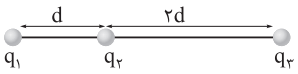
$$E = \frac{k|q|}{r^2}$$

$$E_1 = 3\times10^4 = \frac{9\times10^9\times|q_1|}{(3\times10^{-2})^2} \Rightarrow |q_1| = 3\times10^{-9}C = 3nC \xrightarrow{q_1<0} q_1 = -3nC$$

$$E_2 = 4\times10^4 = \frac{9\times10^9\times|q_2|}{(3\times10^{-2})^2} \Rightarrow |q_2| = 4\times10^{-9}C = 4nC \xrightarrow{q_2>0} q_2 = +4nC$$

سنجش کلاد
www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshClouds

۴۶ در شکل زیر، سه ذرهٔ باردار، روی خط راستی قرار دارند. اگر نیروی الکتریکی خالص وارد بر هر کدام از ذره‌ها برابر صفر باشد، کدام گزینه درست است؟



۱) $\frac{q_1}{q_2}=\frac{9}{4}$

۲) $\frac{q_1}{q_2}=-\frac{9}{4}$

۳) $\frac{q_3}{q_2}=\frac{9}{4}$

۴) $\frac{q_3}{q_2}=-\frac{9}{4}$

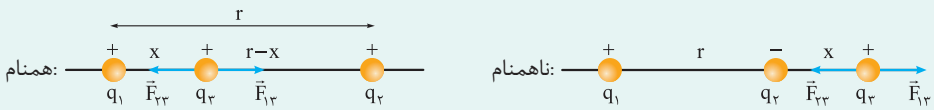
Hint

برایند نیروهای وارد بر همهٔ بارها صفر است، با این فرض علامت بارهای q_1 و q_3 را یکسان و علامت بار q_2 را مخالف این دو قرار دهید؛ سپس نیروی وارد بر بار q_3 را از طرف بارهای q_1 و q_2 مساوی هم قرار دهید $(|F_{13}|=|F_{23}|)$ تا نسبت $\frac{q_1}{q_2}$ به دست آید.

درس Box

اگر دو بار نقطه‌ای q_1 و q_2 در فاصلهٔ r از یکدیگر ثابت شده باشند و بخواهیم بار q_3 را روی خط واصل دو بار یا امتداد آن قرار دهیم تا نیروی خالص وارد بر آن از سمت دو بار q_1 و q_2 صفر باشد، اگر دو بار همنام باشند بار q_3 بین آن‌ها و نزدیک بار کوچک‌تر و اگر دو بار ناهمنام باشند بار q_3 خارج آن‌ها و نزدیک بار کوچک‌تر قرار می‌گیرد. در این صورت برای به دست آوردن فاصلهٔ بار q_3 تا بار کوچک‌تر، اندازهٔ نیروهای وارد بر آن را برابر قرار می‌دهیم.

$$|F_{13}|=|F_{23}|$$



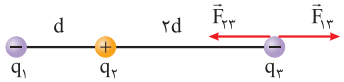
پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: با توجه به توضیحات درس‌باکس، بارهای q_2 و q_3 باید ناهمنام باشند تا برایند نیروهای وارد بر بار q_1 که خارج آن‌هاست صفر شود و هم‌چنین بارهای q_1 و q_2 نیز باید ناهمنام باشند تا برایند نیروهای وارد بر بار q_3 صفر شود.

بنابراین گزینه‌های (۱) و (۳) حذف می‌شوند.

فرض کنید بارهای q_1 و q_3 منفی و بار q_2 مثبت باشد.

گام دوم: برای به دست آوردن نسبت بارهای q_1 و q_2، برایند نیروهای وارد بر بار q_3 را برابر با صفر قرار می‌دهیم:



$$|F_{13}|=|F_{23}| \Rightarrow \frac{k\cancel{|q_1||q_3|}}{9\cancel{d^2}}=\frac{k\cancel{|q_2||q_3|}}{4\cancel{d^2}} \Rightarrow \frac{|q_1|}{|q_2|}=\frac{9}{4} \Rightarrow \frac{q_1}{q_2}=-\frac{9}{4}$$

تیزبازی

برای به دست آوردن فاصلهٔ باری که برایند نیروهای وارد بر آن از طرف بارهای دیگر صفر است، تا بار کوچک‌تر، می‌توان از رابطهٔ زیر استفاده کرد:



$$x=\frac{r}{\sqrt{\left|\frac{q_1}{q_2}\right|}\pm 1}$$

بارها همنام

بارها ناهمنام

$|q_1|>|q_2|$

x : فاصلهٔ بار آزمون تا بار کوچک‌تر

r : فاصلهٔ دو بار از یکدیگر

علامت + : بارها همنام باشند.

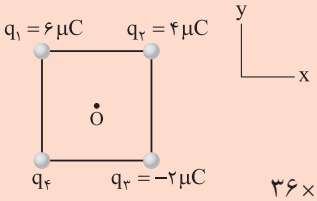
علامت − : بارها ناهمنام باشند.

$$2d=\frac{d}{\sqrt{\left|\frac{q_1}{q_2}\right|}-1} \Rightarrow \sqrt{\left|\frac{q_1}{q_2}\right|}-1=\frac{1}{2} \Rightarrow \sqrt{\left|\frac{q_1}{q_2}\right|}=\frac{3}{2}$$

$$\left|\frac{q_1}{q_2}\right|=\frac{9}{4}$$

سنجش کلاد
www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshClouds

۴۷ در شکل مقابل، چهار ذرهٔ باردار در رأس‌های مربعی به ضلع ۲۰ cm ثابت شده‌اند. اگر میدان الکتریکی خالص در نقطهٔ O (مرکز مربع) در جهت محور x باشد، اندازهٔ این میدان خالص در SI چند واحد است؟ $(k = 9\times10^9 \frac{N.m^2}{C^2})$



۱) 18×10^5

۲) 36×10^5

۳) $18\sqrt{2}\times10^5$

۴) $36\sqrt{2}\times10^5$

پاسخ خیلی تشریحی ✔

گام اول: ابتدا بار q_4 را به دست می‌آوریم؛ چون میدان خالص در جهت محور x می‌باشد، باید بردارهای میدان که در راستای قطرهای مربع هستند هم‌اندازه باشند؛ یعنی:

$$\frac{k|q_1|}{r^2}+\frac{k|q_3|}{r^2}=\frac{k|q_4|}{r^2}-\frac{k|q_2|}{r^2}\Rightarrow|q_1|+|q_3|=|q_4|-|q_2|\Rightarrow|q_4|=12\mu C$$

چون میدان خالص در جهت مثبت x است، $q_4 = +12\mu C$ می‌باشد.

گام دوم: حالا اندازهٔ میدان ناشی از هر یک از بارها را در مرکز مربع محاسبه می‌کنیم:

$$E=\frac{k|q|}{r^2}$$

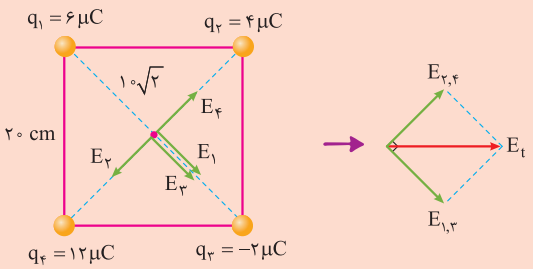
$$E_1=\frac{9\times10^9\times6\times10^{-6}}{(10\sqrt{2}\times10^{-2})^2}=\frac{9\times6\times10^3}{2\times10^{-2}}=27\times10^5\,N/C$$

$$E_2=\frac{9\times10^9\times4\times10^{-6}}{(10\sqrt{2}\times10^{-2})^2}=\frac{9\times4\times10^3}{2\times10^{-2}}=18\times10^5\,N/C$$

$$E_3=\frac{9\times10^9\times2\times10^{-6}}{(10\sqrt{2}\times10^{-2})^2}=\frac{9\times2\times10^3}{2\times10^{-2}}=9\times10^5\,N/C$$

$$E_4=\frac{9\times10^9\times12\times10^{-6}}{(10\sqrt{2}\times10^{-2})^2}=\frac{9\times12\times10^3}{2\times10^{-2}}=54\times10^5\,N/C$$

گام سوم: بار رسم میدان‌ها روی شکل در مرکز مربع، برایند آن‌ها را محاسبه می‌کنیم.



$$E_2, E_4 \xrightarrow{\text{خلاف جهت}} E_{2,4}=|E_2-E_4|=54\times10^5-18\times10^5=36\times10^5\,N/C$$

$$E_1, E_3 \xrightarrow{\text{هم‌جهت}} E_{1,3}=|E_1+E_3|=27\times10^5+9\times10^5=36\times10^5\,N/C$$

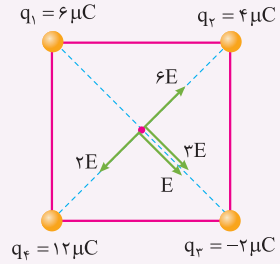
$$E_t=\sqrt{E_{2,4}^2+E_{1,3}^2}=\sqrt{(36\times10^5)^2+(36\times10^5)^2}=36\sqrt{2}\times10^5\,N/C$$

سنجش کلاد
www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshClouds

تیزپازی

می‌توانیم اندازهٔ میدان حاصل از یکی از بارها را در مرکز مربع E بنامیم و میدان ناشی از بقیهٔ بارها را براساس آن به عنوان ضریبی از E در نظر گرفته و در نهایت E_t را محاسبه کنیم.

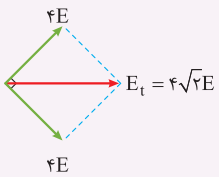
در این‌جا میدان حاصل از بار q_3 را E در نظر می‌گیریم، بنابراین:



$$\frac{E_4}{E} = \frac{|q_4|}{|q_3|} \Rightarrow \frac{E_4}{E} = \frac{12}{2} \Rightarrow E_4 = 6E$$

$$\frac{E_1}{E} = \frac{|q_1|}{|q_3|} \Rightarrow \frac{E_1}{E} = \frac{6}{2} \Rightarrow E_1 = 3E$$

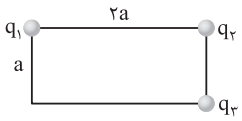
$$\frac{E_2}{E} = \frac{|q_2|}{|q_3|} \Rightarrow \frac{E_2}{E} = \frac{4}{2} \Rightarrow E_2 = 2E$$



$$E_t = \frac{4\sqrt{2} \times 9 \times 10^9 \times 2 \times 10^{-6}}{(10\sqrt{2} \times 10^{-2})^2} = 36\sqrt{2} \times 10^5 \, N/C$$

www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshClouds

۴۸ سه ذرهٔ باردار در رأس مستطیل مطابق شکل زیر، ثابت نگه داشته شده‌اند و میدان الکتریکی حاصل، در رأس چهارم مستطیل، صفر است. $q_۳$، چند برابر $q_۱$ است؟

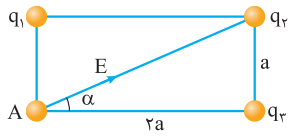


۱) ۸ ●
۲) −۸
۳) ۲
۴) −۲

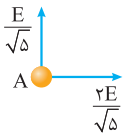
Hint میدان حاصل از $q_۲$ را در راستای عمودی و افقی تجزیه کن.

پاسخ خیلی تشریحی ✔

گام اول: میدان حاصل از $q_۲$ در نقطهٔ A را E در نظر می‌گیریم.



در این صورت با تجزیهٔ E در راستای عمودی و افقی داریم:



«چون که $\sin\alpha = \frac{۱}{\sqrt{۵}}$ و $\cos\alpha = \frac{۲}{\sqrt{۵}}$»

توجه کنید که اهمیتی ندارد علامت بار $q_۲$ چه باشد، چون‌که آن را منفی در نظر گرفتیم، پس برای خنثی‌شدن میدان‌ها در نقطهٔ A، هر دو بار $q_۱$ و $q_۳$ باید مثبت باشند.

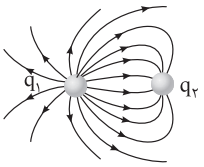
گام دوم: حالا برایند میدان‌ها را در راستای عمودی و افقی می‌نویسیم:

$$\begin{matrix}\frac{k|q_۱|}{a^۲} = \frac{E}{\sqrt{۵}} \\ \frac{k|q_۳|}{۴a^۲} = \frac{۲E}{\sqrt{۵}}\end{matrix} \xrightarrow{\div} \frac{۴|q_۱|}{|q_۳|} = \frac{۱}{۲} \Rightarrow \frac{|q_۳|}{|q_۱|} = ۸$$

$$\xrightarrow{q_۱ q_۳ > ۰} \frac{q_۳}{q_۱} = ۸$$

سنجش کلاد
www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshClouds

۴۹ خطوط میدان الکتریکی برای دو کرهٔ رسانای باردار کوچک به شکل زیر هستند. در رابطه با نوع بار هر کره و مقایسهٔ اندازهٔ بار آن‌ها کدام درست است؟



۱) $q_1 > 0 \, , \, q_2 < 0 \, , \, |q_1| > |q_2|$

۲) $q_1 > 0 \, , \, q_2 < 0 \, , \, |q_1| < |q_2|$

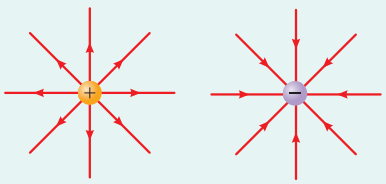
۳) $q_1 < 0 \, , \, q_2 > 0 \, , \, |q_1| > |q_2|$

۴) $q_1 < 0 \, , \, q_2 > 0 \, , \, |q_1| < |q_2|$

Hint با توجه به این‌که جهت خطوط میدان از بار مثبت به سمت بار منفی است و در نزدیکی باری که اندازهٔ آن بزرگ‌تر است، خطوط میدان به هم نزدیک‌تر هستند، گزینهٔ درست را تشخیص دهید.

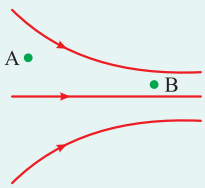
درس Box

تجسم میدان الکتریکی: برای نمایش میدان الکتریکی در اطراف بارها، از خطوط میدان الکتریکی کمک می‌گیریم. همان‌طور که می‌دانیم برای تعیین جهت میدان الکتریکی در هر نقطه، یک بار مثبت در آن نقطه قرار می‌دهیم و جهت میدان الکتریکی، هم‌جهت با نیروی وارد بر این بار مثبت است. به همین دلیل است که خطوط میدان الکتریکی همواره از بار مثبت خارج شده و به بار منفی وارد می‌شوند.



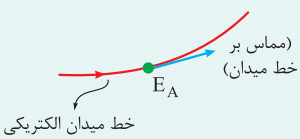
ویژگی‌های خطوط میدان الکتریکی:

۱) تراکم خطوط میدان الکتریکی در هر نقطه، نشانگر اندازهٔ میدان است. یعنی هر جا که خطوط میدان به هم نزدیک‌تر و فشرده‌تر هستند، میدان قوی‌تر است.

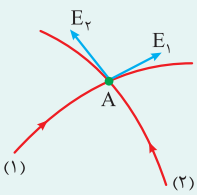


$$E_B > E_A$$

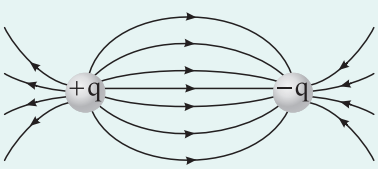
۲) بردار مماس بر خط میدان الکتریکی در هر نقطه، جهت میدان در آن نقطه را نشان می‌دهد.



۳) از هر نقطهٔ میدان الکتریکی فقط یک خط میدان می‌گذرد به عبارت دیگر خطوط میدان الکتریکی یکدیگر را قطع نمی‌کنند. اگر خطوط میدان یکدیگر را قطع کنند، چون دو مماس قابل رسم است، مطابق شکل، میدان در نقطهٔ تقاطع دارای یک جهت مشخص نیست و چنین چیزی امکان‌پذیر نمی‌باشد.

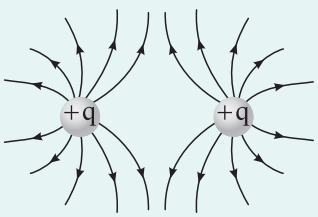


در شکل‌های زیر، خطوط میدان الکتریکی برای چند حالت مهم نشان داده شده‌اند.



میدان الکتریکی در اطراف یک دوقطبی الکتریکی

$|q_-| = |q_+|$



میدان الکتریکی در اطراف یک تک‌قطبی الکتریکی

$|q_+| = |q_+|$

پاسخ خیلی تشریحی ✔ با توجه به جهت خطوط میدان در می‌یابیم که بار q_1 مثبت و بار q_2 منفی است. (بنابراین گزینه‌های (۳) و (۴) رد می‌شوند) چون در نزدیکی باری که اندازهٔ آن بزرگ‌تر است، خطوط میدان به یکدیگر نزدیک‌تر هستند، بنابراین $|q_2| > |q_1|$ است.

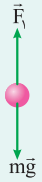
سنجش کلاد
www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshClouds

۵۰ قطرهٔ روغنی در فضای بین دو صفحهٔ افقی که اختلاف پتانسیل معینی دارند، معلق است. اگر جرم این قطره $1/2\times10^{-14}\,kg$ و اندازهٔ میدان الکتریکی یکنواخت بین دو صفحه برابر $1/25\times10^{5}\,V/m$ باشد، دربارهٔ تعداد الکترونی که این قطره نسبت به حالت خنثی، جذب کرده یا از دست داده، کدام درست است؟ $(e=1/6\times10^{-19}C\,,\,g=10\,m/s^2)$

۱) ۶ الکترون جذب کرده است.
۲) ۶ الکترون از دست داده است.
۳) ۸ الکترون جذب کرده است.
۴) ۸ الکترون از دست داده است.

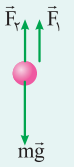
Hint ابتدا از رابطهٔ $E|q|=mg$، بار قطره روغن را محاسبه کنید و سپس از رابطهٔ $q=ne$، تعداد الکترون جذب‌شده توسط قطرهٔ روغن را به دست آورید. دقت کنید که در آزمایش قطرهٔ روغن میلیکان، بار صفحهٔ بالایی مثبت است!

درس Box اگر جسمی به جرم m در یک فضا در حال تعادل باشد، باید نیروی خالص وارد بر آن صفر شود. در صورتی‌که علاوه بر وزن، یک نیروی دیگر به آن وارد شود، این دو نیرو هم‌اندازه و خلاف جهت یکدیگر هستند.

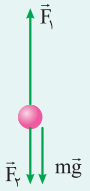


$$|\vec{F}_1|=|\overrightarrow{mg}|$$

و اگر چند نیروی دیگر نیز همراه نیروی وزن به آن اثر کند، باید برایند نیروهای وارد بر آن صفر شود.

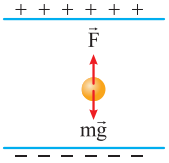


$$|\overrightarrow{mg}|=|\vec{F}_1+\vec{F}_2|$$



$$|\vec{F}_1|=|\vec{F}_2+\overrightarrow{mg}|$$

پاسخ خیلی تشریحی **گام اول:** با توجه به این‌که در آزمایش قطرهٔ روغن میلیکان، صفحهٔ بالایی بار مثبت و صفحهٔ پایین بار منفی دارد، نیروهای وارد بر قطرهٔ روغن را به صورت مقابل رسم می‌کنیم و چون نیروی وارد بر قطرهٔ روغن رو به صفحهٔ مثبت است، نتیجه می‌گیریم که بار آن منفی است، در نتیجه الکترون جذب کرده است (گزینه‌های (۲) و (۴) رد می‌شود.)



گام دوم: برای این‌که قطرهٔ روغن به صورت معلق قرار بگیرد باید نیروی خالص وارد بر آن صفر باشد یعنی:

$$|\vec{F}|=|\overrightarrow{mg}|\Rightarrow E|q|=mg\Rightarrow 1/25\times10^{5}\times|q|=1/2\times10^{-14}\times10\Rightarrow|q|=9/6\times10^{-19}\,C$$

$$q=ne\Rightarrow 9/6\times10^{-19}=n\times1/6\times10^{-19}\Rightarrow n=6$$

تیزبازی در حل سؤالاتی که اعداد اعشاری و توان‌های ده دهی زیاد دارند، نیم‌نگاهی به گزینه‌ها داشته باشید، اگر اعداد گزینه‌ها طوری بود که از لحاظ ارزش مکانی ارقام، متفاوت نبودند و رقم‌ها در گزینه‌ها متفاوت بود، می‌توانید در محاسباتی که ضرب و تقسیم دارند صفرها، توان‌های ۱۰ و اعشارها را در نظر نگیرید. در نهایت عددی که به دست می‌آید ممکن است، دقیقاً همان‌طور یا با ارزش مکانی مختلف در گزینه‌ها یافت شود.

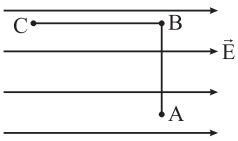
$$F=mg\Rightarrow E|q|=mg\Rightarrow Ene=mg$$

$$n=\frac{mg}{Ee}=\frac{1/2\times10^{-14}}{1/25\times10^{5}\times1/6\times10^{-19}}\Rightarrow\frac{\overset{3}{\cancel{12}}}{125\times\underset{4}{\cancel{16}}}=\frac{3}{500}\Rightarrow\frac{3}{5}=0/6$$

عدد ۶ در گزینه‌ها درست است.

سنجش کلاد
www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshClouds

۵۱ در شکل مقابل، بار $q = -5\mu C$ را در میدان الکتریکی یکنواخت $8\times10^{5}\ N/C$، نخست از نقطهٔ A تا نقطهٔ B و سپس تا نقطهٔ C جابه‌جا می‌کنیم. اگر $AB = 30\ cm$ و $BC = 40\ cm$ باشد، کاری که نیروی الکتریکی در این جابه‌جایی انجام می‌دهد، چند ژول است؟



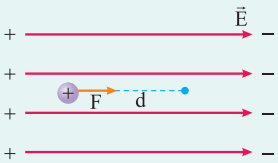
۱) ۲
۲) ۱/۶
۳) −۲
۴) −۱/۶

Hint

کار هر یک از مسیرهای AB و BC را با رابطهٔ $W = E|q|d\cos\theta$ محاسبه کنید؛ سپس برای به دست آوردن کار کل میدان الکتریکی، آن‌ها را با هم جمع جبری کنید.

درس Box

همان‌طورکه قبلاً گفتیم اگر بار الکتریکی q_0 درون میدان الکتریکی یکنواخت قرار بگیرد، این میدان بر بار q_0 نیرو وارد می‌کند. حال اگر این بار الکتریکی در اثر نیروی میدان جابه‌جا شود؛ می‌توانیم کار انجام‌شده توسط میدان را به صورت زیر محاسبه کنیم:



$$W_{\text{میدان}} = E|q_0|d\cos\theta$$

W: کار میدان الکتریکی (J)　　E: میدان الکتریکی (N/C)

q_0 : بار الکتریکی (C)　　d : جابه‌جایی (m)

پاسخ خیلی تشریحی

کار را در دو مسیر AB و BC از رابطهٔ زیر محاسبه کرده و سپس با هم جمع می‌کنیم.

دقت کنید در مسیر AB زاویهٔ بین بردار نیرو و جابه‌جایی ۹۰ درجه بوده و در نتیجه کار صفر است.

$$W_{\text{میدان}} = E|q|d\cos\theta$$

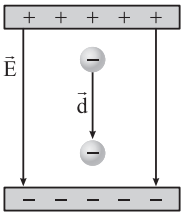
$$W_{\text{کل میدان}} = W_{AB} + W_{BC} \Rightarrow W_{\text{کل میدان}} = \overset{0}{\cancel{W_{AB}}} + 8\times10^{5}\times5\times10^{-6}\times40\times10^{-2}\times1$$

$$W_{\text{میدان}} = 1/6\,J$$

کار انجام‌شده توسط میدان مثبت است، زیرا در مسیر BC، نیروی وارد بر بار q و بردار جابه‌جایی آن، هر دو به سمت چپ (هم‌جهت) هستند.

سنجش کلاد
www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshClouds

۵۲ مطابق شکل مقابل، یک ذره با بار منفی را در جهت خطوط میدان الکتریکی جابه‌جا می‌کنیم. چه تعداد از عبارت‌های زیر دربارهٔ جابه‌جایی این ذره، درست هستند؟



الف) کار میدان الکتریکی منفی است.

ب) کار عامل خارجی مثبت است.

پ) انرژی پتانسیل الکتریکی ذره، افزایش می‌یابد.

ت) پتانسیل الکتریکی، کاهش می‌یابد.

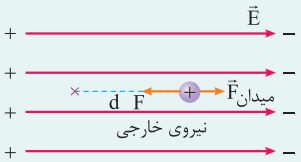
۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

درس Box

اگر بار الکتریکی q_0 را درون میدان الکتریکی یکنواخت با نیرویی هم‌اندازه با نیروی الکتریکی میدان، اما در خلاف جهت آن جابه‌جا کنیم، برای این جابه‌جایی کار انجام داده‌ایم که از رابطهٔ زیر قابل محاسبه است:

$$|\vec{F}_{\text{نیروی خارجی}}| = |\vec{F}_{\text{میدان}}| = |\vec{E}|\,|q_0|$$

$$W_{\text{نیروی خارجی}} = |\vec{E}|\,|q_0|\,|\vec{d}\cos\theta$$



$W_{\text{نیروی خارجی}}$: کار نیروی خارجی (J) — E: میدان الکتریکی (N/C)

q_0: بار الکتریکی (C) — d: جابه‌جایی (m)

θ: زاویه بین نیرو و جابه‌جایی $\Leftarrow$

$0^\circ < \theta < 90^\circ \xrightarrow{\cos\theta > 0} W > 0$

$90^\circ < \theta < 180^\circ \xrightarrow{\cos\theta < 0} W < 0$

تغییرات انرژی پتانسیل الکتریکی:

اگر یک بار الکتریکی درون یک میدان الکتریکی یکنواخت جابه‌جا شود (توسط نیروی الکتریکی و یا توسط نیروی خارجی) روی آن کار انجام می‌شود و اندازهٔ این کار برابر با اندازهٔ تغییرات انرژی پتانسیل بار است.

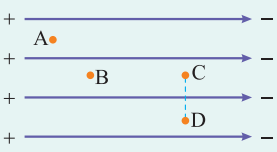
اگر بار الکتریکی در جهت تمایل خود در میدان جابه‌جا شود $\Delta U < 0$ و اگر بار الکتریکی در خلاف جهت تمایل خود در میدان جابه‌جا شود $\Delta U > 0$ است. $|\Delta U| = |W|$

بار الکتریکی منفی:
- در جهت میدان حرکت کند. $\Delta U > 0$
- خلاف جهت میدان حرکت کند. $\Delta U < 0$

بار الکتریکی مثبت:
- در جهت میدان حرکت کند. $\Delta U < 0$
- خلاف جهت میدان حرکت کند. $\Delta U > 0$

پتانسیل الکتریکی:

این کمیت از ویژگی‌های میدان الکتریکی است و ارتباطی به حضور یا عدم حضور بار الکتریکی درون میدان ندارد. به طوری که درون میدان، پتانسیل الکتریکی در نزدیکی صفحهٔ مثبت بیشتر از پتانسیل در نزدیکی صفحهٔ منفی است؛ پس با حرکت در جهت میدان پتانسیل کاهش می‌یابد و بالعکس، با حرکت در خلاف جهت میدان پتانسیل افزایش می‌یابد.



$$V_A > V_B > V_C = V_D$$

دقت کنید که در یک راستای عمود بر میدان، پتانسیل الکتریکی ثابت می‌ماند.

پاسخ خیلی تشریحی ✔

بررسی موارد:

الف) درست. نیروی وارد بر بار از طرف میدان الکتریکی رو به بالا و جهت حرکت رو به پایین است. $(\theta = 180^\circ ,\ \cos 180^\circ = -1)$

ب) درست. نیروی خارجی وارد بر بار رو به پایین و جهت حرکت بار نیز رو به پایین است. $(\theta = 0^\circ ,\ \cos 0^\circ = 1)$

پ) درست. از آن‌جا که بار الکتریکی در خلاف جهت تمایل خود حرکت می‌کند. $(\Delta U > 0)$

ت) درست. هر چه درون میدان به صفحهٔ منفی نزدیک شویم، پتانسیل الکتریکی کاهش می‌یابد.

سنجش کلاد
www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshClouds

۵۳ اختلاف پتانسیل الکتریکی پایانه‌های باتری خودرو برابر ۱۲V است. اگر بار الکتریکی ۴۸− کولن از پایانهٔ منفی به پایانهٔ مثبت باتری جابه‌جا شود، انرژی پتانسیل الکتریکی آن چند ژول و چگونه تغییر می‌کند؟

۱) ۵۷۶، افزایش می‌یابد.
۲) ۵۷۶، کاهش می‌یابد.
۳) ۴، افزایش می‌یابد.
۴) ۴، کاهش می‌یابد.

Hint با استفاده از رابطه $\Delta U = \Delta V.q$ تغییرات انرژی پتانسیل را محاسبه کنید.

درس Box

اختلاف پتانسیل الکتریکی:

اگر بار الکتریکی q در میدان الکتریکی از نقطه (۱) به (۲) منتقل شود و انرژی پتانسیل آن از U_1 به U_2 برسد، اختلاف پتانسیل الکتریکی دو نقطهٔ (۱) و (۲) از رابطهٔ زیر قابل محاسبه است:

$$V_2 - V_1 = \frac{U_2 - U_1}{q} \Rightarrow \Delta V = \frac{\Delta U}{q}$$

ΔV: اختلاف پتانسیل دو نقطه (V)
ΔU: تغییرات انرژی پتانسیل الکتریکی (J)
q: بار الکتریکی (C) (لزوماً با علامتش باید لحاظ شود.)

تذکر: اختلاف پتانسیل پایانه‌های یک باتری $V_+ - V_-$ است.

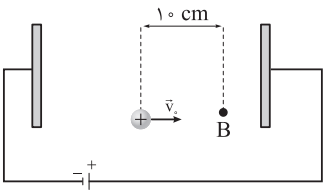
پاسخ خیلی تشریحی ✔

$\Delta U = \Delta V.q \Rightarrow \Delta U = ۱۲ \times (-۴۸) = -۵۷۶\ J \Rightarrow \Delta U < ۰$ کاهش می‌یابد.

دقت کنید چون بار از پایانهٔ منفی به پایانهٔ مثبت منتقل شده است $\Delta V = V_+ - V_-$ که همان اختلاف پتانسیل دو سر باتری است. اما اگر بار الکتریکی از پایانهٔ مثبت به پایانهٔ منفی منتقل می‌شد $\Delta V = V_- - V_+ = -۱۲$ باید لحاظ می‌شد.

سنجش کلاد
www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshClouds

۵۴ در شکل مقابل، اندازهٔ میدان الکتریکی یکنواخت بین دو صفحه برابر $۲/۰\times۱۰^{۳}\ N/C$ است. پروتونی از نقطهٔ **A** با سرعت $\vec{v}_{۰}$ در خلاف جهت میدان الکتریکی پرتاب شده است و سرانجام در نقطهٔ **B** متوقف می‌شود. اگر بار پروتون $۱/۶\times۱۰^{-۱۹}\ C$ و جرم آن $۱/۶\times۱۰^{-۲۷}\ kg$ باشد، تندی پرتاب پروتون ($v_{۰}$) چند متر بر ثانیه است؟ (از وزن پروتون و مقاومت هوا چشم‌پوشی شود.)



۱) $۱۰^{۴}$
۲) ۲×۱۰^{۴}
۳) $۱۰^{۵}$
۴) ۲×۱۰^{۵}

Hint

ابتدا با استفاده از رابطهٔ $\Delta U=-Eqd\cos\theta$، تغییرات انرژی پتانسیل الکتریکی را به دست آورید، سپس با توجه به پایستگی انرژی مکانیکی، $\Delta U=-\Delta K$ را قرار دهید تا $v_{۰}$ را به دست آورید.

درس Box

بر طبق اصل پایستگی انرژی، اندازهٔ تغییرات انرژی پتانسیل و انرژی جنبشی با یکدیگر برابر و علامت آن‌ها قرینهٔ یکدیگر است.

پاسخ خیلی تشریحی

$$\Delta U=-W=-E|q|d\cos\theta$$

$$\Delta U=-۲\times۱۰^{۳}\times۱/۶\times۱۰^{-۱۹}\times۱۰\times۱۰^{-۲}\times-۱=+۳/۲\times۱۰^{-۱۷}\ J$$

$$\Delta K=-\Delta U\ \Rightarrow\ \frac{۱}{۲}m(۰-v_{۰}^{۲})=-۳/۲\times۱۰^{-۱۷}\ J$$

$$-\frac{۱}{۲}\times۱/۶\times۱۰^{-۲۷}\times v_{۰}^{۲}=-۳/۲\times۱۰^{-۱۷}\ \Rightarrow\ v_{۰}^{۲}=۴\times۱۰^{۱۰}\ \Rightarrow\ v_{۰}=۲\times۱۰^{۵}\ m/s$$

سنجش کلاد
www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshClouds

۵۵ ذره‌ای به جرم $۴\mu g$ و بار $۶nC$، در یک میدان الکتریکی از نقطهٔ **A** به پتانسیل الکتریکی $V_A = ۴۰V$ تا نقطهٔ **B** به پتانسیل الکتریکی V_B، فقط تحت تأثیر میدان الکتریکی جابه‌جا می‌شود و تندی آن از $۴m/s$ به $۸m/s$ می‌رسد. V_B چند ولت است؟

۱) ۲۴
۲) ۱۶
۳) -۱۶
۴) -۲۴

Hint ابتدا از رابطهٔ $\Delta K = \frac{۱}{۲}m(V_۲^۲ - V_۱^۲)$، تغییرات انرژی جنبشی و در نتیجه ΔU را محاسبه کنید؛ سپس آن را در رابطهٔ $\Delta V = \frac{\Delta U}{q}$ قرار دهید تا پتانسیل الکتریکی نقطهٔ B را به دست آورید.

پاسخ خیلی تشریحی **گام اول:** ابتدا تغییرات انرژی پتانسیل الکتریکی را محاسبه می‌کنیم.

$$\Delta K = -\Delta U \Rightarrow \Delta U = -\frac{۱}{۲}m(V_B^۲ - V_A^۲)$$

$$\Delta U = -\frac{۱}{۲}\times ۴\times ۱۰^{-۹}(۶۴-۱۶) = -۹۶\times ۱۰^{-۹}\,J$$

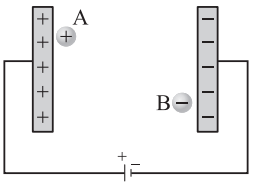
گام دوم: سپس از رابطهٔ زیر، اختلاف پتانسیل بین دو نقطهٔ A و B و در نهایت پتانسیلِ نقطهٔ B به دست می‌آید.

$$\Delta V = \frac{\Delta U}{q} \Rightarrow V_B - V_A = \frac{\Delta U}{q}$$

$$V_B - ۴۰ = \frac{-۹۶\times ۱۰^{-۹}}{۶\times ۱۰^{-۹}} \Rightarrow V_B - ۴۰ = -۱۶ \Rightarrow V_B = +۲۴V$$

سنجش کلاد
www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshClouds

۵۶ مطابق شکل مقابل، ذرهٔ **A** با بار $q_A = +|q|$ و جرم $m_A = m$ را از نزدیکی صفحهٔ مثبت و ذرهٔ **B** با بار $q_B = -|q|$ و جرم $m_B = ۴m$ را از نزدیکی صفحهٔ منفی، رها می‌کنیم تا در نهایت به صفحهٔ مقابلشان برسند. اگر کار میدان الکتریکی روی این دو ذره به ترتیب W_A و W_B و تندی آن‌ها در لحظهٔ رسیدن به صفحهٔ مقابلشان V_A و V_B باشد، کدام گزینه درست است؟ (از اثر مقاومت هوا و نیروی وزن صرف نظر کنید.)



۱) $V_B = V_A$ ، $W_A = W_B$

۲) $V_A = ۲V_B$ ، $W_A = W_B$

۳) $V_A = V_B$ ، $W_A = -W_B$

۴) $V_A = ۲V_B$ ، $W_A = -W_B$

Hint

با توجه به قضیهٔ کار و انرژی جنبشی، تغییرات انرژی جنبشی دو ذرهٔ A و B را برابر قرار دهید، $(\Delta K_A = \Delta K_B)$ تا نسبت تندی آن‌ها را به دست آورید.

پاسخ خیلی تشریحی ✔

چون اندازهٔ دو بار یکسان، میدان الکتریکی یکنواخت و جابه‌جایی هر دو بار فاصلهٔ بین دو صفحه است و برای هر دو بار، نیرو و بردار جابه‌جایی هم‌جهت هستند $(\theta = ۰^\circ)$، کار میدان الکتریکی روی دو ذرهٔ A و B با هم برابر است. (گزینه‌های (۳) و (۴) رد می‌شوند)

$$W_A = W_B = E|q|d\cos\theta$$

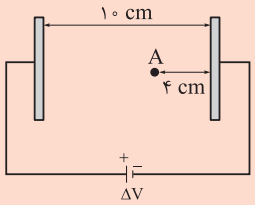
به دلیل برابربودن کار میدان روی دو ذره، اندازهٔ تغییرات انرژی پتانسیل الکتریکی و در نتیجه اندازهٔ تغییرات انرژی جنبشی آن‌ها نیز با یکدیگر برابر خواهد بود.

$$\Delta K_A = \Delta K_B \Rightarrow \frac{۱}{۲}m(V_A^۲ - ۰) = \frac{۱}{۲}(۴m)(V_B^۲ - ۰)$$

$$V_A^۲ = ۴V_B^۲ \Rightarrow V_A = ۲V_B$$

سنجش کلاد
www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshClouds

۵۷ در شکل مقابل، ذره‌ای با بار الکتریکی $q = -50\mu C$ را در نقطهٔ A رها می‌کنیم تا در نهایت به یکی از صفحه‌های باردار برخورد کند. اگر در طی این جابه‌جایی انرژی پتانسیل الکتریکی ذره $3mJ$ تغییر کند، اختلاف پتانسیل الکتریکی بین دو صفحه چند ولت است؟ (از اثر وزن ذره صرف نظر کنید.)



۱) ۴۰
۲) ۶۰
۳) ۱۰۰
۴) ۱۲۰

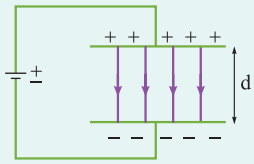
Hint

ابتدا از رابطهٔ $\Delta V = \frac{\Delta U}{q}$ اختلاف پتانسیل بین نقطهٔ A و صفحهٔ مثبت را به دست آورید، سپس با توجه به رابطهٔ $\Delta V = Ed$، اندازهٔ میدان بین دو صفحه را برابر با اندازهٔ میدان بین نقطهٔ A و صفحهٔ مثبت قرار دهید تا اختلاف پتانسیل دو صفحه به دست آید.

$$\frac{\Delta V_{\text{دو صفحه}}}{d_{\text{دو صفحه}}} = \frac{\Delta V_{A,+}}{d_{A,+}}$$

درس Box

بزرگی میدان الکتریکی یکنواخت بین دو صفحهٔ فلزی موازی که به یک باتری با پتانسیل V متصل هستند، از رابطهٔ زیر به دست می‌آید.



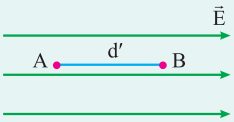
$$E = \frac{V}{d}$$

E : میدان الکتریکی (N/C)

V : اختلاف پتانسیل بین دو صفحه (V)

d : فاصلهٔ بین دو صفحه (m)

دقت داشته باشید چون درون یک میدان الکتریکی یکنواخت، اندازهٔ میدان در همهٔ نقاط با هم برابر است، اگر اندازهٔ اختلاف پتانسیل دو نقطهٔ A و B مطابق شکل برابر $|\Delta V_{AB}|$ باشد، بزرگی میدان الکتریکی یکنواخت موجود در فضا برابر است با:



$$E = \frac{|\Delta V_{AB}|}{d'}$$

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: همان‌طور که می‌دانیم، اگر بار $q = -50\mu C$ را از نقطهٔ A رها کنیم به سمت صفحهٔ مثبت حرکت می‌کند؛ بنابراین ابتدا اختلاف پتانسیل بین نقطهٔ A و صفحهٔ مثبت را به دست می‌آوریم:

$$\Delta V' = \frac{\Delta U}{q} \Rightarrow \Delta V' = \frac{-3\times10^{-3}}{-50\times10^{-6}} \Rightarrow \Delta V' = 60V$$

گام دوم: میدان الکتریکی یکنواخت بین دو صفحه را در دو حالت محاسبه می‌کنیم، یکبار بین نقطهٔ A تا صفحه مثبت و بار دیگر بین دو صفحه که قطعاً در هر دو حالت با هم برابر هستند:

$$E = \frac{|\Delta V'|}{d'} = \frac{60}{6\times10^{-2}} = 10^3 N/C$$

$$E = \frac{|\Delta V|}{d} \Rightarrow \frac{\Delta V}{10^{-1}} = 10^3 \Rightarrow \Delta V = 100\,V$$

تیزبازی

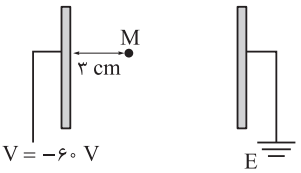
از آن‌جا که میدان الکتریکی یکنواخت و در همه‌جا یکسان است، در گام دوم می‌توانیم برای به دست آوردن اختلاف پتانسیل دو صفحه از تناسب زیر استفاده کنیم:

$$\frac{60}{6} = \frac{\Delta V}{10} \Rightarrow \Delta V = 100V$$

دقت کنید با توجه به گزینه‌ها می‌توانستیم صفرها و اعشارها را نیز حذف کنیم!

سنجش کلاد
www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshClouds

۵۸ در شکل روبه‌رو، در فضای بین دو صفحهٔ رسانای موازی، میدان الکتریکی یکنواخت $E = ۵۰۰\ N/C$ ایجاد شده است. به ترتیب، فاصلهٔ بین دو صفحه چند سانتی‌متر و پتانسیل الکتریکی نقطهٔ M چند ولت است؟



۱) ۱۲ و ۴۵−
۲) ۱۲ و ۱۵−
۳) ۶ و ۴۵−
۴) ۶ و ۱۵−

Hint

ابتدا از رابطهٔ $E = \frac{\Delta V}{d}$، فاصلهٔ دو صفحه را به دست آورید؛ سپس چون میدان بین دو صفحه در همه جا یکسان است از همین رابطه می‌توانید اختلاف پتانسیل نقطهٔ M و صفحهٔ سمت چپ را حساب کنید و در آخر با تشخیص این‌که پتانسیل نقطهٔ M بیشتر از صفحه سمت چپ است، گزینهٔ درست را انتخاب کنید.

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: صفحهٔ سمت راست به زمین متصل است، بنابراین پتانسیل آن صفر است، پس اختلاف پتانسیل بین دو صفحه ۶۰V بوده و می‌توانیم فاصلهٔ بین دو صفحه را به دست آوریم:

$$E = \frac{\Delta V}{d} \Rightarrow ۵۰۰ = \frac{۶۰}{d} \Rightarrow d = ۱۲\times۱۰^{-۲}\,m = ۱۲cm$$

گام دوم: با توجه به این‌که میدان الکتریکی یکنواخت است، رابطهٔ آن را بین نقطهٔ M و صفحه با پتانسیل $-۶۰V$ به صورت زیر می‌نویسیم.

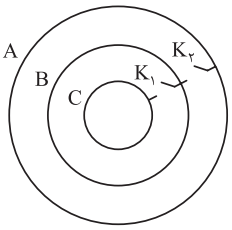
$$|\Delta V| = Ed \Rightarrow |\Delta V| = ۵۰۰\times۳\times۱۰^{-۲} = ۱۵V$$

گام سوم: از آن‌جایی‌که بار صفحهٔ سمت راست مثبت‌تر از صفحهٔ سمت چپ است؛ هر چه به صفحهٔ سمت چپ نزدیک می‌شویم پتانسیل کاهش می‌یابد؛ بنابراین پتانسیل نقطهٔ M، ۱۵V بیشتر از پتانسیل صفحه سمت چپ است:

$$V_M = -۶۰ + ۱۵ = -۴۵V$$

سنجش کلاد
www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshClouds

۵۹ در شکل مقابل، سه پوستهٔ کروی و رسانای **A**، **B** و **C**، دارای بارهای الکتریکی $q_A = 10\mu C$ ، $q_B = -4\mu C$ و $q_C = 5\mu C$ هستند. ابتدا کلید K_2 را بسته و سپس باز می‌کنیم و در ادامه کلید K_1 را می‌بندیم. بار الکتریکی نهایی کره‌های **A**، **B** و **C** به ترتیب از راست به چپ، برحسب میکروکولن، کدام است؟



۱) ۶ ـ ۵ ـ صفر

۲) ۳ ـ ۳/۵ ـ ۳/۵

۳) ۱۱ ـ صفر ـ صفر

۴) ۶ ـ ۲/۵ ـ ۲/۵

Hint

مرحله‌به‌مرحله تغییرات را حساب کنید، دقت کنید که نحوهٔ توزیع بار در اجسام رسانا چگونه رخ می‌دهد.

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: توجه کنید که بار در اجسام رسانا، در خارجی‌ترین پوسته توزیع می‌شود. با بستن کلید K_2، بار پوستهٔ **B** برابر صفر و بار پوستهٔ **A** برابر با $10 - 4 = 6\mu C$ خواهد شد.

گام دوم: کلید K_2 قطع شده است، پس بار پوستهٔ **A** همان $6\mu C$ می‌ماند؛ با وصل‌کردن کلید K_1، مشابه حالت اول، بار **B** برابر با $5 + 0 = 5\mu C$ و بار **C** صفر خواهد شد.

سنجش کلاد
www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshClouds

۶۰ یک ماهواره به صورت مکعبی فلزی به ضلع $50cm$ است. اگر این ماهواره در اثر عبور از یکی از لایه‌های جو زمین دارای بار الکتریکی شده و اندازهٔ چگالی سطحی بار الکتریکی روی سطح آن $4\frac{nC}{cm^2}$ باشد، اندازهٔ بار موجود در سطح این ماهواره، چند میکروکولن است؟ (از تجمع بار بر روی لبه‌ها چشم‌پوشی شود.)

۱) ۱ ۲) ۱۰ ۳) ۶ ۴) ۶۰

Hint

ابتدا مساحت هر وجه مکعب را حساب کنید و چون مکعب ۶ وجه دارد، آن را در ۶ ضرب کنید تا مساحت کل مکعب به دست آید. سپس از رابطهٔ $\sigma = \frac{Q}{A}$ اندازهٔ بار الکتریکی موجود در سطح ماهواره را به دست آورید.

درس Box

اگر مساحت سطحی که بار روی آن توزیع شده است برابر A و بار الکتریکی موجود در آن سطح برابر Q باشد چگالی سطحی بار که با نماد σ نشان داده می‌شود از رابطهٔ زیر به دست می‌آید:

$$\sigma = \frac{Q}{A}$$

σ: چگالی سطحی بار (C/m^2)

Q: بار الکتریکی (C)

A: مساحت (m^2)

پاسخ خیلی تشریحی

$$A = 6\times(50\times10^{-2})^2 = 6\times2500\times10^{-4} = 1/5m^2$$

$$\sigma = \frac{Q}{A} \Rightarrow 4\times10^{-5} = \frac{Q}{1/5} \Rightarrow Q = 6\times10^{-5}C = 60\,\mu C$$

سنجش کلاد
www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshClouds

شیمی یازدهم

۶۱ کدام عدد اتمی مربوط به عنصری از دستهٔ **d** جدول تناوبی است؟

۱) ۳۷ ۲) ۴۸ ۳) ۳۱ ۴) ۲۰

درس Box

عنصرهای دستهٔ d در دوره‌های ۴ تا ۷ و گروه‌های ۳ تا ۱۲ جدول دوره‌ای قرار دارند. در هر یک از این دوره‌ها، ۱۰ عنصر دستهٔ d وجود دارد که عدد اتمی آن‌ها در جدول زیر آورده شده است:

شمارهٔ دوره	عدد اتمی عنصرهای دستهٔ d (فلزهای واسطه)
۴	۲۱ ـ ۳۰
۵	۳۹ ـ ۴۸
۶	۷۱ ـ ۸۰
۷	۱۰۳ ـ ۱۱۲

دقت کنید عدد اتمی اولین عنصر دستهٔ d در دوره‌های چهارم و پنجم، ۳ واحد از گاز نجیب قبل خود و ($_{18}Ar$ و $_{36}Kr$) بیشتر است، اما با توجه به این‌که عنصرهایی با عددهای اتمی ۵۷ تا ۷۰ و ۸۹ تا ۱۰۲ در دو ردیف پایین جدول قرار گرفته‌اند، عدد اتمی نخستین عنصر دستهٔ d دوره‌های ششم و هفتم به ترتیب برابر با ۷۱ و ۱۰۳ است. در ضمن با توجه به این‌که آخرین عنصر دستهٔ d هر دوره، در گروه ۱۲ قرار دارد، عدد اتمی آخرین عنصر دستهٔ d دوره‌های ۴ تا ۷، ۶ واحد کم‌تر از گاز نجیب همان دوره است.

پاسخ خیلی تشریحی ✔

عنصری با عدد اتمی ۴۸، آخرین عنصر دستهٔ d دورهٔ پنجم است، زیرا عدد اتمی آن ۶ واحد کم‌تر از گاز نجیب دورهٔ پنجم ($_{54}Xe$) می‌باشد و در گروه ۱۲ قرار دارد.

بررسی سایر گزینه‌ها:

گزینهٔ (۱): عنصری با عدد اتمی ۳۷ در گروه اول جدول دوره‌ای قرار دارد (زیرا عدد اتمی آن، یک واحد بیشتر از گاز نجیب $_{36}Kr$ است) و جزء عنصرهای دستهٔ s است.

گزینهٔ (۳): عنصری با عدد اتمی ۳۱ در گروه ۱۳ جدول قرار دارد (زیرا عدد اتمی آن، ۵ واحد کم‌تر از گاز نجیب $_{36}Kr$ است) و جزء عنصرهای دستهٔ p است.

گزینهٔ (۴): عنصری با عدد اتمی ۲۰ در گروه ۲ جدول قرار دارد (زیرا عدد اتمی آن، ۲ واحد بیشتر از گاز نجیب $_{18}Ar$ است) و جزء عنصرهای دستهٔ s است.

نکته

عنصرهای گروه‌های ۱ و ۲ و هلیم از گروه ۱۸، جزء عنصرهای دستهٔ s و عنصرهای گروه‌های ۱۳ تا ۱۸ (به‌جز هلیم)، جزء عنصرهای دستهٔ p جدول دوره‌ای هستند.

سنجش کلاد
www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshClouds

۶۲ در بین فلزهای قلیایی دوره‌های اول تا چهارم جدول تناوبی، بیشترین شعاع اتمی مربوط به ..... بوده و بیشترین خاصیت نافلزی در گروه ۱۷ مربوط به عنصری است که ..... .

۱) $_{19}K$ ـ در دمای اتاق به آرامی با گاز هیدروژن واکنش می‌دهد

۲) $_{19}K$ ـ در دمای ۷۳ کلوین به سرعت با گاز هیدروژن واکنش می‌دهد

۳) $_{3}Li$ ـ در دمای اتاق به آرامی با گاز هیدروژن واکنش می‌دهد

۴) $_{3}Li$ ـ در دمای ۷۳ کلوین به سرعت با گاز هیدروژن واکنش می‌دهد

نکته

۱) در یک دوره، شعاع اتمی از چپ به راست کاهش و خاصیت نافلزی برخلاف خاصیت فلزی از چپ به راست افزایش می‌یابد. در یک گروه، شعاع اتمی از بالا به پایین افزایش و خاصیت نافلزی برخلاف خاصیت فلزی، از بالا به پایین کاهش می‌یابد.

۲) شرایط واکنش هالوژن‌ها با گاز هیدروژن در جدول زیر آورده شده است:

نام هالوژن	شرایط واکنش با گاز هیدروژن
فلوئور $(_9F)$	حتی در دمای $-200^\circ C$ به سرعت واکنش می‌دهد.
کلر $(_{17}Cl)$	در دمای اتاق به آرامی واکنش می‌دهد.
برم $(_{35}Br)$	در دمای $200^\circ C$ واکنش می‌دهد.
ید $(_{53}I)$	در دمای بالاتر از $400^\circ C$ واکنش می‌دهد.

پاسخ خیلی تشریحی در گروه ۱ بیشترین شعاع اتمی در دورهٔ ۱ تا ۴ مربوط به $_{19}K$ و بیشترین خاصیت نافلزی در گروه ۱۷ مربوط به $_9F$ است که در دمای $-200^\circ C$ یا ۷۳ کلوین به سرعت با گاز هیدروژن واکنش می‌دهد.

سنجش کلاد
www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshClouds

۶۳ با توجه به واکنش‌های زیر، کدام مورد درست است؟

$Fe(OH)_2(s)$

I) $FeCl_2(aq) + 2NaOH(aq) \rightarrow X + 2NaCl(aq)$

$FeCl_3(aq)$

II) $Y + 3NaOH(aq) \rightarrow 3NaCl(aq) + Fe(OH)_3(s)$

Fe

III) $2Fe_2O_3(s) + 3C(s) \rightarrow 4Z(s) + 3CO_2(g)$

۱) حالت فیزیکی ترکیب Y همانند فراورده‌های واکنش (I) بوده و محلول در آب است.

۲) Z یک عنصر است و آرایش الکترونی اتم آن به زیرلایه‌ای با گنجایش ۱۰ الکترون ختم می‌شود.

۳) رنگ فراوردهٔ نامحلول واکنش (II)، طول موج بلندتری نسبت به رنگ محلول کلردار واکنش‌دهندهٔ این واکنش دارد.

۴) نسبت شمار آنیون به کاتیون در ترکیب X، همانند نسبت شمار کاتیون به آنیون در واکنش‌دهندهٔ اکسیژن‌دار واکنش (III) است.

پاسخ خیلی تشریحی ✔

در واکنش‌های (I) تا (III)، X، Y و Z به ترتیب $Fe(OH)_2(s)$، $FeCl_3(aq)$ و $Fe(s)$ هستند. $Fe(OH)_2$ و $Fe(OH)_3$ دو مادهٔ نامحلول در آب به رنگ‌های سبز و قرمز آجری هستند و محلول دو مادهٔ $FeCl_2$ و $FeCl_3$ به ترتیب به رنگ سبز و زرد است. طول موج رنگ قرمز از طول موج رنگ زرد بلندتر است.

بررسی سایر گزینه‌ها:

گزینهٔ (۱): در واکنش (I) حالت فیزیکی X یا همان $Fe(OH)_2$، جامد و رسوب است.

گزینهٔ (۲): آرایش الکترونی عنصر Z($_{26}Fe$) به صورت $[_{18}Ar]3d^6 4s^2$ است که به زیرلایهٔ 4s با گنجایش دو الکترون ختم می‌شود.

گول نخوری ✘ در عناصر دستهٔ d، آخرین الکترون به زیرلایهٔ d وارد می‌شود، ولی آرایش الکترونی این عناصر به زیرلایهٔ ns ختم می‌شود.

گزینهٔ (۴): نسبت شمار آنیون به کاتیون در $Fe(OH)_2$ برابر $\frac{2}{1}$ است، اما نسبت شمار کاتیون به آنیون در Fe_2O_3 برابر $\frac{2}{3}$ است.

سنجش کلاد
www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshClouds

$CaCO_3$

۶۴ اگر در نمونه‌ای ناخالص از کلسیم کربنات به جرم ۲۵۰ گرم، ۳۶ گرم کلسیم وجود داشته باشد، درصد خلوص این نمونه کدام است و اگر به این نمونه، ۱۶۰ گرم کلسیم کربنات با خلوص ۳۷/۵٪ اضافه کنیم، به تقریب چند درصد جرم نمونهٔ نهایی را ناخالصی تشکیل می‌دهد؟ (در ناخالصی‌ها، کلسیم وجود ندارد و $Ca=40, O=16, C=12 : g.mol^{-1}$)

۱) ۹۰ ـ ۳۷

۲) ۳۶ ـ ۶۳

۳) ۹۰ ـ ۶۳

۴) ۳۶ ـ ۳۷

Hint

با توجه به جرم کلسیم، در نمونهٔ اولیه، جرم خالص کلسیم کربنات و سپس درصد خلوص آن را محاسبه می‌کنیم. برای قسمت دوم سؤال، باید جرم ناخالصی‌ها را در دو نمونه حساب کرده و در نهایت، درصد آن را در مخلوط نهایی محاسبه کنیم.

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: به دست آوردن جرم کلسیم کربنات با توجه به میزان کلسیم:

$$36\,g\,Ca \times \frac{1\,mol\,Ca}{40\,g\,Ca} \times \frac{1\,mol\,CaCO_3}{1\,mol\,Ca} \times \frac{100\,g\,CaCO_3}{1\,mol\,CaCO_3} = 90\,g\,CaCO_3\ (\text{خالص})$$

گام دوم: با توجه به فرمول درصد خلوص داریم:

$$\text{درصدخلوص} = \frac{\text{جرم مادهٔ خالص}}{\text{جرم مادهٔ ناخالص}} \times 100 = \frac{90}{250} \times 100 = 36\%$$

گام سوم: با توجه به جرم نمونهٔ ثانویه و درصد خلوص آن داریم:

$$37/5 = \frac{\text{جرم خالص نمونهٔ ۲}}{160} \times 100 \Rightarrow \text{جرم خالص نمونهٔ ۲} = \frac{160 \times 37/5}{100} = 160 \times \frac{3}{8} = 60\,g \text{ مادهٔ خالص}$$

$$\text{جرم ناخالصی نمونهٔ ۲} = \text{جرم کل نمونهٔ ۲} - \text{جرم مادهٔ خالص} = 160 - 60 = 100\,g$$

گام چهارم: با توجه به جرم دو نمونه، جرم ناخالص دو نمونه را محاسبه و درصد آن را به دست می‌آوریم:

$$\text{جرم ناخالص نمونهٔ ۱} = 250 - (250 \times \frac{36}{100}) = 160\,g \Rightarrow \text{مجموع جرم ناخالصی‌ها} = 160 + 100 = 260\,g$$

$$\Rightarrow \text{درصد ناخالصی در نمونهٔ نهایی} = \frac{\text{مجموع جرم ناخالصی‌ها}}{\text{جرم نمونهٔ نهایی}} \times 100 = \frac{260}{250+160} \times 100 \simeq 63\%$$

سنجش کلاد
www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshClouds

۶۵ کدام عبارت دربارهٔ عنصری که آرایش لایهٔ ظرفیت آن به ns^2np^2 ختم می‌شود، درست است؟

گروه ۱۴

۱) اگر شمار الکترون‌های با $l=2$ آن برابر اتم مس باشد، این عنصر رسانایی کم‌تری نسبت به عناصر هم‌گروهی پایین‌تر از خود دارد.

۳d

۲) اگر سطح براق و درخشانی داشته باشد، به طور حتم چکش‌خواری و رسانایی خوبی نیز دارد.

فلز یا شبه فلز

۳) اگر در واکنش با سایر عناصر، الکترون به اشتراک بگذارد، به طور حتم، $n<4$ خواهد بود.

فلز یا نافلز

۴) اگر کاتیون پایدار تشکیل دهد، عدد اتمی آن می‌تواند برابر ۵۲ باشد.

فلز

نکته آرایش لایهٔ ظرفیت عنصرهای گروه ۱۴ به ns^2np^2 ختم می‌شود. این گروه شامل عناصر $_{6}C$ (نافلز)، $_{14}Si$ و $_{32}Ge$ (شبه‌فلز) و $_{50}Sn$، $_{82}Pb$ و $_{114}Fl$ (فلز) است.

پاسخ خیلی تشریحی شمار الکترون‌های با $l=2$ در مس $(_{29}Cu)$ مطابق آرایش الکترونی فشردهٔ آن، $_{29}Cu:[_{18}Ar]3d^{10}4s^1$، برابر ۱۰ است که این شمار الکترون، در $_{32}Ge$ که هم‌دورهٔ مس است، نیز وجود دارد:

$$_{32}Ge:[_{18}Ar]3d^{10}4s^24p^2$$

با توجه به این‌که $_{32}Ge$ شبه‌فلز و نیمه‌رسانا است و عناصر پایین آن فلز هستند، گزینهٔ (۱) کاملاً درست است.

بررسی سایر گزینه‌ها:

گزینهٔ (۲): شبه‌فلزها همانند فلزها سطح درخشان دارند، اما چکش‌خوار نیستند و در اثر ضربه خرد می‌شوند.

گزینهٔ (۳): کربن، سیلیسیم و ژرمانیم در واکنش با سایر عناصر الکترون به اشتراک می‌گذارند و یون پایدار تک‌اتمی تشکیل نمی‌دهند. در $_{32}Ge$، آرایش الکترونی لایهٔ ظرفیت به $4s^24p^2$ ختم می‌شود و $n=4$ است.

گزینهٔ (۴): در گروه ۱۴، دو عنصر قلع و سرب، کاتیون پایدار تشکیل می‌دهند. عدد اتمی این دو عنصر به ترتیب برابر با ۵۰ و ۸۲ است.

سنجش کلاد
www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshClouds

۶۶ با توجه به معادلهٔ داده‌شده، اگر ۱۶۰ گرم هیدرویدیک اسید با مقدار کافی پتاسیم پرمنگنات واکنش دهد و جرم فراوردهٔ اکسیژن‌دار تولیدی برابر ۱/۸ گرم باشد، بازدهٔ درصدی واکنش کدام است؟ $(H=1, O=16, I=127 : g.mol^{-1})$

$KMnO_4(s) + HI(aq) \rightarrow MnI_2(aq) + H_2O(l) + KI(aq) + I_2(s)$ (معادلهٔ واکنش موازنه نشده است.)

۱) ۱۶ ۲) ۳۲ ۳) ۴۰ ۴) ۲۰

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: معادلهٔ موازنهٔ واکنش به صورت زیر است:

$$2KMnO_4 + 16HI \rightarrow 2MnI_2 + 8H_2O + 2KI + 5I_2$$

روش اول:

با توجه به جرم واکنش‌دهنده و فراوردهٔ تولیدی داریم:

$$160\ g\,HI \times \frac{1\ mol\,HI}{128\ g\,HI} \times \frac{8\ mol\,H_2O}{16\ mol\,HI} \times \frac{18\ g\,H_2O}{1\ mol\,H_2O} \times \frac{R}{100} = 1.8\ g\,H_2O$$

$$\Rightarrow R = \frac{128 \times 10 \times 2}{160} = 16$$

روش دوم: کسر تناسب بین HI و H_2O به صورت زیر است:

$$\frac{\text{جرم} \times \frac{\text{بازدهٔ درصدی}}{100}}{\underbrace{\text{جرم مولی} \times \text{ضریب}}_{HI}} = \frac{\text{جرم}}{\underbrace{\text{جرم مولی} \times \text{ضریب}}_{H_2O}} \Rightarrow \frac{160 \times R}{100 \times 128 \times 16} = \frac{1.8}{18 \times 8} \Rightarrow R = \frac{128 \times 2}{16} = 16$$

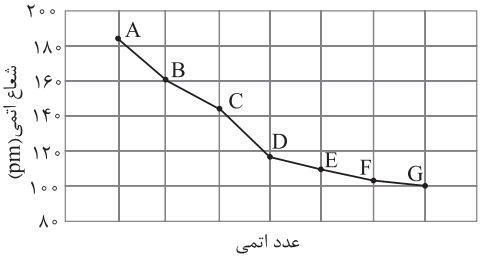
تیزبازی

در این سؤال نیازی به موازنهٔ کامل واکنش نبوده، زیرا دو ماده‌ای که رابطهٔ استوکیومتری و ضرایب آن‌ها در حل سؤال مهم است، HI و H_2O هستند که با توجه به این‌که H فقط در ساختار این دو ماده وجود دارد، می‌توان نسبت ضریب این دو ماده را فقط با موازنهٔ هیدروژن به دست آورد:

$$2HI \sim H_2O$$

سنجش کلاد
www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshClouds

۶۷ با توجه به نمودار روبه‌رو که مربوط به تغییرات شعاع اتمی عناصر در دورهٔ سوم است، کدام موارد درست است؟



الف) جمع جبری بار یون‌های پایدار عنصرهای مورد نظر برابر صفر است.

ب) حالت فیزیکی عناصر **F** و **G** در دمای اتاق، برخلاف رنگ آن‌ها متفاوت است.

پ) آرایش یون پایدار عنصر **D** همانند عنصر **E** به گاز نجیب آرگون می‌رسد.

ت) عنصر **F** به شکل آزاد در طبیعت یافت می‌شود و اتم آن، ۶ الکترون ظرفیتی دارد.

۱) الف ـ ب
۲) الف ـ ب ـ ت
۳) پ ـ ت
۴) ب ـ پ ـ ت

پاسخ خیلی تشریحی

عبارت‌های «الف»، «ب» و «ت» درست‌اند. با توجه به این‌که در یک دوره از چپ به راست، شعاع اتمی کاهش می‌یابد، عناصر A تا G به ترتیب، Na، Mg، Al، Si، P، S و Cl هستند.

بررسی عبارت‌ها:

الف) یون پایدار عناصر دورهٔ سوم به صورت Na^{+}، Mg^{2+}، Al^{3+}، Si (یون پایدار ندارد)، P^{3-}، S^{2-} و Cl^{-} است که جمع جبری بار آن‌ها برابر صفر است.

ب) در دورهٔ سوم (بدون گاز نجیب) فقط حالت فیزیکی کلر در دمای اتاق، گاز است و بقیهٔ عناصر جامدند. کلر گازی زردرنگ و گوگرد نیز جامدی زردرنگ است.

پ) Si یون پایدار تک‌اتمی ندارد و با اشتراک‌گذاشتن الکترون به گاز نجیب هم‌دوره‌اش ($_{18}Ar$) می‌رسد.

ت) شمار الکترون‌های لایهٔ ظرفیت $_{16}S$ که در گروه ۱۶ قرار دارد، برابر ۶ است و این عنصر به صورت آزاد در طبیعت یافت می‌شود.

سنجش کلاد
www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshClouds

۶۸ در کدام گزینه مقایسهٔ انجام‌شده به نادرستی صورت گرفته است؟

۱) واکنش‌پذیری: $_{29}Cu < _{30}Zn < _{20}Ca$

۲) شعاع اتمی: $_{8}O < _{7}N < _{14}Si$

۳) خصلت نافلزی: $_{7}N > _{14}Si > _{15}P$

۴) خصلت فلزی: $_{11}Na < _{19}K < _{37}Rb$

درس Box

روندهای تناوبی در دسته‌های s و p جدول دوره‌ای

در یک دوره از چپ به راست	در یک گروه از بالا به پایین
شعاع اتمی عنصرها و اختلاف شعاع اتمی دو عنصر متوالی، کاهش می‌یابد.	شعاع اتمی عنصرها افزایش می‌یابد.
خصلت فلزی عنصرها کاهش می‌یابد.	خصلت فلزی عنصرها افزایش می‌یابد.
خصلت نافلزی عنصرها افزایش می‌یابد.	خصلت نافلزی عنصرها کاهش می‌یابد.
واکنش‌پذیری فلزها کاهش می‌یابد.	واکنش‌پذیری فلزها افزایش می‌یابد.
واکنش‌پذیری نافلزها افزایش می‌یابد.	واکنش‌پذیری نافلزها کاهش می‌یابد.

پاسخ خیلی تشریحی ✔

در گزینهٔ (۳)، خاصیت نافلزی $_{15}P$ از $_{14}Si$ بیشتر است، زیرا در یک دوره از چپ به راست خصلت نافلزی عنصرها افزایش می‌یابد.

گول نخوری ✘

توجه کنید در عناصر واسطه لزوماً از چپ به راست، واکنش‌پذیری کاهش یا افزایش نمی‌یابد و واکنش‌پذیری مس (Cu) از روی (Zn) کم‌تر است و اگر حواستون نباشه، همون اول که گزینهٔ (۱) رو می‌خونید، طبق قاعدهٔ کلی به اشتباه گزینهٔ (۱) رو انتخاب می‌کنید.

سنجش کلاد
www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshClouds

۶۹ کدام موارد از مطالب زیر، به یقین درست‌اند؟

$_{35}Br$

الف) اولین هالوژن جدول دوره‌ای که لایهٔ الکترونی چهارم آن اشغال می‌شود، در دمای $250^{\circ}C$ با گاز هیدروژن واکنش می‌دهد.

ب) آرایش الکترونی کاتیون‌های حاصل از فلزهای واسطه به آرایش الکترونی گاز نجیب نمی‌رسند.

پ) بدون در نظرگرفتن گاز نجیب، در عناصر دورهٔ دوم جدول دوره‌ای، بیشترین اختلاف شعاع اتمی بین لیتیم و فلوئور است.

ت) مجموع $(n+l)$ الکترون‌های ظرفیتی عنصر گازی دورهٔ چهارم جدول دوره‌ای برابر ۳۳ است.

$_{36}Kr$

۱) ب ـ ت
۲) الف ـ پ
۳) الف ـ ت
۴) ب ـ پ

عبارت‌های «الف» و «پ» درست‌اند.

بررسی عبارت‌ها:

الف) $_{35}Br$ اولین هالوژنی است که لایهٔ الکترونی چهارم آن از الکترون اشغال می‌شود و چون در دمای $200^{\circ}C$ می‌تواند با گاز H_2 واکنش بدهد؛ بنابراین به یقین در دمای $250^{\circ}C$ نیز می‌تواند واکنش بدهد.

ب) مثلاً آرایش الکترونی $_{21}Sc^{3+}$ به گاز نجیب آرگون می‌رسد.

پ) شعاع اتمی عنصرها از چپ به راست کاهش می‌یابد و بیشترین شعاع اتمی در دورهٔ دوم، مربوط به $_3Li$ و کم‌ترین آن مربوط به $_9F$ است.

ت) عنصر گازی دورهٔ چهارم، $_{36}Kr$ است که مجموع $(n+l)$ الکترون‌های ظرفیتی آن برابر است با:

$$_{36}Kr : [_nAr]3d^{10}\underbrace{4s^2 4p^6}$$

$$(n+l) = [(4+0)\times 2] + [(4+1)\times 6] = 38$$

سنجش کلاد
www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshClouds

۷۰ درستی یا نادرستی عبارت‌های زیر در کدام گزینه، به درستی اشاره شده است؟

الف) آهن (II) اکسید به عنوان رنگ قرمز در نقاشی کاربرد دارد.

ب) از آلومینیم مذاب تولیدشده در فرایند ترمیت برای جوشکاری خطوط ریل راه‌آهن استفاده می‌شود.

پ) از اولین فلز واسطهٔ دورهٔ چهارم، برای تهیهٔ وسایلی مانند تلویزیون رنگی و برخی شیشه‌ها استفاده می‌شود. ← اسکاندیم ($_{21}Sc$)

ت) استخراج فلزهای روی و نیکل از لابه‌لای خاک و گیاه، برخلاف طلا و مس، مقرون‌به‌صرفه نیست.

۱) نادرست ـ نادرست ـ درست ـ نادرست

۲) نادرست ـ درست ـ نادرست ـ نادرست

۳) درست ـ نادرست ـ درست ـ نادرست

۴) نادرست ـ نادرست ـ درست ـ درست

پاسخ خیلی تشریحی

عبارت‌های «الف» و «ب»، نادرست و عبارت‌های «پ» و «ت» درست‌اند.

بررسی عبارت‌ها:

الف) از آهن (III) اکسید به عنوان رنگ قرمز در نقاشی استفاده می‌شود.

ب) از آهن مذاب تولیدشده در فرایند ترمیت ($Fe_2O_3(s) + 2Al(s) \rightarrow 2Fe(l) + Al_2O_3(s)$) برای جوشکاری خطوط ریل راه‌آهن استفاده می‌شود.

پ) از اسکاندیم ($_{21}Sc$) که اولین فلز واسطهٔ دورهٔ چهارم است، برای تهیهٔ وسایل خانه مانند تلویزیون رنگی و برخی از شیشه‌ها استفاده می‌شود.

ت) استخراج فلزهای روی و نیکل برخلاف طلا و مس از لابه‌لای خاک، مقرون‌به‌صرفه نیست.

www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshClouds

۷۱ اگر در واکنش مقدار کافی کربن با Fe_2O_3 که برای استخراج آهن در فولاد مبارکه استفاده می‌شود، ۲۸ تن آهن تولید شود، به تقریب چند تن آهن (III) اکسید با خلوص ۷۵ درصد، مصرف شده است؟ $(Fe=56, O=16, C=12 : g.mol^{-1})$

۱) ۵۳/۳ ۲) ۱۰۶/۶ ۳) ۲۶/۶ ۴) ۱۶۰

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: معادلهٔ موازنهٔ واکنش به صورت زیر است:

$$2Fe_2O_3 + 3C \rightarrow 3CO_2 + 4Fe$$

گام دوم:

روش اول: استفاده از کسر تبدیل:

$$28\,Ton\,Fe \times \frac{1000\,kg}{1\,Ton} \times \frac{1000\,g}{1\,kg} \times \frac{1\,mol\,Fe}{56\,g\,Fe} \times \frac{2\,mol\,Fe_2O_3}{4\,mol\,Fe} \times \frac{160\,g\,Fe_2O_3}{1\,mol\,Fe_2O_3} \times \frac{100\,g\,\text{ناخالص}}{75\,g\,\text{خالص}} \times \frac{1\,kg}{1000\,g} \times \frac{1\,Ton}{1000\,kg}$$

$$= \frac{160}{3} \simeq 53/3\ Ton\ Fe_2O_3 \text{ ناخالص}$$

روش دوم: استفاده از کسر تناسب:

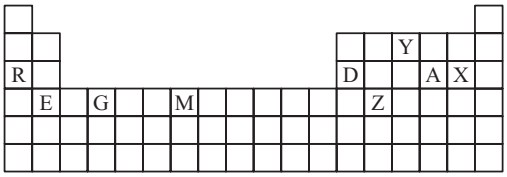
$$\frac{\text{جرم ناخالص} \times \frac{\text{درصد خلوص}}{100}}{\underbrace{\text{ضریب} \times \text{جرم مولی}}_{Fe_2O_3}} = \frac{\text{جرم}}{\underbrace{\text{ضریب} \times \text{جرم مولی}}_{Fe}}$$

با توجه به این‌که جرم هر دو ماده برحسب تن است، نیازی به تبدیل واحد نیست.

$$\frac{x \times \frac{75}{100}}{2 \times 160} = \frac{28}{4 \times 56} \xrightarrow{\frac{75}{100}=\frac{3}{4}} x = \frac{4 \times 2 \times 160}{3 \times 4 \times 2} \simeq 53/3\ ton\ Fe_2O_3 \text{ ناخالص}$$

سنجش کلاد
www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshClouds

۷۲ با توجه به جایگاه چند عنصر که در جدول تناوبی مقابل نشان داده شده است، کدام گزینه درست است؟



۱) عنصر X برخلاف عنصر Z، در اثر ضربه خرد نمی‌شود.

۲) برای نام‌گذاری ترکیب‌های M، نیازی به استفاده از اعداد رومی نیست.

۳) عنصر D همانند عنصرهای دارای رسانایی الکتریکی هم‌دورهٔ خود، با تشکیل کاتیون به پایداری می‌رسد.

۴) اگر مجموع اعداد کوانتومی اصلی و فرعی الکترون‌های ظرفیت یکی از عنصرهای نشان داده شده در جدول برابر ۱۳ باشد، عدد اتمی آن از عدد اتمی عنصر G کم‌تر است.

پاسخ خیلی تشریحی ✔

بررسی گزینه‌ها:

گزینهٔ (۱): X نافلز و Z، شبه‌فلز است و هر دو در اثر ضربه خرد می‌شوند.

گزینهٔ (۲): عنصر M با عدد اتمی ۲۵، همان منگنز است. منگنز $({}_{25}Mn)$ دارای چند نوع کاتیون پایدار است و در نام‌گذاری ترکیب‌های آن، باید از اعداد رومی استفاده کرد. در کتاب درسی، به منگنز (II) کربنات اشاره شده است.

گزینهٔ (۳): عنصرهای دارای رسانایی الکتریکی شامل فلز و شبه‌فلز می‌باشد، در دورهٔ سوم، Si، فقط الکترون به اشتراک می‌گذارد.

گزینهٔ (۴): با بررسی $(n+l)$ الکترون‌های ظرفیت دو عنصر بعد از عنصر G، (M و Z) متوجه می‌شویم که عدد اتمی عنصر مورد نظر از G کوچک‌تر است.

$${}_{25}M:[{}_{18}Ar]3d^5 4s^2 \quad \text{الکترون‌های ظرفیت } (n+l):5(3+2)+2(4+0)=33$$

$${}_{32}Z:[{}_{18}Ar]3d^{10} 4s^2 4p^2 \quad \text{الکترون‌های ظرفیت } (n+l):2(4+1)+2(4+0)=18$$

عنصر مجهول که عدد اتمی آن از G کوچک‌تر و $(n+l)$ الکترون‌های ظرفیت آن برابر ۱۳ است Y یا ${}_{7}N$ است.

$${}_{7}Y:[{}_{2}He]2s^2 2p^3 \Rightarrow \text{الکترون‌های ظرفیت } (n+l)=2(2+0)+3(2+1)=13$$

سنجش کلاد
www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshClouds

۷۳ کدام مورد درست است؟ (X = فلز واسطه، Y = فلز اصلی)

۱) اگر واکنش: $Cl_2(g) + 2YI \rightarrow 2YCl + I_2$ به طور طبیعی انجام‌پذیر باشد، در همین شرایط، واکنش $Br_2(l) + 2\,YCl \rightarrow 2\,YBr + Cl_2$ نیز به طور طبیعی انجام‌پذیر است.

۲) اگر واکنش: $2X_2O_3(s) + 3Ti(s) \rightarrow 4X(s) + 3TiO_2(s)$ به طور طبیعی انجام‌پذیر باشد، واکنش $ZnO(s) + X(s) \rightarrow X_2O_3(s) + Zn(s)$ نیز به طور طبیعی انجام‌پذیر است.

۳) با توجه به واکنش: $X + 2HCl \rightarrow XCl_2 + H_2$ که به طور طبیعی انجام نمی‌پذیرد، می‌توان دریافت که واکنش‌پذیری کلر از X بیشتر است.

۴) اگر واکنش: $2X_2O_3(s) + 3C(s) \rightarrow 4X(s) + 3CO_2(g)$ به طور طبیعی انجام‌پذیر باشد، واکنش $X_2O_3(s) + 6\,Y(s) \rightarrow 2X(s) + 3\,Y_2O(s)$ نیز به طور طبیعی انجام‌پذیر است.

نکته اگر یک واکنش در جهت رفت به طور طبیعی انجام‌پذیر باشد، واکنش‌پذیری واکنش‌دهنده‌ها از فراورده‌ها بیشتر خواهد بود و اگر انجام‌پذیر نباشد، واکنش‌پذیری فراورده‌ها از واکنش‌دهنده‌ها بیشتر خواهد بود.

پاسخ خیلی تشریحی به طور کلی واکنش‌پذیری فلزهای اصلی از فلزهای واسطه بیشتر است، اما در میان واسطه‌ها نظم مشخصی وجود ندارد. از واکنش $C + X_2O_3 \rightarrow \ldots$ نتیجه می‌گیریم واکنش‌پذیری عنصر کربن از X (واسطه) بیشتر است و با توجه به بیشتربودن واکنش‌پذیری فلزهای اصلی از کربن، واکنش‌پذیری عنصر Y (فلز اصلی) به یقین از X بیشتر خواهد بود و واکنش $Y + X_2O_3 \rightarrow \ldots$ به طور طبیعی انجام خواهد شد.

بررسی سایر گزینه‌ها:

گزینهٔ (۱): واکنش‌پذیری کلر از برم بیشتر است و واکنش $Br_2 + YCl \rightarrow \ldots$ به طور طبیعی انجام‌پذیر نخواهد بود.

گزینهٔ (۲): از واکنش اول نتیجه می‌گیریم واکنش‌پذیری $Ti > X$ است، اما نمی‌توانیم واکنش‌پذیری X با Zn را مقایسه کنیم.

گزینهٔ (۳): با توجه به انجام‌ناپذیری واکنش $X + HCl \rightarrow \ldots$، می‌توان گفت که واکنش‌پذیری هیدروژن از X بیشتر بوده و واکنش در جهت طبیعی پیش نمی‌رود.

سنجش کلاد
www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshClouds

۷۴ اگر **m** گرم نیتروگلیسیرین با خلوص ۶۰ درصد مطابق واکنش زیر تجزیه شود و حجم گاز نیتروژن تولیدشده برابر ۳/۶ لیتر باشد، **m** کدام است؟ (بازده واکنش ۸۰ درصد و حجم مولی گازها در شرایط واکنش، ۲۲/۷ لیتر است. $H=1, C=12, N=14, O=16 : g.mol^{-1}$)

$$C_3H_5(NO_3)_3(s) \rightarrow H_2O(g) + CO_2(g) + N_2(g) + O_2(g)$$ (معادلهٔ واکنش موازنه شود.)

۱) ۵۰ ● ۲) ۴۰ ۳) ۳۶ ۴) ۲۴

پاسخ خیلی تشریحی ✔ معادلهٔ موازنهٔ واکنش به صورت زیر است:

$$4C_3H_5(NO_3)_3 \rightarrow 10H_2O + 12CO_2 + 6N_2 + O_2$$

$$\frac{\text{جرم ناخالص} \times \frac{\text{درصد خلوص}}{100}}{\underbrace{\text{جرم مولی} \times \text{ضریب}}_{C_3H_5(NO_3)_3}} \times \frac{\frac{\text{بازده درصدی}}{100}}{} = \frac{\text{حجم}}{\underbrace{\text{حجم مولی} \times \text{ضریب}}_{N_2}}$$

$$\Rightarrow \frac{m \times \frac{60}{100} \times \frac{80}{100}}{4 \times 227} = \frac{3/6}{6 \times 22/7} \Rightarrow m = \frac{4 \times 36 \times 100}{6 \times 8 \times 6} = 50\ g$$

تیزبازی می‌توانستیم فقط نیتروژن را موازنه کنیم. چون فقط با این اتم سر و کار داشتیم.

$$2C_3H_5(NO_3)_3 \sim 3N_2$$

www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshClouds

۷۵ همهٔ عبارت‌های زیر دربارهٔ طلا درست است، به‌جز ..... .

۱) رسانایی الکتریکی آن بسیار بالا است و این فلز همانند نقره به صورت آزاد در طبیعت یافت می‌شود

۲) مقدار طلا در معادن آن بسیار کم است و برای استخراج میزان اندکی از آن، حجم انبوهی خاک معدن استفاده می‌شود

۳) به اندازه‌ای چکش‌خوار و نرم است که چند گرم از آن را می‌توان به صفحه‌ای با مساحت چند متر مربع تبدیل کرد

۴) واکنش‌ندادن آن با گازهای موجود در هواکره و مواد موجود در بدن انسان همراه با بازتاب اندک پرتوهای خورشیدی، سبب شده تقاضای جهانی برای این فلز افزایش یابد

پاسخ خیلی تشریحی

همهٔ ویژگی‌های مذکور در گزینه‌های (۱) تا (۳) از ویژگی‌های عنصر طلا است، اما طلا علاوه بر واکنش‌ندادن با گازهای موجود در هواکره و مواد موجود در بدن انسان، پرتوهای خورشیدی را بسیار زیاد بازتاب می‌کند و این ویژگی طلا در کنار سایر ویژگی‌های دیگر آن، سبب شد تقاضای جهانی برای این فلز افزایش یابد.

www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshClouds

۷۶ تیتانیم اغلب در طبیعت به شکل مخلوطی از ماسه و ایلمنیت ($FeTiO_3$) یافت می‌شود. استخراج تیتانیم از این مخلوط به صورت زیر انجام می‌شود:

$$I)\ FeTiO_3(s)+Cl_2(g)+C(s)\rightarrow CO(g)+FeCl_2(s)+TiCl_4(g)$$

$$II)\ TiCl_4(g)+Mg(s)\rightarrow MgCl_2(l)+Ti(s)$$

مجموع ضرایب استوکیومتری فراورده‌های واکنش **(II)** به ضریب **CO** در واکنش **(I)** کدام است و اگر درصد جرمی ایلمنیت ($FeTiO_3$) در مخلوط آن با ماسه، برابر ۲۵ درصد باشد، از واکنش ۰/۰۱ کیلوگرم مخلوط ماسه و ایلمنیت، چند میلی‌گرم فلز تیتانیم به دست می‌آید؟ (بازده درصدی واکنش‌های **(I)** و **(II)** را به ترتیب برابر ۱۰۰٪ و ۷۶٪ در نظر بگیرید، معادلهٔ واکنش‌ها موازنه شود.

$(O=16, Cl=35/5, Ti=48, Fe=56 : g.mol^{-1})$

۱) $\frac{3}{2}$، ۶۰۰ ۲) $\frac{3}{2}$، ۷۶۰

۳) ۱، ۶۰۰ ۴) ۱، ۷۶۰

Hint ابتدا هر دو واکنش را موازنه و با توجه به جرم $FeTiO_3$، به مول $TiCl_4$ و از مول $TiCl_4$ به جرم Ti در واکنش دوم می‌رسیم.

پاسخ خیلی تشریحی ✔

گام اول: موازنهٔ واکنش‌ها به صورت زیر است:

$$\left.\begin{array}{l} I)\ FeTiO_3(s)+3Cl_2(g)+3C(s)\rightarrow 3CO(g)+FeCl_2(s)+TiCl_4(g) \\ II)\ TiCl_4(g)+2Mg(s)\rightarrow \underbrace{2MgCl_2(l)+Ti(s)}_{3} \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{\text{مجموع ضرایب فراورده‌های واکنش (II)}}{\text{ضریب CO}}=\frac{3}{3}=1$$

گام دوم:

روش اول:

$$\text{مخلوط}\ 0/01\,kg\times\frac{1000\,g}{1\,kg}\times\frac{25\,g\,FeTiO_3}{100\,g\,\text{مخلوط}}\times\frac{1\,mol\,FeTiO_3}{152\,g\,FeTiO_3}\times\frac{1\,mol\,TiCl_4}{1\,mol\,FeTiO_3}\times\frac{1\,mol\,Ti}{1\,mol\,TiCl_4}\times\frac{48\,g}{1\,mol\,Ti}\times\frac{1000\,mg}{1\,g}\times\frac{76}{100}=600\,mg\,Ti$$

روش دوم: با توجه به یکسان‌بودن ضرایب مادهٔ مشترک دو واکنش ($TiCl_4$) می‌توانیم به صورت مستقیم بین Ti و $FeTiO_3$ کسر تناسب بنویسیم. فقط باید *مواستون باشه* بازده واکنش دوم هم باید در صورت کسر جرم $FeTiO_3$ (واکنش‌دهندهٔ واکنش اول) ضرب شود:

$$\frac{\text{جرم ناخالص}\times\frac{\text{درصد خلوص}}{100}\times\frac{\text{بازده درصدی}}{100}}{\underbrace{\text{جرم مولی}\times\text{ضریب}}_{FeTiO_3}}=\frac{\text{جرم}}{\underbrace{\text{جرم مولی}\times\text{ضریب}}_{Ti}}\Rightarrow\frac{\overbrace{0/01\times1000\times25\times\frac{76}{100}}^{\text{جرم } FeTiO_3 \text{ برحسب گرم}}}{152\times100\times200\times1}=\frac{x}{48}$$

$$\Rightarrow x=600\ mgTi$$

سنجش کلاد
www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshClouds

۷۷ کدام مطلب نادرست است؟ (هر هکتار معادل با ده هزار متر مربع است.)

۱) در فرایند استخراج فلز مس با استفاده از گیاهان، درصد جرمی فلز در خاکستر گیاه، بیشتر از درصد جرمی آن در خاک است.

۲) فلزی که در سطح جهان بیشترین مصرف سالانه را در بین صنایع گوناگون دارد، در طبیعت به صورت کانه هماتیت یافت می‌شود.

۳) هر چه واکنش‌پذیری فلزی بیشتر باشد، استخراج آن از سنگ معدن، دشوارتر خواهد بود.

آهن

۴) اگر در هر هکتار زمین بتوان ۱۰ تن گیاه برداشت کرد، در ۵۰۰ متر مربع، می‌توان ۲×۱۰^{۵} گرم فلز روی پالایش کرد (هر کیلوگرم گیاه، حاوی ۴۰ گرم روی است).

پاسخ خیلی تشریحی ✔

بررسی گزینه‌ها:

گزینهٔ (۱): در فرایند گیاه‌پالایی، چون گیاه مورد نظر فلز را جذب می‌کند، پس تغلیظ اتفاق می‌افتد. از طرف دیگر در اثر سوزاندن گیاه، جرم کل گیاه کاهش می‌یابد، ولی مقدار فلز درون آن ثابت است؛ بنابراین درصد جرمی فلز در خاکستر بیشتر از خاک خواهد بود.

گزینهٔ (۲): آهن فلزی است که در سطح جهان، بیشترین مصرف سالانه را دارد. این فلز در طبیعت به صورت کانه هماتیت یافت می‌شود.

گزینهٔ (۳): *کاملاً درسته!*

گزینهٔ (۴): با توجه به مساحت زمین داریم:

$$?g\ Zn = ۵۰۰\ \text{متر مربع} \times \frac{۱\ \text{هکتار}}{۱۰^{۴}\ \text{مترمربع}} \times \frac{۱۰\ \text{تن گیاه}}{۱\ \text{هکتار}} \times \frac{۱۰۰۰\ kg\ \text{گیاه}}{۱\ \text{تن گیاه}} \times \frac{۴۰\ gZn}{۱\ kg\ \text{گیاه}} = ۲\times۱۰^{۴}\ g$$

بنابراین میزان روی در این زمین، $۲\times۱۰^{۴}\ g$ است.

سنجش کلاد
www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshClouds

۷۸ توصیف زیر نشان‌دهندهٔ ویژگی‌های یکی از عناصر جدول تناوبی است. ویژگی ذکرشده در کدام گزینه، در مورد آن درست است؟

«عنصری با سطح صیقلی که در واکنش با فلوئور، الکترون از دست می‌دهد و شمار الکترون‌های ظرفیتی آن برابر شمار الکترون‌های ظرفیتی عنصری زردرنگ و جامد از دورهٔ سوم است و آرایش یون پایدار اولین عنصر هم‌دسته با آن به گاز نجیب آرگون می‌رسد.»

۱) عنصر بعدی آن شبه‌فلزی است که رسانایی الکتریکی کمی دارد. ${}_{16}S$

۲) به دستهٔ p و دورهٔ چهارم جدول تعلق دارد.

۳) عدد اتمی عنصر هم‌گروه آن در دورهٔ بعدی، برابر با ۴۲ است.

۴) آرایش الکترونی آن مطابق قاعدهٔ آفبا به $4s^1$ ختم می‌شود.

پاسخ خیلی تشریحی ✔ منظور از عنصری با سطح صیقلی که الکترون از دست می‌دهد، عنصری فلزی است و عنصر جامد و زردرنگ دورهٔ سوم، ${}_{16}S$ است که شمار الکترون‌های ظرفیتی آن برابر ۶ است؛ بنابراین عنصر مورد نظر، عنصری واسطه از گروه ۶ بوده و شمار الکترون‌های ظرفیت آن برابر ۶ است.

از این‌که آرایش الکترونی یون پایدار و اولین عنصر هم‌دسته و هم‌دورهٔ آن به گاز نجیب آرگون می‌رسد (اسکاندیم، ${}_{21}Sc$)، این ویژگی را دارد)، نتیجه می‌گیریم عنصر مجهول در دورهٔ چهارم قرار دارد.

عنصر واسطهٔ دورهٔ چهارم درگروه ۶، همان کروم $({}_{24}Cr)$ است.

بررسی گزینه‌ها:

گزینهٔ (۱): عنصر بعد از ${}_{24}Cr$ در دورهٔ چهارم، فلز منگنز $({}_{25}Mn)$ است.

گزینهٔ (۲): عنصر مورد نظر به دستهٔ d تعلق دارد.

گزینهٔ (۳): عدد اتمی عنصر گروه ۶ از دورهٔ پنجم، ۶ واحد بیشتر از گاز نجیب دورهٔ چهارم است: $۳۶ + ۶ = ۴۲$

گزینهٔ (۴): مطابق قاعدهٔ آفبا، آرایش الکترونی کروم باید به $4s^2$ ختم شود اما داده‌های طیف‌سنجی نشان داده است که در بیرونی‌ترین زیرلایهٔ این اتم، ۱ الکترون وجود دارد.

$${}_{24}Cr \Rightarrow \begin{cases} \text{آرایش الکترونی مورد انتظار: } [{}_{18}Ar]3d^4 4s^2 \\ \text{آرایش الکترونی واقعی: } [{}_{18}Ar]3d^5 4s^1 \end{cases}$$

سنجش کلاد
www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshClouds

۷۹ در اثر واکنش ۵ گرم کلسیم کربنات با مقدار کافی محلول هیدروکلریک اسید، به تقریب چند مولکول در فراورده‌ها تولید می‌شود؟ (۲۰ درصد نمونهٔ کلسیم کربنات را ناخالصی تشکیل می‌دهد و بازده درصدی واکنش برابر ۶۰ درصد است، $Ca = ۴۰ , O = ۱۶ , C = ۱۲ : g.mol^{-۱}$)

$CaCO_۳(s) + HCl(aq) \rightarrow CaCl_۲(aq) + CO_۲(g) + H_۲O(l)$ (معادله موازنه شود.)

درصد خلوص کلسیم کربنات، ۸۰٪ است.

۱) $۳/۰۱ \times ۱۰^{۲۲}$

۲) $۳/۰۱ \times ۱۰^{۲۱}$

۳) $۲/۸۸ \times ۱۰^{۲۱}$

۴) $۲/۸۸ \times ۱۰^{۲۲}$

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: موازنهٔ واکنش:

$$CaCO_۳(s) + ۲HCl(a) \rightarrow CaCl_۲(aq) + CO_۲(g) + H_۲O(l)$$

به ازای مصرف هر مول $CaCO_۳$، ۲ مول مادهٔ مولکولی $(H_۲O, CO_۲)$ تولید می‌شود.

گام دوم:

روش اول: استفاده از کسر تبدیل:

$$۵gCaCO_۳ \times \frac{۱\,mol\,CaCO_۳}{۱۰۰\,g\,CaCO_۳} \times \frac{\text{خالص } ۸۰g}{\text{ناخالص } ۱۰۰g} \times \frac{\text{مولکول } ۲\,mol}{۱\,mol\,CaCO_۳} \times \frac{\text{مولکول } ۶/۰۲ \times ۱۰^{۲۳}}{\text{مولکول } ۱\,mol} \times \underbrace{\frac{۶۰}{۱۰۰}}_{\text{بازدهٔ واکنش}}$$

$$= \frac{۵ \times ۸۰ \times ۶۰ \times ۲ \times ۶/۰۲ \times ۱۰^{۲۳}}{۱۰۰ \times ۱۰۰ \times ۱۰۰} = \frac{۴۸ \times ۶/۰۲ \times ۱۰^{۲۳}}{۱۰^{۳}} = ۲/۸۸ \times ۱۰^{۲۲} \text{ مولکول}$$

روش دوم: استفاده از کسر تناسب:

$$\frac{\overbrace{\text{جرم ناخالص} \times \frac{\text{درصد خلوص}}{۱۰۰} \times \frac{\text{بازده درصدی}}{۱۰۰}}^{CaCO_۳}}{\underbrace{\text{جرم مولی} \times \text{ضریب}}_{CO_۲ + H_۲O}} = \frac{\text{تعداد مولکول}}{\text{عدد آووگادرو} \times \text{ضریب}}$$

$$\Rightarrow \frac{۵ \times ۸۰ \times ۶۰}{۱۰۰ \times ۱۰۰ \times ۱۰۰} = \frac{x}{۶/۰۲ \times ۱۰^{۲۳} \times ۲} \Rightarrow x = \frac{۲۴۰ \times ۶/۰۲ \times ۲ \times ۱۰^{۲۳}}{۱۰^{۴}} \simeq ۲/۸۸ \times ۱۰^{۲۲} \text{ مولکول}$$

سنجش کلاد
www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshClouds

۸۰ اگر جرم برابری گلوکز در واکنش‌های سوختن (واکنش **I**) و تخمیر بی‌هوازی آن (واکنش **II**) شرکت کند و اختلاف حجم کربن دی‌اکسید تولیدی در این دو واکنش برابر ۲۰ لیتر باشد، اختلاف جرم الکل و آب تولیدی در آن‌ها چند گرم خواهد بود؟ (بازده واکنش (**I**) دو برابر واکنش (**II**) است و حجم مولی گازها در شرایط واکنش، ۲۵ لیتر است، $(H=1, C=12, O=16 : g.mol^{-1})$

I) $C_6H_{12}O_6 + 6O_2 \rightarrow 6CO_2 + 6H_2O$

II) $C_6H_{12}O_6 \rightarrow 2CO_2 + 2C_2H_5OH$

۱) ۴/۱۶ ۲) ۹/۹۲

۳) ۶/۱۴ ۴) ۹/۲۹

پاسخ خیلی تشریحی

سوختن گلوکز: $C_6H_{12}O_6 + 6O_2 \rightarrow 6CO_2 + 6H_2O$

تخمیر بی‌هوازی گلوکز: $C_6H_{12}O_6 \rightarrow 2CO_2 + 2C_2H_5OH$

جرم و در نتیجه تعداد مول گلوکز اولیه در دو واکنش برابر است. مول اولیهٔ گلوکز را x، بازدهٔ واکنش اول را $2R$ و بازدهٔ واکنش دوم را R در نظر می‌گیریم. اختلاف حجم CO_2 تولیدی در دو واکنش را برابر ۲۰ لیتر قرار می‌دهیم:

واکنش اول: $x\ mol\ C_6H_{12}O_6 \times \frac{6\ mol\ CO_2}{1\ mol\ C_6H_{12}O_6} \times \frac{25\ L\ CO_2}{1\ mol\ CO_2} \times \frac{2R}{100} = (3xR)L CO_2$

واکنش دوم: $x\ mol\ C_6H_{12}O_6 \times \frac{2\ mol\ CO_2}{1\ mol\ C_6H_{12}O_6} \times \frac{25\ L\ CO_2}{1\ mol\ CO_2} \times \frac{R}{100} = (0/5\ xR)L\ CO_2$

$3xR - 0/5xR = 20 \Rightarrow 2/5xR = 20 \Rightarrow xR = 8$

جرم آب و الکل تولیدشده در دو واکنش را برحسب x و R حساب کرده و اختلاف آن‌ها را به دست می‌آوریم:

واکنش اول: $x\ mol\ C_6H_{12}O_6 \times \frac{6\ mol\ H_2O}{1\ mol\ C_6H_{12}O_6} \times \frac{18\ g\ H_2O}{1\ mol\ H_2O} \times \frac{2R}{100} = (2/16xR)\ g\ H_2O$

واکنش دوم: $x\ mol\ C_6H_{12}O_6 \times \frac{2\ mol\ C_2H_5OH}{1\ mol\ C_6H_{12}O_6} \times \frac{46\ g\ C_2H_5OH}{1\ mol\ C_2H_5OH} \times \frac{R}{100} = (0/92xR)\ g\ C_2H_5OH$

اختلاف جرم آب و الکل: $(2/16 - 0/92)\underbrace{xR}_{8} = 9/92\ g$

سنجش کلاد
www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshClouds