

آزمون آزمایشی خیلی سبز

پایه یازدهم

مرحله دهم

رشته ریاضی

سال تحصیلی ۱۴۰۳-۰۴ تاریخ برگزاری: ۲۹/فروردین/۱۴۰۴

بودجه بندی دروس

حسابان (۱)	آمار و احتمال	هندسه (۲)
فصل ۴ (درس ۴) و فصل ۵ (درس ۱ تا ۳) صفحه ۱۱۰ تا ۱۴۰	فصل ۳ (درس ۳) و فصل ۴ (درس ۱) صفحه ۸۷ تا ۱۱۱	فصل ۳ (درس ۲ و ۳) صفحه ۶۴ تا ۷۰
فیزیک (۲)	شیمی (۲)	
فصل ۳ (از ابتدای ویژگی های مغناطیسی مواد) و فصل ۴ (تا ابتدای قانون لنز) صفحه ۱۰۱ تا ۱۱۷	فصل ۳ (تا ابتدای پلی استرها) صفحه ۹۹ تا ۱۰۹	

مواد امتحانی	تعداد سؤال	از شماره	تا شماره	مدت پاسخگویی
حسابان	۲۰	۱	۲۰	۳۰ دقیقه
هندسه	۱۰	۲۱	۳۰	۲۰ دقیقه
آمار و احتمال	۱۰	۳۱	۴۰	۲۰ دقیقه
فیزیک	۲۰	۴۱	۶۰	۳۰ دقیقه
شیمی	۲۰	۶۱	۸۰	۲۰ دقیقه
مجموع		۸۰ سؤال		۱۲۰ دقیقه

این آزمون نمره منفی دارد.

استفاده از ماشین حساب مجاز نیست.

دفتر چه سوالات آزمون های خیلی سبز، از همه نظر (تعداد سؤال ها، زمان پاسخگویی، نوع چینش گزینه ها، نوع صفحه آرایی، فونت سوالات، سایز کلمات و اعداد، جای خالی محل انجام محاسبات و...) در شبیه ترین حالت به دفتر چه سوالات کنکور سراسری طراحی می شود.



Azmoon.kheilisabz.com

حسابان یازدهم

۱- حاصل عبارت $\frac{\sin 57^\circ}{\sin 19^\circ} - \frac{\cos 57^\circ}{\cos 19^\circ}$ کدام است؟

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) -۱ (۴) -۲

۲- اگر $a - b = \pi - a$ باشد، حاصل $\cot a - \cot b$ کدام است؟

- (۱) $-\frac{1}{\sin a}$ (۲) $-\frac{1}{\sin b}$ (۳) $\frac{1}{\sin 2a}$ (۴) $\frac{1}{\sin 2b}$

۳- اگر $0 < \theta < \frac{\pi}{4}$ و $\cos \theta + \sqrt{3} \sin \theta = \sqrt{2}$ باشد، مقدار $\sin 2\theta$ کدام است؟

- (۱) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ (۲) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ (۳) ۱ (۴) $\frac{1}{2}$

۴- حاصل $\sin 15^\circ + \cos 15^\circ$ کدام است؟

- (۱) $\sqrt{\frac{2}{3}}$ (۲) $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$ (۳) $\frac{1}{\sqrt{2}}$ (۴) $\frac{1}{\sqrt{3}}$

۵- اگر $\tan x + \cot x = 6$ باشد، مقدار $\sin(x + \frac{\pi}{4})$ کدام می‌تواند باشد؟

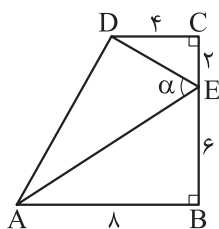
- (۱) $\frac{\sqrt{6}}{2}$ (۲) $\frac{\sqrt{3}}{3}$ (۳) $\frac{\sqrt{6}}{3}$ (۴) $\frac{\sqrt{6}}{6}$

۶- اگر $5 \sin \alpha = \sin(\alpha + 2\beta)$ باشد، مقدار عبارت تعریف‌شده $\tan(\alpha + \beta)$ کدام است؟

- (۱) $\frac{3}{2} \cot \alpha$ (۲) $\frac{3}{2} \cot \beta$ (۳) $\frac{3}{2} \tan \alpha$ (۴) $\frac{3}{2} \tan \beta$

۷- اگر انتهای کمان α در ناحیه دوم دایره مثلثاتی و $\sin \alpha = \frac{1}{3}$ باشد، مقدار $\sin^2(\alpha + \frac{\pi}{8})$ کدام است؟

- (۱) $\frac{10 - \sqrt{2}}{18}$ (۲) $\frac{10 - \sqrt{6}}{18}$ (۳) $\frac{10 - \sqrt{7}}{9}$ (۴) $\frac{10 - 7\sqrt{2}}{36}$



۸- با توجه به شکل مقابل، مقدار $\cos \alpha$ کدام است؟

- (۱) $\frac{1}{3}$ (۲) $\frac{\sqrt{5}}{5}$ (۳) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ (۴) $\frac{\sqrt{3}}{3}$

محل انجام محاسبات

۹- در تساوی $\frac{\sin 5^\circ}{\sqrt{2+4\sin 2^\circ \cos 2^\circ}} + \cos 25^\circ = k \sin 70^\circ$ ، مقدار k کدام است؟

- (۱) $\sqrt{2}$ (۲) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ (۳) ۲ (۴) $\sqrt{3}$

۱۰- اگر $x+y = \frac{\pi}{3}$ باشد، بیشترین مقدار عبارت $\cos^2 x + \cos^2 y$ کدام است؟

- (۱) $\frac{3}{2}$ (۲) $\frac{4}{3}$ (۳) $\frac{2+\sqrt{3}}{2}$ (۴) $\frac{1+\sqrt{2}}{3}$

۱۱- در شکل زیر، هر بار وسط اضلاع مربع را به هم وصل می‌کنیم و بخشی از مربع ایجادشده را رنگ می‌کنیم. اگر این فرایند را همواره برای مربع‌های جدید انجام دهیم، مجموع مساحت بخش‌های رنگ‌شده، چه کسری از مساحت مربع اولیه خواهد شد؟



- (۱) $\frac{1}{12}$ (۲) $\frac{1}{3}$ (۳) $\frac{1}{4}$ (۴) $\frac{7}{12}$

۱۲- مجموعه $(2x, x+5) \cup (2-x, 4-x)$ یک همسایگی محذوف x است. مجموع مقادیر ممکن برای x کدام است؟

- (۱) $\frac{8}{3}$ (۲) $\frac{25}{6}$ (۳) $\frac{7}{2}$ (۴) $\frac{37}{6}$

۱۳- برخی از همسایگی‌های متقارن به مرکز $1+x$ ، شامل اعداد ۳ و ۲ هستند. حدود x ، همسایگی متقارن کدام عدد است؟

- (۱) $\frac{1}{2}$ (۲) ۱ (۳) $\frac{3}{2}$ (۴) ۲

۱۴- اگر $3x + 2f(x) + xf(x) - 1 = 0$ و $g(x) = \frac{x+1}{x-2}$ باشد، حاصل $\lim_{x \rightarrow 0} f^{-1}(x) + \lim_{x \rightarrow -1} (f \circ g)(x)$ کدام است؟

- (۱) $\frac{5}{6}$ (۲) $\frac{1}{3}$ (۳) $\frac{1}{2}$ (۴) $\frac{1}{6}$

۱۵- اگر $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x+1) + x^2}{3x - f(3-x)} = 7$ باشد، حاصل $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) + \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x)$ کدام است؟

- (۱) ۵ (۲) -۵ (۳) ۱۰ (۴) -۱۰

۱۶- اگر $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} [f(x)] = \left[\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} f(x) \right]$ باشد، ضابطه تابع f کدام می‌تواند باشد؟ ([] نماد جزء صحیح است.)

- (۱) $\sin x$ (۲) $-\sin x$ (۳) $\cos x$ (۴) $-\cos x$

محل انجام محاسبات

۱۷- اگر $f(x) = \left[\frac{3x+1}{x+2} \right]$ ، کدام عبارت درست است؟ ([] نماد جزء صحیح است.)

$$\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = 1 \quad (2)$$

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = 3 \quad (1)$$

$$\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = 2 \quad (4)$$

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = 2 \quad (3)$$

۱۸- اگر $f(x) = \begin{cases} 3x-1, & x < 0 \\ 2x+1, & x \geq 0 \end{cases}$ باشد، $\lim_{x \rightarrow (\frac{\pi}{4})^+} f(\cos x - \sin x)$ کدام است؟

(۱) -۱ (۲) ۱ (۳) صفر (۴) وجود ندارد.

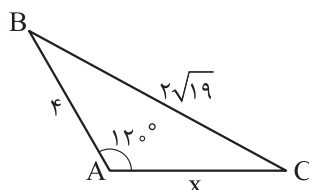
۱۹- تابع $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-1}{\sqrt{x}}; & x > 4 \\ \sin \pi x; & x \leq 4 \end{cases}$ مفروض است. حاصل $\lim_{x \rightarrow -2^-} f(2-x)$ کدام است؟

(۱) $\frac{15}{2}$ (۲) ۱۵ (۳) صفر (۴) $-\frac{15}{4}$

۲۰- اگر تابع f در $x = a$ حد داشته باشد، اما تابع g در این نقطه حد نداشته باشد، کدام تابع در $x = a$ قطعاً حد ندارد؟

(۱) $f + g^2$ (۲) $\frac{f}{|g|}$ (۳) $(|f| + 1)g$ (۴) $(|f| - 1)g$

هندسه یازدهم

۲۱- در شکل مقابل، مقدار x کدام است؟

(۲) ۶

(۱) $4\sqrt{2}$

(۴) ۵

(۳) $2\sqrt{10}$

۲۲- در مثلث ABC ، اگر $AB = 4\sqrt{2}$ ، $AC = 2$ ، $BC = 6$ و M وسط ضلع BC باشد، محیط مثلث AMC کدام است؟

(۴) $5 + 2\sqrt{2}$

(۳) $5 + \frac{3\sqrt{2}}{2}$

(۲) ۹

(۱) ۸

۲۳- طول اضلاع یک متوازی الاضلاع، ۶ و ۸ و زاویه حاده بین آنها برابر 45° است. مجموع مربعات طول قطرهای این

متوازی الاضلاع کدام است؟

(۴) ۲۴۰

(۳) ۲۰۰

(۲) ۱۸۰

(۱) ۱۶۰

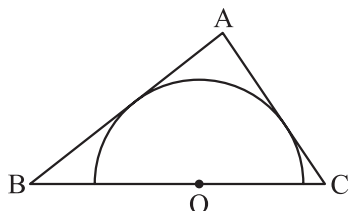
۲۴- در مثلث ABC ، $AB = 3$ ، $AC = 4$ و $BC = 6$ است. طول بزرگ‌ترین نیمساز این مثلث کدام است؟

(۴) $\frac{2\sqrt{546}}{5}$

(۳) $\frac{\sqrt{546}}{5}$

(۲) $\frac{2\sqrt{91}}{5}$

(۱) $\frac{\sqrt{91}}{5}$

۲۵- در شکل زیر نیم‌دایره‌ای به مرکز O بر دو ضلع AB و AC از مثلث ABC مماس است. اگر $AB = 6$ ، $AC = 4$ و $BC = 7$ باشند، طول BO کدام است؟

(۲) $4/2$

(۱) ۴

(۴) $4/8$

(۳) $4/5$

۲۶- قایقی از یک نقطه با سرعت ۶۰ کیلومتر بر ساعت در یک جهت حرکت کرده و یک ساعت بعد با 60° انحراف به راست

با سرعت ۵۰ کیلومتر بر ساعت به مدت دو ساعت دیگر به حرکت ادامه می‌دهد تا به بندرگاه برسد. فاصله بندرگاه از مبدأ

حرکت کشتی چند کیلومتر است؟

(۴) ۱۴۰

(۳) ۱۳۰

(۲) ۱۲۰

(۱) ۱۱۰

۲۷- در مثلث ABC ، G نقطه هم‌رسمی میانه‌ها، $GB = 8$ ، $GC = 9$ و $BC = 13$ است. طول میانه AM کدام است؟

(۲) $16/5$

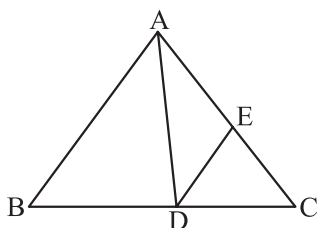
(۱) ۱۶

(۴) $17/5$

(۳) ۱۷

محل انجام محاسبات

۲۸- مطابق شکل در مثلث متساوی الاضلاع ABC به طول ضلع ۸، نقطه D به فاصله ۷ از رأس A قرار دارد. اگر نقطه E به فاصله ۳ واحد از رأس C قرار داشته باشد، اندازه زاویه AED کدام است؟ $(CD < BD)$



$$(1) 120^\circ$$

$$(2) 105^\circ$$

$$(3) 150^\circ$$

$$(4) 135^\circ$$

۲۹- در مثلث ABC ، $AB = 7$ ، $AC = 5$ و $\hat{C} = 60^\circ$ است. اندازه کوچک ترین قطعه ای که نیمساز داخلی زاویه A روی ضلع BC ایجاد می کند، کدام است؟

$$(2) \frac{8}{3}$$

$$(1) \frac{7}{3}$$

$$(4) \frac{10}{3}$$

$$(3) 3$$

۳۰- اندازه اضلاع مثلثی ۵، ۱۱ و ۱۲ است. عمود منصف بزرگ ترین ضلع مثلث، ضلع متوسط را به چه نسبتی تقسیم می کند؟

$$(2) \frac{3}{4}$$

$$(1) \frac{1}{3}$$

$$(4) \frac{1}{2}$$

$$(3) \frac{2}{3}$$

محل انجام محاسبات

آمار و احتمال

۳۱- به ازای کدام مقدار برای k ، واریانس داده‌های زیر برابر ۶۰ است؟

۳, ۶, ۹, ..., k

(۱) ۲۱ (۲) ۲۴ (۳) ۲۷ (۴) ۳۰

۳۲- ۹ داده آماری به شکل زیر داریم. اگر میانگین این داده‌ها برابر $\bar{x}$ و واریانس این داده‌ها برابر ۴۸ باشد، در این صورت مقدار a کدام است؟ ($a > 0$)

$\bar{x}, \bar{x}, \bar{x}, \bar{x} + a, \bar{x} + a, \bar{x} + a, \bar{x} + a, \bar{x} - 2a, \bar{x} - 2a$

(۱) ۲ (۲) ۴ (۳) ۶ (۴) ۸

۳۳- میانگین دسته اول با پنج داده مختلف برابر میانگین دسته دوم با ۷ داده است. به طوری که دسته دوم، علاوه بر تمام داده‌های دسته اول، داده‌های a و b را نیز دارد. اگر واریانس دسته اول $1/4$ برابر واریانس دسته دوم باشد، نسبت a به میانگین دسته اول کدام است؟

(۱) دقیقاً برابر ۱ (۲) حداقل برابر ۱

(۳) بزرگ‌تر از $\frac{1}{4}$ و کوچک‌تر مساوی ۱ (۴) بزرگ‌تر از ۱ و کم‌تر از ۲

۳۴- ۲۰ داده آماری با میانگین ۱۵ و ضریب تغییرات ۴۰ درصد داریم. حداقل چند داده مساوی میانگین به آن‌ها اضافه کنیم تا ضریب تغییرات از $32/100$ بیشتر نباشد؟

(۱) ۱۱ (۲) ۱۲ (۳) ۱۳ (۴) ۱۴

۳۵- اگر ضریب تغییرات داده‌های $a, a+2, a, a-2, a-4$ و $a-4$ برابر ۴ باشد، ضریب تغییرات داده‌های $2a+3, 2a+6, 2a$ ، $2a-3, 2a-6$ و $2a$ کدام است؟

(۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴) ۶

۳۶- در کدام موارد، روش نمونه‌گیری بیان‌شده مناسب است؟

الف) می‌خواهیم میانگین نمره‌های ریاضی دانش‌آموزان یک شهر را محاسبه کنیم. فهرست همه دانش‌آموزان را نداریم، اما فهرست مدارس، موجود است. ← طبقه‌ای

ب) مدیر یک مدرسه می‌خواهد نظرات دانش‌آموزان را برای تغییر ساعت تعطیلی مدرسه بداند. مدرسه ۶ پایه دارد و حدس می‌زنیم که نظر ۶ پایه با هم متفاوت است. ← خوشه‌ای

پ) شرکت واردکننده خودروهای سنگین برای بررسی عملکرد سامانه ترمز آن‌ها می‌خواهد ده درصد از خودروهایی را که به مرور زمان وارد کشور می‌شوند، بازرسی کند. ← سامانمند

(۱) «الف» - «ب» (۲) «الف» - «پ» (۳) «ب» (۴) «پ»

محل انجام محاسبات

۳۷- چه تعداد از روش‌های زیر برای نمونه‌گیری اریب است؟

- (الف) نمونه‌گیری راحت: افراد در دسترس را به عنوان نمونه انتخاب می‌کنیم.
 (ب) نمونه‌گیری ای میلی (رایانامه‌ای): پرسش‌نامه‌ای به ای میلی‌های انتخاب‌شده ارسال می‌شود.
 (پ) نمونه‌گیری هدفمند: خود محقق برای نمونه انتخابی نظر می‌دهد که چه افرادی انتخاب شوند.
 (ت) نمونه‌گیری داوطلبانه: نمونه انتخابی از بین افرادی که داوطلب هستند، انتخاب می‌شود.

(۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴

۳۸- چند مورد از موارد زیر درست است؟

- (الف) برای گردآوری داده‌ها، اگر نیاز به دقت زیادی داشته باشیم، روش مشاهده مناسب‌تر است.
 (ب) مرسوم‌ترین ابزار گرفتن اطلاعات، دادگان است.
 (پ) مصاحبه در مواردی که احتیاج به گرفتن نظر کارشناسان وجود دارد، روش مناسبی است.
 (ت) از مزایای روش گردآوری داده‌ها به کمک دادگان این است که همیشه اطلاعات همه بخش‌ها در دسترس ما است.

(۱) صفر (۲) ۱ (۳) ۲ (۴) ۳

۳۹- در نمونه‌گیری طبقه‌ای اگر بخواهیم از ۵ گروه مشخص‌شده در جدول زیر، نمونه‌ای متناسب با اعضای هر گروه انتخاب کنیم، تعداد اعضای نمونه برابر کدام یک از عددهای زیر می‌تواند باشد؟

نام طبقه	A	B	C	D	E
تعداد اعضای طبقه	۱۴۳	۱۸۷	۲۰۹	۵۵	۲۵۳

(۱) ۱۱۰ (۲) ۱۲۱ (۳) ۱۴۳ (۴) ۱۵۴

۴۰- می‌خواهیم از میان ۳۰۰ داده، نمونه‌ای به اندازه ۵۰ به روش سامانمند انتخاب کنیم. اگر شماره ۲۹ آمین داده انتخاب‌شده ۱۷۳ باشد، شماره ۷ آمین داده انتخاب‌شده کدام است؟

(۱) ۳۵ (۲) ۴۱ (۳) ۴۷ (۴) ۵۳

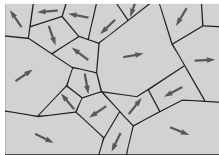
محل انجام محاسبات

فیزیک یازدهم

۴۱- دوقطبی‌های مغناطیسی کدام یک از مواد زیر در حضور میدان مغناطیسی خارجی قوی، خاصیت مغناطیسی ضعیف و موقت پیدا می‌کنند؟

- (۱) پلاتین (۲) نقره (۳) مس (۴) آهن

۴۲- شکل زیر، یک ماده مغناطیسی را در حضور یک میدان مغناطیسی خارجی نشان می‌دهد. نوع این ماده مغناطیسی کدام است و این ماده در چه شرایطی قرار دارد؟



- (۱) ماده فرومغناطیسی در حضور میدان مغناطیسی خارجی ضعیف
(۲) ماده پارامغناطیسی در حضور میدان مغناطیسی خارجی ضعیف
(۳) ماده فرومغناطیسی در حضور میدان مغناطیسی خارجی قوی
(۴) ماده پارامغناطیسی در حضور میدان مغناطیسی خارجی قوی

۴۳- چه تعداد از موارد زیر درست است؟

(الف) اتم‌ها یا مولکول‌های تشکیل‌دهنده مواد مغناطیسی مانند دوقطبی مغناطیسی رفتار می‌کنند.

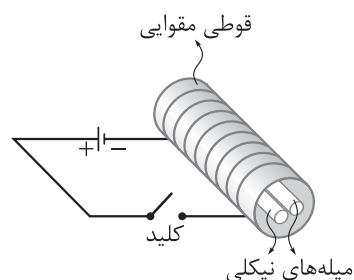
(ب) اتم‌های مواد پارامغناطیسی به طور ذاتی فاقد خاصیت مغناطیسی‌اند.

(پ) میدان مغناطیسی خارجی، می‌تواند سبب القای دوقطبی‌های مغناطیسی در مواد دیامغناطیسی شود.

(ت) در مواد فرومغناطیسی، برهم‌کنش‌های قوی بین دوقطبی‌های مغناطیسی موجب می‌شود که حتی در نبود میدان مغناطیسی خارجی، در ناحیه‌هایی، دوقطبی‌های آن، همسو شوند.

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴

۴۴- دو میله فلزی بلند از جنس نیکل، مطابق شکل زیر، درون سیم‌لوله‌ای که دور یک قوطی مقوایی پیچیده شده است، قرار دارند. با بستن و سپس بازشدن کلید این مدار، حرکت میله‌ها چگونه خواهد بود؟



(۱) ابتدا دور و سپس با بازشدن کلید، نزدیک می‌شوند.

(۲) دور شده و پس از بازشدن کلید در همان وضعیت باقی می‌مانند.

(۳) از درون سیم‌لوله خارج شده و پس از بازشدن کلید به محل قبل خود بازمی‌گردند.

(۴) از درون سیم‌لوله خارج شده و پس از بازشدن کلید در همان وضعیت باقی می‌مانند.

محل انجام محاسبات

۴۵- حلقه‌ای به شعاع 10 cm ، درون میدان مغناطیسی یکنواخت $B = 0.06\text{ T}$ قرار دارد و خطوط میدان با سطح حلقه، زاویه 30° می‌سازند. شار مغناطیسی‌ای که از سطح حلقه می‌گذرد، چند وبر است؟ ($\pi = 3$)

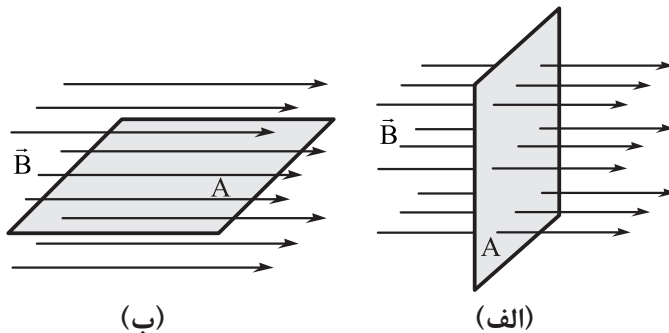
$$(2) \quad 9 \times 10^{-3}$$

$$(1) \quad 9 \times 10^{-4}$$

$$(4) \quad 9\sqrt{3} \times 10^{-3}$$

$$(3) \quad 9\sqrt{3} \times 10^{-4}$$

۴۶- مطابق شکل (الف)، سطح حلقه‌رسانایی به شکل مربع با ضلع 20 cm ، عمود بر میدان مغناطیسی یکنواختی قرار دارد. حلقه را می‌چرخانیم به طوری که مشابه شکل (ب)، سطح حلقه موازی با خط‌های میدان مغناطیسی شود، اگر در این چرخش، شار مغناطیسی گذرنده از حلقه به اندازه 1 mWb تغییر کند، اندازه میدان مغناطیسی چند گاوس است؟



$$(1) \quad 500$$

$$(2) \quad 250$$

$$(3) \quad 50$$

$$(4) \quad 25$$

۴۷- بردار میدان مغناطیسی یکنواختی در SI به صورت $\vec{B} = 0.8\vec{i} + 0.6\vec{j}$ است و حلقه‌ای به مساحت 500 cm^2 که سطح آن موازی با محور y و عمود بر محور x است، در این میدان قرار دارد. بدون تغییر در جهت میدان، اندازه آن را تقریباً چند تسلا تغییر دهیم تا شار مغناطیسی گذرنده از حلقه به 50 میلی‌وبر برسد؟

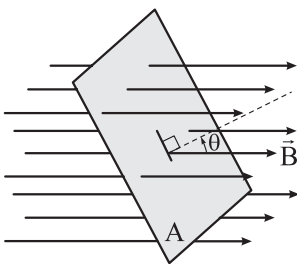
$$(2) \quad 0.26$$

$$(1) \quad 0.16$$

$$(4) \quad 0.4$$

$$(3) \quad 0.36$$

۴۸- در شکل زیر، قابی به مساحت $A = 40\text{ cm}^2$ در میدان مغناطیسی یکنواخت $B = 5 \times 10^{-2}\text{ T}$ قرار دارد. اگر در مدت زمان 20 ms زاویه θ از 37° به 53° برسد، بزرگی نیروی محرکه القایی در قاب چند ولت خواهد بود؟ ($\cos 53^\circ = 0.6$)



$$(1) \quad 4 \times 10^{-2}$$

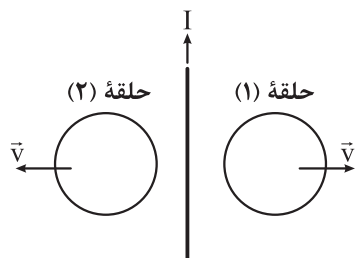
$$(2) \quad 2 \times 10^{-2}$$

$$(3) \quad 4 \times 10^{-3}$$

$$(4) \quad 2 \times 10^{-3}$$

محل انجام محاسبات

۴۹- در شکل زیر، دو حلقهٔ رسانا در نزدیکی یک سیم بلند حامل جریان ثابت I ، قرار دارند. این دو حلقه در جهت‌های نشان داده شده در حال دور شدن از سیم هستند، جهت جریان القایی در حلقه‌های (۱) و (۲)، به ترتیب از راست به چپ کدام است؟



(۱) ساعتگرد - ساعتگرد

(۲) پادساعتگرد - پادساعتگرد

(۳) ساعتگرد - پادساعتگرد

(۴) پادساعتگرد - ساعتگرد

۵۰- معادلهٔ شار مغناطیسی گذرنده از پیچه‌ای بر حسب زمان در SI به صورت $\Phi = t^2 - 6t + 8$ است. اگر بزرگی نیروی محرکهٔ القایی در حلقه در بازهٔ زمانی $t_1 = 3\text{ s}$ تا $t_2 = 5\text{ s}$ برابر 8 V باشد، تعداد حلقه‌های این پیچه، کدام است؟

(۴) ۸۰

(۳) ۵۰

(۲) ۴۰

(۱) ۲۰

۵۱- پیچه‌ای از ۲۰۰ حلقه تشکیل شده است؛ شار مغناطیسی گذرنده از این پیچه در مدتی مشخص از 0.15 Wb به 0.4 Wb می‌رسد. اگر در مدت تغییر شار مغناطیسی، بار الکتریکی 1 C در پیچه شارش پیدا کند، مقاومت الکتریکی پیچه چند اهم است؟

(۴) ۱۰

(۳) ۵

(۲) ۱

(۱) ۰/۵

۵۲- سطح حلقه‌های پیچه‌ای که دارای ۲۰۰ حلقه است، عمود بر میدان مغناطیسی یکنواختی به بزرگی 400 G قرار دارد. میدان مغناطیسی در مدت 4 ms تغییر می‌کند و به 800 G در خلاف جهت اولیه می‌رسد. اگر در این مدت، بزرگی نیروی محرکهٔ القایی متوسط در پیچه، 30 V باشد، مساحت هر حلقهٔ پیچه، چند سانتی‌متر مربع است؟

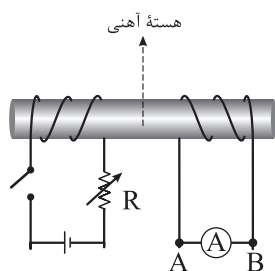
(۴) ۱۵۰

(۳) ۱۵

(۲) ۵۰

(۱) ۵

۵۳- در شکل زیر، کدام تغییرات سبب القای جریان الکتریکی در آمپرسنج از نقطهٔ A به نقطهٔ B می‌شود؟ (تغییر مقاومت رئوستا را در حالتی انجام می‌دهیم که کلید بسته است.)



(۱) بستن کلید یا کاهش مقاومت رئوستا

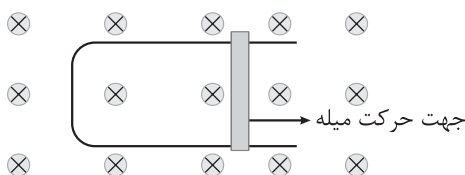
(۲) بستن کلید یا افزایش مقاومت رئوستا

(۳) باز کردن کلید یا کاهش مقاومت رئوستا

(۴) باز کردن کلید یا افزایش مقاومت رئوستا

محل انجام محاسبات

۵۴- در شکل زیر، سطح رسانای U شکل، عمود بر میدان مغناطیسی یکنواخت $B = 250 \text{ G}$ قرار دارد. میله با تندی ثابت در جهت نشان داده شده در حرکت است. اگر بزرگی نیروی محرکه القایی متوسط در قاب، 4 mV باشد، به ترتیب، آهنگ افزایش مساحت سطح این قاب چند سانتی متر مربع بر ثانیه و جریان القایی در قاب در چه جهتی است؟



(۱) - ساعتگرد

(۲) - پادساعتگرد

(۳) - ساعتگرد

(۴) - پادساعتگرد

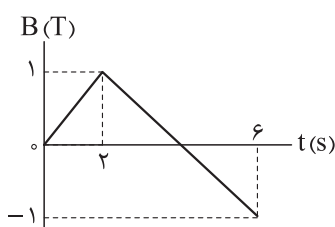
۵۵- یکای فرعی کدام کمیت، $\frac{\text{kg} \cdot \text{m}^2}{\text{A} \cdot \text{s}^3}$ است؟

(۲) آهنگ تغییر میدان مغناطیسی

(۱) میدان مغناطیسی

(۴) آهنگ تغییر شار مغناطیسی

(۳) شار مغناطیسی



۵۶- پیچه‌ای دارای ۵۰۰ حلقه و مساحت سطح هر حلقه آن 40 cm^2 است. پیچه، طوری در یک میدان مغناطیسی قرار گرفته است که خط‌های میدان، عمود بر سطح حلقه‌های پیچه‌اند. اگر نمودار تغییرات میدان مغناطیسی بر حسب زمان به شکل مقابل باشد، نیروی محرکه القایی متوسط در پیچه در بازه زمانی $t_1 = 1 \text{ s}$ تا $t_2 = 5 \text{ s}$ چند ولت است؟

(۴) ۱

(۳) ۵/۰

(۲) ۴/۰

(۱) صفر

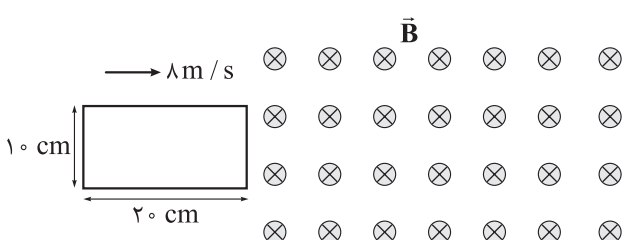
۵۷- میدان مغناطیسی به طور عمود از سطح قابی به مساحت 500 cm^2 و مقاومت الکتریکی $2 \text{ } \Omega$ می‌گذرد. میدان مغناطیسی با آهنگ چند گاوس بر ثانیه تغییر کند تا آهنگ تولید انرژی گرمایی در این قاب برابر 2 mW شود؟

(۴) ۴۰۰

(۳) ۸۰۰

(۲) ۴۰

(۱) ۸۰



۵۸- در شکل مقابل، قاب فلزی مستطیل شکل با تندی ثابت 8 m/s وارد میدان مغناطیسی یکنواخت و درون سوی $B = 0.5 \text{ T}$ می‌شود. اگر مقاومت الکتریکی قاب $0.5 \text{ } \Omega$ باشد، جریان الکتریکی القایی در قاب در حین ورود آن چند آمپر است؟

(۴) ۱۶

(۳) ۸

(۲) ۱/۶

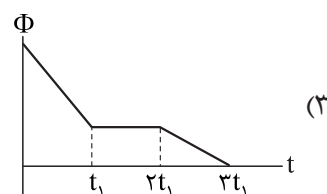
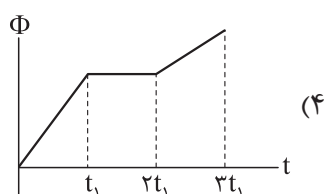
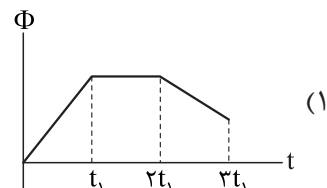
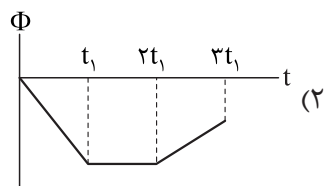
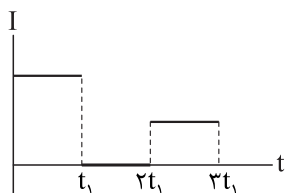
(۱) ۸/۰

محل انجام محاسبات



۵۹- نمودار جریان الکتریکی القایی در یک قاب رسانا بر حسب زمان به شکل زیر است. نمودار تغییرات شار مغناطیسی

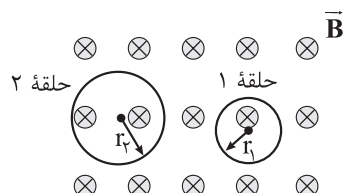
گذرنده از این قاب بر حسب زمان به صورت کدام شکل است؟



۶۰- از سیم‌های مسی کاملاً مشابه، دو حلقه به شعاع‌های r_1 و r_2 ساخته ایم. مطابق شکل، این دو حلقه را در میدان مغناطیسی

درون‌سوی $\vec{B}$ قرار می‌دهیم. اگر اندازه میدان مغناطیسی با آهنگ ثابتی افزایش یابد، جریان القایی در حلقه ۲، چهار برابر

جریان القایی در حلقه ۱ خواهد شد. کدام است $\frac{r_2}{r_1}$ ؟



(۲) ۴

(۱) ۲

(۴) ۱۶

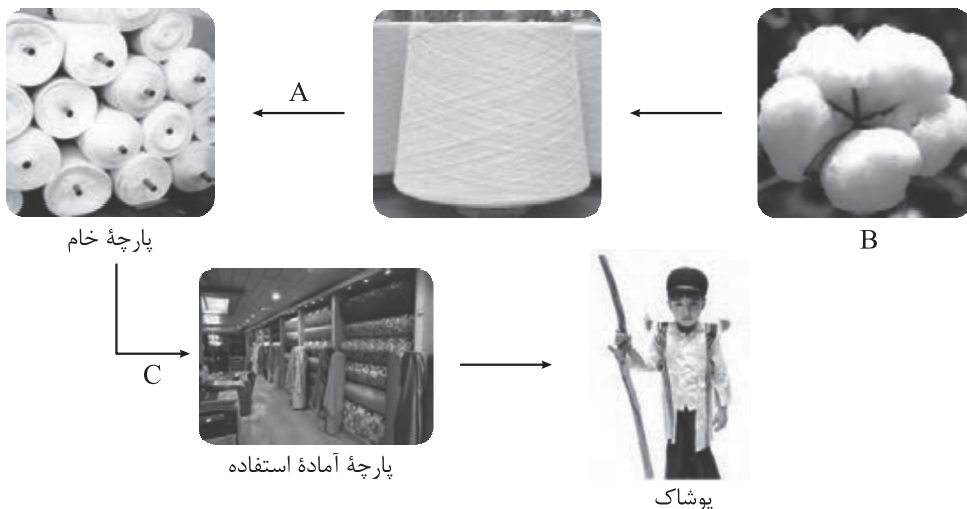
(۳) $2\sqrt{2}$

محل انجام محاسبات



شیمی یازدهم

۶۱- با توجه به شکل زیر، A، B و C به ترتیب کدام است؟



- (۱) بافندگی، الیاف، دوزندگی
(۲) بافندگی، الیاف، فراوری
(۳) ریسندگی، نخ، دوزندگی
(۴) ریسندگی، نخ، فراوری

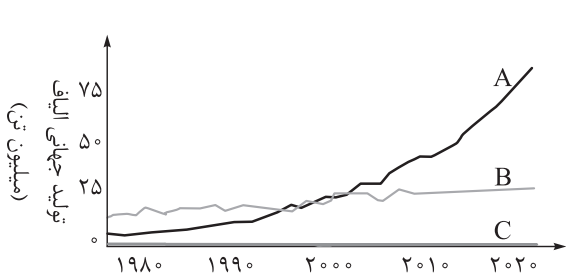
۶۲- کدام ماده درشت مولکول است، ولی پلیمر محسوب نمی‌شود؟

- (۱) گلوکز (۲) سلولز (۳) روغن زیتون (۴) نایلون

۶۳- کدام مورد را نمی‌توان به مونومر سازنده پلی‌سیانو اتن نسبت داد؟

- (۱) وجود پیوندهای یگانه، دوگانه و سه‌گانه در ساختار آن
(۲) داشتن شمار جفت الکترون ناپیوندی یکسان با آمونیاک
(۳) یکسان بودن مجموع شمار اتم‌های سازنده مولکول آن با متانول
(۴) وجود ۲۰ الکترون در ساختار لوویس آن

۶۴- با توجه به نمودار زیر که روند تولید الیاف (پلی‌استر، پشم و پنبه) در جهان را نشان می‌دهد، کدام گزینه درست است؟



- (۱) الیاف A و B برخلاف C، ساختگی هستند.
(۲) حدود نیمی از لباس‌های تولیدی در جهان از الیاف B است.
(۳) الیاف A همانند C، جزء نخستین پوشش‌های بشری بوده است.
(۴) امروزه بیشتر از ۵۰ درصد الیاف تولیدی در جهان از نوع B و C است.

محل انجام محاسبات

۶۵- اگر در جدول زیر، هر یک از موارد ستون A به یکی از موارد ستون B مرتبط باشد، کدام مورد در ستون B اضافه است؟

B	A
(a) پلی استیرن	الف) در تهیه پتو به کار می رود.
(b) تفلون	ب) در ساختار آن، علاوه بر اتم های کربن و هیدروژن، هالوژن نیز وجود دارد.
(c) پلی سیانواتن	پ) پلیمری سیرنشده به حساب می آید.
(d) پلی پروپن	ت) در واحد تکرارشونده آن، شمار اتم های هیدروژن، دو برابر کربن است.
(e) پلی وینیل کلرید	

(۱) a (۲) b (۳) e (۴) d

۶۶- چند مورد از مطالب زیر درست است؟

- در ساختار سلولز، پیوندهای کربن - کربن، عامل اتصال مولکول های گلوکز به یکدیگر است.
- پنبه علاوه بر تهیه لباس، در تهیه گاز استریل و تور ماهیگیری نیز کاربرد دارد.
- مونومر سازنده پلیمر سازنده بطری کدر شیر، اتان است.
- تفلون و پلی اتن برخلاف پروتئین، نشاسته و پشم، جزء پلیمرهای ساختگی هستند.

(۱) صفر (۲) ۲ (۳) ۱ (۴) ۳

۶۷- کدام مورد درست است؟

- (۱) $(s) \text{C}_2\text{H}_4 \rightarrow$ را در دستگاهی با عمل دمیدن هوا به ورقه های نازک پلاستیکی تبدیل می کنند.
- (۲) مولکول های سیکلوبوتان در شرایط معین می توانند کنار یکدیگر قرار بگیرند و پلیمری منعطف، شفاف و با استحکام بسیار بالا را ایجاد کنند.
- (۳) هر چه شمار شاخه های پلی اتن کم تر باشد، نیروی بین مولکولی وان دروالسی آن، قوی تر شده و استحکام مولکول افزایش می یابد.
- (۴) در روند تهیه پلیمر سازنده تانکرهای پلاستیکی، مونومرهای هیدروکربنی از کناره ها به یکدیگر افزوده شده و زنجیره های شاخه دار تولید می کنند.

۶۸- اگر شمار واحدهای تکرارشونده نوعی پلی پروپن، دو برابر نوعی پلی اتن و جرم مولی پلی اتن، ۱۴ کیلوگرم بر مول از پلی پروپن کم تر باشد، شمار اتم های کربن پلیمر سنگین تر در هر مولکول از آن کدام است؟ ($C = 12, H = 1: \text{g.mol}^{-1}$)

(۱) ۵۰۰ (۲) ۱۰۰۰ (۳) ۲۰۰۰ (۴) ۱۵۰۰

محل انجام محاسبات

۶۹- کدام گزینه از نظر درستی یا نادرستی، مشابه عبارت زیر است؟ ($C = 12, H = 1: g.mol^{-1}$)

«هر ترکیب آلی که در ساختار خود پیوند دوگانه داشته باشد، می تواند در واکنش پلیمری شدن شرکت کند.»

(۱) تعیین تعداد دقیق مونومرهای شرکت کننده در یک واکنش پلیمری شدن ممکن نیست.

(۲) پلیمرهای حاصل از واکنش بسپارش هیدروکربن ها، ترکیباتی سیرشده محسوب می شوند.

(۳) اتم کربن در پلی اتن همانند مونومر آن، ۴ پیوند اشتراکی برقرار می کند.

(۴) اگر نوعی پلی اتن دارای 10^4 واحد تکرارشونده باشد، جرم مولی آن 280 کیلوگرم بر مول است.

۷۰- مولکول استیرن در واکنش با مقدار کافی گاز هیدروژن به ترکیب سیرشده A تبدیل می شود. برای سوختن کامل

هر مول A، به چند مول گاز اکسیژن نیاز است؟

(۱) ۸

(۲) ۱۰

(۳) ۱۲

(۴) ۱۶

۷۱- فراورده آلی حاصل از واکنش 340 گرم آمونیاک با پروپن و اکسیژن را در واکنش پلیمری شدن شرکت می دهیم. اگر

در این فرایند، پلیمری با 2000 واحد تکرارشونده تولید شود، شمار مولکول های پلیمر حاصل کدام است؟

($N = 14, H = 1: g.mol^{-1}$)، بازده واکنش پلیمری شدن ۷۵٪ است.

(معادله واکنش موازنه شود.) $NH_3 + C_3H_6 + O_2 \rightarrow H_2O + C_3H_3N$

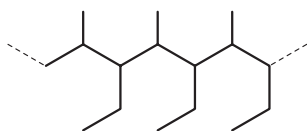
(۱) $6/02 \times 10^{23}$

(۲) $6/02 \times 10^{21}$

(۳) $4/515 \times 10^{21}$

(۴) $4/515 \times 10^{23}$

۷۲- مونومر سازنده پلیمر زیر با کدام ترکیب، ایزومر است؟



(۱) ۲ - پنتین

(۲) سیکلوپنتان

(۳) ۲ - بوتن

(۴) سیکلوهپتان

۷۳- چند مورد از مطالب زیر درباره پلی اتن سنگین و سبک، نادرست است؟

(الف) چگالی پلی اتن سنگین برخلاف پلی اتن سبک، از آب بیشتر است.

(ب) از پلی اتن سبک، در ساخت کیسه پلاستیکی موجود در مغازه ها و فروشگاه ها و دبه های آب استفاده می شود.

(پ) انعطاف پذیری پلی اتن سبک بیشتر از پلی اتن سنگین است.

(ت) درصد جرمی کربن در هر دو پلیمر، با یکدیگر برابر است.

(۱) ۱

(۲) ۲

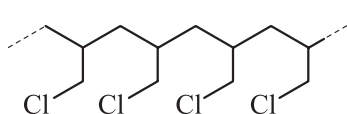
(۳) ۳

(۴) ۴

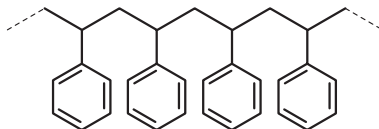
محل انجام محاسبات

۷۴- کدام گزینه درباره پلیمر سازنده سرنگ نادرست است؟

- (۱) در ساختار آن با m واحد تکرارشونده، $6m$ پیوند $C-H$ یافت می‌شود.
- (۲) شمار پیوندهای اشتراکی در ساختار مونومر سازنده آن، کم‌تر از وینیل کلرید است.
- (۳) در ساختار مونومر سازنده آن همانند واحد تکرارشونده، پیوند یگانه کربن - کربن یافت می‌شود.
- (۴) شمار اتم‌های کربن مونومر سازنده آن، کم‌تر از نصف شمار اتم‌های هیدروژن مونومر پلیمر سازنده ظروف یکبار مصرف است.
- ۷۵- کدام موارد از مطالب داده‌شده درباره ترکیب‌های زیر، درست است؟



ترکیب (۲)



ترکیب (۱)

الف) مونومر سازنده ترکیب (۱)، هیدروکربنی آروماتیک با فرمول مولکولی C_8H_8 است.

ب) از ترکیب (۲) در ساخت کیسه خون استفاده می‌شود.

پ) تعداد پیوندهای اشتراکی یگانه در ساختار مونومر سازنده ترکیب (۱)، سه برابر ترکیب (۲) است.

ت) نوع نیروی بین مولکولی در ترکیب (۱) همانند نفتالن، وان دروالسی است.

(۲) الف، ت

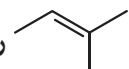
(۱) الف، ب، ت

(۴) ب، پ

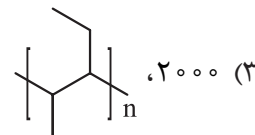
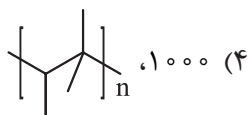
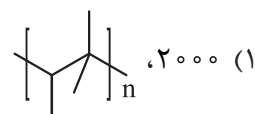
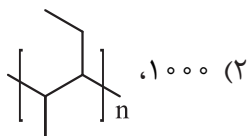
(۳) ب، پ، ت

۷۶- کدام گزینه نادرست است؟

- (۱) اگر به جای حلقه بنزن پلی‌استیرن، گروه متیل قرار دهیم، پلیمری تشکیل می‌شود که در تهیه سرنگ کاربرد دارد.
- (۲) تفلون از نظر شیمیایی بی‌اثر است و با مواد شیمیایی واکنش نمی‌دهد.
- (۳) تترافلوئورو اتن نوعی گاز سردکننده است که پلیمر حاصل از آن در حلال‌های آلی حل نمی‌شود و نجسب است.
- (۴) تبدیل اتن گازی به پلی‌اتن جامد که در دما و فشار بالا انجام می‌شود، نوعی فرایند چگالش است.

۷۷- اگر $3/01 \times 10^{26}$ مولکول از ترکیب  را تحت فشار و گرما به پلیمر تبدیل کنیم، $15/05 \times 10^{22}$ مولکول

پلیمری یکسان با n واحد تکرارشونده تولید می‌شود. n و فرمول ساختاری پلیمر به کدام صورت است؟



محل انجام محاسبات



۷۸- درستی یا نادرستی کدام گزینه با دیگر گزینه‌ها متفاوت است؟ ($H = 1, C = 12, Cl = 35.5 : g.mol^{-1}$)

- (۱) همه درشت‌مولکول‌ها، نیروهای بین مولکولی قوی دارند و در دمای اتاق به حالت جامدند.
 (۲) بالابودن جرم مولی فراورده واکنش پلیمری‌شدن، بیانگر این موضوع است که شمار اتم‌های سازنده هر مولکول مونومر، بسیار زیاد است.

(۳) در 100° گرم پلی‌وینیل کلرید، $56/8$ گرم کلر وجود دارد.

(۴) ۱ - بوتن و ۲ - بوتن ایزومر یکدیگرند و ساختار پلیمر حاصل از بسپارش آن‌ها یکسان است.

۷۹- مخلوطی گازی به حجم $44/8$ لیتر از مونومر سازنده نخ دندان و کیسه خون در شرایط STP را تحت شرایط مناسب به پلیمر تبدیل می‌کنیم. اگر جرم تفلون به‌دست آمده برابر 100 گرم باشد، مجموع جرم هالوژن‌ها در فراورده‌های نهایی، بر حسب گرم کدام است؟ ($Cl = 35.5, F = 19, C = 12, H = 1 : g.mol^{-1}$)

(۲) ۷۱

(۱) $35/5$

(۴) $106/5$

(۳) $111/5$

۸۰- چگالی یک آلکن گازی در شرایط استاندارد، برابر با $2/5$ میلی‌گرم بر سانتی‌متر مکعب است. اگر این آلکن در شرایط مناسب به پلیمر تبدیل شود، از سوختن کامل $2/8$ کیلوگرم از پلیمر حاصل، چند مول گاز کربن دی‌اکسید تولید خواهد شد؟ ($H = 1, C = 12 : g.mol^{-1}$)

(۴) ۲۸۰

(۳) ۲۰۰

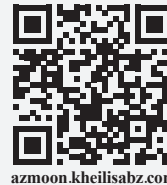
(۲) ۱۴۰

(۱) ۱۰۰

محل انجام محاسبات

- مهم ترین ویژگی های آزمون های خیلی سبز در پایه های دهم و یازدهم:
- ۱- برگزاری دست کم یک آزمون در ماه بر اساس روال تدریس در مدرسه
 - ۲- برگزاری آزمون های ویژه برای زمان های خاص (میان ترم، ترم، پس از عیدو...)
 - ۳- امکان جبران عقب ماندگی ها یا دوره مطالب برای تثبیت آن ها

پاسخ نامه تشریحی آزمون را ساعت ۱۶ از صفحه شخصی خودتان در سایت آزمون خیلی سبز دریافت کنید.



azmoon.kheilisabz.com

اساتید، مشاوران و دانش آموزان گرامی؛
نظرات، پیشنهادات، انتقادات و بازخوردهای خود نسبت به سؤالات این آزمون را می توانید
از طریق آیدی @Kheilisabz_edit در همه پیام رسان ها با ما به اشتراک بگذارید.

پاسخ نامه آزمون آزمایشی خلی سبز



مرحله دهم

پایه یازدهم

سال تحصیلی ۱۴۰۳-۰۴ تاریخ برگزاری: ۲۹/فروردین/۱۴۰۴

نام درس	طراحان به ترتیب حروف الفبا
حسابان	فرشاد حسن زاده - عادل حسینی - مصطفی دیداری - محمدرضا راسخ - مجید رفعتی علی شهرابی - محمد گودرزی - میلاد منصوری - حسین نادری - محمدسجاد نقیه - جهانبخش نیکنام
هندسه	امیرحسین ابومحبوب - محمدطاهر شعاعی - حسین هاشمی طاهری - صبا مهدوی
آمار و احتمال	مسعود شفیعی - عطا صادقی - سروش موئینی
فیزیک	یاشار انگوتی - نوید شاهی
شیمی	یاسر عبداللہی - امیرحسین مسلمی

نام درس	مستقل درس	گزینشگر	مؤلف پاسخ نامه	کارشناسان علمی	ویراستاران به ترتیب حروف الفبا
حسابان	محمدسجاد نقیه	محمدسجاد نقیه	منصور زرکش اصفهانی	رامین آزادی محمد مصطفی ابراهیمی فرشاد حسن زاده عادل حسینی	سهیل تقی زاده محمد خندان
هندسه	امیرحسین ابومحبوب	امیرحسین ابومحبوب	فرزانه خاکپاش	محمدرضا حسینی فرد ماهان فنی فر	الما احسانیان زهره جالینوسی منصور زرکش اصفهانی ابوالفضل ناصری
آمار و احتمال	مسعود شفیعی	مسعود شفیعی	علیرضا کاظمی بقا	امیرحسین ابومحبوب سعید قندچی علیرضا کاظمی بقا	منصور زرکش اصفهانی فرزانه خاکپاش ماهان فنی فر
فیزیک	نوید شاهی	یاشار انگوتی	علیرضا عبداللہی	سبحان کاظمی علیرضا عبداللہی غزل هاشمی	سپهر صادقی مریم گلی حسنلو امیر محمودی انزایی ماهان فنی فر
شیمی	یاسر عبداللہی	امیرحسین مسلمی	امیرحسین مسلمی	رامین آزادی یاسر عبداللہی حمید ذبحی	متین قنبری آرمین عظیمی

سرپرست محتوایی: فاطمه آقاجانیپور



Azmoon.kheilisabz.com

آزمون آزمائشی خلی سبز

سرپرست تولید	الناز علی یاری زاده
ویراستاران فنی	نیلوفر اعتمادی - نیوشا پیمان - راضیه سادات خلدی نسب زهره صفری - فاطمه علی اکبری - محیا غنی فرد زهره فرهادی مهر - محمد محمودی - مریم مسلمی زاده نادره نازآوری - ساعده نمازی
رسم	مونا آندستا ندا فخاری سارا گنجی آزادپور
صفحه آرایی	صدف امام - مریم حسین زاده سپیده سخائی - الهام سهرابی - طاهره صادق نژاد مائده صبری - نیلوفر فرخجسته - مهدیه گل پور دریا لطفی - لیلا نعمت پور



حاصل عبارت $\frac{\sin 57^\circ}{\sin 19^\circ} - \frac{\cos 57^\circ}{\cos 19^\circ}$ کدام است؟

۱

۲ (۴)

۳ (۱)

۲ (۲)

۱ (۱)

پاسخ: گزینه ۲

مخرج مشترک بگیر و از فرمول‌های مثلثاتی برای ساده‌سازی استفاده کن.

Hint

فرمول بسط سینوس و کسینوس جمع یا تفاضل دو زاویه و سینوس زاویه 2α :

درجی Box

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin \alpha \cos \beta \pm \cos \alpha \sin \beta \Rightarrow \sin 2\theta = 2 \sin \theta \cos \theta$$

$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos \alpha \cos \beta \mp \sin \alpha \sin \beta$$

پاسخ خیلی تشریحی ✓ گام اول: مخرج مشترک گیری می‌کنیم:

$$\frac{\sin 57^\circ \cos 19^\circ - \cos 57^\circ \sin 19^\circ}{\sin 19^\circ \cos 19^\circ}$$

گام دوم: از رابطه گفته شده در درس باکس استفاده می‌کنیم و صورت را بازنویسی می‌کنیم:

$$\frac{\sin(57^\circ - 19^\circ)}{\sin 19^\circ \cos 19^\circ}$$

گام سوم: از رابطه $\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$ مخرج را به شکل $\frac{1}{2} \sin 38^\circ$ می‌نویسیم و جواب نهایی را به دست می‌آوریم:

$$\frac{\sin 38^\circ}{\frac{1}{2} \sin 38^\circ} = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2$$

۲ اگر $a - b = \pi - a$ باشد، حاصل $\cot a - \cot b$ کدام است؟

$$\begin{aligned} & -\frac{1}{\sin b} \quad (۲) \\ & \frac{1}{\sin 2b} \quad (۴) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & -\frac{1}{\sin a} \quad (۱) \\ & \frac{1}{\sin 2a} \quad (۳) \end{aligned}$$

پاسخ: گزینه ۲

Hint $\cot$ را به صورت $\frac{\cos}{\sin}$ بنویس و از اتحادهای مجموع یا تفاضل کمان استفاده کن.

درس Box

روابط مثلثاتی قرینه یک زاویه و دو زاویه مکمل:

$$\begin{aligned} \sin(-\alpha) &= -\sin \alpha & \sin(\pi - \alpha) &= \sin \alpha \\ \cos(-\alpha) &= \cos \alpha & \cos(\pi - \alpha) &= -\cos \alpha \\ \tan(-\alpha) &= -\tan \alpha & \tan(\pi - \alpha) &= -\tan \alpha \\ \cot(-\alpha) &= -\cot \alpha & \cot(\pi - \alpha) &= -\cot \alpha \end{aligned}$$

پاسخ خیلی تشریحی ✓ گام اول: به جای $\cot$ ها، نسبت $\frac{\cos}{\sin}$ را قرار می دهیم و مخرج مشترک می گیریم:

$$\frac{\cos a}{\sin a} - \frac{\cos b}{\sin b} = \frac{\cos a \sin b - \cos b \sin a}{\sin a \sin b}$$

گام دوم: صورت را به $\sin(b - a)$ تبدیل می کنیم و زاویه آن را بر حسب π می نویسیم:

$$\frac{\sin(b - a)}{\sin a \sin b} \stackrel{a - b = \pi - a}{=} \frac{\sin(-(\pi - a))}{\sin a \sin b}$$

گام سوم: از روابط درس باکس استفاده می کنیم و پاسخ مسئله را به دست می آوریم:

$$\frac{\sin(-(\pi - a))}{\sin a \sin b} \stackrel{\text{روابط زاویه قرینه}}{=} \frac{-\sin(\pi - a)}{\sin a \sin b} \stackrel{\text{روابط زاویه مکمل}}{=} \frac{-\sin a}{\sin a \sin b} = \frac{-1}{\sin b}$$

۳ اگر $0 < \theta < \frac{\pi}{4}$ و $\cos \theta + \sqrt{3} \sin \theta = \sqrt{2}$ باشد، مقدار $\sin 2\theta$ کدام است؟

۱/۴ (۴)

۱ (۳)

$\frac{\sqrt{3}}{2}$ (۲)

$\frac{\sqrt{2}}{2}$ (۱)

پاسخ: گزینه ۲

پاسخ خیلی تشریحی ✓ گام اول: رابطه مفروض سؤال را به صورت زیر بازنویسی می‌کنیم:

$$\cos \theta + \sqrt{3} \sin \theta = 2 \left(\underbrace{\frac{1}{2}}_{\sin \frac{\pi}{6}} \cos \theta + \underbrace{\frac{\sqrt{3}}{2}}_{\cos \frac{\pi}{6}} \sin \theta \right) = 2 \sin \left(\frac{\pi}{6} + \theta \right) = \sqrt{2} \Rightarrow \sin \left(\frac{\pi}{6} + \theta \right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

گام دوم: با توجه به این که θ حاده است، داریم:

$$\begin{cases} \frac{\pi}{6} + \theta = \frac{\pi}{4} \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{12} \\ \frac{\pi}{6} + \theta = \frac{3\pi}{4} \Rightarrow \theta = \frac{5\pi}{12} \notin \left(0, \frac{\pi}{4} \right) \end{cases} \text{ غ.ق.ق.}$$

در نتیجه $\sin 2\theta$ به سادگی به دست می‌آید:

$$\sin 2\theta = \sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$$

۴ حاصل $\sin 15^\circ + \cos 15^\circ$ کدام است؟

۴

$$\frac{1}{\sqrt{3}} \quad (۴)$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \quad (۳)$$

$$\sqrt{\frac{2}{3}} \quad (۲)$$

$$\sqrt{\frac{3}{2}} \quad (۱)$$

پاسخ: گزینه ۱

Hint $\sin 15^\circ + \cos 15^\circ$ را مساوی A در نظر بگیر و دو طرف را به توان ۲ برسان. (خواست باشد در آخر از A^2 جذر بگیری).

پاسخ خیلی تشریحی ✓ گام اول: $\sin 15^\circ + \cos 15^\circ$ را مساوی A در نظر بگیرد:

$$A = \sin 15^\circ + \cos 15^\circ$$

گام دوم: دو طرف را به توان ۲ می‌رسانیم:

$$A^2 = \sin^2 15^\circ + \cos^2 15^\circ + 2 \sin 15^\circ \cos 15^\circ = 1 + \sin 2(15^\circ) = 1 + \sin 30^\circ$$

$$\Rightarrow A^2 = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$$

گام سوم: از A^2 جذر می‌گیریم؛ دقت کنید که A عددی مثبت است، چون هر دو مقدار $\sin 15^\circ$ و $\cos 15^\circ$ مثبت‌اند.

$$A = \sqrt{\frac{3}{2}}$$

اتحادهای جانبی زیر را داریم که از دل اتحاد مجموع و تفاضل کمان به دست می‌آید:

$$\cos \theta + \sin \theta = \sqrt{2} \sin\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2} \cos\left(\theta - \frac{\pi}{4}\right)$$

$$\cos \theta - \sin \theta = \sqrt{2} \sin\left(\frac{\pi}{4} - \theta\right) = \sqrt{2} \cos\left(\frac{\pi}{4} + \theta\right)$$

پس داریم:

$$\sin 15^\circ + \cos 15^\circ = \sqrt{2} \sin(15^\circ + 45^\circ) = \sqrt{2} \sin 60^\circ = \sqrt{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{\frac{3}{2}}$$

به‌چور دیگه

اگر $\tan x + \cot x = 6$ باشد، مقدار $\sin(x + \frac{\pi}{4})$ کدام می تواند باشد؟

$$\frac{\sqrt{6}}{6} \quad (4)$$

$$\frac{\sqrt{6}}{3} \quad (3)$$

$$\frac{\sqrt{3}}{3} \quad (2)$$

$$\frac{\sqrt{6}}{2} \quad (1)$$

پاسخ: گزینه ۳

از رابطه $\tan \alpha + \cot \alpha = \frac{2}{\sin 2\alpha}$ استفاده کن.

Hint

درس Box

حاصل جمع تانژانت و کتانژانت یک زاویه برابر است با دو برابر معکوس سینوس دو برابر آن زاویه:

$$\tan \alpha + \cot \alpha = \frac{2}{\sin 2\alpha}$$

پاسخ خیلی تشریحی ✓ گام اول: از رابطه داده شده مقدار $\sin 2x$ را به دست می آوریم:

$$\frac{2}{\sin 2x} = 6 \Rightarrow \sin 2x = \frac{1}{3}$$

گام دوم: باز شده $\sin(x + \frac{\pi}{4})$ را می نویسیم و مساوی A قرار می دهیم:

$$\sin(x + \frac{\pi}{4}) = \frac{\sqrt{2}}{2}(\sin x + \cos x) = A$$

گام سوم: طرفین رابطه آخر را به توان ۲ می رسانیم و از رابطه $(\sin x + \cos x)^2 = 1 + \sin 2x$ استفاده می کنیم:

$$A^2 = \frac{1}{2}(1 + \sin 2x) = \frac{1}{2}(1 + \frac{1}{3}) = \frac{1}{2}(\frac{4}{3}) = \frac{2}{3}$$

گام چهارم: از A^2 جذر می گیریم:

$$A^2 = \frac{2}{3} \Rightarrow A = \pm \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \pm \frac{\sqrt{6}}{3}$$

۶ اگر $\Delta \sin \alpha = \sin(\alpha + 2\beta)$ باشد، مقدار عبارت تعریف شده $\tan(\alpha + \beta)$ کدام است؟

(۲) $\frac{3}{4} \cot \beta$

(۱) $\frac{3}{4} \cot \alpha$

(۴) $\frac{3}{4} \tan \beta$

(۳) $\frac{3}{4} \tan \alpha$

پاسخ: گزینه (۴)

پاسخ خیلی تشریحی ✓ گام اول: $\alpha + 2\beta$ را به صورت $(\alpha + \beta) + \beta$ و α را به صورت $(\alpha + \beta) - \beta$ می‌نویسیم:

$$\Delta \sin[(\alpha + \beta) - \beta] = \sin[(\alpha + \beta) + \beta]$$

و بسط آن‌ها را می‌نویسیم:

$$\Delta \sin(\alpha + \beta) \cos \beta - \Delta \cos(\alpha + \beta) \sin \beta = \sin(\alpha + \beta) \cos \beta + \cos(\alpha + \beta) \sin \beta$$

گام دوم: حالا عبارت‌های متشابه را کنار هم دیگر می‌نویسیم:

$$\Rightarrow 4 \sin(\alpha + \beta) \cos \beta = 6 \cos(\alpha + \beta) \sin \beta$$

و با تقسیم طرفین تساوی بالا بر $4 \cos(\alpha + \beta) \cos \beta$ داریم:

$$\frac{4 \sin(\alpha + \beta) \cos \beta}{4 \cos(\alpha + \beta) \cos \beta} = \frac{6 \cos(\alpha + \beta) \sin \beta}{4 \cos(\alpha + \beta) \cos \beta} \Rightarrow \tan(\alpha + \beta) = \frac{3}{2} \tan \beta$$

۷ اگر انتهای کمان α در ناحیه دوم دایره مثلثاتی و $\sin \alpha = \frac{1}{3}$ باشد، مقدار $\sin^2(\alpha + \frac{\pi}{8})$ کدام است؟

- (۱) $\frac{10 - \sqrt{2}}{18}$ (۲) $\frac{10 - \sqrt{6}}{18}$
(۳) $\frac{10 - \sqrt{7}}{9}$ (۴) $\frac{10 - 2\sqrt{2}}{36}$

پاسخ: گزینه ۲

Hint از رابطه $\sin^2 \alpha = \frac{1 - \cos 2\alpha}{2}$ استفاده کن.

پاسخ خیلی تشریحی ✓ **گام اول:** با توجه به این که α در ناحیه دوم می باشد، مقدارهای $\cos \alpha$ ، $\sin 2\alpha$ و $\cos 2\alpha$ را محاسبه می کنیم:

$$\cos \alpha = -\sqrt{1 - \sin^2 \alpha} = -\sqrt{1 - \frac{1}{9}} = -\frac{2\sqrt{2}}{3}$$

$$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha = 2\left(\frac{1}{3}\right)\left(-\frac{2\sqrt{2}}{3}\right) = -\frac{4\sqrt{2}}{9}$$

$$\cos 2\alpha = 1 - 2 \sin^2 \alpha = 1 - 2\left(\frac{1}{9}\right) = 1 - \frac{2}{9} = \frac{7}{9}$$

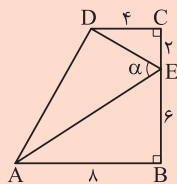
گام دوم: از فرمول $\sin^2 \alpha = \frac{1 - \cos 2\alpha}{2}$ استفاده کرده و صورت کسر را با استفاده از بسط مجموع دو زاویه، بسط می دهیم:

$$\sin^2\left(\alpha + \frac{\pi}{8}\right) = \frac{1 - \cos\left[2\left(\alpha + \frac{\pi}{8}\right)\right]}{2} = \frac{1 - \cos\left(2\alpha + \frac{\pi}{4}\right)}{2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\left(\cos 2\alpha \cos \frac{\pi}{4} - \sin 2\alpha \sin \frac{\pi}{4}\right)$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{2}}{4}(\cos 2\alpha - \sin 2\alpha)$$

گام سوم: مقدارهای به دست آمده در گام اول را جای گذاری می کنیم:

$$= \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{2}}{4}\left(\frac{7}{9} + \frac{4\sqrt{2}}{9}\right) = \frac{10 - 2\sqrt{2}}{36}$$



$$\frac{\sqrt{5}}{5} \quad (2)$$

$$\frac{\sqrt{3}}{3} \quad (4)$$

$$\frac{1}{3} \quad (1)$$

$$\frac{\sqrt{2}}{2} \quad (3)$$

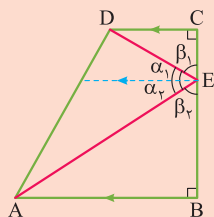
با توجه به شکل مقابل، مقدار $\cos \alpha$ کدام است؟

پاسخ: گزینه ۲

Hint را به دو زاویه تبدیل کن و از بسط $\cos(\alpha_1 + \alpha_2)$ استفاده کن.

نکته اگر $\alpha + \beta = \frac{\pi}{2}$ باشد، آن گاه:

$$\begin{aligned} \sin \alpha &= \cos \beta & \tan \alpha &= \cot \beta \\ \cos \alpha &= \sin \beta & \cot \alpha &= \tan \beta \end{aligned}$$



پاسخ خیلی تشریحی ✓ **گام اول:** از نقطه E یک خط موازی دو قاعده رسم می کنیم و α را به دو زاویه تبدیل می کنیم:

گام دوم: حاصل $\cos \alpha$ برابر می شود با:

$$\cos(\alpha) = \cos(\alpha_1 + \alpha_2) = \cos \alpha_1 \cos \alpha_2 - \sin \alpha_1 \sin \alpha_2 \quad (*)$$

گام سوم: طول اضلاع AE و DE را محاسبه می کنیم:

$$AE = \sqrt{36 + 64} = \sqrt{100} = 10$$

$$DE = \sqrt{16 + 4} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$$

گام چهارم: با توجه به شکل مشخص است که $\alpha_1 + \beta_1 = \frac{\pi}{2}$ و $\alpha_2 + \beta_2 = \frac{\pi}{2}$ ، بنابراین با استفاده از نکته، چهار مقدار مورد نیاز در عبارت (*) را به دست می آوریم:

$$\cos \alpha_1 = \sin \beta_1 = \frac{4}{2\sqrt{5}} ; \quad \sin \alpha_1 = \cos \beta_1 = \frac{2}{2\sqrt{5}}$$

$$\cos \alpha_2 = \sin \beta_2 = \frac{8}{10} ; \quad \sin \alpha_2 = \cos \beta_2 = \frac{6}{10}$$

گام پنجم: مقدار $\cos(\alpha_1 + \alpha_2)$ را به دست می آوریم:

$$\cos(\alpha_1 + \alpha_2) = \cos \alpha_1 \cos \alpha_2 - \sin \alpha_1 \sin \alpha_2 = \frac{32}{20\sqrt{5}} - \frac{12}{20\sqrt{5}} = \frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5}$$

در تساوی $\frac{\sin 5^\circ}{\sqrt{2+4\sin 2^\circ \cos 2^\circ}} + \cos 25^\circ = k \sin 7^\circ$ مقدار k کدام است؟

$$\frac{\sqrt{2}}{2} \quad (2)$$

$$\sqrt{2} \quad (1)$$

$$\sqrt{3} \quad (4)$$

$$2 \quad (3)$$

پاسخ: گزینه ۱

پاسخ خیلی تشریحی ✓ گام اول: به جای $\sin 2^\circ \cos 2^\circ$ عبارت $\frac{1}{2} \sin 4^\circ$ قرار می‌دهیم و سپس به جای $\sin 4^\circ$ ، $\cos 5^\circ$ می‌گذاریم:

$$2 + 4 \sin 2^\circ \cos 2^\circ = 2 + 2 \sin 4^\circ = 2 + 2 \cos 5^\circ = 2(1 + \cos 5^\circ) = 4 \cos^2 25^\circ$$

گام دوم: پس داریم:

$$\frac{\sin 5^\circ}{\sqrt{2+4\sin 2^\circ \cos 2^\circ}} = \frac{2 \sin 25^\circ \cos 25^\circ}{2 \cos 25^\circ} = \sin 25^\circ$$

$$\Rightarrow \frac{\sin 5^\circ}{\sqrt{2+4\sin 2^\circ \cos 2^\circ}} + \cos 25^\circ = \sin 25^\circ + \cos 25^\circ$$

گام سوم: و با استفاده از اتحاد $\sin \theta + \cos \theta = \sqrt{2} \sin(\theta + 45^\circ)$ ، می‌توانیم بنویسیم:

$$\sin 25^\circ + \cos 25^\circ = \sqrt{2} \sin(25^\circ + 45^\circ) = \sqrt{2} \sin 70^\circ \Rightarrow k = \sqrt{2}$$

۱۰ اگر $x + y = \frac{\pi}{3}$ باشد، بیشترین مقدار عبارت $\cos^2 x + \cos^2 y$ کدام است؟

- (۱) $\frac{3}{4}$ (۲) $\frac{4}{3}$ (۳) $\frac{2+\sqrt{3}}{4}$ (۴) $\frac{1+\sqrt{2}}{3}$

پاسخ: گزینه ۱

پاسخ خیلی تشریحی ✓ گام اول: کمان y را بر حسب کمان x می‌نویسیم:

$$x + y = \frac{\pi}{3} \Rightarrow y = \frac{\pi}{3} - x$$

$$\Rightarrow M = \cos^2 x + \cos^2 y = \cos^2 x + \cos^2 \left(\frac{\pi}{3} - x \right)$$

گام دوم: از طرفی بسط $\cos \left(\frac{\pi}{3} - x \right)$ به صورت زیر است:

$$\cos \left(\frac{\pi}{3} - x \right) = \cos \frac{\pi}{3} \cos x + \sin \frac{\pi}{3} \sin x = \frac{1}{2} \cos x + \frac{\sqrt{3}}{2} \sin x$$

$$\Rightarrow \cos^2 \left(\frac{\pi}{3} - x \right) = \left(\frac{1}{2} \cos x + \frac{\sqrt{3}}{2} \sin x \right)^2 = \frac{1}{4} \cos^2 x + \frac{3}{4} \sin^2 x + \frac{\sqrt{3}}{2} \sin 2x$$

گام سوم: پس داریم:

$$M = \cos^2 x + \frac{1}{4} \cos^2 x + \frac{3}{4} \sin^2 x + \frac{\sqrt{3}}{2} \sin 2x = \frac{5}{4} \cos^2 x + \frac{3}{4} \sin^2 x + \frac{\sqrt{3}}{2} \sin 2x$$

حالا به جای $\cos^2 x$ از $\frac{1 + \cos 2x}{2}$ و به جای $\sin^2 x$ از $\frac{1 - \cos 2x}{2}$ استفاده می‌کنیم:

$$\Rightarrow M = \frac{5}{4} \left(\frac{1 + \cos 2x}{2} \right) + \frac{3}{4} \left(\frac{1 - \cos 2x}{2} \right) + \frac{\sqrt{3}}{2} \sin 2x$$

$$\Rightarrow M = 1 + \frac{\cos 2x + \sqrt{3} \sin 2x}{2}$$

گام چهارم: عبارت $\cos 2x + \sqrt{3} \sin 2x$ را به صورت زیر ساده می‌کنیم:

$$\cos 2x + \sqrt{3} \sin 2x = 2 \left(\underbrace{\frac{1}{2}}_{\cos \frac{\pi}{3}} \cos 2x + \underbrace{\frac{\sqrt{3}}{2}}_{\sin \frac{\pi}{3}} \sin 2x \right) = 2 \cos \left(2x - \frac{\pi}{3} \right)$$

گام پنجم: داریم:

$$M = 1 + \frac{1}{2} \left(2 \cos \left(2x - \frac{\pi}{3} \right) \right) \Rightarrow M = 1 + \cos \left(2x - \frac{\pi}{3} \right)$$

بیشترین مقدار این عبارت برابر $\frac{3}{2} = 1 + \frac{1}{2}$ است.

در شکل مقابل، هر بار وسط اضلاع مربع را به هم وصل می‌کنیم و بخشی از مربع ایجاد شده را رنگ می‌کنیم. اگر این فرایند را همواره برای مربع‌های جدید انجام دهیم، مجموع مساحت بخش‌های رنگ‌شده، چه کسری از مساحت مربع اولیه خواهد شد؟



$$\frac{1}{3} \quad (۲)$$

$$\frac{1}{12} \quad (۱)$$

$$\frac{7}{12} \quad (۴)$$

$$\frac{1}{4} \quad (۳)$$

پاسخ: گزینه ۳

دنباله مساحت‌های رنگی را بنویس (البته با دقت).

Hint

حد مجموع جملات دنباله هندسی از رابطه زیر به دست می‌آید:

درس Box

$$S_n = \frac{a_1}{1-q} \quad \text{یا} \quad S_n = \frac{a_1}{1-r}$$

در هر مربع $\frac{1}{8}$ مساحت آن را رنگ می‌کنیم. مساحت مربع‌ها به ترتیب a^2 ، $\frac{a^2}{3}$ ، $\frac{a^2}{4}$ و ... است، پس دنباله مساحت مثلث‌های

پاسخ خیلی تشریحی

$$\frac{a^2}{8}, \frac{a^2}{16}, \dots$$

رنگی عبارت‌اند از:

این دنباله با جمله اول $\frac{a^2}{8}$ و قدرنسبت $\frac{1}{2}$ ، هندسی است و طبق درس باکس داریم:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = \frac{\frac{a^2}{8}}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{1}{4} a^2$$

مجموعه $(2-x, 4-x) \cup (2x, x+5)$ یک همسایگی محذوف x است. مجموع مقادیر ممکن برای x کدام است؟

$$\frac{37}{6} \quad (4)$$

$$\frac{7}{2} \quad (3)$$

$$\frac{25}{6} \quad (2)$$

$$\frac{8}{3} \quad (1)$$

پاسخ: گزینه ۴

پاسخ خیلی تشریحی ✓

گام اول: فرض می‌کنیم اجتماع دو بازه، مطابق با صورت سؤال باشد، پس داریم:

$$x_0 = 4 - x = 2x \Rightarrow x = \frac{4}{3} \Rightarrow x_0 = \frac{8}{3}$$

گام دوم: فرض می‌کنیم اجتماع دو بازه به صورت $(2-x, 4-x) \cup (2x, x+5)$ باشد، پس داریم:

$$x_0 = x + 5 = 2 - x \Rightarrow x = -\frac{3}{2} \Rightarrow x_0 = \frac{7}{2}$$

گام سوم: مجموع مقادیر x را به دست می‌آوریم:

$$\frac{8}{3} + \frac{7}{2} = \frac{16}{6} + \frac{21}{6} = \frac{37}{6}$$

برخی از همسایگی‌های متقارن به مرکز $x+1$ ، شامل اعداد ۳ و $2x$ هستند. حدود x ، همسایگی متقارن کدام عدد است؟

۲ (۴)

$\frac{3}{2}$ (۳)

۱ (۲)

$\frac{1}{2}$ (۱)

پاسخ: گزینه ۳

پاسخ خیلی تشریحی ✓ گام اول: همسایگی متقارن به مرکز $x+1$ را به صورت زیر در نظر می‌گیریم:

$$(x+1-\frac{r}{2}, x+1+\frac{r}{2})$$

که در آن r طول بازه است.

اعداد ۳ و $2x$ باید عضو این بازه باشند:

$$x+1-\frac{r}{2} < 3 < x+1+\frac{r}{2} \Rightarrow \begin{cases} x-\frac{r}{2} < 2 & (1) \\ x+\frac{r}{2} > 2 & (2) \end{cases}$$

$$x+1-\frac{r}{2} < 2x < x+1+\frac{r}{2} \Rightarrow \begin{cases} x+\frac{r}{2} > 1 & (3) \\ x-\frac{r}{2} < 1 & (4) \end{cases}$$

گام دوم: از اشتراک (۱) و (۴) و همچنین اشتراک (۲) و (۳) داریم:

$$x-\frac{r}{2} < 1, \quad x+\frac{r}{2} > 2$$

از هر کدام از این نامساوی‌ها نتیجه می‌گیریم:

$$\left. \begin{aligned} x-\frac{r}{2} < 1 &\Rightarrow x < \frac{r}{2} + 1 \\ x+\frac{r}{2} > 2 &\Rightarrow x > 2 - \frac{r}{2} \end{aligned} \right\} \xrightarrow{\text{اشتراک}} 2 - \frac{r}{2} < x < \frac{r}{2} + 1$$

با این شرط که $r > 1$ باشد.

گام سوم: بازه $(2 - \frac{r}{2}, \frac{r}{2} + 1)$ را می‌توان به صورت $(\frac{3}{2} - \frac{r-1}{2}, \frac{3}{2} + \frac{r-1}{2})$ بازنویسی کرد که به معنای آن است که $\frac{3}{2}$ مرکز تقارن همسایگی است.

۱۴ اگر $3x + 2f(x) + xf(x) - 1 = 0$ و $g(x) = \frac{x+1}{x-2}$ باشد، حاصل $\lim_{x \rightarrow -1} (fog)(x) + \lim_{x \rightarrow 0} f^{-1}(x)$ کدام است؟

$$\frac{1}{6} \quad (۴)$$

$$\frac{1}{2} \quad (۳)$$

$$\frac{1}{3} \quad (۲)$$

$$\frac{5}{6} \quad (۱)$$

پاسخ: گزینه ۱

Hint ضابطه‌های مورد نیاز را به دست آورید و جای گذاری کنید.

درس‌Box

برای محاسبه تابع وارون، ابتدا از ضابطه $y = f(x)$ باید x را بر حسب y پیدا کنیم و در آخر به جای x ، y قرار دهیم و به جای $f^{-1}(x)$ ، x قرار دهیم، مثل:

$$f(x) = \frac{2x-1}{x-2} \Rightarrow y = \frac{2x-1}{x-2} \xrightarrow{\text{طرفین وسطین}} xy - 2y = 2x - 1$$

$$\Rightarrow xy - 2x = 2y - 1 \Rightarrow x(y - 2) = 2y - 1 \Rightarrow x = \frac{2y-1}{y-2}$$

$$\Rightarrow f^{-1}(x) = \frac{2x-1}{x-2}$$

حد ترکیب توابع: اگر تابع $f(x)$ در نقطه $x = g(a)$ حد داشته باشد، آن‌گاه:

$$\lim_{x \rightarrow a} fog = \lim_{x \rightarrow a} f(g(x)) = \lim_{x \rightarrow g(a)} f(x)$$

پاسخ خیلی تشریحی ✓ گام اول: از رابطه داده شده، x را بر حسب $f(x)$ پیدا می‌کنیم و نام آن‌ها را مطابق با نکته درس باکس عوض می‌کنیم:

$$x(3 + f(x)) = 1 - 2f(x)$$

$$x = \frac{1 - 2f(x)}{3 + f(x)} \Rightarrow f^{-1}(x) = \frac{1 - 2x}{3 + x}$$

گام دوم: حاصل حد $f^{-1}(x)$ را در $x = 0$ به دست می‌آوریم:

$$\lim_{x \rightarrow 0} f^{-1}(x) = \frac{1 - 2(0)}{3 + 0} = \frac{1}{3}$$

گام سوم: حد تابع $g(x)$ را در نقطه $x = -1$ به دست می‌آوریم:

$$\lim_{x \rightarrow -1} g(x) = \frac{-1+1}{-1-2} = 0$$

گام چهارم: از فرض سوال $f(x)$ را بر حسب x به دست می‌آوریم:

$$f(x)(2+x) = 1 - 3x \Rightarrow f(x) = \frac{1-3x}{2+x}$$

گام پنجم: حد تابع $f(x)$ را در نقطه $g(-1) = 0$ به دست می‌آوریم:

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \frac{1-3(0)}{2+0} = \frac{1}{2}$$

گام ششم: مقادیر گام‌های دوم و پنجم را با یکدیگر جمع می‌کنیم:

$$\lim_{x \rightarrow -1} f(g(x)) + \lim_{x \rightarrow 0} f^{-1}(x) = \frac{1}{3} + \frac{1}{2} = \frac{5}{6}$$

۱۵ اگر $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x+1)+x^2}{3x-f(3-x)} = 7$ باشد، حاصل $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) + \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x)$ کدام است؟

- ۵ (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴) ۱۰ (۵)

پاسخ: گزینه ۱

Hint

چون حاصل حد داده شده موجود می باشد، پس قطعاً حد $f(x)$ هم موجود بوده است، پس معادله حل کن و جای گذاری کن.

پاسخ خیلی تشریحی ✓ گام اول: چون $x \rightarrow 1$ میل می کند، پس $x+1$ و $3-x$ به ۲ میل می کنند، بنابراین فرض می کنیم $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = L$ باشد، پس داریم:

$$\frac{L+(1)^2}{3(1)-L} = 7 \Rightarrow L+1 = 21-7L \Rightarrow 8L = 20 \Rightarrow L = \frac{5}{4}$$

گام دوم: چون تابع $f(x)$ حد داشته است، پس حد چپ و راست آن با یکدیگر برابرند، بنابراین داریم:

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) + \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = 2\left(\frac{5}{4}\right) = 5$$

۱۶ اگر $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} [f(x)] = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} f(x)$ باشد، ضابطه تابع f کدام می تواند باشد؟ ([] نماد جزء صحیح است).

(۲) $-\sin x$

(۱) $\sin x$

(۴) $-\cos x$

(۳) $\cos x$

مشاوره تسلط به رسم نمودارهای معروف، در حل خیلی سؤالات به کمک شما می آیند و حل را برایتان ساده تر می کنند و حتی گاهی اوقات می توانید سؤال را در زمان خیلی کوتاه تری پاسخ دهید.

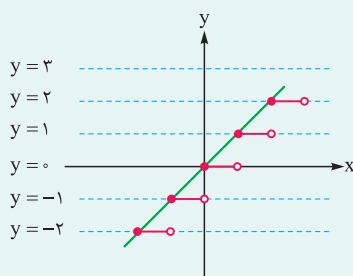
پاسخ: گزینه ۲

از رسم شکل استفاده کن. **Hint**

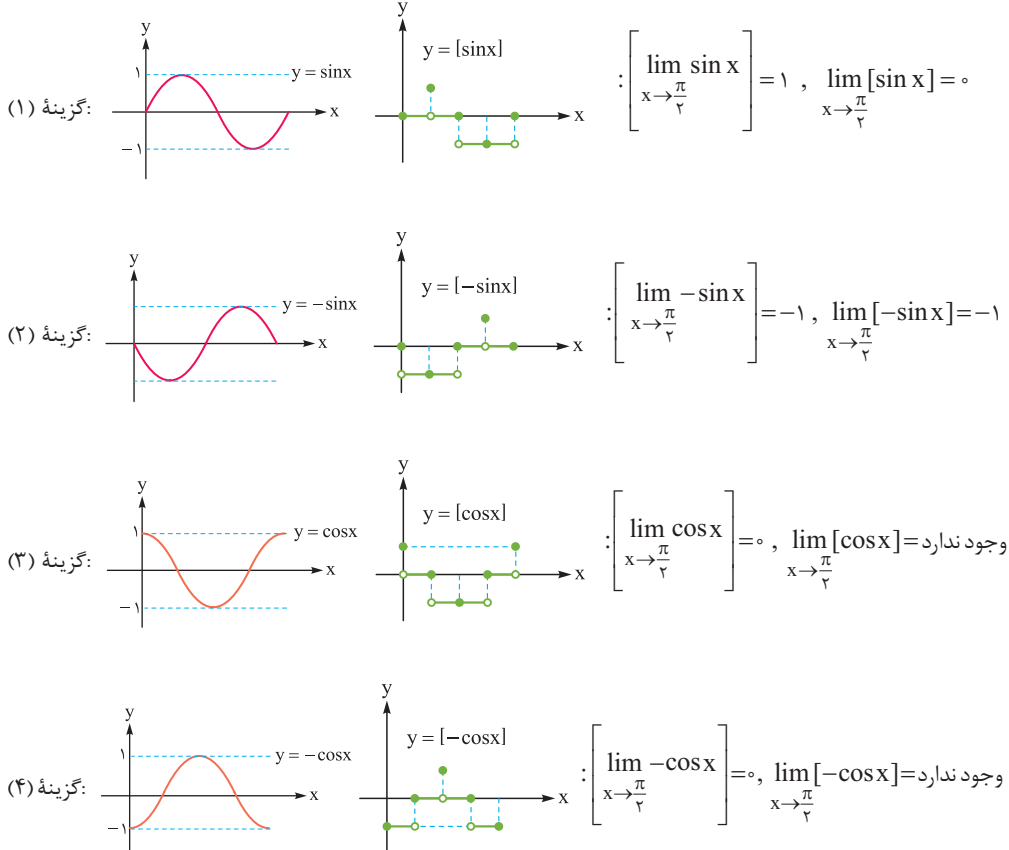
رسم توابع $[f(x)]$:

برای رسم این گونه توابع ابتدا داخل براکت یعنی $f(x)$ را رسم می کنیم، سپس خطوط افقی $y = n ; n \in \mathbb{Z}$ را به فاصله یک واحد یک واحد رسم می کنیم. در مرحله بعدی آن قسمت هایی از منحنی را که بین دو خط متوالی قرار گرفته اند، روی خط پایینی تصویر می کنیم. محل تلاقی خطوط افقی با تابع $f(x)$ را توپر می کنیم.

مثال: $y = [x]$ را رسم کنید.



گام اول: نمودار هر گزینه را به همراه جزء صحیح همان گزینه رسم می کنیم و حد هر دو را در نقطه $\frac{\pi}{4}$ به دست می آوریم: **پاسخ خیلی تشریحی**



اگر $f(x) = \left[\frac{3x+1}{x+2} \right]$ ، کدام عبارت درست است؟ ([] نماد جزء صحیح است.)

$$\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = 1 \quad (2)$$

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = 3 \quad (1)$$

$$\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = 2 \quad (4)$$

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = 2 \quad (3)$$

پاسخ: گزینه ۴

Hint برای راحتی کار، داخل براکت را ساده کن.

نکته اگر $k \in \mathbb{Z}$ باشد، آن گاه $[x+k] = [x] + k$

پاسخ خیلی تشریحی ✓ **گام اول:** به جای $+1$ در صورت، $6-5$ قرار می‌دهیم و از 3 فاکتور می‌گیریم:

$$f(x) = \left[\frac{3x+6-5}{x+2} \right] = \left[\frac{3(x+2)-5}{x+2} \right] = \left[3 - \frac{5}{x+2} \right]$$

با توجه به نکته، عدد 3 را از براکت بیرون می‌آوریم:

$$f(x) = 3 + \left[\frac{-5}{x+2} \right]$$

گام دوم: با توجه به گزینه‌ها حد تابع را یک بار در 3^- و یک بار در 3^+ محاسبه می‌کنیم:

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^-} \left(\left[-\frac{5}{x+2} \right] + 3 \right) = \lim_{t \rightarrow -1^-} [t] + 3 = -2 + 3 = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^+} \left(\left[-\frac{5}{x+2} \right] + 3 \right) = \lim_{x \rightarrow -1^+} [t] + 3 = -1 + 3 = 2$$

دقت کنید که در محاسبه حدهای بالا، $-\frac{5}{x+2}$ را t در نظر گرفته‌ایم.

۱۸ اگر $f(x) = \begin{cases} 3x-1, & x < 0 \\ 2x+1, & x \geq 0 \end{cases}$ باشد، $\lim_{x \rightarrow (\frac{\pi}{4})^+} f(\cos x - \sin x)$ کدام است؟

۱ (۲)

-۱ (۱)

۴ (۴) وجود ندارد.

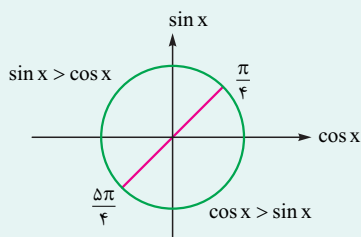
۳ (۳) صفر

پاسخ: گزینه ۱

عبارت $\cos x - \sin x$ را تعیین علامت و تعیین مقدار کن تا ضابطه اصلی $f(x)$ برای حدگرفتن مشخص شود.

Hint

دروس Box



همان گونه که در دستگاه محورهای مختصات نیمساز ناحیه اول و سوم وجود دارد، در دایره مثلثاتی نیز نیمساز نواحی اول و سوم وجود دارد، از آن جا که در دایره مثلثاتی محور y معادل محور $\sin$ و محور x معادل محور $\cos$ است، پس نیمساز ناحیه اول و سوم جایی است که $\sin x = \cos x$ است و این تساوی فقط در نقاط $(4k+1)\frac{\pi}{4}$ رخ می دهد؛ یعنی:

پاسخ خیلی تشریحی ✓

$\frac{\pi}{4}$ دقیقاً جواب معادله $\cos x - \sin x = 0$ است و $(\frac{\pi}{4})^+$ در ناحیه ای قرار می گیرد که $\sin x > \cos x$ است، پس حاصل $\cos x - \sin x$ به ازای $(\frac{\pi}{4})^+$ برابر 0^- می شود، پس کافی است حاصل حد $f(x)$ را وقتی $x \rightarrow 0^-$ میل می کند به دست بیاوریم.

$$\lim_{x \rightarrow (\frac{\pi}{4})^+} f(\cos x - \sin x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (3x - 1) = 3(0) - 1 = -1$$

۱۹ تابع $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-1}{\sqrt{x}} & ; x > 4 \\ \sin \pi x & ; x \leq 4 \end{cases}$ مفروض است. حاصل $\lim_{x \rightarrow -2^-} f(2-x)$ کدام است؟

(۱) $\frac{15}{2}$

(۲) ۱۵

(۳) صفر

(۴) $-\frac{15}{4}$

مشاوره به مفهوم حد و مفهوم همسایگی محدود دقت کنید. اساس یادگیری حد توجه به این دو موضوع است. در سؤالات حد از روی نمودار، که پای ثابت امتحانات نهایی می باشد، نیز کاربرد دارند.

پاسخ: گزینه ۱

Hint عبارت $2-x$ را به ازای $(-2)^-$ تعیین علامت و تعیین مقدار کن.

مفهوم میل کردن:

تعریف: اگر x با مقادیر بزرگتر از a به عدد a بسیار نزدیک شود، در این صورت می گوییم x به سمت a از راست میل می کند و می نویسیم:

تعریف: اگر x با مقادیر کوچکتر از a به عدد a بسیار نزدیک شود، در این صورت می گوییم x به سمت a از چپ میل می کند و می نویسیم:

تعریف: اگر x بتواند هم با مقادیر بزرگتر از a و هم با مقادیر کوچکتر از a به عدد a بسیار نزدیک شود، در این صورت می گوییم x به سمت a میل می کند و می نویسیم:

پاسخ خیلی تشریحی ✓ **گام اول:** اعداد کمتر از -2 (مثلاً $-2/1$) را به جای x قرار می دهیم و می بینیم که $2-x$ به سمت 4^+ میل می کند:

$$x = -2/1 \Rightarrow 2 - (-2/1) = 4/1 = 4^+$$

گام دوم: با جای گذاری 4^+ در ضابطه $\frac{x^2-1}{\sqrt{x}}$ ، حاصل حد سؤال را به دست می آوریم:

(4^+ معادل با $x > 4$ می باشد.)

$$\lim_{x \rightarrow -2^-} f(2-x) = \lim_{x \rightarrow 4^+} f(x) = \frac{4^2-1}{\sqrt{4}} = \frac{15}{2}$$

۲۰. اگر تابع f در $x = a$ حد داشته باشد، اما تابع g در این نقطه حد نداشته باشد، کدام تابع در $x = a$ قطعاً حد ندارد؟

- (۱) $f + g$ (۲) $\frac{f}{|g|}$ (۳) $(|f| + 1)g$ (۴) $(|f| - 1)g$

پاسخ: گزینه ۳

Hint حالات مختلف هر گزینه را بررسی کنید.

پاسخ خیلی تشریحی ✓

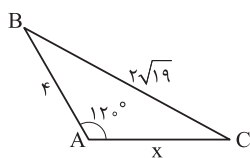
گام اول: فرض کنیم حدهای چپ و راست تابع g در $x = a$ ، دو عدد هم‌اندازه ولی مختلف‌العلامت باشند. (وقتی مختلف‌العلامت باشند، یعنی قطعاً مخالف صفر هم هستند.)

در این صورت $g^+(x)$ و $|g(x)|$ حد داشته و توابع گزینه‌های (۱) و (۲) در $x = a$ قطعاً حد دارند.

گام دوم: فرض کنیم حد تابع f در $x = a$ برابر یک یا -1 باشد. در این صورت حد تابع $y = |f(x)| - 1$ برابر صفر می‌شود و تابع گزینه (۴) قطعاً حد دارد.

فقط تابع گزینه (۳) است که در $x = a$ قطعاً حد ندارد.

۲۱ در شکل زیر، مقدار x کدام است؟



(۱) $4\sqrt{2}$

(۲) ۶

(۳) $2\sqrt{10}$

(۴) ۵

مشاوره قضیه کسینوس ها یکی از مهم ترین قضیه های کتاب درسی است و امکان طرح مسئله عددی از آن، هم به طور مستقیم و هم به صورت ترکیبی با سایر فرمول های روابط طولی در مثلث وجود دارد. اثبات قضیه کسینوس ها یکی از سوالات امتحان نهایی خرداد ۱۴۰۳ بود.

پاسخ: گزینه ۲

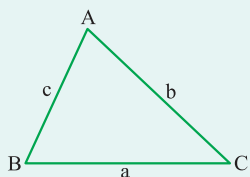
قضیه کسینوس ها را براساس زاویه $\hat{A}$ بنویسید.

Hint

قضیه کسینوس ها:

درسی Box

در هر مثلث، مربع اندازه هر ضلع، برابر است با مجموع مربع های اندازه های دو ضلع دیگر، منهای دو برابر حاصل ضرب اندازه های آن دو ضلع در کسینوس زاویه بین آنها.



$$\begin{cases} a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos \hat{A} \\ b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cdot \cos \hat{B} \\ c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos \hat{C} \end{cases}$$

کسینوس هر زاویه، قرینه کسینوس مکمل آن است، مثلاً:

نکته

$$\cos 120^\circ = \cos(180^\circ - 60^\circ) = -\cos 60^\circ$$

گام اول: قضیه کسینوس ها را برای زاویه $\hat{A}$ می نویسیم:

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB \times AC \times \cos \hat{A}$$

گام دوم: طول اضلاع و اندازه زاویه $\hat{A}$ را در فرمول قرار می دهیم تا مقدار x به دست آید:

$$(2\sqrt{19})^2 = 4^2 + x^2 - 2 \times 4 \times x \times \underbrace{\cos 120^\circ}_{-\frac{1}{2}}$$

$$\Rightarrow 76 = 16 + x^2 + 4x \Rightarrow x^2 + 4x - 60 = 0$$

$$\Rightarrow (x-6)(x+10) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x=6 & \text{ق.ق} \\ x=-10 & \text{غ.ق.ق} \end{cases}$$

۲۲ در مثلث ABC ، اگر $AB = 4\sqrt{2}$ ، $AC = 2$ ، $BC = 6$ و M وسط ضلع BC باشد، محیط مثلث AMC کدام است؟

۸ (۱)

۹ (۲)

۵ + $\frac{3\sqrt{2}}{2}$ (۳)

۵ + $2\sqrt{2}$ (۴)

مشاوره این سؤال براساس قضیه میانه‌ها (تمرین ۴ صفحه ۶۷ کتاب درسی هندسه (۲) و مشابه سؤال ۱۷ امتحان نهایی خرداد ۱۴۰۳ طرح شده است.

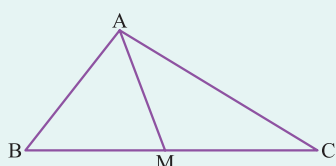
پاسخ: گزینه ۱

Hint قضیه میانه‌ها را برای میانه وارد بر ضلع BC بنویسید.

قضیه میانه‌ها:

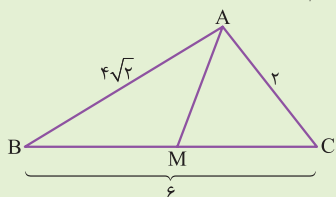
دکتر Box

اگر AM میانه نظیر ضلع BC در مثلث ABC باشد، آن‌گاه به کمک قضیه کسینوس‌ها در دو مثلث AMB و AMC می‌توان رابطه زیر را که به قضیه میانه‌ها معروف است به سادگی اثبات نمود:



$$AB^2 + AC^2 = 2AM^2 + \frac{BC^2}{2}$$

پاسخ خیلی تشریحی ✓ گام اول: قضیه میانه‌ها را در مثلث ABC نوشته و طول میانه AM را محاسبه می‌کنیم:



$$AB^2 + AC^2 = 2AM^2 + \frac{BC^2}{2}$$

$$\Rightarrow (4\sqrt{2})^2 + 2^2 = 2AM^2 + \frac{6^2}{2}$$

$$\Rightarrow 32 + 4 = 2AM^2 + 18 \Rightarrow AM^2 = 9 \Rightarrow AM = 3$$

گام دوم: M وسط ضلع BC است، پس $CM = \frac{BC}{2} = 3$ و در نتیجه داریم:

$$\Delta AMC \text{ محیط} = AM + AC + CM = 3 + 2 + 3 = 8$$

طول اضلاع یک متوازی الاضلاع، ۶ و ۸ و زاویه حاده بین آنها برابر 45° است. مجموع مربعات طول قطره‌های این متوازی الاضلاع کدام است؟

۲۴۰ (۴)

۲۰۰ (۳)

۱۸۰ (۲)

۱۶۰ (۱)

پاسخ: گزینه ۳

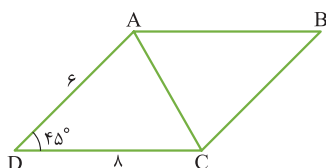
برای محاسبه هر یک از قطره‌های متوازی الاضلاع، یک بار قضیه کسینوس‌ها را بنویسید.

Hint

هر دو زاویه مجاور در متوازی الاضلاع مکمل یکدیگرند.

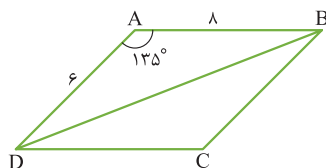
نکته

پاسخ خیلی تشریحی ✓ گام اول: قضیه کسینوس‌ها را در مثلث ACD می‌نویسیم تا طول قطر AC را به دست آوریم:



$$\begin{aligned} AC^2 &= AD^2 + DC^2 - 2AD \times DC \times \cos \hat{D} \\ &= 6^2 + 8^2 - 2 \times 6 \times 8 \times \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \\ &= 100 - 48\sqrt{2} \end{aligned}$$

گام دوم: زاویه A مکمل زاویه $\hat{D}$ ، یعنی برابر 135° است. حال قضیه کسینوس‌ها را در مثلث ABD می‌نویسیم تا طول قطر BD را به دست آوریم:



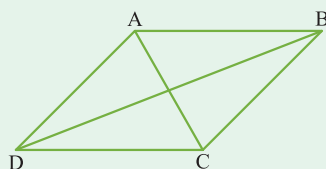
$$\begin{aligned} BD^2 &= AB^2 + AD^2 - 2AB \times AD \times \cos \hat{A} = 8^2 + 6^2 - 2 \times 8 \times 6 \times \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 100 + 48\sqrt{2} \end{aligned}$$

گام سوم: با توجه به نتایج دو گام قبل داریم:

$$AC^2 + BD^2 = (100 - 48\sqrt{2}) + (100 + 48\sqrt{2}) = 200$$

مجموع مربعات طول قطره‌های هر متوازی الاضلاع برابر مجموع مربعات طول اضلاع آن است:

نکته



طبق نکته فوق داریم:

په جور دیگر

$$AC^2 + BD^2 = AB^2 + BC^2 + CD^2 + AD^2 = 8^2 + 6^2 + 8^2 + 6^2 = 200$$

۲۴ در مثلث ABC ، $AB = 3$ ، $AC = 4$ و $BC = 6$ است. طول بزرگ‌ترین نیمساز این مثلث کدام است؟

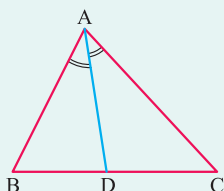
- (۱) $\frac{\sqrt{91}}{5}$ (۲) $\frac{2\sqrt{91}}{5}$ (۳) $\frac{\sqrt{546}}{5}$ (۴) $\frac{2\sqrt{546}}{5}$

مشاوره این سؤال براساس رابطه طول نیمسازهای زوایای داخلی مثلث و مشابه تمرین ۲ صفحه ۷۰ کتاب درسی هندسه (۲) و سؤال ۱۶ امتحان نهایی خرداد ۱۴۰۳ طرح شده است.

پاسخ: گزینه ۳

Hint بزرگ‌ترین نیمساز مثلث، بر کوچک‌ترین ضلع آن وارد می‌شود.

قضیه نیمسازهای زوایای داخلی:



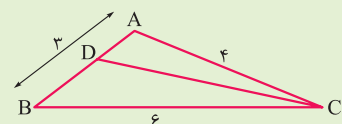
در هر مثلث، نیمساز هر زاویه داخلی، ضلع روبه‌رو به آن زاویه را به نسبت اندازه‌های ضلع‌های آن زاویه تقسیم می‌کند:

$$AD \text{ نیمساز زاویه } \hat{A} \Rightarrow \frac{BD}{CD} = \frac{AB}{AC}$$

رابطه طول نیمساز زاویه‌های داخلی:

در هر مثلث، مربع اندازه هر نیمساز داخلی برابر است با حاصل ضرب اندازه دو ضلع زاویه، منهای حاصل ضرب اندازه دو قطعه‌ای که نیمساز روی ضلع مقابل ایجاد می‌کند:

$$AD^2 = AB \times AC - BD \times DC$$



پاسخ خیلی تشریحی ✓ گام اول: می‌دانیم در هر مثلث، بزرگ‌ترین نیمساز زاویه داخلی متناظر با کوچک‌ترین زاویه و در نتیجه کوچک‌ترین ضلع آن است. در این مثلث AB کوچک‌ترین ضلع است، پس $\hat{C}$ کوچک‌ترین زاویه و نیمساز CD مطابق شکل، بزرگ‌ترین نیمساز این مثلث است.

طبق قضیه نیمسازها داریم:

$$\frac{AD}{BD} = \frac{AC}{BC} \xrightarrow{\text{ترکیب درمخرج}} \frac{AD}{AB} = \frac{AC}{AC + BC}$$

$$\Rightarrow \frac{AD}{3} = \frac{4}{10} \Rightarrow AD = \frac{6}{5} \Rightarrow BD = 3 - \frac{6}{5} = \frac{9}{5}$$

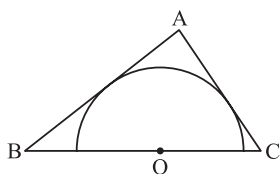
گام دوم: طبق رابطه طول نیمساز داخلی، طول نیمساز CD را محاسبه می‌کنیم:

$$CD^2 = AC \times BC - AD \times BD = 4 \times 6 - \frac{6}{5} \times \frac{9}{5} = 24 - \frac{54}{25} = \frac{546}{25}$$

$$\Rightarrow CD = \frac{\sqrt{546}}{5}$$

در شکل زیر نیم‌دایره‌ای به مرکز O ، بر دو ضلع AB و AC از مثلث ABC مماس است. اگر $AB = ۶$ ، $AC = ۴$ و $BC = ۷$ باشند،

طول BO کدام است؟



$$۴/۲ (۲)$$

$$۴ (۱)$$

$$۴/۸ (۴)$$

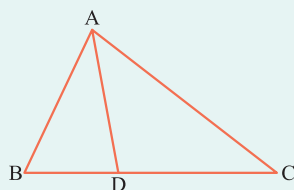
$$۴/۵ (۳)$$

پاسخ: گزینه ۲

نشان دهید که نقطه O روی نیمساز داخلی زاویه A قرار دارد.

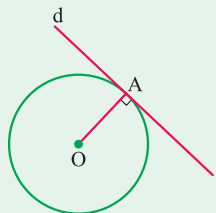
Hint

طبق قضیه نیمسازهای زوایای داخلی، اگر AD نیمساز داخلی زاویه A در مثلث ABC باشد، آن‌گاه داریم:

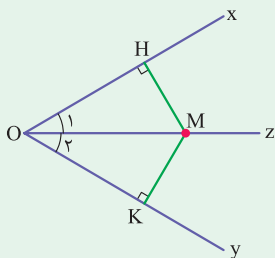


$$\frac{BD}{CD} = \frac{AB}{AC}$$

(۱) هرگاه خط d در نقطه A بر دایره $C(O, R)$ مماس باشد، آنگاه خط d بر OA عمود است، یعنی خط مماس بر دایره بر شعاع گذرنده از نقطه تماس عمود است.



(۲) هر نقطه واقع بر نیمساز یک زاویه از دو ضلع آن زاویه به یک فاصله است و بر عکس هر نقطه که از دو ضلع یک زاویه به یک فاصله باشد، روی نیمساز آن زاویه قرار دارد. $\hat{O}_1 = \hat{O}_2 \Leftrightarrow MH = MK$

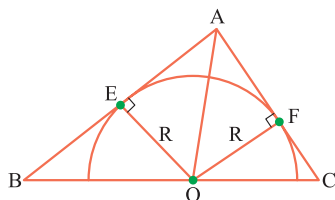


گام اول: می‌دانیم در هر دایره، شعاع گذرنده از نقطه تماس، بر خط مماس عمود است، پس مطابق شکل $OE \perp AB$ و

$OE = OF = R$ و $OF \perp AC$ است. یعنی نقطه O از دو ضلع زاویه A به یک فاصله است و در نتیجه AO نیمساز داخلی

زاویه A در مثلث ABC است.

گام دوم: طبق قضیه نیمسازهای زوایای داخلی در مثلث ABC داریم:



$$\frac{BO}{CO} = \frac{AB}{AC} \Rightarrow \frac{BO}{7-BO} = \frac{6}{4} \Rightarrow 4BO = 42 - 6BO$$

$$\Rightarrow 10BO = 42 \Rightarrow BO = 4.2$$

قایقی از یک نقطه با سرعت ۶۰ کیلومتر بر ساعت در یک جهت حرکت کرده و یک ساعت بعد با ۶۰° انحراف به راست با سرعت ۵۰ کیلومتر بر ساعت به مدت دو ساعت دیگر به حرکت ادامه می‌دهد تا به بندرگاه برسد. فاصله بندرگاه از مبدأ حرکت کشتی چند کیلومتر است؟

۱) ۱۱۰

۲) ۱۲۰

۳) ۱۳۰

۴) ۱۴۰

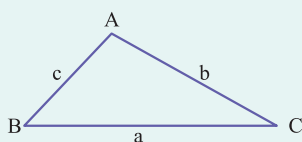
مشاوره این سؤال مشابه تمرین ۳ صفحه ۶۶ کتاب درسی هندسه (۲) طرح شده است. این دسته از سؤالات که مدل‌سازی مسائلی از دنیای واقعی هستند، همواره مورد توجه طراحان کنکور نیز قرار می‌گیرند.

پاسخ: گزینه ۴

با توجه به اطلاعات مسئله، یک مثلث رسم کرده و از قضیه کسینوس‌ها استفاده کنید.

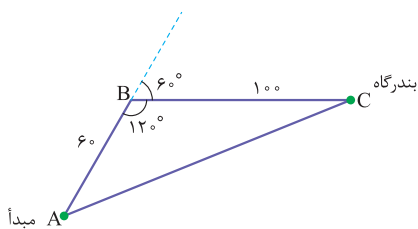
Hint

اگر طول اضلاع AB و AC و اندازه زاویه A در مثلث ABC مشخص باشد، آن‌گاه به کمک قضیه کسینوس‌ها برای طول ضلع BC داریم:



$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos \hat{A}$$

گام اول: مطابق شکل، قایق از نقطه A (مبدأ حرکت) شروع به حرکت کرده و در نقطه B، ۶۰° به طرف راست منحرف می‌شود و تا نقطه C (بندرگاه) به حرکت خود ادامه می‌دهد.



با توجه به سرعت حرکت قایق در هر مرحله، مسافت‌های طی‌شده را تعیین می‌کنیم:

$$AB = 60 \times 1 = 60 \text{ km} \text{ و } BC = 50 \times 2 = 100 \text{ km}$$

گام دوم: طبق قضیه کسینوس‌ها در مثلث ABC داریم:

$$AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2AB \times BC \times \cos 120^\circ$$

$$= 60^2 + 100^2 - 2 \times 60 \times 100 \times \left(-\frac{1}{2}\right) = 3600 + 10000 + 6000 = 19600$$

$$\Rightarrow AC = 140$$

در مثلث ABC ، نقطه همرسی میانه‌ها، $GB = ۸$ ، $GC = ۹$ و $BC = ۱۳$ است. طول میانه AM کدام است؟

۱۶ / ۵ (۲)

۱۶ (۱)

۱۷ / ۵ (۴)

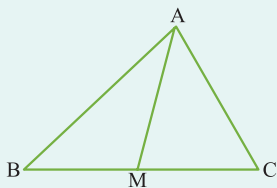
۱۷ (۳)

پاسخ: گزینه ۲

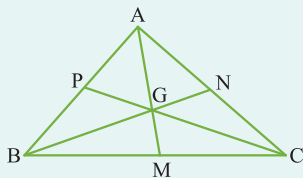
Hint قضیه میانه‌ها را در مثلث GBC بنویسید.

(۱) طبق قضیه میانه‌ها در مثلث ABC داریم:

$$AB^2 + AC^2 = 2AM^2 + \frac{BC^2}{2}$$

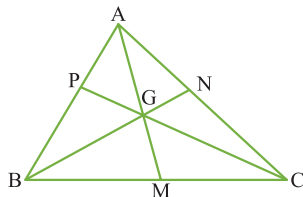


(۲) میانه‌های هر مثلث، یکدیگر را به نسبت ۲ به ۱ قطع می‌کنند، به گونه‌ای که فاصله نقطه همرسی میانه‌ها از وسط هر ضلع مثلث، برابر $\frac{1}{3}$ طول میانه و فاصله نقطه همرسی میانه‌ها از هر رأس، برابر $\frac{2}{3}$ طول میانه است.



$$GM = \frac{1}{3} AM, \quad AG = \frac{2}{3} AM$$

پاسخ خیلی تشریحی ✓ گام اول: میانه‌های مثلث ABC را رسم می‌کنیم و نقطه همرسی میانه‌ها را G می‌نامیم:



GM میانه وارد بر ضلع BC در مثلث GBC است، پس طبق قضیه میانه‌ها داریم:

$$GB^2 + GC^2 = 2GM^2 + \frac{BC^2}{2} \Rightarrow 8^2 + 9^2 = 2GM^2 + \frac{13^2}{2}$$

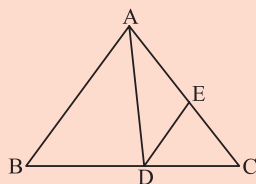
$$\xrightarrow{\times 2} 4GM^2 = 2(8^2 + 9^2) - 13^2 = 121 \Rightarrow GM^2 = \frac{121}{4}$$

$$\Rightarrow GM = \frac{11}{2} = ۵ / ۵$$

گام دوم: نقطه همرسی میانه‌ها، میانه AM را به نسبت ۲ به ۱ قطع می‌کند، پس داریم:

$$GM = \frac{1}{3} AM \Rightarrow AM = 3GM = 3 \times ۵ / ۵ = ۱۶ / ۵$$

مطابق شکل در مثلث متساوی الاضلاع ABC به طول ضلع ۸، نقطه D به فاصله ۷ از رأس A قرار دارد. اگر نقطه E به فاصله ۳ واحد از رأس C قرار داشته باشد، اندازه زاویه AED کدام است؟ $(CD < BD)$



(۲) 105°

(۱) 120°

(۴) 135°

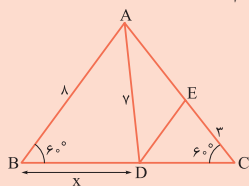
(۳) 150°

مشاوره این سؤال مشابه تمرین ۲ صفحه ۶۶ کتاب درسی هندسه (۲) طرح شده است و می تواند یکی از سؤالات احتمالی امتحان نهایی باشد.

پاسخ: گزینه ۱

Hint قضیه کسینوس ها را در مثلث ABD بنویسید.

پاسخ خیلی تشریحی ✓ گام اول: قضیه کسینوس ها را در مثلث ABD می نویسیم تا طول پاره خط BD را به دست آوریم:



$$AD^2 = AB^2 + BD^2 - 2AB \times BD \times \cos 60^\circ$$

$$\Rightarrow 7^2 = 8^2 + x^2 - 2 \times 8 \times x \times \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow 49 = 64 + x^2 - 8x \Rightarrow x^2 - 8x + 15 = 0$$

$$\Rightarrow (x-3)(x-5) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x=3 & \text{ق. ق. غ} \\ x=5 & \text{ق. ق. ص} \end{cases}$$

چون $BD > CD$ ، پس مقدار x باید از نصف طول ضلع BC بزرگ تر باشد، پس فقط مقدار $x = 5$ برای BD قابل قبول است.
گام دوم: با توجه به طول ضلع BC داریم:

$$CD = BC - BD = 8 - 5 = 3$$

گام سوم: در مثلث CED ، $CD = CE = 3$ و $\hat{C} = 60^\circ$ است، پس این مثلث، متساوی الاضلاع بوده و در نتیجه $\hat{DEC} = 60^\circ$ است. زاویه $\hat{AED}$ مکمل زاویه $\hat{DEC}$ است، پس داریم:

$$\hat{AED} = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$$

در مثلث ABC ، $AB = 7$ ، $AC = 5$ و $\hat{C} = 60^\circ$ است. اندازه کوچک ترین قطعه ای که نیمساز داخلی زاویه A روی ضلع BC ایجاد می کند، کدام است؟

$\frac{8}{3}$ (۲)

$\frac{7}{3}$ (۱)

$\frac{10}{3}$ (۴)

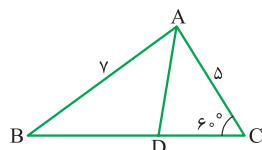
۳ (۳)

مشاوره این سؤال مشابه سؤالی از کنکور ریاضی داخل ۱۴۰۱ طرح شده است و ترکیبی از قضیه کسینوس ها و قضیه نیمسازها را در برمی گیرد.

پاسخ: گزینه ۴

Hint ابتدا به کمک قضیه کسینوس ها، طول ضلع BC را به دست آورید.

پاسخ خیلی تشریحی **گام اول:** طبق قضیه کسینوس ها در مثلث ABC و با فرض $BC = x$ داریم:



$$AB^2 = AC^2 + BC^2 - 2AC \times BC \times \cos \hat{C}$$

$$\Rightarrow 7^2 = 5^2 + x^2 - 2 \times 5 \times x \times \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow 49 = 25 + x^2 - 5x \Rightarrow x^2 - 5x - 24 = 0$$

$$\Rightarrow (x - 8)(x + 3) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 8 & \text{ق.ق} \\ x = -3 & \text{غ.ق.ق} \end{cases} \Rightarrow BC = 8$$

گام دوم: پاره خط AD یعنی نیمساز زاویه $\hat{A}$ را رسم می کنیم. با فرض $CD = y$ ، $BD = 8 - y$ بوده و طبق قضیه نیمسازها داریم:

$$\frac{CD}{BD} = \frac{AC}{AB} \Rightarrow \frac{y}{8 - y} = \frac{5}{7} \Rightarrow 7y = 40 - 5y \Rightarrow 12y = 40$$

$$\Rightarrow y = \frac{10}{3} \Rightarrow \begin{cases} CD = \frac{10}{3} \\ BD = 8 - \frac{10}{3} = \frac{14}{3} \end{cases}$$

بنابراین، اندازه کوچک ترین قطعه ایجاد شده روی ضلع BC ، برابر $\frac{10}{3}$ است.

۳۰. اندازه اضلاع مثلثی ۵، ۱۱ و ۱۲ است. عمود منصف بزرگ ترین ضلع مثلث، ضلع متوسط را به چه نسبتی تقسیم می کند؟

(۱) $\frac{1}{3}$

(۲) $\frac{3}{4}$

(۳) $\frac{2}{3}$

(۴) $\frac{1}{2}$

مشاوره این سؤال براساس قضیه استوارت طراحی شده که اثبات این قضیه در تمرین ۵ صفحه ۶۷ کتاب درسی هندسه (۲) مطرح شده است. سؤالاتی از این مبحث در کنکور ریاضی داخل و خارج از کشور ۹۹ دیده می شود.

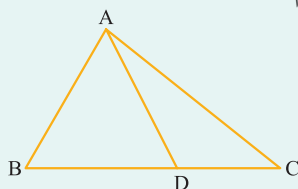
پاسخ: گزینه ۳

هر نقطه واقع بر عمود منصف یک پاره خط، از دو سر آن پاره خط به یک فاصله است.

Hint

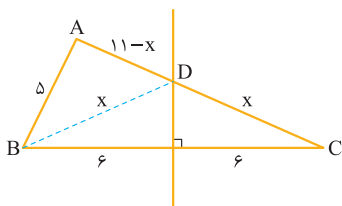
قضیه استوارت: اگر D نقطه دلخواهی روی ضلع BC از مثلث ABC باشد، آن گاه داریم:

دنبلا Box



$$AB^2 \times DC + AC^2 \times BD = AD^2 \times BC + BD \times DC \times BC$$

پاسخ خیلی تشریحی ✓ **گام اول:** مثلث ABC به اضلاع $AB = 5$ ، $AC = 11$ و $BC = 12$ را در نظر گرفته و عمود منصف ضلع BC را رسم می کنیم، به گونه ای که ضلع AC را در نقطه D قطع کند؛ فرض کنید $CD = x$ باشد.



چون هر نقطه واقع بر عمود منصف یک پاره خط از دو سر آن به یک فاصله است، پس $BD = x$ است.

گام دوم: طبق قضیه استوارت برای مثلث ABC داریم:

$$AB^2 \times DC + BC^2 \times AD = BD^2 \times AC + AD \times DC \times AC$$

$$\Rightarrow 5^2 \times x + 12^2 \times (11-x) = x^2 \times 11 + (11-x) \times x \times 11$$

$$\Rightarrow 25x + 1584 - 144x = 11x^2 + 121x - 11x^2$$

$$\Rightarrow 240x = 1584 \Rightarrow x = 6/6$$

گام سوم: با توجه به مقدار به دست آمده برای x، نسبت قطعات ایجاد شده روی ضلع AC برابر است با:

$$\frac{AD}{CD} = \frac{11-x}{x} = \frac{11-6/6}{6/6} = \frac{4/4}{6/6} = \frac{2}{3}$$

۳۱ به ازای کدام مقدار برای k ، واریانس داده‌های زیر برابر ۶۰ است؟

$۳, ۶, ۹, \dots, k$

۳۰ (۴)

۲۷ (۳)

۲۴ (۲)

۲۱ (۱)

مشاوره ردپای واریانس داده‌هایی که با هم تشکیل دنباله حسابی می‌دهند، در کنکورهای اخیر دیده شده است، نکته مربوط به آن را بلد باشید.

پاسخ: گزینه ۳

Hint از طریق نکته گفته شده، تعداد داده‌ها را به دست آورید.

نکته اگر n داده با یکدیگر یک دنباله حسابی با قدرنسبت d تشکیل دهند، واریانس آن‌ها از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$\sigma^2 = \left(\frac{n^2 - 1}{12} \right) d^2$$

گام اول: داده‌های داده شده، یک دنباله حسابی با قدرنسبت $d = ۳$ تشکیل داده‌اند که واریانس آن‌ها ۶۰ است؛ پس طبق نکته گفته شده خواهیم داشت:

$$\sigma^2 = \left(\frac{n^2 - 1}{12} \right) d^2 \xrightarrow[d=3]{\sigma^2=60} 60 = \left(\frac{n^2 - 1}{12} \right) (3)^2 \Rightarrow 60 = \frac{3}{4} (n^2 - 1)$$

$$\Rightarrow 20 = \frac{1}{4} (n^2 - 1) \Rightarrow n^2 - 1 = 80 \Rightarrow n^2 = 81 \xrightarrow{n>0} n = 9$$

پس تعداد داده‌ها ۹ تا است.

گام دوم: دیدیم که تعداد داده‌ها ۹ است؛ پس k داده نهم است. طبق جمله عمومی دنباله حسابی داریم:

$$a_n = a_1 + (n-1)d \xrightarrow[a_1=3]{d=3} a_n = 3 + 3(n-1) \xrightarrow{n=9} a_9 = 3 + 3(9-1) = 3 + 3(8)$$

$$\Rightarrow a_9 = 27$$

پس $k = a_9 = 27$ و گزینه (۳) صحیح است.

می‌دانیم که تعداد داده‌هایی که با هم فاصله منظم دارند، برابر است با « $۱ + \frac{\text{اولی} - \text{آخری}}{\text{فاصله}}$ »، پس بعد از این که $n = 9$ را پیدا کردیم، از این رابطه k را به دست می‌آوریم:

$$9 = \frac{k-3}{3} + 1 \Rightarrow 8 = \frac{k-3}{3} \Rightarrow 24 = k-3 \Rightarrow k = 27$$

به‌جور دیگر

میانگین دسته اول با پنج داده مختلف برابر میانگین دسته دوم با ۷ داده است. به طوری که دسته دوم، علاوه بر تمام داده‌های دسته اول، داده‌های a و b را نیز دارد. اگر واریانس دسته اول $1/4$ برابر واریانس دسته دوم باشد، نسبت a به میانگین دسته اول کدام است؟

- (۱) دقیقاً برابر ۱
(۲) حداقل برابر ۱
(۳) بزرگ‌تر از $\frac{1}{4}$ و کوچک‌تر مساوی ۱
(۴) بزرگ‌تر از ۱ و کم‌تر از ۲

پاسخ: گزینه ۱

Hint

پاسخ خیلی تشریحی ✓ گام اول: با توجه به سؤال، داده‌های هر دسته به صورت زیر است:

دسته اول: x_1, x_2, x_3, x_4, x_5

دسته دوم: $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, a, b$

گام دوم: میانگین دو دسته یکسان است، میانگین دسته‌ها را برابر $\bar{x}$ در نظر می‌گیریم و فرمول واریانس را برای هر دسته می‌نویسیم:

$$\sigma_1^2 = \frac{\sum_{i=1}^5 (x_i - \bar{x})^2}{5}$$

واریانس دسته اول:

$$\sigma_2^2 = \frac{\sum_{i=1}^5 (x_i - \bar{x})^2 + (a - \bar{x})^2 + (b - \bar{x})^2}{7}$$

واریانس دسته دوم:

گام سوم: به گفته سؤال، $\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} = 1/4$ ؛ پس داریم:

$$\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} = 1/4 \xrightarrow{1/4 = \frac{1^2}{4} = \frac{1}{2^2}} \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} = \frac{1}{2^2} \Rightarrow \frac{\sum_{i=1}^5 (x_i - \bar{x})^2}{\sum_{i=1}^5 (x_i - \bar{x})^2 + (a - \bar{x})^2 + (b - \bar{x})^2} = \frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow \frac{\cancel{1} \sum_{i=1}^5 (x_i - \bar{x})^2}{\cancel{4} \sum_{i=1}^5 (x_i - \bar{x})^2 + (a - \bar{x})^2 + (b - \bar{x})^2} = \frac{\cancel{1}}{\cancel{4}} \Rightarrow \frac{\sum_{i=1}^5 (x_i - \bar{x})^2}{\sum_{i=1}^5 (x_i - \bar{x})^2 + (a - \bar{x})^2 + (b - \bar{x})^2} = 1$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^5 (x_i - \bar{x})^2 = \sum_{i=1}^5 (x_i - \bar{x})^2 + (a - \bar{x})^2 + (b - \bar{x})^2 \Rightarrow (a - \bar{x})^2 + (b - \bar{x})^2 = 0$$

گام چهارم: در رابطه به دست آمده در گام سوم، جمع دو عبارت که همواره مثبت یا صفر هستند، برابر صفر شده؛ پس هر دوی

آنها صفر هستند:

$$\underbrace{(a - \bar{x})^2}_{\text{همواره مثبت یا صفر}} + \underbrace{(b - \bar{x})^2}_{\text{همواره مثبت یا صفر}} = 0 \Rightarrow \begin{cases} a - \bar{x} = 0 \Rightarrow a = \bar{x} \\ b - \bar{x} = 0 \Rightarrow b = \bar{x} \end{cases} \Rightarrow a = b = \bar{x}$$

پس a برابر است با میانگین داده‌های دسته اول و گزینه (۱) صحیح است.

۲۰ داده آماری با میانگین ۱۵ و ضریب تغییرات ۴۰ درصد داریم. حداقل چند داده مساوی میانگین به آن‌ها اضافه کنیم تا ضریب تغییرات از ۳۲/۱۰۰ بیشتر نباشد؟

۱۴ (۴)

۱۳ (۳)

۱۲ (۲)

۱۱ (۱)

پاسخ: گزینه ۲

مجموع مربعات اختلاف هر داده از میانگین را در داده‌های اولیه به دست آورید، این مقدار در داده‌های دسته جدید هم همین مقدار است.

Hint

ضریب تغییرات داده‌ها: معیاری است که از تقسیم انحراف معیار داده‌ها (σ) به میانگین داده‌ها ($\bar{x}$) به دست می‌آید و آن را با نماد CV نشان می‌دهند.

درس Box

$$CV = \frac{\sigma}{\bar{x}}$$

گام اول: ابتدا با توجه به داده‌های سؤال، واریانس داده‌های موجود را محاسبه می‌کنیم:

$$CV = \frac{\sigma}{\bar{x}} \Rightarrow \frac{40}{15} = \frac{\sigma}{15} \Rightarrow \sigma = \frac{40 \times 15}{100} = 6 \Rightarrow \sigma^2 = 36$$

حال با توجه به فرمول واریانس داریم:

$$\sigma^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n} \xrightarrow{\sigma^2=36, n=20} 36 = \frac{\sum_{i=1}^{20} (x_i - \bar{x})^2}{20} \Rightarrow \sum_{i=1}^{20} (x_i - \bar{x})^2 = 720 \quad (*)$$

گام دوم: در حالت دوم برای این که ضریب تغییرات از ۳۲ درصد بیشتر نباشد، باید کم‌تر مساوی ۳۲ درصد باشد، در این جا برای واریانس داریم:

$$\frac{\sigma}{\bar{x}} \leq \frac{32}{100} \Rightarrow \frac{\sigma}{15} \leq \frac{32}{100} \xrightarrow{\times 15} \sigma \leq \frac{32 \times 15}{100} \Rightarrow \sigma \leq \frac{24}{5} \Rightarrow \sigma^2 \leq \frac{576}{25}$$

گام سوم: فرض می‌کنیم در حالت دوم k داده به داده‌ها اضافه کرده‌ایم، از آن جا که این داده‌ها با میانگین مساوی هستند، پس تغییری در $\sum_{i=1}^{20} (x_i - \bar{x})^2$ (همان مجموع مربعات اختلاف داده‌ها از میانگین) ایجاد نمی‌شود؛ در نتیجه واریانس ۲۰ داده قبلی و k

داده جدید برابر می‌شود با $\frac{\sum_{i=1}^{20+k} (x_i - \bar{x})^2}{20+k}$ ، حال با استفاده از رابطه (*) در گام اول و نامساوی به دست آمده در گام دوم داریم:

$$\frac{\sum_{i=1}^{20+k} (x_i - \bar{x})^2}{20+k} \leq \frac{576}{25} \xrightarrow{(*)} \frac{720}{20+k} \leq \frac{576}{25} \xrightarrow{\div 72} \frac{10}{20+k} \leq \frac{8}{25}$$

$$\xrightarrow{k \in \mathbb{N}} \frac{20+k}{10} \geq \frac{25}{8}$$

$$\xrightarrow{\times 40} 80 + 4k \geq 125 \Rightarrow 4k \geq 45 \Rightarrow k \geq \frac{45}{4} \xrightarrow{k \in \mathbb{N}} k \geq 12$$

پس حداقل ۱۲ داده مساوی با میانگین باید اضافه کنیم تا شرط گفته شده برقرار شود.

۳۵

اگر ضریب تغییرات داده‌های $a-4$ ، $a-2$ ، a ، $a+2$ ، $a+4$ برابر ۴ باشد، ضریب تغییرات داده‌های $2a-6$ ، $2a-3$ ، $2a$ ، $2a+3$ ، $2a+6$ کدام است؟

۶ (۴)

۴ (۳)

۳ (۲)

۲ (۱)

پاسخ: گزینه ۲

Hint

داده‌های هر دسته تشکیل دنباله حسابی می‌دهند، واریانس هر دسته را با توجه به رابطه گفته‌شده در نکته سؤال (۱) به دست آورید و از روی واریانس، ضریب تغییرات را پیدا کنید.

نکته

اگر n داده طوری باشند که فاصله میان جملات متوالی یکسان باشد، میانگین n داده برابر می‌شود با:

$$\bar{x} = \frac{\text{داده اول} + \text{داده آخر}}{2}$$

گام اول: داده‌های هر دو دسته تشکیل دنباله حسابی می‌دهند، در دسته اول $d=2$ و در دسته دوم $d=3$ است، در هر دو دسته ابتدا واریانس و سپس انحراف معیار را پیدا می‌کنیم:

$$\sigma_1^2 = \left(\frac{n^2-1}{12}\right)d^2 \xrightarrow[n=5]{d=2} \sigma_1^2 = \left(\frac{25-1}{12}\right)(4) \Rightarrow \sigma_1^2 = \left(\frac{24}{12}\right)(4) \Rightarrow \sigma_1^2 = 8$$

$$\Rightarrow \sigma_1 = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$

$$\sigma_2^2 = \left(\frac{n^2-1}{12}\right)d^2 \xrightarrow[n=5]{d=3} \sigma_2^2 = \left(\frac{25-1}{12}\right)(9) \Rightarrow \sigma_2^2 = \left(\frac{24}{12}\right)(9) \Rightarrow \sigma_2^2 = 18$$

$$\Rightarrow \sigma_2 = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$$

گام دوم: گفتیم که هر دو دسته دنباله حسابی تشکیل داده‌اند؛ پس میانگین آن‌ها را طبق نکته به دست می‌آوریم و سپس ضریب تغییرات هر دسته را به دست می‌آوریم:

$$\text{دسته اول: } \bar{x}_1 = \frac{(a-4) + (a+4)}{2} = a$$

$$\text{دسته دوم: } \bar{x}_2 = \frac{(2a-6) + (2a+6)}{2} = 2a$$

گام سوم: به گفته سؤال ضریب تغییرات دسته اول برابر ۴ است؛ در نتیجه مقدار a برابر می‌شود با:

$$CV_1 = 4 \xrightarrow[\bar{x}_1=a]{\sigma_1=2\sqrt{2}} 4 = \frac{2\sqrt{2}}{a} \Rightarrow a = \frac{2\sqrt{2}}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

گام چهارم: پس ضریب تغییرات دسته دوم برابر می‌شود با:

$$CV_2 = \frac{3\sqrt{2}}{2a} \xrightarrow[a=\frac{\sqrt{2}}{2}]{a=\frac{\sqrt{2}}{2}} CV_2 = \frac{3\sqrt{2}}{2\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)} = \frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{2}} \Rightarrow CV_2 = 3$$

در کدام موارد، روش نمونه‌گیری بیان‌شده مناسب است؟

- الف) می‌خواهیم میانگین نمره‌های ریاضی دانش‌آموزان یک شهر را محاسبه کنیم. فهرست همه دانش‌آموزان را نداریم، اما فهرست مدارس، موجود است. ← طبقه‌ای
- ب) مدیر یک مدرسه می‌خواهد نظرات دانش‌آموزان را برای تغییر ساعت تعطیلی مدرسه بداند. مدرسه ۶ پایه دارد و حدس می‌زنیم که نظر ۶ پایه با هم متفاوت است. ← خوشه‌ای
- پ) شرکت واردکننده خودروهای سنگین برای بررسی عملکرد سامانه ترمز آن‌ها می‌خواهد ده درصد از خودروهای را که به مرور زمان وارد کشور می‌شوند، بازرسی کند. ← سامانمند

۲) «الف» - «پ»

۱) «الف» - «ب»

۴) «پ»

۳) «ب»

پاسخ: گزینه ۴

درس‌Box

نمونه‌گیری: فرایندی است که در آن نمونه‌ای از جامعه انتخاب می‌شود و اطلاعات آن به کل جامعه تعمیم داده می‌شود.

- نمونه‌گیری تصادفی ساده: در این روش همه واحدهای آماری برای انتخاب‌شدن در نمونه دارای احتمال یکسان هستند.
- نمونه‌گیری خوشه‌ای: در این روش ابتدا گروه‌ها یا خوشه‌ها انتخاب می‌شوند و سپس همه واحدهای آماری خوشه‌های انتخاب‌شده را به عنوان نمونه در نظر می‌گیریم.
- نمونه‌گیری طبقه‌ای: جامعه را به طبقه‌های مختلف تقسیم می‌کنیم و سپس یک نمونه تصادفی ساده از هر طبقه انتخاب می‌کنیم.
- نمونه‌گیری سامانمند یا سیستماتیک: نوعی نمونه‌گیری طبقه‌ای است که در آن اندازه طبقات یکسان است و فقط در طبقه اول به تصادف واحد آماری را انتخاب می‌کنیم و در سایر طبقات همان رویه و الگو را ادامه می‌دهیم.

پاسخ خیلی تشریحی ✓

با توجه به درس‌بکس به بررسی موارد می‌پردازیم:

- الف) چون فهرست دانش‌آموزان را نداریم، فهرست مدارس را داریم، هر مدرسه را می‌توانیم به عنوان یک خوشه در نظر بگیریم؛ پس روش نمونه‌گیری خوشه‌ای در این‌جا مناسب است.
- ب) چون نظر هر کلاس متفاوت است، هر کلاس را به عنوان یک طبقه در نظر می‌گیریم؛ در نتیجه در این‌جا روش نمونه‌گیری طبقه‌ای مناسب است.
- پ) در این‌جا چون می‌خواهیم ده درصد از خودروها را بررسی کنیم، خودروها را به طبقات ده‌تایی تقسیم می‌کنیم، در این‌جا واحدهای آماری طبقه‌ها یکسان می‌شود، پس روش نمونه‌گیری مناسب در این‌جا نمونه‌گیری سامانمند یا سیستماتیک است؛ پس فقط روش نمونه‌گیری گفته‌شده برای مورد «پ» درست است و گزینه ۴) پاسخ سؤال است.

چه تعداد از روش‌های زیر برای نمونه‌گیری اریب است؟

(الف) نمونه‌گیری راحت: افراد در دسترس را به عنوان نمونه انتخاب می‌کنیم.

(ب) نمونه‌گیری ای میلی (رایانامه‌ای): پرسش‌نامه‌ای به ای میلی‌های انتخاب‌شده ارسال می‌شود.

(پ) نمونه‌گیری هدفمند: خود محقق برای نمونه انتخابی نظر می‌دهد که چه افرادی انتخاب شوند.

(ت) نمونه‌گیری داوطلبانه: نمونه انتخابی از بین افرادی که داوطلب هستند، انتخاب می‌شود.

۴ (۴)

۳ (۳)

۲ (۲)

۱ (۱)

پاسخ: گزینه ۴

نمونه‌گیری اریب

اگر یک روش نمونه‌گیری از نمونه‌گیری ایده‌آل فاصله بگیرد و به سمتی خاص انحراف پیدا کند، می‌گویند آن روش نمونه‌گیری اریب است.

به بررسی موارد می‌پردازیم:

(الف) افراد جامعه شانس یکسانی برای انتخاب ندارند؛ پس این روش اریب است.

(ب) ممکن است همه افراد جامعه ای میلی نداشته باشند؛ پس در این‌جا هم مانند مورد قبلی، روش نمونه‌گیری اریب است.

(پ) در این‌جا تمام صفات افراد جامعه مشخص نمی‌شود و نمونه‌گیری دارای جهت خاصی می‌شود؛ پس این روش نمونه‌گیری هم اریب است.

(ت) در این‌جا نیز نمی‌توانیم به عموم افراد جامعه دست پیدا کنیم و روش نمونه‌گیری اریب است؛ پس در هر ۴ مورد داده‌شده، روش نمونه‌گیری اریب است و گزینه (۴) صحیح است.

مشاوره این سؤال از یکی از تمرینات کتاب درسی طرح شده است، به سؤالات کتاب درسی توجه ویژه‌ای داشته باشید.

درتس Box

پاسخ خیلی تشریحی ✓

چند مورد از موارد زیر درست است؟

- (الف) برای گردآوری داده‌ها، اگر نیاز به دقت زیادی داشته باشیم، روش مشاهده مناسب‌تر است.
 (ب) مرسوم‌ترین ابزار گرفتن اطلاعات، دادگان است.
 (پ) مصاحبه در مواردی که احتیاج به گرفتن نظر کارشناسان وجود دارد، روش مناسبی است.
 (ت) از مزایای روش گردآوری داده‌ها به کمک دادگان این است که همیشه اطلاعات همه بخش‌ها در دسترس ما است.

۳ (۴)

۲ (۳)

۱ (۲)

صفر (۱)

پاسخ: گزینه ۲

روش‌های گردآوری داده‌ها

- (۱) مشاهده: گردآوری داده‌ها بدون نیاز به فرد پاسخ‌گو.
 (۲) پرسش‌نامه: مجموعه سؤالات از پیش تعیین شده که توسط تعدادی پاسخ‌گو تکمیل می‌شود.
 (۳) مصاحبه: معمولاً بین دو نفر برگزار می‌شود، یکی مصاحبه‌گر (آمارگیر) و دیگری مصاحبه‌شونده (پاسخ‌گو).
 (۴) دادگان: شامل مجموعه‌ای از اطلاعات ذخیره‌شده است.

• مرسوم‌ترین روش گرفتن اطلاعات از مردم «پرسش‌نامه» است.

• نقاط ضعف روش‌های گفته‌شده عبارت است از:

پرسش‌نامه: اگر تعداد واحدهای آماری زیاد باشد، این روش زمان‌بر است.

مشاهده: اگر به دقت زیادی نیاز داشته باشیم، این روش چندان مناسب نیست.

دادگان: اطلاعات ثبت‌شده همیشه در دسترس نیست.

بررسی موارد:

- (الف) با توجه به نکات گفته‌شده، اگر نیاز به دقت زیادی داشته باشیم، روش مشاهده مناسب نیست، پس این مورد نادرست است. ✗
 (ب) مرسوم‌ترین ابزار گرفتن اطلاعات «پرسش‌نامه» است؛ پس این مورد هم نادرست است. ✗
 (پ) این مورد درست است، برای گرفتن نظر کارشناسان مصاحبه روش مناسبی است، آمارگیر در نقش مصاحبه‌گر و کارشناس در نقش مصاحبه‌شونده ظاهر می‌شوند. ✓
 (ت) گفتیم که نقطه ضعف روش دادگان این است که اطلاعات ثبت‌شده همیشه در دسترس نیست؛ در نتیجه این مورد نادرست است. ✗
 پس فقط یک مورد درست است و گزینه (۲) صحیح است.

مشاوره به همه مفاهیم مربوط به کتاب درسی مسلط باشید، چراکه بعضی از تست‌های کنکور به راحتی و با دانستن همین مفاهیم و نکات حل می‌شوند.

درسی Box

نکته

پاسخ خیلی تشریحی ✓

در نمونه گیری طبقه ای اگر بخواهیم از ۵ گروه مشخص شده در جدول زیر، نمونه ای متناسب با اعضای هر گروه انتخاب کنیم، تعداد اعضای نمونه برابر کدام یک از عددهای زیر می تواند باشد؟

نام طبقه	A	B	C	D	E
تعداد اعضای طبقه	۱۴۳	۱۸۷	۲۰۹	۵۵	۲۵۳

۱۵۴ (۴)

۱۴۳ (۳)

۱۲۱ (۲)

۱۱۰ (۱)

پاسخ: گزینه ۲

Hint

تعداد اعضای هر طبقه همگی مضرب ۱۱ هستند، با توجه به این موضوع به حل سؤال بپردازید.

گام اول: اعداد مربوط به تعداد اعضای هر طبقه مضرب ۱۱ هستند.

پاسخ خیلی تشریحی

$$۱۴۳ = ۱۱ \times ۱۳$$

$$۱۸۷ = ۱۱ \times ۱۷$$

$$۲۰۹ = ۱۱ \times ۱۹$$

$$۵۵ = ۱۱ \times ۵$$

$$۲۵۳ = ۱۱ \times ۲۳$$

گام دوم: پس اگر بخواهیم متناسب با تعداد داده های هر طبقه، نمونه خودمان را انتخاب کنیم، حداقل تعداد داده های انتخابی برابر می شود با:

$$۱۳ + ۱۷ + ۱۹ + ۵ + ۲۳ = ۷۷$$

تعداد داده های انتخابی، باید مضرب این عدد باشد که مضرب دوم آن یعنی $۲ \times ۷۷ = ۱۵۴$ در گزینه ها موجود است؛ پس گزینه (۴) صحیح است.

۴۰

می‌خواهیم از میان ۳۰۰ داده، نمونه‌ای به اندازه ۵۰ به روش سامانمند انتخاب کنیم. اگر شماره ۲۹^{امین} داده انتخاب شده ۱۷۳ باشد، شماره ۱۷^{امین} داده انتخاب شده کدام است؟

۵۳ (۴)

۴۷ (۳)

۴۱ (۲)

۳۵ (۱)

پاسخ: گزینه ۲

Hint

با توجه به اندازه نمونه داده شده، اندازه هر طبقه را به دست آورید و سپس از نکته گفته شده استفاده کنید.

نکته

در نمونه‌گیری به روش سامانمند یا سیستماتیک، شماره داده‌های انتخاب شده، یک دنباله حسابی با قدرنسبت «اندازه هر طبقه» می‌سازند. جمله اول این دنباله نیز به طور تصادفی از طبقه اول انتخاب می‌شود.

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: می‌دانیم که در روش سامانمند، داده‌ها را در طبقه‌هایی به اندازه برابر تقسیم می‌کنیم و از هر یک از طبقه‌ها یک داده انتخاب می‌کنیم؛ پس برای این که ۵۰ داده انتخاب شود، باید داده‌ها را به ۵۰ طبقه تقسیم کنیم:

$$300 \div 50 = 6$$

پس اندازه هر طبقه برابر ۶ است.

گام دوم: با توجه به نکته گفته شده قدرنسبت دنباله حسابی تشکیل شده $d = 6$ است و طبق گفته سؤال شماره ۲۹^{امین} داده انتخاب شده ۱۷۳ است، یعنی $a_{29} = 173$ ؛ در نتیجه:

$$a_n = a_1 + (n-1)d \Rightarrow a_{29} = a_1 + 28d \xrightarrow[d=6]{a_{29}=173} 173 = a_1 + 28(6)$$

$$\Rightarrow 173 = a_1 + 168 \Rightarrow a_1 = 5$$

گام سوم: حالا که a_1 و d را داریم، ۱۷^{امین} داده انتخاب شده یا a_{17} برابر می‌شود با:

$$a_v = a_1 + 6d \xrightarrow[d=6]{a_1=5} a_v = 5 + 6(6) = 5 + 36 \Rightarrow a_v = 41$$

دوقطبی های مغناطیسی کدام یک از مواد زیر در حضور میدان مغناطیسی خارجی قوی، خاصیت مغناطیسی ضعیف و موقت پیدا می کنند؟

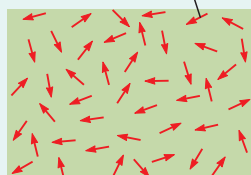
- (۱) پلاتین (۲) نقره (۳) مس (۴) آهن

پاسخ: گزینه ۱

درس Box

موادی را که اتم ها یا مولکول های سازنده آنها خاصیت مغناطیسی داشته باشند، مواد مغناطیسی می نامند. در واقع می توان گفت، کوچک ترین ذره های تشکیل دهنده این مواد (اتم ها یا مولکول ها) مانند دوقطبی مغناطیسی رفتار می کنند. دوقطبی های مغناطیسی را با یک پیکان کوچک نشان می دهیم که می توانند جهت گیری های متفاوتی داشته باشند و هر کدام از آنها وابسته به یک اتم یا مولکول اند.

یکی از انواع مواد مغناطیسی، مواد پارامغناطیسی است که اتم های آنها خاصیت مغناطیسی دارند، اما دوقطبی های مغناطیسی وابسته به آنها به طور کاتوره ای سمت گیری کرده اند و میدان مغناطیسی خالصی ایجاد نمی کنند. با قراردادن مواد پارامغناطیسی، درون میدان مغناطیسی خارجی قوی، دوقطبی های مغناطیسی آنها به مقدار مختصری در راستای خط های میدان مغناطیسی منظم می شوند، بنابراین می توان گفت مواد پارامغناطیسی، در حضور میدان های مغناطیسی خارجی قوی، خاصیت مغناطیسی ضعیف و موقت پیدا می کنند. اورانیوم، پلاتین، آلومینیم، سدیم، اکسیژن و اکسید نیتروژن از جمله مواد پارامغناطیسی اند.



سمت گیری کاتوره ای دوقطبی های مغناطیسی در

یک ماده پارامغناطیسی در نبود میدان مغناطیسی

مواد پارامغناطیسی در حضور میدان مغناطیسی خارجی قوی، خاصیت مغناطیسی ضعیف و موقت پیدا می کنند که پلاتین از جمله این مواد است.

پاسخ خیلی تشریحی ✓

شکل زیر، یک ماده مغناطیسی را در حضور یک میدان مغناطیسی خارجی نشان می‌دهد. نوع این ماده مغناطیسی کدام است و این ماده در چه شرایطی قرار دارد؟

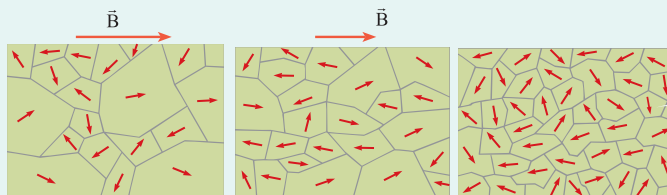


- (۱) ماده فرومغناطیسی در حضور میدان مغناطیسی خارجی ضعیف
- (۲) ماده پارامغناطیسی در حضور میدان مغناطیسی خارجی ضعیف
- (۳) ماده فرومغناطیسی در حضور میدان مغناطیسی خارجی قوی
- (۴) ماده پارامغناطیسی در حضور میدان مغناطیسی خارجی قوی

پاسخ: گزینه ۳

درس: Box

مواد فرومغناطیسی: نوعی از مواد مغناطیسی‌اند که اتم‌های آن‌ها به طور ذاتی دارای دو قطبی مغناطیسی هستند. برهم‌کنش‌های قوی بین دو قطبی‌های مغناطیسی در این مواد موجب می‌شود که این دو قطبی‌ها، حتی در نبود میدان خارجی، در ناحیه‌هایی که حوزه‌های مغناطیسی نامیده می‌شوند، همسو شوند. مواد فرومغناطیسی را می‌توان با قراردادن در یک میدان مغناطیسی، آهنربا کرد. با حضور آهنربا، حوزه‌هایی که نسبت به میدان آن همسو هستند، رشد می‌کنند و حجمشان زیاد می‌شود. از سوی دیگر، حجم حوزه‌هایی که سمت‌گیری آن‌ها در راستای میدان آهنربا نیست، کم می‌شود. در این فرایند، مرز بین بیشتر حوزه‌ها جابه‌جا می‌شود و ماده، خاصیت آهنربایی پیدا می‌کند.



ابعاد حوزه‌ها از مرتبه دهم تا هزارم میلی‌متر است.

(الف) ماده فرومغناطیسی در نبود میدان مغناطیسی خارجی

(ب) ماده فرومغناطیسی در حضور میدان مغناطیسی ضعیف

(پ) ماده فرومغناطیسی در حضور میدان مغناطیسی خارجی قوی

پاسخ خیلی تشریحی ✓ شکل، نشان‌دهنده یک ماده فرومغناطیسی در حضور میدان مغناطیسی خارجی قوی است و همان‌طور که می‌بینید، حجم تعدادی از حوزه‌ها افزایش یافته و حجم تعدادی نیز کاهش یافته است. حوزه‌هایی که حجمشان افزایش یافته، همسو با میدان مغناطیسی خارجی شده‌اند و حوزه‌هایی که حجمشان کاهش یافته، با میدان مغناطیسی خارجی همسو نیستند.

چه تعداد از موارد زیر درست است؟

الف) اتم‌ها یا مولکول‌های تشکیل دهندهٔ مواد مغناطیسی مانند دوقطبی مغناطیسی رفتار می‌کنند.

ب) اتم‌های مواد پارامغناطیسی به طور ذاتی فاقد خاصیت مغناطیسی‌اند.

پ) میدان مغناطیسی خارجی، می‌تواند سبب القای دوقطبی‌های مغناطیسی در مواد دیامغناطیسی شود.

ت) در مواد فرومغناطیسی، برهم‌کنش‌های قوی بین دوقطبی‌های مغناطیسی موجب می‌شود که حتی در نبود میدان مغناطیسی خارجی، در

ناحیه‌هایی، دوقطبی‌های آن، همسو شوند.

۴ (۴)

۳ (۳)

۲ (۲)

۱ (۱)

پاسخ: گزینه ۳

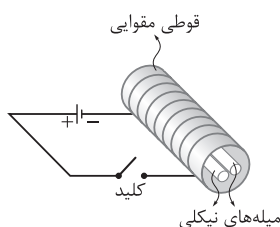
درتس Box

مواد دیامغناطیسی: اتم‌های مواد دیامغناطیسی، نظیر مس، نقره، سرب و بیسموت، به طور ذاتی فاقد خاصیت مغناطیسی‌اند. به عبارت دیگر، هیچ‌یک از اتم‌های این مواد، دارای دوقطبی مغناطیسی خالصی نیستند. با وجود این، حضور میدان مغناطیسی خارجی، می‌تواند سبب القای دوقطبی‌های مغناطیسی در خلاف سوی میدان خارجی، در مواد دیامغناطیسی می‌شود.

تمامی عبارت‌ها به‌جز مورد «ب» صحیح هستند و فقط مورد «ب» نادرست است، زیرا اتم‌های مواد پارامغناطیسی به طور ذاتی دارای خاصیت مغناطیسی هستند.

پاسخ‌خیلی تشریحی ✓

دو میله فلزی بلند از جنس نیکل، مطابق شکل زیر، درون سیم‌لوله‌ای که دور یک قوطی مقوایی پیچیده شده است، قرار دارند. با بستن و سپس بازشدن کلید این مدار، حرکت میله‌ها چگونه خواهد بود؟



(۱) ابتدا دور و سپس با بازشدن کلید، نزدیک می‌شوند.

(۲) دور شده و پس از بازشدن کلید در همان وضعیت باقی می‌مانند.

(۳) از درون سیم‌لوله خارج شده و پس از بازشدن کلید به محل قبل خود بازمی‌گردند.

(۴) از درون سیم‌لوله خارج شده و پس از بازشدن کلید در همان وضعیت باقی می‌مانند.

پاسخ: گزینه ۱

درتس Box

● **مواد فرومغناطیسی نرم:** حوزه‌های مغناطیسی این مواد در حضور میدان مغناطیسی خارجی به سهولت تغییر می‌کنند و ماده به سادگی آهنربا می‌شود و با حذف میدان خارجی نیز خاصیت آهنربایی خود را به آسانی از دست می‌دهند. از این مواد در ساخت هسته پیچ‌ها و سیم‌لوله‌ها و برای ساختن آهنرباهای الکتریکی (غیر دائم) استفاده می‌شود، مانند: آهن، نیکل و کبالت.

● **مواد فرومغناطیسی سخت:** این مواد به سختی آهنربا می‌شوند، یعنی در حضور میدان مغناطیسی خارجی، حجم حوزه‌ها در آن‌ها به سختی تغییر می‌کند. در این مواد، سمت‌گیری دوقطبی‌های مغناطیسی حوزه‌ها پس از حذف میدان خارجی، تا مدت زیادی، تقریباً بدون تغییر باقی می‌ماند؛ به همین دلیل از این مواد مانند فولاد، آلیاژهای آهن، کبالت و نیکل برای ساختن آهنرباهای دائمی استفاده می‌شود.

با بستن کلید، میله‌های نیکلی که درون سیم‌لوله قرار دارند، چون از نوع مواد فرومغناطیس نرم هستند، به سرعت آهنربا می‌شوند و همدیگر را دفع کرده و از هم دور می‌شوند. در ادامه، با بازشدن کلید، میله‌های مذکور به سرعت خاصیت آهنربایی خود را از دست داده و مجدداً به هم نزدیک می‌شوند.

✓ پاسخ خیلی تشریحی

حلقه‌ای به شعاع 10 cm ، درون میدان مغناطیسی یکنواخت $B = 0.06 \text{ T}$ قرار دارد و خطوط میدان با سطح حلقه، زاویه 3° می‌سازند. شار مغناطیسی‌ای که از سطح حلقه می‌گذرد، چند وبر است؟ ($\pi = 3$)

- (۱) 9×10^{-4} (۲) 9×10^{-3}
(۳) $9\sqrt{3} \times 10^{-4}$ (۴) $9\sqrt{3} \times 10^{-3}$

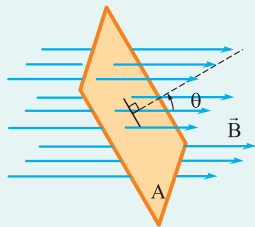
پاسخ: گزینه ۱

Hint ابتدا مساحت حلقه را از رابطه $(A = \pi r^2)$ محاسبه کنید و سپس به کمک رابطه شار مغناطیسی $(\Phi = BA \cos \theta)$ خواسته مسئله را به دست آورید.

درس‌Box

شار مغناطیسی کمیتی است که با خطوط میدان مغناطیسی که به طور عمود از یک سطح بسته می‌گذرند، در ارتباط است و مقدار آن در یک میدان مغناطیسی یکنواخت از رابطه مقابل به دست می‌آید:

$$\Phi = BA \cos \theta$$



نیم‌خط عمود بر سطح، با میدان یکنواخت $\vec{B}$ زاویه θ می‌سازد.

Φ : شار مغناطیسی (Wb)

B : میدان مغناطیسی (T)

A : مساحت سطحی که میدان مغناطیسی از آن عبور می‌کند (m^2)

θ : زاویه بین بردار میدان مغناطیسی و نیم‌خط عمود بر سطح حلقه

شار مغناطیسی، کمیتی نرده‌ای است و یکای آن در SI، وبر (Wb) است که با توجه به رابطه فوق داریم:

$$1 \text{ Wb} = 1 \text{ T} \times 1 \text{ m}^2$$

تذکر: اگر زاویه بین میدان مغناطیسی و سطح حلقه را α بنامیم، آن‌گاه داریم:

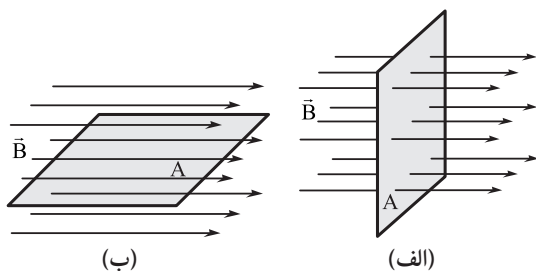
$$\theta = 90^\circ - \alpha$$

پاسخ خیلی تشریحی ابتدا مساحت حلقه‌ای که میدان مغناطیسی از آن عبور می‌کند را محاسبه می‌کنیم و سپس شار مغناطیسی عبوری از آن را به دست می‌آوریم:

$$A = \pi r^2 \Rightarrow A = 3 \times (0.1)^2 \Rightarrow A = 3 \times 10^{-2} \text{ m}^2, \quad \theta = 90^\circ - 3^\circ = 87^\circ$$

$$\Phi = BA \cos \theta \Rightarrow \Phi = 6 \times 10^{-2} \times 3 \times 10^{-2} \times \frac{1}{2} \Rightarrow \Phi = 9 \times 10^{-4} \text{ Wb}$$

مطابق شکل (الف)، سطح حلقهٔ رسانایی به شکل مربع با ضلع 20 cm ، عمود بر میدان مغناطیسی یکنواختی قرار دارد. حلقه را می چرخانیم به طوری که مشابه شکل (ب)، سطح حلقه موازی با خط‌های میدان مغناطیسی شود، اگر در این چرخش، شار مغناطیسی گذرنده از حلقه به اندازه 1 mWb تغییر کند، اندازهٔ میدان مغناطیسی چند گاوس است؟



۵۰۰ (۱)

۲۵۰ (۲)

۵۰ (۳)

۲۵ (۴)

پاسخ: گزینهٔ ۲

پاسخ خیلی تشریحی ✓ در شکل (الف) خطوط میدان مغناطیسی عمود بر سطح حلقه است:

$$\alpha = 90^\circ \Rightarrow \theta = 90^\circ - \alpha \Rightarrow \theta = 0^\circ$$

$$\Phi = BA \cos \theta \Rightarrow \Phi_1 = BA \cos 0^\circ \Rightarrow \Phi_1 = BA$$

در شکل (ب) سطح حلقه موازی خطوط میدان مغناطیسی است، بنابراین:

$$\alpha = 0^\circ \Rightarrow \theta = 90^\circ - 0^\circ \Rightarrow \theta = 90^\circ$$

$$\Phi_2 = BA \cos 90^\circ \Rightarrow \Phi_2 = 0$$

در این صورت اندازهٔ تغییر شار برابر است با شار اولیه:

$$|\Delta \Phi| = |\Phi_2 - \Phi_1| \Rightarrow 1 \times 10^{-3} = |0 - BA| \Rightarrow BA = 1 \times 10^{-3}$$

$$\xrightarrow{A = (20)^2} B = \frac{10^{-3}}{4 \times 10^{-2}} \Rightarrow B = 0.25 \times 10^{-1} \text{ T} \times 10^4 \Rightarrow B = 250 \text{ G}$$

بردار میدان مغناطیسی یکنواختی در SI به صورت $\vec{B} = 0/8\vec{i} + 0/6\vec{j}$ است و حلقه‌ای به مساحت 500 cm^2 که سطح آن موازی با محور y و عمود بر محور x است، در این میدان قرار دارد. بدون تغییر در جهت میدان، اندازه آن را تقریباً چند تسلا تغییر دهیم تا شار مغناطیسی گذرنده از حلقه به 50 میلی‌ویر برسد؟

- ۰/۱۶ (۱) ۰/۲۶ (۲) ۰/۳۶ (۳) ۰/۴ (۴)

پاسخ: گزینه ۱

پاسخ خیلی تشریحی ✓

گام اول: ابتدا شار مغناطیسی عبوری از حلقه را در حالت اول به دست می‌آوریم:

چون سطح حلقه موازی با محور y است، بنابراین $\alpha_y = 0^\circ$ و $\alpha_y = 90^\circ - \theta_y = 90^\circ$ در نتیجه شار عبوری توسط مؤلفه y میدان صفر است.

با توجه به این که سطح حلقه عمود بر محور x است:

$$\alpha_x = 90^\circ \Rightarrow \theta_x = 90^\circ - 90^\circ = 0^\circ$$

$$\Phi = B_x A \cos \theta_x \Rightarrow \Phi_1 = 8 \times 10^{-1} \times 500 \times 10^{-4} \times \cos 0^\circ \Rightarrow \Phi_1 = 40 \times 10^{-3} \text{ Wb} \Rightarrow \Phi_1 = 40 \text{ mWb}$$

گام دوم: با توجه به این که شار مغناطیسی عبوری از حلقه به 50 mWb می‌رسد، داریم:

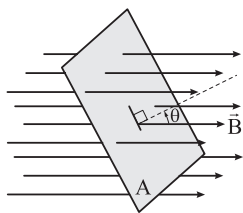
$$|B_1| = \sqrt{(0/8)^2 + (0/6)^2} \Rightarrow |B_1| = \sqrt{0/64 + 0/36} \Rightarrow |B_1| = \sqrt{1} = 1 \text{ T}$$

$$\frac{\Phi_2}{\Phi_1} = \frac{|B_{x_2}|}{|B_{x_1}|} \Rightarrow \frac{50}{40} = \frac{|B_{x_2}|}{0/8} \Rightarrow |B_{x_2}| = 1 \text{ T}$$

$$\Rightarrow |B_2| = \sqrt{(1)^2 + (0/6)^2} = \sqrt{1/36} \Rightarrow |B_2| \approx 1/16 \text{ T}$$

$$\Rightarrow \Delta B = |B_2| - |B_1| \Rightarrow \Delta B \approx 1/16 - 1 \approx 0/16 \text{ T}$$

در شکل زیر، قایبی به مساحت $A = 40 \text{ cm}^2$ در میدان مغناطیسی یکنواخت $B = 5 \times 10^{-2} \text{ T}$ قرار دارد. اگر در مدت زمان 20 ms زاویه θ از 37° به 53° برسد، بزرگی نیروی محرکه القایی در قاب چند ولت خواهد بود؟ ($\cos 53^\circ = 0.6$)



(۱) 4×10^{-2}

(۲) 2×10^{-2}

(۳) 4×10^{-3}

(۴) 2×10^{-3}

پاسخ: گزینه ۴

با استفاده از رابطه نیروی محرکه القایی متوسط $(\varepsilon = \frac{-NBA(\cos \theta_f - \cos \theta_i)}{\Delta t})$ می‌توانید اندازه آن را محاسبه کنید.

Hint

درس Box

محاسبه تغییر شار مغناطیسی در یک مدار بسته:

برای محاسبه تغییر شار $(\Delta \Phi)$ اصولاً باید Φ_1 را از Φ_2 کم کنیم که با توجه به این موضوع ساده و بدیهی، سه حالت زیر می‌توانند عامل تغییر شار در مدار بسته باشند:

(۱) تغییر میدان:

$$\begin{cases} \Phi_1 = B_1 A \cos \theta \\ \Phi_2 = B_2 A \cos \theta \end{cases} \Rightarrow \Delta \Phi = \Phi_2 - \Phi_1 \Rightarrow \Delta \Phi = \Delta B A \cos \theta$$

(۲) تغییر مساحت:

$$\begin{cases} \Phi_1 = B A_1 \cos \theta \\ \Phi_2 = B A_2 \cos \theta \end{cases} \Rightarrow \Delta \Phi = \Phi_2 - \Phi_1 \Rightarrow \Delta \Phi = B \Delta A \cos \theta$$

(۳) تغییر زاویه:

$$\begin{cases} \Phi_1 = B A \cos \theta_1 \\ \Phi_2 = B A \cos \theta_2 \end{cases} \Rightarrow \Delta \Phi = \Phi_2 - \Phi_1 \Rightarrow \Delta \Phi = B A (\cos \theta_2 - \cos \theta_1)$$

قانون القای الکترومغناطیسی فاراده:

مطابق این قانون، هرگاه شار مغناطیسی عبوری از یک سطح بسته تغییر کند، نیروی محرکه‌ای در آن القا می‌شود که بزرگی آن با آهنگ تغییر شار مغناطیسی متناسب است.

$$\varepsilon = -N \frac{\Delta \Phi}{\Delta t}$$

ε : نیروی محرکه القایی متوسط (V)

N: تعداد دور

$$\frac{\Delta \Phi}{\Delta t} \begin{cases} \text{تغییر شار (Wb)} \\ \text{مدت زمان (s)} \end{cases} \quad \text{آهنگ تغییر شار (Wb/s)}$$

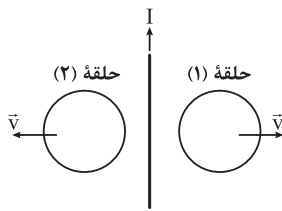
پاسخ خیلی تشریحی ✓

$$|\varepsilon| = |-N \frac{\Delta \Phi}{\Delta t}| \Rightarrow |\varepsilon| = |-N \frac{BA(\cos \theta_f - \cos \theta_i)}{\Delta t}|$$

$$\Rightarrow |\varepsilon| = |-1 \times \frac{5 \times 10^{-2} \times 40 \times 10^{-4} (\cos 53^\circ - \cos 37^\circ)}{20 \times 10^{-3}}| \Rightarrow |\varepsilon| = \frac{-200 \times 10^{-6} (0.6 - 0.8)}{20 \times 10^{-3}}$$

$$\Rightarrow |\varepsilon| = 2 \times 10^{-3} \text{ V}$$

در شکل زیر، دو حلقهٔ رسانا در نزدیکی یک سیم بلند حامل جریان ثابت I ، قرار دارند. این دو حلقه در جهت‌های نشان‌داده شده در حال دور شدن از سیم هستند، جهت جریان القایی در حلقه‌های (۱) و (۲)، به ترتیب از راست به چپ کدام است؟



- (۱) ساعتگرد - ساعتگرد
- (۲) پادساعتگرد - پادساعتگرد
- (۳) ساعتگرد - پادساعتگرد
- (۴) پادساعتگرد - ساعتگرد

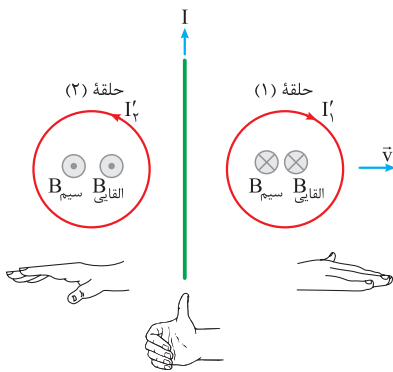
پاسخ: گزینه ۳

درتس Box

قانون لنز: این قانون روشی است برای تعیین جهت جریان القایی در یک پیچ یا هر مدار بسته دیگر؛ براساس این قانون، جریان حاصل از نیروی محرکه القایی در یک مدار یا پیچ در جهتی است که آثار مغناطیسی ناشی از آن، با عامل به وجود آورندهٔ جریان القایی، یعنی تغییر شار مغناطیسی، مخالفت می‌کند.

به عنوان مثال، اگر افزایش میدان مغناطیسی، باعث تغییر شار و در نتیجه ایجاد نیروی محرکه القایی باشد، جریان القایی در جهتی ایجاد می‌شود تا میدان مغناطیسی حاصل از آن در خلاف جهت میدان مغناطیسی موجود بوده و آن را کاهش دهد.

با استفاده از قاعدهٔ دست راست مشخص می‌کنیم که میدان مغناطیسی حاصل از سیم در سمت راست آن درون سو و در سمت چپ آن برون سو است. ✓ پاسخ خیلی تشریحی



همان‌طور که می‌دانید، با دور شدن از سیم حامل جریان، اندازهٔ میدان مغناطیسی ایجادشده توسط آن کاهش می‌یابد، بنابراین در حلقهٔ (۱) که در حال دور شدن از سیم است، میدان مغناطیسی و در نتیجه شار عبوری، کاهش یافته است که بر طبق قانون لنز، جریان القایی باید در جهتی ایجاد شود که با کاهش میدان درون‌سوی حاصل از سیم مخالفت کند، پس باید با آن هم جهت باشد و چون میدان مغناطیسی القایی نیز درون‌سو خواهد بود، جریان القایی در حلقهٔ (۱)، ساعتگرد می‌شود.

در حلقهٔ (۲) نیز که در حال دور شدن از سیم است، میدان و شار مغناطیسی عبوری از آن کاهش می‌یابد و براساس قانون لنز، جریان القایی باید در جهتی باشد که با کاهش میدان برون‌سوی حاصل از سیم مخالفت کند، یعنی میدان مغناطیسی القایی نیز باید برون‌سو بوده، پس جریان القایی در حلقهٔ (۲)، پادساعتگرد می‌شود.

۵۰

معادله شار مغناطیسی گذرنده از پیچه‌ای بر حسب زمان در SI به صورت $\Phi = t^2 - 6t + 8$ است. اگر بزرگی نیروی محرکه القایی در

حلقه در بازه زمانی $t_1 = 3 \text{ s}$ تا $t_2 = 5 \text{ s}$ برابر 80 V باشد، تعداد حلقه‌های این پیچه، کدام است؟

۸۰ (۴)

۵۰ (۳)

۴۰ (۲)

۲۰ (۱)

پاسخ: گزینه ۲

Hint

ابتدا تغییرات شار مغناطیسی را در بازه زمانی $t_1 = 3 \text{ s}$ تا $t_2 = 5 \text{ s}$ به دست آورید و سپس، مقدار آن را در رابطه نیروی محرکه القایی $|\varepsilon| = N \frac{\Delta\Phi}{\Delta t}$ قرار دهید و تعداد دورهای پیچه را محاسبه کنید.

پاسخ خیلی تشریحی ✓

گام اول: تغییر شار مغناطیسی عبوری از پیچه در بازه زمانی $t_1 = 3 \text{ s}$ تا $t_2 = 5 \text{ s}$ را محاسبه می‌کنیم:

$$t_1 = 3 \text{ s} \Rightarrow \Phi_1 = (3)^2 - 6(3) + 8 \Rightarrow \Phi_1 = 9 - 18 + 8 = -1 \text{ Wb}$$

$$t_2 = 5 \text{ s} \Rightarrow \Phi_2 = (5)^2 - 6(5) + 8 \Rightarrow \Phi_2 = 25 - 30 + 8 = 3 \text{ Wb}$$

$$\Delta\Phi = \Phi_2 - \Phi_1 \Rightarrow \Delta\Phi = 3 - (-1) = 4 \text{ Wb}$$

گام دوم: حال به کمک رابطه نیروی محرکه القایی، تعداد دورهای پیچه را به دست می‌آوریم:

$$|\varepsilon| = N \frac{\Delta\Phi}{\Delta t} \Rightarrow 80 = N \times \frac{4}{2} \Rightarrow N = 40$$

پیچه‌ای از ۲۰۰ حلقه تشکیل شده است؛ شار مغناطیسی گذرنده از این پیچه در مدتی مشخص از 0.15 Wb به 0.4 Wb می‌رسد. اگر در مدت تغییر شار مغناطیسی، بار الکتریکی 1 C در پیچه شارش پیدا کند، مقاومت الکتریکی پیچه چند اهم است؟

- ۱) 0.5 ۲) 1 ۳) 5 ۴) 10

پاسخ: گزینه ۳

Hint با استفاده از رابطه بار القایی شارش شده در پیچه ($q = \frac{N\Delta\Phi}{R}$)، می‌توانید به راحتی مقاومت الکتریکی پیچه را به دست آورید.

دروس Box

بار القایی شارش شده در پیچه با کمک رابطه شدت جریان متوسط، به صورت زیر به دست می‌آید.

$$\left. \begin{aligned} |\varepsilon| &= N \frac{\Delta\Phi}{\Delta t} \\ I &= \frac{\varepsilon}{R} \\ I &= \frac{q}{\Delta t} \end{aligned} \right\} \frac{q}{\Delta t} = \frac{N\Delta\Phi}{\Delta t \cdot R} \Rightarrow q = \frac{N\Delta\Phi}{R}$$

پاسخ خیلی تشریحی ✓

$$q = \frac{N\Delta\Phi}{R} \Rightarrow 1 = \frac{200 \times (0.4 - 0.15)}{R} \Rightarrow R = 200 \times 0.25 \Rightarrow R = 50 \Omega$$

سطح حلقه‌های پیچیده‌ای که دارای ۲۰۰ حلقه است، عمود بر میدان مغناطیسی یکنواختی به بزرگی 400 G قرار دارد. میدان مغناطیسی در مدت 4 ms تغییر می‌کند و به 800 G در خلاف جهت اولیه می‌رسد. اگر در این مدت، بزرگی نیروی محرکه القایی متوسط در پیچه، 30 V باشد، مساحت هر حلقه پیچه، چند سانتی‌متر مربع است؟

۱۵۰ (۴)

۱۵ (۳)

۵۰ (۲)

۵ (۱)

پاسخ: گزینه ۲

پاسخ خیلی تشریحی ✓ با توجه به این که عامل تغییر شار مغناطیسی، تغییر میدان مغناطیسی است، می‌توانیم رابطه نیروی محرکه القایی را به صورت زیر بنویسیم.

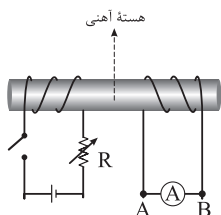
$$|\varepsilon| = \frac{N\Delta\Phi}{\Delta t} \Rightarrow |\varepsilon| = \frac{N\Delta BA \cos\theta}{\Delta t}$$

میدان مغناطیسی عمود بر سطح حلقه‌های پیچه است، بنابراین $\alpha = 90^\circ$ و $\theta = 90^\circ - \alpha = 0^\circ$ است.

$$30 = 200 \times \frac{(800 - (-400)) \times 10^{-4} \times A \times \cos 0^\circ}{4 \times 10^{-3}} \Rightarrow 30 = \frac{200 \times 1200 \times 10^{-4} \times A}{4 \times 10^{-3}}$$

$$\Rightarrow A = \frac{3 \times 4 \times 10^{-2}}{2 \times 12} \Rightarrow A = \frac{1}{2} \times 10^{-2} \text{ m}^2 \times 10^4 \Rightarrow A = 50 \text{ cm}^2$$

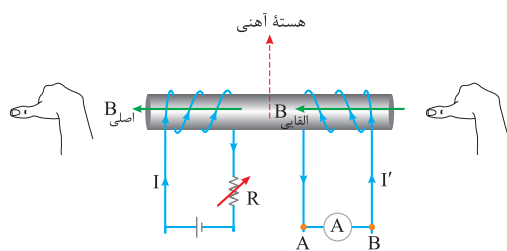
در شکل زیر، کدام تغییرات سبب القای جریان الکتریکی در آمپرسنج از نقطه A به نقطه B می‌شود؟ (تغییر مقاومت رئوستا را در حالتی انجام می‌دهیم که کلید بسته است.)



- (۱) بستن کلید یا کاهش مقاومت رئوستا
- (۲) بستن کلید یا افزایش مقاومت رئوستا
- (۳) بازکردن کلید یا کاهش مقاومت رئوستا
- (۴) بازکردن کلید یا افزایش مقاومت رئوستا

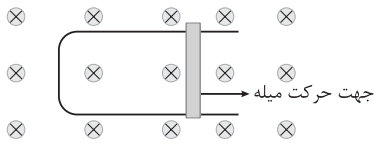
پاسخ: گزینه ۴

پاسخ خیلی تشریحی ✓



مطابق شکل و طبق قاعده دست راست، میدان مغناطیسی اصلی و میدان مغناطیسی القایی را در هر دو سیم‌لوله مشخص می‌کنیم. با توجه به این‌که میدان مغناطیسی القایی با میدان مغناطیسی اصلی، هم‌جهت شده‌اند، نتیجه می‌گیریم که شار مغناطیسی عبوری از سیم‌لوله‌ی دارای باتری در حال کاهش بوده است که عواملی مانند بازکردن کلید و یا افزایش مقاومت رئوستا که منجر به کاهش جریان و در نتیجه کاهش میدان مغناطیسی اصلی می‌شوند، می‌تواند سبب این شود.

در شکل زیر، سطح رسانای U شکل، عمود بر میدان مغناطیسی یکنواخت $B = 250 \text{ G}$ قرار دارد. میله با تندی ثابت در جهت نشان داده شده در حرکت است. اگر بزرگی نیروی محرکه القایی متوسط در قاب، 4 mV باشد، به ترتیب، آهنگ افزایش مساحت سطح این قاب چند سانتی متر مربع بر ثانیه و جریان القایی در قاب در چه جهتی است؟



(۱) - ۱۶۰۰ - ساعتگرد

(۲) - ۸۰۰ - پادساعتگرد

(۳) - ۸۰ - ساعتگرد

(۴) - ۱۶۰۰ - پادساعتگرد

پاسخ: گزینه ۴

پاسخ خیلی تشریحی ✓ گام اول: همان طور که می بینید، تغییر شار مغناطیسی، ناشی از تغییر مساحت است، بنابراین می توانیم رابطه نیروی محرکه القایی را به صورت زیر بنویسیم:

$$|\varepsilon| = \frac{N\Delta\Phi}{\Delta t} \Rightarrow |\varepsilon| = \frac{N.B.\Delta A.\cos\theta}{\Delta t}$$

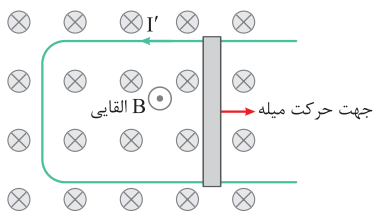
میدان مغناطیسی عمود بر سطح قاب است، پس $\alpha = 90^\circ$ و $\theta = 90^\circ - \alpha = 0^\circ$ می باشد.

گام دوم: آهنگ تغییر مساحت را محاسبه می کنیم:

$$|\varepsilon| = N \frac{B\Delta A \cos\theta}{\Delta t} \Rightarrow 4 \times 10^{-3} = \frac{1 \times 250 \times 10^{-4} \times 1 \times \Delta A}{\Delta t} \Rightarrow \frac{\Delta A}{\Delta t} = \frac{4 \times 10^{-3}}{25 \times 10^{-3}}$$

$$\Rightarrow \frac{\Delta A}{\Delta t} = \frac{4}{25} = 0.16 \text{ m}^2/\text{s} \times \frac{10^4 \text{ cm}^2}{1 \text{ m}^2} \Rightarrow \frac{\Delta A}{\Delta t} = 1600 \text{ cm}^2/\text{s}$$

گام سوم: برای تعیین جهت جریان القایی در قاب، دقت کنید که با توجه به این که میله به سمت راست حرکت می کند، مساحت در حال افزایش است، پس شار مغناطیسی عبوری از قاب افزایش می یابد، در این صورت میدان مغناطیسی القایی باید در خلاف جهت میدان مغناطیسی موجود ایجاد شود تا شار مغناطیسی را کاهش دهد. در نتیجه، میدان مغناطیسی القایی، برون سو و جریان القایی پادساعتگرد خواهد بود.



۵۵ یکای فرعی کدام کمیت، $\frac{\text{kg} \cdot \text{m}^2}{\text{A} \cdot \text{s}^3}$ است؟

(۲) آهنگ تغییر میدان مغناطیسی

(۱) میدان مغناطیسی

(۴) آهنگ تغییر شار مغناطیسی

(۳) شار مغناطیسی

پاسخ: گزینه ۲

پاسخ خیلی تشریحی ✓ طبق رابطه $\Delta U = q\Delta V$ داریم:

$$J = C \cdot V$$

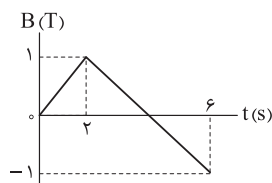
↓ ↓ ↓
ژول کولن ولت

یکای ΔU در SI ژول است و یکای ژول برحسب یکاهای اصلی، $\frac{\text{kg} \cdot \text{m}^2}{\text{s}^2}$ می باشد. همچنین یکای بار الکتریکی در SI کولن است و کولن برحسب یکاهای اصلی A.s است، بنابراین:

$$\frac{\text{kg} \cdot \text{m}^2}{\text{s}^2} = \text{A} \cdot \text{s} \times V \Rightarrow V = \frac{\text{kg} \cdot \text{m}^2}{\text{A} \cdot \text{s}^3}$$

بنابراین یکای مطرح شده، معادل یکای ولت در SI است که در بین گزینه ها یکای آهنگ تغییر شار مغناطیسی که همان نیروی محرکه القایی است، در SI ولت می باشد.

پیچه‌ای دارای 50° حلقه و مساحت سطح هر حلقه آن 40 cm^2 است. پیچه، طوری در یک میدان مغناطیسی قرار گرفته است که خط‌های میدان، عمود بر سطح حلقه‌های پیچه‌اند. اگر نمودار تغییرات میدان مغناطیسی بر حسب زمان به شکل زیر باشد، نیروی محرکه القایی متوسط در پیچه در بازه زمانی $t_1 = 1 \text{ s}$ تا $t_2 = 5 \text{ s}$ چند ولت است؟



(۱) صفر

(۲) $0/4$

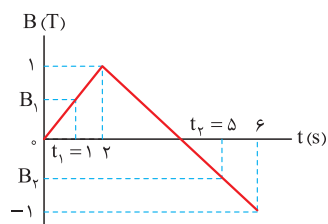
(۳) $0/5$

(۴) ۱

پاسخ: گزینه ۳

پاسخ خیلی تشریحی ✓ در این جا عامل تغییر شار مغناطیسی و در نتیجه ایجاد نیروی محرکه القایی، تغییرات میدان مغناطیسی است.

گام اول: ابتدا به کمک شیب نمودار اندازه میدان مغناطیسی در دو لحظه $t_1 = 1 \text{ s}$ و $t_2 = 5 \text{ s}$ را به دست می‌آوریم:



در بازه زمانی $t = 0 \text{ s}$ تا $t = 2 \text{ s}$:

$$\frac{1}{2} = \frac{B_1}{t_1} \xrightarrow{t_1=1 \text{ s}} B_1 = 0/5 \text{ T}$$

در بازه زمانی $t = 2 \text{ s}$ تا $t = 6 \text{ s}$:

$$\Rightarrow \frac{-1-1}{6-2} = \frac{B_2-1}{t_2-2} \xrightarrow{t_2=5 \text{ s}} B_2-1 = -\frac{3}{2} \Rightarrow B_2 = -0/5 \text{ T}$$

گام دوم:

$$\varepsilon = -N \frac{\Delta \Phi}{\Delta t} \Rightarrow \varepsilon = -N \frac{\Delta B A \cos \theta}{\Delta t}$$

$$\xrightarrow{\alpha=90^\circ, \theta=90^\circ-\alpha} \varepsilon = \frac{-500 \times (-0/5 - 0/5) \times 40 \times 10^{-4} \times 1}{4} \Rightarrow \varepsilon = \frac{-500 \times -1 \times 40 \times 10^{-4}}{4}$$

$$\Rightarrow \varepsilon = 0/5 \text{ V}$$

میدان مغناطیسی به طور عمود از سطح قای به مساحت 500 cm^2 و مقاومت الکتریکی 0.2Ω می گذرد. میدان مغناطیسی با آهنگ چند گاوس بر ثانیه تغییر کند تا آهنگ تولید انرژی گرمایی در این قاب برابر 0.2 mW شود؟

۴۰۰ (۴)

۸۰۰ (۳)

۴۰ (۲)

۸۰ (۱)

پاسخ: گزینه ۴

Hint

ابتدا با استفاده از رابطه $(P = \frac{\epsilon^2}{R})$ ، نیروی محرکه القایی را به دست آورید و سپس از رابطه $(|\epsilon| = \frac{N\Delta B A \cos \theta}{\Delta t})$ ، نسبت $\frac{\Delta B}{\Delta t}$ که همان آهنگ تغییر میدان مغناطیسی است را محاسبه کنید.

پاسخ خیلی تشریحی ✓ گام اول: چون عامل تغییر شار، تغییر میدان است، رابطه نیروی محرکه القایی را به صورت زیر می نویسیم:

$$|\epsilon| = N \frac{\Delta \Phi}{\Delta t} \Rightarrow |\epsilon| = \frac{N\Delta B A \cos \theta}{\Delta t} \Rightarrow \frac{\Delta B}{\Delta t} = \frac{|\epsilon|}{NA \cos \theta}$$

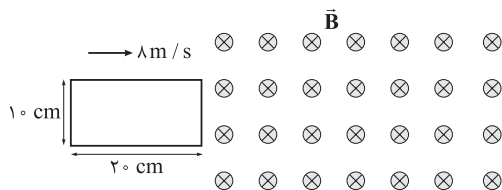
گام دوم: آهنگ تولید انرژی گرمایی در واقع همان توان مصرفی مقاومت سیم قاب است که پس از مدتی دمای آن بالا رفته و انرژی گرمایی تولید می کند، بنابراین:

$$P = \frac{\epsilon^2}{R} \Rightarrow 0.2 \times 10^{-3} = \frac{\epsilon^2}{0.2} \Rightarrow \epsilon^2 = 2 \times 2 \times 10^{-6} \Rightarrow |\epsilon| = 2 \times 10^{-3} \text{ V}$$

گام سوم: حالا با کمک رابطه به دست آمده در گام اول آهنگ تغییر میدان مغناطیسی را به دست می آوریم:

$$\frac{\Delta B}{\Delta t} = \frac{2 \times 10^{-3}}{1 \times 500 \times 10^{-4} \times 1} \Rightarrow \frac{\Delta B}{\Delta t} = 0.4 \times 10^{-1} \text{ T/s} \times 10^4 \Rightarrow \frac{\Delta B}{\Delta t} = 400 \text{ G/s}$$

در شکل زیر، قاب فلزی مستطیل شکل با تندی ثابت ۸ m/s وارد میدان مغناطیسی یکنواخت و درون سوی $B = ۰/۵ \text{ T}$ می شود. اگر مقاومت الکتریکی قاب ۵Ω باشد، جریان الکتریکی القایی در قاب در حین ورود آن چند آمپر است؟



(۱) $۰/۸$

(۲) $۱/۶$

(۳) ۸

(۴) ۱۶

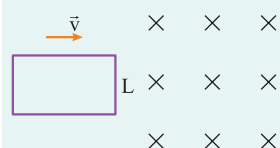
پاسخ: گزینه ۱

Hint

ابتدا نیروی محرکه القایی قاب را از رابطه $(\varepsilon = BLv)$ به دست آورید و سپس جریان القایی ایجاد شده در قاب را از رابطه $(I = \frac{\varepsilon}{R})$ محاسبه کنید.

درس: Box

اگر یک قاب فلزی از سمت یکی از اضلاع خود به طول L ، با تندی v ، به طور عمود وارد یک میدان مغناطیسی شود، به دلیل افزایش شار مغناطیسی عبوری از آن، درون آن نیروی محرکه القایی و در نتیجه جریان الکتریکی القایی ایجاد می شود.



ε : نیروی محرکه القایی (V)

B: اندازه میدان مغناطیسی (T)

L: طول ضلع (m)

v: تندی حرکت قاب (m/s)

I: جریان القایی (A)

R: مقاومت سیم (Ω)

$$\varepsilon = BLv$$

$$I = \frac{\varepsilon}{R}$$

پاسخ خیلی تشریحی ✓ **گام اول:** ابتدا نیروی محرکه القایی ایجاد شده در قاب را به دست می آوریم:

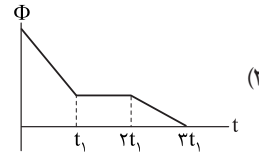
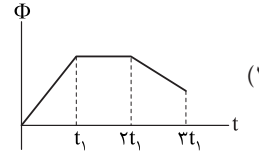
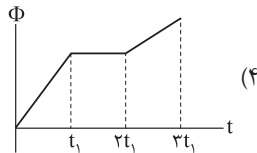
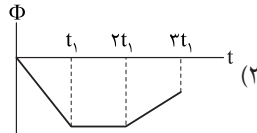
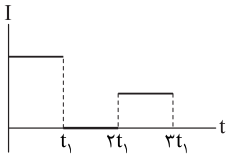
$$\varepsilon = BLv \Rightarrow \varepsilon = ۰/۵ \times ۰/۱ \times ۸ \Rightarrow \varepsilon = ۴ \times ۱۰^{-۲} \text{ V}$$

گام دوم: جریان القایی عبوری از قاب را محاسبه می کنیم:

$$I = \frac{\varepsilon}{R} \Rightarrow I = \frac{۴ \times ۱۰^{-۲}}{۵ \times ۱۰^{-۲}} \Rightarrow I = ۰/۸ \text{ A}$$

نمودار جریان الكتریکی القایی در یک قاب رسانا بر حسب زمان به شکل زیر است. نمودار تغییرات شار مغناطیسی گذرنده از این قاب بر حسب

زمان به صورت کدام شکل است؟



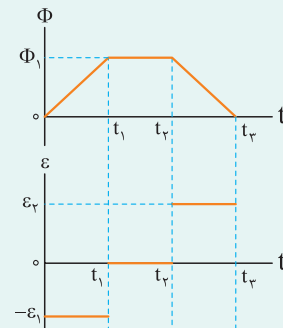
پاسخ: گزینه ۳

درس: Box

ویژگی‌های نمودار شار - زمان و نیروی محرکه القایی - زمان:

هرگاه نمودار شار- زمان به صورت یک خط راست با شیب ثابت باشد، $\frac{\Delta\Phi}{\Delta t}$ در بازه‌های زمانی مختلف تغییر نمی‌کند و در نتیجه، نیروی محرکه القایی متوسط در بازه‌های زمانی دلخواه ثابت بوده و با نیروی محرکه القایی لحظه‌ای، برابر است و اگر شیب آن صفر باشد، نیروی محرکه القایی نیز صفر است.

در مورد علامت نیروی محرکه القایی و حتی جریان القایی دقت کنید که با توجه به علامت منفی در رابطه $\varepsilon = -N \frac{\Delta\Phi}{\Delta t}$ ، هرگاه شیب نمودار شار - زمان، مثبت باشد، نیروی محرکه القایی و جریان القایی، منفی و اگر شیب این نمودار منفی باشد، نیروی محرکه القایی و جریان مثبت خواهد بود.



$$\varepsilon_1 = -N \frac{\Delta\Phi}{\Delta t} \xrightarrow{\frac{\Delta\Phi}{\Delta t} > 0} \varepsilon_1 < 0$$

$$\varepsilon_2 = -N \frac{\Delta\Phi}{\Delta t} \xrightarrow{\frac{\Delta\Phi}{\Delta t} < 0} \varepsilon_2 > 0$$

پاسخ خیلی تشریحی ✓ با توجه به نمودار، در بازه زمانی t_1 تا t_2 جریان القایی که آن را I_1 می‌نامیم، مثبت است و در بازه زمانی t_2 تا t_3 جریان القایی

که آن را I_2 می‌نامیم، صفر و در بازه زمانی t_3 تا t_4 نیز جریان القایی که آن را I_3 می‌نامیم، مثبت می‌باشد.

$$I = - \frac{N}{R} \cdot \frac{\Delta\Phi}{\Delta t}$$

مثبت = منفی × منفی

چون $I_1 > 0$ در بازه زمانی t_1 تا t_2 باید $\frac{\Delta\Phi}{\Delta t} < 0$ باشد، زیرا:

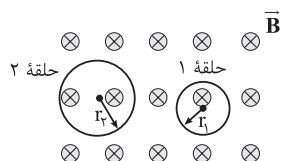
بنابراین گزینه‌های (۱) و (۴) رد می‌شوند و گزینه‌های (۲) و (۳) می‌توانند پاسخ تست باشند.

در بازه زمانی t_2 تا t_3 نیز چون $I_2 > 0$ است، باید $\frac{\Delta\Phi}{\Delta t} < 0$ باشد؛ ولی به دلیل این که مقدار $I_3 < I_1$ است، پس اندازه شیب نمودار $\Phi - t$ نیز باید نسبت به بازه t_1 تا t_2 کمتر باشد.

بنابراین نمودار گزینه (۳) صحیح است.

۶۰

از سیم‌های مسی کاملاً مشابه، دو حلقه به شعاع‌های r_1 و r_2 ساخته‌ایم. مطابق شکل، این دو حلقه را در میدان مغناطیسی درون‌سوی $\vec{B}$ قرار می‌دهیم. اگر اندازه میدان مغناطیسی با آهنگ ثابتی افزایش یابد، جریان القایی در حلقه ۲، چهار برابر جریان القایی در حلقه ۱ خواهد شد. $\frac{r_2}{r_1}$ کدام است؟



۴ (۲)

۲ (۱)

۱۶ (۴)

۲√۲ (۳)

پاسخ: گزینه ۲

پاسخ خیلی تشریحی ✓

گام اول: ابتدا در رابطه جریان القایی مقادیر ثابت را حذف می‌کنیم و رابطه مقایسه‌ای را به صورت زیر می‌نویسیم:

$$I = \frac{-N\Delta(BA \cos \theta)}{R\Delta t} \Rightarrow \frac{I_2}{I_1} = \frac{R_1}{R_2} \times \left(\frac{r_2}{r_1}\right)^2 \quad (1)$$

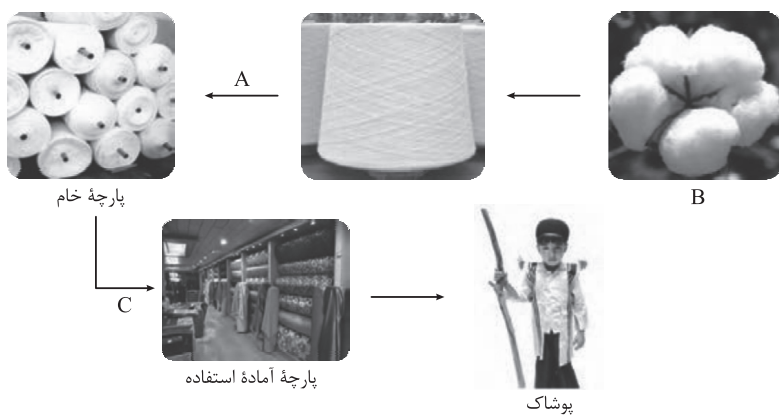
از آن جایی که مقاومت سیم‌ها از رابطه $R = \rho \frac{L}{A}$ به دست می‌آید و طول دو سیم که همان محیط حلقه‌ها است، با هم متفاوت است، داریم:

$$\frac{R_1}{R_2} = \frac{L_1}{L_2} \xrightarrow{L=2\pi r} \frac{R_1}{R_2} = \frac{r_1}{r_2} \quad (2)$$

گام دوم: از ترکیب روابط (۱) و (۲) داریم:

$$\frac{I_2}{I_1} = \frac{r_1}{r_2} \times \left(\frac{r_2}{r_1}\right)^2 \Rightarrow \frac{I_2}{I_1} = \frac{r_2}{r_1} \Rightarrow \frac{r_2}{r_1} = 4$$

با توجه به شکل زیر، A، B و C به ترتیب کدام است؟



(۲) بافندگی، الیاف، فراوری

(۱) بافندگی، الیاف، دوزندگی

(۴) ریسندگی، نخ، فراوری

(۳) ریسندگی، نخ، دوزندگی

پاسخ: گزینه ۲

پاسخ خیلی تشریحی ✓ شکل زیر نشان‌دهنده مراحل تولید لباس از الیاف پنبه است.



بنابراین A، B و C به ترتیب به بافندگی، الیاف و فراوری اشاره دارند.

کدام ماده درشت مولکول است، ولی پلیمر محسوب نمی شود؟

واحد تکرار شونده ندارد.

شمار اتم های زیادی دارد

(۴) نایلون

(۳) روغن زیتون

(۲) سلولز

(۱) گلوکز

پاسخ: گزینه ۳



درشت مولکول ها را می توان به دو نوع تقسیم کرد. در ساختار برخی از درشت مولکول ها مانند روغن زیتون، واحد تکرار شونده وجود ندارد؛ یعنی واحد مولکولی مشابهی در ساختار درشت مولکول دیده نمی شود، اما در ساختار برخی از درشت مولکول ها مانند سلولز و نشاسته، واحد تکرار شونده وجود دارد؛ یعنی یک واحد مولکولی، *تو ساختار درشت مولکول تکرار می شه! مثلاً این پوری:*



به این دسته از درشت مولکول ها، **پلیمر** می گویند. واژه پلیمر از واژه های یونانی «polys» به معنای «بسیار» و «meros» به معنای «پاره» گرفته شده است؛ به همین دلیل به پلیمر، «بسیار» نیز گفته می شود.

همه درشت مولکول ها، الزاماً پلیمر نیستند. در واقع پلیمرها زیرمجموعه ای از درشت مولکول ها به شمار می آیند.

گلوکز با فرمول مولکولی $C_6H_{12}O_6$ ، نوعی مولکول کوچک محسوب می شود.

✓ پاسخ خیلی تشریحی

سلولز و نایلون هر دو درشت مولکول و پلیمر محسوب می شوند. سلولز، پلیمری طبیعی و نایلون، پلیمری ساختگی است.

روغن زیتون نوعی درشت مولکول است که از اتم های کربن، هیدروژن و اکسیژن تشکیل شده است، ولی فاقد واحد تکرار شونده بوده و پلیمر محسوب نمی شود.

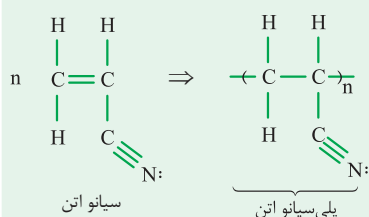
کدام مورد را نمی‌توان به مونومر سازنده پلی‌سیانو اتن نسبت داد؟

- (۱) وجود پیوندهای یگانه، دوگانه و سه‌گانه در ساختار آن
- (۲) داشتن شمار جفت‌الکترون ناپیوندی یکسان با آمونیاک
- (۳) یکسان بودن مجموع شمار اتم‌های سازنده مولکول آن با متانول
- (۴) وجود ۲۰ الکترون در ساختار لوویس آن

پاسخ: گزینه ۳



مونومر سازنده پلی‌سیانو اتن، سیانو اتن است که ساختار و نحوه تبدیل آن به پلیمر به صورت زیر است:



پاسخ خیلی تشریحی ✓ مولکول سیانو اتن ($\text{C}_2\text{H}_3\text{N}$) دارای ۷ اتم و مولکول متانول (CH_3OH) دارای ۶ اتم است.

بررسی سایر گزینه‌ها:

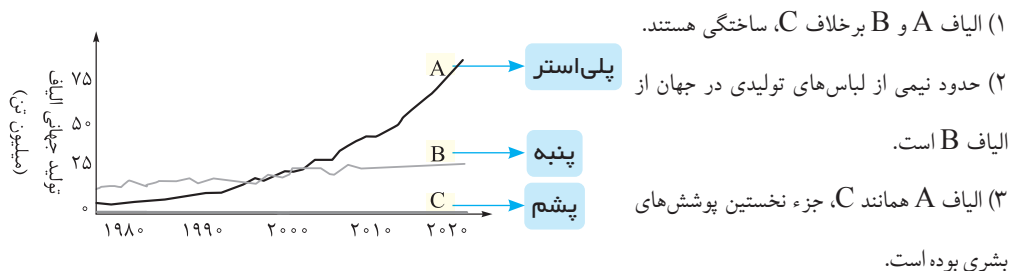
گزینه (۱): در ساختار سیانو اتن، علاوه بر پیوندهای یگانه، یک پیوند دوگانه و یک پیوند سه‌گانه نیز وجود دارد.

گزینه (۲): در سیانو اتن فقط اتم نیتروژن دارای یک جفت‌الکترون ناپیوندی بوده که از این لحاظ با آمونیاک ($\text{H}-\ddot{\text{N}}-\text{H}$) مشابه است.

گزینه (۴): شمار الکترون‌های موجود در ساختار لوویس هر مولکول با مجموع شمار الکترون‌های ظرفیتی اتم‌های سازنده آن برابر است. در ساختار لوویس سیانو اتن، در مجموع ۲۰ الکترون وجود دارد.

$$\text{C}_2\text{H}_3\text{N}: \underbrace{(3 \times 4)}_{\text{C}} + \underbrace{(3 \times 1)}_{\text{H}} + \underbrace{(1 \times 5)}_{\text{N}} = 20$$

با توجه به نمودار زیر که روند تولید الیاف (پلی استر، پشم و پنبه) در جهان را نشان می دهد، کدام گزینه درست است؟



(۴) امروزه بیشتر از ۵۰ درصد الیاف تولیدی در جهان از نوع B و C است.

پاسخ: گزینه ۲

پاسخ خیلی تشریحی ✓

الیاف A، B و C به ترتیب پلی استر، پنبه و پشم هستند.

حدود نیمی از لباس های تولیدی در جهان از پنبه بوده که نوعی الیاف طبیعی است.

بررسی سایر گزینه ها:

گزینه (۱): پنبه و پشم جزء الیاف طبیعی و پلی استر، جزء الیاف ساختگی است.

گزینه (۳): الیاف پنبه و پشم جزء نخستین پوشش های بشر بوده است، ولی پلی استر جزء پوشش هایی است که در گذر زمان تولید و استفاده شده است.

گزینه (۴): با توجه به نمودار روبه رو، امروزه کمتر از نیمی از الیاف تولیدشده در جهان، طبیعی هستند.



۶۵ اگر در جدول زیر، هر یک از موارد ستون A به یکی از موارد ستون B مرتبط باشد، کدام مورد در ستون B اضافه است؟

B	A
(a) پلی استیرن	(الف) در تهیه پتو به کار می رود.
(b) تفلون	(ب) در ساختار آن، علاوه بر اتم های کربن و هیدروژن، هالوژن نیز وجود دارد.
(c) پلی سیانو اتن	(پ) پلیمری سیر نشده به حساب می آید.
(d) پلی پروپن	(ت) در واحد تکرار شونده آن، شمار اتم های هیدروژن، دو برابر کربن است.
(e) پلی وینیل کلرید	

d (۴)

e (۳)

b (۲)

a (۱)

پاسخ: گزینه ۲

درس: Box

نام و ساختار مونومر	نام و ساختار پلیمر	کاربرد پلیمر
$\begin{array}{c} \text{H} \quad \text{H} \\ \quad \\ \text{C} = \text{C} \\ \quad \\ \text{H} \quad \text{C} \equiv \text{N} \end{array}$ سیانو اتن ($\text{C}_3\text{H}_3\text{N}$)	$\left[\text{CH}_2 - \text{C}(\text{CN}) \right]_n$ پلی سیانو اتن	 پتو
$\text{CH}_2 = \text{C}(\text{CH}_3)_2$ پروپن (C_3H_6)	$\left[\text{CH}_2 - \text{CH}(\text{CH}_3) \right]_n$ پلی پروپن	 سرنج
$\begin{array}{c} \text{H} \quad \text{H} \\ \quad \\ \text{C} = \text{C} \\ \quad \\ \text{H} \quad \text{C}_6\text{H}_5 \end{array}$ استیرن (C_8H_8)	$\left[\text{CH}_2 - \text{C}(\text{C}_6\text{H}_5) \right]_n$ پلی استیرن	 ظروف یکبار مصرف
$\begin{array}{c} \text{F} \quad \text{F} \\ \quad \\ \text{C} = \text{C} \\ \quad \\ \text{F} \quad \text{F} \end{array}$ تترا فلورو اتن (C_2F_4)	$\left[\text{CF}_2 - \text{CF}_2 \right]_n$ تفلون	 نخ دندان
$\begin{array}{c} \text{H} \quad \text{H} \\ \quad \\ \text{C} = \text{C} \\ \quad \\ \text{H} \quad \text{Cl} \end{array}$ وینیل کلرید ($\text{C}_2\text{H}_3\text{Cl}$)	$\left[\text{CH}_2 - \text{CH}(\text{Cl}) \right]_n$ پلی وینیل کلرید	 کیسه خون

پاسخ خیلی تشریحی ✓ بررسی عبارت‌های ستون سمت راست:

الف) از پلی‌سیانو اتن (c) در ساخت پتو استفاده می‌شود.

ب) در ساختار پلی‌وینیل کلرید (e) که در ساخت کیسه‌ خون استفاده می‌شود، علاوه بر اتم کربن و هیدروژن، هالوژن کلر نیز وجود دارد.

پ) پلی‌استیرن (a) که از استیرن با فرمول مولکولی C_8H_8 به دست می‌آید، به دلیل ساختار آروماتیک و پیوند دوگانه کربن - کربن، نوعی پلیمر سیر نشده محسوب می‌شود و در ساخت ظروف یکبار مصرف کاربرد دارد.

ت) در پلی‌پروپن با فرمول مولکولی $(C_3H_6)_n$ ، نسبت شمار اتم‌های هیدروژن به کربن برابر ۲ است و در ساخت سرنگ کاربرد دارد.

درسته که در ساختار تفلون، اتم هالوژن (فلوئور) وجود دارد، ولی در ساختار این پلیمر، اتم هیدروژن وجود ندارد، پس جواب قسمت «ب» نمی‌تونه تفلون باشه. ✗ گول نخوری

چند مورد از مطالب زیر درست است؟

- در ساختار سلولز، پیوندهای کربن - کربن، عامل اتصال مولکولهای گلوکز به یکدیگر است.
- پنبه علاوه بر تهیه لباس، در تهیه گاز استریل و تور ماهیگیری نیز کاربرد دارد.
- مونومر سازنده پلیمر سازنده بطری کدر شیر، اتان است.
- تفلون و پلی اتن برخلاف پروتئین، نشاسته و پشم، جزء پلیمرهای ساختگی هستند.

پلی اتن

۳ (۴)

۱ (۳)

۲ (۲)

صفر (۱)

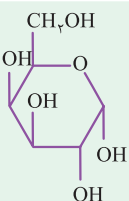
پاسخ: گزینه ۲

پاسخ خیلی تشریحی ✓ عبارتهای دوم و چهارم درست اند.

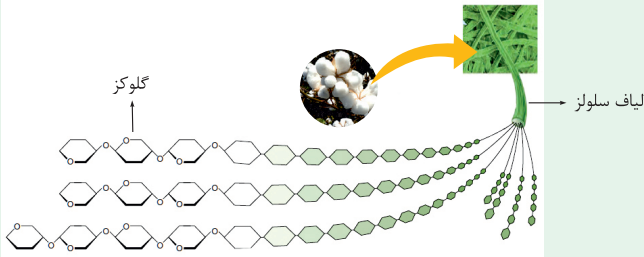
بررسی عبارتهای:

(الف) پیوندهای بین دو مولکول گلوکز در ساختار سلولز به صورت $C-O-C$ است و از نوع کربن - کربن نیست.

مونومر سازنده سلولز، گلوکز با فرمول ساختاری زیر به دست می آید.



است که از به هم پیوستن شمار زیادی از آن، سلولز با ساختار



(ب) کاملاً درسته!

(پ) پلیمر سازنده بطری شیر، پلی اتن است که از اتن (نه اتان!) تولید می شود.

(ت) تفلون و نایلون جزو پلیمرهای ساختگی و پروتئین، پشم، نشاسته و سلولز، جزو پلیمرهای طبیعی هستند.

نکته

۶۷ کدام مورد درست است؟

(۱) $\text{C}_7\text{H}_4 \rightarrow \text{C}_n\text{H}_m$ را در دستگاهی با عمل دمیدن هوا به ورقه‌های نازک پلاستیکی تبدیل می‌کنند.

(۲) مولکول‌های سیکلوبوتان در شرایط معین می‌توانند کنار یکدیگر قرار بگیرند و پلیمری منعطف، شفاف و با استحکام بسیار بالا را ایجاد کنند.

(۳) هر چه شمار شاخه‌های پلی‌اتن کم‌تر باشد، نیروی بین مولکولی وان‌دروالسی آن، قوی‌تر شده و استحکام مولکول افزایش می‌یابد.

(۴) در روند تهیه پلیمر سازنده تانکرهای پلاستیکی، مونومرهای هیدروکربنی از کناره‌ها به یکدیگر افزوده شده و زنجیره‌های شاخه‌دار تولید می‌کنند.

پاسخ: گزینه ۳

پاسخ خیلی تشریحی ✓ نیروی بین مولکولی در پلی‌اتن، وان‌دروالسی است که قدرت آن در پلی‌اتن بدون شاخه بیشتر از پلی‌اتن شاخه‌دار است.

بررسی سایر گزینه‌ها:

گزینه (۱): از پلی‌اتن مذاب (و نه جامد!) در دستگاهی با عمل دمیدن هوا، ورقه‌های نازک پلاستیکی تولید می‌شود.

گزینه (۲): سیکلوبوتان نوعی هیدروکربن سیرشده بوده و در واکنش پلیمری شدن شرکت نمی‌کند.

گزینه (۴): تانکرهای پلاستیکی از نوع پلی‌اتن سنگین هستند و ساختار مستحکم و سختی دارند که در آن زنجیره‌های شاخه‌دار یافت نمی‌شود.

اگر شمار واحدهای تکرارشونده نوعی پلی پروپین، دو برابر نوعی پلی اتن و جرم مولی پلی اتن، ۱۴ کیلوگرم بر مول از پلی پروپین کم تر باشد، شمار اتم های کربن پلیمر سنگین تر در هر مولکول از آن کدام است؟ ($C = 12, H = 1: g.mol^{-1}$)

(۲) ۱۰۰۰

(۱) ۵۰۰

(۴) ۱۵۰۰

(۳) ۲۰۰۰

پاسخ: گزینه ۲

پاسخ خیلی تشریحی ✓

گام اول: تعداد واحدهای تکرارشونده در پلی اتن و پلی پروپین را به ترتیب برابر n و $2n$ در نظر می گیریم، بنابراین جرم مولی هر پلیمر به صورت زیر است:

$$84n = \text{جرم مولی پروپین } (C_3H_6) \times 2n : \text{جرم مولی پلی پروپین } \left(C_3H_6 \right)_n$$

$$28n = \text{جرم مولی اتن } (C_2H_4) \times n : \text{جرم مولی پلی اتن } \left(C_2H_4 \right)_n$$

گام دوم: با توجه به اختلاف جرم مولی دو پلیمر داریم:

$$84n - 28n = 56n = 14000 \Rightarrow n = 250$$

گام سوم: شمار اتم های کربن در هر مولکول پلی پروپین به صورت زیر است:

$$1 \text{ مولکول پلی پروپین } \times \frac{(2n \times 3) \text{ atom C}}{1 \text{ مولکول پلی پروپین}} = 6n \text{ atom C} = 6 \times 250 = 1500 \text{ atom C}$$

کدام گزینه از نظر درستی یا نادرستی، مشابه عبارت زیر است؟ ($C = 12, H = 1: g.mol^{-1}$)

«هر ترکیب آلی که در ساختار خود پیوند دوگانه داشته باشد، می‌تواند در واکنش پلیمری شدن شرکت کند.»

(۱) تعیین تعداد دقیق مونومرهای شرکت‌کننده در یک واکنش پلیمری شدن ممکن نیست.

(۲) پلیمرهای حاصل از واکنش بسپارش هیدروکربن‌ها، ترکیباتی سیرشده محسوب می‌شوند.

(۳) اتم کربن در پلی‌اتن همانند مونومر آن، ۴ پیوند اشتراکی برقرار می‌کند.

(۴) اگر نوعی پلی‌اتن دارای 10^4 واحد تکرارشونده باشد، جرم مولی آن 280 کیلوگرم بر مول است.

پاسخ: گزینه ۲

پاسخ خیلی تشریحی ✓

هر ترکیب آلی که در ساختار خود پیوند دوگانه کربن - کربن در زنجیر کربنی داشته باشد، می‌تواند در واکنش پلیمری شدن شرکت کند نه هر ترکیب شامل پیوند دوگانه، بنابراین عبارت صورت سؤال نادرست است.

پلیمرهای حاصل از بسپارش هیدروکربن‌ها، می‌توانند سیرشده یا سیرنشده باشند و بستگی به نوع مونومر آن‌ها دارد، برای مثال پلی‌اتن، سیرشده و پلی‌استیرن به دلیل وجود حلقه بنزن و پیوند دوگانه کربن - کربن در ساختار آن، سیرنشده است.

سایر گزینه‌ها درست هستند.

گزینه (۱): تعیین تعداد دقیق مونومرها و فرمول مولکولی دقیق پلیمرها، ممکن نیست.

گزینه (۳): در ساختار همه هیدروکربن‌ها، هر اتم کربن ۴ پیوند اشتراکی برقرار می‌کند که می‌تواند مجموعه‌ای از پیوندهای یگانه، دوگانه و سه‌گانه باشد.

گزینه (۴): جرم مولی پلی‌اتن، $(-C_2H_4-)_n$ ، با 10^4 واحد تکرارشونده برابر $280 \times 10^4 g = 280 kg$ است.

۷۰

مولکول استیرن در واکنش با مقدار کافی گاز هیدروژن به ترکیب سیرشده A تبدیل می‌شود. برای سوختن کامل هر مول A، به چند

C = C پیوند ۴ با C_۸H_۸

مول گاز اکسیژن نیاز است؟

۱۶ (۴)

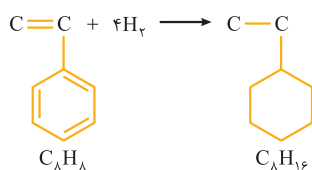
۱۲ (۳)

۱۰ (۲)

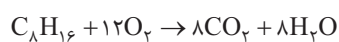
۸ (۱)

پاسخ: گزینه ۳

هر مولکول استیرن شامل ۴ پیوند C = C است که برای سیرشدن کامل به ۴ مولکول هیدروژن نیاز دارد:

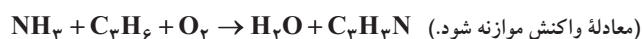


پاسخ خیلی تشریحی ✓ معادله موازنه شده سوختن کامل ترکیب A به صورت زیر است:



بنابراین برای سوختن هر مول از ماده A، ۱۲ مول گاز اکسیژن نیاز است.

فرآورده آلی حاصل از واکنش ۳۴۰ گرم آمونیاک با پروپن و اکسیژن را در واکنش پلیمری شدن شرکت می‌دهیم. اگر در این فرایند، پلیمری با ۲۰۰۰ واحد تکرار شونده تولید شود، شمار مولکول‌های پلیمر حاصل کدام است؟ ($N = 14, H = 1: g.mol^{-1}$) بازده واکنش پلیمری شدن ۷۵٪ است.



$$6/02 \times 10^{21} \quad (2)$$

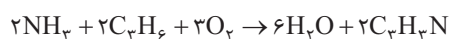
$$6/02 \times 10^{23} \quad (1)$$

$$4/515 \times 10^{23} \quad (4)$$

$$4/515 \times 10^{21} \quad (3)$$

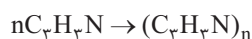
پاسخ: گزینه ۳

پاسخ خیلی تشریحی ✓ گام اول: ابتدا واکنش داده شده را موازنه می‌کنیم:



فرآورده آلی که در واکنش پلیمری شدن شرکت می‌کند، C_3H_3N (سیانو اتن) است.

حالا با توجه به جرم آمونیاک، مول سیانو اتن و سپس تعداد مولکول‌های پلیمر را محاسبه می‌کنیم:



$$340 \text{ g } NH_3 \times \frac{1 \text{ mol } NH_3}{17 \text{ g } NH_3} \times \frac{2 \text{ mol } C_3H_3N}{2 \text{ mol } NH_3} \times \frac{1 \text{ mol پلیمر}}{2000 \text{ mol } C_3H_3N} \times \frac{6/02 \times 10^{23} \text{ پلیمر}}{1 \text{ mol پلیمر}} \times \frac{75}{100} = 4/515 \times 10^{21}$$

ابتدا بین آمونیاک و C_3H_3N ، تناسب برقرار می‌کنیم:

$$\frac{\text{جرم}}{\text{ضریب} \times \text{جرم مولی}} = \frac{\text{مول}}{\text{ضریب}} \\ \frac{NH_3}{C_3H_3N}$$

$$\frac{340}{17 \times 2} = \frac{x}{2} \Rightarrow x = 20 \text{ mol } C_3H_3N$$

$$\frac{\text{بازده درصدی} \times \text{مول}}{100} = \frac{\text{تعداد}}{\text{عدد آووگادو} \times \text{ضریب}} \\ \frac{سیانو اتن}{پلی سیانو اتن}$$

$$\frac{20 \times \frac{75}{100}}{2000} = \frac{y}{1 \times 6/02 \times 10^{23}} \Rightarrow y = 4/515 \times 10^{21}$$

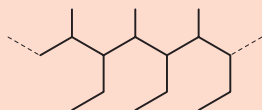
سپس بین سیانو اتن و پلیمر حاصل، کسر تناسب می‌نویسیم:

در این سؤال با توجه به این که نیتروژن در واکنش دهنده‌ها و فرآورده‌ها فقط در یک ماده حضور دارد، می‌توان نتیجه گرفت به ازای مصرف هر مول آمونیاک، یک مول سیانو اتن تولید می‌شود و نیازی به موازنه کامل معادله واکنش نیست.

به چور دیگه

تیزبازی

مونومر سازنده پلیمر زیر با کدام ترکیب، ایزومر است؟



(۱) - پنتین

(۲) سیکلوپنتان

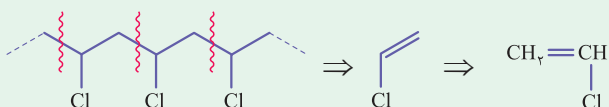
(۳) - بوتن

(۴) سیکلوبوتان

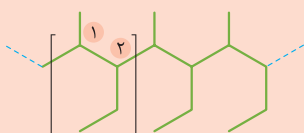
پاسخ: گزینه ۲



اگر ساختار گسترده یک پلیمر داده شود و مونومر سازنده آن را از شما بخواهند، کافی است ابتدا در زنجیر اصلی، پیوندها را به صورت یک در میان بشکنید و سپس پیوند بین دو کربن متوالی را که سالم باقی مانده است، به پیوند دوگانه تبدیل کنید.



پاسخ خیلی تشریحی ✓ واحد تکرارشونده پلیمر رسم شده در صورت سؤال به صورت زیر است و برای به دست آوردن ساختار مونومر آن، بین کربن ۱ و ۲ پیوند دوگانه قرار می دهیم:



بنابراین مونومر آن به صورت $C \equiv C - C - C$ است که ۲- پنتن نام دارد.

سیکلوآلکان ها، ایزومر آلکن های هم کربن هستند؛ بنابراین ایزومر ۲- پنتن، سیکلوپنتان با فرمول مولکولی C_5H_{10} است.

چند مورد از مطالب زیر درباره پلی اتن سنگین و سبک، نادرست است؟

الف) چگالی پلی اتن سنگین برخلاف پلی اتن سبک، از آب بیشتر است.

ب) از پلی اتن سبک، در ساخت کیسه پلاستیکی موجود در مغازه ها و فروشگاه ها و دبه های آب استفاده می شود.

پ) انعطاف پذیری پلی اتن سبک بیشتر از پلی اتن سنگین است.

ت) درصد جرمی کربن در هر دو پلیمر، با یکدیگر برابر است.

۴ (۴)

۳ (۳)

۲ (۲)

۱ (۱)

پاسخ: گزینه ۲

نکته: مقایسه پلی اتن سبک و سنگین:

نوع پلی اتن	سبک	سنگین
ساختار	شاخه دار	بدون شاخه
فرمول مولکولی	$-(C_2H_4)_n$	$-(C_2H_2)_n$
نوع نیروی بین مولکولی	وان دروالسی	وان دروالسی
شفاف یا کدر بودن	شفاف	کدر
کاربرد	ساخت کیسه های پلاستیکی شفاف	ساخت لوله های پلاستیکی، دبه های آب، بطری کدر شیر و اسباب بازی
چگالی	0.92 g.cm^{-3}	0.97 g.cm^{-3}
سختی و استحکام، چگالی، نقطه ذوب و قدرت نیروهای بین مولکولی	کم تر	بیشتر

پاسخ خیلی تشریحی ✓ عبارتهای «الف» و «ب» نادرست اند.

بررسی عبارت ها:

الف) چگالی هر دو پلی اتن سنگین و سبک، از آب ($d = 1 \text{ g.mL}^{-1}$) کم تر است.

ب) از پلی اتن سنگین در ساخت دبه های آب استفاده می شود.

پ) پلی اتن سبک نسبت به پلی اتن سنگین، انعطاف پذیرتر است.

ت) فرمول مولکولی پلی اتن، $(C_2H_4)_n$ است و درصد جرمی کربن و هیدروژن آن، ثابت و به ترتیب برابر $85.7\% \approx \frac{24}{28} \times 100$

و $14.3\% \approx \frac{4}{28} \times 100$ است.

کدام گزینه دربارهٔ پلیمر سازندهٔ سرنگ نادرست است؟

پلی پروپین

(۱) در ساختار آن با m واحد تکرارشونده، m پیوند $C-H$ یافت می‌شود.

(۲) شمار پیوندهای اشتراکی در ساختار مونومر سازندهٔ آن، کم‌تر از وینیل کلرید است.

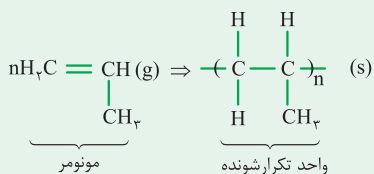
(۳) در ساختار مونومر سازندهٔ آن همانند واحد تکرارشونده، پیوند یگانهٔ کربن - کربن یافت می‌شود.

(۴) شمار اتم‌های کربن مونومر سازندهٔ آن، کم‌تر از نصف شمار اتم‌های هیدروژن مونومر پلیمر سازندهٔ ظروف یکبار مصرف است.

پلی استیرن

پاسخ: گزینهٔ ۲

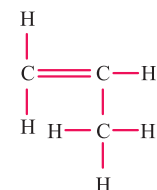
پروپین، دومین عضو خانوادهٔ آلکن‌هاست که از بسپارش آن، پلی پروپین طبق واکنش زیر به دست می‌آید که در تولید سرنگ کاربرد دارد.



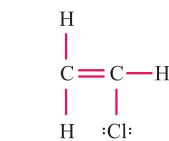
پاسخ خیلی تشریحی ✓ بررسی گزینه‌ها:

گزینهٔ (۱): در هر واحد تکرارشونده از پلی پروپین، ۶ پیوند $C-H$ وجود دارد، بنابراین در پلیمری با m واحد تکرارشونده، $6m$ پیوند $C-H$ یافت می‌شود.

گزینهٔ (۲):



پروپین (۹ پیوند اشتراکی)

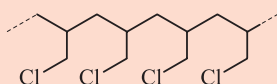


وینیل کلرید (۶ پیوند اشتراکی)

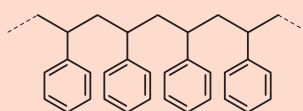
گزینهٔ (۳): پروپین همانند پلی پروپین دارای پیوند $C-C$ است، ولی پلی پروپین پیوند دوگانه ندارد.

گزینهٔ (۴): برای ساخت ظروف یکبار مصرف از استیرن با فرمول C_8H_8 استفاده می‌شود. شمار اتم‌های کربن پروپین (C_3H_6)، کم‌تر از نصف شمار اتم‌های هیدروژن استیرن (C_8H_8) است.

۷۵ کدام موارد از مطالب داده شده درباره ترکیب های زیر، درست است؟



ترکیب (۲)



ترکیب (۱)

- (الف) مونومر سازنده ترکیب (۱)، هیدروکربنی آروماتیک با فرمول مولکولی C_8H_8 است.
 (ب) از ترکیب (۲) در ساخت کیسه خون استفاده می شود.
 (پ) تعداد پیوندهای اشتراکی یگانه در ساختار مونومر سازنده ترکیب (۱)، سه برابر ترکیب (۲) است.
 (ت) نوع نیروی بین مولکولی در ترکیب (۱) همانند نفتالن، وان دروالسی است.

(۲) الف، ت

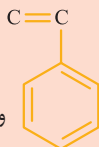
(۱) الف، ب، ت

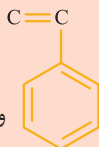
(۴) ب، پ

(۳) ب، پ، ت

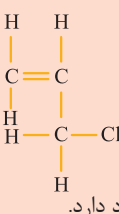
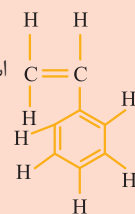
پاسخ: گزینه ۲

پاسخ خیلی تشریحی ✓ عبارت های «الف» و «ت» درست است.



(الف) مونومر سازنده ترکیب (۱)، هیدروکربن آروماتیک با ساختار  و با فرمول مولکولی C_8H_8 است.

(ب) از پلی وینیل کلرید در ساخت کیسه خون استفاده می شود، در صورتی که مونومر سازنده ترکیب (۲)، $C=CH_2$ است که وینیل کلرید (C_2H_3Cl) نیست.

(پ) ساختار مونومر سازنده ترکیب (۲)،  و ساختار مونومر سازنده ترکیب (۱)،  است که در آن ها به ترتیب ۷ و ۱۲ پیوند اشتراکی یگانه وجود دارد.

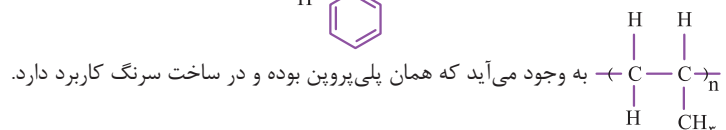
(ت) ترکیب (۱) مانند نفتالن ($C_{10}H_8$)، هیدروکربن و ناقطبی بوده و نوع نیروی بین مولکولی در آن، وان دروالسی است.

- (۱) اگر به جای حلقه بنزن پلی استیرن، گروه متیل قرار دهیم، پلیمری تشکیل می شود که در تهیه سرنگ کاربرد دارد.
- (۲) تفلون از نظر شیمیایی بی اثر است و با مواد شیمیایی واکنش نمی دهد.
- (۳) تترافلوئورو اتن نوعی گاز سردکننده است که پلیمر حاصل از آن در حلال های آلی حل نمی شود و نجسب است.
- (۴) تبدیل اتن گازی به پلی اتن جامد که در دما و فشار بالا انجام می شود، نوعی فرایند چگالش است.

پاسخ: گزینه ۴

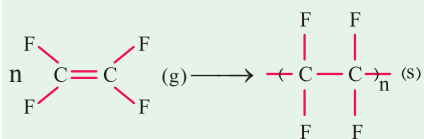
پاسخ خیلی تشریحی ✓ فرایند تبدیل اتن به پلی اتن که در دما و فشار بالا انجام می شود، یک واکنش شیمیایی است، در صورتی که فرایند چگالش نوعی تغییر فیزیکی است.

بررسی سایر گزینه ها:
گزینه (۱): اگر در ساختار پلی استیرن $\text{---} \text{C}(\text{H})_2 \text{---} \text{C}(\text{H})(\text{C}_6\text{H}_5) \text{---}_n$ ، به جای حلقه بنزن، گروه متیل قرار بگیرد، پلیمری با ساختار



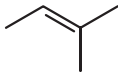
گزینه (۲): تفلون از نظر شیمیایی بی اثر بوده و با مواد شیمیایی واکنش نمی دهد.
گزینه (۳): تترافلوئورو اتن (C_2F_4) نوعی گاز سردکننده است که پلانکت در پژوهش های خود از آن استفاده می کرد که همین امر سبب کشف تفلون (پلی تترافلوئورو اتن) شد.

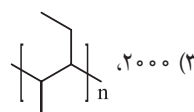
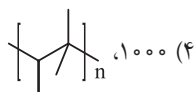
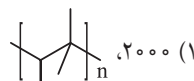
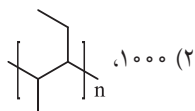
پلیمر پلی تترافلوئورو اتن مشهور به تفلون است که از مونومرهای تترافلوئورو اتن به دست می آید.



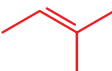
تفلون، نقطه ذوب بالایی دارد و در برابر گرما مقاوم است. این پلیمر از نظر شیمیایی بی اثر است و با مواد شیمیایی واکنش نمی دهد، در حلال های آلی حل نمی شود و نجسب است.



۷۷ اگر $۳/۰۱ \times ۱۰^{۲۶}$ مولکول از ترکیب  را تحت فشار و گرما به پلیمر تبدیل کنیم، $۱۵/۰۵ \times ۱۰^{۲۲}$ مولکول پلیمری یکسان با n واحد تکرارشونده تولید می‌شود. n و فرمول ساختاری پلیمر به کدام صورت است؟



پاسخ: گزینه ۱

پاسخ خیلی تشریحی ✓ واکنش پلیمری شدن  (C_5H_{10}) به صورت زیر است:

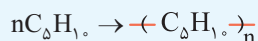


نکته در سؤالات مربوط به واکنش تولید پلیمر، توجه کنید که ضریب استوکیومتری مونومر برابر n و ضریب استوکیومتری پلیمر برابر ۱ است و هر مولکول پلیمر، شامل زنجیره‌ای از n واحد تکرارشونده می‌باشد.

با توجه به تعداد مونومرهای شرکت کننده در واکنش داریم:

$$\begin{aligned} \frac{۳/۰۱ \times ۱۰^{۲۶} C_5H_{10}}{۶/۰۲ \times ۱۰^{۲۳} C_5H_{10}} \times \frac{۱ \text{ mol } C_5H_{10}}{۱ \text{ mol پلیمر}} \times \frac{۱ \text{ mol پلیمر}}{n \text{ mol } C_5H_{10}} \times \frac{۶/۰۲ \times ۱۰^{۲۳} \text{ مولکول}}{۱ \text{ mol پلیمر}} &= ۱۵/۰۵ \times ۱۰^{۲۲} \\ \Rightarrow \frac{۳/۰۱ \times ۱۰^{۲۶}}{n} = ۱۵/۰۵ \times ۱۰^{۲۲} &\Rightarrow n = ۲۰۰۰ \end{aligned}$$

په جور دیگه



$$\begin{aligned} \frac{\text{تعداد}}{\text{عدد آووگادرو} \times \text{ضریب}} &= \frac{\text{تعداد}}{\text{عدد آووگادرو} \times \text{ضریب}} \Rightarrow \frac{۳/۰۱ \times ۱۰^{۲۶}}{n \times ۶/۰۲ \times ۱۰^{۲۳}} = \frac{۱۵/۰۵ \times ۱۰^{۲۲}}{۱ \times ۶/۰۲ \times ۱۰^{۲۳}} \\ \Rightarrow n &= \frac{۳/۰۱ \times ۱۰^{۲۶}}{۱۵/۰۵ \times ۱۰^{۲۲}} = \frac{۱۰۰۰۰}{۵} = ۲۰۰۰ \end{aligned}$$

درستی یا نادرستی کدام گزینه با دیگر گزینه‌ها متفاوت است؟ ($H=1, C=12, Cl=35.5 : g.mol^{-1}$)

(۱) همه درشت‌مولکول‌ها، نیروهای بین مولکولی قوی دارند و در دمای اتاق به حالت جامدند.

(۲) بالابودن جرم مولی فراورده واکنش پلیمری شدن، بیانگر این موضوع است که شمار اتم‌های سازنده هر مولکول مونومر، بسیار زیاد است.

(۳) در ۱۰۰ گرم پلی‌وینیل کلراید، ۵۶/۸ گرم کلر وجود دارد.

(۴) ۱- بوتن و ۲- بوتن ایزومر یکدیگرند و ساختار پلیمر حاصل از بسپارش آن‌ها یکسان است.

پاسخ: گزینه ۳

✓ پاسخ خیلی تشریحی (۳) برخلاف سایر گزینه‌ها، درست است..

پلی‌وینیل کلراید دارای فرمول مولکولی $(C_2H_3Cl)_n$ است، بنابراین خواهیم داشت:

$$100 g(C_2H_3Cl)_n \times \frac{1 \text{ mol}(C_2H_3Cl)_n}{62.5 n g(C_2H_3Cl)_n} \times \frac{n \text{ mol Cl}}{1 \text{ mol}(C_2H_3Cl)_n} \times \frac{35.5 g Cl}{1 \text{ mol Cl}} =$$

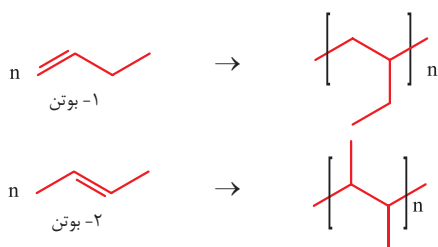
$$\frac{35.5}{62.5} \times 100 = \frac{35.5 \times 8}{5} = 56.8 g Cl$$

بررسی سایر گزینه‌ها:

گزینه (۱): روغن زیتون نوعی درشت‌مولکول است که در دمای اتاق حالت فیزیکی مایع دارد.

گزینه (۲): مونومر سازنده پلیمرها، جزء مولکول‌های کوچک به حساب می‌آیند و شمار اتم‌های سازنده مولکول آن‌ها، کم است، مثلاً مولکول اتن (C_2H_4) ، فقط از ۶ اتم تشکیل شده است.

گزینه (۴): با توجه به متفاوت بودن مونومرهای اولیه، ساختار پلیمرها نیز متفاوت خواهد شد.



مخلوطی گازی به حجم ۴۴/۸ لیتر از مونومر سازنده نخ دندان و کیسه خون در شرایط STP را تحت شرایط مناسب به پلیمر

وینیل کلرید

تترافلورواتن

تبدیل می کنیم. اگر جرم تفلون به دست آمده برابر ۱۰۰ گرم باشد، مجموع جرم هالوژن ها در فراورده های نهایی، برحسب گرم کدام است؟

$$(Cl = 35/5, F = 19, C = 12, H = 1: g.mol^{-1})$$

$$71 (2)$$

$$35/5 (1)$$

$$106/5 (4)$$

$$111/5 (3)$$

پاسخ: گزینه ۳

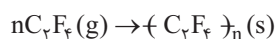
پاسخ خیلی تشریحی ✓

گام اول: مونومر سازنده نخ دندان و کیسه خون به ترتیب C_2F_4 و C_2H_3Cl است و مجموع حجم آن ها برابر ۴۴/۸ لیتر است.

مول C_2H_3Cl و C_2F_4 را به ترتیب x و y در نظر می گیریم:

$$\frac{44/8}{22/4} = 2 \Rightarrow x + y = 2$$

با توجه به جرم تفلون تولید شده داریم:



$$100g \text{ تفلون} \times \frac{1 \text{ mol تفلون}}{100n \text{ g تفلون}} \times \frac{n \text{ mol } C_2F_4}{1 \text{ mol تفلون}} = 1 \text{ mol } C_2F_4 \Rightarrow x = 1 \Rightarrow y = 1$$

بنابراین از هر دو واکنش دهنده، یک مول داریم.

طبق اصل پایستگی جرم، جرم هالوژن ها در واکنش دهنده ها و فراورده ها یکسان است، بنابراین:

$$\left. \begin{array}{l} 1 \text{ mol } C_2H_3Cl \sim 1 \text{ mol } Cl = 35/5 \text{ g} \\ 1 \text{ mol } C_2F_4 \sim 4 \text{ mol } F = 4 \times 19 = 76 \text{ g} \end{array} \right\} \Rightarrow \text{مجموع جرم هالوژن ها} = 35/5 + 76 = 111/5 \text{ g}$$

۸۰

چگالی یک آلکن گازی در شرایط استاندارد، برابر با $2/5$ میلی گرم بر سانتی متر مکعب است. اگر این آلکن در شرایط مناسب به پلیمر تبدیل شود، از سوختن کامل $2/8$ کیلوگرم از پلیمر حاصل، چند مول گاز کربن دی اکسید تولید خواهد شد؟ ($H=1, C=12: g.mol^{-1}$)

۱۰۰ (۱) ۱۴۰ (۲) ۲۰۰ (۳) ۲۸۰ (۴)

پاسخ: گزینه ۳

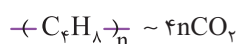
پاسخ خیلی تشریحی ✓ اول باید ببینیم با چه آلکنی سروکار داریم:

$$2/5 \frac{mg}{cm^3} \times \frac{1g}{1000mg} \times \frac{1000cm^3}{1L} = 2/5 g.L^{-1}$$

$$چگالی = \frac{جرم مولی}{حجم مولی} \Rightarrow 2/5 g.L^{-1} = \frac{جرم مولی}{22/4 L} \Rightarrow جرم مولی آلکن = 2/5 \times 22/4 = 56 g.mol^{-1}$$

$$C_n H_{2n} \text{ جرم مولی } = 14n \Rightarrow 14n = 56 \Rightarrow n = 4 \Rightarrow C_4 H_8$$

بنابراین فرمول پلیمر تولیدشده، $\left(C_4 H_8 \right)_n$ است.



$$2800g \text{ پلیمر} \times \frac{1 \text{ mol پلیمر}}{(56n)g \text{ پلیمر}} \times \frac{(4n) \text{ mol } CO_2}{1 \text{ mol پلیمر}} = \frac{2800 \times 4}{56} = 200 \text{ mol } CO_2$$