

آزمون آزمایشی خیلی سبز

پایه یازدهم

مرحله یازدهم

رشته ریاضی

سال تحصیلی ۱۴۰۳-۰۴ تاریخ برگزاری: ۱۲/ اردیبهشت/ ۱۴۰۴

نود و پنج بند دروس

حسابان (۱)	آمار و احتمال	هندسه (۲)
فصل ۳ (درس ۲ و ۳) و فصل ۴ و ۵ صفحه ۸۰ تا ۱۵۱	فصل ۲ (درس ۳ از ابتدای قانون ضرب احتمال) و فصل ۳ و ۴ صفحه ۱۲۱ تا ۱۷۲	فصل ۲ (از ابتدای تجانس) و فصل ۳ صفحه ۴۳ تا ۷۵
فیزیک (۲)	شیمی (۲)	
فصل ۲ (از ابتدای توان در مدارهای الکتریکی) و فصل ۳ و ۴ صفحه ۶۷ تا ۱۳۰	فصل ۲ (از ابتدای آنتالپی، همان محتوا انرژی است) و فصل ۳ صفحه ۶۵ تا ۱۲۳	

مواد امتحانی	تعداد سؤال	از شماره	تا شماره	مدت پاسخگویی
حسابان	۲۰	۱	۲۰	۳۰ دقیقه
هندسه	۱۰	۲۱	۳۰	۲۰ دقیقه
آمار و احتمال	۱۰	۳۱	۴۰	۲۰ دقیقه
فیزیک	۲۰	۴۱	۶۰	۳۰ دقیقه
شیمی	۲۰	۶۱	۸۰	۲۰ دقیقه
مجموع	۸۰ سؤال			۱۲۰ دقیقه

این آزمون نمره منفی دارد.

استفاده از ماشین حساب مجاز نیست.

دفتر چه سوالات آزمون های خیلی سبز، از همه نظر (تعداد سؤال ها، زمان پاسخگویی، نوع چینش گزینه ها، نوع صفحه آرایی، فونت سوالات، سایز کلمات و اعداد، جای خالی محل انجام محاسبات و...) در شبیه ترین حالت به دفترچه سوالات کنکور سراسری طراحی می شود.



Azmoon.kheilisabz.com



www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshCloud11

حسابان یازدهم

۱- بعد از ۲۰۰ سال، $\frac{15}{16}$ جرم اولیه یک ماده رادیواکتیو واپاشی می شود و از بین می رود. نیم عمر این ماده خاص، چند سال است؟

- (۱) ۲۰ (۲) ۲۵ (۳) ۵۰ (۴) ۱۰۰

۲- تابع $f(x) = [x^2]$ در چند نقطه از نقاط بازه $(2, 3)$ ناپیوسته است؟ $([])$ ، نماد جزء صحیح است.

- (۱) ۴ (۲) ۵ (۳) ۶ (۴) ۷

۳- اگر $f(x) = \frac{2x+3}{1-4x}$ باشد، تابع f^{-1} در نقطه ای با کدام طول ناپیوسته است؟

- (۱) $-\frac{1}{2}$ (۲) -۲ (۳) $\frac{1}{2}$ (۴) ۲

۴- اگر $\frac{1}{\log_a 6} + \frac{1}{\log_b 6} + \frac{1}{\log_c 6} = 2$ باشد، حاصل $\log_{\sqrt{abc}}$ کدام است؟

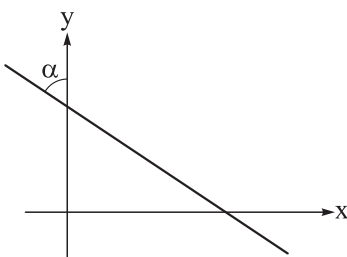
- (۱) -۱ (۲) $\frac{3}{2}$ (۳) $\frac{2}{3}$ (۴) ۱

۵- تابع $f(x) = 2 \log(3x-1) - 3$ مفروض است. اگر $f^{-1}(x) = \frac{1}{a}(1 + 10^{\frac{x+b}{c}})$ باشد، حاصل $[\frac{2a+b}{c}]$ کدام است؟

$([])$ ، نماد جزء صحیح است.

- (۱) ۳ (۲) ۴ (۳) ۵ (۴) ۶

۶- خط $2x + 3y - 6 = 0$ در شکل زیر رسم شده است. مقدار $\cos(\frac{\pi}{4} + \alpha)$ کدام است؟



(۱) $-\frac{3}{\sqrt{13}}$

(۲) $-\frac{2}{\sqrt{13}}$

(۳) $\frac{3}{\sqrt{13}}$

(۴) $\frac{2}{\sqrt{13}}$

۷- اگر $\alpha + \beta = \frac{19\pi}{2}$ و $X = \frac{\sin \alpha + \tan \alpha \tan \beta - 1}{\sin \beta - \cos^2 \alpha - \cos^2 \beta + 1}$ باشد، حاصل $1 + X^2$ کدام است؟

- (۱) $\cot^2 \beta$ (۲) $\frac{1}{\sin^2 \beta}$ (۳) $\tan^2 \beta$ (۴) $\frac{1}{\cos^2 \beta}$

محل انجام محاسبات



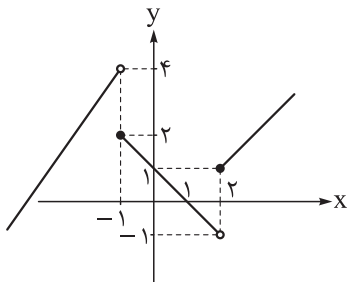
۸- حاصل عبارت $\cos \frac{\pi}{7} \cos \frac{2\pi}{7} \cos \frac{4\pi}{7} \cos \frac{8\pi}{7}$ کدام است؟

- (۱) $\frac{1}{16} \sin \frac{2\pi}{7}$ (۲) $\frac{1}{8} \sin \frac{\pi}{7}$ (۳) $\frac{1}{8} \cos \frac{\pi}{7}$ (۴) $\frac{1}{8} \cos \frac{2\pi}{7}$

۹- حاصل $\lim_{x \rightarrow 0^-} ([x] + [x^2] + [x^3] + \dots + [x^{100}])$ کدام است؟ ([] ، نماد جزء صحیح است.)

- (۱) -50 (۲) صفر (۳) 50 (۴) 100

۱۰- نمودار تابع f در شکل زیر رسم شده است. اگر $\lim_{x \rightarrow 2^-} (f \circ f)(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(2-x) + af(2)$ باشد، مقدار a کدام است؟



- (۱) ۴
(۲) ۳
(۳) ۲
(۴) ۱

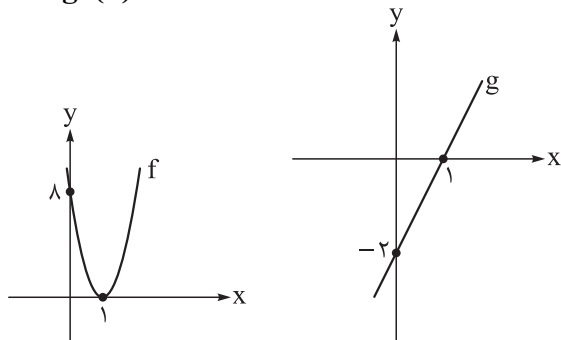
۱۱- اگر $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - a^2x + a^2 - 1}{a - ax} = \frac{17}{3}$ باشد، مجموع مقادیر قابل قبول برای a کدام است؟

- (۱) $\frac{17}{3}$ (۲) $-\frac{2}{3}$ (۳) $\frac{19}{3}$ (۴) $\frac{19}{6}$

۱۲- اگر $f(x) = 2x - 1$ و $g(x) = \frac{x}{2} - \frac{1}{x}$ باشد، حاصل $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{(f \circ g)(x)}{x - 2}$ کدام است؟

- (۱) $-\frac{3}{2}$ (۲) $\frac{3}{2}$ (۳) $\frac{2}{3}$ (۴) $-\frac{2}{3}$

۱۳- نمودارهای دو تابع $f(x) = ax^2 + bx + c$ و $g(x) = mx + h$ در شکل‌های زیر رسم شده‌اند. حاصل $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{g^2(x)}$ کدام است؟

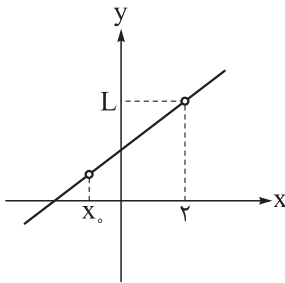


- (۱) -1
(۲) ۱
(۳) ۲
(۴) ۴

محل انجام محاسبات



۱۴- نمودار تابع $f(x) = \frac{x^2 + ax^2 - 4x + c}{x^2 - x + b}$ در شکل زیر رسم شده است. حاصل $x_0 + L$ کدام است؟



(۱) ۵

(۲) ۴

(۳) ۳

(۴) ۲

۱۵- اگر $a > 0$ باشد، حاصل $\lim_{x \rightarrow a} \frac{\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{a}}{\sqrt{x} - \sqrt{a}}$ کدام است؟

(۴) $\frac{2}{3\sqrt[3]{a}}$

(۳) $\frac{2}{3\sqrt[3]{a}}$

(۲) $\frac{2}{3}\sqrt[3]{a}$

(۱) $\frac{2}{3}\sqrt[3]{a}$

۱۶- حاصل $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\sin x - \cos x}{2 \sin x - \sqrt{2}}$ کدام است؟

(۴) $\frac{1}{2}$

(۳) $-\frac{1}{2}$

(۲) ۱

(۱) -۱

۱۷- حاصل $\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sin(x[x])}{\sin(2^{[x]}x)}$ کدام است؟ ([]، نماد جزء صحیح است.)

(۴) $-\frac{3}{8}$

(۳) $-\frac{8}{3}$

(۲) $\frac{8}{3}$

(۱) $\frac{3}{8}$

۱۸- حاصل حد تابع $f(x) = \frac{\sqrt[3]{8-x^3} + x^2 - 8x + 12}{\sqrt[3]{x^2 - \sqrt{5x+6}} + 16 - x^4}$ وقتی $x \rightarrow 2$ ، چند برابر $\sqrt[3]{12}$ است؟

(۴) $\frac{3}{2}$

(۳) $-\frac{3}{2}$

(۲) $-\frac{2}{3}$

(۱) $\frac{2}{3}$

۱۹- تابع $f(x) = \begin{cases} x^2 + a & ; x < -1 \\ [2x] & ; -1 \leq x < 2 \\ bx - 1 & ; x \geq 2 \end{cases}$ در ۵ نقطه ناپیوسته است. حاصل ab کدام است؟ ([]، نماد جزء صحیح است.)

(۴) -۶

(۳) $-7/5$

(۲) -۴

(۱) -۵

۲۰- تابع $f(x) = \begin{cases} x^4 & ; x \in \mathbb{Z} \\ x^2 & ; x \notin \mathbb{Z} \end{cases}$ در چند نقطه از نقاط بازه $(-3, 3)$ ، ناپیوسته است؟

(۴) صفر

(۳) ۲

(۲) ۳

(۱) ۵

محل انجام محاسبات

هندسه یازدهم

۲۱- در مثلث ABC ، $AB = 6$ و $AC = 4$ است. اگر AD نیمساز زاویه داخلی A و طول آن برابر $2/4$ باشد، اندازه زاویه $\hat{A}$ چند درجه است؟

- (۴) ۱۲۰ (۳) ۹۰ (۲) ۶۰ (۱) ۴۵

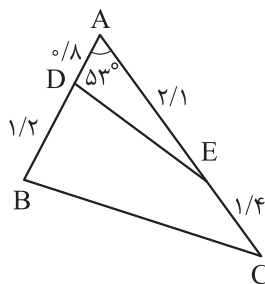
۲۲- در کدام یک از مثلث‌های زیر که طول اضلاع آن‌ها داده شده است، زاویه منفرجه وجود دارد؟

- (۴) ۱۶، ۱۳، ۱۰ (۳) ۱۴، ۱۱، ۸ (۲) ۱۵، ۱۲، ۱۰ (۱) ۱۲، ۱۰، ۷

۲۳- در مثلثی به طول اضلاع ۱۱، ۱۳ و ۲۰، اندازه شعاع بزرگ‌ترین دایره محاطی خارجی کدام است؟

- (۴) ۳۳ (۳) ۲۲ (۲) ۱۱ (۱) ۶

۲۴- در شکل زیر، مساحت چهارضلعی $BCED$ کدام است؟ (فرض کنید $\cos 53^\circ = 4/5$ باشد.)



- (۱) ۱/۵۹۶

- (۲) ۲/۱۲۸

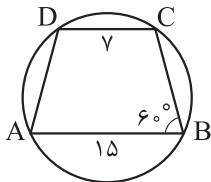
- (۳) ۳/۱۹۲

- (۴) ۴/۲۵۶

۲۵- در مثلث ABC ، $BC = 15$ ، BD نیمساز زاویه B و I نقطه هم‌رسی نیمسازها است. اگر $CD = 9$ و $ID = 6$ باشند، اندازه پاره خط BI کدام است؟

- (۴) ۱۰ (۳) ۸ (۲) ۶ (۱) ۵

۲۶- در شکل روبه‌رو چهارضلعی $ABCD$ دوزنقه است. شعاع دایره چند برابر $\frac{\sqrt{3}}{3}$ است؟



- (۱) ۱۳

- (۳) ۱۵

۲۷- در یک مثلث متساوی‌الساقین، اندازه قاعده ۱۲ و اندازه میانه وارد بر آن، برابر $3\sqrt{5}$ است. اندازه میانه نظیر هر ساق کدام است؟

- (۴) $\frac{\sqrt{123}}{2}$ (۳) $\frac{3\sqrt{41}}{2}$ (۲) $\frac{15}{2}$ (۱) $\frac{9\sqrt{3}}{2}$

محل انجام محاسبات

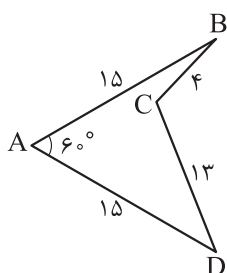
۲۸- در تجانس به مرکز O و نسبت تجانس $K > 1$ ، نقطه M' مجانس نقطه M است. اگر در تجانس به مرکز M ، نقطه O تصویر نقطه M' باشد، نسبت تجانس کدام است؟

$\frac{1}{1-K}$ (۱) $K-1$ (۲) $\frac{1}{K-1}$ (۳) $1-K$ (۴)

۲۹- دو نقطه $A(1,4)$ و $B(3,2)$ مفروض‌اند. نقطه M روی محور x ها با کدام طول انتخاب شود تا $AM + MB$ کوتاه‌ترین طول ممکن را داشته باشد؟

$1/5$ (۱) $1/75$ (۲) $\frac{7}{3}$ (۳) $\frac{8}{3}$ (۴)

۳۰- می‌خواهیم بدون تغییر در محیط و تعداد اضلاع چهارضلعی $ABCD$ ، مساحت آن را تا حد ممکن افزایش دهیم. میزان این افزایش مساحت چه قدر است؟



48 (۱) 36 (۲) 24 (۳) 18 (۴)

محل انجام محاسبات



آمار و احتمال

۳۱- سکه‌ای را پرتاب می‌کنیم. اگر «رو» بیاید، ۲ سکه دیگر پرتاب کرده و اگر «پشت» بیاید، ۳ سکه دیگر را پرتاب می‌کنیم. با کدام احتمال تعداد سکه‌های «رو» آمده بیشتر از تعداد سکه‌های «پشت» آمده است؟

$$\begin{array}{ll} \frac{1}{4} (1) & \frac{5}{16} (2) \\ \frac{7}{16} (3) & \frac{11}{16} (4) \end{array}$$

۳۲- دانش‌آموزان دو مدرسه A و B در یک آزمون شرکت کرده‌اند. ۶۰ درصد از دانش‌آموزان مدرسه A و x درصد از دانش‌آموزان مدرسه B در آزمون قبول شده‌اند. اگر تعداد دانش‌آموزان مدرسه A، ۳ برابر تعداد دانش‌آموزان مدرسه B باشد و فردی به تصادف از قبول‌شدگان انتخاب شود، با احتمال $\frac{8}{100}$ این فرد از مدرسه A است. x کدام است؟

$$\begin{array}{llll} 50 (1) & 60 (2) & 75 (3) & 45 (4) \end{array}$$

۳۳- اعداد طبیعی را طوری دسته‌بندی می‌کنیم که تعداد اعضای هر دسته، ۲ به توان شماره آن دسته باشد، یعنی: $\{1, 2\}, \{3, 4, 5, 6\}, \{7, 8, \dots, 14\}, \dots$ چارک اول داده‌های دسته نهم کدام است؟

$$\begin{array}{ll} 637 / 5 (1) & 638 / 5 (2) \\ 639 / 5 (3) & 640 / 5 (4) \end{array}$$

۳۴- ۱۲ داده آماری با میانگین ۱۰ و واریانس ۵ / ۶۰ داریم. اگر داده‌های ۱۶، ۱۵ و ۱۴ را اضافه کرده و داده با مقدار ۲۵ را حذف کنیم، واریانس ۱۴ داده باقی‌مانده تقریباً کدام است؟

$$\begin{array}{ll} 39 / 3 (1) & 41 / 3 (2) \\ 43 / 3 (3) & 45 / 3 (4) \end{array}$$

۳۵- دامنه تابع f با ضابطه $f(x) = ax - 1$ ، زیرمجموعه‌ای سه‌عضوی از اعداد طبیعی فرد یک‌رقمی با کم‌ترین ضریب تغییرات است. اگر دامنه تغییرات اعضای برد این تابع برابر ۱۶ باشد، a کدام است؟

$$\begin{array}{llll} \pm 2 (1) & \pm 4 (2) & \pm 6 (3) & \pm 8 (4) \end{array}$$

۳۶- اگر داده‌های یک جامعه $4a + 5$ ، $3a + 4$ ، $2a + 3$ ، $a + 2$ و a باشد، چقدر از نمونه‌های دوعضوی پارامتر (میانگین) جامعه را به صورت دقیق برآورد می‌کند؟

$$\begin{array}{llll} 1 (1) & 2 (2) & 3 (3) & 4 (4) \end{array}$$

محل انجام محاسبات



۳۷- در انتخاب نمونه دوعضوی از جامعه $\{10, 11, 13, 14, 17\}$ ، چه قدر احتمال دارد میانگین نمونه از میانگین جامعه کم تر باشد؟

- (۱) $3/0$ (۲) $6/0$ (۳) $5/0$ (۴) $4/0$

۳۸- با نمونه ۱۰۰ عضوی، میانگین جامعه‌ای در بازه $[24/4, 76/3]$ با اطمینان ۹۵ درصد برآورد شده است. انحراف معیار جامعه چه قدر است؟

- (۱) $6/0$ (۲) $2/1$ (۳) $4/2$ (۴) $24/0$

۳۹- برای آن که طول بازه اطمینان ۹۵ درصد نمونه‌ای به اندازه n را نصف کنیم، باید ۷۵۰۰ عضو جدید به نمونه اضافه کنیم، حالا اگر بخواهیم طول بازه اطمینان ۹۵ درصد نمونه n عضوی دو برابر شود، چند عضو باید از نمونه کم کنیم؟

- (۱) ۱۸۷۵ (۲) ۲۲۲۵ (۳) ۲۵۰۰ (۴) ۲۷۷۵

۴۰- داده‌های یک جامعه ۱۰ عضوی را با x_1 تا x_{10} نمایش می‌دهیم. اگر $x_1 + x_2 + \dots + x_{10} = 40$ و $x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_{10}^2 = 200$ ، در این صورت نمونه چهارعضوی که مجموع عضوهایش برابر ۱۴ است، با اطمینان بیش از ۹۵٪ کدام بازه را برای میانگین برآورد می‌کند؟

- (۱) $[3, 4]$ (۲) $[2/5, 5]$ (۳) $[2, 5/5]$ (۴) $[1/5, 5/5]$

فیزیک یازدهم

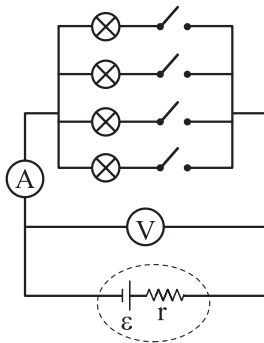
۴۱- لامپی که روی آن دو عدد ۱۲ V و ۴۵ W نوشته شده است را به اختلاف پتانسیل الکتریکی ۸ V وصل می‌کنیم. اگر مقاومت الکتریکی لامپ ثابت بماند، در این حالت انرژی الکتریکی مصرفی آن در مدت یک شبانه‌روز چند کیلووات‌ساعت است؟

- (۱) $۰/۴۸$ (۲) $۰/۶$ (۳) $۰/۷۲$ (۴) $۰/۹۶$

۴۲- اگر جریان الکتریکی عبوری از یک باتری از ۲ A به $۲/۵\text{ A}$ برسد، توان خروجی آن از ۱۲ W به $۱۲/۵\text{ W}$ می‌رسد. مقاومت درونی این باتری چند اهم است؟

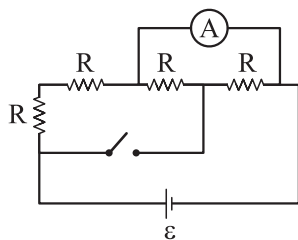
- (۱) ۱ (۲) $۱/۵$ (۳) ۲ (۴) $۲/۵$

۴۳- در مدار شکل زیر، تعدادی لامپ مشابه به طور موازی به هم متصل شده‌اند و هر لامپ با کلیدی همراه است. با بستن کلیدها یکی پس از دیگری، عددهایی که آمپرسنج آرمانی و ولت‌سنج آرمانی نشان می‌دهند، به ترتیب از راست به چپ، چگونه تغییر می‌کنند؟



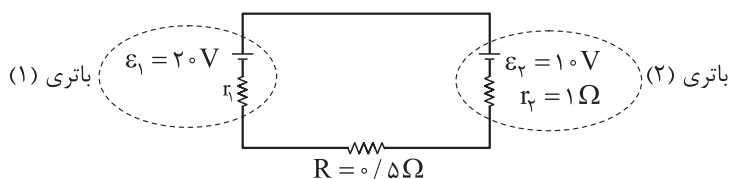
- (۱) کاهش می‌یابد، کاهش می‌یابد.
 (۲) افزایش می‌یابد، افزایش می‌یابد.
 (۳) کاهش می‌یابد، افزایش می‌یابد.
 (۴) افزایش می‌یابد، کاهش می‌یابد.

۴۴- در مدار شکل زیر با بسته شدن کلید، جریانی که از آمپرسنج آرمانی می‌گذرد، چند برابر می‌شود؟



- (۱) ۱
 (۲) ۲
 (۳) ۳
 (۴) ۴

۴۵- در مدار شکل زیر اگر توان مصرفی مقاومت R برابر ۸ W باشد، توان ورودی باتری (۲) چند وات است؟



- (۱) ۲۴
 (۲) ۳۶
 (۳) ۴۸
 (۴) ۵۶

محل انجام محاسبات

۴۶- در شکل زیر، با توجه به وضعیت عقربه مغناطیسی، ناحیه A کدام قطب آهنربا و میدان مغناطیسی در نقطه M کدام جهت است؟



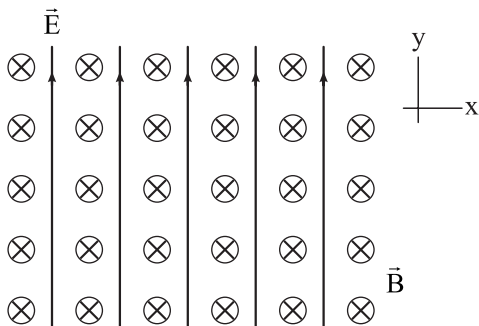
→، S (۲)

←، S (۱)

→، N (۴)

←، N (۳)

۴۷- در شکل زیر، میدان های یکنواخت الکتریکی $E = 100 \text{ N/C}$ و مغناطیسی $B = 100 \text{ G}$ نشان داده شده است. در این فضا، یک الکترون با تندی چند متر بر ثانیه و در چه جهتی در حرکت باشد تا بدون انحراف به حرکت خود ادامه دهد؟ (اثر وزن ناچیز است.)



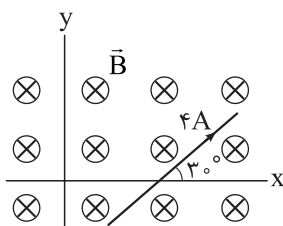
(۱) 10^4 ، در جهت محور X

(۲) 5×10^3 ، در جهت محور X

(۳) 10^4 ، در خلاف جهت محور X

(۴) 5×10^3 ، در خلاف جهت محور X

۴۸- در شکل زیر، سیم مستقیمی به طول 2 m و حامل جریان 4 A ، در میدان مغناطیسی یکنواخت و درون سوی $B = 0.5 \text{ T}$ قرار دارد. بزرگی نیروی مغناطیسی وارد بر سیم چند نیوتون است و این نیرو با امتداد محور X چه زاویه ای می سازد؟



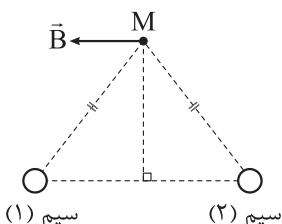
(۱) 4 ، 30°

(۲) 4 ، 60°

(۳) 2 ، 30°

(۴) 2 ، 60°

۴۹- در شکل زیر دو سیم بلند و موازی (۱) و (۲) بر صفحه عمودند و از آن ها جریان های الکتریکی یکسان عبور می کند. اگر میدان مغناطیسی خالص حاصل از این دو سیم در نقطه M در جهت نشان داده شده باشد، جهت جریان عبوری از



سیم های (۱) و (۲) به ترتیب از راست به چپ کدام است؟

(۱) $\odot \odot$

(۲) $\otimes \otimes$

(۳) $\otimes \odot$

(۴) $\odot \otimes$

محل انجام محاسبات

۵۰- پیچهای مسطح به شعاع R را باز کرده و مقداری از سیم آن را بریده و کنار می‌گذاریم و با استفاده از سیم باقی‌مانده، پیچهای به شعاع $\frac{R}{2}$ می‌سازیم. اگر از دو پیچه جریان‌های یکسان عبور کند، بزرگی میدان مغناطیسی در مرکز دو پیچه یکسان می‌شود. طول سیم کنار گذاشته شده، چند درصد از طول اولیه سیم است؟

- (۱) ۲۵ (۲) ۴۰ (۳) ۵۰ (۴) ۷۵

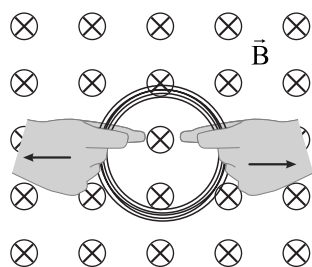
۵۱- خاصیت مغناطیسی ایجادشده در آلومینیم و فولاد در حضور میدان‌های مغناطیسی خارجی قوی به ترتیب از راست به چپ چگونه است؟

- (۱) قوی و موقت - قوی و دائمی
(۲) ضعیف و موقت - قوی و دائمی
(۳) ضعیف و دائمی - ضعیف و موقت
(۴) قوی و دائمی - ضعیف و موقت

۵۲- پیچهای شامل ۲۰۰ حلقه با مقاومت الکتریکی 5Ω در میدان مغناطیسی یکنواختی قرار دارد. در مدتی معین با تغییر میدان مغناطیسی، بار الکتریکی 8 mC در این پیچه شارش می‌یابد. تغییر شار مغناطیسی گذرنده از پیچه در این مدت چند وبر است؟

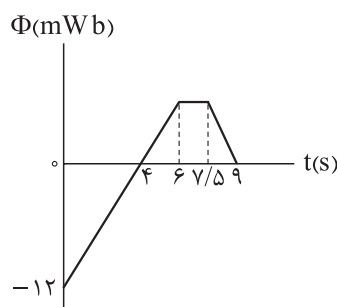
- (۱) 2×10^{-4} (۲) 2×10^{-3} (۳) 4×10^{-4} (۴) 4×10^{-3}

۵۳- در شکل زیر پیچه انعطاف‌پذیر دایره‌ای شکلی به شعاع 25 cm و شامل ۵۰ حلقه در میدان مغناطیسی یکنواخت درون‌سوی $B = 2 \text{ mT}$ قرار دارد. با کشیدن این پیچه از طرفین، در مدت 50 ms ، مساحت آن را ۴۰ درصد کاهش می‌دهیم. در این مدت، بزرگی نیروی محرکه القایی در پیچه چند میلی‌ولت و جریان القایی در آن در چه جهتی است؟ ($\pi = 3$)



- (۱) ۱۵۰، پادساعتگرد
(۲) ۱۵۰، ساعتگرد
(۳) ۱۵، پادساعتگرد
(۴) ۱۵، ساعتگرد

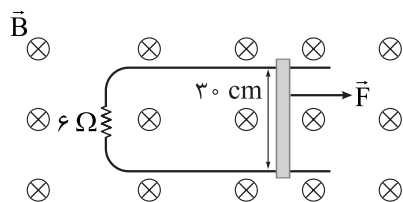
۵۴- نمودار تغییرات شار مغناطیسی عبوری از یک حلقهٔ رسانا بر حسب زمان به شکل زیر است. اندازهٔ بیشینهٔ نیروی محرکهٔ القایی در این حلقه چند میلی‌ولت است؟



- (۱) ۲
(۲) ۳
(۳) ۴
(۴) ۶

محل انجام محاسبات

۵۵- در شکل زیر، رسانای U شکلی در میدان مغناطیسی یکنواخت و درون سوی $B = 0.4 \text{ T}$ قرار دارد. با اعمال نیروی $\vec{F}$ ، میله رسانا را با تندی ثابت جابه‌جایی کنیم. اگر مساحت قاب ایجادشده با آهنگ ثابت $50 \text{ cm}^2/\text{s}$ افزایش یابد، بزرگی نیروی F چند نیوتون است؟



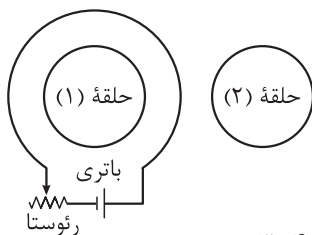
$$(1) 5 \times 10^{-4}$$

$$(2) 5 \times 10^{-5}$$

$$(3) 4 \times 10^{-4}$$

$$(4) 4 \times 10^{-5}$$

۵۶- در شکل زیر حلقه‌های رسانای (۱) و (۲) مشابه‌اند. اگر مقاومت الکتریکی رئوس را کاهش دهیم، چه تعداد از موارد زیر درست است؟



(الف) جریان القایی در حلقه (۱)، پادساعتگرد است.

(ب) جریان القایی در حلقه (۲)، ساعتگرد است.

(پ) جریان القایی در حلقه‌ها هم‌اندازه است.

(۳) (۴)

(۲) (۳)

(۲) (۱)

(۱) صفر

۵۷- سیم‌لوله آرمانی بدون هسته‌ای به طول 6 cm دارای 200 حلقه است. اگر مساحت هر حلقه سیم‌لوله 20 cm^2 و جریان الکتریکی گذرنده از آن برحسب زمان در SI به صورت $I = 5 \sin 100\pi t$ باشد، بیشینه انرژی ذخیره‌شده در آن چند میلی‌ژول است؟ $(\mu_0 = 12 \times 10^{-7} \frac{\text{T.m}}{\text{A}})$

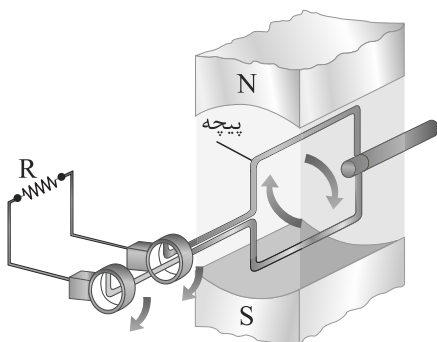
(۴) (۶)

(۳) (۲)

(۲) (۶۰)

(۱) (۲۰)

۵۸- وضعیت پیچه یک مولد جریان متناوب در لحظه $t = 0$ به شکل زیر است. اگر زمان یک دور چرخش کامل پیچه T باشد، در لحظه $t = \frac{T}{6}$ به ترتیب از راست به چپ، جریان گذرنده از پیچه چند برابر جریان بیشینه و شار مغناطیسی عبوری از آن چند برابر شار بیشینه است؟



$$(1) \frac{1}{2}, \frac{1}{2}$$

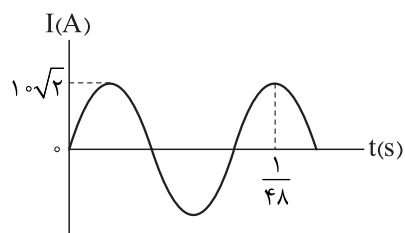
$$(2) \frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$(3) \frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}$$

$$(4) \frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}$$

محل انجام محاسبات

۵۹- از یک مقاومت، جریان متناوب سینوسی که نمودار تغییرات آن بر حسب زمان به صورت شکل زیر است، عبور می‌کند. اگر اختلاف پتانسیل دو سر این مقاومت در لحظه $\frac{1}{48} \text{ s}$ برابر با 40 V باشد، مقدار این مقاومت چند اهم است؟



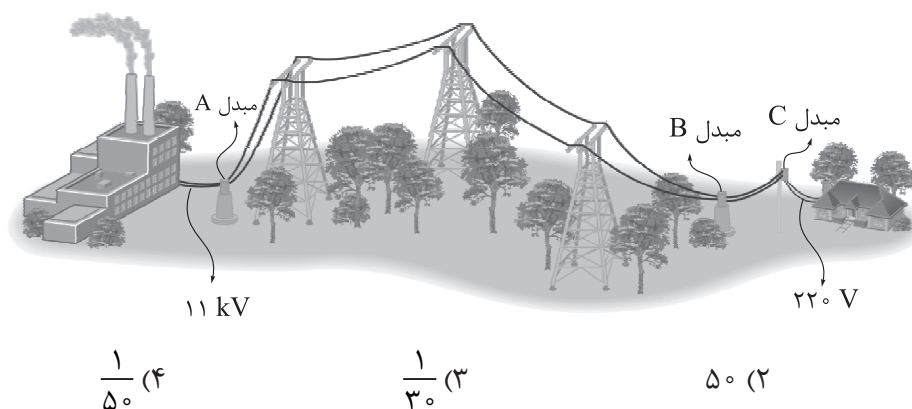
(۱) ۲

(۲) ۴

(۳) ۵

(۴) ۸

۶۰- شکل زیر مسیر انتقال برق از یک نیروگاه به شهری را نشان می‌دهد. در این انتقال از سه مبدل A، B و C استفاده شده است. اگر نسبت تعداد دور پیچۀ ثانویه به اولیه در مبدل‌های A و C به ترتیب برابر 30° و $\frac{1}{50}$ باشد، نسبت تعداد دور پیچۀ اولیه به تعداد دور پیچۀ ثانویه در مبدل B کدام است؟

(۴) $\frac{1}{50}$ (۳) $\frac{1}{30}$

(۲) ۵۰

(۱) ۳۰

محل انجام محاسبات

شیمی یازدهم

۶۱- علامت ΔH کدام فرایند، با علامت ΔH چگالش کربن دی اکسید یکسان است؟

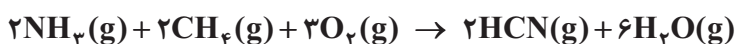
(۱) فتوسنتز

(۲) تجزیه دی نیتروژن تترا اکسید به نیتروژن دی اکسید

(۳) تبدیل اوزون به اکسیژن

(۴) تبخیر آب

۶۲- اگر در مدت ۵۰۰ ثانیه، ۱۳/۴۴ لیتر گاز اکسیژن در واکنش زیر در شرایط STP مصرف شود، سرعت متوسط مبادله گرما چند کیلوژول بر دقیقه خواهد بود؟ (مجموع آنتالپی پیوندها در مواد واکنش دهنده و فراورده به ترتیب ۷۲۲۰ و ۸۱۱۰ کیلوژول بر مول است.)



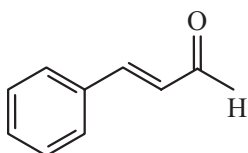
(۴) ۳۵/۶

(۳) ۲۱/۳۶

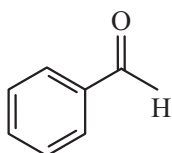
(۲) ۱۷/۸

(۱) ۱۰/۶۸

۶۳- با توجه به ساختار دو مولکول داده شده، کدام مورد درست است؟ ($\text{O} = ۱۶, \text{C} = ۱۲, \text{H} = ۱: \text{g.mol}^{-1}$)



(a)



(b)

(۱) تفاوت شمار الکترون‌های اشتراکی مولکول a و مولکول b برابر ۵ است.

(۲) تفاوت جرم مولی دو مولکول a و b، برابر با جرم مولی دومین عضو خانواده آلکین‌ها است.

(۳) اگر اتم‌های هیدروژن در دو مولکول با گروه متیل جایگزین شود، میزان افزایش جرم مولی a بیشتر از b خواهد بود.

(۴) تفاوت شمار پیوندهای C-H در دو مولکول، دو برابر شمار جفت الکترون‌های ناپیوندی هر یک از مولکول‌ها است.

۶۴- گرمای حاصل از سوختن مقداری متان برای افزایش دمای یک جسم از جنس مس به جرم ۱۰ کیلوگرم به اندازه ۴۳/۸

کلوین استفاده شده است. اگر ۲۰ درصد انرژی حاصل از سوختن متان در این فرایند تلف شده باشد، چند گرم متان مصرف

شده است؟ ($\Delta H_{(\text{سوختن } \text{CH}_4)} = -۸۷۶ \text{ kJ.mol}^{-1}$, $c(\text{Cu}) = ۰/۴ \text{ J.g}^{-1}.\text{C}^{-1}$, $\text{C} = ۱۲, \text{H} = ۱: \text{g.mol}^{-1}$)

(۲) ۳/۲

(۱) ۱/۶

(۴) ۴

(۳) ۳/۶

محل انجام محاسبات

۶۵- درستی یا نادرستی کدام گزینه دربارهٔ ماده‌ای که به «گاز مرداب» معروف است، با بقیهٔ گزینه‌ها تفاوت دارد؟

(۱) می‌توان آن را به راحتی از واکنش میان گرافیت و گاز هیدروژن در آزمایشگاه تهیه کرد.

(۲) ارزش سوختی آن از متانول، بیشتر و از اتان، کم‌تر است.

(۳) برای سوختن کامل هر مول از آن، به $44/8$ لیتر گاز اکسیژن در شرایط STP نیاز است.

(۴) مناسب‌ترین روش برای تعیین آنتالپی سوختن آن، استفاده از گرماسنج لیوانی است.

۶۶- در کدام یک از گزینه‌های زیر، علت هر دو پدیده مشابه بوده ولی به درستی در مقابل آن‌ها ذکر نشده است؟

(۱) «نفخ معده با مصرف کلم و حبوبات» و «سوختن سریع تر قند آغشته به خاک باغچه» ← تأثیر کاتالیزگر بر سرعت واکنش

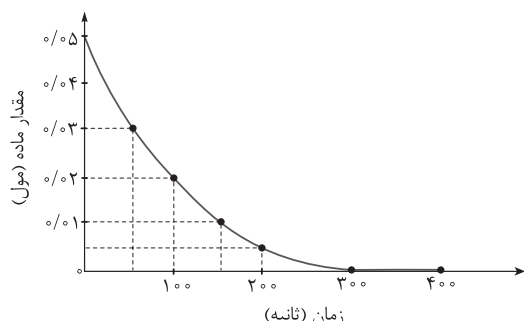
(۲) «استفاده از کپسول اکسیژن توسط بیماران تنفسی» و «نگهداری سدیم زیر نفت» ← تأثیر نوع واکنش‌دهنده بر سرعت واکنش

(۳) «خالی کردن هوای درون ظرف بسته‌بندی مواد غذایی» و «پرکردن تایر خودرو با گاز نیتروژن» ← تأثیر غلظت بر سرعت واکنش

(۴) «خشک کردن سبزی و میوه در معرض نور آفتاب» و «بسته‌بندی روغن مایع در ظرف مات و کدر» ← تأثیر رطوبت بر فساد مواد غذایی

۶۷- نمودار تغییر مول‌های نوعی رنگ غذا در واکنش با یک محلول سفیدکننده به صورت زیر است. با توجه به آن، کدام

مورد نادرست است؟



(۱) این واکنش پس از گذشت ۵ دقیقه به پایان رسیده است.

(۲) شیب نمودار «مول - زمان» رنگ غذا و محلول سفیدکننده، هر دو منفی است.

(۳) در بازهٔ زمانی صفر تا ۱۵۰ ثانیه، سرعت متوسط مصرف رنگ غذا، برابر $0/24$ مول بر ساعت است.

(۴) در صورت استفاده از کاتالیزگر مناسب، تعداد مول‌های رنگ غذا در $t = 100$ s، می‌تواند برابر $0/15$ مول باشد.

۶۸- مقدار کافی گاز پروپان در شرایط استاندارد، وارد یک ظرف دارای $16/8$ لیتر گاز اکسیژن شده است. اگر سرعت

متوسط واکنش سوختن، $3/0$ مول بر دقیقه باشد، پس از گذشت t ثانیه، $7/92$ گرم فراوردهٔ گازی تولید می‌شود و t'

ثانیه پس از این لحظه، واکنش به پایان می‌رسد. مقدار $\frac{t'}{t}$ کدام است؟ ($O = 16, C = 12, H = 1: g.mol^{-1}$)

$0/67$ (۴)

$0/75$ (۳)

$1/33$ (۲)

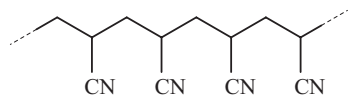
$1/5$ (۱)

محل انجام محاسبات

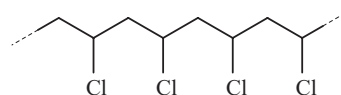
۶۹- کدام مورد درست است؟

- (۱) برخلاف الیاف ساختگی، الیاف طبیعی تنها برای تهیه پارچه و پوشاک به کار می‌روند.
- (۲) جرم مولی نایلون همانند سلولز بسیار زیاد است و هر دو، جزء پلیمرهای ساختگی هستند.
- (۳) ترکیب‌هایی که از دو عنصر هیدروژن و کربن تشکیل شده‌اند، جزء کوچک‌مولکول‌ها به شمار می‌آیند.
- (۴) در شماری از درشت‌مولکول‌ها، واحدهای تکرارشونده وجود ندارد.

۷۰- با توجه به ساختار پلیمرهای داده‌شده، چند مورد از مطالب زیر نادرست است؟



(A)



(B)

- هر دو پلیمر برخلاف پلی‌استیرن، جزء پلیمرهای غیر هیدروکربنی هستند.
- از پلیمر A در ساخت پتو و از پلیمر B، برای ساخت سرنگ استفاده می‌شود.
- مونومر سازنده هر دو پلیمر، رنگ قرمز برم را از بین برده و تعداد پیوندهای اشتراکی برابری دارند.
- اگر به جای هالوژن‌های موجود در پلیمر B، واکنش‌پذیرترین نافلز جدول دوره‌ای قرار گیرد، تفلون به دست می‌آید.

(۴) ۴

(۳) ۳

(۲) ۲

(۱) ۱

۷۱- کدام موارد از مطالب زیر، نادرست است؟

- (الف) با افزایش شمار اتم‌های کربن در مولکول الکل‌های تک‌عاملی، خاصیت چربی‌دوستی آن‌ها کاهش می‌یابد.
- (ب) واکنش استری شدن در محیط اسیدی انجام می‌گیرد و برگشت‌پذیر است.
- (پ) مولکول‌های اتانول و اتانوائیک اسید در شمار اتم‌های هیدروژن مشابه‌اند.
- (ت) در مولکول ۱-اوکتانول، بخش ناقطبی بر بخش قطبی غلبه دارد.

(۴) ب - پ

(۳) الف - ت

(۲) ب - ت

(۱) الف - پ

۷۲- کدام گزینه در ارتباط با دو نوع پلی‌اتن داده‌شده، نادرست است؟



(A)



(B)

- (۱) قطعه ساخته‌شده از پلیمر B، استحکام بیشتری نسبت به قطعه مشابه ساخته‌شده از پلیمر A دارد.
- (۲) اگر دو نمونه با حجم یکسان از این دو پلیمر وجود داشته باشد، جرم نمونه پلیمر B بیشتر است.
- (۳) نوع نیروی بین‌مولکولی A به اتان و نوع نیروی بین‌مولکولی B به اتانول شباهت دارد.
- (۴) پلیمر A، ظاهری شفاف و پلیمر B، ظاهری کدر دارد.

محل انجام محاسبات



۷۳- در اثر سوختن کامل ۵۵/۰ مول از یک نمونه پلی پروپن، $27/72 \text{ m}^3$ گاز کربن دی اکسید در شرایط STP آزاد شده است. جرم اولیه این نمونه پلی پروپن چند کیلوگرم بوده است؟ ($C = 12, H = 1: \text{g.mol}^{-1}$)

۱۷/۳۲۵ (۱) ۲۳/۱۰ (۲) ۳۴/۶۵ (۳) ۴۶/۲۰ (۴)

۷۴- درستی یا نادرستی عبارتهای زیر، به ترتیب در کدام گزینه آمده است؟

- الکل سازنده استر موجود در انگور (اتیل هپتانوات) نسبت به الکل سازنده استر موجود در موز (پنتیل اتانوات)، انحلال پذیری و نقطه جوش بیشتری دارد.
- الیاف پنبه‌ای از سلولز ساخته شده و در سال‌های اخیر، میزان تولید آن‌ها همانند الیاف پلی استری، روند صعودی داشته است.
- نیروی بین مولکولی غالب در متیل فرمات، وان دروالسی بوده و از آشناترین عضو خانواده کربوکسیلیک اسیدها، نقطه جوش پایین تری دارد.

• مولکول‌های نشاسته در محیط مرطوب با کاتالیزگر، به سرعت به مونومرهای سازنده خود تبدیل می‌شوند.

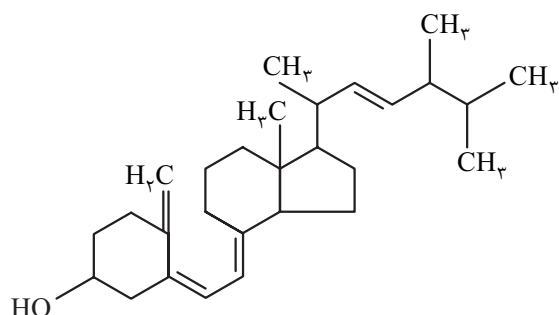
(۱) درست - نادرست - درست - نادرست

(۲) نادرست - درست - درست - نادرست

(۳) نادرست - نادرست - نادرست - درست

(۴) درست - درست - نادرست - درست

۷۵- کدام گزینه در مورد مولکول مقابل نادرست است؟



(۱) در شرایط مناسب می‌تواند با ۴ مول برم، واکنش داده و رنگ قرمز آن را از بین ببرد.

(۲) تفاوت شمار اتم‌های هیدروژن و کربن در آن با مجموع شمار اتم‌ها در ترکیب آلی ایجادکننده طعم و بوی آناناس، برابر است.

(۳) گشتاور دوقطبی آن مانند گشتاور دوقطبی هگزان، تقریباً برابر صفر است.

(۴) در چربی حل شده و در مواد غذایی مانند شیر یافت می‌شود.

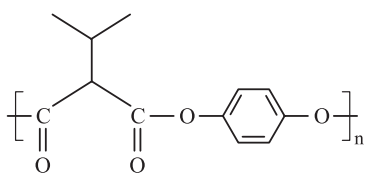
۷۶- شمار کل پیوندهای اشتراکی در ساختار کدام مولکول، بیشتر است؟

(۱) ۱، ۲- دی کلرو اتان (۲) متیل آمین (۳) بوتانوئیک اسید (۴) متیل استات

محل انجام محاسبات



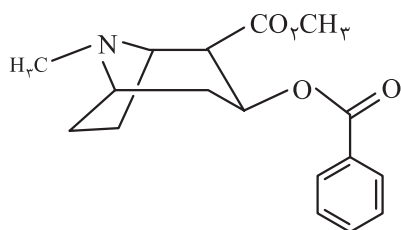
۷۷- با توجه به ساختار پلیمر مقابل، کدام گزینه نادرست است؟



- (۱) تفاوت جرم مولی مونومرهای سازنده آن، دو برابر جرم مولی آب است.
 (۲) دی‌الکل سازنده آن با نگهدارنده موجود در تمشک، ایزومر است.
 (۳) همانند استیرن، شمار اتم‌های کربن و هیدروژن در واحد تکرارشونده این پلیمر برابر است.

(۴) برای سوختن کامل یک مول از دی‌اسید سازنده آن، به ۶/۵ مول گاز اکسیژن نیاز است.

۷۸- کدام موارد از مطالب زیر، درباره ترکیبی با ساختار مقابل، درست است؟



- (الف) استری دوعاملی بوده و می‌تواند در واکنش تولید نوعی آمید شرکت کند.
 (ب) شمار پیوندهای C—N و C—O در آن با هم برابر است.
 (پ) شمار اتم‌های کربنی که به هیدروژن متصل نیستند، با شمار گروه‌های CH_۳ در آن برابر است.

(ت) ترکیبی آروماتیک بوده و در ساختار آن، ۱۸ الکترون ناپیوندی وجود دارد.

- (۱) الف - ب (۲) الف - پ (۳) ب - ت (۴) پ - ت

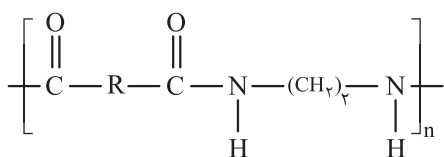
۷۹- کدام موارد از مطالب زیر، درست است؟

- (الف) کولار یکی از معروف‌ترین پلی‌آمیدهای طبیعی است و نسبت به فولاد هم‌جرم خود، پنج برابر مقاوم‌تر است.
 (ب) پوشاک و پوشش‌های تهیه‌شده از هیدروکربن‌های سیرنشده در طبیعت تجزیه نمی‌شوند و برای سالیان طولانی دست‌نخورده باقی می‌مانند.
 (پ) استفاده از پلیمرهای ماندگار، صرفه اقتصادی دارد و از نگاه توسعه پایدار، تولید و استفاده از آن‌ها، الگوی مصرف مطلوبی است.
 (ت) مونومر یکی از پلیمرهای سبز، اسید موجود در شیر ترش‌شده است که از نشاسته موجود در فراورده‌های کشاورزی مانند ذرت و نیشکر تهیه می‌شود.

- (۱) الف - ب (۲) الف - پ (۳) ب - ت (۴) پ - ت

۸۰- در اثر واکنش آبکافت ۴۲/۶ گرم پلی‌آمیدی با ساختار زیر، ۳۵/۴ گرم کربوکسیلیک اسید دوعاملی تولید شده

است. جرم مولی اسید تولیدشده چند گرم بر مول است؟ (O = ۱۶, N = ۱۴, C = ۱۲, H = ۱: g.mol⁻¹)



(۱) ۹۰

(۲) ۱۰۴

(۳) ۱۱۸

(۴) ۱۳۲

محل انجام محاسبات

مهم ترین ویژگی های آزمون های خیلی سبز در پایه های دهم و یازدهم:

- ۱- برگزاری دست کم یک آزمون در ماه بر اساس روال تدریس در مدرسه
- ۲- برگزاری آزمون های ویژه برای زمان های خاص (میان ترم، ترم، پس از عیدو...)
- ۳- امکان جبران عقب ماندگی ها یا دوره مطالب برای تثبیت آنها

پاسخنامه تشریحی آزمون را ساعت ۱۶ از صفحه
شخصی خودتان در سایت آزمون خیلی سبز دریافت کنید.



azmoon.kheilisabz.com

اساتید، مشاوران و دانش آموزان گرامی؛
نظرات، پیشنهادات، انتقادات و بازخوردهای خود نسبت به سؤالات این آزمون را می توانید
از طریق آیدی @Kheilisabz_edit در همه پیام رسان ها با ما به اشتراک بگذارید.



www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshCloud11

پاسخ نامه آزمون آزمایشی خلی سبز



مرحله یازدهم

پایه یازدهم

سال تحصیلی ۱۴۰۳-۰۴ تاریخ برگزاری: ۱۲/ اردیبهشت/ ۱۴۰۴

نام درس	طراحان به ترتیب حروف الفبا
حسابان	عادل حسینی - مصطفی دیداری - محمدرضا راسخ - علی شهبابی محمد گودرزی - حسین نادری - محمدسجاد نقیه - جهانبخش نیکنام
هندسه	امیرحسین ابومحبوب - محمدطاهر شعاعی - صبا مهدوی - حسین هاشمی طاهری
آمار و احتمال	مسعود شفیعی - عطا صادقی - سروش مؤینی
فیزیک	یاشار انگوتی - نوید شاهی
شیمی	یاسر عبداللہی - آرمین عظیمی - امیرمحمد کنگرانی

نام درس	مستول درس	گزینشگر	مؤلف پاسخ نامه	کارشناسان علمی	ویراستاران به ترتیب حروف الفبا
حسابان	محمدسجاد نقیه	محمدسجاد نقیه	عادل حسینی	فرشاد حسن زاده	سہیل تقی زاده زہرا جالینوسی منصور زرکش اصفہانی
هندسه	امیرحسین ابومحبوب	امیرحسین ابومحبوب	فرزانه خاکپاش	محمد خندانی	زہرا جالینوسی منصور زرکش اصفہانی ابوالفضل ناصری
آمار و احتمال	مسعود شفیعی	مسعود شفیعی	علیرضا کاظمی بقا	امیرحسین ابومحبوب سعید قندچی علیرضا کاظمی بقا	عادل حسینی فرزانه خاکپاش منصور زرکش اصفہانی
فیزیک	نوید شاهی	یاشار انگوتی	علیرضا عبداللہی	علیرضا عبداللہی	مسعود خندانی محمد سادہ ماہان فتی فر مریم گلی حسنلو
شیمی	یاسر عبداللہی	یاسر عبداللہی	یاسر عبداللہی	رامین آزادی حمید ذہبی	احسان رحیمی صدرا عبادی متین قنبری

سرپرست محتوایی: فاطمه آقاجانپور



Azmoon.kheilisabz.com



www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshCloud11

ویژه یازدهمی های ۱۴۰۳

آزمون آزمائشی خلی سبز

سرپرست تولید	الناز علی یاری زاده
ویراستاران فنی	نیلوفر اعتمادی - نیوشا پیمان زهره صفری - فاطمه علی اکبری - محیا غنی فرد زهره فرهادی مهر - مریم مسلمی زاده نادره نازآوری - ساعده نمازی
رسم	مونا آندستا ندا فخاری سارا گنجی آزادپور
صفحه آرایی	صدف امام - مریم حسین زاده سپیده سخائی - الهام سهرابی - طاهره صادق نژاد مائده صبری - نیلوفر فرخجسته - مهدیه گل پور دریا لطفی



۱ بعد از ۲۰۰ سال، $\frac{15}{16}$ جرم اولیه یک ماده رادیواکتیو واپاشی می شود و از بین می رود. نیم عمر این ماده خاص، چند سال است؟

۱۰۰ (۴)

۵۰ (۳)

۲۵ (۲)

۲۰ (۱)

پاسخ: گزینه ۳

درس Box

اگر نیم عمر یک ماده رادیواکتیو T و مقدار اولیه آن m_0 باشد، پس از گذشت مدت زمان t ، مقدار باقی مانده از این ماده از تابع زیر به دست می آید:

$$m(t) = m_0 \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{T}}$$

و طبیعتاً مقدار از بین رفته از تابع $m_d(t) = m_0 \left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{T}}\right)$ به دست می آید.

پس از گذشت n نیم عمر، $\frac{1}{2^n}$ جرم ماده اولیه باقی می ماند و $\frac{2^n - 1}{2^n}$ آن واپاشی شده و از بین می رود.

نکته

پاسخ خیلی تشریحی ✓ بعد از ۲۰۰ سال، $\frac{15}{16}$ جرم اولیه واپاشی شده است، یعنی $\frac{1}{16}$ جرم اولیه ماده باقی مانده است؛ یعنی $\left(\frac{1}{2}\right)^4$ از آن، بنابراین ۲۰۰ سال به اندازه ۴ نیم عمر ماده است؛ در نتیجه نیم عمر ماده ۵۰ سال بوده است.

تابع $f(x) = [x^2]$ در چند نقطه از نقاط بازه $(2, 3)$ ناپیوسته است؟ $([])$ ، نماد جزء صحیح است.

۷ (۴)

۶ (۳)

۵ (۲)

۴ (۱)

پاسخ: گزینه ۱

درس Box

تابع f در $x = a$ پیوسته است؛ اگر و فقط اگر $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$ ، به بیان دیگر حدهای چپ و راست تابع و مقدار آن باید در $x = a$ برابر باشند.

تابع $g(x) = [f(x)]$ در $x = x_0$ که $x = x_0$ و $f(x_0) \in \mathbb{Z}$ طول مینیمم نسبی تابع f نباشد، ناپیوسته است.

پاسخ خیلی تشریحی ✓ گام اول: طبق درس باکس، تابع f در جاهایی که x^2 عددی صحیح شود، ناپیوسته است. این عدد صحیح را k در نظر می گیریم:

$$x^2 = k \Rightarrow x = \sqrt{k}$$

گام دوم: حالا $\sqrt{k}$ را در بازه $(2, 3)$ قرار می دهیم:

$$2 < \sqrt{k} < 3 \Rightarrow 4 < k < 9$$

اعداد صحیح این بازه ۵، ۶، ۷ و ۸ هستند.

۳ اگر $f(x) = \frac{2x+3}{1-4x}$ باشد، تابع f^{-1} در نقطه‌ای با کدام طول ناپیوسته است؟

- (۴) ۲ (۳) $\frac{1}{4}$ (۲) -۲ (۱) $-\frac{1}{4}$

پاسخ: گزینه ۱

درس Box

توابع گویا فقط به ازای ریشه‌های مخرجشان تعریف نمی‌شوند و همین نقاط، نقاط ناپیوستگی تابع را تشکیل می‌دهند.

در حالت خاص تابع هموگرافیک $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$ فقط یک نقطه ناپیوستگی به طول $x = -\frac{d}{c}$ در $\mathbb{R}$ دارد. تنها نقطه ناپیوستگی وارون آن هم در $\mathbb{R}$ ، نقطه‌ای به طول $x = \frac{a}{c}$ است.

✓ پاسخ خیلی تشریحی طبق درس باکس تابع f در $x = \frac{1}{4}$ و تابع f^{-1} در $x = -\frac{1}{4}$ ناپیوسته هستند.

۴ اگر $\frac{1}{\log_a 6} + \frac{1}{\log_b 6} + \frac{1}{\log_c 6} = 2$ باشد، حاصل $\log_{\sqrt[3]{abc}} 6$ کدام است؟

۱ (۴)

۲ (۳)

۳ (۲)

۴ (۱)

پاسخ: گزینه ۲

ویژگی‌های لگاریتم:

درس‌Box

ردیف	ویژگی	مثال
۱	$\log_a a = 1$	$\log_5 5 = 1$
۲	$\log_a 1 = 0$	$\log_{10} 1 = 0$
۳	$\log_a a + \log_a b = \log_a ab$	$\log_2 3 + \log_2 5 = \log_2 15, \log_2 12 = \log_2 3 + \log_2 4$
۴	$\log_a a - \log_a b = \log_a \frac{a}{b}$	$\log_2 10 - \log_2 3 = \log_2 5, \log_2 8 = \log_2 4 - \log_2 2$
۵	$\log_{b^n} a^m = \frac{m}{n} \log_b a$	$\log_{5^3} 3^2 = \frac{2}{3} \log_5 3$
۶	$a^{\log_c b} = b^{\log_c a}$	$3^{\log_{\sqrt{3}} 16} = 16^{\log_{\sqrt{3}} 3} = 16^2$
۷	$\log_b a = \frac{\log_a a}{\log_a b}$	$\log_2 6 = \frac{\log_6 6}{\log_6 2}$
۸	$\log_b a = \frac{1}{\log_a b}$	$\log_2 3 = \frac{1}{\log_3 2}$

پاسخ خیلی تشریحی ✓ گام اول: از ویژگی معکوس کردن لگاریتم استفاده می‌کنیم و داریم:

$$\frac{1}{\log_a 6} + \frac{1}{\log_b 6} + \frac{1}{\log_c 6} = \log_6 a + \log_6 b + \log_6 c = \log_6 abc = 2$$

گام دوم: پس داریم:

$$\log_{\sqrt[3]{abc}} 6 = \log_{(abc)^{\frac{1}{3}}} 6 = 3 \log_{abc} 6 = \frac{3}{\log_6 abc} = \frac{3}{2}$$

تابع $f(x) = 2 \log(3x-1) - 3$ مفروض است. اگر $f^{-1}(x) = \frac{1}{a}(1 + 10^{\frac{x+b}{c}})$ باشد، حاصل $[\frac{2a+b}{c}]$ کدام است؟ ([] ، نماد جزء صحیح است.)

۶ (۴

۵ (۳

۴ (۲

۳ (۱

پاسخ: گزینه ۲

پاسخ خیلی تشریحی ✓ گام اول: ضابطه تابع f^{-1} را به دست می آوریم:

$$y = 2 \log(3x-1) - 3 \Rightarrow \log(3x-1) = \frac{y+3}{2} \Rightarrow 3x-1 = 10^{\frac{y+3}{2}} \Rightarrow x = \frac{1}{3}(1 + 10^{\frac{y+3}{2}})$$

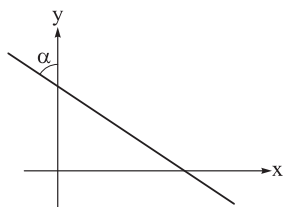
و با تعویض جای X و Y داریم:

$$f^{-1}(x) = \frac{1}{3}(1 + 10^{\frac{x+3}{2}})$$

گام دوم: با تطابق این ضابطه و ضابطه مفروض صورت سؤال داریم:

$$\begin{cases} a = 3 \\ b = 3 \\ c = 2 \end{cases} \Rightarrow [\frac{2a+b}{c}] = [\frac{9}{2}] = 4$$

خط $2x + 3y - 6 = 0$ در شکل زیر رسم شده است. مقدار $\cos(\frac{\pi}{4} + \alpha)$ کدام است؟



- (۱) $-\frac{3}{\sqrt{13}}$
- (۲) $-\frac{2}{\sqrt{13}}$
- (۳) $\frac{3}{\sqrt{13}}$
- (۴) $\frac{2}{\sqrt{13}}$

پاسخ: گزینه ۱

Hint از مثلث قائم الزاویه شکل استفاده کن.

درس Box

نوشتن نسبت‌های مثلثاتی زوایای $\frac{k\pi}{4} \pm \alpha$ بر حسب زاویه α :

مرحله ۱: اگر کمان از 2π بیشتر بود، مجاز هستیم مضارب 2π را از آن کم کنیم، تا به زاویه‌ای در محدوده صفر تا 2π برسیم.

مرحله ۲: اگر π یا 2π داشتیم، نسبت مثلثاتی عوض نمی‌شود، ولی اگر $\frac{\pi}{4}$ یا $\frac{3\pi}{4}$ داشتیم. $\sin$ به $\cos$ (و بالعکس) و $\tan$ به $\cot$ (و بالعکس) تبدیل می‌شود.

مرحله ۳: α را زاویه‌ای در ربع اول (مثلاً 1°) در نظر می‌گیریم و با توجه به آن، محدوده زاویه $\frac{k\pi}{4} \pm \alpha$ را و علامت نسبت را تعیین می‌کنیم.

مثال: $\sin(\frac{7\pi}{4} - \alpha)$

مرحله ۱: از $\frac{7\pi}{4}$ ، 2π کم می‌کنیم و آن را حذف می‌کنیم:

$$\sin(\frac{7\pi}{4} - \alpha) = \sin(\frac{7\pi}{4} - \frac{2\pi}{1} + \frac{3\pi}{4} - \alpha) = \sin(\frac{3\pi}{4} - \alpha)$$

حذف

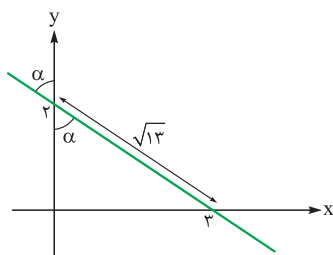
مرحله ۲: به خاطر $\frac{3\pi}{4}$ ، $\sin$ به $\cos$ تبدیل می‌شود.

مرحله ۳: با فرض $\alpha = 1^\circ$ ، زاویه $\frac{3\pi}{4} - \alpha$ می‌شود 26° که در ربع سوم قرار دارد و در این ربع $\sin$ منفی است.

$$\sin(\frac{7\pi}{4} - \alpha) = -\cos \alpha$$

مرحله ۲
↑
مرحله ۳
↓

پاسخ خیلی تشریحی ✓ گام اول: خط $2x + 3y - 6 = 0$ در دستگاه مختصات به صورت زیر است:



در مثلث قائم الزاویه شکل، $\tan \alpha = \frac{\text{مقابل}}{\text{مجاور}} = \frac{3}{2}$ است و از آن‌جا که α حاده است، داریم:

$$\sin \alpha = \frac{\text{مقابل}}{\text{وتر}} = \frac{3}{\sqrt{13}}, \quad \cos \alpha = \frac{\text{مجاور}}{\text{وتر}} = \frac{2}{\sqrt{13}}$$

گام دوم: حال عبارت مورد نظر را مطابق روش درس باکس حساب می‌کنیم:

$$\cos(\frac{\pi}{4} + \alpha) = -\sin \alpha = -\frac{3}{\sqrt{13}}$$

اگر $\alpha + \beta = \frac{19\pi}{4}$ و $X = \frac{\sin \alpha + \tan \alpha \tan \beta - 1}{\sin \beta - \cos^2 \alpha - \cos^2 \beta + 1}$ باشد، حاصل $1 + X^2$ کدام است؟

$$\frac{1}{\sin^2 \beta} \quad (2)$$

$$\cot^2 \beta \quad (1)$$

$$\frac{1}{\cos^2 \beta} \quad (4)$$

$$\tan^2 \beta \quad (3)$$

پاسخ: گزینه ۲

پاسخ خیلی تشریحی ✓ گام اول: نسبت‌های مثلثاتی کمان β را بر حسب کمان α می‌نویسیم:

$$\tan \beta = \tan\left(\frac{19\pi}{4} - \alpha\right) = \tan\left(9\pi + \frac{\pi}{4} - \alpha\right) = \tan\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right) = \cot \alpha$$

$$\cos \beta = \cos\left(9\pi - \frac{\pi}{4} - \alpha\right) = \cos\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right) = -\sin \alpha$$

$$\sin \beta = -\sin\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right) = -\cos \alpha$$

$$X = \frac{\sin \alpha + \tan \alpha \cot \alpha - 1}{-\cos \alpha - \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha + 1} = \frac{\sin \alpha}{-\cos \alpha} = -\tan \alpha$$

گام دوم: پس داریم:

$$1 + X^2 = 1 + \tan^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha} = \frac{1}{\sin^2 \beta}$$

گام سوم: و عبارت خواسته شده سؤال برابر است با:

حاصل عبارت $\cos \frac{\pi}{\sqrt{2}} \cos \frac{2\pi}{\sqrt{2}} \cos \frac{4\pi}{\sqrt{2}} \cos \frac{8\pi}{\sqrt{2}}$ کدام است؟



$$\frac{1}{\sqrt{2}} \sin \frac{\pi}{\sqrt{2}} \quad (2)$$

$$\frac{1}{16} \sin \frac{2\pi}{\sqrt{2}} \quad (1)$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \cos \frac{2\pi}{\sqrt{2}} \quad (4)$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \cos \frac{\pi}{\sqrt{2}} \quad (3)$$

پاسخ: گزینه ۳

روابط مثلثاتی دو برابر کمان:

درس Box

$$\sin 2\theta = 2 \sin \theta \cos \theta$$

$$\cos 2\theta = \cos^2 \theta - \sin^2 \theta = 2 \cos^2 \theta - 1 = 1 - 2 \sin^2 \theta$$

$$\cos \theta \cos 2\theta \cos 4\theta \dots \cos 2^{n-1} \theta = \frac{\sin 2^n \theta}{2^n \sin \theta}$$

نکته

پاسخ خیلی تشریحی ✓ گام اول: طبق نکته، حاصل عبارت برابر است با:

$$T = \frac{\frac{1}{2^4} \sin(2^4 \times \frac{\pi}{\sqrt{2}})}{\sin \frac{\pi}{\sqrt{2}}} = \frac{1}{16} \frac{\sin \frac{16\pi}{\sqrt{2}}}{\sin \frac{\pi}{\sqrt{2}}}$$

گام دوم:

$$\sin \frac{16\pi}{\sqrt{2}} = \sin(2\pi + \frac{2\pi}{\sqrt{2}}) = \sin \frac{2\pi}{\sqrt{2}}$$

و در نتیجه داریم:

$$T = \frac{\frac{1}{16} (2 \sin \frac{\pi}{\sqrt{2}} \cos \frac{\pi}{\sqrt{2}})}{\sin \frac{\pi}{\sqrt{2}}} = \frac{1}{8} \cos \frac{\pi}{\sqrt{2}}$$

حاصل $\lim_{x \rightarrow 0^-} ([x] + [x^2] + [x^3] + \dots + [x^{100}])$ کدام است؟ ([] ، نماد جزء صحیح است.)

۱۰۰ (۴)

۵۰ (۳)

صفر (۲)

-۵۰ (۱)

پاسخ: گزینه ۱

پاسخ خیلی تشریحی ✓ گام اول: می‌توانیم قضیه زیر را بنویسیم:

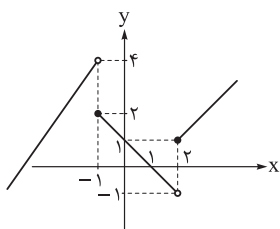
$$\lim_{x \rightarrow 0^-} [x^n] = \begin{cases} -1 & ; \text{ فرد } n \\ 0 & ; \text{ زوج } n \end{cases}$$

زیرا اگر n فرد باشد، $-1 < x^n < 0$ و اگر زوج باشد $0 < x^n < 1$ خواهد بود.

گام دوم: در عبارت صورت سؤال، ۱۰۰ جمله به صورت $[x^n]$ داریم که در ۵۰ تای آنها n فرد و در ۵۰ تای دیگر n زوج است، پس حاصل حد برابر است با:

$$50 \times 0 + 50(-1) = -50$$

۱۰ نمودار تابع f در شکل زیر رسم شده است. اگر $\lim_{x \rightarrow 2^-} (f \circ f)(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(2-x) + af(2)$ باشد، مقدار a کدام است؟



۴ (۱)

۳ (۲)

۲ (۳)

۱ (۴)

پاسخ: گزینه ۳

پاسخ خیلی تشریحی ✓ گام اول: ابتدا حدهای $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(2-x)$ و $\lim_{x \rightarrow 2^-} (f \circ f)(x)$ را حساب می‌کنیم:

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(2-x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} (f \circ f)(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = 2$$

گام دوم: $f(2)$ هم که برابر ۱ است و داریم:

$$a \times 1 + 0 = 2 \Rightarrow a = 2$$

۱۱ اگر $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - a^2x + a^2 - 1}{a - ax} = \frac{17}{3}$ باشد، مجموع مقادیر قابل قبول برای a کدام است؟

$$\frac{19}{6} \quad (4)$$

$$\frac{19}{3} \quad (3)$$

$$-\frac{2}{3} \quad (2)$$

$$\frac{17}{3} \quad (1)$$

پاسخ: گزینه ۱

رفع ابهام در حد صفر صفر:

درس Box

برای محاسبه $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$ ، اگر حدهای صورت و مخرج در $x = x_0$ هر دو برابر صفر باشند، با یک حد مبهم آن هم از نوع صفر صفر

($\frac{0}{0}$) روبه‌رو هستیم. برای محاسبه حاصل آن باید رفع ابهام کنیم، در سه حالت زیر:

۱) تجزیه چند جمله‌ای:

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x^2 - 5x + 2}{x^2 - 8} = \frac{0}{0} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x^2 - 5x + 2}{x^2 - 8} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)(2x-1)}{(x-2)(x^2+2x+4)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x-1}{x^2+2x+4} = \frac{1}{4}$$

جمله مشترک
چاق و لاغر

۲) اتحاد مزدوج:

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{3 - \sqrt{x+7}}{x-2} = \frac{0}{0} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 2} \frac{3 - \sqrt{x+7}}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{3 - \sqrt{x+7}}{x-2} \times \frac{3 + \sqrt{x+7}}{3 + \sqrt{x+7}} \right) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{9 - (x+7)}{(x-2)(3 + \sqrt{x+7})} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{-(x-2)}{(x-2)(3 + \sqrt{x+7})}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{-1}{3 + \sqrt{x+7}} = -\frac{1}{6}$$

۳) اتحاد چاق و لاغر:

$$\lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{\sqrt[3]{x-1}-1}{x^2-4} \times \frac{\sqrt[3]{(x-1)^2} + \sqrt[3]{x-1} + 1}{\sqrt[3]{(x-1)^2} + \sqrt[3]{x-1} + 1} \right) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-2}{(x^2-4)(\sqrt[3]{(x-1)^2} + \sqrt[3]{x-1} + 1)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-2}{(x-2)(x+2)(\sqrt[3]{(x-1)^2} + \sqrt[3]{x-1} + 1)} = \frac{1}{12}$$

چاق

پاسخ خیلی تشریحی ✓ گام اول: حد صفر صفر است:

$$L = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - a^2x + a^2 - 1}{a - ax} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x-a^2+1)}{a(1-x)} = \lim_{x \rightarrow 1} \left(-\frac{1}{a} (x-a^2+1) \right) = \frac{a^2-2}{a}$$

گام دوم: حاصل را برابر $\frac{17}{3}$ قرار می‌دهیم:

$$\frac{a^2-2}{a} = \frac{17}{3} \Rightarrow 3a^2 - 6 = 17a \Rightarrow 3a^2 - 17a - 6 = 0$$

مجموع جواب‌های معادله بالا برابر $\frac{17}{3}$ است.

۱۲ اگر $f(x) = 2x - 1$ و $g(x) = \frac{x}{2} - \frac{1}{x}$ باشد، حاصل $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{(f \circ g)(x)}{x - 2}$ کدام است؟

$-\frac{2}{3}$ (۴)

$\frac{2}{3}$ (۳)

$\frac{3}{2}$ (۲)

$-\frac{3}{2}$ (۱)

پاسخ: گزینه ۲

پاسخ خیلی تشریحی ✓ گام اول: ابتدا ضابطه تابع $f \circ g$ را تشکیل می دهیم:

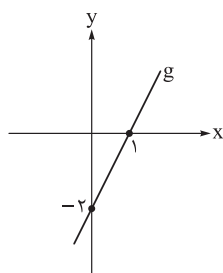
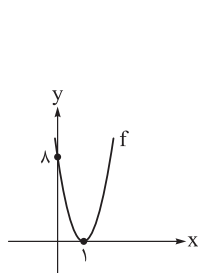
$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = 2g(x) - 1 = 2\left(\frac{x}{2} - \frac{1}{x}\right) - 1 = x - \frac{2}{x} - 1$$

$$\Rightarrow (f \circ g)(x) = \frac{x^2 - x - 2}{x} = \frac{(x - 2)(x + 1)}{x}$$

گام دوم: حاصل حد را حساب می کنیم:

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{(f \circ g)(x)}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\frac{(x - 2)(x + 1)}{x}}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x + 1}{x} = \frac{3}{2}$$

نمودارهای دو تابع $f(x) = ax^2 + bx + c$ و $g(x) = mx + h$ در شکل‌های زیر رسم شده‌اند. حاصل $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{g'(x)}$ کدام است؟



(۱) -۱

(۲) ۱

(۳) ۲

(۴) ۴

پاسخ: گزینه ۳

معادله سهمی:

دکتر Box

ضابطه یک سهمی را می‌توان به صورت $f(x) = a(x - x_s)^2 + y_s$ نیز نمایش داد. به جدول زیر توجه کنید:

معادله	مختصات رأس	محور تقارن	ماکزیمم (مینیمم)
$f(x) = a(x - x_s)^2 + y_s$	$S(x_s, y_s)$	$x = x_s$	y_s
$f(x) = ax^2 + bx + c$	$S(-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a})$	$x = -\frac{b}{2a}$	$f(-\frac{b}{2a}) = -\frac{\Delta}{4a}$
$f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$	$S(\frac{x_1 + x_2}{2}, f(\frac{x_1 + x_2}{2}))$	$x = \frac{x_1 + x_2}{2}$	$f(\frac{x_1 + x_2}{2})$

در ردیف آخر، x_1 و x_2 صفرهای سهمی هستند. در حالت کلی ریشه‌های ضابطه تابع f یا طول نقاط برخورد نمودار آن با محور x ها را صفرهای تابع f می‌نامیم.

پاسخ خیلی تشریحی ✓ گام اول: ضابطه هر دو تابع را می‌نویسیم:

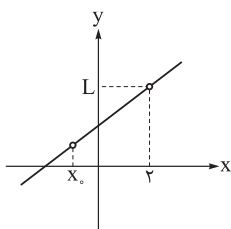
$$f(x) = a(x - 1)^2 \xrightarrow{(0, 4) \in f} a = 4$$

$$g(x) = m(x - 1) \xrightarrow{(0, -2) \in f} m = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{g'(x)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{4(x - 1)^2}{2(x - 1)^2} = 2$$

گام دوم: حالا می‌رویم سراغ محاسبه حد:

نمودار تابع $f(x) = \frac{x^3 + ax^2 - 4x + c}{x^2 - x + b}$ در شکل زیر رسم شده است. حاصل $x_0 + L$ کدام است؟ ۱۴



۵ (۱)

۴ (۲)

۳ (۳)

۲ (۴)

پاسخ: گزینه ۳

Hint هر جا در نمودار، حفره دیدی بدون که با حد صفر صفرم مواجه هستی.

پاسخ خیلی تشریحی ✓ **گام اول:** در نمودار حفره می بینیم، یعنی $x = x_0$ و $x = 2$ ریشه های مشترک صورت و مخرج هستند:

$$x^2 - x + b = (x - x_0)(x - 2) = x^2 - (x_0 + 2)x + 2x_0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_0 + 2 = 1 \Rightarrow x_0 = -1 \\ b = 2x_0 = -2 \end{cases}$$

گام دوم: $x = -1$ و $x = 2$ باید ریشه های صورت هم باشند:

$$x^3 + ax^2 - 4x + c = 0 \quad \begin{matrix} \xrightarrow{x=-1} & -1 + a + 4 + c = 0 \\ \xrightarrow{x=2} & 8 + 4a - 8 + c = 0 \end{matrix} \Rightarrow \begin{cases} a + c = -3 \\ 4a + c = 0 \end{cases} \Rightarrow a = 1, c = -4$$

گام سوم: پس ضابطه تابع f را به صورت زیر ساده می کنیم:

$$f(x) = \frac{x^3 + x^2 - 4x - 4}{x^2 - x - 2} = \frac{(x+2)(x+1)(x-2)}{(x+1)(x-2)} = x+2, \quad x \neq -1, 2$$

و داریم:

$$L = \lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} (x+2) = 4$$

و در نتیجه $x_0 + L = 3$ است.

۱۵ اگر $a > 0$ باشد، حاصل $\lim_{x \rightarrow a} \frac{\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{a}}{\sqrt{x} - \sqrt{a}}$ کدام است؟

(۲) $\frac{2}{3}\sqrt[3]{a}$

(۱) $\frac{2}{3}\sqrt[6]{a}$

(۴) $\frac{2}{3\sqrt[3]{a}}$

(۳) $\frac{2}{3\sqrt[6]{a}}$

پاسخ: گزینه ۳

پاسخ خیلی تشریحی ✓ گام اول: عبارت‌های صورت و مخرج را با استفاده از $\sqrt[3]{x}$ و $\sqrt[3]{a}$ به صورت زیر بازنویسی می‌کنیم:

$$\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{a} = (\sqrt[3]{x})^3 - (\sqrt[3]{a})^3$$

$$\sqrt{x} - \sqrt{a} = (\sqrt{x})^2 - (\sqrt{a})^2$$

گام دوم: حالا در رفع ابهام حد، در صورت از اتحاد مزدوج و در مخرج از اتحاد چاق و لاغر استفاده می‌کنیم:

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{(\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{a})(\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{a})}{(\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{a})(\sqrt{x} + \sqrt{a})} = \frac{\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{a}}{\sqrt{x} + \sqrt{a}} = \frac{2}{3\sqrt[3]{a}}$$

۱۶ حاصل $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\sin x - \cos x}{2 \sin x - \sqrt{2}}$ کدام است؟

$\frac{1}{4}$ (۴)

$-\frac{1}{4}$ (۳)

۱ (۲)

-۱ (۱)

پاسخ: گزینه ۲

پاسخ خیلی تشریحی ✓ گام اول: با حد صفر صفرم مواجه هستیم و برای رفع ابهام آن، صورت و مخرج را در مزدوج هر دو ضرب می‌کنیم:

$$L = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \left(\frac{\sin x - \cos x}{2 \sin x - \sqrt{2}} \times \frac{\sin x + \cos x}{\sin x + \cos x} + \frac{2 \sin x + \sqrt{2}}{2 \sin x + \sqrt{2}} \right) = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{(\sin^2 x - \cos^2 x)(2 \sin x + \sqrt{2})}{(2 \sin^2 x - 2)(\sin x + \cos x)}$$

گام دوم: حد عبارت $2 \sin x + \sqrt{2}$ و $\sin x + \cos x$ به ترتیب $2\sqrt{2}$ و $\sqrt{2}$ است و به جای $\cos^2 x$ عبارت $1 - \sin^2 x$ قرار می‌دهیم؛ پس داریم:

$$L = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{(2 \sin^2 x - 1) \times 2\sqrt{2}}{2(2 \sin^2 x - 1) \times \sqrt{2}} = 1$$

$x = \frac{\pi}{4}$ را t می‌گیریم و داریم:

به‌جور دیگر

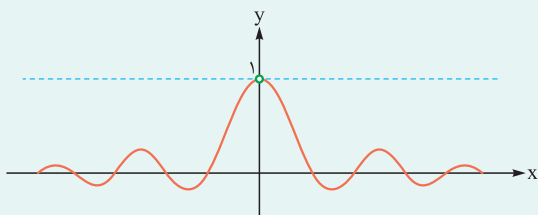
$$L = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin(t + \frac{\pi}{4}) - \cos(t + \frac{\pi}{4})}{2 \sin(t + \frac{\pi}{4}) - \sqrt{2}} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\frac{\sin t}{\sqrt{2}} + \frac{\cos t}{\sqrt{2}} - \frac{\cos t}{\sqrt{2}} + \frac{\sin t}{\sqrt{2}}}{\sqrt{2} \sin t + \sqrt{2} \cos t - \sqrt{2}} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sqrt{2} \sin t}{\sqrt{2} \sin t} = 1$$

۱۷ حاصل $\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sin(x|x|)}{\sin(\sqrt{|x|}x)}$ کدام است؟ ([] ، نماد جزء صحیح است.)

- (۱) $\frac{3}{8}$ (۲) $\frac{8}{3}$ (۳) $-\frac{8}{3}$ (۴) $-\frac{3}{8}$

پاسخ: گزینه ۴

تابع $y = \frac{\sin x}{x}$ (که به تابع $y = \text{sinc } x$ هم معروف است) در نظر بگیرید:



دامنه این تابع $\mathbb{R} - \{0\}$ است. با توجه به نمودار، مشخص است که $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{\sin x}{x} = 0$ است. همچنین طول نقاط برخورد نمودار با محور x ها جوابهای معادله $\sin x = 0$ (غیر از $x = 0$) است.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

نکته مهم این تابع، حد مقابل است:

نتیجه مهمی که از این حد می توان گرفت، این است که در کمان های خیلی خیلی کوچک، سینوس کمان تقریباً با خود کمان برابر است:

$$(x \rightarrow 0) \Rightarrow (\sin x \approx x)$$

در حالت کلی اگر کمان $u(x)$ به سمت صفر میل کند، هم ارزی های مثلثاتی زیر را داریم:

$$\sin u(x) \approx u(x)$$

$$\tan u(x) \approx u(x)$$

$$\cos u(x) \approx 1 - \frac{(u(x))^2}{2}$$

پاسخ خیلی تشریحی ✓ گام اول: در یک همسایگی $x = \pi$ ، مقدار $[x]$ برابر ۳ است و با جای گذاری $[x] = 3$ با حد زیر مواجه هستیم:

$$L = \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sin 3x}{\sin \lambda x} \quad (*)$$

گام دوم: از تغییر متغیر $x - \pi = t$ استفاده می کنیم:

$$\xrightarrow{x=\pi+t} \begin{cases} \sin 3x = \sin(3\pi + 3t) = -\sin 3t \\ \sin \lambda x = \sin(\lambda\pi + \lambda t) = \sin \lambda t \end{cases}$$

$$\xrightarrow{(*)} L = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{-\sin 3t}{\sin \lambda t}$$

حالا طبق نکته می توانیم بنویسیم:

$$L = -\frac{3}{\lambda}$$

درس Box

نکته

پاسخ خیلی تشریحی ✓

۱۸ حاصل حد تابع $f(x) = \frac{\sqrt[3]{8-x^3} + x^2 - 8x + 12}{\sqrt[3]{x^2 - \sqrt{5x+6}} + 16 - x^4}$ وقتی $x \rightarrow 2$ ، چند برابر $\sqrt[3]{12}$ است؟

$$\frac{2}{3} \quad (۴)$$

$$-\frac{2}{3} \quad (۳)$$

$$-\frac{2}{3} \quad (۲)$$

$$\frac{2}{3} \quad (۱)$$

پاسخ: گزینه ۲

پاسخ خیلی تشریحی ✓

گام اول: حد هر چهار عبارت $\sqrt[3]{8-x^3}$ ، $\sqrt[3]{x^2 - \sqrt{5x+6}}$ ، $x^2 - 8x + 12$ و $16 - x^4$ در یک همسایگی $x = 2$ برابر صفر است؛ یعنی $x = 2$ ، صفر این توابع است؛ اما مرتبه صفر در عبارت‌های $\sqrt[3]{8-x^3}$ و $\sqrt[3]{x^2 - \sqrt{5x+6}}$ برابر $\frac{1}{3}$ و در دو عبارت چندجمله‌ای دیگر برابر ۱ است. حال طبق قضیه معروف به قضیه کم‌توان، در محاسبه حد، می‌توان در صورت از چندجمله‌ای $x^2 - 8x + 12$ و در مخرج از چندجمله‌ای $16 - x^4$ صرف نظر کرد، پس داریم:

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt[3]{8-x^3}}{\sqrt[3]{x^2 - \sqrt{5x+6}}} = \sqrt[3]{\lim_{x \rightarrow 2} \frac{8-x^3}{x^2 - \sqrt{5x+6}}} \quad (*)$$

گام دوم: حاصل حد عبارت بالا را می‌یابیم:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{8-x^3}{x^2 - \sqrt{5x+6}} &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(8-x^3)(x^2 + \sqrt{5x+6})}{x^4 - 5x - 6} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(2-x)(4+2x+x^2)(x^2 + \sqrt{5x+6})}{(x-2)(x^3+2x^2+4x+3)} = -\frac{12 \times 8}{27} \\ &= \left(-\frac{8}{27}\right) \times 12 \end{aligned}$$

گام سوم: پس طبق (*) داریم: $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \sqrt[3]{-\frac{8}{27} \times 12} = -\frac{2}{3} \sqrt[3]{12}$ که یعنی حد تابع در $x = 2$ ، $-\frac{2}{3}$ برابر $\sqrt[3]{12}$ است.

۱۹ تابع $f(x) = \begin{cases} x^2 + a & ; x < -1 \\ [2x] & ; -1 \leq x < 2 \\ bx - 1 & ; x \geq 2 \end{cases}$ در ۵ نقطه ناپیوسته است. حاصل ab کدام است؟ ([] ، نماد جزء صحیح است.)

۴) -۶

۳) ۷/۵ -

۲) -۴

۱) -۵

پاسخ: گزینه ۲

پاسخ خیلی تشریحی ✓

گام اول: ابتدا تعداد نقاط ناپیوستگی تابع را در بازه $[-1, 2]$ حساب می‌کنیم. تابع $y = [2x]$ در $x = -1$ پیوستگی راست دارد و در نقاطی که به ازای طول آن $2x$ عددی صحیح شود، ناپیوسته است، بنابراین در بازه $(-1, 2)$ طول نقاط ناپیوستگی عبارت‌اند از $-\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}$ که دقیقاً برابر ۵ است. این یعنی از فرض سؤال نتیجه می‌شود که تابع در $x = -1$ و $x = 2$ باید پیوسته باشد.

گام دوم: پیوستگی در $x = -1$ را بررسی می‌کنیم:

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow -1^-} (x^2 + a) = 1 + a \\ f(-1) &= \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = [(-2)^+] = -2 \end{aligned} \right\} \Rightarrow 1 + a = -2 \Rightarrow a = -3$$

پیوستگی در $x = 2$ را نیز بررسی می‌کنیم:

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 2^-} [2x] = [4^-] = 3 \\ \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 2^+} (bx - 1) = f(2) = 2b - 1 \end{aligned} \right\} \Rightarrow 2b - 1 = 3 \Rightarrow b = 2$$

$\Rightarrow a \times b = -6$

۲۰ تابع $f(x) = \begin{cases} x^4 & ; x \in \mathbb{Z} \\ x^2 & ; x \notin \mathbb{Z} \end{cases}$ در چند نقطه از نقاط بازه $(-3, 3)$ ، ناپیوسته است؟

۴) صفر

۳) ۲

۲) ۳

۱) ۵

پاسخ: گزینه ۳

پاسخ خیلی تشریحی ✓ گام اول: تابع f روی $\mathbb{R} - \mathbb{Z}$ قطعاً پیوسته است و در ظاهر در $\mathbb{Z}$ ناپیوسته است. حال اگر مقدار تابع به ازای هر دو مجموعه

$\mathbb{Z}$ و $\mathbb{Z}'$ برابر شوند، تابع در آن جا پیوسته می شود:

$$x^4 = x^2 \Rightarrow x^2(x^2 - 1) = 0 \Rightarrow x = 0, -1, 1$$

گام دوم: پس تابع کلاً در مجموعه $(\mathbb{Z} - \{-1, 0, 1\}) - \mathbb{R}$ پیوسته است و در نتیجه تنها نقاط ناپیوستگی این تابع در بازه $(-3, 3)$ نقاط به طول -2 و 2 هستند.

در مثلث ABC ، $AB = ۶$ و $AC = ۴$ است. اگر AD نیمساز زاویه داخلی A و طول آن برابر $۲/۴$ باشد، اندازه زاویه $\hat{A}$ چند

درجه است؟

۶۰ (۲)

۴۵ (۱)

۱۲۰ (۴)

۹۰ (۳)

مشاوره این سؤال براساس تمرین ۵ صفحه ۷۳ کتاب درسی طراحی شده است و رابطه دوم محاسبه طول نیمساز داخلی را مورد بررسی قرار می دهد.

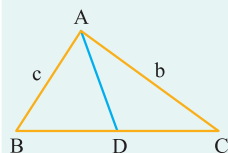
پاسخ: گزینه ۴

از رابطه طول نیمساز داخلی برحسب اندازه زاویه استفاده کنید.

Hint

اگر اندازه اضلاع $AB = c$ و $AC = b$ و اندازه زاویه $\hat{A}$ را در مثلث ABC در اختیار داشته باشیم، آن گاه طول نیمساز زاویه داخلی A ، یعنی AD از رابطه زیر محاسبه می شود:

دروس Box



$$AD = \frac{2bc}{b+c} \cos \frac{\hat{A}}{2}$$

پاسخ خیلی تشریحی ✓ **گام اول:** طبق رابطه طول نیمساز داخلی زاویه A برحسب اندازه این زاویه داریم:

$$AD = \frac{2bc}{b+c} \cos \frac{\hat{A}}{2} \Rightarrow 2/4 = \frac{2 \times 4 \times 6}{4+6} \cos \frac{\hat{A}}{2} \Rightarrow 2/4 = 4/8 \cos \frac{\hat{A}}{2} \Rightarrow \cos \frac{\hat{A}}{2} = \frac{1}{2}$$

گام دوم: کسینوس یک زاویه حاده مثبت و کسینوس یک زاویه منفرجه منفی است، بنابراین زاویه $\frac{\hat{A}}{2}$ قطعاً حاده است و داریم:

$$\cos \frac{\hat{A}}{2} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{\hat{A}}{2} = 60^\circ \Rightarrow \hat{A} = 120^\circ$$

۲۲ در کدام یک از مثلث‌های زیر که طول اضلاع آن‌ها داده شده است، زاویهٔ منفرجه وجود دارد؟

(۱) ۱۲، ۱۰، ۷

(۲) ۱۵، ۱۲، ۱۰

(۳) ۱۴، ۱۱، ۸

(۴) ۱۶، ۱۳، ۱۰

مشاوره این سؤال با نگاه به تمرین ۹ صفحه ۷۴ کتاب درسی طراحی شده است که وضعیت مثلث از نظر حاده الزاویه، قائم الزاویه و یا منفرجه الزاویه بودن را به کمک آن می‌توان تعیین کرد.

پاسخ: گزینه ۳

مربع بزرگ‌ترین ضلع هر مثلث را با مجموع مربعات دو ضلع دیگر مقایسه کنید.

Hint

دستی Box

در مثلث ABC:

(الف) $\hat{A} > 90^\circ$ اگر و تنها اگر $a^2 > b^2 + c^2$.

(ب) $\hat{A} < 90^\circ$ اگر و تنها اگر $a^2 < b^2 + c^2$.

(پ) $\hat{A} = 90^\circ$ اگر و تنها اگر $a^2 = b^2 + c^2$.

پاسخ خیلی تشریحی **گام اول:** برای تعیین این که کدام مثلث دارای زاویهٔ منفرجه است، فرض می‌کنیم بزرگ‌ترین زاویهٔ هر کدام از این مثلث‌ها برابر $\hat{A}$ باشد.

طبق درس‌یابکس، اگر $a^2 > b^2 + c^2$ ، آن‌گاه $\hat{A} > 90^\circ$ و مثلث ABC منفرجه‌الزاویه است.

گام دوم: در گزینه (۱)، $a = 12$ ، $b = 10$ و $c = 7$ است.

$$\left. \begin{array}{l} a^2 = 12^2 = 144 \\ b^2 + c^2 = 10^2 + 7^2 = 149 \end{array} \right\} \Rightarrow a^2 < b^2 + c^2 \Rightarrow \hat{A} < 90^\circ$$

گام سوم: در گزینه (۲)، $a = 15$ ، $b = 12$ و $c = 10$ است.

$$\left. \begin{array}{l} a^2 = 15^2 = 225 \\ b^2 + c^2 = 12^2 + 10^2 = 244 \end{array} \right\} \Rightarrow a^2 < b^2 + c^2 \Rightarrow \hat{A} < 90^\circ$$

گام چهارم: در گزینه (۳)، $a = 14$ ، $b = 11$ و $c = 8$ است.

$$\left. \begin{array}{l} a^2 = 14^2 = 196 \\ b^2 + c^2 = 11^2 + 8^2 = 185 \end{array} \right\} \Rightarrow a^2 > b^2 + c^2 \Rightarrow \hat{A} > 90^\circ$$

بنابراین در این حالت، مثلث دارای زاویهٔ منفرجه است.

گام پنجم: در گزینه (۴)، $a = 16$ ، $b = 13$ و $c = 10$ است.

$$\left. \begin{array}{l} a^2 = 16^2 = 256 \\ b^2 + c^2 = 13^2 + 10^2 = 269 \end{array} \right\} \Rightarrow a^2 < b^2 + c^2 \Rightarrow \hat{A} < 90^\circ$$

۲۳ در مثلثی به طول اضلاع ۱۱، ۱۳ و ۲۰، اندازه شعاع بزرگ‌ترین دایره محاطی خارجی کدام است؟

۶ (۱)

۱۱ (۲)

۲۲ (۳)

۳۳ (۴)

مشاوره این سؤال براساس قضیه هرون طراحی شده است. به کمک این قضیه می‌توان مساحت هر مثلث را با داشتن طول اضلاع آن محاسبه کرد. پیدا کردن اندازه شعاع دایره محاطی داخلی یا دایره‌های محاطی خارجی می‌تواند از سؤالات احتمالی امتحان نهایی باشد.

پاسخ: گزینه ۴

به کمک قضیه هرون، مساحت مثلث را به دست آورید.

Hint

قضیه هرون: در مثلث ABC به طول اضلاع a، b و c، اگر مساحت و نصف محیط مثلث را به ترتیب با S و P نمایش دهیم، آن‌گاه داریم:

$$S = \sqrt{P(P-a)(P-b)(P-c)}$$

پاسخ خیلی تشریحی ✓ گام اول: فرض کنید $a = 20$ ، $b = 13$ و $c = 11$ باشد. در این صورت داریم:

$$P = \frac{a+b+c}{2} = \frac{20+13+11}{2} = 22$$

گام دوم: طبق قضیه هرون، در این مثلث داریم:

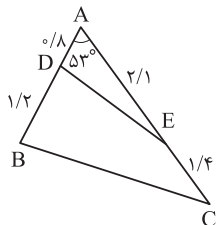
$$S = \sqrt{P(P-a)(P-b)(P-c)} = \sqrt{22(22-20)(22-13)(22-11)}$$

$$= \sqrt{22 \times 2 \times 9 \times 11} = \sqrt{22^2 \times 3^2} = 22 \times 3 = 66$$

گام سوم: بزرگ‌ترین دایره محاطی خارجی هر مثلث، متناظر با بزرگ‌ترین ضلع آن مثلث است، بنابراین داریم:

$$r_a = \frac{S}{P-a} = \frac{66}{22-20} = \frac{66}{2} = 33$$

۲۴ در شکل زیر، مساحت چهارضلعی BCED کدام است؟ (فرض کنید $\cos 53^\circ = 0/6$ باشد.)



۱/۵۹۶ (۱)

۲/۱۲۸ (۲)

۳/۱۹۲ (۳)

۴/۲۵۶ (۴)

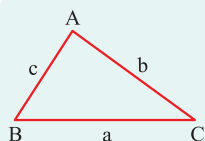
مشاوره این سؤال مشابه تمرین ۴ صفحه ۷۳ کتاب درسی طراحی شده است و می‌تواند از سؤالات احتمالی امتحان نهایی باشد.

پاسخ: گزینه ۲

مساحت هر کدام از دو مثلث ABC و ADE را به دست آورید.

Hint

مساحت هر مثلث برابر است با نصف حاصل ضرب اندازه‌های هر دو ضلع در سینوس زاویه بین آنها:



$$S_{ABC} = \frac{1}{2} ab \sin \hat{C} = \frac{1}{2} ac \sin \hat{B} = \frac{1}{2} bc \sin \hat{A}$$

پاسخ خیلی تشریحی ✓ گام اول: ابتدا به کمک $\cos 53^\circ$ ، سینوس این زاویه را محاسبه می‌کنیم:

$$\sin^2 53^\circ + \cos^2 53^\circ = 1 \xrightarrow{\cos 53^\circ = 0/6} \sin^2 53^\circ = 1 - (0/6)^2 = (0/8)^2 \Rightarrow \sin 53^\circ = 0/8$$

گام دوم: مساحت چهارضلعی BCED برابر اختلاف مساحت‌های دو مثلث ABC و ADE است، پس داریم:

$$S_{BCED} = S_{ABC} - S_{ADE} = \frac{1}{2} \times 2 \times 3/5 \times 0/8 - \frac{1}{2} \times 0/8 \times 2/1 \times 0/8$$

$$= \frac{1}{2} \times 0/8 (2 \times 3/5 - 0/8 \times 2/1) = 0/4 (7 - 1/68) = 2/128$$

در مثلث ABC ، $BC = ۱۵$ ، BD نیمساز زاویه B و I نقطه هم‌رسی نیمسازها است. اگر $CD = ۹$ و $ID = ۶$ باشند، اندازه پاره خط

BI کدام است؟

(۱) ۵

(۳) ۸

(۲) ۶

(۴) ۱۰

مشاوره این سؤال براساس قضیه نیمسازها در مثلث طراحی شده است که باید انتظار طرح سؤالی از این قضیه (احتمالاً همراه با طول نیمساز زاویه داخلی) را در امتحان نهایی داشته باشیم.

پاسخ: گزینه ۲

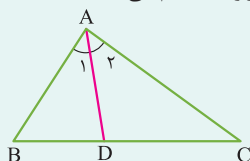
از قضیه نیمسازها در مثلث‌های ABC و ABD استفاده کنید.

Hint

درسی Box

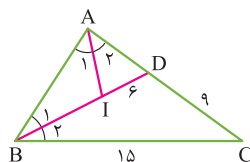
قضیه نیمسازهای زوایای داخلی:

در هر مثلث، نیمساز هر زاویه داخلی، ضلع روبه‌رو به آن زاویه را به نسبت اندازه‌های ضلع‌های آن زاویه تقسیم می‌کند.



$$AD \Rightarrow \frac{BD}{DC} = \frac{AB}{AC} \text{ است.}$$

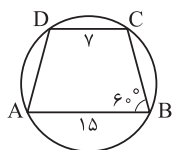
پاسخ خیلی تشریحی ✓ **گام اول:** با توجه به قضیه نیمسازها در مثلث ABC داریم:



$$BD \Rightarrow \frac{AD}{DC} = \frac{AB}{BC} \Rightarrow \frac{AD}{9} = \frac{AB}{15} \Rightarrow \frac{AB}{AD} = \frac{15}{9} = \frac{5}{3} (*)$$

گام دوم: قضیه نیمسازها را یک بار دیگر و این دفعه در مثلث ABD می‌نویسیم:

$$AI \Rightarrow \frac{BI}{DI} = \frac{AB}{AD} \xrightarrow{(*)} \frac{BI}{6} = \frac{5}{3} \Rightarrow BI = ۱۰$$



۲۶ در شکل روبه‌رو چهارضلعی ABCD دوزنقه است. شعاع دایره چند برابر $\frac{\sqrt{3}}{3}$ است؟

- (۱) ۱۳
(۲) ۱۴
(۳) ۱۵
(۴) ۱۶

مشاوره این سؤال ترکیبی از دو قضیه بسیار مهم سینوس‌ها و کسینوس‌ها است. مسئله‌های ترکیبی از این دو قضیه در تمرین‌های صفحه ۶۶ کتاب درسی دیده می‌شود.

پاسخ: گزینه ۱

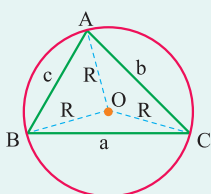
دقت کنید که دایره محیطی دوزنقه ABCD، همان دایره محیطی مثلث ABC است و می‌توانید از قضیه سینوس‌ها برای محاسبه شعاع این دایره استفاده کنید.

Hint

درس‌Box

قضیه سینوس‌ها:

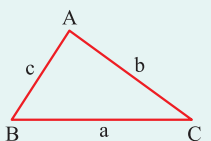
اگر R شعاع دایره محیطی مثلث ABC به طول اضلاع $BC = a$ ، $AC = b$ و $AB = c$ باشد، آن‌گاه داریم:



$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$$

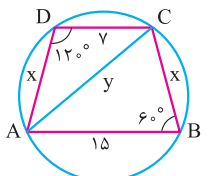
قضیه کسینوس‌ها:

در هر مثلث، مربع اندازه هر ضلع برابر است با مجموع مربع‌های اندازه‌های دو ضلع دیگر، منهای دو برابر حاصل ضرب اندازه آن دو ضلع در کسینوس زاویه بین آن‌ها.



$$\begin{cases} a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos A \\ b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cdot \cos B \\ c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos C \end{cases}$$

پاسخ خیلی تشریحی ✓ **گام اول:** ابتدا قطر AC را رسم می‌کنیم. می‌دانیم کمان‌های محصور در دو وتر موازی، هم‌اندازه‌اند، پس داریم:



$$AB \parallel CD \Rightarrow \widehat{AD} = \widehat{BC} \Rightarrow AD = BC$$

دوزنقه ABCD، متساوی‌الساقین است. طول هر کدام از ساق‌های دوزنقه را برابر x و اندازه قطر AC را برابر y در نظر می‌گیریم.

گام دوم: به کمک قضیه کسینوس‌ها در مثلث‌های ABC و ACD داریم:

$$\begin{cases} y^2 = 15^2 + x^2 - 2 \times 15 \times x \times \cos 60^\circ \Rightarrow y^2 = 225 + x^2 - 15x \\ y^2 = x^2 + x^2 - 2 \times x \times x \times \cos 120^\circ \Rightarrow y^2 = 49 + x^2 + 7x \end{cases}$$

$$225 + x^2 - 15x = 49 + x^2 + 7x \Rightarrow 22x = 176 \Rightarrow x = 8$$

$$y^2 = 49 + 8^2 + 7 \times 8 = 169 \Rightarrow y = 13$$

گام سوم: دایره محیطی دوزنقه ABCD، دایره محیطی مثلث ABC نیز هست، پس بنا بر قضیه سینوس‌ها در مثلث ABC داریم:

$$\frac{AC}{\sin B} = 2R \Rightarrow \frac{13}{\sin 60^\circ} = 2R \Rightarrow R = \frac{13}{\sqrt{3}} = \frac{13\sqrt{3}}{3}$$

۲۷ در یک مثلث متساوی الساقین، اندازه قاعده ۱۲ و اندازه میانه وارد بر آن، برابر $۳\sqrt{۵}$ است. اندازه میانه نظیر هر ساق کدام است؟

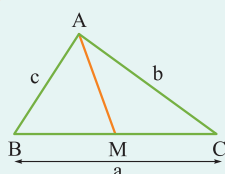
- (۱) $\frac{۹\sqrt{۳}}{۲}$ (۲) $\frac{۱۵}{۲}$
(۳) $\frac{۳\sqrt{۴۱}}{۲}$ (۴) $\frac{\sqrt{۱۲۳}}{۲}$

مشاوره این سؤال براساس قضیه میانه‌ها و مشابه سوالاتی از کنکور مرحله اول ۱۴۰۳ طراحی شده است.

پاسخ: گزینه ۳

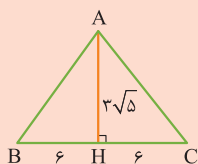
Hint در مثلث متساوی الساقین، میانه وارد بر قاعده، بر ارتفاع نظیر قاعده منطبق است.

قضیه میانه‌ها: اگر $AM = m_a$ میانه وارد بر ضلع BC در مثلث ABC باشد، آن‌گاه داریم:



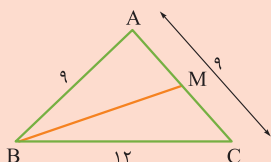
$$b^2 + c^2 = 2m_a^2 + \frac{a^2}{2}$$

پاسخ خیلی تشریحی ✓ **گام اول:** می‌دانیم در مثلث متساوی الساقین، میانه و ارتفاع وارد بر وتر، بر هم منطبق‌اند، پس مطابق شکل داریم:



$$\triangle ABH : AB^2 = AH^2 + BH^2 = (3\sqrt{5})^2 + 6^2 = 81 \Rightarrow AB = 9 \Rightarrow AC = 9$$

گام دوم: اگر BM میانه نظیر ساق AC باشد، آن‌گاه طبق قضیه میانه‌ها داریم:



$$AB^2 + BC^2 = 2BM^2 + \frac{AC^2}{2} \Rightarrow 9^2 + 12^2 = 2BM^2 + \frac{9^2}{2}$$

$$\Rightarrow 2BM^2 = 81 + 144 - \frac{81}{2} = \frac{369}{2} \Rightarrow BM^2 = \frac{369}{4}$$

$$\Rightarrow BM = \frac{3\sqrt{41}}{2}$$

در تجانس به مرکز O و نسبت تجانس $K > 1$ ، نقطه M' مجانس نقطه M است. اگر در تجانس به مرکز M ، نقطه O تصویر نقطه M' باشد، نسبت تجانس کدام است؟

$$K - 1 \quad (۲)$$

$$\frac{1}{1-K} \quad (۱)$$

$$1-K \quad (۴)$$

$$\frac{1}{K-1} \quad (۳)$$

پاسخ: گزینه ۱

فرض کنید $OM = 1$ باشد و طول MM' را برحسب K محاسبه کنید.

Hint

درس Box

تعریف تجانس: اگر O نقطه‌ای ثابت در صفحه و $K \neq 0$ یک عدد حقیقی باشد، نقطه M' را مجانس نقطه M در تجانس به مرکز O و نسبت تجانس K گوئیم، هرگاه سه شرط زیر برقرار باشد:
الف) سه نقطه M ، O و M' روی یک خط راست باشند.
ب) $OM' = |K| \cdot OM$

اگر K مثبت باشد، M و M' در یک طرف نقطه O قرار دارند (تجانس مستقیم):



اگر K منفی باشد، نقطه O بین M و M' قرار می‌گیرد (تجانس معکوس):

گام اول: طبق صورت سؤال M' مجانس نقطه M در تجانس به مرکز O و نسبت $K (K > 1)$ است. اگر OM را برابر ۱ در نظر بگیریم، آن‌گاه داریم:



$$\frac{OM'}{OM} = K \Rightarrow \frac{OM'}{1} = K \Rightarrow OM' = K$$

$$MM' = OM' - OM = K - 1$$

گام دوم: حال در صورتی که O تصویر نقطه M' به مرکز M باشد، چون M' و O در دو طرف نقطه M قرار دارند، پس نسبت تجانس منفی است و قدرمطلق آن برابر است با:

$$|K'| = \frac{MO}{MM'} = \frac{1}{K-1} \xrightarrow{K' < 0, K > 1} K' = \frac{1}{1-K}$$

دو نقطه $A(1, 4)$ و $B(3, 2)$ مفروض‌اند. نقطه M روی محور x با کدام طول انتخاب شود تا $AM + MB$ کوتاه‌ترین طول ممکن را داشته باشد؟

$$\frac{1}{3} \quad (۴)$$

$$\frac{7}{3} \quad (۳)$$

$$1/75 \quad (۲)$$

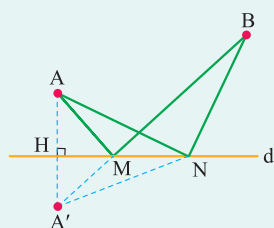
$$1/5 \quad (۱)$$

پاسخ: گزینه ۳

بازتاب نقطه A نسبت به محور x را پیدا کرده و به B وصل کنید.

Hint

دکتر Box



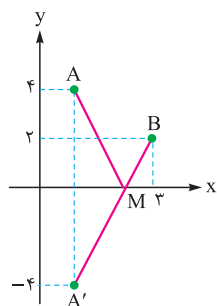
مسئله هرون: فرض کنید دو نقطه A و B در یک طرف خط d باشند و بخواهیم از A به نقطه‌ای مانند M روی خط d رفته و از آن‌جا به B برویم. برای پیدا کردن کوتاه‌ترین طول ممکن برای خط شکسته AMB ، کافی است بازتاب A را نسبت به خط d پیدا کنیم (نقطه A') و سپس از A' به B وصل کنیم تا خط d را در نقطه‌ای مانند M قطع کند. نقطه M جواب مسئله است.

برای اثبات این ادعا نقطه‌ای مانند N روی خط d در نظر می‌گیریم. طبق نامساوی مثلثی در مثلث $A'NB$ داریم:

$$A'B < A'N + NB \Rightarrow A'M + MB < A'N + NB \xrightarrow[\frac{AN=A'N}{AM=A'M}]{\frac{AM=A'M}{AN=A'N}} AM + MB < AN + NB$$

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: ابتدا نقاط $A(1, 4)$ و $B(3, 2)$ را در دستگاه مختصات مشخص می‌کنیم. طبق مسئله هرون، کافی است بازتاب نقطه A را نسبت به محور x پیدا کنیم، که نقطه $A'(1, -4)$ است. محل برخورد پاره خط $A'B$ با محور x ، همان نقطه M (نقطه مطلوب) است.



گام دوم: شیب پاره خط $A'B$ را پیدا کرده و معادله آن را می‌نویسیم:

$$m_{A'B} = \frac{2 - (-4)}{3 - 1} = 3$$

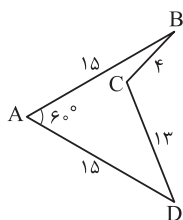
$$A'B \text{ معادله } y - 2 = 3(x - 3) \Rightarrow y = 3x - 7$$

گام سوم: برای پیدا کردن نقطه M ، y را در معادله خط برابر صفر قرار می‌دهیم.

$$0 = 3x - 7 \Rightarrow x_M = \frac{7}{3}$$

می‌خواهیم بدون تغییر در محیط و تعداد اضلاع چهارضلعی ABCD، مساحت آن را تا حد ممکن افزایش دهیم. میزان این افزایش مساحت

چه قدر است؟



$$36 \quad (2)$$

$$18 \quad (4)$$

$$48 \quad (1)$$

$$24 \quad (3)$$

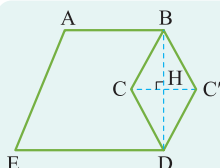
مشاوره این سؤال ترکیبی از مسائل هم پیرامونی و قضیه هرون است.

پاسخ: گزینه ۱

مثلث ABD، یک مثلث متساوی‌الاضلاع است.

Hint

دروس Box



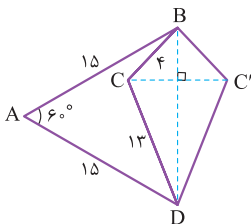
مسائل هم پیرامونی (هم محیطی):

هرگاه بخواهیم مساحت چند ضلعی را که یک یا چند زاویه بزرگتر از 180° دارد، بدون تغییر در محیط و تعداد اضلاع آن افزایش دهیم، کافی است بازتاب هر کدام از رأس‌هایی که زاویه آن‌ها بزرگتر از 180° است را نسبت به خط گذرنده از دو رأس مجاور آن رسم کنیم.

مطابق شکل میزان افزایش مساحت چند ضلعی مقعر ABCDE بدون تغییر در تعداد اضلاع و محیط آن، برابر مساحت چهارضلعی BCDC' خواهد بود که C' بازتاب C نسبت به خط BD است.

پاسخ خیلی تشریحی ✓ **گام اول:** برای دست یافتن به حداکثر افزایش مساحت چهارضلعی ABCD بدون تغییر در محیط و تعداد اضلاع آن، کافی است

بازتاب نقطه C را نسبت به BD به دست آورده و آن را C' بنامیم. میزان افزایش مساحت، برابر مساحت چهارضلعی BCDC' یا دو برابر مساحت مثلث BCD است.



گام دوم: در مثلث ABD، $AB = AD = 15$ و $\hat{A} = 60^\circ$ است، پس این مثلث متساوی‌الاضلاع بوده و $BD = 15$ است. حال طبق قضیه هرون در مثلث BCD داریم:

$$P = \frac{4 + 13 + 15}{2} = 16 \Rightarrow S = \sqrt{16(16-4)(16-13)(16-15)} = \sqrt{16 \times 12 \times 3 \times 1} = 24$$

گام سوم: میزان افزایش مساحت برابر است با:

$$S_{BCDC'} = 2S_{BCD} = 2 \times 24 = 48$$

سکه‌ای را پرتاب می‌کنیم. اگر «رو» بیاید، ۲ سکه پرتاب کرده و اگر «پشت» بیاید، ۳ سکه دیگر را پرتاب می‌کنیم. با کدام احتمال تعداد سکه‌های «رو» آمده بیشتر از تعداد سکه‌های «پشت» آمده است؟

$$\frac{5}{16} (۲)$$

$$\frac{1}{4} (۱)$$

$$\frac{11}{16} (۴)$$

$$\frac{7}{16} (۳)$$

مشاوره در سؤالات ضرب احتمال و احتمال کل، رسم نمودار درختی را به خوبی بلد باشید چرا که طراحان کنکور علاقه خاصی به این تیپ سؤال‌ها دارند.

پاسخ: گزینه ۳

نمودار درختی مربوطه را رسم کنید و احتمال شاخه‌های مطلوب را با هم جمع کنید.

Hint

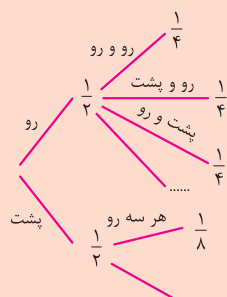
گام اول: احتمال این را می‌خواهیم که تعداد «رو»ها بیشتر از تعداد «پشت»ها باشد؛ اگر سکه اول رو بیاید، ۲ سکه دیگر را می‌اندازیم، حالات مطلوب برای ۳ سکه عبارتند از:

(ر، پ، ر)، (ر، پ، پ)، (ر، ر، ر)، (ر، ر، پ)

اگر سکه اول، پشت بیاید، ۳ سکه دیگر می‌اندازیم، در این جا حالات مطلوب برای ۴ سکه فقط حالت زیر است:

(ر، ر، ر، پ)

گام دوم: حالا نمودار مربوط به سؤال را رسم می‌کنیم و فقط حالت‌های مطلوب را در آن می‌آوریم:



گام سوم: بنابراین احتمال خواسته شده برابر می‌شود با مجموع احتمال شاخه‌های مطلوب:

$$P(\text{خواسته شده}) = \left(\frac{1}{2} \times \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{2} \times \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{2} \times \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{2} \times \frac{1}{4}\right) \\ = \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$$

۳۲

دانش آموزان دو مدرسه A و B در یک آزمون شرکت کرده‌اند. ۶۰ درصد از دانش آموزان مدرسه A و x درصد از دانش آموزان مدرسه B در آزمون قبول شده‌اند. اگر تعداد دانش آموزان مدرسه A، ۳ برابر تعداد دانش آموزان مدرسه B باشد و فردی به تصادف از قبول شدگان انتخاب شود، با احتمال $\frac{8}{100}$ این فرد از مدرسه A است. x کدام است؟

۴۵ (۴)

۷۵ (۳)

۶۰ (۲)

۵۰ (۱)

پاسخ: گزینه ۲

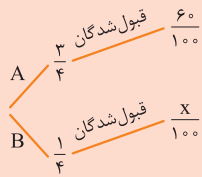
نمودار درختی

را کامل کنید و احتمال قبول شدگان را در مخرج و امتحال این که فرد قبول شده از A باشد را در صورت قرار دهید.

Hint

پاسخ خیلی تشریحی ✓ گام اول: با توجه به این که تعداد دانش آموزان مدرسه A سه برابر تعداد دانش آموزان مدرسه B است، احتمال انتخاب دانش آموزان مدرسه A برابر $\frac{3}{4}$ و احتمال انتخاب شدن دانش آموزان مدرسه B برابر $\frac{1}{4}$ است.

گام دوم: فرد قرار است از قبول شدگان انتخاب شود، پس کاری به شاخه قبول نشده‌ها نداریم و نمودار مناسب سؤال به صورت مقابل رسم می‌شود:



گام سوم: احتمال این که یک فرد از قبول شدگان انتخاب شود و عضو مدرسه A باشد $\frac{8}{100}$ است، بنابراین احتمال این که فرد از قبول شدگان باشد را در مخرج و احتمال این که فرد قبول شده از مدرسه A باشد در صورت قرار می‌دهیم:

$$\frac{\frac{3}{4} \times \frac{60}{100}}{\frac{3}{4} \times \frac{60}{100} + \frac{1}{4} \times \frac{x}{100}} = \frac{8}{100}$$

$$\Rightarrow \frac{180}{180 + x} = \frac{4}{5} \Rightarrow 900 = 720 + 4x \Rightarrow 4x = 180$$

$$\Rightarrow x = 45$$

اعداد طبیعی را طوری دسته‌بندی می‌کنیم که تعداد اعضای هر دسته، ۲ به توان شماره آن دسته باشد. یعنی:

$\{1, 2\}, \{3, 4, 5, 6\}, \{7, 8, \dots, 14\}, \dots$

چارک اول داده‌های دسته نهم کدام است؟

$$638/5(2)$$

$$637/5(1)$$

$$640/5(4)$$

$$639/5(3)$$

پاسخ: گزینه ۲

جمله اول هر دسته از رابطه $a_n = 2^n - 1$ به دست می‌آید.

Hint

چارک‌ها داده‌ها را به چهار دسته با تعداد برابر تقسیم می‌کنند، به این صورت که چارک اول، میانه داده‌های قبل از میانه، چارک دوم همان میانه و چارک سوم، میانه داده‌های بعد از میانه است.

$$\overline{a_n} \quad | \quad \overline{a_n} \quad | \quad \overline{a_n} \quad | \quad \overline{a_n}$$

$$Q_1 \quad Q_2 \quad Q_3$$

گام اول: با دقت به دسته‌بندی داده‌شده می‌بینیم که داده اول هر دسته از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$\{1, 2\}, \{3, 4, 5, 6\}, \{7, 8, \dots, 14\}, \dots \quad a_n = 2^n - 1$$

↓
داده اول هر دسته

گام دوم: داده اول دسته نهم برابر $a_9 = 2^9 - 1 = 511$ است، تعداد داده‌های آن نیز برابر است با $2^9 = 512$ ، با توجه به نکته، چارک اول برابر می‌شود با میانگین داده ۱۲۸ ام و داده ۱۲۹ ام:

$$\begin{matrix} 511 \\ \uparrow \\ \{a_1, \dots, a_{128} \mid a_{129} \dots a_{256} \mid \dots\} \\ Q_1 \quad Q_2 \end{matrix}$$

$$Q_1 = \frac{a_{128} + a_{129}}{2} = \frac{a_{128} = 511 + 127}{a_{129} = 511 + 128} \rightarrow Q_1 = \frac{511 + 127 + 511 + 128}{2} = 511 + 127/5$$

$$\Rightarrow Q_1 = 638/5$$

نکته

پاسخ خیلی تشریحی

۱۲ داده آماری با میانگین ۱۰ و واریانس ۶۰/۵ داریم. اگر داده‌های ۱۵، ۱۶ و ۱۴ را اضافه کرده و داده با مقدار ۲۵ را حذف کنیم، واریانس ۱۴ داده باقی‌مانده تقریباً کدام است؟

مشاوره حوصله خود را برای سؤالاتی که محاسبات طولانی دارند، بالا ببرید.

$$41/3 \quad (2)$$

$$39/3 \quad (1)$$

$$45/3 \quad (4)$$

$$43/3 \quad (3)$$

پاسخ: گزینه ۲

ابتدا مجموع مربعات انحراف داده‌ها از میانگین و مجموع داده‌های اولیه را به دست آورید و سپس با توجه به تغییرات داده‌ها، واریانس و میانگین جدید را پیدا کنید.

Hint

پاسخ خیلی تشریحی

$$\sigma^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n} \xrightarrow[n=12, \bar{x}=10]{\sigma^2=60/5} 60/5 = \frac{\sum_{i=1}^{12} (x_i - 10)^2}{12}$$

$$\xrightarrow{\text{طرفین وسطین}} \sum_{i=1}^{12} (x_i - 10)^2 = 726$$

گام دوم: در حالت جدید تعداد داده‌ها ۱۴ تا می‌شود (سه تا اضافه و یکی کم می‌شود)، میانگین در حالت جدید برابر می‌شود با:

$$120 = \text{مجموع داده‌های اولیه} \Rightarrow 120 \times 12 \Rightarrow 140 = \text{مجموع داده‌های اولیه}$$

$\downarrow$ $\downarrow$
 تعداد میانگین

$$140 = \text{مجموع داده‌ها در حالت جدید} = 120 + (14 + 15 + 16) - (25) = 140$$

$$\text{میانگین داده‌های جدید} = \frac{140}{14} = 10$$

پس میانگین تغییر نمی‌کند.

گام سوم: در گام اول مجموع مربعات انحراف داده‌ها از میانگین را به دست آوردیم، با توجه به این که میانگین همان ۱۰ است، با اضافه کردن و کم کردن داده‌های گفته شده، مجموع مربعات انحراف داده از میانگین جدید برابر می‌شود با:

$$\sum_{i=1}^{14} (x_i - 10)^2 = \underbrace{\sum_{i=1}^{12} (x_i - 10)^2}_{726} + (14 - 10)^2 + (15 - 10)^2 + (16 - 10)^2 - (25 - 10)^2$$

$$= 726 + 16 + 25 + 36 - 225 \Rightarrow \sum_{i=1}^{14} (x_i - 10)^2 = 578$$

گام چهارم: پس واریانس جدید به صورت تقریبی برابر می‌شود با:

$$\sigma^2 = \frac{\sum_{i=1}^{14} (x_i - 10)^2}{14} \Rightarrow \sigma^2 = \frac{578}{14} \Rightarrow \sigma^2 \approx 41/3$$

دامنه تابع f با ضابطه $f(x) = ax - 1$ ، زیرمجموعه‌ای سه‌عضوی از اعداد طبیعی فرد یک‌رقمی با کم‌ترین ضریب تغییرات است. اگر دامنه تغییرات اعضای برد این تابع برابر ۱۶ باشد، a کدام است؟

- (۱) ± 2 (۲) ± 4 (۳) ± 6 (۴) ± 8

مشاوره با توجه به سبک جدید سوالات کنکور، خودتان را برای سوالات ترکیبی آماده کنید.

پاسخ: گزینه ۲

Hint زیرمجموعه گفته‌شده را به گونه‌ای در نظر بگیرید که میانگین بیشترین مقدار ممکن را داشته باشد.

دامنه تغییرات:

اختلاف بزرگ‌ترین داده و کوچک‌ترین داده را دامنه تغییرات داده‌ها (R) می‌گویند.

$$R = \max - \min$$

ضریب تغییرات داده‌ها هنگامی به کم‌ترین مقدار خود می‌رسد که پراکندگی کم‌ترین مقدار ممکن باشد و میانگین بیشترین مقدار.

$$CV = \frac{\sigma}{\bar{x}} \rightarrow \begin{matrix} \text{min} \\ \downarrow \\ \text{min} \end{matrix} \rightarrow \begin{matrix} \text{max} \\ \uparrow \\ \text{max} \end{matrix}$$

نکته

پاسخ خیلی تشریحی **گام اول:** زیرمجموعه سه‌عضوی خواسته‌شده با توجه به نکته باید بیشترین مقدار میانگین را داشته باشد، پس دامنه f برابر می‌شود با:

$$D_f: \{5, 7, 9\}$$

گام دوم: با توجه به دامنه و ضابطه f ، برد f را به دست می‌آوریم:

$$f(x) = ax - 1 \xrightarrow{D_f = \{5, 7, 9\}} \begin{cases} f(5) = 5a - 1 \\ f(7) = 7a - 1 \\ f(9) = 9a - 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow R_f = \{5a - 1, 7a - 1, 9a - 1\}$$

گام سوم: تابع f خطی است، بیشترین و کم‌ترین مقدار آن نقاط ابتدا و انتهای برد است (نمی‌دانیم کدام $\max$ و کدام $\min$ است).

پس دامنه تغییرات برد که برابر ۱۶ است به صورت زیر می‌شود:

$$R = |(9a - 1) - (5a - 1)| \xrightarrow{R=16} 16 = |9a - 1 - 5a + 1|$$

$$\Rightarrow 16 = |4a| \Rightarrow 4a = \pm 16 \Rightarrow a = \pm 4$$

اگر داده‌های یک جامعه $۴ + ۵a$ ، $۳ + ۴a$ ، $۲ + ۳a$ ، $۱ + ۲a$ و a باشد، چقدر از نمونه‌های دوعضوی پارامتر (میانگین) جامعه را به صورت دقیق برآورد می‌کند؟

۴ (۴)

۳ (۳)

۲ (۲)

۱ (۱)

پاسخ: گزینه ۲

میانگین کل داده‌ها را به دست آورید و ببینید که میانگین کدام دو داده با هم، برابر میانگین کل داده‌ها می‌شود.

Hint

پارامتر جامعه: یک مشخصه عددی است که توصیف‌کننده جنبه‌ای خاص از جامعه است.

درس Box

برآورد نقطه‌ای پارامتر جامعه: عبارت است با مقدار پارامتر نمونه‌ای از جامعه.

پاسخ خیلی تشریحی ✓

گام اول: ابتدا میانگین جامعه را محاسبه می‌کنیم:

$$\bar{x} = \frac{(a) + (2a + 1) + (3a + 2) + (4a + 3) + (5a + 4)}{5} = \frac{15a + 10}{5}$$

$$\Rightarrow \bar{x} = 3a + 2$$

گام دوم: می‌خواهیم میانگین نمونه‌های دوعضوی برابر میانگین کل جامعه شود که فقط نمونه‌های دوعضوی زیر این شرط را دارند:

$$\{a, 5a + 4\}, \{2a + 1, 4a + 3\}$$

میانگین $2a + 2$ است. میانگین $2a + 2$ است.

پس دوتا از نمونه‌های دوعضوی پارامتر (میانگین) جامعه را به صورت دقیق برآورد می‌کند.

در انتخاب نمونه دوعضوی از جامعه $\{۱۰, ۱۱, ۱۳, ۱۴, ۱۷\}$ ، چه قدر احتمال دارد میانگین نمونه از میانگین جامعه کم تر باشد؟

۰/۴ (۴)

۰/۵ (۳)

۰/۶ (۲)

۰/۳ (۱)

پاسخ: گزینه ۳

تعداد کل نمونه های دوعضوی برابر است با $\binom{۵}{۲}$ ، نمونه های مطلوب نمونه هایی هستند که مجموع داده های آن ها کم تر از ۲۶ باشد.

 Hint

پاسخ خیلی تشریحی ✓ گام اول: ابتدا میانگین کل جامعه را به دست می آوریم:

$$\bar{x} = \frac{۱۰+۱۱+۱۳+۱۴+۱۷}{۵} \Rightarrow \bar{x} = \frac{۶۵}{۵} = ۱۳$$

گام دوم: به تعداد $\binom{۵}{۲} = \frac{۵ \times ۴}{۲} = ۱۰$ می توانیم نمونه دوعضوی انتخاب کنیم (تعداد کل)، نمونه ها به صورت $\{a, b\}$ هستند،

برای این که میانگین نمونه های دوعضوی کم تر از میانگین جامعه شود، باید $\frac{a+b}{۲} < ۱۳$ پس $a+b < ۲۶$ ، نمونه های زیر این شرط را دارند:

$\{۱۰, ۱۱\}$ ، $\{۱۰, ۱۳\}$ ، $\{۱۰, ۱۴\}$ ، $\{۱۱, ۱۳\}$ ، $\{۱۱, ۱۴\}$

پس تعداد حالات مطلوب برابر ۵ است.

گام سوم: بنابراین خواسته سؤال برابر می شود با:

$$P(\text{خواسته شده}) = \frac{\text{حالات مطلوب}}{\text{حالت کل}} = \frac{۵}{۱۰} \Rightarrow P(\text{خواسته شده}) = ۰/۵$$

با نمونه ۱۰۰ عضوی، میانگین جامعه‌ای در بازه $[۳/۷۶, ۴/۲۴]$ با اطمینان ۹۵ درصد برآورد شده است. انحراف معیار جامعه چه قدر است؟

$$۱/۲ (۲)$$

$$۰/۶ (۱)$$

$$۰/۲۴ (۴)$$

$$۲/۴ (۳)$$

پاسخ: گزینه ۲

درس Box

برآورد بازه‌ای برای میانگین جامعه: اگر نمونه‌ای تصادفی به اندازه n در اختیار داشته باشیم، با اطمینان بیش از ۹۵ درصد می‌توانیم بگوییم:

$$\bar{x} - \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leq \mu \leq \bar{x} + \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

که μ میانگین جامعه و σ انحراف معیار جامعه است. به عبارت دیگر بازه اطمینان بیش از ۹۵ درصد برابر است با:

$$[\bar{x} - \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{x} + \frac{\sigma}{\sqrt{n}}]$$

پاسخ خیلی تشریحی ✓ گام اول: می‌دانیم که بازه اطمینان ۹۵ درصد برابر $[\bar{x} - \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{x} + \frac{\sigma}{\sqrt{n}}]$ است، بنابراین با توجه به بازه داده‌شده در سؤال و این که $n = ۱۰۰$ خواهیم داشت:

$$[\bar{x} - \frac{\sigma}{\sqrt{۱۰۰}}, \bar{x} + \frac{\sigma}{\sqrt{۱۰۰}}] = [۳/۷۶, ۴/۲۴] \Rightarrow \begin{cases} \bar{x} - \frac{\sigma}{۱۰} = ۳/۷۶ \\ \bar{x} + \frac{\sigma}{۱۰} = ۴/۲۴ \end{cases}$$

$$\xrightarrow{(+)} ۲\bar{x} = ۸ \Rightarrow \bar{x} = ۴$$

گام دوم: حال $\bar{x} = ۴$ را در رابطه $\bar{x} - \frac{\sigma}{۱۰} = ۳/۷۶$ جای گذاری می‌کنیم تا انحراف معیار جامعه به دست آید:

$$\bar{x} - \frac{\sigma}{۱۰} = ۳/۷۶ \xrightarrow{\bar{x}=4} 4 - \frac{\sigma}{۱۰} = ۳/۷۶ \Rightarrow \frac{\sigma}{۱۰} = \frac{۲۴}{۱۰} \Rightarrow ۱۰\sigma = ۱۲ \Rightarrow \sigma = ۱/۲$$

په‌جور دیگره طول بازه اطمینان برابر $\frac{۴\sigma}{\sqrt{n}}$ است. در این جا طول بازه برابر $۴/۲۴ - ۳/۷۶ = ۰/۴۸$ و $n = ۱۰۰$ است، پس:

$$۰/۴۸ = \frac{۴\sigma}{\sqrt{۱۰۰}} \Rightarrow ۰/۴۸ = \frac{۴\sigma}{۱۰} \Rightarrow ۴\sigma = ۴/۸ \Rightarrow \sigma = ۱/۲$$

برای آن که طول بازه اطمینان ۹۵ درصد نمونه‌ای به اندازه n را نصف کنیم، باید ۷۵۰۰ عضو جدید به نمونه اضافه کنیم. حالا اگر بخواهیم طول بازه اطمینان ۹۵ درصد نمونه n عضوی دو برابر شود، چند عضو باید از نمونه کم کنیم؟

- (۱) ۱۸۷۵ (۲) ۲۲۲۵
(۳) ۲۵۰۰ (۴) ۲۷۷۵

پاسخ: گزینه ۱



می‌دانیم که بازه اطمینان ۹۵ درصد جامعه برابر $[\bar{x} - \frac{2\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{x} + \frac{2\sigma}{\sqrt{n}}]$ است، بنابراین طول بازه اطمینان برابر است با:

$$(\bar{x} + \frac{2\sigma}{\sqrt{n}}) - (\bar{x} - \frac{2\sigma}{\sqrt{n}}) = \frac{4\sigma}{\sqrt{n}}$$

پاسخ خیلی تشریحی ✓ گام اول: با توجه به نکته برای این که طول بازه اطمینان نصف شود باید ۷۵۰۰ عضو جدید را به آن اضافه کنیم، پس خواهیم داشت:

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \left(\frac{4\sigma}{\sqrt{n}} \right) = \frac{4\sigma}{\sqrt{n+7500}} \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{n}} = \frac{4}{\sqrt{n+7500}} \Rightarrow 2\sqrt{n} = \sqrt{n+7500}$$

$$\xrightarrow{\text{توان ۲}} 4n = n + 7500 \Rightarrow 3n = 7500 \Rightarrow n = 2500$$

$$\text{پس طول بازه برابر است با } \frac{4\sigma}{\sqrt{2500}} = \frac{4\sigma}{50} = \frac{2\sigma}{25}$$

گام دوم: فرض می‌کنیم برای این که طول بازه مورد نظر ۲ برابر شود، x داده از آن کم شود، در نتیجه:

$$2 \left(\frac{2\sigma}{25} \right) = \frac{4\sigma}{\sqrt{2500-x}} \Rightarrow \frac{2}{25} = \frac{4}{\sqrt{2500-x}}$$

$$\Rightarrow \sqrt{2500-x} = 25 \xrightarrow{\text{توان ۲}} 2500-x = 625$$

$$\Rightarrow x = 1875$$

پس ۱۸۷۵ داده باید از نمونه کم کنیم.

۴۰

داده‌های یک جامعه ۱۰ عضوی را با x_1 تا x_{10} نمایش می‌دهیم. اگر $x_1 + x_2 + \dots + x_{10} = 40$ و $x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_{10}^2 = 200$ ، در این صورت نمونه چهارعضوی که مجموع عضوهایش برابر ۱۴ است، با اطمینان بیش از ۹۵٪ کدام بازه را برای میانگین برآورد می‌کند؟

(۲) $[2/5, 5]$

(۱) $[3, 4]$

(۴) $[1/5, 5/5]$

(۳) $[2, 5/5]$

پاسخ: گزینه ۲

 Hint

به کمک فرمول دوم واریانس و مقدار میانگین، انحراف معیار جامعه را به دست آورید، سپس با محاسبه میانگین نمونه گفته‌شده، خواسته سؤال را پیدا کنید.

 نکته

فرمول دوم واریانس به صورت زیر است:

$$\sigma^2 = \frac{\text{مجموع مربعات داده‌ها}}{\text{تعداد داده‌ها}} - (\text{مربع میانگین})$$

پاسخ خیلی تشریحی ✓ گام اول: با توجه به این که مجموع داده‌ها و مجموع مربعات آن‌ها را داریم، ابتدا میانگین و انحراف معیار جامعه را به دست می‌آوریم:

$$\text{میانگین جامعه} = \frac{40}{10} = 4 \Rightarrow x_1 + x_2 + \dots + x_{10} = 40$$

$$\sigma^2 = \frac{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_{10}^2}{10} - (\text{میانگین جامعه})^2 \Rightarrow \sigma^2 = \frac{200}{10} - 16$$

$$\Rightarrow \sigma^2 = 20 - 16 = 4 \Rightarrow \sigma = 2$$

گام دوم: ابتدا میانگین نمونه ۴ عضوی مورد نظر و سپس بازه اطمینان ۹۵ درصد را به دست می‌آوریم:

$$\bar{x} = \frac{14}{4} = 3.5$$

$$\left[\bar{x} - \frac{2\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{x} + \frac{2\sigma}{\sqrt{n}} \right] = \left[3.5 - \frac{2 \times 2}{\sqrt{4}}, 3.5 + \frac{2 \times 2}{\sqrt{4}} \right] = [1/5, 5/5]$$

لامپی که روی آن دو عدد ۱۲ V و ۴۵ W نوشته شده است را به اختلاف پتانسیل الکتریکی ۸ V وصل می‌کنیم. اگر مقاومت الکتریکی لامپ ثابت بماند، در این حالت انرژی الکتریکی مصرفی آن در مدت یک شبانه‌روز چند کیلووات‌ساعت است؟

۰/۶ (۲)

۰/۴۸ (۱)

۰/۹۶ (۴)

۰/۷۲ (۳)

پاسخ: گزینه ۱

ابتدا توان واقعی لامپ را از تناسب $(\frac{P}{P_{اسمی}} = (\frac{V}{V_{اسمی}})^2)$ به دست آورید و سپس از رابطه $(U = Pt)$ ، انرژی مصرفی را محاسبه کنید. دقت کنید که در رابطه انرژی، باید توان برحسب کیلووات و زمان برحسب ساعت باشد.

Hint

درس‌Box

بر روی بسیاری از لوازم برقی دو عدد تحت نام‌های ولتاژ اسمی و توان اسمی به عنوان مشخصه‌های آن وسیله معرفی می‌شود. منظور از ولتاژ اسمی مناسب‌ترین اختلاف پتانسیلی است که می‌توان به دو سر یک وسیله برقی وصل کرد. معمولاً در ولتاژهای بیشتر از ولتاژ اسمی، به وسیله آسیب خواهد رسید. توان اسمی توانی است که وسیله برقی در صورت اتصال به ولتاژ اسمی مصرف خواهد کرد. اگر وسیله‌ای به ولتاژهای کمتر از ولتاژ اسمی وصل شود، توان آن نیز کمتر از توان اسمی خواهد بود. توان یک لامپ در ولتاژ V، در مقایسه با توان اسمی برابر است با:

$$\frac{P}{P_{اسمی}} = (\frac{V}{V_{اسمی}})^2$$

دقت کنید که در نوشتن این تناسب، مقاومت R ثابت فرض شده است.

پاسخ خیلی تشریحی ✓ **گام اول:** ابتدا توان واقعی لامپ را محاسبه می‌کنیم:

$$\frac{P}{P_{اسمی}} = (\frac{V}{V_{اسمی}})^2 \Rightarrow \frac{P}{45} = (\frac{8}{12})^2 \Rightarrow \frac{P}{45} = \frac{4}{9} \Rightarrow P = 20 \text{ W} \Rightarrow P = 20 \times 10^{-3} \text{ kW} = 2 \times 10^{-2} \text{ kW}$$

گام دوم: حال انرژی مصرفی آن را به صورت زیر به دست می‌آوریم:

$$U = Pt \Rightarrow U = 2 \times 10^{-2} \times 24 \Rightarrow U = 0.48 \text{ kWh}$$

اگر جریان الکتریکی عبوری از یک باتری از ۲ A به ۲/۵ A برسد، توان خروجی آن از ۱۲ W به ۱۲/۵ W می‌رسد. مقاومت درونی این باتری چند اهم است؟

۲/۵ (۴)

۲ (۳)

۱/۵ (۲)

۱ (۱)

پاسخ: گزینه ۳

Hint

توان خروجی باتری را در دو حالت مختلف از رابطه $(P = \varepsilon I - rI^2)$ به دست آورید و سپس یک دستگاه دو معادله - دو مجهول تشکیل دهید تا مقدار r را محاسبه کنید.

درس: Box

توان خروجی باتری برابر است با توان تولیدی آن منهای توان تلف‌شده که توسط مقاومت درونی باتری مصرف می‌شود و از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$P_{\text{تلف شده}} - P_{\text{تولیدی}} = P_{\text{خروجی باتری}}$$

$$P_{\text{خروجی باتری}} = \varepsilon I - rI^2$$

P : توان (W)

ε : نیروی محرکه مولد (V)

I : جریان عبوری از باتری (A)

r : مقاومت درونی باتری (Ω)

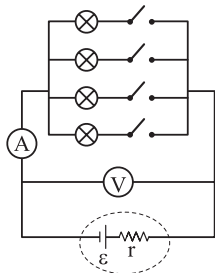
پاسخ خیلی تشریحی ✓ توان خروجی باتری را در دو حالت زیر به دست می‌آوریم:

$$P = \varepsilon I - rI^2$$

$$\begin{cases} 12 = 2\varepsilon - 4r \\ 12/5 = 2/5\varepsilon - 6/25r \end{cases} \xrightarrow{\times(-\frac{5}{4})} \begin{cases} -15 = -2/5\varepsilon + 5r \\ 12/5 = 2/5\varepsilon - 6/25r \end{cases}$$

$$-2/5 = -1/25r \Rightarrow r = 2\Omega$$

در مدار شکل زیر، تعدادی لامپ مشابه به طور موازی به هم متصل شده‌اند و هر لامپ با کلیدی همراه است. با بستن کلیدها یکی پس از دیگری، عددهایی که آمپرسنج آرمانی و ولتسنج آرمانی نشان می‌دهند، به ترتیب از راست به چپ، چگونه تغییر می‌کنند؟



(۱) کاهش می‌یابد، کاهش می‌یابد.

(۲) افزایش می‌یابد، افزایش می‌یابد.

(۳) کاهش می‌یابد، افزایش می‌یابد.

(۴) افزایش می‌یابد، کاهش می‌یابد.

پاسخ: گزینه ۴

اتصال مقاومت‌ها به یکدیگر:

درس: Box

(۱) اتصال سری (متوالی): در این حالت شدت جریان عبوری از هر یک از مقاومت‌ها با یکدیگر یکسان است و مقاومت معادل عبارت است از:

$$I = I_1 = I_2 = I_3$$

$$R_T = R_1 + R_2 + R_3$$

• اگر n مقاومت مشابه R را به طور سری (متوالی) به یکدیگر متصل کنیم، مقاومت معادل آن‌ها برابر است با:

$$R_T = nR$$

• در این حالت مقاومت معادل از تک‌تک مقاومت‌ها بزرگ‌تر است.

• اگر یک مقاومت سری (متوالی) به مدار اضافه شود، مقاومت معادل افزایش می‌یابد و اگر از مدار کم شود، مقاومت معادل کاهش می‌یابد.

(۲) اتصال موازی: در این حالت، اختلاف پتانسیل دو سر مقاومت‌ها با یکدیگر یکسان است و مقاومت معادل برابر است با:

$$I = I_1 + I_2 + I_3$$

$$V = V_1 = V_2 = V_3$$

$$\frac{1}{R_T} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}$$

• اگر n مقاومت مشابه R را به صورت موازی ببندیم، مقاومت معادل مدار برابر است با:

$$R_T = \frac{R}{n}$$

• اگر دو مقاومت R_1 و R_2 را به صورت موازی متصل کنیم، مقاومت معادل آن‌ها برابر است با:

$$R_T = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$$

• در حالت موازی، مقاومت معادل از تک‌تک مقاومت‌ها کوچک‌تر است.

• اگر یک مقاومت را به صورت موازی به مدار اضافه کنیم، مقاومت معادل کاهش می‌یابد و بالعکس.

آمپرسنج در مدار به صورت سری بسته می‌شود و جریان کل مدار را نشان می‌دهد:

$$I = \frac{\varepsilon}{R_{eq} + r}$$

مقاومت آمپرسنج آرمانی صفر است، بنابراین اگر اشتباهاً آن را در مدار به صورت موازی ببندیم، مانند اتصال کوتاه عمل می‌کند و جزی از مدار که به آن بسته شده از مدار حذف می‌شود.

ولتسنج در مدار به صورت موازی به هر جزء بسته می‌شود. اگر ولتسنج به دو سر مقاومت متصل شود، عدد RI را نشان می‌دهد و اگر به دو سر مولد متصل شود، در صورتی که جریان در مدار برقرار نباشد، نیروی محرکه مولد (ε) را نشان می‌دهد و اگر جریان در مدار برقرار باشد، عدد $V = \varepsilon - rI$ را نشان می‌دهد. اگر اشتباهاً ولتسنج آرمانی را در مدار سری ببندیم، به دلیل این که مقاومت آن بی‌نهایت است، جریان در مدار صفر می‌شود.

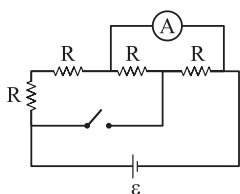
با بستن کلیدها، لامپها به طور موازی به مدار اضافه می‌شوند و این امر سبب می‌شود که مقاومت معادل کاهش یابد، در نتیجه جریانی کل مدار (عدد آمپرسنج)، افزایش می‌یابد:

$$\uparrow I = \frac{\varepsilon}{\downarrow R_{eq} + r}$$

عدد ولت‌سنج نیز که به دو سر باتری متصل است، با افزایش جریان کاهش می‌یابد:

$$\downarrow V = \varepsilon - rI \uparrow$$

۴۴ در مدار شکل زیر با بسته شدن کلید، جریانی که از آمپرسنج آرمانی می‌گذرد، چند برابر می‌شود؟



۱ (۱)

۲ (۲)

۳ (۳)

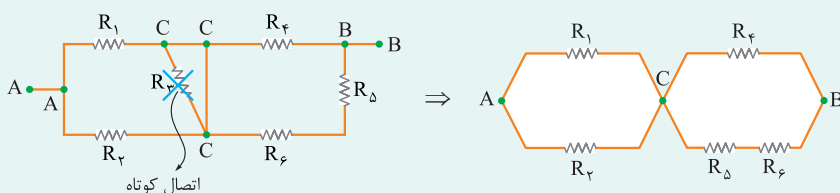
۴ (۴)

پاسخ: گزینه ۳

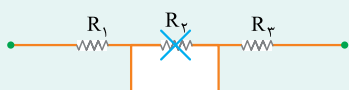
درس: Box

تکنیک نام‌گذاری برای حل مدارهای دشوار:

ابتدا گره‌ها را مشخص می‌کنیم (گره، به ابتدا و انتهای مدار (دو سر باتری) و نقاطی می‌گوییم که بیشتر از دو شاخه به هم وصل شده باشند). سپس از یک سر مدار (ابتدای آن) شروع می‌کنیم به نام‌گذاری گره‌ها و تا سر دیگر مدار نام‌گذاری را ادامه می‌دهیم. در نام‌گذاری گره‌ها، آن‌هایی که با سیم به هم وصل شده‌اند را هم‌نام می‌گذاریم.



اتصال کوتاه: هرگاه دو سر یک مقاومت توسط سیم به هم متصل شوند، آن مقاومت اتصال کوتاه شده و از مدار حذف می‌شود.



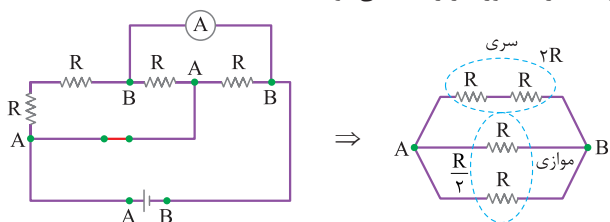
تذکر: اگر چند مقاومت سری باشند و یکی از آن‌ها اتصال کوتاه شود، فقط همان مقاومت از مدار حذف می‌شود. اما اگر چند مقاومت با یکدیگر موازی باشند و یکی از آن‌ها اتصال کوتاه شود، تمامی مقاومت‌های دیگر که با آن موازی هستند نیز از مدار حذف می‌شوند.

گام اول: در حالت کلید باز، دو مقاومتی که آمپرسنج با آن‌ها موازی بسته شده از مدار حذف می‌شوند و فقط دو مقاومت سری R در مدار هستند که جریان کل آن‌ها به صورت زیر است:

$$I = \frac{\varepsilon}{R_{eq} + r} \Rightarrow I = \frac{\varepsilon}{2R}$$

بنابراین در حالت کلید باز، جریان $I = \frac{\varepsilon}{2R}$ از آمپرسنج عبور می‌کند.

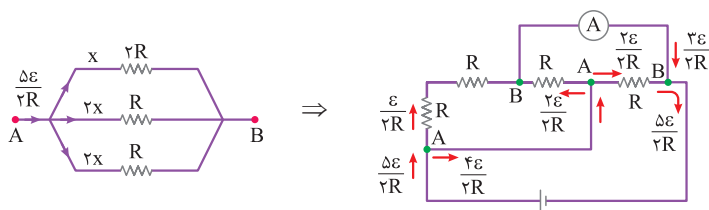
گام دوم: حال، اگر کلید را ببندیم، با تکنیک نام‌گذاری، مدار به صورت زیر ساده می‌شود:



$$\Rightarrow R_{eq} = \frac{2R \times \frac{2R}{3}}{2R + \frac{2R}{3}} \Rightarrow R_{eq} = \frac{2R}{5}$$

$$I = \frac{\varepsilon}{R_{eq} + r} \Rightarrow I = \frac{\varepsilon}{\frac{2R}{5} + r} \Rightarrow I = \frac{5\varepsilon}{2R}$$

گام سوم: تقسیم جریان بین مقاومت‌ها را به صورت زیر انجام می‌دهیم:

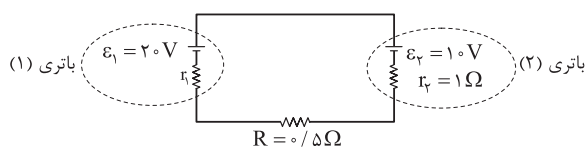


$$\Delta x = \frac{\Delta \varepsilon}{2R} \Rightarrow x = \frac{\varepsilon}{2R}$$

گام چهارم: نسبت جریان عبوری از آمپرسنج، در حالت کلیدبسته به حالت کلیدباز را به دست می‌آوریم:

$$\frac{I_{\text{کلیدبسته}}}{I_{\text{کلیدباز}}} = \frac{\frac{3\varepsilon}{2R}}{\frac{\varepsilon}{2R}} \Rightarrow \frac{I_{\text{کلیدبسته}}}{I_{\text{کلیدباز}}} = 3$$

در مدار شکل زیر اگر توان مصرفی مقاومت R برابر 8 W باشد، توان ورودی باتری (۲) چند وات است؟



۵۶ (۴)

۴۸ (۳)

۳۶ (۲)

۲۴ (۱)

پاسخ: گزینه ۲

Hint

ابتدا از رابطه توان مصرفی مقاومت ($P = RI^2$)، جریان مدار را به دست آورید و سپس با کمک رابطه ($P = \varepsilon I + rI^2$) توان ورودی به باتری مصرف کننده را محاسبه کنید.

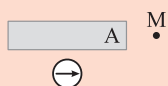
پاسخ خیلی تشریحی ✓ **گام اول:** از توان مصرفی مقاومت، جریان عبوری از مدار را به دست می آوریم:

$$P = RI^2 \Rightarrow 8 = 5I^2 \Rightarrow I^2 = 1.6 \Rightarrow I = 1.26\text{ A}$$

گام دوم: چون باتری ε_2 در مدار به عنوان مصرف کننده است (چرا؟)، توان ورودی به آن به صورت زیر محاسبه می شود:

$$P = \varepsilon I + rI^2 \Rightarrow P = (10)(1.26) + (1)(1.26)^2 \Rightarrow P = 13.16\text{ W}$$

در شکل زیر، با توجه به وضعیت عقربه مغناطیسی، ناحیه A کدام قطب آهنربا و میدان مغناطیسی در نقطه M در کدام جهت است؟



(۱) S، ←

(۲) S، →

(۳) N، ←

(۴) N، →

پاسخ: گزینه ۱

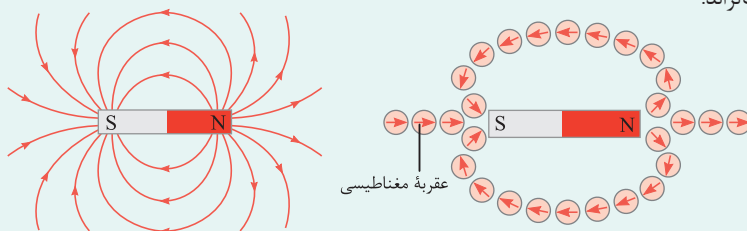
درس Box

عقربه مغناطیسی، یک آهنربای بسیار کوچک و سبک است که آن را با نماد $\rightarrow$ نشان می‌دهند. در این نماد، نوک پیکان قطب N و انتهای آن قطب S است.

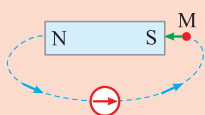
آهنربا در فضای اطراف خود خاصیتی به وجود می‌آورد که به موجب آن بر مواد مغناطیسی و آهنرباهای دیگر، نیروی مغناطیسی وارد می‌کند؛ به این خاصیت میدان مغناطیسی گفته می‌شود. میدان مغناطیسی کمیتی برداری است و آن را با نماد $\vec{B}$ نمایش می‌دهند و یکای آن در SI، تسلا (T) است. گاهی از یکاهای کوچک‌تری به نام گاوس (G) نیز برای آن استفاده می‌شود:

$$1 \text{ G} = 10^{-4} \text{ T}$$

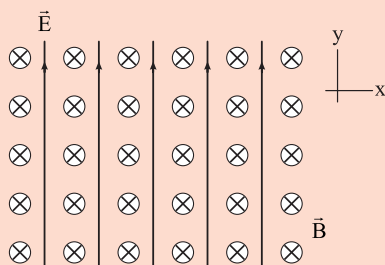
به کمک عقربه مغناطیسی می‌توان جهت خط‌های میدان مغناطیسی را در هر نقطه از فضای اطراف یک آهنربا تعیین کرد. بنا به تعریف، بردار میدان مغناطیسی در هر نقطه از فضای پیرامون یک آهنربا در جهتی است که وقتی عقربه مغناطیسی در آن نقطه قرار می‌گیرد، قطب N عقربه، جهت را نشان می‌دهد. جهت خطوط میدان مغناطیسی در خارج آهنربا از قطب N به قطب S و در داخل آن از قطب S به قطب N است. خط‌های میدان مغناطیسی حلقه‌های بسته‌ای را تشکیل می‌دهند و در نزدیکی قطب‌های آهنربا این خطوط به یکدیگر نزدیک‌تراند.



پاسخ خیلی تشریحی ✓ با توجه به جهت‌گیری عقربه مغناطیسی، جهت میدان مغناطیسی، به صورت شکل زیر است، بنابراین ناحیه A، قطب S آهنربا است، زیرا میدان به آن وارد می‌شود. در نقطه M نیز خط مماس بر میدان به صورت زیر رسم می‌شود، بنابراین جهت آن به سمت چپ است.



در شکل زیر، میدان‌های یکنواخت الکتریکی $E = 100 \text{ N/C}$ و مغناطیسی $B = 100 \text{ G}$ نشان داده شده است. در این فضا، یک الکترون با تندی چند متر بر ثانیه و در چه جهتی در حرکت باشد تا بدون انحراف به حرکت خود ادامه دهد؟ (اثر وزن ناچیز است.)

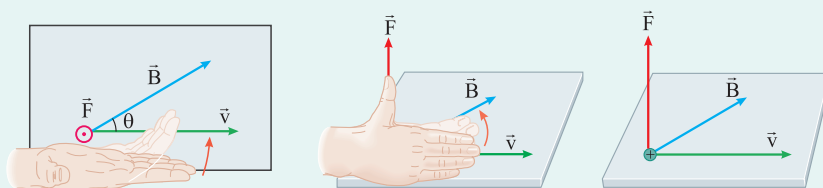


- (۱) 10^4 ، در جهت محور X
- (۲) 5×10^3 ، در جهت محور X
- (۳) 10^4 ، در خلاف جهت محور X
- (۴) 5×10^3 ، در خلاف جهت محور X

پاسخ: گزینه ۳

درس Box

آزمایش نشان می‌دهد که اگر ذره باردار q با سرعت $\vec{v}$ در میدان مغناطیسی $\vec{B}$ حرکت کند (به شرط آن که جهت حرکت آن با میدان مغناطیسی موازی نباشد)، بر آن نیرویی وارد خواهد شد که مطابق شکل زیر بر راستای سرعت و میدان مغناطیسی عمود است. این نیرو را نیروی مغناطیسی می‌نامند و جهت آن به کمک قاعده دست راست تعیین می‌شود. اگر دست راست را طوری نگه داریم که انگشتان باز شده دست در جهت $\vec{v}$ باشد و کف دست (جهت چرخش انگشتان) در جهت میدان مغناطیسی قرار گیرد، انگشت شست ما در جهت نیروی وارد بر ذره باردار مثبت است. توجه کنید که نیروی وارد بر بار منفی، در خلاف جهت نیروی وارد بر بار مثبت است.



اندازه نیروی مغناطیسی وارد بر بار الکتریکی در حال حرکت از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$F = |q| v B \sin \theta$$

F : نیروی وارد بر ذره باردار (N)

q : بار الکتریکی ذره (C)

v : سرعت حرکت ذره (m/s)

B : میدان مغناطیسی (T)

θ : زاویه بین جهت حرکت ذره و جهت میدان مغناطیسی

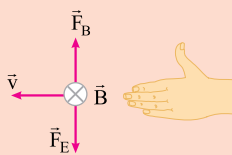
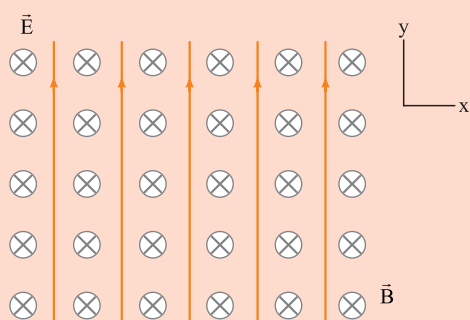
وقتی بار الکتریکی q عمود بر راستای میدان مغناطیسی حرکت کند، اندازه نیروی مغناطیسی وارد بر ذره باردار بیشینه می‌شود:

$$\theta = 90^\circ \Rightarrow \sin \theta = 1 \Rightarrow F_{\max} = |q| v B$$

یکای SI میدان مغناطیسی به احترام نیکلا تسلا، دانشمند و مخترع نامی، تسلا نامیده می‌شود و به اختصار با نماد T نشان داده می‌شود. به این ترتیب می‌توان نوشت:

$$1 \text{ T} = 1 \frac{\text{N}}{\text{C} \cdot \frac{\text{m}}{\text{s}}} = 1 \frac{\text{N}}{\text{A} \cdot \text{m}}$$

پاسخ خیلی تشریحی ✓



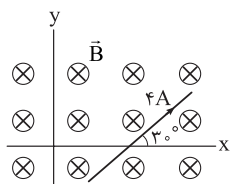
تذکر: چون بار ذره منفی است از دست چپ استفاده می کنیم.

با توجه به شکل، نیروی وارد بر الکترون از طرف میدان الکتریکی خلاف جهت آن یعنی رو به پایین است، بنابراین باید نیروی میدان مغناطیسی هم اندازه و خلاف جهت آن باشد تا ذره بدون انحراف به مسیر حرکت خود ادامه دهد. پس نیروی مغناطیسی به طرف بالا و به سمت قاعده دست چپ (!) جهت حرکت الکترون، خلاف جهت محور X است. از طرفی برای محاسبه تندی الکترون هم داریم:

$$F_E = F_B \Rightarrow E|q| = |q|vB \Rightarrow E = vB \Rightarrow v = \frac{E}{B}$$

$$\Rightarrow v = \frac{100}{100 \times 10^{-4}} \Rightarrow v = 10^4 \text{ m/s}$$

در شکل زیر، سیم مستقیمی به طول 2 m و حامل جریان 4 A ، در میدان مغناطیسی یکنواخت و درون سوی $B = 0.5\text{ T}$ قرار دارد. بزرگی نیروی مغناطیسی وارد بر سیم چند نیوتون است و این نیرو با امتداد محور x چه زاویه‌ای می‌سازد؟



(۱) 4° ، 3°

(۲) 4° ، 6°

(۳) 2° ، 3°

(۴) 2° ، 6°

پاسخ: گزینه ۲

درس: Box

نیروی مغناطیسی وارد بر یک سیم رسانای حامل جریان در میدان مغناطیسی یکنواخت به عامل‌های مختلفی بستگی دارد:

$$F = I l B \sin \theta$$

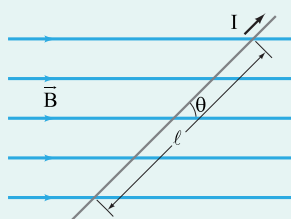
F : نیروی مغناطیسی وارد بر سیم حامل جریان (N)

I : جریان الکتریکی (A)

l : طول سیم درون میدان مغناطیسی (m)

B : میدان مغناطیسی (T)

θ : زاویه بین جهت میدان مغناطیسی و جهت جریان سیم



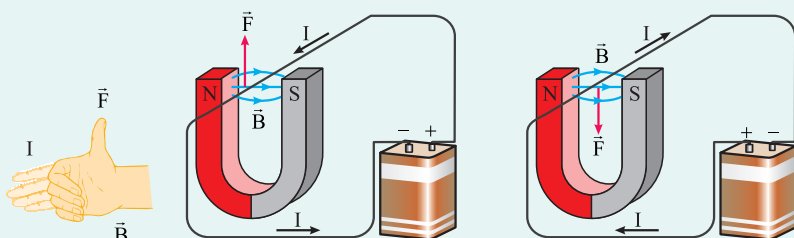
● اگر سیم موازی خطوط میدان مغناطیسی قرار بگیرد:

$$\theta = 0^\circ \Rightarrow \sin \theta = 0 \Rightarrow F = 0$$

● اگر سیم عمود بر خطوط میدان مغناطیسی قرار بگیرد:

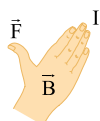
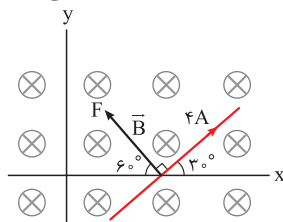
$$\theta = 90^\circ \Rightarrow \sin \theta = 1 \Rightarrow F_{\max} = I l B$$

میدان مغناطیسی بر سیم حامل جریان نیروی مغناطیسی وارد می‌کند. براساس آزمایش‌های اورستد، نیرویی که در میدان مغناطیسی بر سیم حامل جریان الکتریکی وارد می‌شود، بر راستای سیم و نیز بر راستای میدان مغناطیسی عمود است. جهت نیروی وارد بر سیم حامل جریان در میدان مغناطیسی را می‌توان با استفاده از قاعده دست راست تعیین کرد.



گام اول: جهت نیروی وارد بر سیم را طبق قاعده دست راست به صورت زیر مشخص می‌کنیم:

از آن جایی که نیرو باید به سیم و میدان مغناطیسی عمود باشد، پس زاویه بین نیرو و امتداد محور x مطابق شکل زیر 6° درجه می‌باشد:



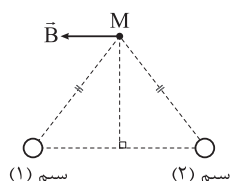
گام دوم: حال نیروی وارد بر سیم را به صورت زیر محاسبه می‌کنیم:

$$F = I l B \sin \theta \Rightarrow F = 4 \times 2 \times 0.5 \times 10^{-1} \times 1 \Rightarrow F = 4\text{ N}$$

حواستان باشد که در این فرمول، θ زاویه بین جریان و میدان یعنی 90° است.

در شکل زیر دو سیم بلند و موازی (۱) و (۲) بر صفحه عمودند و از آن‌ها جریان‌های الکتریکی یکسان عبور می‌کند. اگر میدان مغناطیسی خالص حاصل از این دو سیم در نقطه M در جهت نشان داده شده باشد، جهت جریان عبوری از سیم‌های (۱) و (۲) به ترتیب از راست به

چپ کدام است؟

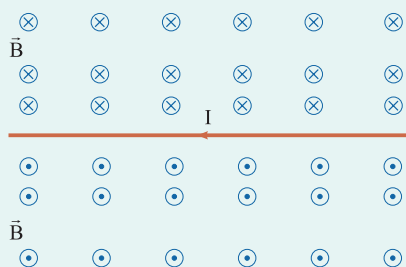
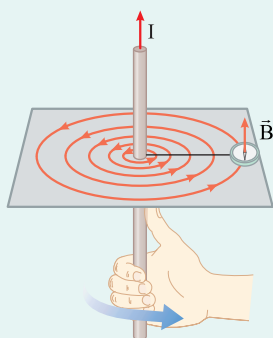


- (۱) $\odot \odot \odot$
 (۲) $\otimes \otimes \otimes$
 (۳) $\otimes \odot$
 (۴) $\odot \otimes$

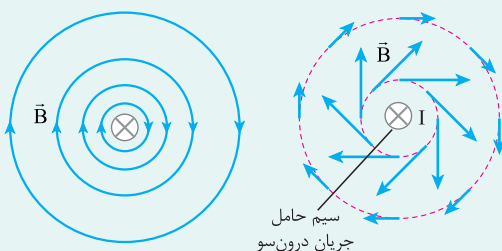
پاسخ: گزینه ۱

درس: Box

اورستد، دانشمند دانمارکی، کشف کرد که عبور جریان الکتریکی از یک سیم رسانا، در اطراف آن یک میدان مغناطیسی به وجود می‌آورد. خط‌های میدان مغناطیسی حاصل از یک سیم حامل جریان، مطابق شکل به صورت دایره‌های هم‌مرکز در اطراف سیم حامل جریان هستند. جهت خط‌های میدان مغناطیسی را با استفاده از قاعده دست راست می‌توان تعیین کرد. مطابق این قاعده اگر سیم را در دست راست خود بگیرید به گونه‌ای که شست در جهت جریان الکتریکی باشد، جهت چرخش انگشتان دست شما جهت خط‌های میدان مغناطیسی در اطراف سیم را نشان می‌دهد. اگر سیم را در صفحه نشان دهیم، میدان در یک سمت آن درون‌سو و در سمت دیگر آن به صورت برون‌سو خواهد بود. به عنوان مثال در شکل زیر جهت جریان سیم رو به بالا است، بنابراین:

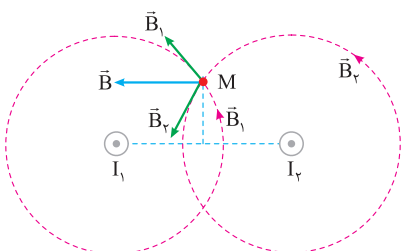


حالا اگر به سیم حامل جریان از بالا نگاه کنیم، جریان عبوری از سیم را به صورت درون‌سو یا برون‌سو می‌بینیم و میدان مغناطیسی اطراف آن را به صورت دایره‌های هم‌مرکز مشاهده می‌کنیم که خط مماس بر میدان در هر نقطه جهت میدان مغناطیسی را نشان می‌دهد. به عنوان مثال اگر در سیمی جریان رو به پایین باشد و ما از بالا به آن نگاه کنیم، خواهیم داشت:



پاسخ خیلی تشریحی ✓ با توجه به جهت میدان مغناطیسی برابند، میدان‌های B_1 و B_2 به صورت زیر رسم می‌شوند:

میدان در اطراف سیم حامل جریان، زمانی که از بالا به آن نگاه می‌کنیم به صورت دایره‌ای شکل دیده می‌شود، بنابراین دایره‌های فرضی در اطراف هر دو سیم را به صورت زیر رسم می‌کنیم و با توجه به جهت خط مماس بر آن‌ها جهت میدان را مشخص کرده و طبق قاعده دست راست جریان در هر دو سیم برون‌سو خواهد بود.



پیچهای مسطح به شعاع R را باز کرده و مقداری از سیم آن را بریده و کنار می گذاریم و با استفاده از سیم باقی مانده، پیچهای به شعاع $\frac{R}{۲}$ می سازیم. اگر از دو پیچه جریانهای یکسان عبور کند، بزرگی میدان مغناطیسی در مرکز دو پیچه یکسان می شود. طول سیم کنار گذاشته شده، چند درصد از طول اولیه سیم است؟

۷۵ (۴)

۵۰ (۳)

۴۰ (۲)

۲۵ (۱)

پاسخ: گزینه ۲

اندازه میدان مغناطیسی در مرکز پیچهای که حامل جریان است از رابطه زیر به دست می آید:

$$B = \frac{\mu_0 NI}{2R}$$

B : میدان مغناطیسی (T)

$$\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{ T.m/A}$$

N : تعداد دورها

I : جریان الکتریکی (A)

R : شعاع پیچه (m)

درس Box

پاسخ خیلی تشریحی ✓

گام اول: میدان مغناطیسی پیچهها را مساوی قرار می دهیم:

$$B = \frac{\mu_0 NI}{2R} \Rightarrow B_1 = B_2 \Rightarrow \frac{\mu_0 N_1 I_1}{2R_1} = \frac{\mu_0 N_2 I_2}{2R_2} \Rightarrow N_1 = 2N_2$$

گام دوم: با توجه به این که تعداد دورهای پیچه از رابطه $N = \frac{l}{2\pi R}$ به دست می آید:

$$\frac{l_1}{2\pi R_1} = 2 \left(\frac{l_2}{2\pi R_2} \right) \Rightarrow l_1 = 4l_2 \Rightarrow l_2 = \frac{1}{4} l_1 \Rightarrow l_2 = 25\% l_1$$

بنابراین ۷۵٪ از طول سیم را کنار گذاشته ایم.

خاصیت مغناطیسی ایجاد شده در آلومینیم و فولاد در حضور میدان‌های مغناطیسی خارجی قوی به ترتیب از راست به چپ چگونه است؟

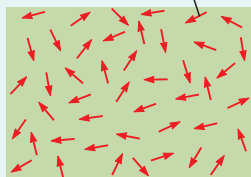
- (۱) قوی و موقت - قوی و دائمی
(۲) ضعیف و موقت - قوی و دائمی
(۳) ضعیف و دائمی - ضعیف و موقت
(۴) قوی و دائمی - ضعیف و موقت

پاسخ: گزینه ۲

درس‌Box

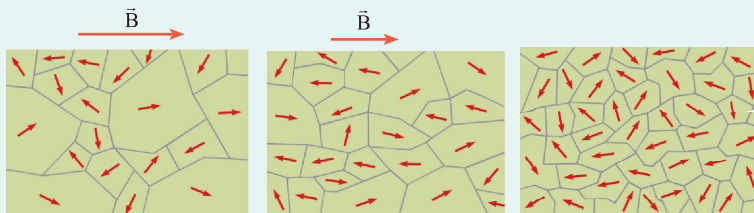
یکی از انواع مواد مغناطیسی، مواد پارامغناطیسی است که اتم‌های آن خاصیت مغناطیسی دارند اما دوقطبی‌های مغناطیسی وابسته به آن‌ها، به طور کاتوره‌ای سمت‌گیری کرده‌اند و میدان مغناطیسی خالص ایجاد نمی‌کنند. با قراردادن مواد پارامغناطیسی درون میدان مغناطیسی خارجی قوی، دوقطبی‌های مغناطیسی آن‌ها به مقدار مختصری در راستای خط‌های میدان مغناطیسی منظم می‌شوند، بنابراین می‌توان گفت مواد پارامغناطیسی، در حضور میدان‌های مغناطیسی قوی، خاصیت مغناطیسی ضعیف و موقت پیدا می‌کنند. اورانیم، پلاتین، آلومینیم، سدیم، اکسیژن و اکسید نیتروژن از جمله مواد پارامغناطیسی‌اند.

هر ذره سازنده مواد پارامغناطیسی یک آهنربای میکروسکوپی است.



سمت‌گیری کاتوره‌ای دوقطبی‌های مغناطیسی در یک ماده پارامغناطیسی در نبود میدان مغناطیسی

مواد فرومغناطیس: نوع دیگری از مواد مغناطیسی است که اتم‌های آن‌ها به طور ذاتی دارای دوقطبی مغناطیسی هستند. برهم‌کنش‌های قوی بین دوقطبی‌های مغناطیسی در این مواد موجب می‌شود که این دوقطبی‌ها، حتی در نبود میدان خارجی، در ناحیه‌هایی که حوزه‌های مغناطیسی نامیده می‌شوند همسو شوند. مواد فرومغناطیس را می‌توان با قراردادن در یک میدان مغناطیسی، آهنربا کرد. با حضور آهنربا، حوزه‌هایی که نسبت به میدان آن همسو هستند رشد می‌کنند و حجمشان زیاد می‌شود. از سوی دیگر حجم حوزه‌هایی که سمت‌گیری آن‌ها در راستای میدان آهنربا نیست، کم می‌شود. در این فرایند مرز بین بیشتر حوزه‌ها جابه‌جا می‌شود و ماده خاصیت آهنربایی پیدا می‌کند.



ابعاد حوزه‌ها از مرتبه دهم تا هزارم میلی‌متر است.

مواد فرومغناطیس نرم: حوزه‌های مغناطیسی این مواد در حضور میدان مغناطیسی خارجی به سهولت تغییر می‌کنند و ماده به سادگی آهنربا می‌شود و با حذف میدان خارجی نیز خاصیت آهنربایی خود را به آسانی از دست می‌دهد. از این مواد در ساخت هسته پیچ‌ها و سیم‌لوله‌ها و برای ساختن آهنرباهای الکتریکی (غیردائم) استفاده می‌شود، مانند: آهن، نیکل و کبالت.

مواد فرومغناطیس سخت: این مواد به سختی آهنربا می‌شوند، یعنی در حضور میدان مغناطیسی خارجی، حجم حوزه‌ها در آن‌ها به سختی تغییر می‌کند. در این مواد، سمت‌گیری دوقطبی‌های مغناطیسی حوزه‌ها پس از حذف میدان خارجی، تا مدت زیادی تقریباً بدون تغییر باقی می‌ماند، به همین دلیل از این مواد مانند فولاد، آلیاژهای آهن، کبالت و نیکل برای ساختن آهنرباهای دائمی استفاده می‌شود.

همان‌طور که در درس‌بکس بالا دیدید، آلومینیم نوعی ماده پارامغناطیسی است و در میدان مغناطیسی خارجی قوی، خاصیت مغناطیسی ضعیف و موقت پیدا می‌کند و فولاد نوعی فرومغناطیسی سخت است و در میدان مغناطیسی خارجی قوی، خاصیت مغناطیسی قوی و دائمی پیدا می‌کند.

پاسخ خیلی تشریحی ✓

پیچه‌ای شامل ۲۰۰ حلقه با مقاومت الکتریکی 5Ω در میدان مغناطیسی یکنواختی قرار دارد. در مدتی معین با تغییر میدان مغناطیسی، بار الکتریکی 8 mC در این پیچه شارش می‌یابد. تغییر شار مغناطیسی گذرنده از پیچه در این مدت چند ویر است؟

$$2 \times 10^{-3} \text{ (۲)}$$

$$2 \times 10^{-4} \text{ (۱)}$$

$$4 \times 10^{-3} \text{ (۴)}$$

$$4 \times 10^{-4} \text{ (۳)}$$

پاسخ: گزینه ۱

Hint با استفاده از رابطه بار القایی شارش شده در پیچه $(q = \frac{N\Delta\Phi}{R})$ ، می‌توانید تغییر شار مغناطیسی گذرنده از پیچه را به دست آورید.

دروس Box

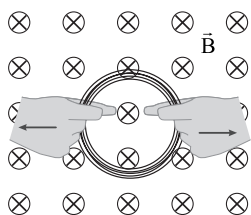
بار القایی شارش شده در پیچه با کمک رابطه شدت جریان متوسط به صورت زیر به دست می‌آید:

$$\begin{cases} |\bar{\varepsilon}| = N \frac{\Delta\Phi}{\Delta t} \\ I = \frac{\varepsilon}{R} \\ I = \frac{q}{\Delta t} \end{cases} \Rightarrow \frac{q}{\Delta t} = \frac{N\Delta\Phi}{\Delta t \cdot R} \Rightarrow q = \frac{N\Delta\Phi}{R}$$

$$q = \frac{N\Delta\Phi}{R} \Rightarrow \Delta\Phi = \frac{qR}{N} \Rightarrow \Delta\Phi = \frac{8 \times 10^{-3} \times 5}{200} \Rightarrow \Delta\Phi = 2 \times 10^{-4} \text{ Wb}$$

پاسخ خیلی تشریحی ✓

در شکل زیر پیچه انعطاف پذیر دایره‌ای شکلی به شعاع ۲۵ cm و شامل ۵۰ حلقه در میدان مغناطیسی یکنواخت درون‌سوی $B = 2 \text{ mT}$ قرار دارد. با کشیدن این پیچه از طرفین، در مدت ۵۰ ms، مساحت آن را ۴۰ درصد کاهش می‌دهیم. در این مدت، بزرگی نیروی محرکه القایی در پیچه چند میلی‌ولت و جریان القایی در آن در چه جهتی است؟ ($\pi = 3$)



(۱) ۱۵۰، پادساعتگرد

(۲) ۱۵۰، ساعتگرد

(۳) ۱۵، پادساعتگرد

(۴) ۱۵، ساعتگرد

پاسخ: گزینه ۲

درسی Box

محاسبه تغییر شار مغناطیسی در یک مدار بسته:

برای محاسبه تغییر شار ($\Delta\Phi$) اصولاً باید Φ_1 را از Φ_2 کم کنیم که با توجه به این موضوع ساده و بدیهی، سه حالت زیر می‌تواند عامل تغییر شار در مدار بسته باشد:

(۱) تغییر میدان:

$$\begin{cases} \Phi_1 = B_1 A \cos \theta \\ \Phi_2 = B_2 A \cos \theta \end{cases} \Rightarrow \Delta\Phi = \Phi_2 - \Phi_1 \Rightarrow \Delta\Phi = (\Delta B) A \cos \theta$$

(۲) تغییر مساحت:

$$\begin{cases} \Phi_1 = B A_1 \cos \theta \\ \Phi_2 = B A_2 \cos \theta \end{cases} \Rightarrow \Delta\Phi = \Phi_2 - \Phi_1 \Rightarrow \Delta\Phi = B (\Delta A) \cos \theta$$

(۳) تغییر زاویه:

$$\begin{cases} \Phi_1 = B A \cos \theta_1 \\ \Phi_2 = B A \cos \theta_2 \end{cases} \Rightarrow \Delta\Phi = \Phi_2 - \Phi_1 \Rightarrow \Delta\Phi = B A (\cos \theta_2 - \cos \theta_1)$$

قانون القای الکترومغناطیسی فاراده:

مطابق این قانون هرگاه شار مغناطیسی عبوری از یک سطح بسته تغییر کند، نیروی محرکه‌ای در آن القا می‌شود که بزرگی آن با آهنگ تغییر شار مغناطیسی متناسب است:

$$\varepsilon_{av} = -N \frac{\Delta\Phi}{\Delta t}$$

ε_{av} : نیروی محرکه القایی متوسط (V)

N: تعداد دور

$\Delta\Phi$: تغییر شار (Wb)

Δt : مدت زمان (s)

$$\frac{\Delta\Phi}{\Delta t}: \text{آهنگ تغییر شار } \left(\frac{\text{Wb}}{\text{s}}\right)$$

قانون لنز: این قانون روشی است برای تعیین جهت جریان القایی در یک پیچه یا هر مدار بسته دیگر؛ براساس این قانون، جریان حاصل از نیروی محرکه القایی در یک مدار یا پیچه در جهتی است که آثار مغناطیسی ناشی از آن، با عامل به وجود آورنده جریان القایی، یعنی تغییر شار مغناطیسی، مخالفت می‌کند.

به عنوان مثال اگر افزایش میدان مغناطیسی باعث تغییر شار و در نتیجه ایجاد نیروی محرکه القایی باشد، جریان القایی در جهتی ایجاد می‌شود تا میدان مغناطیسی حاصل از آن در خلاف جهت میدان مغناطیسی موجود بوده و آن را کاهش دهد.

گام اول: عامل تغییر شار، تغییر مساحت است، بنابراین نیروی محرکه القایی را به صورت زیر محاسبه می‌کنیم:

$$|\varepsilon| = \frac{N \Delta\Phi}{\Delta t} \Rightarrow |\varepsilon| = \frac{NB \Delta A \cos \theta}{\Delta t}$$

$$\frac{A_1 = \pi r^2, \Delta A = \frac{1}{4} A_1}{N=50, B=2 \text{ mT}, \theta=90^\circ, \Delta t=50 \text{ ms}} \rightarrow |\varepsilon| = \frac{50 \times 2 \times 10^{-3} \times \frac{1}{4} \times \pi \times (0.25)^2 \times 10^{-4} \times 1}{50 \times 10^{-3}}$$

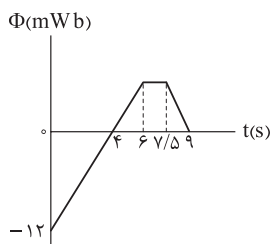
$$\Rightarrow |\varepsilon| = 1500 \times 10^{-4} \text{ V} \times \frac{10^{-3}}{1} \Rightarrow |\varepsilon| = 150 \text{ mV}$$

گام دوم: برای تعیین جهت جریان القایی، با توجه به قانون لنز، چون مساحت پیچه در حال کاهش است، شار نیز کاهش یافته، در نتیجه میدان درون‌سویی ایجاد می‌شود تا شار را افزایش دهد، بنابراین طبق قاعده دست راست جهت جریان ساعتگرد است.

پاسخ خیلی تشریحی ✓

نمودار تغییرات شار مغناطیسی عبوری از یک حلقهٔ رسانا برحسب زمان به شکل زیر است. اندازهٔ بیشینهٔ نیروی محرکهٔ القایی در این

حلقه چند میلی‌ولت است؟



۲ (۱)

۳ (۲)

۴ (۳)

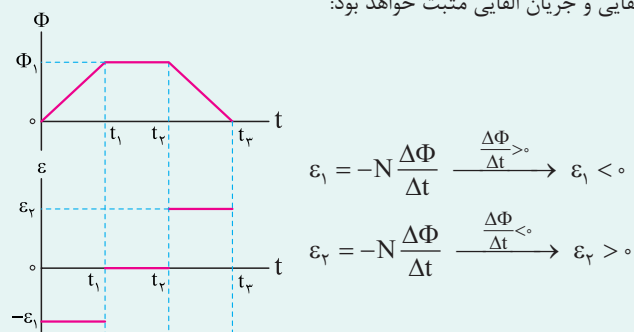
۶ (۴)

پاسخ: گزینه ۳

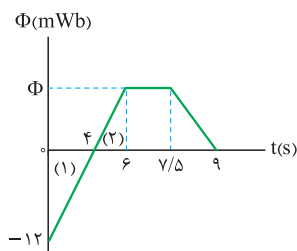
درس: Box

ویژگی‌های نمودار شار - زمان و نمودار نیروی محرکهٔ القایی - زمان:

هرگاه نمودار شار- زمان به صورت یک خط راست با شیب ثابت باشد، $\frac{\Delta\Phi}{\Delta t}$ در بازه‌های زمانی مختلف تغییر نمی‌کند و در نتیجه نیروی محرکهٔ القایی متوسط در بازه‌های زمانی دلخواه ثابت بوده و با نیروی محرکهٔ القایی لحظه‌ای برابر است و اگر شیب آن صفر باشد، نیروی محرکهٔ القایی نیز صفر است. در مورد علامت نیروی محرکهٔ القایی و حتی جریان القایی دقت کنید که با توجه به علامت منفی در رابطه $\mathcal{E} = -N \frac{\Delta\Phi}{\Delta t}$ ، هرگاه شیب نمودار شار- زمان مثبت باشد، نیروی محرکهٔ القایی و جریان القایی منفی و اگر شیب این نمودار منفی باشد، نیروی محرکهٔ القایی و جریان القایی مثبت خواهد بود:



پاسخ خیلی تشریحی ✓ دو مثلث (۱) و (۲) متشابه هستند، بنابراین:

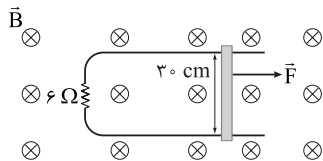


$$\frac{12}{\Phi} = \frac{4}{6-4} \Rightarrow \Phi = 6 \text{ mWb}$$

در بازهٔ زمانی $t = 0$ تا $t = 6 \text{ s}$ اندازهٔ شیب نمودار که همان نیروی محرکهٔ القایی است برابر با $\frac{12}{4} = 3$ است و در بازهٔ

زمانی $t = 7/5 \text{ s}$ تا $t = 9 \text{ s}$ برابر با $\frac{6}{1/5} = 4$ است، بنابراین بیشترین نیروی محرکهٔ القایی 4 mV است.

در شکل زیر، رسانای U شکلی در میدان مغناطیسی یکنواخت و درون سوی $B = 0.4 \text{ T}$ قرار دارد. با اعمال نیروی $\vec{F}$ ، میله رسانا را با تندی ثابت جابه‌جا می‌کنیم. اگر مساحت قاب ایجاد شده با آهنگ ثابت $50 \text{ cm}^2/\text{s}$ افزایش یابد، بزرگی نیروی F چند نیوتون است؟



(۱) 5×10^{-4}

(۲) 5×10^{-5}

(۳) 4×10^{-4}

(۴) 4×10^{-5}

پاسخ: گزینه ۴

پاسخ خیلی تشریحی ✓ گام اول: ابتدا جریان عبوری از میله رسانا را محاسبه می‌کنیم:

$$I = \frac{\varepsilon}{R} \Rightarrow I = \frac{N \Delta \Phi}{R \Delta t} \Rightarrow I = \frac{NB \Delta A}{R \Delta t} \cos \theta$$

$$\Rightarrow I = \frac{1 \times 0.4 \times 50 \times 10^{-4} \times 1}{6} \Rightarrow I = \frac{1}{3} \times 10^{-3} = \frac{1}{3} \times 10^{-3} \text{ A}$$

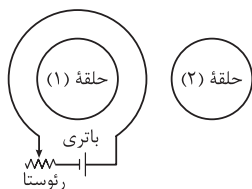
گام دوم: حال نیروی وارد بر میله از طرف میدان مغناطیسی را به دست می‌آوریم:

$$F = B I l \sin \theta \Rightarrow F = 4 \times 10^{-1} \times \frac{1}{3} \times 10^{-3} \times 3 \times 10^{-1} \times 1 \Rightarrow F = 4 \times 10^{-5} \text{ N}$$

گام سوم: نیروی F باید با نیروی وارد بر میله برابر باشد تا با سرعت ثابت حرکت کند:

$$|F| = 4 \times 10^{-5} \text{ N}$$

در شکل زیر حلقه‌های رسانای (۱) و (۲) مشابه‌اند. اگر مقاومت الکتریکی رنوستا را کاهش دهیم، چه تعداد از موارد زیر درست است؟



۳ (۴)

۲ (۳)

۱ (۲)

صفر (۱)

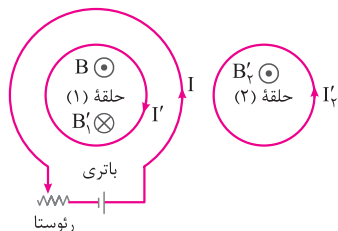
الف) جریان القایی در حلقه (۱)، پادساعتگرد است.

ب) جریان القایی در حلقه (۲)، ساعتگرد است.

پ) جریان القایی در حلقه‌ها هم‌اندازه است.

پاسخ: گزینه ۱

پاسخ خیلی تشریحی ✓ تک تک موارد را بررسی می‌کنیم:



الف) نادرست؛ با کاهش مقاومت رنوستا میدان مغناطیسی حلقه متصل به باتری که برون‌سو است افزایش می‌یابد، در نتیجه در حلقه (۱) میدان مغناطیسی درون‌سو ایجاد می‌شود تا طبق قانون لنز با افزایش آن مخالفت کند، بنابراین جریان القایی در حلقه (۱) ساعتگرد می‌شود.

ب) نادرست؛ میدان ایجادشده در خارج حلقه متصل به باتری درون‌سو است که با کاهش مقاومت رنوستا اندازه آن نیز افزایش می‌یابد، بنابراین در حلقه (۲) طبق قانون لنز میدان برون‌سو ایجاد می‌شود و جریان القایی پادساعتگرد خواهد بود.

پ) نادرست؛ با توجه به این‌که اندازه میدان در داخل و خارج حلقه بزرگ‌تر یکسان نیست (در مرکز آن قوی‌تر است)، بنابراین جریان القایی در حلقه‌ها نیز یکسان نخواهد بود.

سیم‌لوله آرمانی بدون هسته‌ای به طول 6 cm دارای 200 حلقه است. اگر مساحت هر حلقه سیم‌لوله 20 cm^2 و جریان الکتریکی گذرنده از آن برحسب زمان در SI به صورت $I = 5 \sin 100\pi t$ باشد، بیشینه انرژی ذخیره‌شده در آن چند میلی‌ژول است؟ $(\mu_0 = 12 \times 10^{-7} \frac{\text{T.m}}{\text{A}})$

۶ (۴)

۲ (۳)

۶۰ (۲)

۲۰ (۱)

پاسخ: گزینه ۱

● انرژی ذخیره‌شده در القاگر:

درس Box

با اتصال القاگر به مولد، مقداری از انرژی تولیدی مولد در مقاومت الکتریکی سیم‌های القاگر به صورت گرما تلف می‌شود و بقیه آن به صورت انرژی پتانسیل در میدان مغناطیسی القاگر ذخیره می‌شود.

اگر جریان I برحسب آمپر (A) از القاگری با ضریب القاوری L برحسب هانری (H) عبور کند، انرژی ذخیره‌شده در القاگر برحسب ژول (J) از رابطه مقابل به دست می‌آید:

$$U = \frac{1}{2} LI^2$$

اگر جریان پایا (ثابت) یا غیرپایا (متغیر) از مقاومت الکتریکی عبور کند، انرژی مدار وارد مقاومت شده و در آن مصرف می‌شود (به گرما تبدیل می‌شود) ولی اگر جریان عبوری از القاگر آرمانی افزایش یابد، انرژی وارد القاگر شده و نه تنها در آن تلف نمی‌شود، بلکه در آن ذخیره می‌شود. حال اگر جریان کاهش یابد، انرژی ذخیره‌شده، آزاد شده و وارد مدار می‌شود.

● ضریب القاوری:

مشخصات ظاهری هر القاگر شامل تعداد حلقه‌ها (N)، مساحت هر حلقه (A) و طول سیم‌لوله (l) توسط ضریبی به نام ضریب القاوری تعیین می‌شود که با نماد L نمایش داده می‌شود. ضریب القاوری سیم‌لوله بدون هسته از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$L = \mu_0 \frac{AN^2}{l}$$

پاسخ خیلی تشریحی ✓ گام اول: ابتدا ضریب خود القاوری سیم‌لوله را محاسبه می‌کنیم:

$$L = \mu_0 \frac{AN^2}{l} \Rightarrow L = \frac{12 \times 10^{-7} \times 20 \times 10^{-4} \times 40000}{6 \times 10^{-2}} \Rightarrow L = \frac{12 \times 2 \times 4 \times 10^{-6}}{6 \times 10^{-2}}$$

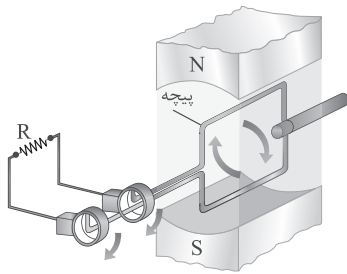
$$\Rightarrow L = 16 \times 10^{-4} \text{ H}$$

گام دوم: حال بیشینه انرژی ذخیره‌شده در القاگر را به صورت زیر محاسبه می‌کنیم:

$$U_{\max} = \frac{1}{2} LI_{\max}^2 \Rightarrow U_{\max} = \frac{1}{2} \times 16 \times 10^{-4} \times 25 \Rightarrow U_{\max} = 0.2 \text{ J} \times 10^{-3} = 20 \text{ mJ}$$

نکته

وضعیت پیچه یک مولد جریان متناوب در لحظه $t = 0$ به شکل زیر است. اگر زمان یک دور چرخش کامل پیچه T باشد، در لحظه $t = \frac{T}{6}$ به ترتیب از راست به چپ، جریان گذرنده از پیچه چند برابر جریان بیشینه و شار مغناطیسی عبوری از آن چند برابر شار بیشینه است؟



- (۱) $\frac{1}{2}, \frac{1}{2}$
- (۲) $\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}$
- (۳) $\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}$
- (۴) $\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}$

پاسخ: گزینه ۴

درس Box

معادله‌های جریان متناوب:

اگر مطابق شکل، یک پیچه در یک میدان مغناطیسی بچرخد، در آن نیروی محرکه القا شده و بر اثر این نیروی محرکه، در پیچه جریان القا می‌شود. معادله‌های شار، نیروی محرکه و جریان بر حسب زمان، به صورت زیر هستند:

معادله شار متناوب: $\Phi = \Phi_m \cos\left(\frac{\gamma\pi}{T} t\right)$

معادله نیروی محرکه متناوب: $\varepsilon = \varepsilon_m \sin\left(\frac{\gamma\pi}{T} t\right)$

معادله جریان متناوب: $I = I_m \sin\left(\frac{\gamma\pi}{T} t\right)$

در هر سه رابطه، T دوره چرخش پیچه، یعنی مدت زمانی است که پیچه یک دور کامل می‌زند. Φ_m ، ε_m و I_m نیز به ترتیب بیشینه شار، بیشینه نیروی محرکه القایی و بیشینه جریان القایی متناوب هستند.

نمودارهای جریان متناوب:

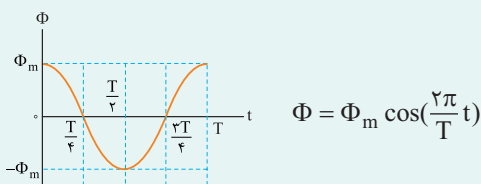
با توجه به رابطه‌های بیان شده در قسمت قبل:

(الف) نمودار شار - زمان به صورت کسینوسی است که بین دو مقدار بیشینه $+\Phi_m = +BA$ و $-\Phi_m = -BA$ تغییر می‌کند.

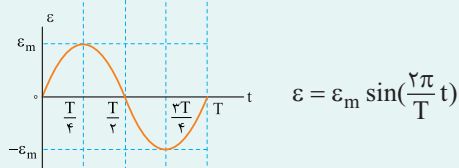
(ب) نمودار نیروی محرکه القایی - زمان به صورت سینوسی است که بین دو مقدار بیشینه $+\varepsilon_m$ و $-\varepsilon_m$ تغییر می‌کند.

(پ) نمودار جریان القایی - زمان به صورت سینوسی است که بین دو مقدار بیشینه $+I_m$ و $-I_m$ تغییر می‌کند.

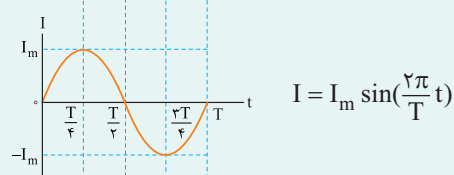
(الف) شار مغناطیسی:



(ب) نیروی محرکه:



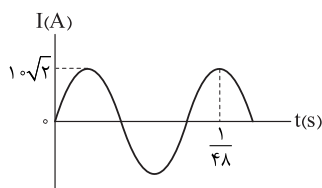
(پ) جریان:



$$I = I_{\max} \sin\left(\frac{\gamma\pi}{T} t\right) \Rightarrow I = I_m \sin\left(\left(\frac{\gamma\pi}{T}\right)\left(\frac{T}{\epsilon}\right)\right) \Rightarrow I = I_{\max} \sin \frac{\pi}{\gamma} \Rightarrow I = \frac{\sqrt{3}}{\gamma} I_{\max}$$

$$\Phi = \Phi_{\max} \cos\left(\frac{\gamma\pi}{T} t\right) \Rightarrow \Phi = \Phi_{\max} \cos\left(\left(\frac{\gamma\pi}{T}\right)\left(\frac{T}{\epsilon}\right)\right) \Rightarrow \Phi = \Phi_{\max} \cos \frac{\pi}{\gamma} \Rightarrow \Phi = \frac{1}{\gamma} \Phi_{\max}$$

از یک مقاومت، جریان متناوب سینوسی که نمودار تغییرات آن بر حسب زمان به صورت شکل زیر است، عبور می‌کند. اگر اختلاف پتانسیل دو سر این مقاومت در لحظه $\frac{1}{48} s$ برابر با $40 V$ باشد، مقدار این مقاومت چند اهم است؟



۲ (۱)

۴ (۲)

۵ (۳)

۸ (۴)

پاسخ: گزینه ۲

پاسخ خیلی تشریحی ✓

$$\Delta \frac{T}{4} = \frac{1}{48} s \Rightarrow T = \frac{1}{60} s \Rightarrow \omega = \frac{2\pi}{T} \Rightarrow \omega = \frac{2\pi}{\frac{1}{60}} = 120\pi \frac{\text{Rad}}{s}$$

$$I = I_{\max} \sin \omega t \Rightarrow I = 10\sqrt{2} \sin 120\pi t \xrightarrow{t = \frac{1}{48} s} I = 10\sqrt{2} \sin 120\pi \left(\frac{1}{48}\right)$$

$$\Rightarrow I = 10\sqrt{2} \sin \frac{\pi}{4} \Rightarrow I = 10\sqrt{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = 10 A$$

$$R = \frac{V}{I} \Rightarrow R = \frac{40}{10} = 4 \Omega$$

شکل زیر مسیر انتقال برق از یک نیروگاه به شهری را نشان می‌دهد. در این انتقال از سه مبدل A، B و C استفاده شده است. اگر نسبت تعداد دور پیچۀ ثانویه به اولیه در مبدل‌های A و C به ترتیب برابر ۳۰ و $\frac{1}{50}$ باشد، نسبت تعداد دور پیچۀ اولیه به تعداد دور پیچۀ ثانویه در مبدل B کدام است؟



$\frac{1}{50}$ (۴)

$\frac{1}{30}$ (۳)

۵۰ (۲)

۳۰ (۱)

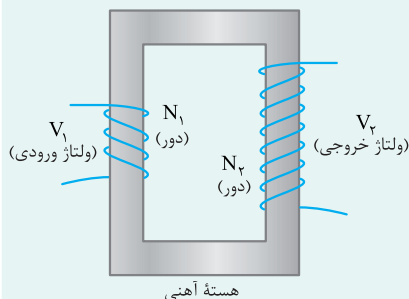
پاسخ: گزینه ۱

مبدل‌ها:

درس: Box

مهم‌ترین مزیت جریان متناوب (ac) نسبت به جریان مستقیم (dc)، آسان‌تر بودن افزایش و یا کاهش ولتاژ است. در انتقال برق از ولتاژهای بسیار بالا استفاده می‌کنند تا جریان در کابل‌های انتقال کاهش یابد و اتلاف انرژی در هنگام انتقال برق به کم‌ترین مقدار ممکن برسد. هنگام انتقال برق به منازل مسکونی ولتاژ را به حدود ۲۲۰ ولت می‌رسانند. برای تغییر ولتاژ برق از مبدل‌ها استفاده می‌کنند. مبدل از دو پیچ به تعداد دورهای متفاوت تشکیل شده است. هسته پیچ‌ها از جنس آهن (فرومغناطیس نرم) می‌باشد و سیم‌ها دارای پوشش عایق هستند.

اگر تعداد دور پیچۀ اول و دوم به ترتیب N_1 و N_2 باشد و دامنۀ ولتاژ متناوب متصل‌شده به پیچۀ اول V_1 باشد، دامنۀ ولتاژ خروجی از پیچۀ دوم V_2 می‌شود و رابطه زیر برقرار است:



$$\frac{V_2}{V_1} = \frac{N_2}{N_1}$$

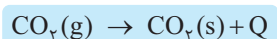
$$\frac{N_2}{N_1} = \frac{V_2}{V_1} \Rightarrow \frac{N_{2A}}{N_{1A}} = 30 = \frac{V_2}{11} \Rightarrow V_{1B} = 330 \text{ kV}$$

$$\frac{N_{2C}}{N_{1C}} = \frac{1}{50} \Rightarrow \frac{1}{50} = \frac{V_{2C}}{V_{1C}} = \frac{220}{V_{2B}} \Rightarrow V_{2B} = 11 \text{ kV}$$

$$\frac{V_{1B}}{V_{2B}} = \frac{N_{1B}}{N_{2B}} \Rightarrow \frac{N_{1B}}{N_{2B}} = \frac{330}{11} = 30$$

پاسخ خیلی تشریحی ✓

علامت ΔH کدام فرایند، با علامت ΔH چگالش کربن دی اکسید یکسان است؟



(۱) فتوسنتز

(۲) تجزیه دی نیتروژن تترا اکسید به نیتروژن دی اکسید

(۳) تبدیل اوزون به اکسیژن

(۴) تبخیر آب

پاسخ: گزینه ۳

پاسخ خیلی تشریحی ✓



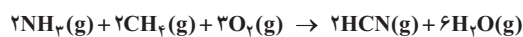
مهم ترین فرایندهای گرماگیر و گرماده در جدول زیر آورده شده است.

فرایندهای گرماده ($\Delta H < 0$)	فرایندهای گرماگیر ($\Delta H > 0$)
(۱) تغییر حالت های فیزیکی انجماد، میعان و چگالش	(۱) تغییر حالت های فیزیکی ذوب، تبخیر و تصعید (فرازش)
(۲) همه واکنش های سوختن (مانند سوختن گاز هیدروژن، کربن، هیدروکربن ها و ...)	(۲) واکنش فتوسنتز: $6\text{CO}_2(\text{g}) + 6\text{H}_2\text{O}(\text{l}) \rightarrow \text{C}_6\text{H}_{12}\text{O}_6(\text{s}) + 6\text{O}_2(\text{g})$
(۳) واکنش ترمیت: $2\text{Al}(\text{s}) + \text{Fe}_2\text{O}_3(\text{s}) \rightarrow \text{Al}_2\text{O}_3(\text{s}) + 2\text{Fe}(\text{l})$	(۳) انحلال آمونیوم نترات در آب: $\text{NH}_4\text{NO}_3(\text{s}) \xrightarrow{\text{در آب}} \text{NH}_4^+(\text{aq}) + \text{NO}_3^-(\text{aq})$
(۴) واکنش فلزهای گروه اول با گاز کلر: $2\text{M}(\text{s}) + \text{Cl}_2(\text{g}) \rightarrow 2\text{MCl}(\text{s})$ گروه اول	(۴) تجزیه N_2O_5 به NO_2 : $\text{N}_2\text{O}_5(\text{g}) \rightarrow 2\text{NO}_2(\text{g})$
(۵) انحلال کلسیم کلرید در آب: $\text{CaCl}_2(\text{s}) \xrightarrow{\text{در آب}} \text{Ca}^{2+}(\text{aq}) + 2\text{Cl}^-(\text{aq})$	(۵) تبدیل گرافیت به الماس: $\text{C}(\text{s, گرافیت}) \rightarrow \text{C}(\text{s, الماس})$
(۶) تشکیل HCl از H_2 و Cl_2 : $\text{H}_2(\text{g}) + \text{Cl}_2(\text{g}) \rightarrow 2\text{HCl}(\text{g})$	(۶) تولید اوزون از گاز اکسیژن: $3\text{O}_2(\text{g}) \rightarrow 2\text{O}_3(\text{g})$
(۷) تشکیل NH_3 از H_2 و N_2 (فرایند هابر): $\text{N}_2(\text{g}) + 3\text{H}_2(\text{g}) \rightarrow 2\text{NH}_3(\text{g})$	(۷) تشکیل NO از N_2 و O_2 : $\text{N}_2(\text{g}) + \text{O}_2(\text{g}) \rightarrow 2\text{NO}(\text{g})$
(۸) تشکیل آمونیاک از هیدرازین و هیدروژن: $\text{N}_2\text{H}_4(\text{g}) + \text{H}_2(\text{g}) \rightarrow 2\text{NH}_3(\text{g})$	(۸) تشکیل N_2H_4 (هیدرازین) از N_2 و H_2 : $\text{N}_2(\text{g}) + 2\text{H}_2(\text{g}) \rightarrow \text{N}_2\text{H}_4(\text{g})$
(۹) تجزیه هیدروژن پراکسید: $2\text{H}_2\text{O}_2(\text{l}) \rightarrow 2\text{H}_2\text{O}(\text{l}) + \text{O}_2(\text{g})$	(۹) تشکیل گاز هیدروژن پدید از گاز هیدروژن و ید جامد: $\text{H}_2(\text{g}) + \text{I}_2(\text{s}) \rightarrow 2\text{HI}(\text{g})$
(۱۰) واکنش گازهای CO و NO : $2\text{CO}(\text{g}) + 2\text{NO}(\text{g}) \rightarrow 2\text{CO}_2(\text{g}) + \text{N}_2(\text{g})$	
(۱۱) تشکیل گاز هیدروژن پدید از گاز هیدروژن و ید گازی: $\text{H}_2(\text{g}) + \text{I}_2(\text{g}) \rightarrow 2\text{HI}(\text{g})$	

فرایند چگالش (تبدیل گاز به جامد) گرماده بوده و علامت ΔH آن منفی است. در بین فرایندهای داده شده، فقط واکنش تبدیل اوزون به اکسیژن ($2\text{O}_3 \rightarrow 3\text{O}_2$) گرماده می باشد.

۶۲

اگر در مدت ۵۰۰ ثانیه، ۱۳/۴۴ لیتر گاز اکسیژن در واکنش زیر در شرایط STP مصرف شود، سرعت متوسط مبادله گرما چند کیلوژول بر دقیقه خواهد بود؟ (مجموع آنتالپی پیوندها در مواد واکنش دهنده و فراورده به ترتیب ۷۲۲۰ و ۸۱۱۰ کیلوژول بر مول است.)



$$17/8 \quad (2)$$

$$10/68 \quad (1)$$

$$35/6 \quad (4)$$

$$21/36 \quad (3)$$

پاسخ: گزینه ۳

پاسخ خیلی تشریحی ✓ گام اول: به کمک مجموع آنتالپی های پیوند، ΔH واکنش را حساب می کنیم:

$$\Delta H_{\text{(واکنش)}} = [\text{مجموع آنتالپی پیوندها در مواد واکنش دهنده}] - [\text{مجموع آنتالپی پیوندها در مواد فراورده}]$$

$$= 7220 - 8110 = -890 \text{ kJ}$$

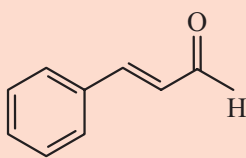
گام دوم: حساب می کنیم به ازای مصرف ۱۳/۴۴ لیتر گاز اکسیژن، چند کیلوژول گرما آزاد می شود:

$$13/44 \text{ L O}_2 \times \frac{1 \text{ mol O}_2}{22/4 \text{ L O}_2} \times \frac{890 \text{ kJ}}{3 \text{ mol O}_2} = 178 \text{ kJ}$$

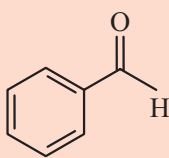
گام سوم: سرعت تولید گرما بر حسب کیلوژول بر دقیقه را حساب می کنیم:

$$\frac{178 \text{ kJ}}{500 \text{ s}} \times \frac{60 \text{ s}}{1 \text{ min}} = 21/36 \text{ kJ} \cdot \text{min}^{-1}$$

۶۳ با توجه به ساختار دو مولکول داده شده، کدام مورد درست است؟ ($O = 16, C = 12, H = 1 : g.mol^{-1}$)



(a)



(b)

(۱) تفاوت شمار الکترون‌های اشتراکی مولکول a و مولکول b برابر ۵ است.

(۲) تفاوت جرم مولی دو مولکول a و b، برابر با جرم مولی دومین عضو خانواده آلکین‌ها است.

(۳) اگر اتم‌های هیدروژن در دو مولکول با گروه متیل جایگزین شود، میزان افزایش جرم مولی a بیشتر از b خواهد بود.

(۴) تفاوت شمار پیوندهای C—H در دو مولکول، دو برابر شمار جفت الکترون‌های ناپیوندی هر یک از مولکول‌ها است.

پاسخ: گزینه ۳

پاسخ خیلی تشریحی ✓ بررسی گزینه‌ها:

گزینه (۱): فرمول مولکولی ترکیب‌های (a) و (b) به ترتیب به صورت C_9H_8O و C_7H_6O است.

شمار پیوندهای اشتراکی در یک ترکیب آلی را می‌توان از رابطه زیر به دست آورد:

$$\text{شمار پیوندهای اشتراکی} = \frac{[(3 \times \text{تعداد اتم‌های نیتروژن}) + (2 \times \text{تعداد اتم‌های اکسیژن}) + (1 \times \text{تعداد اتم‌های هیدروژن یا هالوژن}) + (4 \times \text{تعداد اتم‌های کربن})]}{2}$$

$$\text{شمار پیوندهای اشتراکی در a} = \frac{\left(\frac{C}{9 \times 4}\right) + \left(\frac{H}{8 \times 1}\right) + \left(\frac{O}{1 \times 2}\right)}{2} = 23$$

$$\text{شمار پیوندهای اشتراکی در b} = \frac{\left(\frac{C}{7 \times 4}\right) + \left(\frac{H}{6 \times 1}\right) + \left(\frac{O}{1 \times 2}\right)}{2} = 18$$

$$\Rightarrow \text{تفاوت شمار e‌های اشتراکی} = 23 - 18 = 5 \Rightarrow 5 \times 2 = 10e$$

اگر در این عبارت حواستون به کلمه شمار الکترون‌های اشتراکی نباشه و شمار پیوندهای اشتراکی رو در نظر بگیرید، این عبارت رو به اشتباه، درست در نظر می‌گیرید.

گزینه (۲): دومین عضو خانواده آلکین‌ها (C_nH_{2n-2}) ، ۳ اتم کربن داشته و دارای فرمول مولکولی C_3H_4 است، اما تفاوت جرم مولی a و b برابر با جرم مولی C_3H_4 است.

$$\underbrace{C_9H_8O}_a - \underbrace{C_7H_6O}_b = C_2H_2$$

گزینه (۳): با جایگزین کردن گروه CH_3 به جای اتم‌های H، با توجه به بیشتر بودن شمار اتم‌های هیدروژن در ترکیب a، میزان افزایش جرم مولی a بیشتر از b خواهد بود.

$$\begin{cases} \text{میزان افزایش جرم مولی a} = -8H + 8CH_3 = 8CH_3 \\ \text{میزان افزایش جرم مولی b} = -6H + 6CH_3 = 6CH_3 \end{cases}$$

گزینه (۴): همه اتم‌های هیدروژن هر دو ترکیب به کربن متصل است؛ بنابراین تفاوت شمار پیوندهای C—H آن‌ها با تفاوت شمار هیدروژن‌های آن‌ها برابر است؛ یعنی $8 - 6 = 2$. از طرفی هر مولکول، یک اتم اکسیژن و در نتیجه ۲ جفت الکترون ناپیوندی دارد؛ یعنی تفاوت شمار پیوندهای C—H مولکول‌ها با شمار جفت الکترون‌های ناپیوندی هر یک از مولکول‌ها برابر است.



گرمای حاصل از سوختن مقداری متان برای افزایش دمای یک جسم از جنس مس به جرم ۱۰ کیلوگرم به اندازه $۴۳/۸$ کلوین استفاده شده

است. اگر ۲۰ درصد انرژی حاصل از سوختن متان در این فرایند تلف شده باشد، چند گرم متان مصرف شده است؟

$$(C = ۱۲, H = ۱: g.mol^{-1}, c(cu) = ۰/۴ J.g^{-1}.^{\circ}C^{-1}, \Delta H_{(CH_4 \text{ سوختن})} = -۸۷۶ kJ.mol^{-1})$$

$$۳/۲ (۲)$$

$$۱/۶ (۱)$$

$$۴/۴$$

$$۳/۶ (۳)$$

پاسخ: گزینه ۲

پاسخ خیلی تشریحی ✓ گام اول: گرمای مورد نیاز برای افزایش دمای جسم را حساب می کنیم:

$$Q = mc\Delta\theta = ۱۰ \times ۰/۴ \times ۴۳/۸ = ۱۷۵/۲ kJ$$

گام دوم: با توجه به مقدار گرمای حاصل از سوختن متان که صرف افزایش دمای جسم شده است، جرم متان را به دست می آوریم.

با توجه به اطلاعات داده شده، ۸۰ درصد گرمای حاصل از سوختن متان به جسم منتقل شده است؛ بنابراین خواهیم داشت:

$$\frac{۸۰}{۱۰۰} \times \text{گرمای سوختن متان} = ۱۷۵/۲ \Rightarrow \text{گرمای سوختن متان} = \frac{۱۷۵۲}{۸} = ۲۱۹ kJ$$

مقدار آنتالپی سوختن متان، $۸۷۶ kJ.mol^{-1}$ است. به این ترتیب داریم:

$$? g CH_4 = ۲۱۹ kJ \times \frac{۱ mol CH_4}{۸۷۶ kJ} \times \frac{۱۶ g CH_4}{۱ mol CH_4} = ۴ g CH_4$$

درستی یا نادرستی کدام گزینه دربارهٔ ماده‌ای که به «گاز مرداب» معروف است، با بقیهٔ گزینه‌ها تفاوت دارد؟

متان

- (۱) می‌توان آن را به راحتی از واکنش میان گرافیت و گاز هیدروژن در آزمایشگاه تهیه کرد.
- (۲) ارزش سوختی آن از متانول، بیشتر و از اتان، کم‌تر است.
- (۳) برای سوختن کامل هر مول از آن، به $44/8$ لیتر گاز اکسیژن در شرایط STP نیاز است.
- (۴) مناسب‌ترین روش برای تعیین آنتالپی سوختن آن، استفاده از گرماسنج لیوانی است.

پاسخ: گزینهٔ ۳

پاسخ خیلی تشریحی ✓

گزینهٔ (۳) برخلاف بقیهٔ گزینه‌ها درست است.

منظور از گاز مرداب، همان گاز متان (CH_4) است.

بررسی گزینه‌ها:

گزینهٔ (۱): گاز متان رانمی‌توان از واکنش گرافیت و گاز هیدروژن در آزمایشگاه مطابق معادلهٔ $C(s, \text{گرافیت}) + 2H_2(g) \rightarrow CH_4(g)$ به دست آورد، زیرا تأمین شرایط بهینه برای انجام این واکنش، بسیار دشوار و پرهزینه است.

گزینهٔ (۲): ارزش سوختی متان هم از اتان و هم از متانول، بیشتر است.

در میان هیدروکربن‌ها، بیشترین ارزش سوختی مربوط به متان (CH_4) است، هم‌چنین گرمای سوختن مولی الکل‌هایی که یک گروه OH دارند، از گرمای سوختن مولی آلکان‌های هم‌کربن با آن‌ها کم‌تر می‌باشد.



گزینهٔ (۳): طبق معادلهٔ واکنش سوختن کامل متان $CH_4 + 2O_2 \rightarrow CO_2 + 2H_2O$ ، برای سوختن هر مول متان، به ۲ مول گاز اکسیژن و در نتیجه $44/8 = 2 \times 22/4$ لیتر گاز اکسیژن در شرایط STP نیاز است.

گزینهٔ (۴): گرماسنج لیوانی برای اندازه‌گیری گرمای واکنش‌هایی مناسب است که با مواد گازی شکل سروکار ندارند، مثل واکنش‌هایی که در حالت محلول انجام می‌گیرند و در آن‌ها گازی تولید یا مصرف نمی‌شود.

در کدام یک از گزینه‌های زیر، علت هر دو پدیده مشابه بوده ولی به درستی در مقابل آن‌ها ذکر نشده است؟

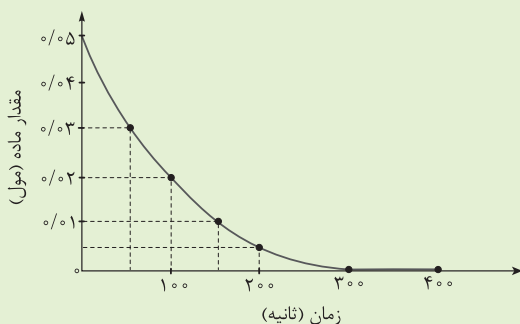
- (۱) «نفخ معده با مصرف کلم و حبوبات» و «سوختن سریع تر قند آغشته به خاک باغچه» ← تأثیر کاتالیزگر بر سرعت واکنش
- (۲) «استفاده از کپسول اکسیژن توسط بیماران تنفسی» و «نگهداری سدیم زیر نفت» ← تأثیر نوع واکنش دهنده بر سرعت واکنش
- (۳) «خالی کردن هوای درون ظرف بسته‌بندی مواد غذایی» و «پیرکردن تایلر خودرو با گاز نیتروژن» ← تأثیر غلظت بر سرعت واکنش
- (۴) «خشک کردن سبزی و میوه در معرض نور آفتاب» و «بسته‌بندی روغن مایع در ظرف مات و کدر» ← تأثیر رطوبت بر فساد مواد غذایی

پاسخ: گزینه ۳

پاسخ خیلی تشریحی ✓ بررسی گزینه‌ها:

- گزینه (۱): هر دو پدیده، اثر کاتالیزگر بر سرعت واکنش را نشان می‌دهند.
- گزینه (۲): استفاده از کپسول اکسیژن برای بیماران تنفسی، اثر غلظت بر سرعت واکنش را نشان می‌دهد، در حالی که نگهداری سدیم زیر نفت، اشاره به تأثیر نوع مواد واکنش دهنده بر سرعت واکنش دارد.
- گزینه (۳): علت هر دو پدیده، مشابه و حذف گاز اکسیژن از محیط است.
- گزینه (۴): پدیده اول، اثر رطوبت بر فساد مواد غذایی و پدیده دوم، اثر نور بر فساد مواد غذایی را نشان می‌دهد.

۶۷ نمودار تغییر مول‌های نوعی رنگ غذا در واکنش با یک محلول سفیدکننده به صورت زیر است. با توجه به آن، کدام مورد نادرست است؟



- (۱) این واکنش پس از گذشت ۵ دقیقه به پایان رسیده است.
- (۲) شیب نمودار «مول - زمان» رنگ غذا و محلول سفیدکننده، هر دو منفی است.
- (۳) در بازه زمانی صفر تا ۱۵۰ ثانیه، سرعت متوسط مصرف رنگ غذا، برابر ۰/۲۴ مول بر ساعت است.
- (۴) در صورت استفاده از کاتالیزگر مناسب، تعداد مول‌های رنگ غذا در $t = ۱۰۰\text{ s}$ ، می‌تواند برابر ۰/۱۵ مول باشد.

پاسخ: گزینه ۳

پاسخ خیلی تشریحی ✓ با توجه به نمودار، در ۱۵۰ ثانیه اول، $0.5 - 0.1 = 0.4$ مول رنگ غذا مصرف شده است؛ بنابراین خواهیم داشت:

$$\bar{R}(\text{رنگ غذا}) = \frac{0.4 \text{ mol}}{150 \text{ s}} \times \frac{60 \text{ s}}{1 \text{ min}} \times \frac{60 \text{ min}}{1 \text{ h}} = \frac{4 \times 6 \times 6}{150 \times 5} = 8 \times 0.12 = 0.96 \text{ mol.h}^{-1}$$

بررسی سایر گزینه‌ها:

- گزینه (۱): مقدار رنگ غذا پس از ۳۰۰ ثانیه یا همان ۵ دقیقه ($\frac{300}{60} = 5$) به صفر رسیده است که نشان‌دهنده پایان واکنش است.
- گزینه (۲): در یک واکنش، از مقدار واکنش‌دهنده‌ها کاسته می‌شود و شیب نمودار مول - زمان آن‌ها منفی است.
- گزینه (۴): با استفاده از کاتالیزگر، سرعت واکنش افزایش می‌یابد؛ بنابراین طی ۱۰۰ ثانیه، تعداد مول‌های بیشتری از رنگ غذا مصرف می‌شود و تعداد مول‌های آن در $t = ۱۰۰\text{ s}$ کمتر از ۰/۲ مول خواهد بود.

مقدار کافی گاز پروپان در شرایط استاندارد، وارد یک ظرف دارای ۱۶/۸ لیتر گاز اکسیژن شده است. اگر سرعت متوسط واکنش سوختن، ۰/۳ مول بر دقیقه باشد، پس از گذشت t ثانیه، ۷/۹۲ گرم فراورده گازی تولید می‌شود و t' ثانیه پس از این لحظه، واکنش به پایان می‌رسد. مقدار $\frac{t'}{t}$ کدام است؟ ($O = ۱۶, C = ۱۲, H = ۱: g.mol^{-1}$)

۱/۳۳ (۲)

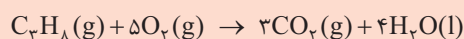
۱/۵ (۱)

۰/۶۷ (۴)

۰/۷۵ (۳)

پاسخ: گزینه ۱

پاسخ خیلی تشریحی ✓ باید معادله واکنش سوختن کامل پروپان را در شرایط استاندارد نوشته و با توجه به سرعت واکنش، t و t' را حساب کنیم:



در شرایط STP، آب به حالت گاز نیست و تنها فراورده گازی واکنش در این شرایط، CO_2 است.

پس از t ثانیه، ۷/۹۲ گرم CO_2 تولید شده است.

$$R(\text{واکنش}) = \frac{\bar{R}(CO_2)}{3} \Rightarrow \bar{R}(CO_2) = 3R(\text{واکنش}) = 3 \times 0.3 = 0.9 \text{ mol.min}^{-1}$$

$$\Delta n(CO_2) = 7.92 \text{ g} \times \frac{1 \text{ mol}}{44 \text{ g}} = 0.18 \text{ mol}$$

$$?s = 0.18 \text{ mol } CO_2 \times \frac{1 \text{ min}}{0.9 \text{ mol } CO_2} \times \frac{60 \text{ s}}{1 \text{ min}} = 12 \text{ s} \Rightarrow t = 12 \text{ s}$$

واکنش زمانی به پایان می‌رسد که کل گاز اکسیژن موجود در ظرف مصرف شود:

$$R(\text{واکنش}) = \frac{\bar{R}(O_2)}{5} \Rightarrow \bar{R}(O_2) = 5 \times 0.3 = 1.5 \text{ mol.min}^{-1}$$

$$?s = 16.8 \text{ L } O_2 \times \frac{1 \text{ mol } O_2}{22.4 \text{ L } O_2} \times \frac{1 \text{ min}}{1.5 \text{ mol } O_2} \times \frac{60 \text{ s}}{1 \text{ min}} = 30 \text{ s} \Rightarrow t_{\text{کل}} = 30 \text{ s}$$

بنابراین $30 - 12 = 18$ ثانیه پس از تولید ۷/۹۲ گرم گاز، واکنش به پایان می‌رسد؛ یعنی t' برابر ۱۸ ثانیه است.

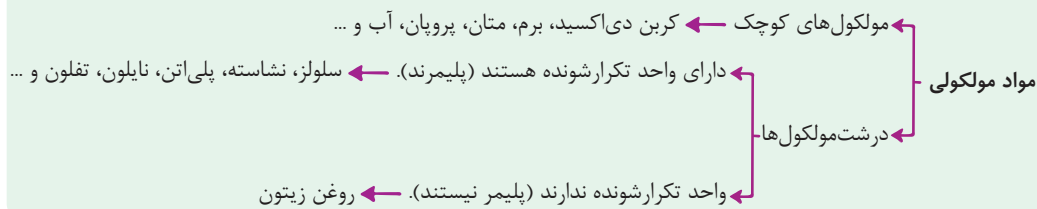
$$\frac{t'}{t} = \frac{18}{12} = \frac{3}{2} = 1.5$$

۶۹ کدام مورد درست است؟

- (۱) برخلاف الیاف ساختگی، الیاف طبیعی تنها برای تهیه پارچه و پوشاک به کار می‌روند.
- (۲) جرم مولی نایلون همانند سلولز بسیار زیاد است و هر دو، جزء پلیمرهای ساختگی هستند.
- (۳) ترکیب‌هایی که از دو عنصر هیدروژن و کربن تشکیل شده‌اند، جزء کوچک‌مولکول‌ها به شمار می‌آیند.
- (۴) در شماری از درشت‌مولکول‌ها، واحدهای تکرارشونده وجود ندارد.

پاسخ: گزینه ۴

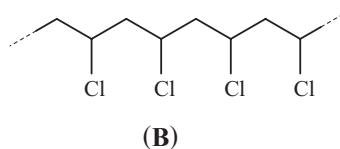
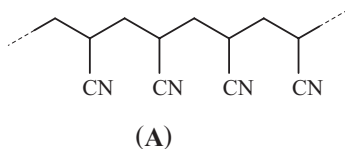
پاسخ خیلی تشریحی ✓ برخی از درشت‌مولکول‌ها، پلیمر نیستند و در آن‌ها واحد تکرارشونده وجود ندارد.



بررسی سایر گزینه‌ها:

- گزینه (۱): الیاف طبیعی نیز کاربردهای فراوانی دارند، مثلاً از پنبه افزون بر تولید پوشاک، در تولید رویه مبلی، پرده، تور ماهیگیری، گاز استریل و ... استفاده می‌شود.
- گزینه (۲): سلولز برخلاف نایلون، جزء پلیمرهای طبیعی است.
- گزینه (۳): ترکیب‌هایی که از دو عنصر کربن و هیدروژن تشکیل شده‌اند، می‌توانند جزء کوچک‌مولکول‌ها (مانند اتن: C_2H_4) یا درشت‌مولکول‌ها (مانند پلی‌اتن: $(-C_2H_4-)_n$) باشند.

۷۰ با توجه به ساختار پلیمرهای داده شده، چند مورد از مطالب زیر نادرست است؟



(A)

(B)

- هر دو پلیمر برخلاف پلی استیرن، جزء پلیمرهای غیر هیدروکربنی هستند.
- از پلیمر A در ساخت پتو و از پلیمر B، برای ساخت سرنگ استفاده می شود.
- مونومر سازنده هر دو پلیمر، رنگ قرمز برم را از بین برده و تعداد پیوندهای اشتراکی برابری دارند.
- اگر به جای هالوژن های موجود در پلیمر B، واکنش پذیرترین نافلز جدول دوره ای قرار گیرد، تفلون به دست می آید.

فلوئور

۴ (۴)

۳ (۳)

۲ (۲)

۱ (۱)

پاسخ: گزینه ۳

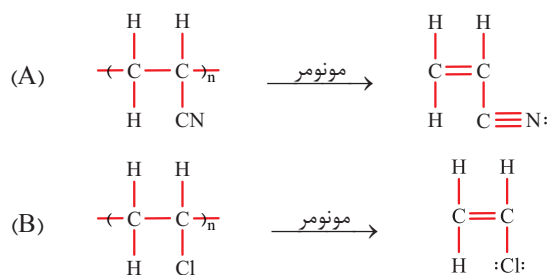
پلی اتن و مشتقات آن

دانش Box

نام و ساختار مونومر	نام و ساختار پلیمر	کاربرد
اتن	پلی اتن $(-C_2H_4)_n$ یا $(-CH_2-CH_2-)_n$	کیسه پلاستیکی، لوله های پلاستیکی، دبه های آب یا بطری پلاستیکی
سیانو اتن	پلی سیانو اتن $(-C_3H_3N)_n$ یا $(-CH_2-CH(CN)-)_n$	فرش، پارچه، پتو
پروپن	پلی پروپن $(-C_3H_6)_n$ یا $(-CH_2-CH(CH_3)-)_n$	به عنوان پلاستیک در تجهیزات آزمایشگاهی و پزشکی مانند سرنگ
استیرن	پلی استیرن $(-C_8H_8)_n$ یا $(-CH_2-CH(Ph)-)_n$	به عنوان پلاستیک در صنعت بسته بندی مواد غذایی مانند ظروف یک بار مصرف
تترافلوئورو اتن	پلی تترافلوئورو اتن یا تفلون $(-C_2F_4)_n$ یا $(-CF_2-CF_2-)_n$	ظروف نجیب، نخ دندان، کف اتو و نوارهای آب بندی لوله ها
وینیل کلرید (کلرو اتن)	پلی وینیل کلرید $(-C_2H_3Cl)_n$ یا $(-CH_2-CH(Cl)-)_n$	کیسه خون

پاسخ خیلی تشریحی ✓ موارد دوم، سوم و چهارم نادرست هستند.

پلیمرهای A و B به ترتیب پلی سیانو اتن و پلی وینیل کلرید هستند.



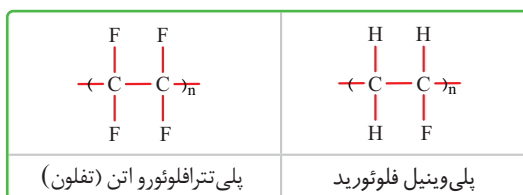
بررسی عبارت‌ها:

در ساختار پلی سیانو اتن و پلی وینیل کلرید، به جز عنصرهای کربن و هیدروژن، عنصرهای دیگری (Cl, N) نیز وجود دارد؛ در نتیجه این پلیمرها، هیدروکربن به حساب نمی‌آیند، اما پلی استیرن، $\text{---C}_6\text{H}_5\text{---}$ ، فقط از عنصرهای کربن و هیدروژن ساخته شده است و هیدروکربن محسوب می‌شود.

برای ساخت سرنگ از پلی پروپن استفاده می‌شود.

مونومرهای هر دو پلیمر، سیر نشده هستند و در واکنش با برم مایع، می‌توانند رنگ قرمز آن را از بین ببرند اما در ساختار سیانو اتن و وینیل کلرید، به ترتیب ۹ و ۶ پیوند اشتراکی وجود دارد.

واکنش پذیرترین نافلز جدول دوره‌ای، فلئور (F) است. اگر به جای اتم‌های کلر در ساختار پلی وینیل کلرید، فلئور قرار گیرد، تفلون به دست نمی‌آید، زیرا در واحد تکرارشونده تفلون، ۴ اتم فلئور وجود دارد.



کدام موارد از مطالب زیر، نادرست است؟

الف) با افزایش شمار اتم‌های کربن در مولکول الکل‌های تک‌عاملی، خاصیت چربی‌دوستی آن‌ها کاهش می‌یابد.

ب) واکنش استری شدن در محیط اسیدی انجام می‌گیرد و برگشت‌پذیر است.

پ) مولکول‌های اتانول و اتانویک اسید در شمار اتم‌های هیدروژن مشابه‌اند.



ت) در مولکول ۱-اوکتانول، بخش ناقطبی بر بخش قطبی غلبه دارد.

الکل ۸ کربنی

(۲) ب - ت

(۱) الف - پ

(۴) ب - پ

(۳) الف - ت

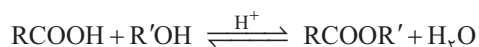
پاسخ: گزینه ۱

پاسخ خیلی تشریحی ✓ عبارت‌های «الف» و «پ» نادرست هستند.

الف) با افزایش شمار اتم‌های کربن در الکل‌ها (ROH)، بخش ناقطبی مولکول بزرگ‌تر شده و در نتیجه خاصیت آب‌دوستی آن‌ها،

کاهش و خاصیت چربی‌دوستی آن‌ها افزایش می‌یابد.

ب) کاملاً درسته!



پ)

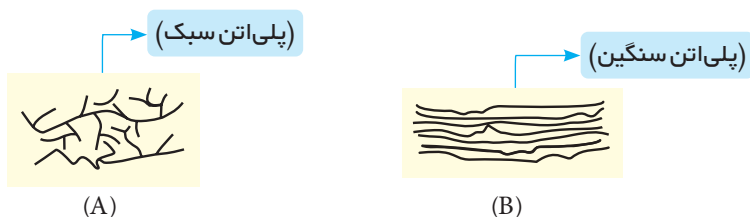


ت) ۱-اوکتانول، الکل ۸ کربنه است و در مجموع، ناقطبی محسوب می‌شود.



الکل‌ها	از یک تا ۵ اتم کربن	مولکول قطبی است. (بخش قطبی بر ناقطبی غلبه دارد). <u>نیروی بین مولکولی غالب</u> ← پیوند هیدروژنی
	از ۶ اتم کربن به بالا	مولکول ناقطبی است. (بخش ناقطبی بر قطبی غلبه دارد). <u>نیروی بین مولکولی غالب</u> ← نیروی وان‌دروالسی

۷۲ کدام گزینه در ارتباط با دو نوع پلی اتن داده شده، نادرست است؟



- (۱) قطعه ساخته شده از پلیمر B، استحکام بیشتری نسبت به قطعه مشابه ساخته شده از پلیمر A دارد.
- (۲) اگر دو نمونه با حجم یکسان از این دو پلیمر وجود داشته باشد، جرم نمونه پلیمر B بیشتر است.
- (۳) نوع نیروی بین مولکولی A به اتان و نوع نیروی بین مولکولی B به اتانول شباهت دارد.
- (۴) پلیمر A، ظاهری شفاف و پلیمر B، ظاهری کدر دارد.

پاسخ: گزینه ۳

مقایسه پلی اتن سبک و سنگین

درس Box

نوع پلی اتن	سبک	سنگین
ساختار	شاخه دار	بدون شاخه
فرمول مولکولی	$-(C_2H_4)_n-$	$-(C_2H_4)_n-$
نوع نیروی بین مولکولی	وان دروالسی	وان دروالسی
شفاف یا کدر بودن	شفاف	کدر
کاربرد	ساخت کیسه های پلاستیکی شفاف	ساخت لوله های پلاستیکی، دبه های آب، بطری کدر شیر و اسباب بازی
چگالی	0.92 g.cm^{-3}	0.97 g.cm^{-3}
سختی و استحکام، چگالی، نقطه ذوب و قدرت نیروهای بین مولکولی	پلی اتن سبک > پلی اتن سنگین	

پاسخ خیلی تشریحی ✓ A و B به ترتیب پلی اتن شاخه دار (سبک) و پلی اتن بدون شاخه (سنگین) هستند. نیروی بین مولکولی هر دو پلیمر همانند اتان از نوع وان دروالسی است، در حالی که نیروی بین مولکولی اتانول (C_2H_5OH) از نوع پیوند هیدروژنی است. در مورد گزینه (۲) دقت کنید که چگالی پلی اتن سنگین (B) بیشتر است؛ بنابراین در حجم یکسان، جرم آن نیز بیشتر می باشد.

۷۳

در اثر سوختن کامل ۰/۵۵ مول از یک نمونه پلی پروپن، $۲۷/۷۲ \text{ m}^3$ گاز کربن دی اکسید در شرایط STP آزاد شده است. جرم اولیه این نمونه پلی پروپن چند کیلوگرم بوده است؟ ($C = ۱۲, H = ۱: \text{g.mol}^{-1}$)

$$۲۳/۱۰ (۲)$$

$$۱۷/۳۲۵ (۱)$$

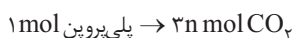
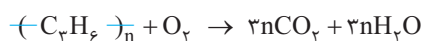
$$۴۶/۲۰ (۴)$$

$$۳۴/۶۵ (۳)$$

پاسخ: گزینه ۱

 Hint

معادله واکنش سوختن پلی پروپن رو بنویس و با توجه به اطلاعات داده شده، n (شمار واحدهای تکرارشونده در پلیمر) رو حساب کن. بعد به کمک n ، به جرم مولی و جرم اولیه پلیمر برس.



$$? \text{ m}^3 CO_2 = ۰/۵۵ \text{ mol پلی پروپن} \times \frac{۳ \text{ mol } CO_2}{۱ \text{ mol پلی پروپن}} \times \frac{۲۲/۴ \times ۱۰^{-۳} \text{ m}^3 CO_2}{۱ \text{ mol } CO_2} = ۲۷/۷۲ \text{ m}^3 CO_2 \Rightarrow n = ۷۵۰$$

$$\text{جرم نمونه اولیه} = \text{جرم مولی} \times \text{مول} = ۰/۵۵ \times ۴۲ n \rightarrow ۰/۵۵ \times ۴۲ \times ۷۵۰ = ۱۷۳۲۵ \text{ g} \equiv ۱۷/۳۲۵ \text{ Kg}$$

پاسخ خیلی تشریحی ✓

درستی یا نادرستی عبارت‌های زیر، به ترتیب در کدام گزینه آمده است؟

- الکل سازنده استر موجود در انگور (اتیل هپتانوات) نسبت به الکل سازنده استر موجود در موز (پنتیل اتانوات)، انحلال‌پذیری و نقطه جوش بیشتری دارد.
- الیاف پنبه‌ای از سلولز ساخته شده و در سال‌های اخیر، میزان تولید آن‌ها همانند الیاف پلی‌استری، روند صعودی داشته است.
- نیروی بین‌مولکولی غالب در متیل فرمات، وان‌دروالسی بوده و از آشناترین عضو خانواده کربوکسیلیک اسیدها، نقطه جوش پایین‌تری دارد.
- مولکول‌های نشاسته در محیط مرطوب با کاتالیزگر، به سرعت به مونومرهای سازنده خود تبدیل می‌شوند.

استیک اسید

- (۱) درست - نادرست - درست - نادرست
- (۲) نادرست - درست - درست - نادرست
- (۳) نادرست - نادرست - نادرست - درست
- (۴) درست - درست - نادرست - درست

پاسخ: گزینه ۲

پاسخ خیلی تشریحی ✓

عبارت‌های اول و چهارم، نادرست و عبارت‌های دوم و سوم، درست هستند.

عبارت اول: الکل سازنده اتیل هپتانوات و پنتیل اتانوات به ترتیب اتانول و پنتانول هستند. اتانول برخلاف پنتانول به هر نسبتی در آب حل می‌شود و می‌توان گفت که انحلال‌پذیری بیشتری دارد، اما دقت کنید که در الکل‌های یک‌عاملی، با افزایش شمار اتم‌های کربن و در نتیجه افزایش جرم مولی، نقطه جوش نیز افزایش می‌یابد:

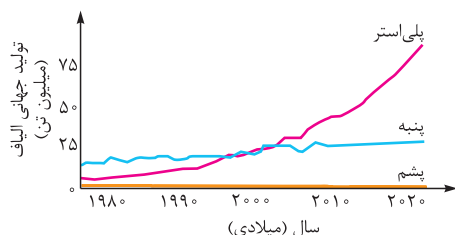
پنتانول ($C_5H_{11}OH$) > اتانول (C_2H_5OH): انحلال‌پذیری

اتانول (C_2H_5OH) > پنتانول ($C_5H_{11}OH$): نقطه جوش

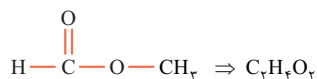
نام استرها بر وزن آلکیل آلکانوات است که «آلکیل» نشان‌دهنده الکل سازنده و «آلکانوات» نشان‌دهنده اسید سازنده است.

اتانول: الکل سازنده → اتیل هپتانوات ← اسید سازنده: هپتانوئیک اسید

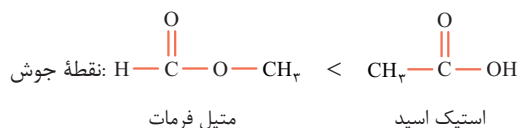
عبارت دوم: پنبه از سلولز ساخته شده و با توجه به نمودار کتاب درسی، روند تولید آن همانند الیاف ساختمانی یا همان الیاف پلی‌استری، صعودی بوده است.



عبارت سوم: متیل فرمات یا همان متیل متانوات، یک استر دوکربنی است:



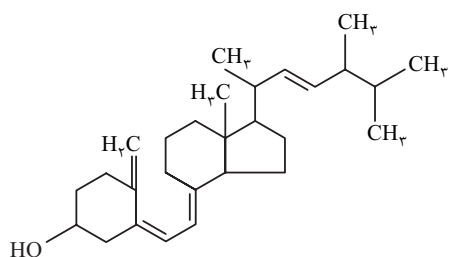
با توجه به این‌که استرها توانایی تشکیل پیوند هیدروژنی ندارند، نیروی بین‌مولکولی آن‌ها از نوع وان‌دروالسی است و نسبت به اسیدهای هم‌کربن خود، نقطه جوش پایین‌تری دارند.



(آشناترین عضو خانواده کربوکسیلیک اسیدها)

عبارت چهارم: مولکول‌های نشاسته در شرایط مناسب مانند محیط مرطوب با کاتالیزگر یا محیط گرم و مرطوب به آرامی به مونومرهای سازنده (گلوکز) تبدیل می‌شوند و مزه شیرین ایجاد می‌کنند.

کدام گزینه در مورد مولکول مقابل نادرست است؟



(۱) در شرایط مناسب می‌تواند با ۴ مول برم، واکنش داده و رنگ قرمز آن را از بین ببرد.

(۲) تفاوت شمار اتم‌های هیدروژن و کربن در آن با مجموع شمار اتم‌ها در ترکیب آلی ایجادکننده طعم و بوی آناناس، برابر است.

(۳) گشتاور دوقطبی آن مانند گشتاور دوقطبی هگزان، تقریباً برابر صفر است.

اتیل بوتانوات ($C_6H_{12}O_2$)

(۴) در چربی حل شده و در مواد غذایی مانند شیر یافت می‌شود.

پاسخ: گزینه ۲

شکل داده‌شده مربوط به ویتامین دی است که فرمول مولکولی آن $C_{28}H_{44}O$ می‌باشد.

پاسخ خیلی تشریحی ✓

برای محاسبه تعداد اتم‌های هیدروژن در یک ترکیب آلی دارای اتم‌های C، H و O، می‌توان از رابطه زیر استفاده کرد:

نکته

(تعداد حلقه‌ها $\times 2$) - (تعداد پیوندهای دوگانه $\times 2$) - (تعداد اتم‌های هیدروژن در ترکیبی با n اتم کربن)

(تعداد پیوندهای سه‌گانه $\times 4$) -

ویتامین D دارای ۲۸ اتم کربن، ۴ پیوند دوگانه و ۳ حلقه است؛ بنابراین خواهیم داشت:

$$D \text{ تفاوت شمار اتم‌های کربن و هیدروژن در این مولکول برابر با } 16 = 44 - 28 \text{ است. از طرفی بو و طعم آناناس به دلیل وجود اتیل}$$

بوتانوات ($C_6H_{12}O_2$) بوده که مجموع شمار اتم‌ها در آن برابر با $20 = 2 + 12 + 6$ است.

بررسی سایر گزینه‌ها:

گزینه (۱): مولکول نشان داده‌شده، دارای ۴ پیوند دوگانه است، بنابراین می‌تواند با ۴ مول برم واکنش داده و رنگ قرمز آن را از بین ببرد.

گزینه (۳): بخش زیادی از این مولکول ناقطبی می‌باشد؛ بنابراین می‌توان گفت گشتاور دوقطبی آن مانند مولکول ناقطبی هگزان، تقریباً برابر با صفر است.

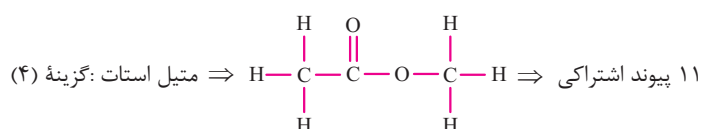
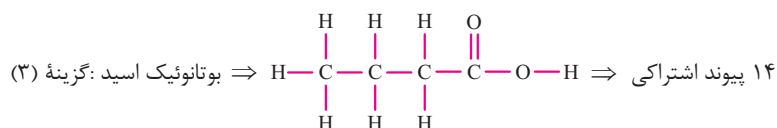
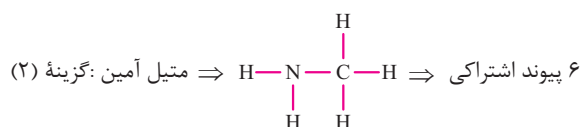
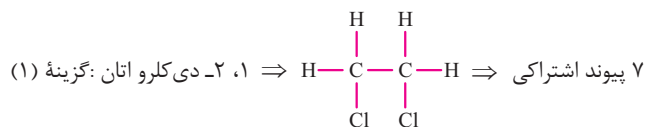
گزینه (۴): از آن‌جا که مولکول داده‌شده (ویتامین دی)، ناقطبی است، بنابراین در چربی حل می‌شود. هم‌چنین در کتاب درسی می‌بینیم که ویتامین دی در شیر وجود دارد.

۷۶ شمار کل پیوندهای اشتراکی در ساختار کدام مولکول، بیشتر است؟

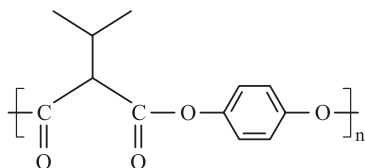
- (۱) ۱، ۲-دی کلرو اتان
(۲) متیل آمین
(۳) بوتانوئیک اسید
(۴) متیل استات

پاسخ: گزینه ۳

پاسخ خیلی تشریحی ✓ ساختار ترکیب‌های داده شده و شمار پیوندهای اشتراکی آن‌ها به صورت زیر است:



با توجه به ساختار پلیمر مقابل، کدام گزینه نادرست است؟



(۱) تفاوت جرم مولی مونومرهای سازنده آن، دو برابر جرم مولی آب است.

بنزوئیک اسید ($C_7H_6O_2$)

(۲) دی‌الکل سازنده آن با نگهدارنده موجود در تمشک، ایزومر است.

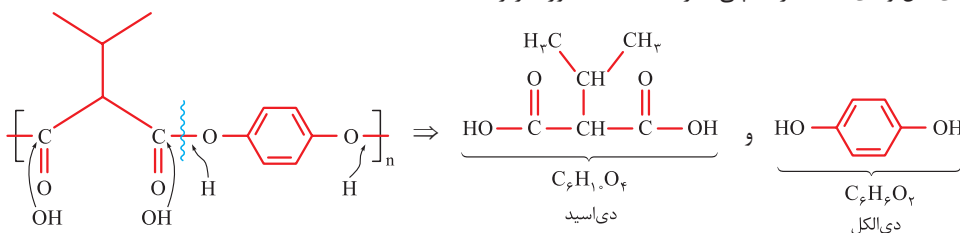
C_8H_8

(۳) همانند استیرن، شمار اتم‌های کربن و هیدروژن در واحد تکرارشونده این پلیمر برابر است.

(۴) برای سوختن کامل یک مول از دی‌اسید سازنده آن، به $6/5$ مول گاز اکسیژن نیاز است.

پاسخ: گزینه ۲

پاسخ خیلی تشریحی ✓ ساختار دی‌الکل و دی‌اسید سازنده پلی‌استر داده شده به صورت زیر است:



واحد تکرارشونده: $C_{12}H_{12}O_4$

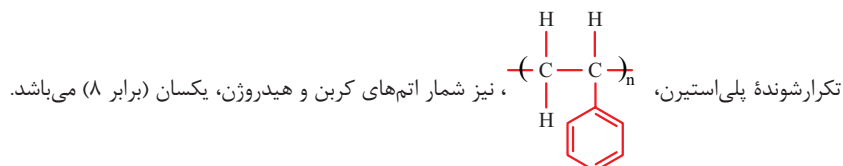
بررسی گزینه‌ها:

گزینه (۱): فرمول مونومرهای سازنده را از هم کم می‌کنیم:

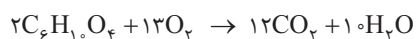
$$C_{12}H_{12}O_4 - C_6H_6O = C_6H_6O_3 = 2(H_2O)$$

گزینه (۲): فرمول دی‌الکل پلیمر مورد نظر، C_6H_6O است، در حالی که فرمول نگهدارنده موجود در تمشک (بنزوئیک اسید) به صورت $C_7H_6O_2$ می‌باشد، پس این دو ترکیب که فرمول‌های شیمیایی متفاوتی دارند، نمی‌توانند ایزومر یکدیگر باشند.

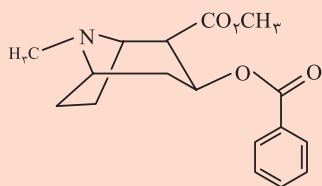
گزینه (۳): در واحد تکرارشونده پلیمر مورد نظر ($C_{12}H_{12}O_4$)، شمار اتم‌های کربن و هیدروژن، یکسان (برابر ۱۲) است. در واحد



گزینه (۴): معادله موازنه شده سوختن کامل دی‌اسید سازنده پلیمر داده شده به صورت زیر است:



$$1 \text{ mol } C_6H_6O_3 \times \frac{13 \text{ mol } O_2}{2 \text{ mol } C_6H_6O_3} = 6.5 \text{ mol } O_2$$



کدام موارد از مطالب زیر، درباره ترکیبی با ساختار مقابل، درست است؟

(الف) استری دو عاملی بوده و می تواند در واکنش تولید نوعی آمید شرکت کند.

(ب) شمار پیوندهای C—O و C—N در آن با هم برابر است.

(پ) شمار اتم های کربنی که به هیدروژن متصل نیستند، با شمار گروه های CH₃ در آن برابر است.

(ت) ترکیبی آروماتیک بوده و در ساختار آن، ۱۸ الکترون ناپیوندی وجود دارد.

(۲) الف - پ

(۱) الف - ب

(۴) پ - ت

(۳) ب - ت

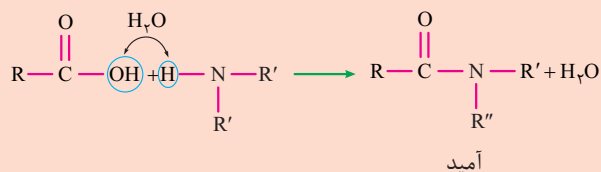
پاسخ: گزینه ۲

پاسخ خیلی تشریحی ✓

عبارت های «پ» و «ت» درست هستند.

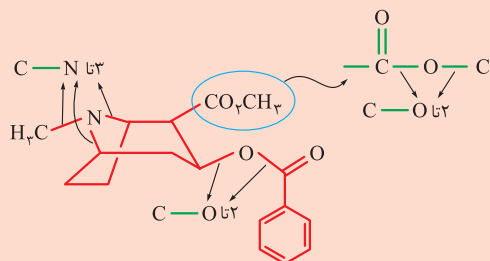
(الف) در ساختار ترکیب مورد نظر، دو گروه عاملی استری (—C(=O)—O—) وجود دارد. (گروه CO₂CH₃— در واقع به صورت

CH₃—O—C(=O)— است)؛ بنابراین استری دو عاملی محسوب می شود. آمیدها از واکنش آمین ها و اسیدها تولید می شوند اما دقت کنید که در آمین استفاده شده، باید به اتم نیتروژن، حداقل یک اتم هیدروژن متصل باشد که در ترکیب داده شده این طور نیست.

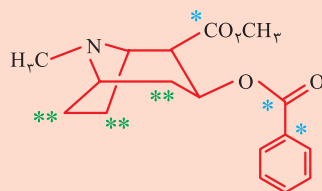


آمید

(ب) در ساختار ترکیب داده شده، ۳ پیوند C—N و ۴ پیوند C—O وجود دارد.



(پ) در ساختار ترکیب داده شده، ۳ اتم کربن وجود دارد که به هیچ اتم هیدروژنی متصل نیستند و از طرفی در ساختار آن، ۳ اتم کربن وجود دارد که به دو اتم هیدروژن (CH₃) متصل هستند. این کربن ها در شکل زیر به ترتیب با نمادهای * و ** نشان داده شده اند.



(ت) در ساختار ترکیب داده شده، حلقه بنزن وجود دارد؛ بنابراین آروماتیک محسوب می شود. از طرفی در ساختار آن، هر اتم اکسیژن —O—، ۴ الکترون ناپیوندی و هر اتم نیتروژن —N—، ۲ الکترون ناپیوندی دارد.

$$شمار\ کل\ الکترون\ های\ ناپیوندی = \underbrace{(4 \times 4)}_O + \underbrace{(1 \times 2)}_N = 18$$

کدام موارد از مطالب زیر، درست است؟

- الف) کولار یکی از معروف ترین پلی آمیدهای طبیعی است و نسبت به فولاد هم جرم خود، پنج برابر مقاوم تر است.
- ب) پوشاک و پوشش های تهیه شده از هیدروکربن های سیر نشده در طبیعت تجزیه نمی شوند و برای سالیان طولانی دست نخورده باقی می ماند.
- پ) استفاده از پلیمرهای ماندگار، صرفه اقتصادی دارد و از نگاه توسعه پایدار، تولید و استفاده از آنها، الگوی مصرف مطلوبی است.
- ت) مونومر یکی از پلیمرهای سبز، اسید موجود در شیر ترش شده است که از نشاسته موجود در فراورده های کشاورزی مانند ذرت و نیشکر تهیه می شود.

پلی لاکتیک اسید

۲) الف - پ

۱) الف - ب

۴) پ - ت

۳) ب - ت

پاسخ: گزینه ۳

پاسخ خیلی تشریحی ✓ عبارت های «ب» و «ت» درست هستند.

بررسی عبارت های نادرست:

الف) کولار، یک پلیمر ساختگی است نه طبیعی!

پ) با توجه به این که پلیمرهای ماندگار، مدت زمان زیادی در طبیعت باقی می ماندند و به محیط زیست آسیب می رسانند، از نظر توسعه پایدار، استفاده از آنها مطلوب نیست.

۸۰

در اثر واکنش آبکافت ۴۲/۶ گرم پلی آمیدی با ساختار زیر، ۳۵/۴ گرم کربوکسیلیک اسید دوعاملی تولید شده است. جرم مولی اسید تولید شده چند گرم بر مول است؟ ($O = ۱۶, N = ۱۴, C = ۱۲, H = ۱ : g.mol^{-1}$)

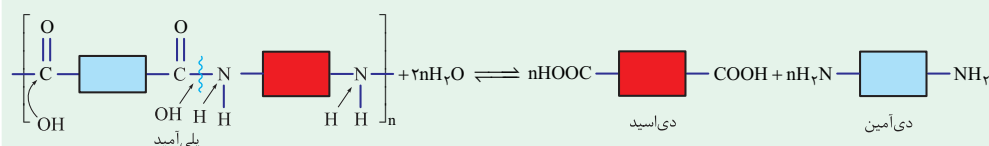


پاسخ: گزینه ۳

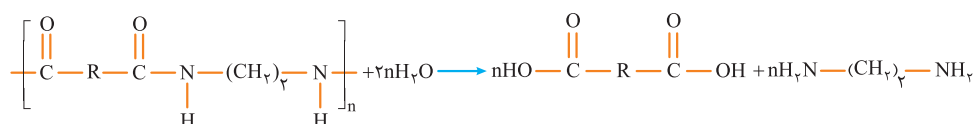
پاسخ خیلی تشریحی ✓

نکته

پلی آمیدها می توانند در شرایط مناسب با آب واکنش دهند و به مونومرهای سازنده خود یعنی کربوکسیلیک اسید دوعاملی (دی اسید) و آمین دوعاملی (دی آمین) تبدیل شوند.



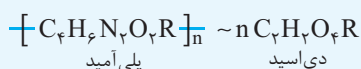
معادله آبکافت پلی آمید داده شده به صورت زیر است:



جرم مولی گروه R را برابر M گرم بر مول در نظر می گیریم:

$$\text{اسید } ۳۵/۴ \text{ g} = \frac{\text{اسید } (M+۹۰) \text{ g}}{۱ \text{ mol اسید}} \times \frac{n \text{ mol اسید}}{۱ \text{ پلی آمید mol}} \times \frac{۱ \text{ پلی آمید mol}}{(۱۱۴+M)n \text{ پلی آمید g}} \times \text{پلی آمید } ۴۶/۲ \text{ g} = \text{اسید } ۳۵/۴ \text{ g}$$

$$\Rightarrow M = ۲۸ \text{ g.mol}^{-1} \Rightarrow \text{جرم مولی دی اسید} = M + ۹۰ = ۲۸ + ۹۰ = ۱۱۸ \text{ g.mol}^{-1}$$



$$\frac{\text{جرم}}{\text{جرم مولی} \times \text{ضریب}} = \frac{\text{جرم}}{\text{جرم مولی} \times \text{ضریب}} \Rightarrow \frac{۴۲/۶}{(۱۱۴+M)n} = \frac{۳۵/۴}{n \times (M+۹۰)} \Rightarrow \frac{۴۲/۶ - ۳۵/۴}{۱۱۴ - ۹۰} = \frac{۳۵/۴}{M+۹۰}$$

$$\frac{M+۹۰=x}{۲۴} = \frac{۳۵/۴}{x} \Rightarrow x = \frac{۲۴ \times ۳۵}{۳} = ۱۱۸$$

به چور دیگه