

آزمون آزمایشی خیلی سبز

مرحله اول

پایه یازدهم

دانشته ریاضی

سال تحصیلی ۱۴۰۳-۰۴ تاریخ برگزاری: ۲۷/مهر/۱۴۰۳

سال تحصیلی ۱۴۰۳-۰۴

بودجه بندی دروس

هندسه (۲)

فصل ۱
(درس ۱ تا فعالیت صفحه ۱۵)
صفحه ۹ تا ۱۵

آمار و احتمال

فصل ۱
(درس ۱ تا ابتدای سوره)
صفحه ۱ تا ۱۱

حسابان (۱)

فصل ۱
(درس ۱ و ۲)
صفحه ۱ تا ۱۶

شیمی (۲)

فصل ۱
(تا ابتدای عنصرها به چه شکلی در طبیعت یافت می شوند؟)
صفحه ۱ تا ۱۷

فیزیک (۲)

فصل ۱
(تا ابتدای انرژی پتانسیل الکتریکی)
صفحه ۱ تا ۲۱

مدت پاسخگویی	تأ شماره	از شماره	تعداد سؤال	مواد امتحانی
۳۰ دقیقه	۲۰	۱	۲۰	حسابان
۲۰ دقیقه	۳۰	۲۱	۱۰	آمار و احتمال
۲۰ دقیقه	۴۰	۳۱	۱۰	هندسه
۳۰ دقیقه	۶۰	۴۱	۲۰	فیزیک
۲۰ دقیقه	۸۰	۶۱	۲۰	شیمی
۱۲۰ دقیقه	۸۰ سؤال			مجموع

استاد، مشاوران و دانش آموزان گرامی:

نظرات، پیشنهادات، انتقادات و بازخوردهای خود نسبت به سؤالات این آزمون را می توانید از طریق آیدی @Kheilisabz_edit در همه پیام رسان ها با ما به اشتراک بگذارید.



حسابان یازدهم

۱- در ۲۰ جمله اول یک دنباله حسابی مجموع جملات ردیف فرد ۱۳۵ و مجموع جملات ردیف زوج ۱۵۰ می باشد. جمله سوم این دنباله کدام است؟

- (۱) ۱/۵ (۲) ۳ (۳) ۴/۵ (۴) ۶

۲- مجموع ۱۰ جمله اول دنباله هندسی $\frac{1}{4}, -\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{4}, \dots$ کدام است؟

- (۱) $\frac{1023}{512}$ (۲) $\frac{1023}{1024}$ (۳) $\frac{1023}{1536}$ (۴) $\frac{1025}{1536}$

۳- در یک دنباله حسابی مجموع جملات از رابطه $S_n = n(4n + 1)$ به دست می آید. مقدار $a_1 + d$ کدام است؟

- (۱) ۹ (۲) ۱۳ (۳) ۷ (۴) ۱۵

۴- جمله سوم یک دنباله حسابی ۹ است و جمله هفتم از جمله دوم ۲۰ واحد بیشتر است. مجموع چه تعداد از جملات این دنباله با شروع از جمله اول برابر ۹۱ است؟

- (۱) ۲ (۲) ۸ (۳) ۷ (۴) ۵

۵- اگر $\frac{3}{2} = \frac{(a^4 + a^3 + a^2 + a + 1)(a^{10} + a^5 + 1)}{1 - a^{15}}$ باشد مقدار $3a + 1$ کدام است؟

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴

۶- بین اعداد ۴ و ۱۶ حداقل چند واسطه حسابی درج کنیم تا حاصل جمع همه جملات این دنباله از ۴ تا ۱۶ از حاصل جمع اعداد فرد بین صفر تا ۲۰ بیشتر شود؟

- (۱) ۹ (۲) ۶ (۳) ۱۰ (۴) ۱۲

۷- تعداد جملات یک دنباله هندسی زوج است. اگر مجموع کل جملات، ۴ برابر مجموع کل جملات با ردیف فرد باشد، قدرنسبت آن کدام است؟

- (۱) $\frac{1}{3}$ (۲) $\frac{1}{2}$ (۳) ۲ (۴) ۳

۸- اگر مجموع ۵ جمله اول یک دنباله حسابی برابر ۲۵ باشد، جمله سوم این دنباله کدام است؟

- (۱) ۲ (۲) ۵ (۳) ۱۰ (۴) ۳

۹- اگر $x = 2$ یکی از ریشه های معادله $3x^2 - mx - 2 = 0$ باشد، مجموع مربعات ریشه های این معادله کدام است؟

- (۱) $\frac{38}{9}$ (۲) $\frac{37}{9}$ (۳) $\frac{39}{9}$ (۴) $\frac{40}{9}$

محل انجام محاسبات

۱۰- محیط یک مستطیل ۳۳ سانتی متر و مساحت آن ۶۵ سانتی متر مربع است. اندازه ضلع کوچک ترین مستطیل کدام است؟

- (۱) $\frac{15}{2}$ (۲) ۷ (۳) $\frac{13}{2}$ (۴) ۸

۱۱- اگر ریشه های معادله درجه دوم $x^2 + bx + 3 = 0$ دو عدد طبیعی فرد متوالی باشند، آن گاه مجموع ریشه ها چند برابر حاصل ضرب ریشه های این معادله است؟

- (۱) $\frac{4}{3}$ (۲) $\frac{3}{4}$ (۳) $-\frac{3}{4}$ (۴) $\frac{3}{2}$

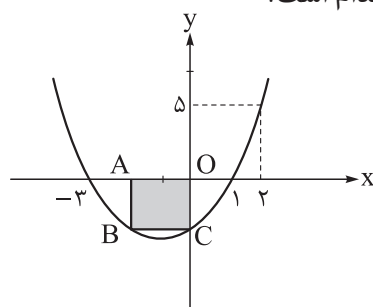
۱۲- اگر $\alpha + 3$ و $\beta - 1$ ریشه های معادله $x^2 + 2x - 5 = 0$ باشند ریشه های کدام معادله $\alpha - 1$ و $\beta - 5$ می باشند؟

- (۱) $x^2 - 6x + 3 = 0$ (۲) $x^2 + 6x - 3 = 0$
(۳) $x^2 + 10x + 19 = 0$ (۴) $x^2 - 10x + 19 = 0$

۱۳- فرض کنید نقاط $(-1, 2)$ و $(0, 1)$ و $(2, 23)$ بر سهمی $y = ax^2 + bx + c$ واقع باشند. این سهمی از کدام یک از نقاط زیر می گذرد؟

- (۱) $(1, 8)$ (۲) $(-2, 4)$ (۳) $(-3, 29)$ (۴) $(3, 48)$

۱۴- با توجه به سهمی به معادله $y = ax^2 + bx + c$ مساحت چهارضلعی OABC کدام است؟



- (۱) ۴
(۲) ۶
(۳) $\frac{9}{4}$
(۴) $\frac{25}{4}$

۱۵- در معادله $x^4 - 4x^2 + 1 = 0$ مجموع مربعات ریشه ها کدام است؟

- (۱) ۱۴ (۲) ۴ (۳) ۱۶ (۴) ۸

۱۶- اگر به ازای مقادیر m متعلق به بازه $(a, b]$ نمودار تابع f با ضابطه $f(x) = (m-1)x^2 - 4x + m + 2$ فقط از ناحیه اول عبور نکند، بیشترین مقدار $(b-a)$ کدام است؟

- (۱) ۴ (۲) ۳ (۳) ۲ (۴) ۱

۱۷- اگر $x = \frac{3-\sqrt{5}}{3}$ یکی از ریشه های معادله $ax^2 - 18x + c = 0$ با ضرایب صحیح باشد، مقدار $\sqrt{a} + \sqrt{c}$ کدام است؟

- (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴) ۵

محل انجام محاسبات

۱۸- به ازای چه مقادیری از m ، بین ریشه‌های حقیقی و متمایز یک معادله درجه دوم روابط $x_1x_2 - (x_1 + x_2) = m + 2$ و $2x_1x_2 + x_1 + x_2 = 1 - m$ برقرار است؟

(۴) $[-1, 3]$

(۳) $(-3, 1)$

(۲) $\mathbb{R} - [-1, 3]$

(۱) $\mathbb{R} - [-3, 1]$

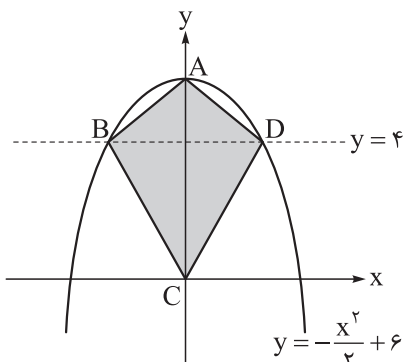
۱۹- با توجه به شکل مقابل مساحت چهارضلعی ABCD کدام است؟

(۱) ۱۶

(۲) ۱۲

(۳) ۱۸

(۴) ۲۴



۲۰- اگر x_1 و x_2 ریشه‌های معادله $x^2 - (m-1)x + 25 = 0$ باشند، به ازای کدام مقدار m رابطه $\sqrt{x_1} + \frac{4}{\sqrt{x_2}} = 9$ برقرار است؟ ($x_2 < x_1$)

(۴) ۲۷

(۳) ۱۰

(۲) ۳۶

(۱) ۹

محل انجام محاسبات

آمار و احتمال

۲۱- در کدام گزینه، یک گزاره با ارزش درست آمده است؟

(۱) $x^2 - x < 4$

(۲) جدول ارزش ۸ گزاره، ۶۴ حالت (سطر) دارد.

(۳) بیستمین رقم بعد از ممیز عدد $\frac{11}{7}$ برابر ۷ است. (۴) ۱۸۳۹ عددی اول است.

۲۲- گزاره‌نمای $x^3 - 2x^2 - x + 2 = 0$ را در نظر بگیرید. اگر دامنه متغیر این گزاره‌نما، مجموعه اعداد طبیعی باشد، مجموع اعضای مجموعه جواب گزاره‌نما چه قدر است؟

(۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۶

۲۳- اگر گزاره $p \Rightarrow q$ ارزش درست و گزاره $p \Rightarrow r$ ارزش نادرست داشته باشد، کدام یک از گزاره‌های زیر ارزش درست دارد؟

(۱) $(p \Rightarrow q) \Rightarrow r$ (۲) $q \Leftrightarrow r$ (۳) $(p \wedge q) \Rightarrow r$ (۴) $q \Leftrightarrow (r \Rightarrow p)$

۲۴- در ستون مربوط به کدام گزینه در جدول ارزش گزاره‌ها، تعداد «درست»های بیشتری وجود دارد؟

(۱) $p \Rightarrow (q \Rightarrow r)$ (۲) $(p \Rightarrow q) \Rightarrow r$ (۳) $p \Rightarrow (q \wedge r)$ (۴) $(p \vee q) \Rightarrow r$

۲۵- اگر گزاره $p \vee q$ ارزش درست و گزاره $r \wedge q$ ارزش نادرست داشته باشد، گزاره $((r \Rightarrow p) \vee (q \Rightarrow p)) \wedge (r \Rightarrow (\sim p \Rightarrow q))$ با کدام یک از گزاره‌های زیر هم‌ارز است؟

(۱) p (۲) q (۳) r (۴) T

۲۶- با چه احتمالی دو گزاره $p \Rightarrow \sim q$ و $p \Rightarrow q$ هم‌ارزش‌اند، ولی p و q هم‌ارزش نیستند؟

(۱) صفر (۲) $\frac{1}{4}$ (۳) $\frac{1}{2}$ (۴) $\frac{3}{4}$

۲۷- عکس نقیض گزاره $p \Rightarrow q$ را با r و نقیض عکس آن را با s نشان می‌دهیم. گزاره $r \vee s$ با کدام یک از گزاره‌های زیر هم‌ارز است؟

(۱) $p \Rightarrow q$ (۲) $q \Rightarrow p$ (۳) $\sim p \Rightarrow q$ (۴) $p \Rightarrow \sim q$

۲۸- گزاره «اگر $x = 2$ و $y > 2$ ، آن‌گاه $100! + 1$ عددی اول است.» معادل کدام یک از گزاره‌های زیر است؟

(۱) اگر $x \neq 2$ و $y \leq 2$ ، آن‌گاه $100! + 1$ عددی اول نیست.

(۲) اگر $100! + 1$ عددی اول باشد، آن‌گاه $x \neq 2$ و $y \leq 2$.

(۳) اگر $100! + 1$ عددی اول نباشد، آن‌گاه $x \neq 2$ و $y \leq 2$.

(۴) اگر $100! + 1$ عددی اول نباشد، آن‌گاه $x \neq 2$ یا $y \leq 2$.

۲۹- اگر f تابعی بر روی گزاره‌ها باشد، به گونه‌ای که اگر p درست باشد $f(p) = 1$ و اگر p نادرست باشد، $f(p) = 0$ ، در این صورت تابع $f(p \Leftrightarrow q)$ برابر کدام یک از عبارات زیر است؟

(۱) $f(p) + f(q) - f(p)f(q)$ (۲) $f(p)f(q) + f(\sim p)f(\sim q)$

(۳) $f(p)f(\sim p) + f(q)f(\sim q)$ (۴) $f(p)f(\sim q) + f(q)f(\sim p)$

۳۰- n برابر کدام یک از مقادیر زیر می‌تواند باشد تا ارزش گزاره $(p_1 \Leftrightarrow p_2) \vee (p_2 \Leftrightarrow p_3) \vee \dots \vee (p_{n-1} \Leftrightarrow p_n) \vee (p_n \Leftrightarrow p_1)$ همواره درست باشد؟

(۱) ۱۰۰ (۲) ۱۲۱ (۳) ۱۴۴ (۴) ۱۵۰

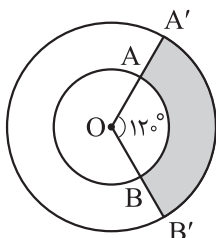
محل انجام محاسبات

هندسه یازدهم

۳۱- در مربعی به ضلع ۱۵ واحد، دایره‌ای به مرکز یک رأس آن و شعاع ۱۷ واحد رسم می‌کنیم تا دو ضلع مربع را قطع کند. فاصله دو نقطه تقاطع مربع و دایره از یکدیگر کدام است؟

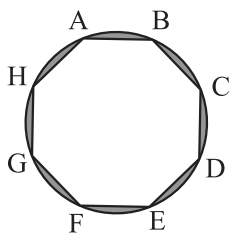
- (۱) $7\sqrt{2}$ (۲) $8\sqrt{2}$ (۳) ۱۴ (۴) ۱۶

۳۲- در شکل زیر، مساحت ناحیه رنگی نصف مساحت دایره کوچک تر است. طول کمان $A'B'$ چند برابر طول کمان AB است؟



- (۱) $\sqrt{3}$ (۲) $\sqrt{5}$ (۳) $\frac{\sqrt{6}}{2}$ (۴) $\frac{\sqrt{10}}{2}$

۳۳- در شکل زیر، هشت ضلعی منتظم ABCDEFGH درون دایره‌ای به شعاع $2\sqrt{2}$ محاط شده است. مساحت ناحیه سایه زده کدام است؟



- (۱) $8(\pi - 2\sqrt{2})$ (۲) $4(\pi - 2\sqrt{2})$ (۳) $8(\pi - 2)$ (۴) $4(\pi - 2)$

۳۴- در دایره $C(O, 10)$ ، از نقطه A به فاصله ۶ واحد از مرکز دایره، وتر MN را با کمترین طول و وتر PQ را با بیشترین طول رسم کرده‌ایم. مساحت چهارضلعی MPNQ کدام است؟

- (۱) ۸۰ (۲) ۱۲۰ (۳) ۱۶۰ (۴) ۲۴۰

۳۵- مرکز دایره $C(O, 6)$ از خطوط موازی d_1 و d_2 به ترتیب به فاصله ۱۴ و ۸ قرار دارد. اگر نقاط A و B روی این دایره فاصله‌ای برابر از این دو خط داشته باشند، طول وتر AB کدام است؟

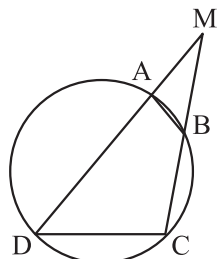
- (۱) ۶ (۲) $4\sqrt{5}$ (۳) ۱۰ (۴) $6\sqrt{3}$

۳۶- روی دایره‌ای ۶ نقطه به گونه‌ای قرار گرفته‌اند که اندازه‌های ۶ کمان متوالی ایجادشده یک دنباله حسابی با قدرنسبت 18° تشکیل داده‌اند. اندازه زاویه محاطی روبه‌رو به کوچک‌ترین کمان، چند درجه است؟

- (۱) ۵ (۲) $7/5$ (۳) ۱۰ (۴) ۱۵

محل انجام محاسبات

۳۷- در شکل زیر، شعاع دایره ۲ واحد است. اگر $AB = 2$ ، $CD = 2\sqrt{2}$ و $\widehat{BC} = \frac{2}{5}\widehat{AD}$ باشد، اندازه زاویه C چند درجه است؟



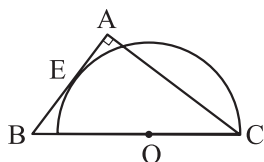
(۱) ۱۰۰

(۲) ۱۰۵

(۳) ۱۱۰

(۴) ۱۲۰

۳۸- در شکل زیر $\hat{A} = 90^\circ$ و AB در نقطه E بر نیم دایره مماس است. اگر $AC = 12$ و شعاع نیم دایره $\frac{20}{3}$ باشد، طول



پاره خط AE کدام است؟

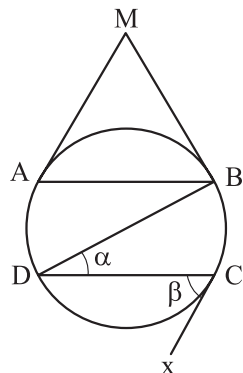
(۲) ۴

(۱) ۳

(۴) ۵

(۳) ۴/۵

۳۹- در شکل زیر MA ، MB و Cx بر دایره مماس هستند. اگر $AB \parallel CD$ ، $\beta = 1/5\alpha$ و $M = 100^\circ$ باشد، امتداد



پاره خط BD و نیم خط Cx چه زاویه ای با یکدیگر می سازند؟

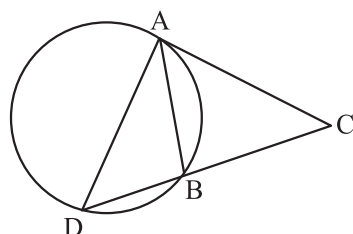
(۱) 40°

(۲) 30°

(۳) 20°

(۴) 15°

۴۰- در شکل زیر، CA در نقطه A بر دایره مماس است. اگر $AC = AD$ و $AB = \frac{\sqrt{6}}{3}AC$ باشد، آن گاه حاصل $\frac{DC}{BD}$



کدام است؟

(۲) ۲

(۱) $\frac{3}{2}$

(۴) $2\sqrt{3}$

(۳) ۳

محل انجام محاسبات

فیزیک یازدهم

انتهای مثبت سری
شیشه
چوب
پلاستیک
انتهای منفی سری

۴۱- یک میله شیشه‌ای خنثی را با یک میله پلاستیکی خنثی مالش می‌دهیم. اگر طی این مالش، 5×10^{10} الکترون بین این دو میله منتقل شود، بار الکتریکی میله پلاستیکی پس از مالش، به چند نانوکولن می‌رسد؟ ($e = 1.6 \times 10^{-19} \text{ C}$)

- (۱) -۸ (۲) -۸۰ (۳) +۸ (۴) +۸۰

۴۲- نوع بار الکتریکی یک جسم باردار، با از دست دادن 300 الکترون، تغییر کرده و اندازه بار آن 50 درصد کاهش می‌یابد. بار این جسم، پس از، از دست دادن این الکترون‌ها به چند کولن می‌رسد؟ ($e = 1.6 \times 10^{-19} \text{ C}$)

- (۱) 1.6×10^{-17} (۲) 3.2×10^{-17} (۳) -1.6×10^{-17} (۴) -3.2×10^{-17}

۴۳- جسم باردار A را با جسم باردار B مالش می‌دهیم. اگر در طی مالش، با انتقال 1.25×10^{13} الکترون از جسم A به جسم B، بار این دو جسم به ترتیب به $2 \mu\text{C}$ و $1 \mu\text{C}$ برسد، بار اولیه دو جسم A و B به ترتیب از راست به چپ، چند میکروکولن بوده است؟ ($e = 1.6 \times 10^{-19} \text{ C}$)

- (۱) -۶، -۱ (۲) -۴، ۳ (۳) -۱، -۲ (۴) ۴، -۵

۴۴- میله بارداری را بدون تماس، به کلاهک الکتروسکوپ بارداری سریع نزدیک می‌کنیم. مشاهده می‌شود که ورقه‌های الکتروسکوپ ابتدا بسته و سپس باز می‌شوند. کدام یک از عبارات‌های زیر الزاماً درست است؟
(الف) در لحظه‌ای که ورقه‌های الکتروسکوپ کاملاً بسته‌اند، بار خالص الکتروسکوپ برابر صفر است.

(ب) بار اولیه الکتروسکوپ، همانم با بار میله است.

(پ) بار اولیه و بار نهایی ورقه‌های الکتروسکوپ، ناهمنامند.

(ت) بار اولیه و بار نهایی کلاهک الکتروسکوپ، ناهمنامند.

- (۱) الف و ب (۲) ب و پ (۳) پ و ت (۴) الف و ت

۴۵- دو بار الکتریکی نقطه‌ای $q_1 = 4 \mu\text{C}$ و $q_2 = -2 \mu\text{C}$ در فاصله 30 cm از یکدیگر قرار دارند. به ترتیب، اندازه نیروی الکتریکی که دو بار به هم وارد می‌کنند، چند نیوتون و نوع این نیرو کدام است؟ ($k = 9 \times 10^9 \frac{\text{N.m}^2}{\text{C}^2}$)

- (۱) ۸، رانشی (۲) ۸، ربایشی (۳) ۸، رانشی (۴) ۸، ربایشی

۴۶- در شکل مقابل، دو گوی مشابه به جرم $2/5 \text{ g}$ و بار یکسان مثبت q در فاصله 6 cm از هم قرار دارند، به طوری که گوی بالایی به حالت معلق مانده است. q چند میکروکولن است؟

$$(g = 10 \text{ m/s}^2, k = 9 \times 10^9 \frac{\text{N.m}^2}{\text{C}^2})$$

- (۱) ۰/۰۱ (۲) ۰/۱ (۳) ۰/۰۲ (۴) ۰/۲

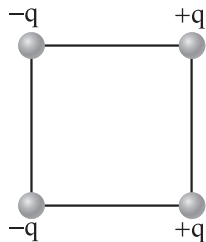


محل انجام محاسبات

۴۷- دو ذره ببار الکتریکی یکسان در فاصله $2r$ ، بر یکدیگر نیروی الکتریکی وارد می کنند. چند درصد از باریکی از ذره ها را به دیگری منتقل کنیم تا در فاصله $\frac{r}{4}$ از هم، اندازه نیروی الکتریکی بین این دو ذره نسبت به حالت اول، ۲۴ درصد کاهش یابد؟

- (۱) ۶۰ (۲) ۷۰ (۳) ۸۰ (۴) ۹۰

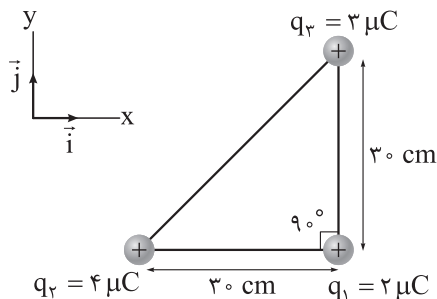
۴۸- چهار ذره باردار، مطابق شکل زیر، در چهار رأس یک مربع قرار دارند. بار الکتریکی $-q$ را در مرکز این مربع قرار می دهیم. جهت نیروی الکتریکی خالص وارد بر این بار کدام است؟



- (۱) $\uparrow$ (۲) $\downarrow$ (۳) $\rightarrow$ (۴) $\leftarrow$

۴۹- در شکل زیر، سه بار الکتریکی نقطه ای در سه رأس مثلث قائم الزاویه ای ثابت شده اند. بردار نیروی الکتریکی خالص

($\vec{F}$) وارد بر بار q_1 در SI کدام است؟ ($k = 9 \times 10^9 \frac{N \cdot m^2}{C^2}$)



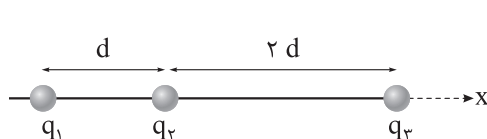
$$\vec{F} = 0 / \lambda \vec{i} + 0 / 6 \vec{j} \quad (1)$$

$$\vec{F} = 0 / \lambda \vec{i} - 0 / 6 \vec{j} \quad (2)$$

$$\vec{F} = \lambda \vec{i} + 6 \vec{j} \quad (3)$$

$$\vec{F} = \lambda \vec{i} - 6 \vec{j} \quad (4)$$

۵۰- در شکل زیر، بارهای الکتریکی نقطه ای $q_1 = q$ ، $q_2 = 4q$ و $q_3 = -2q$ در جای خود ثابت شده اند. اندازه نیروی الکتریکی خالص وارد بر بار q_1 ، چند برابر اندازه نیروی الکتریکی خالص وارد بر بار q_2 است؟



$$\frac{19}{27} \quad (2)$$

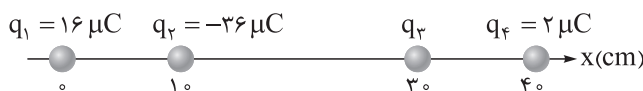
$$\frac{17}{27} \quad (4)$$

$$\frac{34}{18} \quad (1)$$

$$\frac{19}{9} \quad (3)$$

۵۱- در شکل زیر، بارهای الکتریکی نقطه ای روی محور x قرار دارند. اگر نیروی الکتریکی خالص وارد بر بار q_4 در SI

برابر $\vec{F} = -9\vec{i}$ باشد، بار q_3 چند میکروکولن است؟



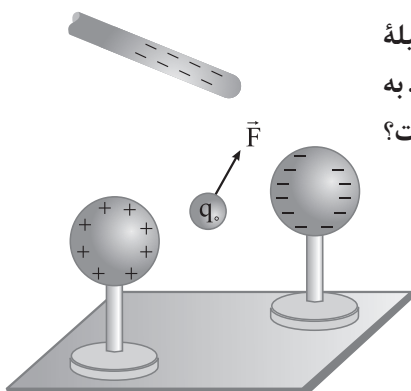
$$-8 \quad (4)$$

$$8 \quad (3)$$

$$2 \quad (2)$$

$$-2 \quad (1)$$

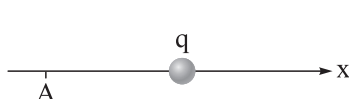
محل انجام محاسبات



۵۲- بار آزمون نشان داده شده در شکل، $q = +3 \text{ nC}$ است و از سوی دو گوی و یک میله باردار نیرویی برابر با $F = 12 \times 10^{-5} \text{ N}$ در جهت نشان داده شده بر آن وارد می شود. به ترتیب میدان الکتریکی خالص در محل بار آزمون چند نیوتون بر کولن و در چه جهتی است؟

- (۱) 4×10^4 ، هم جهت با $\vec{F}$
- (۲) 4×10^4 ، در خلاف جهت $\vec{F}$
- (۳) 36×10^4 ، هم جهت با $\vec{F}$
- (۴) 36×10^4 ، در خلاف جهت $\vec{F}$

۵۳- در شکل زیر، فاصله نقطه A از بار الکتریکی نقطه ای $q = +10 \mu\text{C}$ برابر 20 cm است. میدان الکتریکی حاصل از



بار q در نقطه A، بر حسب نیوتون بر کولن کدام است؟ ($k = 9 \times 10^9 \frac{\text{N.m}^2}{\text{C}^2}$)

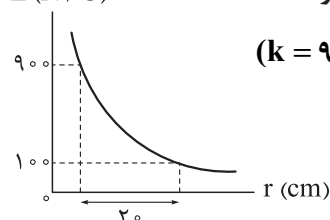
- (۱) $2/25 \times 10^6 \vec{i}$
- (۲) $22/5 \times 10^6 \vec{i}$
- (۳) $-2/25 \times 10^6 \vec{i}$
- (۴) $-22/5 \times 10^6 \vec{i}$

۵۴- اگر بزرگی میدان الکتریکی حاصل از یک ذره باردار در فاصله یک متری از آن، 81 N/C بیشتر از بزرگی میدان

الکتریکی حاصل از آن در فاصله ۲ متری اش باشد، اندازه بار الکتریکی این ذره چند نانوکولن است؟ ($k = 9 \times 10^9 \frac{\text{N.m}^2}{\text{C}^2}$)

- (۱) ۳
- (۲) ۴
- (۳) ۱۲
- (۴) ۱۸

$E (\text{N/C})$

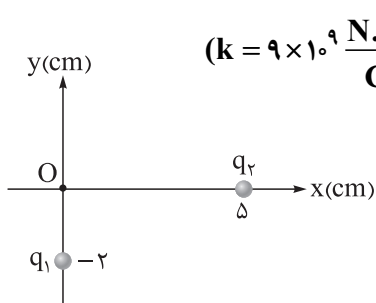


۵۵- نمودار حاصل از یک بار الکتریکی نقطه ای بر حسب فاصله از آن، به شکل مقابل است. در فاصله

چند سانتی متری از این بار اندازه میدان الکتریکی، برابر 400 N/C است؟ ($k = 9 \times 10^9 \frac{\text{N.m}^2}{\text{C}^2}$)

- (۱) ۵
- (۲) ۱۰
- (۳) ۱۵
- (۴) ۲۰

۵۶- در شکل زیر، اگر بردار میدان الکتریکی حاصل از بارهای الکتریکی نقطه ای q_1 و q_2 در مبدأ مختصات (نقطه O) بر حسب

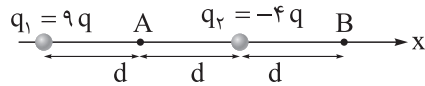


نیوتن بر کولن به صورت $\vec{E} = 1/2 \times 10^3 \vec{i} + 1/5 \times 10^3 \vec{j}$ باشد، $\frac{q_2}{q_1}$ کدام است؟ ($k = 9 \times 10^9 \frac{\text{N.m}^2}{\text{C}^2}$)

- (۱) ۵
- (۲) -۵
- (۳) ۲/۵
- (۴) -۲/۵

محل انجام محاسبات

۵۷- در شکل زیر، دو بار الکتریکی نقطه‌ای روی محور x قرار دارند. اگر میدان الکتریکی خالص در نقطه A و B به ترتیب برابر با $\vec{E}_A$ و $\vec{E}_B$ باشد، کدام درست است؟



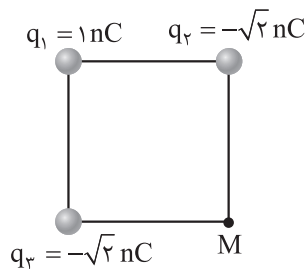
$$\vec{E}_A = \frac{13}{3} \vec{E}_B \quad (۲)$$

$$\vec{E}_A = \frac{11}{3} \vec{E}_B \quad (۱)$$

$$\vec{E}_A = -\frac{13}{3} \vec{E}_B \quad (۴)$$

$$\vec{E}_A = -\frac{11}{3} \vec{E}_B \quad (۳)$$

۵۸- در شکل زیر، سه بار الکتریکی نقطه‌ای در سه رأس مربعی قرار دارند. اندازه بار q_1 چند نانوکولن افزایش یابد تا میدان الکتریکی خالص در نقطه M برابر صفر شود؟



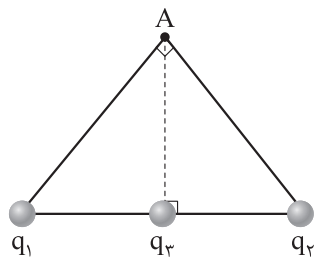
$$۴ \quad (۱)$$

$$۳ \quad (۲)$$

$$۲ \quad (۳)$$

$$۲\sqrt{۲} \quad (۴)$$

۵۹- در شکل زیر، سه بار الکتریکی نقطه‌ای $q_1 = q_2 = \sqrt{۲}q$ و $q_3 = q$ روی وتر مثلث قائم‌الزاویه متساوی‌الساقینی قرار دارند. اگر علامت بار q_3 تغییر کند، بزرگی میدان الکتریکی خالص در رأس قائم مثلث (A) چند برابر می‌شود؟



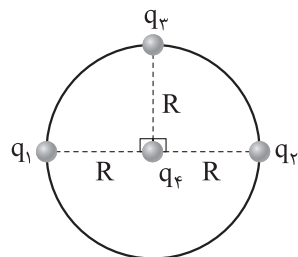
$$\frac{\sqrt{۲}}{۲} \quad (۱)$$

$$\sqrt{۲} \quad (۲)$$

$$۲\sqrt{۲} \quad (۳)$$

$$\frac{\sqrt{۲}}{۴} \quad (۴)$$

۶۰- در شکل زیر، بارهای الکتریکی نقطه‌ای $q_1 = -q_2 = q_3 = q$ روی محیط دایره و بار الکتریکی نقطه‌ای $q_4 = \frac{\sqrt{۲}}{۲}q$ در مرکز دایره ثابت شده‌اند. بزرگی نیروی الکتریکی خالص وارد بر بار q_4 چند برابر بزرگی نیروی الکتریکی خالص وارد بر بار q_3 است؟



$$\frac{\sqrt{۵}}{۵} \quad (۲)$$

$$\sqrt{۵} \quad (۱)$$

$$\sqrt{\frac{۵}{۲}} \quad (۴)$$

$$\sqrt{\frac{۲}{۵}} \quad (۳)$$

محل انجام محاسبات

شیمی یازدهم

۶۱- کدام مطلب درست است؟

- (۱) با گسترش دانش تجربی، شیمی دان هادر یافتند که همواره گرمادادن به مواد و افزودن آن ها به یکدیگر، سبب بهبود خواص می شود.
- (۲) پیشرفت و گسترش صنعت خودرو و الکترونیک، به ترتیب مبتنی بر فولاد و مواد رسانا است.
- (۳) در سال ۲۰۱۰ میلادی، میزان استخراج و مصرف سوخت های فسیلی در مقایسه با عناصر فلزی و مواد معدنی، بیشتر بوده است.
- (۴) برای تولید ورقه های فولادی و تایر دوچرخه، مواد استخراج شده از معدن و چاه نفت، باید فراوری شوند.
- ۶۲- چه تعداد از هالوژن های جدول تناوبی، می توانند در دمای 473 K با ساده ترین گاز دواتمی واکنش دهند؟

- (۱) ۴ (۲) ۳ (۳) ۲ (۴) ۱

۶۳- با توجه به شکل های زیر که سه عنصر از دوره سوم جدول دوره ای را نشان می دهند، کدام موارد از مطالب زیر درست است؟



A



B



C

- (الف) مولکول عنصر C، در دمای 200°C ، می تواند با گاز هیدروژن واکنش دهد.
- (ب) رسانایی الکتریکی عنصر A، بیشتر از رسانایی الکتریکی سومین عنصر گروه چهاردهم جدول تناوبی است.
- (پ) طول موج نور ساطع شده از واکنش عنصر X و C، بلندتر از طول موج نور ساطع شده از واکنش عناصر A و C است.
- (ت) در اتم عنصر B، شمار الکترون های موجود در زیر لایه $l = 0$ ، برابر شمار الکترون های موجود در زیر لایه $l = 1$ است.

- (۱) الف - ب (۲) الف - پ (۳) ب - ت (۴) پ - ت

۶۴- چند مورد از مطالب زیر درباره جدول تناوبی، درست است؟

- عنصرها در جدول دوره ای براساس بنیادی ترین ویژگی آن ها یعنی جرم اتمی چیده شده اند.
- حدود ۴۰ درصد عناصر موجود در این جدول متعلق به دسته p هستند.
- در همه گروه های آن، شمار الکترون های ظرفیت عناصر با یکدیگر برابر هستند.
- شمار عنصرهای موجود در دوره سوم آن، ۱/۶ برابر شمار عنصرهای موجود در گروه چهاردهم آن است.

- (۱) صفر (۲) ۱ (۳) ۲ (۴) ۳

۶۵- عنصر X در دوره پنجم قرار دارد و دارای دو الکترون ظرفیتی است. اگر شعاع اتمی این عنصر برابر ۲۱۵ پیکومتر باشد، شعاع اتمی عنصرهای Y و Z، به ترتیب از راست به چپ، کدام اعداد برحسب پیکومتر می توانند باشند؟

- (۱) ۱۹۷، ۱۸۰ (۲) ۱۹۷، ۲۴۸ (۳) ۲۳۱، ۱۸۰ (۴) ۲۳۱، ۲۴۸

محل انجام محاسبات

۶۶- کدام موارد از مطالب زیر، نادرست است؟

(الف) ماده اولیه برای ساخت لیوان شیشه‌ای، قاشق چای خوری و ظرف غذا، به ترتیب شن و ماسه، فولاد زنگ‌نزن و خاک چینی است.

(ب) انسان‌های پیشین، قبل از استخراج فلزها از برخی مواد طبیعی مانند چوب، سنگ، خاک، سفال، پشم و پوست بهره می‌بردند.

(پ) علم شیمی را می‌توان مطالعه هدفدار رفتار عناصرها و مواد دانست که تنها منجر به یافتن روندها و الگوهای رفتار شیمیایی آنها می‌شود.

(ت) کره زمین، انباری از ذخایر ارزشمند است که به طور یکسانی توزیع نشده و موجب پیدایش تجارت جهانی شده‌اند.

(۱) الف - پ (۲) الف - ت (۳) ب - ت (۴) ب - پ

۶۷- درباره پنج عنصر ابتدایی گروه چهاردهم جدول تناوبی، کدام مطلب درست است؟

(۱) ۶۰ درصد این عناصر، سطح صیقلی و رسانایی گرمایی خوبی دارند.

(۲) تفاوت عدد اتمی دومین شبه‌فلز با دومین فلز این گروه، برابر با عدد اتمی پنجمین گاز نجیب جدول تناوبی است.

(۳) همه عناصری که نماد شیمیایی آنها دو حرفی هستند؛ در واکنش با دیگر اتم‌ها، الکترون به اشتراک می‌گذارند.

(۴) ۳ عنصر اول، از نظر شکنندگی رفتاری مشابه با یکدیگر دارند.

۶۸- کدام مطلب نادرست است؟

(۱) در یک گروه برخلاف یک دوره جدول تناوبی، عدد اتمی فلزها بیشتر از عدد اتمی نافلزهاست.

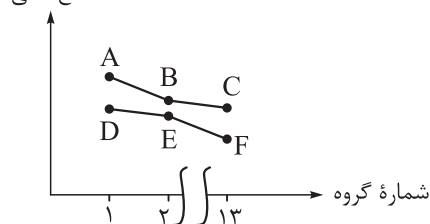
(۲) شیب تغییرات شعاع اتمی سه فلز دوره سوم جدول تناوبی از شیب تغییرات شعاع اتمی نافلزهای آن، بیشتر است.

(۳) فلزها برخلاف نافلزها و شبه‌فلزها، می‌توانند به هر چهار دسته جدول تناوبی تعلق داشته باشند.

(۴) فلزهای دسته S برخلاف همه فلزهای دسته p، به هنگام تشکیل یون به آرایش گاز نجیب می‌رسند.

۶۹- با توجه به نمودار زیر که تغییرات شعاع اتمی سه عنصر نخست دوره‌های دوم و سوم جدول تناوبی را نشان می‌دهد، کدام موارد از مطالب داده‌شده نادرست است؟

شعاع اتمی



(الف) عنصر F در دوره دوم قرار دارد و عدد اتمی آن برابر ۵ است.

(ب) واکنش‌پذیری عنصر B از واکنش‌پذیری عنصرهای A و E، بیشتر است.

(پ) نسبت شمار آنیون به شمار کاتیون در اکسید عنصر C، سه برابر نسبت

شمار کاتیون به شمار آنیون در اکسید عنصر D است.

(ت) مجموع اعداد کوانتومی اصلی و فرعی الکترون‌های عنصر E، با مجموع

اعداد کوانتومی اصلی و فرعی الکترون‌های ظرفیت عنصر B برابر است.

(۱) الف - ب (۲) ب - ت (۳) ب - پ (۴) پ - ت

محل انجام محاسبات

۷۰- با توجه به جدول زیر، درستی یا نادرستی کدام گزینه با دیگر گزینه‌ها متفاوت است؟

	گروه ۱	گروه ۱۵	گروه ۱۶
دوره دوم			L
دوره سوم	G	M	A
دوره چهارم	R		

(۱) عنصر A، جامدی زردرنگ است که در اثر ضربه خرد می‌شود.

(۲) عنصر G، یک فلز قلیایی محسوب می‌شود.

(۳) عنصر M، دارای دو دگرشکل به رنگ‌های سفید و قرمز است که به دلیل واکنش پذیری زیاد، آن‌ها را زیر آب نگهداری می‌کنند.

(۴) عنصرهای R و L در واکنش با یکدیگر، ترکیب یونی تشکیل می‌دهند.

۷۱- چه تعداد از مقایسه‌های زیر، دربارهٔ عنصرهای جدول تناوبی، نادرست است؟

• شکل پذیری: دومین عنصر دورهٔ چهارم > ششمین عنصر دورهٔ سوم

• تمایل به گرفتن الکترون: دومین عنصر گروه ۱۵ < اولین عنصر گروه ۱۶

• رسانایی الکتریکی: دوازدهمین عنصر جدول > چهاردهمین عنصر جدول

• شعاع اتمی: هالوژن دورهٔ پنجم < اولین عنصر دورهٔ پنجم

(۴) ۱ (۳) ۲ (۲) ۳ (۱) ۴

۷۲- کدام یک از ویژگی‌های زیر را نمی‌توان به فلز طلا نسبت داد؟

(۱) رسانایی الکتریکی بالا و حفظ این رسانایی در شرایط دمایی گوناگون

(۲) واکنش ندادن با گازهای موجود در هواکره و مواد موجود در بدن انسان

(۳) توانایی جذب زیاد پرتوهای خورشیدی

(۴) تولید پسماند بسیار زیاد در هنگام استخراج آن از معدن

۷۳- در کدام گزینه، اعداد اتمی داده شده مربوط به دو عنصر واسطه و یک عنصر اصلی است؟

(۱) ۳۸، ۴۸ و ۵۳ (۲) ۲۳، ۴۷ و ۷۳ (۳) ۳۱، ۴۴ و ۸۰ (۴) ۱۷، ۵۵ و ۸۴

۷۴- کدام موارد از مطالب زیر، نادرست است؟

(الف) همهٔ فلزهای واسطهٔ جدول تناوبی، سخت و چکش خوارند.

(ب) زیرلایهٔ p در لایهٔ آخر همهٔ فلزهای واسطهٔ جدول تناوبی، خالی است.

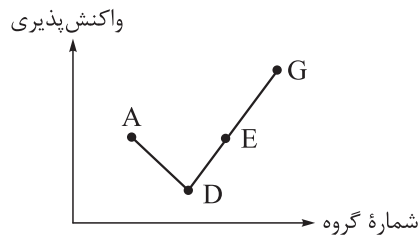
(پ) بیشترین شمار الکترون‌های ظرفیتی در بین عناصر یک دورهٔ جدول تناوبی، مربوط به گاز نجیب است.

(ت) اتم هیچ یک از فلزهای واسطهٔ جدول تناوبی، در لایهٔ سوم خود ۱۲ الکترون ندارد.

(۱) ب - ت (۲) الف - ت (۳) ب - پ (۴) الف - پ

محل انجام محاسبات

۷۵- نمودار زیر، روند کلی واکنش پذیری چهار عنصر متوالی دوره دوم جدول تناوبی را نشان می دهد؛ با توجه به این نمودار، می توان دریافت که



(۱) عنصر G در میان عناصر داده شده، بزرگ ترین شعاع اتمی را دارد.

(۲) عنصر A نخستین عنصر دسته p جدول دوره های است.

(۳) عنصر D در جدول تناوبی با دو نافلز هم گروه است.

(۴) در دمای اتاق، حالت فیزیکی عنصر E با حالت فیزیکی سه عنصر دیگر متفاوت است.

۷۶- با در نظر گرفتن عنصرهای دوره چهارم جدول تناوبی (به جز ^{22}Ti و ^{33}As)، به ترتیب از راست به چپ، آرایش الکترونی یون پایدار چه تعداد از آن ها به زیرلایه های $3p^6$ ، $3d^1$ و $4p^6$ ختم می شود؟

(۱) ۲، ۳، ۳ (۲) ۲، ۲، ۲ (۳) ۳، ۲، ۲ (۴) ۳، ۳، ۳

۷۷- کدام مطلب نادرست است؟

(۱) در یون (های) پایدار هشتمین عنصر فلزی تناوب چهارم جدول دوره های، زیرلایه ای با $n = 4$ و $l = 0$ فاقد الکترون است.

(۲) آخرین فلز واسطه دوره چهارم جدول تناوبی برخلاف سومین و چهارمین عناصر واسطه این دوره، تنها یک یون پایدار تشکیل می دهد.

(۳) عنصر A که آرایش الکترونی بیرونی ترین زیرلایه یون آن (A^{2+}) به $3d^1$ ختم شود، با چهارمین هالوژن جدول دوره ای، حالت فیزیکی یکسانی دارد.

(۴) در تبدیل اتم اولین فلز واسطه جدول به یون پایدار و تبدیل اتم دومین فلز قلیایی خاکی به یون پایدار، تغییر شمار الکترون ها با هم برابر است.

۷۸- اگر تفاوت تعداد نوترون ها و الکترون ها در یون $^{106}\text{X}^{2+}$ برابر تعداد عناصر با نماد شیمیایی دوحرفی موجود در ردیف چهارم جدول تناوبی باشد، بین این عنصر و سومین فلز قلیایی جدول دوره ای، چند عنصر وجود دارد؟

(۱) ۲۸ (۲) ۲۷ (۳) ۲۶ (۴) ۲۵

۷۹- اگر فلز M_z به هنگام تشکیل یون پایدار، دو الکترون خود را از دست بدهد و آرایش الکترونی یون آن به زیرلایه $3d^1$ ختم شود، کدام یک از مطالب زیر در مورد این فلز، درست است؟

(۱) آرایش الکترونی این عنصر همانند عنصر A_{z-6} ، از قاعده آفبا پیروی نمی کند.

(۲) همه زیرلایه های اشغال شده از الکترون این عنصر همانند فلز قلیایی خاکی هم دوره خود، پر هستند.

(۳) عنصر B_{z+4} ، برای رسیدن به آرایش گاز نجیب، تنها می تواند آنیون دو بار منفی تشکیل دهد.

(۴) مجموع $n + l$ الکترون های ظرفیت اتم M، برابر با ۵۴ است.

۸۰- ۱۰ گرم از یک فلز قلیایی یا قلیایی خاکی به طور کامل با آب واکنش می دهد. اگر پس از انجام واکنش، ۵ / ۱۸ گرم هیدروکسید فلز تولید شود، فلز مورد نظر کدام است؟ (فراورده دیگر واکنش، گاز هیدروژن است. g.mol^{-1} : $\text{Ca} = 40$ و $\text{Mg} = 24$ ، $\text{Na} = 23$ ، $\text{Li} = 7$)

(۱) اولین فلز قلیایی جدول تناوبی (۲) دومین فلز قلیایی خاکی جدول تناوبی

(۳) دومین فلز قلیایی جدول تناوبی (۴) سومین فلز قلیایی خاکی جدول تناوبی

محل انجام محاسبات

مهم ترین ویژگی های آزمون های خیلی سبز در پایه های دهم و یازدهم:

- ۱- برگزاری دست کم یک آزمون در ماه بر اساس روال تدریس در مدرسه
- ۲- برگزاری آزمون های ویژه برای زمان های خاص (میان ترم، ترم، پس از عیدو...)
- ۳- امکان جبران عقب ماندگی ها یا دوره مطالب برای تثبیت آنها

پاسخ نامه تشریحی آزمون را ساعت ۱۶ از صفحه شخصی
خودتان در سایت آزمون خیلی سبز دریافت کنید.



azmoon.kheilisabz.com

پاسخ نامه آزمون آزمایشی خیلی سبز

مرحله اول

پایه یازدهم

دانشته ریاضی

سال تحصیلی ۱۴۰۳-۰۴ تاریخ برگزاری: ۲۷/مهر/۱۴۰۳

سال تحصیلی ۱۴۰۳-۰۴

نام درس	طراحان به ترتیب حروف الفبا
حسابان	زهرا پورشیر - شمیم پهلوان شریف - فرشاد حسن زاده - خشایار خاکی - مجید رفعتی علی شهبازی - محمد گودرزی - میلاد منصوری - حسین نادری - محمدسجاد نقیه
آمار و احتمال	علیرضا شریف خطیبی - مسعود شفیعی - عطا صادقی - سروش موئینی
هندسه	امیرحسین ابومحبوب - محمدطاهر شعاعی - حسین هاشمی طاهری - صبا مهدوی
فیزیک	یاشار انگوتی - نوید شاهی
شیمی	یاسر عبداللہی - محدثه ملک پور

نام درس	مسئول درس	گزینشگر	مؤلف پاسخ نامه	کارشناسان علمی	ویراستاران به ترتیب حروف الفبا
حسابان	محمدسجاد نقیه	محمدسجاد نقیه	شمیم پهلوان شریف	علی شهبازی محمد گودرزی سجاد داوطلب	ماهان فنی فر ابوالفضل ناصری
آمار و احتمال	مسعود شفیعی	مسعود شفیعی	مریم نظری	مریم نظری	مهدی خوش نویس ماهان فنی فر ابوالفضل ناصری
هندسه	امیرحسین ابومحبوب	امیرحسین ابومحبوب	فرزانه خاکپاش	زهرا جالینوسی	مهدی خوش نویس ماهان فنی فر ابوالفضل ناصری
فیزیک	نوید شاهی	یاشار انگوتی	علیرضا عبداللہی	علیرضا عبداللہی	ماهان فنی فر مدیا عیدی ابوالفضل ناصری
شیمی	یاسر عبداللہی	محدثه ملک پور	محدثه ملک پور	مهسا خاکی	علیرضا کرمانی امیرحسین حسینی

سرپرست محتوایی: فاطمه آقاچانپور



Azmoon.kheilisabz.com

حسابان یازدهم

در ۲۰ جمله اول یک دنباله حسابی مجموع جملات ردیف فرد ۱۳۵ و مجموع جملات ردیف زوج ۱۵۰ می باشد. جمله سوم این دنباله کدام است؟

۶ (۴)

۴/۵ (۳)

۳ (۲)

۱/۵ (۱)



Hint

رابطه مجموع جملات ردیف فرد و جملات ردیف زوج رو بنویس، با حل دستگاه دو معادله، دو مجهول a_1 و d رو به دست بیار. حالا می تونی جمله سوم رو هم به دست بیاری.

درس Box

دنباله حسابی: به دنباله ای که در آن هر جمله به جز جمله اول با عدد ثابت (قدرنسبت) جمع شده و جمله بعدی به دست می آید، دنباله حسابی می گویند. در واقع در این دنباله، اختلاف هر دو جمله متوالی برابر است با قدرنسبت آن (قدرنسبت را معمولاً با d نمایش می دهند).

$$a_n - a_{n-1} = d$$

جمله عمومی دنباله حسابی: اگر جمله اول یک دنباله حسابی a_1 و قدرنسبت آن d باشد، جمله عمومی دنباله برابر است با:

$$a_n = a_1 + (n-1)d$$

مانند:

$$1, 5, 9, 13, 17, \dots \rightarrow d = 4$$

$\begin{array}{ccccccc} & \nearrow & \nearrow & \nearrow & \nearrow & & \\ & +4 & +4 & +4 & +4 & & \end{array}$

که در آن:

a_n : جمله n ام

a_1 : جمله اول

d : قدرنسبت

n : شماره جمله

مجموع n جمله اول دنباله حسابی: مجموع n جمله اول یک دنباله حسابی که آن را با S_n نمایش می دهیم برابر است با:

• اگر جمله اول و آخر و تعداد جملات را داشته باشیم از رابطه روبهرو استفاده می کنیم:

$$I) S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)$$

• اگر جمله اول و قدرنسبت و تعداد جملات را داشته باشیم از رابطه مقابل استفاده می کنیم:

$$II) S_n = \frac{n}{2}(2a_1 + (n-1)d)$$

رابطه (II) شکل دیگری از رابطه (I) است، ببینید:

$$S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n) \xrightarrow{a_n = a_1 + (n-1)d} S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_1 + (n-1)d) \Rightarrow S_n = \frac{n}{2}(2a_1 + (n-1)d)$$

(I) (II)

پاسخ خیلی تشریحی ✓ گام اول (مجموع جملات ردیف فرد):

$$\underbrace{a_1, a_3, a_5, \dots, a_{19}}_{\text{جمله } 1^{\circ}}$$

جملات با شماره های فرد در ۲۰ جمله اول عبارت اند از:

که مجموع آن ها طبق صورت سؤال برابر است با ۱۳۵ پس داریم:

$$S_1 = \frac{1}{2}(2a_1 + 9(2d)) = 135 \Rightarrow 2a_1 + 18d = 27 \quad (I)$$

گام دوم (مجموع جملات شماره های زوج):

$$\underbrace{a_2, a_4, a_6, \dots, a_{20}}_{\text{جمله } 1^{\circ}}$$

جملات با ردیف زوج در ۲۰ جمله اول عبارت اند از:

که مجموع آن ها طبق صورت سؤال برابر ۱۵۰ است؛ بنابراین:

$$S_2 = \frac{1}{2}(2a_2 + 9(2d)) = 150 \Rightarrow \frac{1}{2}(2(a_1 + d) + 18d) = 150 \Rightarrow 2a_1 + 20d = 300 \quad (II)$$

گام سوم (به دست آوردن a_1 و d):

با حل دستگاه دو معادله (I و II)، دو مجهول خواهیم داشت:

$$\begin{cases} (I) \quad 2a_1 + 18d = 27 \\ (II) \quad 2a_1 + 20d = 300 \end{cases} \xrightarrow{(II)-(I)} (20d - 18d) = 300 - 27 \Rightarrow 2d = 273 \Rightarrow d = \frac{273}{2}$$

$$2a_1 + 18\left(\frac{273}{2}\right) = 27 \Rightarrow a_1 = 0$$

که با جای گذاری $d = \frac{273}{2}$ در معادله (I) داریم:

گام چهارم (پیدا کردن جمله سوم):

$$a_3 = a_1 + 2d \xrightarrow{a_1=0, d=\frac{273}{2}} a_3 = 0 + 2\left(\frac{273}{2}\right) = 273$$

حال جمله سوم دنباله را به دست می آوریم:

مجموع ۱۰ جمله اول دنباله هندسی $1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \dots$ کدام است؟

۲

$$\frac{1023}{1024} \quad (2)$$

$$\frac{1023}{512} \quad (1)$$

$$\frac{1025}{1536} \quad (4)$$

$$\frac{1023}{1536} \quad (3)$$



از رابطه مجموع جملات دنباله هندسی استفاده کن و مجموع ۱۰ جمله اول رو به دست بیاور.

Hint

به دنباله‌ای که در آن هر جمله به جز جمله اول از ضرب یک مقدار ثابت در جمله قبلی‌اش به دست می‌آید، دنباله هندسی می‌گویند. در واقع در این دنباله، حاصل تقسیم هر دو جمله متوالی برابر است با قدرنسبت آن دنباله، (قدرنسبت دنباله هندسی را معمولاً با r نشان می‌دهند).

$$\frac{a_n}{a_{n-1}} = r$$

مانند:

$$3, 6, 12, 24, \dots \rightarrow r = 2$$

$\times 2 \quad \times 2 \quad \times 2$

جمله عمومی دنباله هندسی: اگر جمله اول یک دنباله هندسی a_1 و قدرنسبت آن، r باشد جمله عمومی دنباله برابر است با:

$$a_n = a_1 \cdot r^{n-1}$$

که در آن:

a_n : جمله n ام

a_1 : جمله اول

r : قدرنسبت

n : شماره جمله

مجموع جملات دنباله هندسی:

مجموع n جمله اول یک دنباله هندسی (S_n) با جمله اول a_1 و قدرنسبت r برابر است با:

$$S_n = \frac{a_1(1-r^n)}{1-r}$$

پاسخ خیلی تشریحی ✓ گام اول (مشخص کردن a_1 و r):

در دنباله هندسی داده شده جمله اول برابر است با:

$$a_1 = 1$$

و قدرنسبت برابر است با:

$$r = \frac{-\frac{1}{2}}{1} = -\frac{1}{2}$$

گام دوم (محاسبه مجموع ۱۰ جمله اول):

$$\begin{cases} a_1 = 1 \\ r = -\frac{1}{2} \\ n = 10 \end{cases} \Rightarrow S_n = \frac{1 \times (1 - (-\frac{1}{2})^{10})}{1 - (-\frac{1}{2})} = \frac{1 - \frac{1}{1024}}{\frac{3}{2}} = \frac{\frac{1023}{1024}}{\frac{3}{2}} = \frac{1023}{1024} \times \frac{2}{3} = \frac{1023}{1536}$$

در یک دنباله حسابی مجموع جملات از رابطه $S_n = n(4n + 1)$ به دست می‌آید. مقدار $a_1 + d$ کدام است؟

۱۵ (۴)

۷ (۳)

۱۳ (۲)

۹ (۱)



Hint

رابطه مربوط به مجموع n جمله اول یک دنباله حسابی رو بنویس؛ با رابطه داده شده در صورت سؤال برابر قرار بده، d و a_1 به دست میان.



مجموع n جمله اول یک دنباله حسابی از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$S_n = \frac{n}{2} (2a_1 + (n-1)d)$$

پاسخ خیلی تشریحی ✓ گام اول (نوشتن و مرتب سازی فرمول مجموع n جمله اول دنباله حسابی):

$$S_n = \frac{n}{2} (2a_1 + (n-1)d) = \frac{n}{2} (2a_1 + nd - d) = na_1 + \frac{n^2 d}{2} - \frac{nd}{2} = \frac{d}{2} n^2 + (a_1 - \frac{d}{2})n$$

گام دوم (برابر قرار دادن رابطه به دست آمده در گام اول با رابطه صورت سؤال):

$$S_n : n(4n + 1) = 4n^2 + n$$

$$1 = a_1 - \frac{d}{2} \xrightarrow{d=8(*)} 1 = a_1 - 4 \rightarrow a_1 = 5$$

$$4n^2 + n = \frac{d}{2} n^2 + (a_1 - \frac{d}{2})n$$

$$4 = \frac{d}{2} \rightarrow d = 8(*)$$

گام سوم (محاسبه $a_1 + d$):

$$a_1 + d = 5 + 8 = 13$$

۴

جمله سوم یک دنباله حسابی ۹ است و جمله هفتم از جمله دوم ۲۰ واحد بیشتر است. مجموع چه تعداد از جملات این دنباله با شروع از جمله اول برابر ۹۱ است؟

$$a_7 - a_2 = 20$$

$$a_n = a_1 + (n-1)d \text{ و } a_7 = 9$$

۵ (۴)

۷ (۳)

۸ (۲)

۲ (۱)



از تفاضل جمله هفتم و دوم استفاده کن؛ d رو به دست بیار. حالا که d و جمله سوم رو داری، a_1 هم به دست میاد. حالا تو رابطه جمع جملات همه چی معلومه جز n که اون رو هم پیدا کن دیگه

Hint

پاسخ خیلی تشریحی ✓ گام اول (پیدا کردن d):

طبق صورت سؤال جمله هفتم از جمله دوم ۲۰ واحد بیشتر است، پس داریم:

$$a_7 - a_2 = 20 \xrightarrow{a_n = a_1 + (n-1)d} a_1 + 6d - (a_1 + d) = 20 \Rightarrow 5d = 20 \Rightarrow d = 4$$

$$a_7 = 9 = 2 \times 4 + a_1 \rightarrow a_1 = 1$$

گام دوم (به دست آوردن a_1):

گام سوم (به دست آوردن n):

با توجه به آن چه در صورت سؤال گفته شده، مجموع n جمله اول این دنباله ۹۱ است و ما به دنبال n هستیم. از رابطه:

$$S_n = \frac{n}{2} (2a_1 + (n-1)d) \quad S_n = 91, a_1 = 1, d = 4 \rightarrow 91 = \frac{n}{2} ((2 \times 1) + (n-1) \times 4)$$

$$S_n = \frac{n}{2} (2a_1 + (n-1)d) \xrightarrow{S_n=91, a_1=1, d=4} 91 = \frac{n}{2} ((2 \times 1) + (n-1) \times 4)$$

$$91 = \frac{n}{2} (4n - 2) \Rightarrow 91 = \frac{n}{2} \times (4n - 2) \Rightarrow 91 = n(2n - 1)$$

$$91 = 2n^2 - n \Rightarrow 2n^2 - n - 91 = 0$$

با حل این معادله درجه دوم مقدار n به دست می آید.

می دانیم در یک معادله درجه دوم به شکل $an^2 + bn + c = 0$ ($a \neq 0$) ریشه ها (جواب ها) (در صورتی که $\Delta = b^2 - 4ac > 0$ باشد)

به صورت زیر از روش دلتا به دست می آیند.

$$n_1, n_2 = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}, \quad \Delta = b^2 - 4ac$$

در معادله $2n^2 - n - 91 = 0$ داریم:

$$\begin{cases} a = 2 \\ b = -1 \\ c = -91 \end{cases} \Rightarrow \Delta = b^2 - 4ac = (-1)^2 - 4(2)(-91) = 1 + 728 = 729$$

$$n_1, n_2 = \frac{-(-1) \pm \sqrt{729}}{2(2)} \Rightarrow \begin{cases} n_1 = \frac{1+27}{4} = 7 \text{ قابل قبول} \\ n_2 = \frac{1-27}{4} = -\frac{26}{4} = -\frac{13}{2} \text{ نمی تواند منفی باشد.} \end{cases}$$

بنابراین n (تعداد جملات) برابر ۷ است.

۵ اگر $\frac{(a^6 + a^3 + a^2 + a + 1)(a^1 + a^5 + 1)}{1 - a^{15}} = \frac{3}{2}$ باشد مقدار $3a + 1$ کدام است؟

۱ (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴)

Hint

پاسخ خیلی تشریحی

دو پرانتز صورت، دنباله هندسی می‌باشند. جمع آن‌ها رو به دست بیار، ساده کن، a رو به دست بیار، همین!

گام اول (به دست آوردن حاصل $a^6 + a^3 + a^2 + a + 1$ (پرانتز اول صورت کسر)):

با توجه به صورت سؤال، یکی از پرانتزهای صورت کسر $a^6 + a^3 + a^2 + a + 1$ است که ۵ جمله از یک دنباله هندسی با جمله اول ۱ و قدرنسبت a هستند که با هم جمع شده‌اند. جمع آن‌ها با توجه به فرمول جملات دنباله هندسی برابر است با:

$$S_n = \frac{a_1(1-r^n)}{1-r} \xrightarrow{a_1=1, r=a, n=5} S_n = \frac{1(1-a^5)}{1-a}$$

گام دوم (به دست آوردن حاصل $a^1 + a^5 + 1$):

یک عبارت دیگر در صورت کسر برابر $1 + a^5 + a^1$ است که سه جمله از یک دنباله هندسی با جمله اول ۱ و قدرنسبت a^5 می‌باشند که با هم جمع شده‌اند؛ بنابراین جمع آن‌ها برابر است با:

$$S_n = \frac{a_1(1-r^n)}{1-r} \xrightarrow{a_1=1, r=a^5, n=3} S_n = \frac{1-(a^5)^3}{1-a^5} = \frac{1-a^{15}}{1-a^5}$$

گام سوم (ساده کردن کسر):

با جای گذاری مقادیر به دست آمده از گام اول و دوم داریم:

$$\frac{(a^6 + a^3 + a^2 + a + 1)(a^1 + a^5 + 1)}{1 - a^{15}} = \frac{3}{2} \Rightarrow \frac{\frac{1-a^5}{1-a} \times \frac{1-a^{15}}{1-a^5}}{1-a^{15}} = \frac{3}{2} \Rightarrow \frac{1}{1-a} = \frac{3}{2}$$

$$3 - 3a = 2 \Rightarrow 1 = 3a \Rightarrow a = \frac{1}{3}$$

گام چهارم (به دست آوردن خواسته سؤال $(3a + 1)$):

$$3a + 1 = 3\left(\frac{1}{3}\right) + 1 = 1 + 1 = 2$$

بین اعداد ۴ و ۱۶ حداقل چند واسطه حسابی درج کنیم تا حاصل جمع همه جملات این دنباله از ۴ تا ۱۶ از حاصل جمع اعداد فرد بین صفر تا ۲۰ بیشتر شود؟

۱۲ (۴)

۱۰ (۳)

۶ (۲)

۹ (۱)



تعداد m واسطه حسابی بین اعداد ۴ و ۱۶ در نظر می‌گیریم تا $m+2$ جمله داشته باشیم و مجموع آنها را حساب می‌کنیم. حالا این مجموع جملات رو بزرگ‌تر از مجموع اعداد فرد بین صفر تا ۲۰ قرار می‌دهیم، کم‌ترین مقدار ممکن برای m به دست می‌آید.

Hint

وقتی از درج واسطه حسابی صحبت می‌شود یعنی بین دو عدد a و b ، m عدد بنویسیم تا همه اعداد در کنار هم تشکیل دنباله حسابی دهند.

درس Box

$$a, \underbrace{\circ, \circ, \dots, \circ}_m, b$$

اگر تعداد واسطه‌های حسابی برابر m باشد قدرنسبت دنباله برابر است با:

$$d = \frac{b-a}{m+1}$$

برای مجموع اعداد طبیعی فرد داریم:

نکته

$$1 + 3 + 5 + 7 + \dots + (2n-1) = n^2$$

گام اول (محاسبه مجموع اعداد فرد ۱ تا ۲۰):

اعداد فرد این بازه برابرند با ۱، ۳، ۵، ۷، ۹، ۱۱، ۱۳، ۱۵، ۱۷، ۱۹. پس مجموع آنها برابر است با:

$$1 + 3 + 5 + 7 + \dots + ((2 \times 10) - 1) = 10^2 = 100$$

گام دوم (محاسبه جمع جملات دنباله حسابی جدید):

اگر تعداد m واسطه حسابی بین اعداد ۴ و ۱۶ درج کنیم خواهیم داشت:

$$4, \underbrace{\circ, \circ, \dots, \circ}_m, 16$$

که تعداد کل جملات برابر است با:

$$\begin{array}{ccccccc} & & \uparrow & & & & \\ & & \text{جمله اول} & & & & \\ m & + & 1 & + & 1 & = & m+2 \\ \downarrow & & & & \downarrow & & \\ \text{تعداد واسطه‌ها} & & & & \text{جمله آخر} & & \end{array}$$

که با توجه به رابطه مجموع جملات یک دنباله حسابی داریم:

$$S = \frac{\text{تعداد جملات}}{2} (\text{جمله آخر} + \text{جمله اول}) = \frac{m+2}{2} (4+16) = \frac{m+2}{2} (20) = 10(m+2)$$

گام سوم (به دست آوردن مقدار m):

می‌خواهیم جمع جملات دنباله گام دوم بیشتر از جمع جملات گام اول شود، یعنی:

$$10(m+2) > 100 \Rightarrow m+2 > 10 \Rightarrow m > 8$$

اولین عدد صحیح بزرگ‌تر از ۸، عدد ۹ می‌باشد، پس حداقل باید ۹ واسطه حسابی درج کنیم.

تعداد جملات یک دنباله هندسی زوج است. اگر مجموع کل جملات، ۴ برابر مجموع کل جملات با ردیف فرد باشد، قدرنسبت آن کدام است؟

$$3 \text{ (۴)}$$

$$2 \text{ (۳)}$$

$$\frac{1}{3} \text{ (۲)}$$

$$\frac{1}{3} \text{ (۱)}$$



Hint

جمع کل جملات همیشه جمع جملات ردیف فرد و ردیف زوج. نسبت جمع کل جملات رو به جملات ردیف فرد برابر ۴ قرار بده، قدرنسبت به دست میاد.

درس Box

مجموع جملات ۱ تا n یک دنباله هندسی که آن را با S_n نمایش می‌دهند برابر است با:

$$S_n = \frac{a_1(q^n - 1)}{q - 1}, \quad q \neq 1$$

نکته

در یک دنباله هندسی با $2n$ جمله و قدرنسبت q ، مجموع جملات ردیف زوج، q برابر مجموع جملات ردیف فرد است، یعنی:
مجموع جملات ردیف فرد $\times q =$ مجموع جملات ردیف زوج
و مجموع کل جملات، $q + 1$ برابر جمع جملات ردیف فرد است.

$$\begin{aligned} \text{مجموع جملات ردیف زوج} &= \text{مجموع جملات ردیف فرد} + (\text{مجموع جملات ردیف زوج}) \\ \text{مجموع جملات ردیف فرد} &= (q + 1) \times \text{مجموع جملات ردیف فرد} \\ \text{مجموع جملات ردیف زوج} &= q \times \text{مجموع جملات ردیف فرد} \end{aligned}$$

پاسخ خیلی تشریحی ✓ گام اول (مجموع جملات):

مجموع کل جملات از جمع جملات با ردیف فرد و زوج به دست می‌آید:

$$\text{جمع جملات ردیف فرد} = a_1 + a_3 + \dots + a_{2n-1}$$

$$\text{جمع جملات ردیف زوج} = a_2 + a_4 + \dots + a_{2n}$$

$$\text{جمع کل جملات} = (a_1 + a_3 + \dots + a_{2n-1}) + (a_2 + a_4 + \dots + a_{2n})$$

گام دوم (محاسبه قدرنسبت (q)):

با توجه به صورت سؤال، مجموع جملات، ۴ برابر مجموع جملات با شماره فرد است، پس داریم:

$$\frac{\text{مجموع کل جملات}}{\text{مجموع جملات با شماره فرد}} = \frac{(a_1 + a_3 + \dots + a_{2n-1}) + (a_2 + a_4 + \dots + a_{2n})}{(a_1 + a_3 + \dots + a_{2n-1})} = 4$$

$$\begin{aligned} 4(a_1 + a_3 + \dots + a_{2n-1}) &= (a_1 + a_3 + \dots + a_{2n-1}) + (a_2 + a_4 + \dots + a_{2n}) \\ \Rightarrow 3(a_1 + a_3 + \dots + a_{2n-1}) &= (a_2 + a_4 + \dots + a_{2n}) \end{aligned}$$

از طرفی داریم:

$$a_2 = a_1 \times q$$

$$a_4 = a_3 \times q$$

⋮

$$a_{2n} = a_{2n-1} \times q$$

بنابراین:

$$3(a_1 + a_3 + \dots + a_{2n-1}) = ((a_1 \times q) + (a_3 \times q) + \dots + (a_{2n-1} \times q))$$

$$\xrightarrow{\text{در طرف راست: فاکتورگیری از } q} 3(a_1 + a_3 + \dots + a_{2n-1}) = q(a_1 + a_3 + \dots + a_{2n-1}) \longrightarrow q = 3$$

طبق نکته گفته شده در این سؤال با توجه به این که جمع کل جملات $q + 1$ برابر جمع جملات ردیف فرد است، پس داریم:

$$\frac{\text{جمع کل جملات}}{\text{جمع جملات مورد نیاز}} = 4 = q + 1 \Rightarrow q = 3$$

به چور دیگه

اگر مجموع ۵ جمله اول یک دنباله حسابی برابر ۲۵ باشد، جمله سوم این دنباله کدام است؟

۳ (۴)

۱۰ (۳)

۵ (۲)

۲ (۱)



 Hint

 درس Box

به کمک رابطه جمع جملات دنباله حسابی، مجموع جملات اول تا پنجم رو به دست بیار. جمله سوم، وسط این دو جمله است. می تونی حالا جمله سوم هم به دست بیاری.

اگر a_{n-k} و a_n و a_{n+k} سه جمله از یک دنباله حسابی باشند (a_n وسط دو جمله دیگر باشد) رابطه زیر بین آنها برقرار است:

$$a_{n-k} + a_{n+k} = 2a_n$$

به عنوان مثال اگر a_4 و a_7 و a_{10} را در نظر بگیریم:

$$a_4, a_7, a_{10} \Rightarrow k=3, n=7$$

$$\begin{matrix} \downarrow & & \downarrow \\ 7-3 & & 7+3 \end{matrix}$$

بنابراین داریم:

$$a_4 + a_{10} = 2a_7$$

پاسخ خیلی تشریحی ✓ گام اول (نوشتن رابطه جمع جملات و به دست آوردن $a_1 + a_5$):

با توجه به صورت سؤال، مجموع ۵ جمله اول برابر ۲۵ است. از طرفی یکی از فرمول های مجموع جملات دنباله حسابی

$$S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n) \text{ است، پس داریم:}$$

$$S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n) \xrightarrow[n=5]{S_n=25} 25 = \frac{5}{2}(a_1 + a_5)$$

$$10 = a_1 + a_5$$

گام دوم (به دست آوردن a_3):

با توجه به این که a_3 وسط a_1 و a_5 است و با توجه به درس باکس داریم:

$$a_1 + a_5 = 2a_3 \Rightarrow a_3 = \frac{a_1 + a_5}{2} \xrightarrow{a_1 + a_5 = 10} a_3 = \frac{10}{2} = 5$$

اگر $x = 2$ یکی از ریشه‌های معادله $3x^2 - mx - 2 = 0$ باشد، مجموع مربعات ریشه‌های این معادله کدام است؟

$$\frac{40}{9} \quad (۴)$$

$$\frac{39}{9} \quad (۳)$$

$$\frac{37}{9} \quad (۲)$$

$$\frac{38}{9} \quad (۱)$$

Hint

اول ریشه معادله ($x = 2$) رو داخل معادله جای گذاری کن تا m به دست بیاد. بعد به کمک روابط بین ریشه‌ها مجموع مربعات ریشه‌ها رو به دست بیار.

درس Box

در یک معادله درجه دوم به شکل $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$)، با شرط $\Delta > 0$ جمع ریشه‌ها و ضرب ریشه‌ها و تفاضل ریشه‌ها طبق جدول زیر به دست می‌آیند (α و β را ریشه‌های معادله در نظر می‌گیریم).

D: تفاضل ریشه‌ها	P: ضرب ریشه‌ها	S: جمع ریشه‌ها
$ \alpha - \beta = \frac{\sqrt{\Delta}}{ a }$	$P = \alpha\beta = \frac{c}{a}$	$S = \alpha + \beta = -\frac{b}{a}$

با توجه به S و P برای روابط بین ریشه‌ها داریم:

اثبات: $(\alpha + \beta)^2 = \alpha^2 + \beta^2 + 2\alpha\beta$ $\Rightarrow \alpha^2 + \beta^2 = (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta = S^2 - 2P$	مجموع مربعات ریشه‌ها: $\alpha^2 + \beta^2 = S^2 - 2P$
اثبات: $(\alpha + \beta)^3 = \alpha^3 + \beta^3 + 3\alpha\beta(\alpha + \beta)$ $\Rightarrow \alpha^3 + \beta^3 = (\alpha + \beta)^3 - 3\alpha\beta(\alpha + \beta) = S^3 - 3PS$	مجموع مکعبات ریشه‌ها: $\alpha^3 + \beta^3 = S^3 - 3PS$
اثبات: $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = \frac{\beta + \alpha}{\alpha\beta} = \frac{S}{P}$	مجموع معکوس ریشه‌ها: $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = \frac{S}{P}$

پاسخ خیلی تشریحی ✓ گام اول (به دست آوردن m):

از آن‌جا که می‌دانیم ریشه‌های یک معادله در خود معادله صدق می‌کنند، پس $x = 2$ نیز در معادله صدق می‌کند و داریم:

$$3x^2 - mx - 2 = 0 \xrightarrow{x=2} 3(2^2) - m(2) - 2 = 0 \Rightarrow 12 - 2m - 2 = 0 \Rightarrow -2m = -10 \Rightarrow m = 5$$

گام دوم (به دست آوردن S و P):

با توجه به مشخص شدن m ، معادله به صورت $3x^2 - 5x - 2 = 0$ است.

$$S = -\frac{b}{a} = -\frac{-5}{3} = \frac{5}{3}$$

$$P = \frac{c}{a} = -\frac{2}{3}$$

پس داریم:

گام سوم (به دست آوردن مجموع مربعات ریشه‌ها):

با توجه به مقادیر S و P به دست آمده از گام قبل و با توجه به رابطه مجموع مربعات ریشه‌ها داریم:

$$\text{مجموع مربعات ریشه‌ها} = S^2 - 2P = \left(\frac{5}{3}\right)^2 - 2\left(-\frac{2}{3}\right) = \frac{25}{9} + \frac{4}{3} = \frac{25}{9} + \frac{12}{9} = \frac{37}{9}$$

با توجه به گام اول و مشخص شدن m ، معادله‌ها $3x^2 - 5x - 2 = 0$ می‌باشد که می‌توان به کمک تجزیه، ریشه دیگر آن را پیدا کرد و سپس جمع مربعات ریشه‌ها را به دست آورد:

$$3x^2 - 5x - 2 = 0 \Rightarrow x^2 - 5x - 6 = 0 \Rightarrow (x - 6)(x + 1) = 0$$

$$x_1 = 6, x_2 = -1 \Rightarrow x'_1 = \frac{6}{3} = 2, x'_2 = -\frac{1}{3}$$

که مجموع مربعات آن‌ها برابر است با:

$$(x'_1)^2 + (x'_2)^2 = 2^2 + \left(-\frac{1}{3}\right)^2 = 4 + \frac{1}{9} = \frac{36 + 1}{9} = \frac{37}{9}$$

گام اول (به دست آوردن ضرب ریشه‌ها):

$$P = \frac{c}{a}$$

در معادله $ax^2 + bx + c = 0$ ضرب ریشه‌ها برابر است با:

پس در معادله داده شده $P = -\frac{2}{3}$ است.

گام دوم (به دست آوردن ریشه دیگر):

یکی از ریشه‌ها برابر $x_1 = 2$ است و ضرب ریشه‌ها $P = -\frac{2}{3}$ است پس ریشه دیگر (x_2) برابر است با:

$$P = x_1 x_2 \Rightarrow -\frac{2}{3} = 2 \times x_2 \Rightarrow x_2 = -\frac{1}{3}$$

گام سوم (به دست آوردن مجموع مربعات ریشه‌ها):

$$x_1^2 + x_2^2 = 2^2 + \left(-\frac{1}{3}\right)^2 = 4 + \frac{1}{9} = \frac{37}{9}$$

محیط یک مستطیل ۳۳ سانتی متر و مساحت آن ۶۵ سانتی متر مربع است. اندازه ضلع کوچک تر این مستطیل کدام است؟

۱۰

۸ (۴)

$\frac{13}{2}$ (۳)

۷ (۲)

$\frac{15}{2}$ (۱)



Hint

با داشتن محیط و مساحت مستطیل در واقع S و P یک معادله درجه دوم رو داری. می تونی معادله درجه دوم رو بنویسی. با پیدا کردن ریشه های اون معادله، ضلع بزرگ و کوچک مستطیل رو به دست بیار.

درس Box

اگر S (جمع ریشه ها) و P (ضرب ریشه ها) یک معادله درجه دوم را داشته باشیم معادله درجه دوم ما برابر است با:

$$x^2 - Sx + P = 0$$

که با حل این معادله می توان ریشه های معادله را به دست آورد.

پاسخ خیلی تشریحی ✓ گام اول (مشخص کردن S و P معادله درجه دوم): فرض کنید اضلاع مستطیل x_1 و x_2 باشند پس با توجه به این که محیط و

مساحت به ترتیب ۳۳ و ۶۵ می باشند داریم:

$$\text{محیط} = 2(x_1 + x_2) = 33 \Rightarrow x_1 + x_2 = \frac{33}{2} \Rightarrow S = \frac{33}{2}$$

$$\text{مساحت} = x_1 x_2 = 65 \Rightarrow P = 65$$

گام دوم (تشکیل معادله درجه دوم و حل آن): معادله درجه دومی تشکیل می دهیم که $S = \frac{33}{2}$ و $P = 65$ باشد و آن را حل می کنیم.

$$x^2 - Sx + P = 0 \Rightarrow x^2 - \frac{33}{2}x + 65 = 0 \Rightarrow 2x^2 - 33x + 130 = 0$$

$$x^2 - 33x + 260 = 0 \Rightarrow (x - 13)(x - 20) = 0 \Rightarrow x_1 = 13, x_2 = 20 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{13}{2} \text{ ضلع کوچک مستطیل} \\ x_2 = 10 \text{ ضلع بزرگ مستطیل} \end{cases}$$

$$\rightarrow x_1 = \frac{13}{2}, x_2 = \frac{20}{2} = 10$$

بنابراین ضلع کوچک مستطیل $\frac{13}{2}$ است.

۱۱

اگر ریشه‌های معادله درجه دوم $x^2 + bx + 3 = 0$ دو عدد طبیعی فرد متوالی باشند، آن گاه مجموع ریشه‌ها چند برابر حاصل ضرب ریشه‌های این معادله است؟

$$\frac{3}{2} (4)$$

$$-\frac{3}{4} (3)$$

$$\frac{3}{4} (2)$$

$$\frac{4}{3} (1)$$



حاصل ضرب دو ریشه معلومه، به کمک اون اعداد فرد رو پیدا کن که می‌شن ریشه‌ها. بعد جمعشون رو حساب کن. حالا می‌تونی نسبت جمع ریشه‌ها به ضرب ریشه‌ها رو به دست بیاری.

Hint

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول (به دست آوردن ریشه‌های معادله درجه دوم):

دو عدد فرد متوالی به شکل $2k-1$ و $2k+1$ در نظر بگیرد. ضرب آنها برابر است با:

$$(2k-1)(2k+1) = 4k^2 - 1$$

از طرفی در معادله درجه دوم به شکل $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$) ضرب ریشه‌ها برابر $P = \frac{c}{a}$ است، که در این سؤال $P = \frac{3}{1} = 3$ ؛ بنابراین داریم:

$$4k^2 - 1 = 3 \Rightarrow 4k^2 = 4 \Rightarrow k^2 = 1 \Rightarrow k = \pm 1 \xrightarrow{k > 0} k = 1$$

گام دوم (مشخص کردن ریشه):

با در نظر گرفتن $k = 1$ ریشه‌های ما برابرند با:

$$x_1 = 2k - 1 = 2(1) - 1 = 1$$

$$x_2 = 2k + 1 = 2(1) + 1 = 3$$

که جمع آنها برابر است با:

$$S = 3 + 1 = 4 \quad (\text{جمع ریشه‌ها})$$

گام سوم (نسبت جمع به ضرب ریشه‌ها):

با توجه به گام اول، ضرب این دو ریشه برابر ۳ و با توجه به گام دوم جمع این دو ریشه برابر ۴ است؛ پس نسبت مجموع ریشه‌ها به ضرب ریشه‌ها برابر است با:

$$\frac{S}{P} = \frac{4}{3}$$

یه جور دیگه

می‌دانیم در معادله $ax^2 + bx + c = 0$ اختلاف ریشه‌ها $\frac{\sqrt{\Delta}}{|a|}$ است از طرفی تفاضل دو عدد فرد متوالی ۲ است، پس:

$$\frac{\sqrt{\Delta}}{|a|} = 2 \rightarrow \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{1} = 2 \rightarrow \sqrt{b^2 - 12} = 2$$

$$\xrightarrow{\text{به توان ۲}} b^2 - 12 = 4 \rightarrow b^2 = 16 \rightarrow b = \pm 4$$

طبق صورت سؤال دو عدد طبیعی فرد هستند پس باید جمع ریشه‌ها $-\frac{b}{a} > 0$ باشد: $-\frac{b}{a} > 0 \xrightarrow{a=1} b < 0$

$$\frac{S}{P} = \frac{-\frac{4}{1}}{\frac{3}{1}} = \frac{4}{3}$$

پس $b = -4$ است؛ بنابراین داریم:

تیزبازی

با توجه به معادله درجه دوم داده شده در صورت سؤال، حاصل ضرب ریشه‌ها که حاصل ضرب دو عدد طبیعی فرد متوالی است برابر است با: $P = \frac{3}{1} = 3$ پس آن دو عدد ۱ و ۳ هستند که جمع آنها $3 + 1 = 4$ و ضرب آنها $3 \times 1 = 3$ است پس نسبت مجموع ریشه‌ها به حاصل ضرب ریشه‌ها برابر است با: $\frac{4}{3}$.

۱۲ اگر $\alpha + 3$ و $\beta - 1$ ریشه‌های معادله $x^2 + 2x - 5 = 0$ باشند، ریشه‌های کدام معادله $\alpha - 1$ و $\beta - 5$ می‌باشند؟

$$x^2 + 6x - 3 = 0 \quad (2) \quad x^2 - 6x + 3 = 0 \quad (1)$$

$$x^2 - 10x + 19 = 0 \quad (4) \quad x^2 + 10x + 19 = 0 \quad (3)$$



بر حسب S و P معادله اول، S و P معادله جدید رو بساز؛ معادله جدید به دست میاد.

Hint

درس Box

در بعضی از سؤالات، معادله درجه دو را به ما می‌دهند و از ما می‌خواهند معادله درجه دومی بنویسیم که ریشه‌هایش رابطه خاصی با ریشه‌های معادله اول داشته باشد. برای حل این گونه سؤالات باید به صورت زیر عمل کنیم:

(1) S و P معادله اول را حساب می‌کنیم (با ریشه‌های α, β).

(2) ریشه‌های معادله دوم جدید را بر حسب α, β و جمع و ضرب آن‌ها پیدا می‌کنیم و S و P معادله جدید را به دست می‌آوریم: (P', S')

(3) معادله جدید به شکل $x^2 - S'x + P' = 0$ است.

$$S = -\frac{b}{a} = -\frac{2}{1} = -2, P = \frac{c}{a} = -\frac{5}{1} = -5$$

گام اول (به دست آوردن S و P معادله اول):

گام دوم (به دست آوردن $\alpha\beta, \alpha + \beta$):

ریشه‌های معادله اول $\alpha + 3, \beta - 1$ می‌باشند که جمع و ضرب آن‌ها به ترتیب -2 و -5 است.

$$S = \alpha + 3 + \beta - 1 = -2 \rightarrow \alpha + \beta = -4 \quad (I)$$

$$P = (\alpha + 3)(\beta - 1) = \alpha\beta - \alpha + 3\beta - 3 = -5 \rightarrow \alpha\beta + 3\beta - \alpha = -2 \quad (II)$$

گام سوم: (به دست آوردن جمع و ضرب ریشه‌های معادله جدید $(\alpha - 1, \beta - 5)$):

$$S' = \alpha - 1 + \beta - 5 = \alpha + \beta - 6 \xrightarrow{\alpha + \beta = -4} S' = -4 - 6 = -10$$

$$P' = (\alpha - 1)(\beta - 5) = \alpha\beta - \beta - 5\alpha + 5 \quad (*)$$

اگر طرفین رابطه (II) را منهای 4 برابر رابطه (I) کنیم داریم:

$$(II) - 4(I) = \alpha\beta + 3\beta - \alpha - 4(\alpha + \beta) = -2 + 16 \rightarrow \alpha\beta - \beta - 5\alpha = 14$$

حالا کافی است به طرفین این تساوی عدد 5 را اضافه کنیم تا طرف چپ آن شبیه تساوی (*) شود:

$$\alpha\beta - \beta - 5\alpha = 14 \xrightarrow{+5} \alpha\beta - \beta - 5\alpha + 5 = 19 \rightarrow P' = 19$$

گام چهارم: معادله جدید به شکل α, β است؛ بنابراین داریم:

$$x^2 - (-10)x + 19 = 0 \rightarrow x^2 + 10x + 19 = 0$$

فرض کنید نقاط $(-1, 2)$ و $(0, 1)$ و $(2, 23)$ بر سهمی $y = ax^2 + bx + c$ واقع باشند. این سهمی از کدام یک از نقاط زیر می‌گذرد؟

(۲) $(-2, 4)$

(۱) $(1, 8)$

(۴) $(3, 48)$

(۳) $(-3, 29)$



سه نقطه رو در ضابطه سهمی جای‌گذاری کن تا ضرایب a و b و c به دست بیان. حالا ببین از کدام نقطه می‌گذره.

Hint

درجی Box

از موضوعات مهمی که در تست‌ها با آن برخورد می‌کنیم، نوشتن معادله سهمی است. با توجه به اطلاعات سؤال می‌توان به روش‌های زیر معادله سهمی را نوشت:

(۱) **صفرهای سهمی و یک نقطه دیگر از سهمی مشخص باشند:** اگر α و β ریشه‌های یک سهمی باشند، ابتدا ضابطه $y = a(x - \alpha)(x - \beta)$ را می‌نویسیم و سپس برای پیدا کردن مقدار ضریب a از نقطه معلوم دیگر استفاده می‌کنیم و با جای‌گذاری مختصات آن نقطه در معادله، مقدار a به دست می‌آید.

(۲) **معلوم بودن مختصات رأس سهمی و یک نقطه دیگر:** اگر مختصات رأس سهمی (x_s, y_s) باشد، ابتدا ضابطه $y = a(x - x_s)^2 + y_s$ را می‌نویسیم و سپس برای پیدا کردن مقدار مجهول a از نقطه دیگر استفاده می‌کنیم.

(۳) **معلوم بودن سه نقطه از سهمی:** هر سه نقطه را در معادله $y = ax^2 + bx + c$ جای‌گذاری می‌کنیم. سه معادله به دست می‌آید که با حل دستگاه سه معادله، سه مجهول می‌توان a و b و c و در نهایت ضابطه سهمی را به دست آورد.

اگر دو نقطه هم‌عرض مانند $A(m, k)$ و $B(n, k)$ روی سهمی داشته باشیم، از آن‌جا که سهمی نسبت به محور تقارن خود (خط قائم عبوری از رأس سهمی) متقارن است، معادله محور تقارن و طول رأس سهمی برابرند با:

$$x = x_s = \frac{m+n}{2}$$

در یک معادله درجه دوم به شکل $y = ax^2 + bx + c$ طول رأس سهمی از رابطه $x = -\frac{b}{2a}$ به دست می‌آید.

نکته

پاسخ خیلی تشریحی ✓ گام اول (جای‌گذاری مختصات هر سه نقطه و پیدا کردن ضرایب مجهول):

با توجه به این‌که سه نقطه از سهمی مشخص است پس مختصات سه نقطه را جای‌گذاری می‌کنیم و با حل دستگاه سه معادله، سه مجهول ضرایب مجهول a و b و c را به دست می‌آوریم تا ضابطه سهمی مشخص شود:

$$(0, 1) \xrightarrow{ax^2+bx+c=0} a(0)^2 + b(0) + c = 1 \Rightarrow c = 1$$

$$(-1, 2) \xrightarrow{ax^2+bx+c=0} a(-1)^2 + b(-1) + 1 = 2 \Rightarrow a - b + 1 = 2 \Rightarrow a - b = 1 \Rightarrow a = b + 1 \quad (I)$$

$$(2, 23) \xrightarrow{ax^2+bx+c=0} a(2)^2 + b(2) + 1 = 23 \Rightarrow 4a + 2b = 22 \Rightarrow 2a + b = 11 \quad (II)$$

که با جای‌گذاری (I) در (II) خواهیم داشت:

$$2a + b = 11 \xrightarrow{(I) a=b+1} 2(b+1) + b = 11 \Rightarrow 3b + 2 = 11 \Rightarrow 3b = 9 \Rightarrow b = 3 \xrightarrow{a=b+1} a = 4$$

پس ضابطه سهمی برابر است با:

$$y = 4x^2 + 3x + 1$$

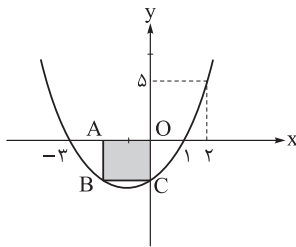
گام دوم (به دست آوردن خواسته سؤال):

با جای‌گذاری $x = 1$ در ضابطه سهمی مقدار y در این نقطه برابر است با:

$$y = 4 + 3 + 1 = 8$$

بنابراین این سهمی از نقطه $(1, 8)$ می‌گذرد.

با توجه به سهمی به معادله $y = ax^2 + bx + c$ مساحت چهارضلعی OABC کدام است؟



$\frac{25}{4}$ (۴)

$\frac{9}{4}$ (۳)

۶ (۲)

۴ (۱)



Hint

ابتدا با توجه به شکل، ضابطه سهمی رو به دست بیار. بعد می‌تونی مختصات رئوس رو پیدا کنی و حالا مساحت رو هم به دست بیار.

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول (به دست آوردن ضابطه سهمی): ریشه‌های سهمی داده شده در سؤال -3 و 1 هستند؛ بنابراین ضابطه سهمی به شکل $y = a(x-1)(x-(-3))$ است. برای به دست آوردن ضریب a از نقطه دیگر سهمی، یعنی $(2, 5)$ استفاده می‌کنیم:

$$y = a(x-1)(x+3) \xrightarrow{(2,5)} 5 = a(2-1)(2+3) \Rightarrow 5 = 5a \Rightarrow a = 1$$

بنابراین ضابطه سهمی $y = (x-1)(x+3) = x^2 + 2x - 3$ است.

گام دوم (مشخص کردن مختصات رئوس):

نقطه C عرض از مبدأ سهمی است. در یک ضابطه درجه دوم به شکل $y = ax^2 + bx + c$ ، c عرض از مبدأ سهمی است؛ بنابراین با توجه به ضابطه $y = x^2 + 2x - 3$ عرض از مبدأ برابر -3 است؛ بنابراین مختصات نقطه C به صورت $(0, -3)$ است. مختصات نقطه O (مبدأ مختصات) برابر $(0, 0)$ است.

دو نقطه O و A و دو نقطه B و C هم‌عرض هستند؛ بنابراین نسبت به رأس سهمی متقارن‌اند. از طرفی طول رأس سهمی برابر -1 است؛ بنابراین:

$$x_s = \frac{x_O + x_A}{2} = \frac{x_B + x_C}{2} \xrightarrow{x_s = -1} -1 = \frac{0 + x_A}{2} = \frac{0 + x_B}{2} \Rightarrow x_A = x_B = -2$$

بنابراین مختصات نقطه A به صورت $(-2, 0)$ است.

گام سوم (به دست آوردن طول اضلاع OA و OC):

طول ضلع OA : رئوس O و A هم‌عرض‌اند؛ بنابراین اندازه ضلع OA تفاضل طول نقاط O و A است.

$$|OA| = |x_O - x_A| = |0 - (-2)| = 2$$

طول ضلع OC : رئوس O و C هم‌طول‌اند؛ بنابراین اندازه ضلع OC تفاضل عرض نقاط O و C است.

$$|OC| = |y_O - y_C| = |0 - (-3)| = 3$$

گام چهارم (به دست آوردن مساحت چهارضلعی OABC):

مساحت OABC برابر است با $|OA| \times |OC|$ ؛ بنابراین مساحت OABC برابر است با:

$$S_{OABC} = |OA| \times |OC| = 2 \times 3 = 6$$

در معادله $x^4 - 4x^2 + 1 = 0$ مجموع مربعات ریشه‌ها کدام است؟

۱۵

۸ (۴)

۱۶ (۳)

۴ (۲)

۱۴ (۱)



معادله $ax^4 + bx^2 + c = 0$

درس Box

برای حل این‌گونه معادلات، x^2 را برابر t در نظر می‌گیریم تا به معادله $at^2 + bt + c = 0$ برسیم. با توجه به این‌که $t = x^2$ است و x^2 همواره نامنفی است پس t نیز باید نامنفی باشد. پس اگر t منفی شد هیچ مقداری برای x نداریم و برای جواب مثبت t دو جواب خواهیم داشت:

$$t > 0 \Rightarrow t = x^2 \Rightarrow x = \pm\sqrt{t}$$

و اگر t برابر صفر باشد. همان یک جواب صفر را برای x خواهیم داشت.

جدول زیر به بررسی تعداد جواب‌های معادله $ax^4 + bx^2 + c = 0$ ($a \neq 0$) برحسب معادله $at^2 + bt + c = 0$ می‌پردازد:

تعداد جواب‌های معادله $ax^4 + bx^2 + c = 0$	جواب‌های معادله $at^2 + bt + c = 0$
$x_1, x_2 = \pm\sqrt{t_1}$ $x_3, x_4 = \pm\sqrt{t_2}$	۴ t_1, t_2 هر دو مثبت
$x_1, x_2 = \pm\sqrt{t_1}$ $x_3 = 0$	۳ t_1 مثبت و $t_2 = 0$
$x_1, x_2 = \pm\sqrt{t_1}$	۲ t_1 مثبت و t_2 منفی
	۱ $t_1 = 0$ (این ریشه مضاعف صفر)
بدون جواب	t_1, t_2 هر دو منفی
بدون جواب	ریشه مضاعف منفی t_1
بدون جواب	معادله جواب نداشته باشد.

پاسخ خیلی تشریحی ✓ گام اول (بررسی تعداد ریشه‌ها):

$$x^4 - 4x^2 + 1 = 0 \xrightarrow{x^2 = t} t^2 - 4t + 1 = 0 \rightarrow \begin{cases} \Delta = 16 - 4 = 12 > 0 \\ S = -\frac{b}{a} = 4 > 0 \\ P = \frac{c}{a} = 1 > 0 \end{cases}$$

با توجه به این‌که $\Delta > 0, S > 0, P > 0$ پس دو ریشه مثبت t_1, t_2 داریم؛ بنابراین طبق درس‌بکس جواب‌های معادله اصلی $\pm\sqrt{t_1}, \pm\sqrt{t_2}$ است.

گام دوم (محاسبه مربعات و جمع آن‌ها):

$$x_1 = \sqrt{t_1} \rightarrow x_1^2 = t_1$$

$$x_2 = -\sqrt{t_1} \rightarrow x_2^2 = t_1$$

$$x_3 = \sqrt{t_2} \rightarrow x_3^2 = t_2$$

$$x_4 = -\sqrt{t_2} \rightarrow x_4^2 = t_2$$

پس جمع مربعات برابر است با:

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = 2(t_1 + t_2) \xrightarrow{t_1 + t_2 = 4} = 2(4) = 8$$

۱۶

اگر به ازای مقادیر m متعلق به بازه $(a, b]$ نمودار تابع f با ضابطه $f(x) = (m-1)x^2 - 4x + m + 2$ فقط از ناحیه اول عبور نکند،

بیشترین مقدار $(b-a)$ کدام است؟

۱ (۴)

۲ (۳)

۳ (۲)

۴ (۱)



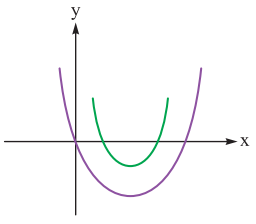
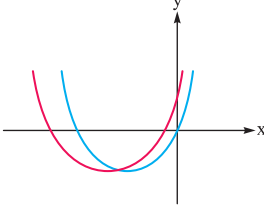
سهمی ای که فقط از ناحیه اول عبور نکند رو رسم کن ببین چه شرایطی باید داشته باشه. بررسی کن.

Hint

هر سهمی به ضابطه $y = ax^2 + bx + c$ از ۲ یا ۳ یا ۴ ناحیه مختصات ممکن است عبور کند که حالت های زیر برقرار است.

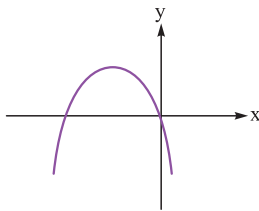
درس Box

شرایط	شکل سهمی	از چند ناحیه بگذرد
$P = \alpha\beta = \frac{c}{a} < 0$		سهمی از هر چهار ناحیه بگذرد
$\Delta \leq 0$ $a > 0$		سهمی فقط از دو ناحیه عبور کند (ناحیه اول و دوم)
$\Delta \leq 0$ $a < 0$		سهمی فقط از دو ناحیه عبور کند (ناحیه سوم و چهارم)
$a < 0$ $\Delta > 0$ $S < 0$ $P \geq 0$		سهمی فقط از ناحیه اول عبور نکند
$a < 0$ $\Delta > 0$ $S > 0$ $P \geq 0$		سهمی فقط از ناحیه دوم عبور نکند

شرایط	شکل سهمی	از چند ناحیه بگذرد
$a > 0$ $\Delta > 0$ $S > 0$ $P \geq 0$		سهمی فقط از ناحیه سوم عبور نکند
$a > 0$ $\Delta > 0$ $S < 0$ $P \geq 0$		سهمی فقط از ناحیه چهارم عبور نکند

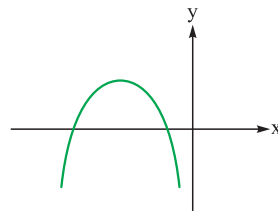
پاسخ خیلی تشریحی ✓ گام اول (رسم سهمی و بررسی شرایط آن):

برای این که سهمی فقط از ناحیه اول عبور کند باید به یکی از شکل های زیر باشد:



(۱)

یک ریشه منفی
یک ریشه صفر



(۲)

دو ریشه منفی

(۱) هر دو سهمی دو ریشه دارند، پس باید $\Delta > 0$ باشد.

(۲) دهانه هر دو سهمی رسم شده رو به پایین است، پس باید $a < 0$ باشد.

(۳) در سهمی (۱) یک ریشه منفی و یک ریشه صفر داریم، پس باید ضرب ریشه ها صفر باشد و در سهمی (۲) دو ریشه منفی داریم، پس ضرب آنها مثبت است. پس می توان نتیجه گرفت $P = \frac{c}{a} \geq 0$ است.

جمع ریشه ها در هر دو سهمی منفی است پس $S = -\frac{b}{a} < 0$.

گام دوم: حالا برای سهمی داده شده در صورت سؤال این شرایط را اعمال می کنیم:

$$۱) \Delta > 0 \Rightarrow (-4)^2 - 4(m-1)(m+2) > 0 \Rightarrow (m-1)(m+2) < 4 \Rightarrow m^2 + m - 2 < 4$$

$$m^2 + m - 6 < 0 \Rightarrow (m+3)(m-2) < 0$$

$$\begin{array}{c|c|c|c} -3 & & 2 & \\ + & | & - & | & + \end{array} \quad -3 < m < 2$$

$$۲) a < 0 \Rightarrow m-1 < 0 \Rightarrow m < 1$$

$$۳) P \geq 0 \Rightarrow \frac{m+2}{m-1} \geq 0 \Rightarrow m \leq -2 \text{ یا } m > 1$$

$$\begin{array}{c|c|c|c} -2 & & 1 & \\ + & | & - & | & + \end{array}$$

$$۴) S < 0 \Rightarrow -\frac{(-4)}{m-1} < 0 \Rightarrow \frac{4}{m-1} < 0 \Rightarrow m < 1$$

که با اشتراک بین محدوده‌های به دست آمده داریم:

$$\left. \begin{array}{l} -3 < m < 2 \\ m < 1 \\ m \leq -2 \text{ یا } m > 1 \\ m < 1 \end{array} \right\} \rightarrow -3 < m \leq -2$$

بنابراین در بازه $[-2, -3]$ سهمی فقط از ناحیه اول عبور نمی‌کند، پس:

$$(a, b] = [-3, -2] \Rightarrow a = -3, b = -2$$

بنابراین بیشترین مقدار $b - a$ برابر است با:

$$-2 - (-3) = 1$$

۱۷ اگر $x = \frac{3-\sqrt{5}}{3}$ یکی از ریشه‌های معادله $ax^2 - 18x + c = 0$ با ضرایب صحیح باشد، مقدار $\sqrt{a} + \sqrt{c}$ کدام است؟

۵ (۴)

۴ (۳)

۳ (۲)

۲ (۱)



اگر در یک معادله درجه دوم به شکل $ax^2 + bx + c = 0$ ضرایب صحیح باشند، اگر یکی از ریشه‌ها به صورت $m - \sqrt{n}$ باشد دیگری باید به صورت $m + \sqrt{n}$ باشد.

درس Box

پاسخ خیلی تشریحی ✓ گام اول (مشخص کردن ریشه دیگر):

با توجه به درس باکس و با توجه به صورت سؤال یکی از ریشه‌ها $\frac{3-\sqrt{5}}{3}$ است، پس دیگری باید $\frac{3+\sqrt{5}}{3}$ باشد.

گام دوم (به دست آوردن ضرب و جمع ریشه‌ها):

$$x_1 \cdot x_2 = \left(\frac{3-\sqrt{5}}{3}\right)\left(\frac{3+\sqrt{5}}{3}\right) = \frac{9-5}{9} = \frac{4}{9}$$

$$x_1 + x_2 = \frac{3-\sqrt{5}}{3} + \frac{3+\sqrt{5}}{3} = 2$$

گام سوم (مشخص کردن ضرایب a و c):

$$x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a} \Rightarrow \frac{c}{a} = \frac{4}{9} \quad (I)$$

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} = \frac{18}{a} \quad (II)$$

با توجه به این که جمع ریشه‌ها برابر با ۲ است پس از رابطه (II) داریم:

$$\frac{18}{a} = 2 \Rightarrow a = 9$$

که با جای گذاری آن در رابطه (I) خواهیم داشت:

$$\frac{4}{9} = \frac{c}{9} \Rightarrow c = 4$$

گام چهارم (به دست آوردن حاصل $\sqrt{a} + \sqrt{c}$):

$$\sqrt{a} + \sqrt{c} = \sqrt{9} + \sqrt{4} = 3 + 2 = 5$$

به ازای چه مقادیری از m ، بین ریشه‌های حقیقی و متمایز یک معادله درجه دوم روابط $x_1x_2 - (x_1 + x_2) = m + 2$ و

$$2x_1x_2 + x_1 + x_2 = 1 - m$$
 برقرار است؟

$$\mathbb{R} - [-1, 3) \quad (2)$$

$$\mathbb{R} - [-3, 1] \quad (1)$$

$$[-1, 3) \quad (4)$$

$$(-3, 1) \quad (3)$$

به کمک دو رابطه داده شده S و P رو به دست بیاور. این جوری ضرایب معادله درجه دوم مشخص می‌شن. حالا بررسی کن که $\Delta > 0$ باشد تا دو ریشه حقیقی متمایز داشته باشی.

Hint

پاسخ خیلی تشریحی ✓ **گام اول (به دست آوردن S و P):**

می‌دانیم $S = x_1 + x_2$ و $P = x_1x_2$ است. پس روابط داده شده در صورت سؤال برابرند با:

$$x_1x_2 - (x_1 + x_2) = m + 2 \Rightarrow P - S = m + 2 \quad (I)$$

$$2x_1x_2 + (x_1 + x_2) = 1 - m \Rightarrow 2P + S = 1 - m \quad (II)$$

حالا با حل دستگاه معادلات بالا S و P را برحسب m به دست می‌آوریم. دو سمت معادلات (I) و (II) را با هم جمع می‌کنیم:

$$(I) + (II) = (P + 2P) + (-S + S) = m + 2 + (1 - m) \Rightarrow 3P = 3 \Rightarrow P = 1$$

حالا با جای گذاری $P = 1$ در رابطه $S, (I)$ را به دست می‌آوریم:

$$P - S = m + 2 \xrightarrow{P=1} 1 - S = m + 2 \Rightarrow S = -(m + 1)$$

گام دوم (مشخص کردن ضابطه معادله درجه دوم):

می‌دانیم اگر S و P یک معادله درجه دوم را داشته باشیم، آن معادله درجه دوم برابر است با:

$$x^2 - Sx + P = 0$$

پس در این سؤال داریم:

$$x^2 - (-(m + 1))x + 1 = 0$$

$$x^2 + (m + 1)x + 1 = 0$$

گام سوم (مشخص کردن محدوده m):

از آن جا که می‌خواهیم دو ریشه حقیقی متمایز داشته باشیم، پس باید $\Delta > 0$ باشد.

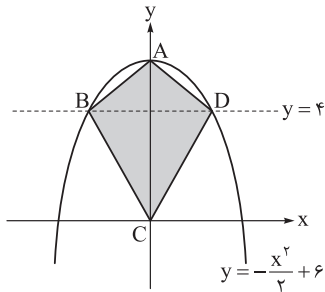
$$\Delta > 0 \Rightarrow (m + 1)^2 - 4(1)(1) > 0 \Rightarrow m^2 + 2m + 1 - 4 > 0 \Rightarrow m^2 + 2m - 3 > 0 \Rightarrow (m + 3)(m - 1) > 0$$

$$\Rightarrow \begin{array}{c} -3 \quad 1 \\ + \quad | \quad - \quad | \quad + \\ m < -3 \quad \text{یا} \quad m > 1 \end{array}$$

پس جواب سؤال برابر است با $m > 1$ یا $m < -3$ ؛ در واقع $\mathbb{R} - [-3, 1]$.

با توجه به شکل مقابل مساحت چهارضلعی ABCD کدام است؟

۱۹



۲۴ (۴)

۱۸ (۳)

۱۲ (۲)

۱۶ (۱)



برای مشخص شدن مختصات دو رأس B و D کافیست نقطه برخورد سهمی با خط $y = 4$ رو به دست بیاری. دو رأس A و C که معلومه چی هستن. حالا می‌تونی مساحت چهارضلعی رو به دست بیاری.

Hint

پاسخ خیلی تشریحی ✓ گام اول (به دست آوردن مختصات نقاط B و D و اندازه قطر BD):

طبق شکل مشخص است که نقاط B و D محل برخورد سهمی با خط $y = 4$ می‌باشند، پس برای به دست آوردن مختصات آن‌ها، معادله $-\frac{x^2}{4} + 6 = 4$ را حل می‌کنیم تا نقاط برخورد به دست آیند:

$$-\frac{x^2}{4} + 6 = 4 \Rightarrow -\frac{x^2}{4} = -2 \Rightarrow \frac{x^2}{4} = 2 \Rightarrow x^2 = 4 \Rightarrow \begin{cases} x_B = -2 \\ x_D = 2 \end{cases}$$

از آن‌جا که B و D دو نقطه با عرض یکسان هستند، پس اندازه BD برابر با تفاضل طول‌های آن‌هاست:

$$|BD| = |x_D - x_B| = |2 - (-2)| = 4$$

گام دوم (به دست آوردن نقطه AC):

نقطه A طبق شکل عرض از مبدأ سهمی است، که عرض از مبدأ سهمی که همان عدد ثابت ضابطه سهمی است و برابر ۶ است. از طرفی نقطه C نیز مبدأ مختصات است؛ بنابراین اندازه قطر AC برابر است با:

$$AC = |y_A - y_C| = |6 - 0| = 6$$

گام سوم (به دست آوردن مساحت چهارضلعی):

مساحت چهارضلعی برابر است با:

$$S = \frac{1}{2} \times 4 \times 6 = \frac{1}{2} \times 24 = 12$$

۲۰ اگر x_1 و x_2 ریشه‌های معادله $x^2 - (m-1)x + 25 = 0$ باشند، به ازای کدام مقدار m رابطه $\sqrt{x_1} + \frac{4}{\sqrt{x_2}} = 9$ برقرار است؟ $(x_1 < x_2)$

۹ (۱) ۳۶ (۲) ۱۰ (۳) ۲۷ (۴)



Hint ابتدا به کمک رابطه $\sqrt{x_1} + \frac{4}{\sqrt{x_2}} = 9$ داده شده یکی از ریشه‌ها (x_2) را به دست می‌آوریم. سپس با توجه به این که ریشه یک معادله در خود معادله صدق می‌کند، با جای گذاری در معادله، مجهول m را به دست می‌آوریم.

پاسخ خیلی تشریحی ✓ گام اول (به دست آوردن x_2):

$$\sqrt{x_1} + \frac{4}{\sqrt{x_2}} = 9 \xrightarrow{\text{طرفین را در } \sqrt{x_2} \text{ ضرب می‌کنیم}} \sqrt{x_1} \sqrt{x_2} + 4 = 9\sqrt{x_2}$$

$$\rightarrow \sqrt{x_1 x_2} + 4 = 9\sqrt{x_2} \quad (*)$$

می‌دانیم در معادله درجه دوم به فرم $ax^2 + bx + c = 0$ ضرب ریشه‌ها از رابطه $P = \frac{c}{a}$ به دست می‌آید پس در معادله $x^2 - (m-1)x + 25 = 0$ داریم:

$$P = x_1 x_2 = \frac{c}{a} = \frac{25}{1} = 25$$

که با جای گذاری آن در رابطه (*) داریم:

$$\sqrt{25} + 4 = 9\sqrt{x_2} \rightarrow 5 + 4 = 9\sqrt{x_2} \rightarrow 9 = 9\sqrt{x_2} \rightarrow \sqrt{x_2} = 1 \rightarrow x_2 = 1$$

گام دوم (به دست آوردن m):

ریشه یک معادله در خود معادله صدق می‌کند؛ بنابراین $x_2 = 1$ در معادله $x^2 - (m-1)x + 25 = 0$ صدق می‌کند و داریم:

$$x^2 - (m-1)x + 25 = 0 \xrightarrow{x=1} 1 - (m-1)(1) + 25 = 0$$

$$26 - (m-1) = 0 \rightarrow m-1 = 26 \rightarrow m = 27$$

آمار و احتمال

۲۱

در کدام گزینه، یک گزاره با ارزش درست آمده است؟

$$(۱) \quad x^2 - x < 4$$

(۲) جدول ارزش ۸ گزاره، ۶۴ حالت (سطر) دارد.

(۳) بیستمین رقم بعد از ممیز عدد $\frac{11}{7}$ برابر ۷ است.

(۴) عددی ۱۸۳۹ اول است.



گزاره و گزاره‌نما

درس Box

گزاره: جمله‌ای خبری است که در حال حاضر یا آینده، ارزشی به وضوح درست یا نادرست داشته باشد.

(۱) جمله‌های خبری که ارزش آن‌ها به وضوح مشخص نیست، گزاره نیستند؛ برای مثال جمله‌های «علی دایی بهترین بازیکن تاریخ فوتبال ایران است» یا «مهندسی برق رشته سختی است» گزاره نیستند، چون بهترین بازیکن تاریخ فوتبال یا سخت‌ترین رشته، از نظر افراد مختلف، متفاوت است.

(۲) جمله‌های امری، پرسشی و عاطفی، گزاره نیستند.

گزاره‌نما: هر جمله خبری که شامل یک یا چند متغیر است و با جای‌گذاری مقادیری قابل قبول به جای متغیرها به یک گزاره تبدیل می‌شود را گزاره‌نما می‌گویند؛ برای مثال اول بودن $2^n + 1$ ، یک گزاره‌نما است که به ازای بعضی مقایر n درست (مثلاً $n = 2$) و به ازای بعضی مقادیر n نادرست (مثلاً $n = 3$) است.

(۳) جدول ارزش n گزاره، 2^n سطر (حالت) دارد.



پاسخ خیلی تشریحی ✓

بررسی گزینه‌ها:

گزینه (۱): $x^2 - x < 4$ یک گزاره‌نما است، چون برای مثال به ازای $x = 0$ ارزش درست و به ازای $x = 4$ ارزش نادرست دارد.

گزینه (۲): طبق نکته ۳ درس Box، جدول ارزش ۸ گزاره، $2^8 = 256$ سطر (حالت) دارد.

گزینه (۳): از فصل ۲ ریاضی نهم (اعداد اعشاری متناوب) داریم:

$$\frac{11}{7} = 1/571428$$

یعنی ارقام بعد از ممیز، ۶ تا ۶ تکرار می‌شوند. ۶امین رقم بعد از ممیز ۸ است، پس ۱۲امین و ۱۸امین رقم بعد از ممیز هم ۸ می‌شود. حالا ۱۹امین رقم بعد از ممیز ۵ و ۲۰امین رقم بعد از ممیز ۷ است، پس این گزاره ارزش درست دارد.

گزینه (۴): می‌دانیم اگر مجموع ارقام یک عدد مضرب ۳ باشد، خود آن عدد هم مضرب ۳ است.

مجموع ارقام عدد ۱۸۳۹ برابر ۲۱ است که مضرب ۳ است، پس خود ۱۸۳۹ هم مضرب ۳ بوده و بنابراین عددی اول نیست.

۲۲

گزاره‌نمای $x^3 - 2x^2 - x + 2 = 0$ را در نظر بگیرید. اگر دامنه متغیر این گزاره‌نما، مجموعه اعداد طبیعی باشد، مجموع اعضای مجموعه جواب گزاره‌نما چه قدر است؟

۶ (۴)

۳ (۳)

۲ (۲)

۱ (۱)



 Hint

 درس Box

دامنه متغیر گزاره‌نما و مجموعه جواب گزاره‌نما

• در هر گزاره‌نما، به مجموعه مقادیری که می‌توان آن‌ها را به جای متغیرهای آن قرار داد، تا این‌که گزاره‌نما به گزاره تبدیل شود، دامنه متغیر گزاره‌نما می‌گویند و آن را با حرف D نمایش می‌دهند.

• در هر گزاره‌نما، به مجموعه عضوهایی از دامنه متغیر که به ازای آن‌ها، گزاره‌نما تبدیل به گزاره‌ای با ارزش درست شود، مجموعه جواب گزاره‌نما می‌گویند و آن را با حرف S نمایش می‌دهند و همواره داریم: $S \subseteq D$.

گام اول: ابتدا ریشه‌های معادله را پیدا می‌کنیم:  پاسخ خیلی تشریحی

$$x^3 - 2x^2 - x + 2 = 0 \Rightarrow x^2(x-2) - (x-2) = 0 \Rightarrow (x-2)(x^2-1) = 0$$

$$\Rightarrow (x-2)(x-1)(x+1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x=2 \\ x=1 \\ x=-1 \end{cases}$$

گام دوم: دامنه متغیر گزاره‌نما، مجموعه اعداد طبیعی است، پس $x = -1$ غیر قابل قبول است؛ بنابراین مجموعه جواب گزاره‌نما $S = \{1, 2\}$ بوده که مجموع اعضای آن برابر $1+2=3$ است.

اگر گزاره $p \Rightarrow q$ ارزش درست و گزاره $p \Rightarrow r$ ارزش نادرست داشته باشد، کدام یک از گزاره‌های زیر ارزش درست دارد؟

$$q \Leftrightarrow r \quad (۲)$$

$$(p \Rightarrow q) \Rightarrow r \quad (۱)$$

$$q \Leftrightarrow (r \Rightarrow p) \quad (۴)$$

$$(p \wedge q) \Rightarrow r \quad (۳)$$

۲۳



Hint

اول به این توجه کنید که ارزش $p \Rightarrow r$ نادرست است تا ارزش p و r به دست آید. بعد با توجه به ارزش p و این که ارزش $p \Rightarrow q$ درست است، ارزش q هم مشخص می‌شود.

جبر گزاره‌ها

درس‌Box

● **نقیض یک گزاره:** نقیض گزاره p را با $\sim p$ نمایش می‌دهیم و آن را «چنین نیست که p » می‌خوانیم.

(۱) اگر ارزش p درست باشد، ارزش $\sim p$ نادرست است و برعکس:

p	$\sim p$
د	ن
ن	د

$$\sim(\sim p) \equiv p$$

(۲) ارزش نقیض نقیض یک گزاره، با ارزش خود گزاره یکسان است:

● **ترکیب‌های فصلی و عطفی دو گزاره:** اگر دو گزاره را با حرف ربط «یا» به هم مرتبط کنیم، ترکیب فصلی دو گزاره به وجود می‌آید که آن را می‌خوانیم « p یا q » و می‌نویسیم « $p \vee q$ ».

اگر دو گزاره را با حرف ربط «و» به هم مرتبط کنیم، ترکیب عطفی دو گزاره به وجود می‌آید که آن را می‌خوانیم « p و q » و می‌نویسیم « $p \wedge q$ ».

ارزش $p \vee q$ زمانی درست است که ارزش دست کم یکی از دو گزاره p یا q درست باشد و ارزش $p \wedge q$ زمانی درست است که ارزش هر دو گزاره p و q درست باشد:

p	q	$p \wedge q$	$p \vee q$
د	د	د	د
د	ن	ن	د
ن	د	ن	د
ن	ن	ن	ن

$p \wedge T \equiv p$	$p \wedge F \equiv F$	$p \wedge \sim p \equiv F$
$p \vee T \equiv T$	$p \vee F \equiv p$	$p \vee \sim p \equiv T$

● **ترکیب شرطی دو گزاره:** به گزاره $p \Rightarrow q$ ترکیب شرطی دو گزاره می‌گوییم و آن را به صورت «اگر p آن‌گاه q » می‌خوانیم. ارزش یک گزاره شرطی تنها در حالتی نادرست است که p درست و q نادرست باشد:

p	q	$p \Rightarrow q$
د	د	د
د	ن	ن
ن	د	د
ن	ن	د

(۱) در ترکیب شرطی $p \Rightarrow q$ ، به p «مقدم» یا «فرض» و به q «تالی» یا «حکم» می‌گوییم.

(۲) گزاره شرطی $p \Rightarrow q$ را به دو صورت زیر نیز می‌خوانیم:

(p شرط کافی است برای q) یا (q شرط لازم است برای p)

(۳) اگر $p \Rightarrow q$ یک گزاره شرطی باشد:

به $q \Rightarrow p$ عکس گزاره شرطی می‌گوییم.

به $\sim q \Rightarrow \sim p$ عکس نقیض گزاره شرطی می‌گوییم (که با $p \Rightarrow q$ هم‌ارزش است، یعنی $\sim q \Rightarrow \sim p \equiv p \Rightarrow q$)؛

به $(q \Rightarrow p) \sim$ نقیض عکس گزاره شرطی می‌گوییم.

(۴) انتقای مقدم: در گزاره شرطی $p \Rightarrow q$ ، اگر p یا «مقدم» نادرست باشد، گزاره به انتقای مقدم درست است:

$$p \equiv F \xrightarrow{\text{در این صورت}} p \Rightarrow q \equiv T$$

(۵) درست بودن (صحت) تالی: در گزاره شرطی $p \Rightarrow q$ ، اگر q یا «تالی» درست باشد، $p \Rightarrow q$ همواره درست است:

$$q \equiv T \xrightarrow{\text{در این صورت}} p \Rightarrow q \equiv T$$

• **ترکیب دوشروطی:** اگر دو گزاره شرطی $p \Rightarrow q$ و $q \Rightarrow p$ را با ترکیب عطفی « $\wedge$ » به هم مرتبط کنیم، ترکیب دوشروطی $p \Leftrightarrow q$ به دست می‌آید که آن را به صورت « p اگر و تنها اگر q » یا « p شرط لازم و کافی برای q است» می‌خوانیم.

p	q	$p \Leftrightarrow q$
د	د	د
د	ن	ن
ن	د	ن
ن	ن	د

(۱) ارزش $p \Leftrightarrow q$ فقط در حالتی درست است که p و q هم‌ارزش باشند.

(۲) نقیض $p \Leftrightarrow q$ را به یکی از صورت‌های زیر می‌توان نوشت:

$$\sim(p \Leftrightarrow q) \equiv \sim p \Leftrightarrow q \quad \sim(p \Leftrightarrow q) \equiv p \Leftrightarrow \sim q$$

(۳) ترکیب دوشروطی یک گزاره با خودش همواره درست و ترکیب دوشروطی یک گزاره با نقیضش همواره نادرست است:

$$p \Leftrightarrow p \equiv T \quad p \Leftrightarrow \sim p \equiv F$$

هم‌ارزی‌های منطقی:

$p \vee q \equiv q \vee p$	$p \wedge q \equiv q \wedge p$	(۱) جابه‌جایی
$(p \vee q) \vee r \equiv p \vee (q \vee r)$	$(p \wedge q) \wedge r \equiv p \wedge (q \wedge r)$	(۲) شرکت‌پذیری
$p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$	$p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$	(۳) توزیع‌پذیری
$\sim(p \wedge q) \equiv \sim p \vee \sim q$	$\sim(p \vee q) \equiv \sim p \wedge \sim q$	(۴) دمورگان
$p \wedge (p \vee q) \equiv p$	$p \vee (p \wedge q) \equiv p$	(۵) جذب
$p \Rightarrow q \equiv \sim p \vee q$		
$p \Leftrightarrow q \equiv (p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p) \equiv (\sim p \wedge \sim q) \vee (p \wedge q)$		

پاسخ خیلی تشریحی ✓ گام اول: ارزش $p \Rightarrow r$ نادرست است، پس p درست و r نادرست می‌شود.

گام دوم: با توجه به این‌که ارزش p درست است، گزاره $p \Rightarrow q$ به صورت $T \Rightarrow q$ می‌شود که طبق گفته سؤال ارزش درست دارد، پس باید q هم درست باشد.

گام سوم: حالا به ازای $p \equiv T$ ، $q \equiv T$ و $r \equiv F$ ، ارزش گزاره‌های مرکب هر گزینه را به دست می‌آوریم:

(۱) گزینه: $(p \Rightarrow q) \Rightarrow r \equiv \underbrace{(T \Rightarrow T)}_T \Rightarrow F \equiv F$

(۲) گزینه: $q \Leftrightarrow r \equiv T \Leftrightarrow F \equiv F$

(۳) گزینه: $(p \wedge q) \Rightarrow r \equiv \underbrace{(T \wedge T)}_T \Rightarrow F \equiv F$

(۴) گزینه: $q \Leftrightarrow (r \Rightarrow p) \equiv T \Leftrightarrow \underbrace{(F \Rightarrow T)}_T \equiv T$

بنابراین جواب گزینه (۴) است.

در ستون مربوط به کدام گزینه در جدول ارزش گزاره‌ها، تعداد «درست»‌های بیشتری وجود دارد؟

۲۴

$$(p \Rightarrow q) \Rightarrow r \text{ (۲)}$$

$$p \Rightarrow (q \Rightarrow r) \text{ (۱)}$$

$$(p \vee q) \Rightarrow r \text{ (۴)}$$

$$p \Rightarrow (q \wedge r) \text{ (۳)}$$

پاسخ خیلی تشریحی ✓ جدول ارزش مربوط به گزاره‌ها را رسم می‌کنیم:

p	q	r	$q \wedge r$	$p \vee q$	$p \Rightarrow q$	$q \Rightarrow r$	$p \Rightarrow (q \Rightarrow r)$	$(p \Rightarrow q) \Rightarrow r$	$p \Rightarrow (q \wedge r)$	$(p \vee q) \Rightarrow r$
T	T	T	T	T	T	T	T	T	T	T
T	T	F	F	T	T	F	F	F	F	F
T	F	T	F	T	F	T	T	T	F	T
T	F	F	F	T	F	T	T	T	F	F
F	T	T	T	T	T	T	T	T	T	T
F	T	F	F	T	T	F	T	F	T	F
F	F	T	F	F	T	T	T	T	T	T
F	F	F	F	F	T	T	T	F	T	T

گزینه (۱)
درست ۷

گزینه (۲)
درست ۵

گزینه (۳)
درست ۵

گزینه (۴)
درست ۵

بنابراین در جدول ارزش گزاره گزینه (۱)، تعداد درست‌های بیشتری وجود دارد.

۲۵ اگر گزاره $p \vee q$ ارزش درست و گزاره $r \wedge q$ ارزش نادرست داشته باشد، گزاره $((r \Rightarrow p) \vee (q \Rightarrow p)) \wedge (r \Rightarrow (\sim p \Rightarrow q))$

با کدام یک از گزاره‌های زیر هم‌ارز است؟

T (۴)

r (۳)

q (۲)

p (۱)



با استفاده از قوانین جبر گزاره‌ها، گزاره $((r \Rightarrow p) \vee (q \Rightarrow p)) \wedge (r \Rightarrow (\sim p \Rightarrow q))$ را ساده‌تر کنید.

 Hint

پاسخ خیلی تشریحی ✓ گام اول: ابتدا دقت کنید که:

$$r \Rightarrow (\sim p \Rightarrow q) \equiv r \Rightarrow (p \vee q)$$

حالا طبق گفته سؤال $p \vee q$ درست است، پس:

$$r \Rightarrow (p \vee q) \equiv r \Rightarrow T \equiv T$$

گام دوم: پس گزاره $((r \Rightarrow p) \vee (q \Rightarrow p)) \wedge (r \Rightarrow (\sim p \Rightarrow q))$ به صورت $((r \Rightarrow p) \vee (q \Rightarrow p)) \wedge T$ یا همان $((r \Rightarrow p) \vee (q \Rightarrow p))$ می‌شود.

گام سوم: گزاره $((r \Rightarrow p) \vee (q \Rightarrow p))$ را ساده می‌کنیم:

$$((r \Rightarrow p) \vee (q \Rightarrow p)) \equiv (\sim r \vee p) \vee (\sim q \vee p) \equiv (p \vee (\sim r \vee \sim q))$$

$$\equiv p \vee \sim (r \wedge q)$$

گام چهارم: حالا دقت کنید که ارزش $r \wedge q$ نادرست است، پس:

$$p \vee \sim (r \wedge q) \equiv p \vee \sim F \equiv p \vee T \equiv T$$

با چه احتمالی دو گزاره $q \Rightarrow p$ و $p \Rightarrow \sim q$ هم‌ارزش‌اند، ولی p و q هم‌ارزش نیستند؟

۲۶



(۱) صفر

(۲) $\frac{1}{4}$

(۳) $\frac{1}{2}$

(۴) $\frac{3}{4}$

پاسخ خیلی تشریحی ✓ گام اول: جدول ارزش گزاره‌های $q \Rightarrow p$ و $p \Rightarrow \sim q$ را رسم می‌کنیم:

p	q	$\sim q$	$p \Rightarrow \sim q$	$q \Rightarrow p$
T	T	F	F	T
T	F	T	T	T
F	T	F	T	F
F	F	T	T	T

گام دوم: جدول ارزش این دو گزاره ۴ حالت (سطر) دارد که فقط در سطر مشخص‌شده دو گزاره $q \Rightarrow p$ و $p \Rightarrow \sim q$ هم‌ارزش‌اند، ولی دو گزاره q و p هم‌ارزش نیستند؛ پس در کل ۴ حالت داریم که فقط ۱ حالت آن مطلوب است، بنابراین جواب برابر $\frac{1}{4}$ می‌شود.

عکس نقیض گزاره $p \Rightarrow q$ را با r و نقیض عکس آن را با s نشان می‌دهیم. گزاره $r \vee s$ با کدام یک از گزاره‌های زیر هم‌ارز است؟

$$q \Rightarrow p \text{ (۲)}$$

$$p \Rightarrow q \text{ (۱)}$$

$$p \Rightarrow \sim q \text{ (۴)}$$

$$\sim p \Rightarrow q \text{ (۳)}$$

پاسخ خیلی تشریحی ✓ روش اول:

گام اول: عکس نقیض گزاره $p \Rightarrow q$ ، گزاره $\underbrace{\sim q \Rightarrow \sim p}_r$ است.

گام دوم: عکس گزاره $p \Rightarrow q$ ، گزاره $q \Rightarrow p$ است، پس نقیض عکس گزاره $p \Rightarrow q$ ، گزاره $\underbrace{\sim(q \Rightarrow p)}_s$ می‌شود.

گام سوم: حالا سراغ $r \vee s$ می‌رویم:

$$\begin{aligned} r \vee s &\equiv (\sim q \Rightarrow \sim p) \vee \sim (q \Rightarrow p) \equiv (q \vee \sim p) \vee \sim (\sim q \vee p) \\ &\equiv (q \vee \sim p) \vee (q \wedge \sim p) \equiv (\sim p \vee q) \vee (q \wedge \sim p) \equiv p \vee \underbrace{(q \vee (q \wedge \sim p))}_{\text{قانون جذب}} \\ &\equiv \sim p \vee q \equiv p \Rightarrow q \end{aligned}$$

روش دوم:

جدول ارزش گزاره $r \vee s$ یا همان $(\sim q \Rightarrow \sim p) \vee \sim (q \Rightarrow p)$ را رسم می‌کنیم. فقط قبل از آن دقت کنید که می‌دانیم هر گزاره و عکس نقیض آن گزاره هم‌ارزاند، پس به جای $\sim q \Rightarrow \sim p$ همان $p \Rightarrow q$ را می‌گذاریم (یعنی گزاره $r \vee s$ هم‌ارزش گزاره $(p \Rightarrow q) \vee \sim (q \Rightarrow p)$ می‌شود).

p	q	$\sim p$	$\sim q$	$p \Rightarrow q$	$q \Rightarrow p$	$\sim (q \Rightarrow p)$	$\sim p \Rightarrow q$	$p \Rightarrow \sim q$	$(p \Rightarrow q) \vee \sim (q \Rightarrow p)$
T	T	F	F	T	T	F	T	F	T
T	F	F	T	F	T	F	T	T	F
F	T	T	F	T	F	T	T	T	T
F	F	T	T	T	T	F	F	T	T

گزینه (۱) گزینه (۲) گزینه (۳) گزینه (۴) $r \vee s$

بنابراین گزاره $(p \Rightarrow q) \vee \sim (q \Rightarrow p)$ هم‌ارز با گزاره $p \Rightarrow q$ است.

گزاره «اگر $x = 2$ و $y > 2$ ، آن گاه $100! + 1$ عددی اول است.» معادل کدام یک از گزاره‌های زیر است؟

(۱) اگر $x \neq 2$ و $y \leq 2$ ، آن گاه $100! + 1$ عددی اول نیست.

(۲) اگر $100! + 1$ عددی اول باشد، آن گاه $x \neq 2$ و $y \leq 2$.

(۳) اگر $100! + 1$ عددی اول نباشد، آن گاه $x \neq 2$ و $y \leq 2$.

(۴) اگر $100! + 1$ عددی اول نباشد، آن گاه $x \neq 2$ یا $y \leq 2$.



Hint

گزاره را به کمک p ، q و r بنویسید.

پاسخ خیلی تشریحی ✓ **گام اول:** گزاره را به صورت زیر بازنویسی می‌کنیم:

«اگر $\underbrace{x=2}_p$ و $\underbrace{y>2}_q$ ، آن گاه $\underbrace{100!+1 \text{ عددی اول است.}}_r$ »

پس گزاره، معادل $(p \wedge q) \Rightarrow r$ است.

گام دوم: با استفاده از عکس نقیض داریم:

$$(p \wedge q) \Rightarrow r \equiv r \Rightarrow \sim (p \wedge q) \equiv r \Rightarrow (\sim p \vee \sim q)$$

گام سوم: حالا گزاره $(\sim p \vee \sim q) \Rightarrow r$ را با توجه به p ، q و r بازنویسی می‌کنیم:

«اگر $\underbrace{100!+1 \text{ عددی اول نباشد.}}_{\sim r}$ ، آن گاه $\underbrace{x \neq 2}_{\sim p}$ یا $\underbrace{y \leq 2}_{\sim q}$ »

اگر f تابعی بر روی گزاره‌ها باشد، به گونه‌ای که اگر p درست باشد $f(p) = 1$ و اگر p نادرست باشد، $f(p) = 0$ ، در این صورت تابع

$f(p \Leftrightarrow q)$ برابر کدام یک از عبارات زیر است؟

$$f(p) + f(q) - f(p)f(q) \quad (۱)$$

$$f(p)f(q) + f(\sim p)f(\sim q) \quad (۲)$$

$$f(p)f(\sim p) + f(q)f(\sim q) \quad (۳)$$

$$f(p)f(\sim q) + f(q)f(\sim p) \quad (۴)$$



Hint

به دنبال گزینه‌ای باشید که مقدار آن به ازای (p) درست و q درست و (p) نادرست و q نادرست برابر ۱ است.

پاسخ خیلی تشریحی ✓ **گام اول:** اگر p و q هر دو درست باشند، ارزش $p \Leftrightarrow q$ هم درست شده و باید $f(p \Leftrightarrow q) = 1$ باشد. حالا گزینه‌ها را بررسی می‌کنیم. باید به ازای p درست و q درست، حاصل برابر ۱ باشد.

$$(۱) \quad f(p) + f(q) - f(p)f(q) = \underbrace{f(T)}_1 + \underbrace{f(T)}_1 - \underbrace{f(T)f(T)}_{1 \times 1 = 1} = 1 \quad \checkmark$$

$$(۲) \quad f(p)f(q) + f(\sim p)f(\sim q) = \underbrace{f(T)f(T)}_{1 \times 1 = 1} + \underbrace{f(F)f(F)}_{0 \times 0 = 0} = 1 \quad \checkmark$$

$$(۳) \quad f(p)f(\sim p) + f(q)f(\sim q) = \underbrace{f(T)f(F)}_{1 \times 0 = 0} + \underbrace{f(T)f(F)}_{1 \times 0 = 0} = 0 \quad \times$$

$$(۴) \quad f(p)f(\sim q) + f(q)f(\sim p) = \underbrace{f(T)f(F)}_{1 \times 0 = 0} + \underbrace{f(T)f(F)}_{1 \times 0 = 0} = 0 \quad \times$$

بنابراین جواب گزینه (۱) یا (۲) است.

گام دوم: اگر p و q هر دو نادرست باشند، ارزش $p \Leftrightarrow q$ درست شده و باید $f(p \Leftrightarrow q) = 1$ باشد. گزینه (۱) و (۲) را بررسی می‌کنیم. باید به ازای p نادرست و q نادرست، حاصل برابر ۱ باشد:

$$(۱) \quad f(p) + f(q) - f(p)f(q) = \underbrace{f(F)}_0 + \underbrace{f(F)}_0 - \underbrace{f(F)f(F)}_{0 \times 0 = 0} = 0 \quad \times$$

$$(۲) \quad f(p)f(q) + f(\sim p)f(\sim q) = \underbrace{f(F)f(F)}_{0 \times 0 = 0} + \underbrace{f(T)f(T)}_{1 \times 1 = 1} = 1 \quad \checkmark$$

بنابراین جواب گزینه (۲) است.

به جواب رسیدیم، ولی بد نیست دو حالت (p) درست و q نادرست و (p) نادرست و q درست را هم برای گزینه (۲) با هم بررسی کنیم. در این دو حالت ارزش $p \Leftrightarrow q$ نادرست است و $f(p \Leftrightarrow q) = 0$ می‌شود. حالا باید حاصل عبارت گزینه (۲) در این دو حالت برابر صفر باشد:

$$f(p)f(q) + f(\sim p)f(\sim q) \stackrel{p=T, q=F}{=} \underbrace{f(T)f(F)}_{1 \times 0 = 0} + \underbrace{f(F)f(T)}_{0 \times 1 = 0} = 0 \quad \checkmark$$

$$f(p)f(q) + f(\sim p)f(\sim q) \stackrel{p=F, q=T}{=} \underbrace{f(F)f(T)}_{0 \times 1 = 0} + \underbrace{f(T)f(F)}_{1 \times 0 = 0} = 0 \quad \checkmark$$

n برابر کدام یک از مقادیر زیر می تواند باشد تا ارزش گزاره $(p_1 \Leftrightarrow p_2) \vee (p_2 \Leftrightarrow p_3) \vee \dots \vee (p_{n-1} \Leftrightarrow p_n) \vee (p_n \Leftrightarrow p_1)$ همواره درست باشد؟

۱۵۰ (۴)

۱۴۴ (۳)

۱۲۱ (۲)

۱۰۰ (۱)

۳۰



به این فکر کنید که ارزش این گزاره، در چه حالتی می تواند نادرست باشد.

Hint

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: ارزش گزاره $(p_1 \Leftrightarrow p_2) \vee (p_2 \Leftrightarrow p_3) \vee \dots \vee (p_{n-1} \Leftrightarrow p_n) \vee (p_n \Leftrightarrow p_1)$ در حالتی نادرست می شود که ارزش همه گزاره های $p_1 \Leftrightarrow p_2, p_2 \Leftrightarrow p_3, \dots, p_{n-1} \Leftrightarrow p_n, p_n \Leftrightarrow p_1$ نادرست باشد.

گام دوم: برای این که ارزش $p_1 \Leftrightarrow p_2$ نادرست باشد، دو حالت داریم:

حالت اول: ارزش p_1 درست و ارزش p_2 نادرست باشد. در این حالت، برای این که ارزش گزاره $p_2 \Leftrightarrow p_3$ نادرست شود، باید ارزش p_3 درست باشد. برای این که ارزش $p_3 \Leftrightarrow p_4$ نادرست شود، باید ارزش p_4 نادرست باشد و ... پس در کل باید ارزش گزاره های با اندیس (اندیس همون عدد کوچولوی پایین چپ p ها می شه) فرد درست و ارزش گزاره های با اندیس زوج نادرست باشد. حالا دقت کنید ارزش $p_1 \Leftrightarrow p_n$ وقتی نادرست می شود که p_n نادرست باشد (چون p_1 درست است)، پس n باید زوج باشد.

حالت دوم: ارزش p_1 نادرست و ارزش p_2 درست باشد. دقیقاً با استدلال مشابه حالت اول، باید ارزش تمام گزاره های با اندیس فرد نادرست و ارزش تمام گزاره های با اندیس زوج درست باشد و در نتیجه n زوج باشد.

گام سوم: بنابراین، ارزش گزاره $(p_1 \Leftrightarrow p_2) \vee (p_2 \Leftrightarrow p_3) \vee \dots \vee (p_{n-1} \Leftrightarrow p_n) \vee (p_n \Leftrightarrow p_1)$ در حالتی می تواند نادرست شود که n زوج باشد، اما اگر n فرد باشد، ارزش این گزاره همواره درست می شود. در بین گزینه ها فقط ۱۲۱ فرد است، پس جواب گزینه (۲) می شود.

در مربعی به ضلع ۱۵ واحد، دایره‌ای به مرکز یک رأس آن و شعاع ۱۷ واحد رسم می‌کنیم تا دو ضلع مربع را قطع کند. فاصله دو نقطه تقاطع مربع و دایره از یکدیگر کدام است؟

۱۶ (۴)

۱۴ (۳)

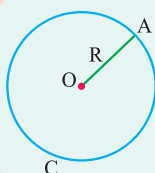
$۸\sqrt{۲}$ (۲)

$۷\sqrt{۲}$ (۱)

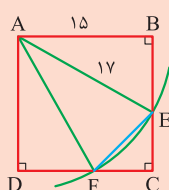
مشاوره این سؤال از مبحث وضعیت خط و دایره و با الهام از سؤال کنکور ریاضی داخل ۹۵ طراحی شده است.

Hint

درس Box



دایره، مجموعه نقاطی از صفحه است که از نقطه‌ای واقع در آن صفحه به یک فاصله ثابت قرار دارند. اگر نقطه A روی دایره $C(O, R)$ واقع باشد، آن گاه $OA = R$ و برعکس، اگر $OA = R$ باشد، آن گاه نقطه A روی دایره $C(O, R)$ قرار دارد.



گام اول: مطابق شکل فرض کنید دایره‌ای به مرکز A و شعاع ۱۷، اضلاع BC و CD را به ترتیب در نقاط E و F قطع کرده باشد. در این صورت داریم:

$$ABE : BE^2 = AE^2 - AB^2 = 17^2 - 15^2 = 64$$

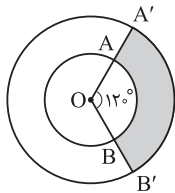
$$\Rightarrow BE = 8 \Rightarrow CE = 15 - 8 = 7$$

گام دوم: دو مثلث ABE و ADF همنهشت هستند، پس $DF = 8$ و در نتیجه $CF = 7$ است. در مثلث قائم‌الزاویه ECF داریم:

$$EF^2 = CE^2 + CF^2 = 7^2 + 7^2 = 2 \times 7^2 \Rightarrow EF = 7\sqrt{2}$$

پاسخ خیلی تشریحی

در شکل زیر، مساحت ناحیه رنگی نصف مساحت دایره کوچکتر است. طول کمان $A'B'$ چند برابر طول کمان AB است؟



(۲) $\sqrt{5}$

(۴) $\frac{\sqrt{10}}{2}$

(۱) $\sqrt{3}$

(۳) $\frac{\sqrt{6}}{2}$

مشاوره این سؤال تلفیقی از روابط طول کمان و مساحت قطاع در دایره است که در متن صفحه (۱۲) کتاب درسی مورد بررسی قرار گرفته‌اند.

Hint

اگر اندازه‌های دو کمان در دو دایره برابر یکدیگر باشند، آن‌گاه طول کمان‌ها با شعاع دایره‌ها نسبت مستقیم دارند.

درس‌Box

$$L = \frac{\pi R \alpha}{180^\circ}$$

(۱) طول کمان متناظر با زاویه α (برحسب درجه) در دایره $C(O, R)$ برابر است با:

$$S = \frac{\pi R^2 \alpha}{360^\circ}$$

(۲) مساحت قطاع متناظر با زاویه α (برحسب درجه) در دایره $C(O, R)$ برابر است با:

پاسخ خیلی تشریحی **گام اول:** فرض کنید شعاع دایره بزرگتر برابر R و شعاع دایره کوچکتر برابر r باشد. مساحت قطاع 120° معادل $\frac{1}{3}$ مساحت دایره است، پس داریم:

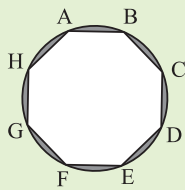
$$\frac{1}{3} \pi R^2 - \frac{1}{3} \pi r^2 = \frac{1}{3} \pi r^2 \Rightarrow \frac{1}{3} \pi R^2 = \frac{5}{6} \pi r^2 \Rightarrow \frac{R^2}{r^2} = \frac{5}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{R}{r} = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{10}}{2}$$

$$\frac{\widehat{A'B'}}{\widehat{AB}} = \frac{\frac{\pi R \times 120^\circ}{180^\circ}}{\frac{\pi r \times 120^\circ}{180^\circ}} = \frac{R}{r} = \frac{\sqrt{10}}{2}$$

گام دوم: نسبت طول کمان $A'B'$ به طول کمان AB برابر است با:

در شکل زیر، هشت ضلعی منتظم $ABCDEFGH$ درون دایره‌ای به شعاع $2\sqrt{2}$ محاط شده است. مساحت ناحیه سایه‌زده کدام است؟



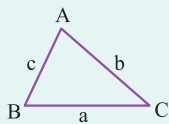
$$4(\pi - 2\sqrt{2}) \quad (2)$$

$$8(\pi - 2\sqrt{2}) \quad (1)$$

$$4(\pi - 2) \quad (4)$$

$$8(\pi - 2) \quad (3)$$

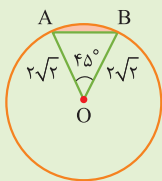
برای محاسبه مساحت هشت ضلعی منتظم، از مرکز دایره به رئوس هشت ضلعی وصل کنید.



$$S_{ABC} = \frac{1}{2}bc \sin A = \frac{1}{2}ac \sin B = \frac{1}{2}ab \sin C$$

مساحت هر مثلث برابر است با نصف حاصل ضرب طول دو ضلع در سینوس زاویه بین آن دو ضلع.

گام اول: مطابق شکل با وصل کردن دو سر هر ضلع این هشت ضلعی منتظم به مرکز دایره، یک قطاع 45° به شعاع $2\sqrt{2}$ ایجاد می‌شود.



$$S_{(OAB \text{ قطاع})} = \frac{45^\circ}{360^\circ} \times \pi R^2 = \frac{1}{8} \pi R^2$$

$$S_{\triangle OAB} = \frac{1}{2} OA \times OB \times \sin 45^\circ = \frac{1}{2} \times R \times R \times \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{4} R^2$$

$$S_{\text{سایه‌زده}} = \left(\frac{\pi}{8} - \frac{\sqrt{2}}{4} \right) R^2$$

گام دوم: با توجه به این که ناحیه سایه‌زده از ۸ بخش یکسان تشکیل شده است، پس مساحت کل ناحیه سایه‌زده برابر است با:

$$S = 8 \left(\frac{\pi}{8} - \frac{\sqrt{2}}{4} \right) R^2 = 8 \left(\frac{\pi}{8} - \frac{\sqrt{2}}{4} \right) \times (2\sqrt{2})^2 = 8(\pi - 2\sqrt{2})$$



Hint

درس Box

پاسخ خیلی تشریحی ✓

۳۴

در دایره $(O, 10)$ ، از نقطه A به فاصله ۶ واحد از مرکز دایره، وتر MN را با کمترین طول و وتر PQ را با بیشترین طول رسم کرده ایم. مساحت چهارضلعی $MPNQ$ کدام است؟

۲۴۰ (۴)

۱۶۰ (۳)

۱۲۰ (۲)

۸۰ (۱)



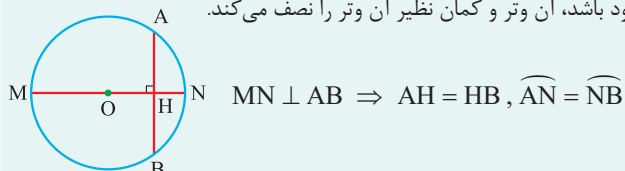
مشاوره طول کوتاهترین وتر گذرنده از یک نقطه داخل دایره در کنکور مرحله دوم ۱۴۰۲ یکی از سوالات آزمون بوده است.

کوتاهترین وتر گذرنده از هر نقطه در دایره، بر قطر دایره در آن نقطه عمود است.

Hint

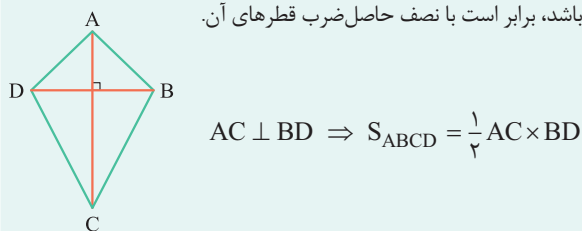
درتس Box

(۱) اگر قطری از یک دایره بر وتری از آن دایره عمود باشد، آن وتر و کمان نظیر آن وتر را نصف می کند.

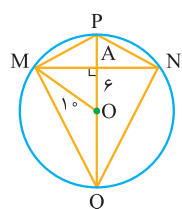


(۲) بلندترین وتر گذرنده از هر نقطه درون دایره، قطر دایره است و کوتاهترین وتر گذرنده از آن نقطه، وتری است که بر قطر گذرنده از آن نقطه عمود است.

(۳) مساحت یک چهارضلعی که قطرهای آن بر هم عمود باشد، برابر است با نصف حاصل ضرب قطرهای آن.



$$AC \perp BD \Rightarrow S_{ABCD} = \frac{1}{2} AC \times BD$$



گام اول: مطابق شکل PQ (قطر دایره) و MN به ترتیب بلندترین و کوتاهترین قطرهای گذرنده از نقطه A هستند. داریم:

$$O\hat{A}M : AM^2 = OM^2 - OA^2 = 10^2 - 6^2 = 64 \Rightarrow AM = 8$$

از طرفی می دانیم قطر عمود بر یک وتر، آن وتر را نصف می کند، پس $MN = 2 \times 8 = 16$.

گام دوم: طول قطر دایره $PQ = 2 \times 10 = 20$ است. چون قطرهای چهارضلعی $MPNQ$ بر هم عمودند، پس مساحت آن برابر نصف حاصل ضرب طول قطرهای آن است؛ یعنی داریم:

$$S_{MPNQ} = \frac{1}{2} MN \times PQ = \frac{1}{2} \times 16 \times 20 = 160$$

پاسخ خیلی تشریحی

۳۵

مرکز دایره $C(O, 6)$ از خطوط موازی d_1 و d_2 به ترتیب به فاصله ۱۴ و ۸ قرار دارد. اگر نقاط A و B روی این دایره فاصله‌ای برابر از این دو خط داشته باشند، طول وتر AB کدام است؟

(۲) $4\sqrt{5}$

(۱) ۶

(۴) $6\sqrt{3}$

(۳) ۱۰

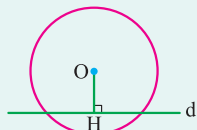
مشاوره این سؤال ترکیبی از وضعیت خط و دایره و قضیه‌های مربوط به وتر در دایره است. قضایا و مسائل مربوط به وتر در دایره، جزء مفاهیم اولیه و اساسی این فصل محسوب می‌شود.

Hint

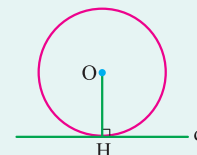
نقاطی از صفحه که از دو خط موازی d و d' فاصله برابر داشته باشند، روی خطی موازی با d و d' و دقیقاً در وسط آن دو خط قرار می‌گیرند...

وضعیت خط و دایره:

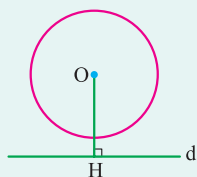
(الف) اگر فاصله خط d از مرکز دایره از شعاع کم‌تر باشد ($OH < r$)، خط و دایره در دو نقطه یکدیگر را قطع می‌کنند.



(ب) اگر فاصله خط d از مرکز دایره برابر با شعاع باشد ($OH = r$)، خط و دایره در یک نقطه بر هم مماس‌اند.

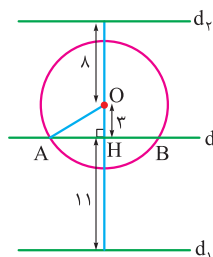


(پ) اگر فاصله خط d از مرکز دایره از شعاع بیشتر باشد ($OH > r$)، خط و دایره نقطه اشتراکی ندارند.



پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: شکل نسبتاً دقیقی برای سؤال رسم می‌کنیم. با توجه به فاصله دو خط d_1 و d_2 از مرکز دایره و مقایسه آن با شعاع دایره، هر دو خط خارج دایره قرار دارند. بدیهی است تنها در صورتی نقطه‌ای روی دایره به فاصله برابر از دو خط وجود دارد که دو خط d_1 و d_2 در دو طرف مرکز دایره باشند. در این صورت خط d که دقیقاً وسط این دو خط قرار دارد، شامل نقاطی است که از d_1 و d_2 به یک فاصله‌اند.



گام دوم: مطابق شکل خط d ، دایره را در نقاط A و B قطع می‌کند و داریم:

$$OA^2 - OH^2 = 6^2 - 3^2 = 27 \Rightarrow AH = 3\sqrt{3}$$

$$AB = 2AH = 6\sqrt{3}$$

از طرفی قطر عمود بر یک وتر، آن وتر را نصف می‌کند، پس داریم:

۳۶

روی دایره‌ای ۶ نقطه به گونه‌ای قرار گرفته‌اند که اندازه‌های ۶ کمان متوالی ایجادشده یک دنباله حسابی با قدرنسبت 18° تشکیل داده‌اند.

اندازه زاویه محاطی روبه‌رو به کوچک‌ترین کمان، چند درجه است؟

۱۵ (۴)

۱۰ (۳)

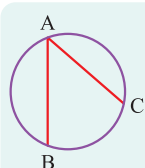
۷/۵ (۲)

۵ (۱)

مشاوره این سؤال ترکیبی از مباحث زاویه محاطی و دنباله حسابی است. در کنکورهای چند سال اخیر تعداد سؤالات با موضوعات ترکیبی بین دروس مختلف ریاضی به طور چشمگیری افزایش یافته است.

Hint

درس Box



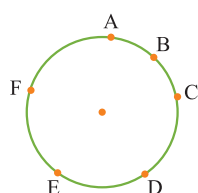
(۱) اندازه زاویه محاطی در دایره برابر نصف اندازه کمان مقابل به آن زاویه است.

$$\hat{A} = \frac{\widehat{BC}}{2}$$

(۲) جمله عمومی یک دنباله حسابی با جمله اول a و قدرنسبت d برابر است با:

$$t_n = a + (n-1)d$$

گام اول: مطابق شکل فرض کنید کمان‌های $\widehat{AB}$ ، $\widehat{BC}$ ، ... و $\widehat{FA}$ به ترتیب از راست به چپ، جملات متوالی یک دنباله حسابی به قدرنسبت 18° باشند. با فرض $\widehat{AB} = \alpha$ داریم:



$$\widehat{AB} + \widehat{BC} + \dots + \widehat{FA} = 360^\circ$$

$$\Rightarrow \alpha + (\alpha + 18^\circ) + \dots + (\alpha + 5 \times 18^\circ) = 360^\circ$$

$$\Rightarrow 6\alpha + (1+2+3+4+5) \times 18^\circ = 360^\circ$$

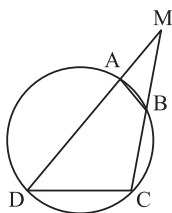
$$\Rightarrow 6\alpha + 15 \times 18^\circ = 360^\circ \Rightarrow 6\alpha = 90^\circ \Rightarrow \alpha = 15^\circ$$

گام دوم: اندازه کوچک‌ترین کمان برابر $\alpha = 15^\circ$ است؛ پس اندازه زاویه محاطی روبه‌رو به آن برابر $7/5^\circ = 15^\circ$ است.

اگر به جای خواسته سؤال که اندازه زاویه محاطی روبه‌رو به کوچک‌ترین کمان دایره است، به اشتباه خود کوچک‌ترین کمان دایره در نظر گرفته شود، گزینه نادرست (۴) انتخاب می‌شود.

گول نخوری

در شکل زیر، شعاع دایره ۲ واحد است. اگر $AB = 2\sqrt{2}$ ، $CD = 2\sqrt{2}$ و $\widehat{BC} = \frac{2}{5}\widehat{AD}$ باشد، اندازه زاویه C چند درجه است؟



۱۰۵ (۲)

۱۲۰ (۴)

۱۰۰ (۱)

۱۱۰ (۳)



رابطه بین اندازه کمان با طول وتر بر حسب شعاع دایره را به خاطر داشته باشید.

Hint

درسی Box

- (۱) اندازه کمان نظیر وتری از دایره که طول آن برابر شعاع دایره باشد، برابر 60° است.
- (۲) اندازه کمان نظیر وتری از دایره که طول آن $\sqrt{2}$ برابر شعاع دایره باشد، 90° است.
- (۳) اندازه کمان نظیر وتری از دایره که طول آن $\sqrt{3}$ برابر شعاع دایره باشد، 120° است.

پاسخ خیلی تشریحی ✓ **گام اول:** طول وتر AB برابر شعاع دایره و طول وتر CD ، $\sqrt{2}$ برابر شعاع دایره است، پس اندازه کمانهای AB و CD به ترتیب برابر 60° و 90° است.

گام دوم: مجموع اندازه‌های کمان‌های واقع بر محیط دایره برابر 360° است، پس داریم:

$$\widehat{BC} = \frac{2}{5}\widehat{AD} \Rightarrow \begin{cases} \widehat{BC} = 2x \\ \widehat{AD} = 5x \end{cases}$$

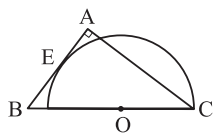
$$\widehat{AB} + \widehat{BC} + \widehat{CD} + \widehat{AD} = 360^\circ \Rightarrow 60^\circ + 2x + 90^\circ + 5x = 360^\circ$$

$$\Rightarrow 7x = 210^\circ \Rightarrow x = 30^\circ \Rightarrow \widehat{AD} = 5 \times 30^\circ = 150^\circ$$

گام سوم: زاویه C زاویه محاطی روبه‌رو به کمان $\widehat{DAB}$ است، بنابراین داریم:

$$\hat{C} = \frac{\widehat{AB} + \widehat{AD}}{2} = \frac{60^\circ + 150^\circ}{2} = 105^\circ$$

در شکل زیر $\hat{A} = 90^\circ$ و AB در نقطه E بر نیم‌دایره مماس است. اگر $AC = 12$ و شعاع نیم‌دایره $\frac{20}{3}$ باشد، طول پاره خط AE کدام است؟



۴ (۲)

۵ (۴)

۳ (۱)

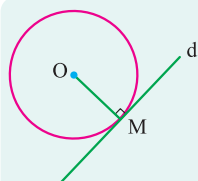
۴ / ۵ (۳)

مشاوره سؤالات ترکیبی قضیه تالس یا تشابه مثلث‌ها با دایره از پرتکرارترین سؤالات دایره در کنکور هستند.

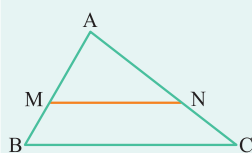
Hint

درس‌Box

شعاع گذرنده از نقطه تماس نیم‌دایره با پاره خط AB (نقطه E) را رسم کنید.



(۱) یک خط بر یک دایره مماس است، اگر و تنها اگر شعاع گذرنده از نقطه تماس خط و دایره بر آن خط عمود باشد.



(۲) فرض کنید در مثلث ABC پاره خط MN موازی ضلع BC باشد، آن‌گاه:

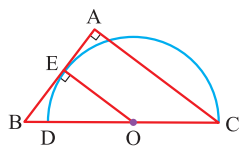
$$\frac{AM}{MB} = \frac{AN}{NC}$$

(الف) طبق قضیه تالس:

$$\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{MN}{BC}$$

(ب) طبق تعمیم قضیه تالس:

گام اول: مطابق شکل شعاع گذرنده از نقطه E (نقطه تماس نیم‌دایره و پاره خط AB) را رسم می‌کنیم. چون $OE \perp AB$ و $AC \perp AB$ ، پس $OE \parallel AC$ و طبق تعمیم قضیه تالس داریم:



$$\begin{aligned} \triangle ABC : OE \parallel AC &\Rightarrow \frac{OE}{AC} = \frac{BO}{BC} \Rightarrow \frac{\frac{20}{3}}{12} = \frac{BO}{BO + \frac{20}{3}} \\ \Rightarrow \frac{5}{9} &= \frac{BO}{BO + \frac{20}{3}} \xrightarrow{\text{تفصیل نسبت درمخرج}} \frac{5}{4} = \frac{BO}{\frac{20}{3}} \Rightarrow BO = \frac{25}{3} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow BC = BO + OC = \frac{25}{3} + \frac{20}{3} = \frac{45}{3} = 15$$

$$\triangle ABC : AB^2 = BC^2 - AC^2 = 15^2 - 12^2 = 81 \Rightarrow AB = 9$$

گام دوم: حال طبق قضیه تالس در مثلث ABC داریم:

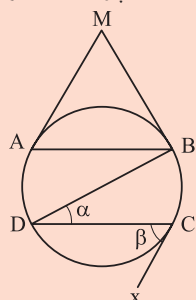
$$OE \parallel AC \Rightarrow \frac{BE}{AE} = \frac{BO}{OC} = \frac{\frac{25}{3}}{\frac{20}{3}} = \frac{5}{4} \xrightarrow{\text{ترکیب نسبت در صورت}} \frac{AB}{AE} = \frac{9}{4} \xrightarrow{AB=9} AE = 4$$

پاسخ خیلی تشریحی

در شکل زیر MA ، MB و Cx بر دایره مماس هستند. اگر $AB \parallel CD$ ، $\beta = 1/5\alpha$ و $M = 100^\circ$ باشد، امتداد پاره خط BD و

نیم خط Cx چه زاویه‌ای با یکدیگر می‌سازند؟

مشاوره این سؤال ترکیبی از مفاهیم زوایای محاطی و ظلّی و ویژگی وترهای موازی در دایره است که مشابه سؤالی از کنکور ریاضی داخل ۹۸ طراحی شده است.



$$30^\circ (2)$$

$$40^\circ (1)$$

$$15^\circ (4)$$

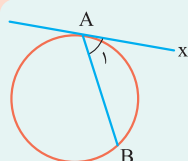
$$20^\circ (3)$$

به برابری اندازه کمان‌های $\widehat{AD}$ و $\widehat{BC}$ دقت کنید.

Hint

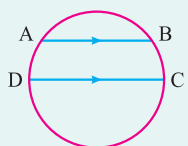
(۱) اندازه هر زاویه ظلّی، برابر نصف اندازه کمان مقابل آن است.

درس‌Box



$$\hat{A}_1 = \frac{\widehat{AB}}{2}$$

(۲) اندازه کمان‌های محصور به دو وتر موازی در دایره برابر یکدیگر است.



$$AB \parallel CD \Rightarrow \widehat{AD} = \widehat{BC}$$

پاسخ خیلی تشریحی ✓ گام اول: دو زاویه $M\hat{A}B$ و $M\hat{B}A$ هر دو ظلّی هستند، پس داریم:

$$M\hat{A}B = M\hat{B}A = \frac{\widehat{AB}}{2}$$

$$\overset{\Delta}{A}MB : M\hat{A}B + M\hat{B}A + M\hat{A}B = 180^\circ$$

$$\Rightarrow 2M\hat{A}B = 180^\circ - 100^\circ = 80^\circ \Rightarrow \widehat{AB} = 80^\circ$$

گام دوم: می‌دانیم اندازه کمان‌های محصور بین دو وتر موازی برابر یکدیگرند، از طرفی کمان BC روبه‌رو به زاویه محاطی $\hat{D} = \alpha$ است، پس داریم:

$$AB \parallel CD \Rightarrow \widehat{AD} = \widehat{BC} = 2\alpha$$

از طرفی Cx بر دایره مماس است، پس زاویه $D\hat{C}x$ ظلّی است و داریم:

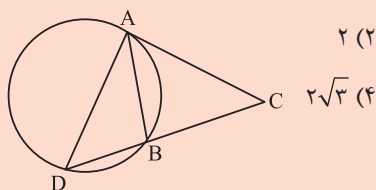
$$D\hat{C}x = \frac{\widehat{CD}}{2} \Rightarrow \widehat{CD} = 2\beta = 3\alpha$$

$$\widehat{AB} + \widehat{BC} + \widehat{CD} + \widehat{AD} = 360^\circ \Rightarrow 80^\circ + 2\alpha + 3\alpha + 2\alpha = 360^\circ \Rightarrow 7\alpha = 280^\circ \Rightarrow \alpha = 40^\circ$$

گام سوم: زاویه $D\hat{C}x$ برای مثلث CND زاویه خارجی است، پس داریم:

$$D\hat{C}x = \hat{D} + \hat{N} \Rightarrow 1/5 \times 40^\circ = 40^\circ + \hat{N} \Rightarrow \hat{N} = 20^\circ$$

در شکل زیر، CA در نقطه A بر دایره مماس است. اگر $AC = AD$ و $AB = \frac{\sqrt{6}}{3} AC$ باشد، آن گاه حاصل $\frac{DC}{BD}$ کدام است؟



۲ (۲)

۲ (۳)

۳ (۱)

۳ (۳)

۴۰

مشاوره این سؤال ترکیبی از مفاهیم زوایای ظلّی و محاطی به همراه تشابه مثلث‌هاست و مشابه سؤالی از کنکور ریاضی داخل ۹۹ طراحی شده است.

Hint

درس Box

نشان دهید دو مثلث ABC و ACD متشابه‌اند.

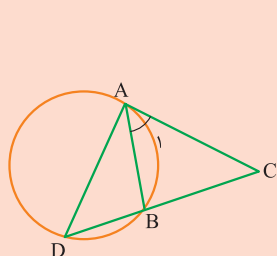
دو مثلث در هر یک از حالت‌های زیر متشابه‌اند:

حالت اول: هرگاه دو زاویه از مثلثی با دو زاویه از مثلث دیگر برابر باشد.

حالت دوم: هرگاه طول‌های دو ضلع از مثلثی با طول‌های دو ضلع از مثلث دیگر متناسب و زاویه بین آن‌ها برابر باشد.

حالت سوم: هرگاه طول‌های سه ضلع از مثلثی با طول‌های سه ضلع از مثلث دیگر متناسب باشند.

پاسخ خیلی تشریحی ✓ **گام اول:** با توجه به زوایای محاطی و ظلّی در دایره داریم:



$$\left. \begin{array}{l} \hat{A}_1 = \frac{\widehat{AB}}{2} \\ \hat{D} = \frac{\widehat{AB}}{2} \end{array} \right\} \Rightarrow \hat{A}_1 = \hat{D} \quad \left. \begin{array}{l} \hat{ACD} : AC = AD \Rightarrow \hat{C} = \hat{D} \end{array} \right\} \Rightarrow \hat{A}_1 = \hat{C}$$

$$\Rightarrow \hat{ABC} \sim \hat{ADC} \Rightarrow BC = AB = \frac{\sqrt{6}}{3} AC \quad (*)$$

گام دوم: دو مثلث ABC و ADC متشابه‌اند، زیرا داریم:

$$\left\{ \begin{array}{l} \hat{C} = \hat{C} \\ \hat{A}_1 = \hat{D} \end{array} \right\} \Rightarrow \hat{ABC} \sim \hat{ADC} \Rightarrow \frac{AC}{DC} = \frac{BC}{AC} \xrightarrow{(*)} \frac{AC}{DC} = \frac{\sqrt{6}}{3}$$

$$\Rightarrow DC = \frac{3}{\sqrt{6}} AC \Rightarrow DC = \frac{\sqrt{6}}{2} AC \quad (**)$$

$$\xrightarrow{(**), (*)} BD = DC - BC = \frac{\sqrt{6}}{2} AC - \frac{\sqrt{6}}{3} AC = \frac{\sqrt{6}}{6} AC$$

$$\frac{DC}{BD} = \frac{\frac{\sqrt{6}}{2} AC}{\frac{\sqrt{6}}{6} AC} = 3$$

فیزیک یازدهم

۴۱

یک میله شیشه‌ای خنثی را با یک میله پلاستیکی خنثی مالش می‌دهیم. اگر طی این مالش، 5×10^{10} الکترون بین این دو میله منتقل شود، بار الکتریکی میله پلاستیکی پس از مالش، به چند نانوکولن می‌رسد؟ ($e = 1.6 \times 10^{-19} \text{ C}$)

انتهای مثبت سری
شیشه
چوب
پلاستیک
انتهای منفی سری

(۱) -۸

(۲) -۸۰

(۳) +۸

(۴) +۸۰

Hint

ابتدا مثبت یا منفی بودن بار میله پلاستیکی را تعیین کنید تا بتوانید دو گزینه را رد کنید. سپس از رابطه $q = \pm ne$ مقدار بار میله پلاستیکی را به طور دقیق مشخص کنید.

درتنب Box

انتهای مثبت
پشم
ابریشم
لاستیک
انتهای منفی

هرگاه دو جسم نارسانای خنثی را به یکدیگر مالش دهیم، یکی از آن‌ها الکترون از دست می‌دهد و دیگری الکترون دریافت می‌کند. جسمی که در جدول سری الکتروسیته مالشی (تریبو الکتریک) به انتهای مثبت سری نزدیک‌تر است، الکترون‌خواهی کم‌تری دارد و در اثر مالش، الکترون از دست داده و بارش مثبت خواهد شد.

به عنوان مثال در شکل جدول مقابل اگر پارچه پشمی را به لاستیک مالش دهیم و هر دو خنثی باشند، پارچه پشمی الکترون از دست داده و لاستیک الکترون می‌گیرد. در نهایت پارچه پشمی بار مثبت و لاستیک بار منفی خواهد داشت.

دقت کنید که براساس اصل پایستگی بار الکتریکی در این تبادل بار، اندازه بار الکتریکی هر دو جسم با هم برابر است.

هم‌چنین بار الکتریکی یک کمیت کوانتومی است؛ یعنی همواره مضرب صحیحی از یک مقدار پایه (بار بنیادی) بوده و هر مقدار دلخواهی نمی‌تواند داشته باشد:

$$q = \pm ne, \quad e = 1.6 \times 10^{-19} \text{ C}$$

تعداد الکترون مبادله شده بین دو جسم

علامت +: برای جسمی که الکترون از دست داده

علامت -: برای جسمی که الکترون دریافت کرده است.

پاسخ خیلی تشریحی ✓ گام اول: با توجه به این که پلاستیک نسبت به شیشه الکترون‌خواهی بیشتری دارد، در اثر مالش این دو جسم به یکدیگر میله پلاستیکی الکترون دریافت می‌کند و بارش منفی می‌شود (گزینه‌های (۳) و (۴) رد می‌شوند).

گام دوم: مقدار بار الکتریکی میله پلاستیکی را به صورت زیر محاسبه می‌کنیم:

$$q = -ne \Rightarrow q = -5 \times 10^{10} \times 1.6 \times 10^{-19} \Rightarrow q = -8 \times 10^{-9} \text{ C} = -8 \text{ nC}$$

نوع بار الکتریکی یک جسم باردار، با از دست دادن 300 الکترون، تغییر کرده و اندازه بار آن 50 درصد کاهش می‌یابد. بار این جسم، پس از، از دست دادن این الکترون‌ها به چند کولن می‌رسد؟

$(e = 1/6 \times 10^{-19} C)$

(۲) $3/2 \times 10^{-17}$

(۱) $1/6 \times 10^{-17}$

(۴) $-3/2 \times 10^{-17}$

(۳) $-1/6 \times 10^{-17}$

 Hint

تغییرات بار (همان تعداد الکترونی که مبادله شده) را برابر با اختلاف بار ثانویه و اولیه قرار دهید، سپس مقدار دقیق بار q_2 را محاسبه کنید.

گام اول: ابتدا تغییرات بار را برابر با بار تعداد الکترونی که جسم از دست داده قرار می‌دهیم تا بار q_2 و q_1 مشخص شود. (دقت کنید که چون الکترون از دست داده تغییرات بار مثبت است).

$$\Delta q = q_2 - q_1 \xrightarrow{q_2 = -\frac{1}{3}q_1} +300e = -\frac{1}{3}q_1 - q_1$$

$$+300e = -\frac{4}{3}q_1 \Rightarrow q_1 = -225e, q_2 = +100e$$

گام دوم: مقدار دقیق بار q_2 را محاسبه می‌کنیم:

$$q_2 = 100 \times 1/6 \times 10^{-19} C = 1/6 \times 10^{-17} C$$

 پاسخ خیلی تشریحی

۴۳

جسم باردار A را با جسم باردار B مالش می‌دهیم. اگر در طی مالش، با انتقال $1/25 \times 10^{13}$ الکترون از جسم A به جسم B، بار این دو جسم به ترتیب به $-2 \mu C$ و $1 \mu C$ برسد، بار اولیه دو جسم A و B به ترتیب از راست به چپ، چند میکروکولن بوده است؟
($e = 1/6 \times 10^{-19} C$)

۳، -۴ (۲)

-۶، -۱ (۱)

-۴، ۵ (۴)

-۲، -۱ (۳)



Hint

ابتدا از رابطه $q = ne$ مقدار بار مبادله شده را براساس تعداد الکترون انتقالی محاسبه کنید و سپس بار نهایی هر جسم را برابر با بار اولیه به علاوه یا منهای بار مبادله شده قرار دهید تا بار اولیه به دست آید.

گام اول: مقدار باری که توسط انتقال این تعداد الکترون منتقل می‌شود را محاسبه می‌کنیم: ✓ پاسخ خیلی تشریحی

$$q = ne \Rightarrow q = 1/25 \times 10^{13} \times 1/6 \times 10^{-19} = 2 \times 10^{-6} C = 2 \mu C$$

گام دوم: با توجه به مقدار بار نهایی هر جسم و مقدار بار مبادله شده، بار اولیه جسم A و B را به دست می‌آوریم. دقت کنید که جسم A الکترون از دست داده است؛ بنابراین $+2 \mu C$ به بار آن افزوده می‌شود و همچنین جسم B الکترون گرفته، پس $-2 \mu C$ به بار آن افزوده می‌شود.

$$q'_A = q_A + ne \Rightarrow -2 = q_A + 2 \Rightarrow q_A = -4 \mu C$$

$$q'_B = q_B - ne \Rightarrow 1 = q_B - 2 \Rightarrow q_B = +3 \mu C$$

میلهٔ بارداری را بدون تماس به کلاهک الکتروسکوپ بارداری سریع نزدیک می‌کنیم. مشاهده می‌شود که ورقه‌های الکتروسکوپ ابتدا بسته و سپس باز می‌شوند. کدام یک از عبارات‌های زیر الزاماً درست است؟

الف) در لحظه‌ای که ورقه‌های الکتروسکوپ کاملاً بسته‌اند، بار خالص الکتروسکوپ برابر صفر است.

ب) بار اولیهٔ الکتروسکوپ، همانم با بار میله است.

پ) بار اولیه و بار نهایی ورقه‌های الکتروسکوپ، ناهمنام‌اند.

ت) بار اولیه و بار نهایی کلاهک الکتروسکوپ، ناهمنام‌اند.

(۲) ب و پ

(۱) الف و ب

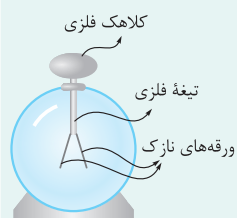
(۴) الف و ت

(۳) پ و ت

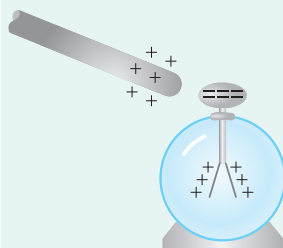


الکتروسکوپ:

درسی Box



وسیله‌ای است که با کمک آن، در مورد بار الکتریکی اجسام می‌توان اظهار نظر کرد. این وسیله شامل کلاهک فلزی، تیغهٔ فلزی و ورقه‌های نازک متصل به تیغهٔ فلزی است.



اگر یک الکتروسکوپ خنثی داشته باشیم، با نزدیک کردن یک میلهٔ باردار به آن، روی کلاهک الکتروسکوپ، باری مخالف با بار میله و روی ورقه‌ها بار همانم با میله القا می‌شود؛ در نتیجه ورقه‌های الکتروسکوپ از هم فاصله می‌گیرند:

یکی از کاربردهای الکتروسکوپ، تشخیص باردار بودن یک جسم است. برای این امر نیازی به باردار بودن الکتروسکوپ نیست و کافی است جسم را به کلاهک الکتروسکوپ نزدیک کنیم. اگر ورقه‌ها از هم فاصله بگیرند، نشانهٔ باردار بودن جسم است.

کاربرد دیگر الکتروسکوپ در تشخیص نوع بار یک جسم باردار است. برای تشخیص نوع بار اجسام باید حتماً الکتروسکوپ، باردار و نوع بار آن نیز برای ما معلوم باشد. به همین منظور، جسم باردار را به آرامی از بالا به کلاهک نزدیک می‌کنیم. اگر انحراف ورقه‌های الکتروسکوپ بیشتر شود، نوع بار جسم، همانم با بار الکتروسکوپ است و اگر انحراف برای لحظه‌ای کم شود، بار جسم مخالف بار الکتروسکوپ است. می‌توانیم با استفاده از الکتروسکوپ، رسانا یا نارسانا بودن اجسام را تشخیص دهیم. برای این امر باید الکتروسکوپ باردار باشد ولی نوع بار آن برای ما مهم نیست. در این حال، یک نقطه از جسم بدون باری را که در دست داریم به کلاهک الکتروسکوپ تماس می‌دهیم. اگر انحراف ورقه‌ها تغییر محسوسی نکند، جسم نارسانا است اما اگر این تماس موجب شود انحراف ورقه‌ها کم شود و حتی از بین برود، جسم رسانا است.

الف) نادرست؛ زیرا الکتروسکوپ در حالت خنثی هم که باشد ورقه‌های آن کاملاً بسته نمی‌شود.

ب) نادرست؛ زیرا اگر بار الکتروسکوپ و میلهٔ باردار همانم باشد، انحراف ورقه‌های الکتروسکوپ بیشتر می‌شود.

پ) درست.

ت) درست.

پاسخ خیلی تشریحی ✓

۴۵

دو بار الکتریکی نقطه‌ای $q_1 = 4 \mu C$ و $q_2 = -2 \mu C$ در فاصله 30 cm از یکدیگر قرار دارند. به ترتیب، اندازه نیروی الکتریکی که

دو بار به هم وارد می‌کنند، چند نیوتون و نوع این نیرو کدام است؟ $(k = 9 \times 10^9 \frac{N.m^2}{C^2})$

(۲) رانشی

(۱) رانشی

(۴) / ۰، رانشی

(۳) / ۰، رانشی



Hint ابتدا با استفاده از رابطه قانون کولن نیرو را محاسبه کنید، سپس با توجه به نوع بارها نوع نیرو را مشخص کنید.

هر دو بار الکتریکی نقطه‌ای q_1 و q_2 در فاصله r ، به یکدیگر نیرو وارد می‌کنند که این نیرو از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$F = \frac{k |q_1| |q_2|}{r^2}$$

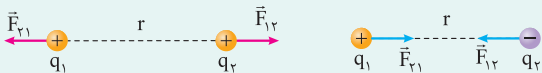
اندازه نیرو: $F(N)$

ثابت کولن: $k = 9 \times 10^9 \frac{N.m^2}{C^2}$

فاصله دو بار از هم: $r(m)$

بارهای الکتریکی نقطه‌ای: $q_1, q_2 (C)$

نیروی بین دو بار در حالتی که دو بار همنام هستند، از نوع دافعه (رانشی) و در حالتی که دو بار ناهمنام هستند از نوع جاذبه (ربایشی) است. بنابر قانون سوم نیوتون، نیروی الکتروستاتیکی که دو بار بر یکدیگر وارد می‌کنند هم‌اندازه، هم‌راستا ولی در خلاف جهت یکدیگرند.



$$F = \frac{k |q_1| |q_2|}{r^2} \Rightarrow F = \frac{9 \times 10^9 \times 4 \times 10^{-6} \times 2 \times 10^{-6}}{(30 \times 10^{-2})^2} = \frac{9 \times 4 \times 2 \times 10^{-3}}{9 \times 10^{-2}} = 0.8 \text{ N}$$

با توجه به این که بارها ناهمنام هستند، نیروی بین آن‌ها رایشی است.

پاسخ خیلی تشریحی ✓

در شکل زیر، دو گوی مشابه به جرم $2/5g$ و بار یکسان مثبت q در فاصله $6cm$ از هم قرار دارند، به طوری که گوی بالایی به حالت



معلق مانده است. q چند میکروکولن است؟ $(g = 10m/s^2, k = 9 \times 10^9 \frac{N.m^2}{C^2})$

۱) $0/01$

۲) $0/1$

۳) $0/02$

۴) $0/2$

۴۶



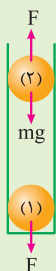
Hint

$$\frac{k |q_1| |q_2|}{r^2} = mg$$

نیروی بین دو بار را برابر با نیروی وزن گلوله قرار دهید تا بار q به دست آید:

مطابق شکل برای آن که گوی بالایی به حالت معلق بماند، باید اندازه نیروی وزن آن با اندازه نیروی الکتریکی که از طرف گوی پایینی به آن وارد می شود با هم برابر باشند:

پاسخ خیلی تشریحی ✓



$$F = mg \Rightarrow \frac{k |q| |q|}{r^2} = mg$$

$$\Rightarrow \frac{9 \times 10^9 \times q^2}{(0/06)^2} = 2/5 \times 10^{-3} \times 10$$

$$\Rightarrow q^2 = \frac{25 \times 10^{-3} \times 36 \times 10^{-4}}{9 \times 10^9} = \frac{25 \times 36}{9} \times 10^{-16} \Rightarrow q = 10 \times 10^{-8} = 10^{-7} C = 0/1 \mu C$$

دو ذره با بار الکتریکی یکسان در فاصله r ، بر یکدیگر نیروی الکتریکی وارد می کنند. چند درصد از بار یکی از ذره ها را به دیگری منتقل کنیم تا در فاصله $\frac{r}{4}$ از هم، اندازه نیروی الکتریکی بین این دو ذره نسبت به حالت اول، ۲۴ درصد کاهش یابد؟

۹۰ (۴)

۸۰ (۳)

۷۰ (۲)

۶۰ (۱)

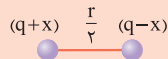
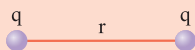


ابتدا نیروی بین دو بار را در هر یک از حالت های گفته شده در سؤال به دست آورید، سپس با توجه به درصد کاهش نیروی F_1 از

Hint

رابطه $F_2 = \frac{76}{100} F_1$ ، مقدار تغییر بار و درصد آن را تعیین کنید.

پاسخ خیلی تشریحی ✓ **گام اول:** نیروی بین دو بار در حالت اول و دوم را به دست می آوریم:



$$F_1 = \frac{kq^2}{r^2}$$

$$F_2 = \frac{k(q-x)(q+x)}{\frac{r^2}{4}} = \frac{4k(q^2 - x^2)}{r^2}$$

گام دوم: با توجه به این که نیرو در حالت دوم ۲۴ درصد کم تر از حالت اول است، داریم:

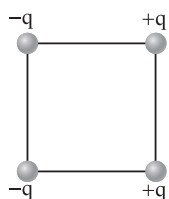
$$F_2 = \frac{76}{100} F_1 \Rightarrow \frac{4k(q^2 - x^2)}{r^2} = \frac{76}{100} \frac{kq^2}{r^2} \Rightarrow q^2 - \frac{19}{100} q^2 = x^2$$

$$\Rightarrow x^2 = \frac{81}{100} q^2 \Rightarrow x = \frac{9}{10} q \times 100 \Rightarrow x = 90\% q$$

بنابراین باید ۹۰ درصد بار الکتریکی یکی را به دیگری منتقل کنیم.

چهار ذره باردار، مطابق شکل زیر، در چهار رأس یک مربع قرار دارند. بار الکتریکی $-q$ را در مرکز این مربع قرار می‌دهیم. جهت نیروی

الکتریکی خالص وارد بر این بار کدام است؟



(۱) ↑

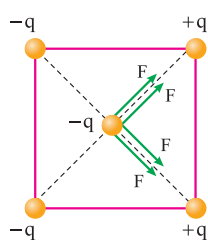
(۲) ↓

(۳) →

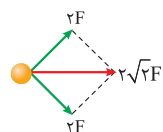
(۴) ←



نیروی وارد بر بار $-q$ در مرکز مربع را از طرف هر بار رسم کنید، سپس دوتا دوتا برایندها را رسم کنید تا به برایندهایی برسید.



گام اول: ابتدا نیروی وارد بر بار $-q$ را از طرف هر یک از بارها رسم می‌کنیم. دقت کنید با توجه به این که اندازه بارها با هم برابر و فاصله هر یک از بارها تا بار $-q$ نیز یکسان است، اندازه این نیروها نیز با هم برابر خواهد بود:



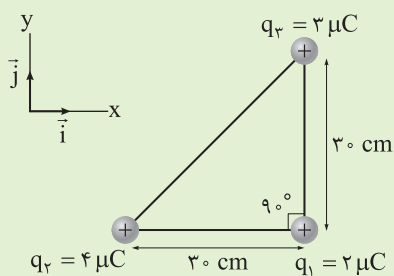
گام دوم: حال از نیروها دوبه‌دو برایندها می‌گیریم تا به برایندهایی برسیم:

Hint

پاسخ خیلی تشریحی ✓

۴۹

در شکل زیر، سه بار الکتریکی نقطه‌ای در سه رأس مثلث قائم‌الزاویه‌ای ثابت شده‌اند. بردار نیروی الکتریکی خالص ($\vec{F}$) وارد بر بار q_1



در SI کدام است؟ ($k = 9 \times 10^9 \frac{N \cdot m^2}{C^2}$)

$$\vec{F} = 0/8\vec{i} + 0/6\vec{j} \quad (1)$$

$$\vec{F} = 0/8\vec{i} - 0/6\vec{j} \quad (2)$$

$$\vec{F} = 8\vec{i} + 6\vec{j} \quad (3)$$

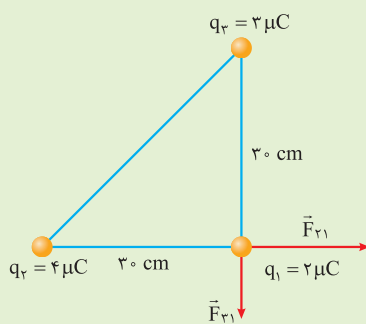
$$\vec{F} = 8\vec{i} - 6\vec{j} \quad (4)$$



نیروهای وارد بر بار q_1 را از طرف بار q_2 و q_3 محاسبه کنید و بردار برآیند را به صورت بردار یکه با در نظر گرفتن جهت بنویسید.

Hint

پاسخ خیلی تشریحی



ابتدا نیروی وارد بر بار q_1 از طرف هر یک از بارها را محاسبه می‌کنیم؛ سپس با تعیین جهت نیروها، بردار برآیند را به صورت بردار یکه به دست می‌آوریم:

$$F = \frac{k |q_1| |q_2|}{r^2}$$

$$F_{21} = \frac{9 \times 10^9 \times 4 \times 2}{900} = 0/8 \text{ N}$$

$$F_{31} = \frac{9 \times 10^9 \times 3 \times 2}{900} = 0/6 \text{ N}$$

$$\vec{F} = 0/8\vec{i} - 0/6\vec{j}$$

با توجه به جهت نیروها روی شکل:

دقت کنید برای محاسبه نیروی بین دو بار، زمانی که بارها برحسب میکروکولن و فاصله‌ها برحسب سانتی متر است از رابطه

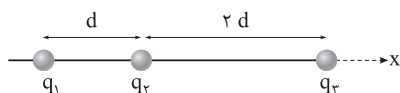
تذکره

$$F = \frac{9 \times 10^9 |q_1| |q_2|}{r^2}$$

بدون این که آن‌ها را به SI ببریم، استفاده می‌کنیم.

۵۰

در شکل زیر، بارهای الکتریکی نقطه‌ای $q_1 = q$ ، $q_2 = 4q$ و $q_3 = -2q$ در جای خود ثابت شده‌اند. اندازه نیروی الکتریکی خالص وارد بر بار q_1 ، چند برابر اندازه نیروی الکتریکی خالص وارد بر بار q_2 است؟



$\frac{17}{27}$ (۴)

$\frac{19}{9}$ (۳)

$\frac{19}{27}$ (۲)

$\frac{34}{18}$ (۱)



برایند نیروهای وارد به بار q_1 و q_2 را جداگانه محاسبه کرده و نسبت آن‌ها را به دست آورید.

Hint

برای محاسبه اندازه برایند دو نیروی F_1 و F_2 در کتاب درسی، سه حالت مطابق شکل‌های زیر وجود دارد:

دربسی Box

دو نیرو هم‌راستا و هم‌جهت $F_T = F_1 + F_2$	دو نیرو هم‌راستا و خلاف جهت $F_T = F_1 - F_2 $	دو نیرو عمود بر هم $F_T = \sqrt{F_1^2 + F_2^2}$

گام اول: ابتدا برایند نیروهای وارد بر بار q_1 را محاسبه می‌کنیم: ✓ پاسخ خیلی تشریحی

$$F = \frac{k |q_1| |q_2|}{r^2}$$

$$F_{r1} = \frac{k \times q \times 4q}{d^2} = \frac{4kq^2}{d^2}$$

$$F_{r2} = \frac{k \times q \times 2q}{9d^2} = \frac{2kq^2}{9d^2}$$

$$F_{T1} = F_{r1} - F_{r2} = \frac{4kq^2}{d^2} - \frac{2kq^2}{9d^2} = \frac{34kq^2}{9d^2}$$

گام دوم: حال برایند نیروهای وارد بر بار q_2 را به دست می‌آوریم:

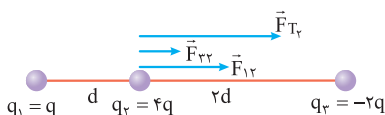
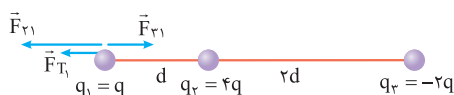
$$F_{r1} = \frac{k \times q \times 4q}{d^2} = \frac{4kq^2}{d^2}$$

$$F_{r2} = \frac{k \times 4q \times 2q}{4d^2} = \frac{2kq^2}{d^2}$$

$$F_{T2} = F_{r1} + F_{r2} = \frac{4kq^2}{d^2} + \frac{2kq^2}{d^2} = \frac{6kq^2}{d^2}$$

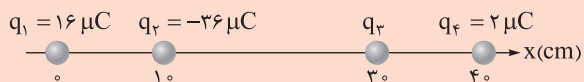
گام سوم: نسبت نیروهای برایند را می‌نویسیم:

$$\frac{F_{T1}}{F_{T2}} = \frac{\frac{34kq^2}{9d^2}}{\frac{6kq^2}{d^2}} = \frac{34}{9} \times \frac{1}{6} = \frac{34}{54} = \frac{17}{27}$$



۵۱

در شکل زیر، بارهای الکتریکی نقطه‌ای روی محور x قرار دارند. اگر نیروی الکتریکی خالص وارد بر بار q_4 در $\vec{F} = -9\vec{i}$ SI باشد، بار q_3 چند میکروکولن است؟



-۸ (۴)

۸ (۳)

۲ (۲)

-۲ (۱)

Hint

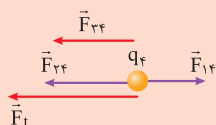
نیروی وارد بر بار q_4 از طرف هر یک از بارها را محاسبه کنید و پس از رسم شکل و تعیین جهت نیروها، برآیند آن را برابر با $-9\vec{i}$ قرار دهید تا F_{34} به دست آید؛ سپس بار q_3 قابل محاسبه است.

پاسخ خیلی تشریحی



گام اول: نیروهای وارد بر بار q_4 را از طرف هر یک از بارها محاسبه و روی شکل رسم می‌کنیم:

$$F = \frac{k |q_1| |q_2|}{r^2}$$



$$|F_{14}| = \frac{90 \times 16 \times 2}{1600} = 1/8 \text{ N}$$

$$|F_{24}| = \frac{90 \times 36 \times 2}{900} = 7/2 \text{ N}$$

$$|F_{34}| = \frac{90 \times q_3 \times 2}{100} = 1/8 |q_3| \text{ N}$$

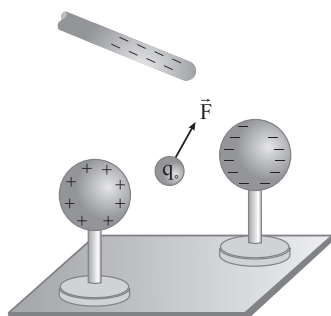
گام دوم: با توجه به جهت نیروهای رسم‌شده، جهت نیروی وارده از طرف بار q_3 بر بار q_4 را مشخص کرده، پس متوجه می‌شویم که بار q_3 منفی است زیرا F_{34} جاذبه است.

$$\vec{F}_t = \vec{F}_{34} + \vec{F}_{24} + \vec{F}_{14} \Rightarrow -9\vec{i} = -7/2\vec{i} - 1/8 |q_3| \vec{i} + 1/8 \vec{i}$$

$$\Rightarrow 1/8 |q_3| = 3/6 \Rightarrow |q_3| = 2 \mu\text{C}$$

$$\Rightarrow q_3 = -2 \mu\text{C}$$

بار آزمون نشان داده شده در شکل، $q = +3 \text{ nC}$ است و از سوی دو گوی و یک میله باردار نیرویی برابر با $F = 12 \times 10^{-5} \text{ N}$ در جهت نشان داده شده بر آن وارد می شود. به ترتیب میدان الکتریکی خالص در محل بار آزمون چند نیوتون بر کولن و در چه جهتی است؟



(۱) 4×10^4 ، هم جهت با $\vec{F}$

(۲) 4×10^4 ، در خلاف جهت $\vec{F}$

(۳) 36×10^4 ، هم جهت با $\vec{F}$

(۴) 36×10^4 ، در خلاف جهت $\vec{F}$



Hint

ابتدا از رابطه $E = \frac{F}{|q_0|}$ اندازه میدان الکتریکی را به دست آورید. سپس با استفاده از تعریف کمی میدان الکتریکی، جهت آن را تعیین کنید.

دربش Box

هرگاه بار آزمون (q_0) درون یک میدان الکتریکی (E) قرار بگیرد و نیروی F از طرف میدان به آن وارد شود، اندازه میدان از رابطه زیر به دست می آید:

$$E = \frac{F}{|q_0|}$$

(N) نیروی وارد بر بار (C) اندازه بار آزمون

جهت میدان الکتریکی در هر نقطه، هم جهت با نیروی وارد بر بار مثبت در آن نقطه است که این همان تعریف کمی میدان الکتریکی است.

گام اول: ابتدا اندازه میدان را به دست می آوریم:

پاسخ خیلی تشریحی

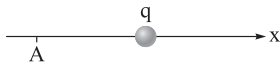
$$E = \frac{F}{|q_0|} \Rightarrow E = \frac{12 \times 10^{-5}}{3 \times 10^{-9}} = 4 \times 10^4 \text{ N/C}$$

گام دوم: با توجه به تعریف کمی میدان الکتریکی، جهت میدان هم جهت با نیروی وارد بر بار است.

۵۳

در شکل زیر، فاصله نقطه A از بار الکتریکی نقطه‌ای $q = +10 \mu\text{C}$ برابر 20 cm است. میدان الکتریکی حاصل از بار q در نقطه A،

بر حسب نیوتون بر کولن کدام است؟ $(k = 9 \times 10^9 \frac{\text{N.m}^2}{\text{C}^2})$



$$22/5 \times 10^6 \vec{i} \quad (2)$$

$$2/25 \times 10^6 \vec{i} \quad (1)$$

$$-22/5 \times 10^6 \vec{i} \quad (4)$$

$$-2/25 \times 10^6 \vec{i} \quad (3)$$



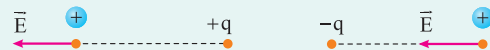
ابتدا با استفاده از رابطه $E = \frac{k|q|}{r^2}$ ، میدان حاصل از بار را محاسبه کنید؛ سپس جهت میدان را با استفاده از علامت بار q تعیین کنید.

Hint

میدان الکتریکی حاصل از بار q در فضای اطراف آن از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$E = \frac{k|q|}{r^2}$$

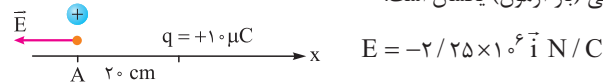
برای تعیین جهت میدان در هر نقطه، فرض می‌کنیم در آن نقطه یک بار مثبت (بار آزمون) وجود دارد و در نتیجه جهت میدان در آن نقطه هم‌جهت با نیروی وارد بر بار آزمون از طرف بار q است.



گام اول: ابتدا میدان حاصل از بار q را در فاصله 20 سانتی‌متری از آن محاسبه می‌کنیم:

$$E = \frac{k|q|}{r^2} \Rightarrow E = \frac{9 \times 10^9 \times 10 \times 10^{-6}}{(0.2)^2} = \frac{9 \times 10^4}{4 \times 10^{-2}} = 2.25 \times 10^6 \text{ N/C}$$

گام دوم: برای تعیین جهت میدان الکتریکی، فرض می‌کنیم در نقطه A یک بار مثبت وجود دارد که براساس تعریف میدان الکتریکی جهت میدان با نیروی وارد بر بار مثبت فرضی (بار آزمون) یکسان است:



$$E = -2.25 \times 10^6 \vec{i} \text{ N/C}$$

پاسخ خیلی تشریحی ✓

اگر بزرگی میدان الکتریکی حاصل از یک ذرهء باردار در فاصله یک متری از آن، ۸۱ N/C بیشتر از بزرگی میدان الکتریکی حاصل

از آن در فاصله ۲ متری اش باشد، اندازه بار الکتریکی این ذره چند نانوکولن است؟ $(k = ۹ \times ۱۰^۹ \frac{\text{N.m}^2}{\text{C}^2})$

۱۸ (۴)

۱۲ (۳)

۴ (۲)

۳ (۱)



با استفاده از رابطه مقایسه‌ای $\frac{E_2}{E_1} = (\frac{r_1}{r_2})^2$ ، نسبت میدان‌ها را به دست آورده و سپس اختلاف آن را برابر با ۸۱ قرار داده تا اندازه

یکی از میدان‌ها به دست آید. حال می‌توانید با استفاده از رابطه $E = \frac{k|q|}{r^2}$ مقدار q را به دست آورید.

 Hint

پاسخ خیلی تشریحی ✓

گام اول: ابتدا با استفاده از رابطه میدان الکتریکی، نسبت اندازه میدان در فواصل یک و دو متری را به دست می‌آوریم تا اندازه میدان در این نقاط به دست آید:

$$E = \frac{k|q|}{r^2} \Rightarrow \frac{E_2}{E_1} = (\frac{r_1}{r_2})^2$$

$$\Rightarrow \frac{E_2}{E_1} = (\frac{1}{2})^2 = \frac{1}{4} \Rightarrow E_1 = 4E_2$$

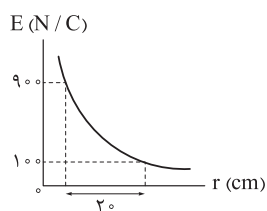
$$E_1 - E_2 = 81 \Rightarrow 4E_2 = 81 \Rightarrow E_2 = 20.25 \text{ N/C}$$

گام دوم: حال اندازه بار را با توجه به میدان محاسبه شده به دست می‌آوریم:

$$E = \frac{9 \times 10^9 \times q}{2^2} = 20.25 \Rightarrow q = \frac{20.25 \times 4}{9 \times 10^9} = 9 \times 10^{-9} \text{ C} = 9 \text{ nC}$$

نمودار حاصل از یک بار الکتریکی نقطه‌ای بر حسب فاصله از آن، به شکل زیر است. در فاصله چند سانتی‌متری از این بار اندازه میدان

۵۵



الکتریکی، برابر 400 N/C است؟ $(k = 9 \times 10^9 \frac{\text{N.m}^2}{\text{C}^2})$

۵ (۱)

۱۰ (۲)

۱۵ (۳)

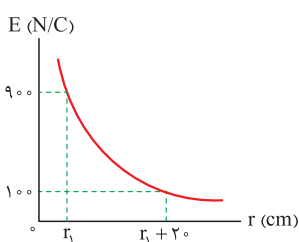
۲۰ (۴)



ابتدا از رابطه مقایسه‌ای $\frac{E_2}{E_1} = (\frac{r_1}{r_1 + 20})^2$ مقدار r_1 را به دست آورید. سپس مجدداً با رابطه مقایسه‌ای $\frac{E_3}{E_1} = (\frac{r_1}{r_3})^2$ مقدار r_3 را محاسبه کنید.

Hint

پاسخ خیلی تشریحی ✓



$$\frac{E_2}{E_1} = (\frac{r_1}{r_1 + 20})^2 \Rightarrow \frac{450}{900} = (\frac{r_1}{r_1 + 20})^2$$

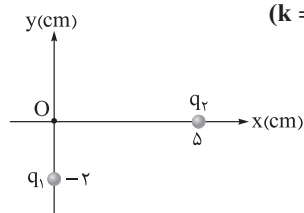
$$\Rightarrow \frac{1}{3} = \frac{r_1}{r_1 + 20} \Rightarrow r_1 + 20 = 3r_1 \Rightarrow r_1 = 10 \text{ cm}$$

گام دوم: حال با توجه به مقدار r_1 ، مجدداً نسبت میدان به فاصله را نوشته و این بار داریم:

$$\frac{E_3}{E_1} = (\frac{r_1}{r_3})^2 \Rightarrow \frac{400}{900} = (\frac{10}{r_3})^2 \Rightarrow \frac{2}{3} = \frac{10}{r_3} \Rightarrow r_3 = 15 \text{ cm}$$

در شکل زیر، اگر بردار میدان الکتریکی حاصل از بارهای الکتریکی نقطه‌ای q_1 و q_2 در مبدأ مختصات (نقطه O) برحسب نیوتن بر

کولن به صورت $\vec{E} = 1/2 \times 10^3 \vec{i} + 1/5 \times 10^3 \vec{j}$ باشد، $\frac{q_2}{q_1}$ کدام است؟ $(k = 9 \times 10^9 \frac{N.m^2}{C^2})$



۵ (۱)

-۵ (۲)

۲/۵ (۳)

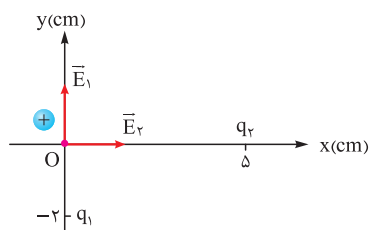
-۲/۵ (۴)



Hint

با توجه به جهت بردار $\vec{i}$ و $\vec{j}$ جهت میدان‌ها را روی شکل مشخص کنید تا نوع بارهای q_1 و q_2 مشخص شود. حالا با استفاده از

رابطه مقایسه‌ای میدان $\frac{E_2}{E_1} = \frac{q_2}{q_1} \times (\frac{r_1^2}{r_2^2})$ می‌توانید نسبت $\frac{q_2}{q_1}$ را محاسبه کنید.



گام اول: با توجه به جهت میدان‌های الکتریکی در راستای $\vec{i}$ و $\vec{j}$ و رسم آن‌ها متوجه می‌شویم که بار q_1 مثبت و بار q_2 منفی است.

پاسخ خیلی تشریحی ✓

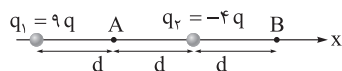
گام دوم: حال با توجه به اندازه میدان‌ها و فواصل آن‌ها نسبت بار $\frac{q_2}{q_1}$ را به دست می‌آوریم:

$$\frac{E_2}{E_1} = \frac{q_2}{q_1} \times \left(\frac{r_1}{r_2}\right)^2 \Rightarrow \frac{1/2 \times 10^3}{1/5 \times 10^3} = \left|\frac{q_2}{q_1}\right| \times \left(\frac{2}{5}\right)^2 = \frac{4}{5} \times \frac{25}{4} = \frac{q_2}{q_1} \Rightarrow \left|\frac{q_2}{q_1}\right| = 5$$

با توجه به این که در گام اول مشخص کردیم علامت بارها ناهمنام است؛ بنابراین:

$$\frac{q_2}{q_1} = -5$$

در شکل زیر، دو بار الکتریکی نقطه‌ای روی محور x قرار دارند. اگر میدان الکتریکی خالص در نقطه A و B به ترتیب برابر با $\vec{E}_A$ و $\vec{E}_B$ باشد، کدام درست است؟



$$\vec{E}_A = \frac{13}{3} \vec{E}_B \quad (2)$$

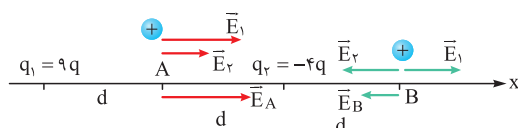
$$\vec{E}_A = \frac{11}{3} \vec{E}_B \quad (1)$$

$$\vec{E}_A = -\frac{13}{3} \vec{E}_B \quad (4)$$

$$\vec{E}_A = -\frac{11}{3} \vec{E}_B \quad (3)$$



Hint میدان‌های الکتریکی حاصل از بارهای q_1 و q_2 را در نقاط A و B به دست آورید؛ سپس برابری آن‌ها را در نقاط A و B محاسبه کنید. با رسم میدان برای E_A و E_B جهت آن‌ها را مشخص کنید تا علامت آن‌ها تعیین شود. حال نسبت دقیق را به دست آورید.



پاسخ خیلی تشریحی ✓

گام اول: ابتدا میدان‌های بار q_1 و q_2 را در نقطه A محاسبه و رسم می‌کنیم تا بتوانیم اندازه و جهت برای آن را محاسبه کنیم:

$$E_1 = \frac{k(9q)}{d^2} = 9 \frac{kq}{d^2}$$

$$E_2 = \frac{k(4q)}{d^2} = 4 \frac{kq}{d^2}$$

$$E_A = E_1 + E_2 = 9 \frac{kq}{d^2} + 4 \frac{kq}{d^2} = 13 \frac{kq}{d^2}$$

گام دوم: حال میدان‌های بار q_1 و q_2 را در نقطه B محاسبه و رسم می‌کنیم تا اندازه و جهت برای آن‌ها را محاسبه کنیم:

$$E_1 = \frac{k(9q)}{9d^2} = \frac{kq}{d^2}$$

$$E_2 = \frac{k(4q)}{d^2} = 4 \frac{kq}{d^2}$$

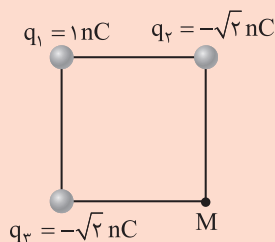
$$E_B = E_2 - E_1 = 4 \frac{kq}{d^2} - \frac{kq}{d^2} = 3 \frac{kq}{d^2}$$

گام سوم: حال با توجه به جهت E_A و E_B و اندازه آن‌ها، نسبت $\frac{E_A}{E_B}$ را به دست می‌آوریم:

$$\frac{E_A}{E_B} = \frac{+13 \frac{kq}{d^2}}{-3 \frac{kq}{d^2}} = -\frac{13}{3} \rightarrow \vec{E}_A = -\frac{13}{3} \vec{E}_B$$

در شکل زیر، سه بار الکتریکی نقطه‌ای در سه رأس مربعی قرار دارند. اندازه بار q_1 چند نانوکولن افزایش یابد تا میدان الکتریکی خالص

در نقطه M برابر صفر شود؟



۴ (۱)

۳ (۲)

۲ (۳)

$2\sqrt{2}$ (۴)



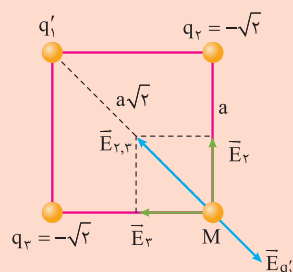
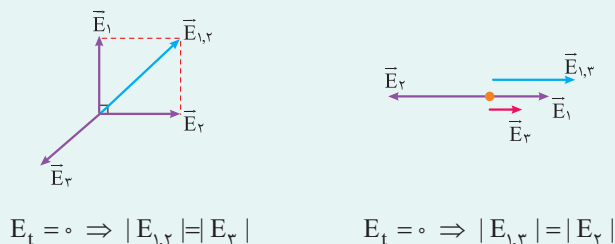
Hint

ابتدا اندازه میدان حاصل از هر یک از بارهای q_2 و q_3 و برآیند آن‌ها را در نقطه M محاسبه و رسم کنید. سپس میدان حاصل از بار جدید را محاسبه کرده و با اندازه برآیند میدان‌های قبلی در نقطه M برابر قرار دهید تا مقدار بار جدید به دست آید و بتوانید اندازه تغییر بار را محاسبه کنید.

درس Box

اگر در یک نقطه، بیشتر از دو بردار داشته باشیم و برآیند آن‌ها صفر باشد، اندازه هر بردار، برابر با اندازه برآیند بردارهای دیگر، ولی در خلاف جهت آن است.

به عنوان مثال فرض کنید در یک نقطه، برآیند سه میدان الکتریکی مطابق شکل‌های زیر صفر باشد؛ در این صورت داریم:



گام اول: ابتدا برآیند میدان‌های الکتریکی بارهای q_2 و q_3 را در نقطه M به دست می‌آوریم:

$$E = \frac{k|q|}{r^2}$$

$$E_2 = E_3 = \frac{k\sqrt{2}}{a^2} \Rightarrow E_{2,3} = \sqrt{E_2^2 + E_3^2} = \frac{2k}{a^2}$$

گام دوم: حال میدان حاصل از بار جدید q_1' را در نقطه M برابر با اندازه برآیند میدان q_2 و q_3 قرار می‌دهیم:

$$|E_{q_1'}| = |E_{2,3}| \Rightarrow \frac{2k}{a^2} = \frac{kq_1'}{2a^2} \Rightarrow q_1' = 4 \text{ nC}$$

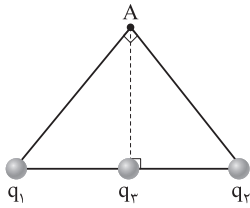
گام سوم: در نهایت، تغییر بار q_1 را به صورت زیر محاسبه می‌کنیم:

$$\Delta q = q_1' - q_1 = 4 - 1 = 3 \text{ nC}$$

پاسخ خیلی تشریحی

۵۹

در شکل زیر، سه بار الکتریکی نقطه‌ای $q_1 = q_2 = \sqrt{2}q$ و $q_3 = q$ ، روی وتر مثلث قائم‌الزاویه متساوی‌الساقینی قرار دارند. اگر علامت بار q_3 تغییر کند، بزرگی میدان الکتریکی خالص در رأس قائم مثلث (A) چند برابر می‌شود؟



(۱) $\frac{\sqrt{2}}{2}$

(۲) $\sqrt{2}$

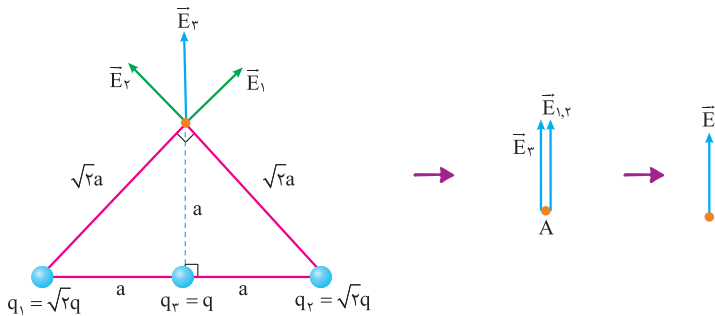
(۳) $2\sqrt{2}$

(۴) $\frac{\sqrt{2}}{4}$

Hint

ابتدا مقادیر میدان‌های الکتریکی را در حالت اول محاسبه و رسم کنید؛ سپس در حالت دوم مجدداً میدان‌ها را روی نقطه A رسم کرده و دوباره برآیند آن را حساب کنید و در آخر نیز نسبت برایندها را به دست آورید.

پاسخ خیلی تشریحی ✓ **گام اول:** ابتدا روی شکل میدان‌های الکتریکی را به همراه برآیند آن‌ها رسم می‌کنیم؛ سپس با محاسبه میدان‌ها، برآیند آن‌ها را با توجه به زاویه‌ای که با هم دارند در حالت اول به دست می‌آوریم:



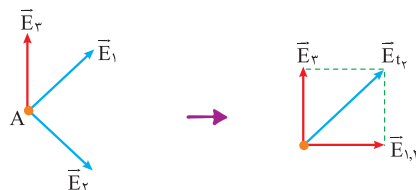
$$E = \frac{k|q|}{r^2} \Rightarrow E_1 = \frac{k\sqrt{2}q}{2a^2} = E_2$$

$$E_{1,2} = \sqrt{E_1^2 + E_2^2} = \sqrt{2} \frac{kq}{2a^2} = \frac{kq}{a^2}$$

$$E_3 = \frac{kq}{a^2}$$

$$E_{t1} = E_{1,2} + E_3 = \frac{kq}{a^2} + \frac{kq}{a^2} = \frac{2kq}{a^2}$$

گام دوم: حال با تغییر علامت بار q_3 ، جهت میدان آن مطابق شکل تغییر می‌کند که در این حالت برآیند جدیدی برای میدان به دست می‌آید. دقت کنید در این حالت تغییری در اندازه میدان‌هایی که قبلاً محاسبه کردیم ایجاد نمی‌شود. بلکه فقط جهت آن‌ها تغییر می‌کند.



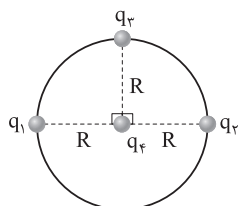
$$E_1 = E_2 = \frac{k\sqrt{2}q}{2a^2} \Rightarrow E_{1,2} = \sqrt{E_1^2 + E_2^2} = \frac{kq}{a^2}, \quad E_3 = \frac{kq}{a^2} \quad E_{t2} = \sqrt{E_{1,2}^2 + E_3^2} = \sqrt{2} \frac{kq}{a^2}$$

گام سوم: نسبت برآیند میدان‌ها در حالت دوم را به حالت اول به دست می‌آوریم:

$$\frac{E_{t2}}{E_{t1}} = \frac{\sqrt{2} \frac{kq}{a^2}}{\frac{2kq}{a^2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

در شکل زیر، بارهای الکتریکی نقطه‌ای $q_1 = -q_2 = q_3 = q$ روی محیط دایره و بار الکتریکی نقطه‌ای $q_4 = \frac{\sqrt{2}}{2}q$ در مرکز دایره

ثابت شده‌اند. بزرگی نیروی الکتریکی خالص وارد بر بار q_4 چند برابر بزرگی نیروی الکتریکی خالص وارد بر بار q_3 است؟



(۱) $\sqrt{5}$

(۲) $\frac{\sqrt{5}}{5}$

(۳) $\sqrt{\frac{2}{5}}$

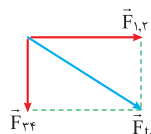
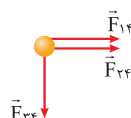
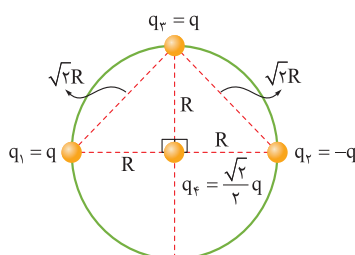
(۴) $\frac{\sqrt{5}}{2}$



Hint

ابتدا اندازه نیروهای وارد بر بار q_4 را از طرف بارهای q_1, q_2, q_3 محاسبه کنید. سپس برآیند نیروهای وارد بر q_4 را محاسبه و رسم کنید (F_{14} و F_{24} هم جهت و F_{34} عمود بر برآیند این‌ها است) سپس برآیند نیروهای وارد بر بار q_3 را محاسبه کنید (F_{13} و F_{23} بر هم عمود و F_{34} بر برآیند آن‌ها عمود است) در آخر نسبت برآیندها را بر اساس خواسته تست به دست آورید.

پاسخ خیلی تشریحی ✓ گام اول:

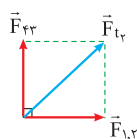
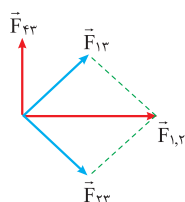


$$F = \frac{k |q_1| |q_2|}{r^2}$$

$$F_{14} = \frac{k \times q \times \frac{\sqrt{2}}{2} q}{R^2} = \frac{\sqrt{2}}{2} \frac{kq^2}{R^2} = F_{24} = F_{34}$$

$$F_{1,2} = F_{14} + F_{24} = \sqrt{2} \frac{kq^2}{R^2}$$

$$F_{t_1} = \sqrt{F_{1,2}^2 + F_{34}^2} = \sqrt{\left(\frac{kq^2}{R^2}\right)^2 + \left(\frac{kq^2}{R^2}\right)^2} = \sqrt{\frac{5}{2}} \frac{kq^2}{R^2}$$



$$F_{13} = F_{23} = \frac{kq^2}{2R^2} \Rightarrow F_{1,2} = \sqrt{F_{13}^2 + F_{23}^2} = \frac{\sqrt{2}}{2} \frac{kq^2}{R^2}$$

$$F_{t_2} = \sqrt{F_{1,2}^2 + F_{34}^2} = \frac{kq^2}{R^2}$$

$$\frac{F_{t_1}}{F_{t_2}} = \frac{\sqrt{\frac{5}{2}} \frac{kq^2}{R^2}}{\frac{kq^2}{R^2}} = \sqrt{\frac{5}{2}}$$

گام دوم:

گام سوم:

- (۱) با گسترش دانش تجربی، شیمی‌دان‌ها دریافتند که همواره گرمادادن به مواد و افزودن آن‌ها به یکدیگر، سبب بهبود خواص می‌شود.
- (۲) پیشرفت و گسترش صنعت خودرو و الکترونیک، به ترتیب مبتنی بر فولاد و مواد رسانا است.
- (۳) در سال ۲۰۱۰ میلادی، میزان استخراج و مصرف سوخت‌های فسیلی در مقایسه با عناصر فلزی و مواد معدنی، بیشتر بوده است.
- (۴) برای تولید ورقه‌های فولادی و تایر دوچرخه، مواد استخراج‌شده از معدن و چاه نفت، باید فراوری شوند.



پاسخ خیلی تشریحی ✓

در فرایند تولید ورقه‌های فولادی و تایر دوچرخه، به ترتیب مواد استخراج‌شده از معدن و مواد استخراج‌شده از چاه نفت، فراوری می‌شوند. بررسی سایر گزینه‌ها:

گزینه (۱): با گسترش دانش تجربی، شیمی‌دان‌ها دریافتند که گرمادادن به مواد و افزودن آن‌ها به یکدیگر سبب تغییر و گاهی (نه همواره!) بهبود خواص می‌شود.

گزینه (۲): پیشرفت و گسترش صنعت خودرو و الکترونیک، به ترتیب مبتنی بر فولاد و مواد نیمه‌رسانا (نه مواد رسانا!) است.

گزینه (۳): در سال‌های مختلف، همواره مقایسه میزان استخراج و مصرف نسبی این مواد به صورت زیر بوده است:

فلزها > سوخت‌های فسیلی > مواد معدنی: مقایسه مقادیر استخراج سالانه از کره زمین

چه تعداد از هالوژن‌های جدول تناوبی، می‌توانند در دمای 473 K با ساده‌ترین گاز دواتمی واکنش دهند؟



200°C

۴ (۱)

۳ (۲)

۲ (۳)

۱ (۴)

۶۲

مشاوره این تست، مشابه تست زیر که در کنکور ریاضی اردیبهشت ۱۴۰۳ طرح شده است؛ می‌باشد:

- در کدام گستره دمای (بایکای $^\circ\text{C}$)، دو هالوژن از جدول تناوبی عناصر، با گاز هیدروژن واکنش می‌دهند؟

۱) $100 - 1000$ ☒

۲) $200 - 50$

۳) $200 - 250$

۴) $200 - 400$

نکته

۱) جدول زیر، شرایط واکنش هالوژن‌های جدول دوره‌ای با گاز هیدروژن را نشان می‌دهد:

نام هالوژن	شرایط واکنش با گاز هیدروژن
فلوئور	حتی در دمای 200°C به سرعت واکنش می‌دهد.
کلر	در دمای اتاق به آرامی واکنش می‌دهد.
برم	در دمای 200°C واکنش می‌دهد.
ید	در دمای بالاتر از 400°C واکنش می‌دهد.

۲) رابطه بین دما در مقیاس سلسیوس و کلوین به صورت روبه‌رو است:

$$T(\text{K}) = \theta(^{\circ}\text{C}) + 273$$

✓ پاسخ خیلی تشریحی F_2 در دمای $200^\circ\text{C} - (73\text{K})$ و بالاتر، Cl_2 در دمای $25^\circ\text{C} (298\text{K})$ و بالاتر، Br_2 در دمای $200^\circ\text{C} (473\text{K})$ و بالاتر

و I_2 در دمای $400^\circ\text{C} (673\text{K})$ و بالاتر، با گاز هیدروژن واکنش می‌دهد؛ بنابراین:

در دمای $473\text{K} (200^\circ\text{C})$ ، سه هالوژن فلوئور (F_2)، کلر (Cl_2) و برم (Br_2) می‌توانند با ساده‌ترین گاز دواتمی که همان گاز هیدروژن (H_2) است، واکنش دهند.

با توجه به شکل‌های زیر که سه عنصر از دوره سوم جدول دوره‌ای را نشان می‌دهند، کدام موارد از مطالب زیر درست است؟



کلر

A سدیم

B فسفر

الف) مولکول عنصر C، در دمای 20°C ، می‌تواند با گاز هیدروژن واکنش دهد.

ب) رسانایی الکتریکی عنصر A، بیشتر از رسانایی الکتریکی سومین عنصر گروه چهاردهم جدول تناوبی است.

پ) طول موج نور ساطع شده از واکنش عنصر X و C، بلندتر از طول موج نور ساطع شده از واکنش عناصر A و C است.

ت) در اتم عنصر B، شمار الکترون‌های موجود در زیرلایه $l=0$ ، برابر شمار الکترون‌های موجود در زیرلایه $l=1$ است.

- (۱) الف - ب
(۲) الف - پ
(۳) ب - ت
(۴) پ - ت
- زیرلایه s
زیرلایه p

درس Box

عنصرهای دوره سوم از سدیم (Na) و منیزیم (Mg) که متعلق به دسته S هستند، شروع می‌شود و با عنصرهای دسته p ادامه می‌یابد. این دوره شامل ۸ عنصر با عددهای اتمی ۱۱ تا ۱۸ است.

فلز		شبه‌فلز		نافلز			
۱۱ Na سدیم	۱۲ Mg منیزیم	۱۳ Al آلومینیم	۱۴ Si سیلیسیم	۱۵ P فسفر	۱۶ S گوگرد	۱۷ Cl کلر	۱۸ Ar آرگون

- ۸ عنصر وجود دارد.
- ۳ فلز، ۱ شبه‌فلز و ۴ نافلز وجود دارد.
- ۴ عنصر سطح صیقلی و برق دارند.
- در دما و فشار اتاق، ۶ عنصر به حالت جامد و ۲ عنصر به حالت گازند.
- ۶ عنصر می‌توانند یون تک‌اتمی تشکیل دهند.
- زیرلایه‌های $3s$ و $3p$ در عناصر در حال پرشدن هستند.

پاسخ خیلی تشریحی

عبارت‌های «الف» و «ب» درست هستند.

با توجه به شکل‌های صفحه ۸ کتاب درسی که عناصر دوره سوم جدول تناوبی را نشان می‌دهند، عنصر A سدیم (Na)، عنصر B،

فسفر (P) و عنصر C، کلر (Cl) است.

بررسی عبارت‌ها:

الف) گاز کلر (Cl_2) مولکولی دواتمی از عنصر کلر (Cl) است که در دمای اتاق یا همان دمای 25°C و دماهای بالاتر از این دما با گاز هیدروژن (H_2) واکنش می‌دهد.

ب) سومین عنصر گروه چهاردهم جدول تناوبی، ژرمانیم (Ge) است که یک شبه‌فلز می‌باشد و رسانایی الکتریکی کمی دارد؛ بنابراین رسانایی الکتریکی فلز سدیم بیشتر از رسانایی الکتریکی شبه‌فلز ژرمانیم است.

پ) عنصر X همان پتاسیم است که واکنش‌پذیری بیشتری نسبت به سدیم (عنصر A) دارد. نور حاصل از واکنش پتاسیم و کلر، بنفش و نور حاصل از واکنش سدیم و کلر، زرد است: بنفش > نیلی > آبی > سبز > زرد > نارنجی > سرخ: طول موج

ت) در عنصر فسفر (^{15}P)، شمار الکترون‌های موجود در زیرلایه $l=0$ یا همان زیرلایه s، تقریباً 67% برابر شمار الکترون‌های موجود در زیرلایه $l=1$ یا همان زیرلایه p است:

$$^{15}\text{P} = 1s^2 \underline{2s^2} \underline{2p^6} \underline{3s^2} \underline{3p^3} \Rightarrow \frac{\text{شمار الکترون‌های موجود در زیرلایه s}}{\text{شمار الکترون‌های موجود در زیرلایه p}} = \frac{2+2+2}{6+3} = \frac{6}{9} = \frac{2}{3} \approx 67\%$$

چند مورد از مطالب زیر دربارهٔ جدول تناوبی، درست است؟

- عناصرها در جدول دوره‌ای براساس بنیادی‌ترین ویژگی آن‌ها یعنی جرم اتمی چیده شده‌اند.
- حدود ۴۰ درصد عناصر موجود در این جدول متعلق به دستهٔ p هستند.
- در همهٔ گروه‌های آن، شمار الکترون‌های ظرفیت عناصر با یکدیگر برابر هستند.
- شمار عناصرهای موجود در دورهٔ سوم آن، ۱/۶ برابر شمار عناصرهای موجود در گروه چهاردهم آن است.

۳ (۴)

۲ (۳)

۱ (۲)

۱ (صفر)

پاسخ خیلی تشریحی

همهٔ عبارت‌های داده‌شده نادرست هستند.

بررسی عبارت‌ها:

- عناصرها در جدول دوره‌ای براساس بنیادی‌ترین ویژگی آن‌ها یعنی عدد اتمی (Z) (نه جرم اتمی!) چیده شده‌اند.
- ۱۱۸ عنصر در جدول تناوبی وجود دارد که در این جدول، عناصر دستهٔ p در ۶ گروه و ۶ دوره حضور دارند و شامل ۳۶ عنصر هستند؛ پس درصد این عناصر در جدول تناوبی، کمی بیشتر از ۳۰ درصد است:

$$\text{درصد فراوانی عناصر دستهٔ p جدول تناوبی} = \frac{\text{عناصر دستهٔ p جدول}}{\text{کل عناصر موجود در جدول}} \times 100 = \frac{36}{118} \times 100 \approx 30/5\%$$

- در همهٔ گروه‌های جدول تناوبی به‌جز گروه گازهای نجیب، شمار الکترون‌های ظرفیت عناصر با یکدیگر برابر هستند؛ زیرا شمار الکترون‌های لایهٔ ظرفیت عنصر هلیم (${}^2\text{He}$) در گروه ۱۸ برابر ۲ ولی شمار الکترون‌های لایهٔ ظرفیت بقیهٔ عناصر این گروه، برابر ۸ می‌باشد.
- شمار عناصرهای موجود در دورهٔ سوم جدول تناوبی (۸)، تقریباً ۱/۳ برابر شمار عناصرهای موجود در گروه چهاردهم این جدول (۶) است.

عنصر X در دوره پنجم قرار دارد و دارای دو الکترون ظرفیتی است. اگر شعاع اتمی این عنصر برابر ۲۱۵ پیکومتر باشد، شعاع اتمی

گروه ۲

عنصرهای Y و Z، به ترتیب از راست به چپ، کدام اعداد برحسب پیکومتر می توانند باشند؟

۱۹۷، ۲۴۸ (۲)

۱۹۷، ۱۸۰ (۱)

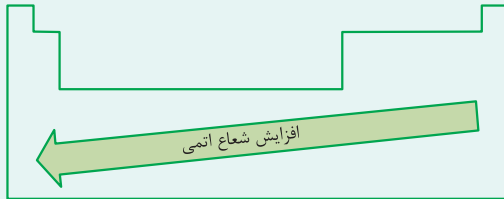
۲۳۱، ۲۴۸ (۴)

۲۳۱، ۱۸۰ (۳)

درک Box

روند تغییر شعاع اتمی در جدول دوره‌ای

در یک دوره از چپ به راست، شعاع اتمی عناصر کاهش و در یک گروه از بالا به پایین، شعاع اتمی عناصر افزایش می‌یابد؛ بنابراین هر چه عنصری در جدول دوره‌ای، در سمت چپ‌تر و پایین‌تر باشد، شعاع آن بیشتر است و بالعکس!



پاسخ خیلی تشریحی

عنصری با دو الکترون ظرفیتی در دوره پنجم، در گروه دوم جدول جای دارد و عدد اتمی آن برابر ۳۸ است.

عنصر Y، یک عنصر قبل از عنصر X است؛ پس با عنصر مورد نظر هم‌دوره می‌باشد ولی در گروه اول جدول تناوبی قرار دارد. از طرفی، در یک دوره جدول از چپ به راست با افزایش شماره گروه، شعاع اتمی کاهش می‌یابد؛ بنابراین شعاع اتمی Y بیشتر از شعاع اتمی X است و شعاع اتمی آن، بیشتر از عدد ۲۱۵ pm می‌باشد؛ در نتیجه می‌توان گفت که شعاع اتمی Y، ۲۴۸ pm است و گزینه‌های (۱) و (۳) رد می‌شوند.

عنصر Z، در دوره چهارم و گروه دوم جدول تناوبی قرار دارد که با عنصر X هم‌گروه است. از طرفی، در یک گروه جدول از بالا به پایین با افزایش شماره دوره، شعاع اتمی افزایش می‌یابد؛ بنابراین شعاع اتمی Z، کمتر از شعاع اتمی X است و می‌تواند ۱۹۷ pm باشد و گزینه (۴) نیز رد می‌شود؛ پس گزینه (۲) جواب درست است.

$$\text{شعاع اتمی: } {}_{37}\text{Y} > {}_{38}\text{X} > {}_{20}\text{Z}$$

$\downarrow$
۲۴۸

$\downarrow$
۲۱۵

$\downarrow$
۱۹۷

کدام موارد از مطالب زیر، نادرست است؟

۶۶

- (الف) ماده اولیه برای ساخت لیوان شیشه‌ای، قاشق چای‌خوری و ظرف غذا، به ترتیب شن و ماسه، فولاد زنگ‌نزن و خاک چینی است.
- (ب) انسان‌های پیشین، قبل از استخراج فلزها از برخی مواد طبیعی مانند چوب، سنگ، خاک، سفال، پشم و پوست بهره می‌بردند.
- (پ) علم شیمی را می‌توان مطالعه هدفدار رفتار عناصرها و مواد دانست که تنها منجر به یافتن روندها و الگوهای رفتار شیمیایی آن‌ها می‌شود.
- (ت) کره زمین، انباری از ذخایر ارزشمند است که به طور یکسانی توزیع نشده و موجب پیدایش تجارت جهانی شده‌اند.

(۲) الف - ت

(۱) الف - پ

(۴) ب - پ

(۳) ب - ت



عبارت‌های «ب» و «پ» نادرست هستند.

پاسخ خیلی تشریحی ✓

بررسی عبارت‌های نادرست:

(ب) انسان‌های پیشین فقط از برخی مواد طبیعی مانند چوب، سنگ، خاک، پشم و پوست بهره می‌بردند اما با گذشت زمان توانستند موادی مانند سفال را تولید و برخی فلزها را نیز استخراج کنند. باید به این نکته توجه کرد که سفال ماده‌ای ساختگی است (نه ماده‌ای طبیعی!).

(پ) علم شیمی را می‌توان مطالعه هدفدار، منظم و هوشمندانه رفتار عناصرها و مواد برای یافتن روندها و الگوهای رفتار فیزیکی و شیمیایی آن‌ها دانست.

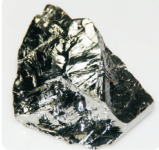
در باره پنج عنصر ابتدایی گروه چهاردهم جدول تناوبی، کدام مطلب درست است؟

- (۱) ۶۰ درصد این عناصر، سطح صیقلی و رسانایی گرمایی خوبی دارند. ۸۲ Pb
- (۲) تفاوت عدد اتمی دومین شبه فلز با دومین فلز این گروه، برابر با عدد اتمی پنجمین گاز نجیب جدول تناوبی است. ۵۴ Xe
- (۳) همه عناصری که نماد شیمیایی آن‌ها دو حرفی هستند؛ در واکنش با دیگر اتم‌ها، الکترون به اشتراک می‌گذارند. ۳۲ Ge
- (۴) عنصر اول، از نظر شکنندگی رفتاری مشابه با یکدیگر دارند.



در جدول زیر، خواص و ویژگی‌های پنج عنصر ابتدایی گروه چهاردهم جدول تناوبی را مشاهده می‌کنید:

درس Box

نام و نماد عنصر	شکل ظاهری	خواص
کربن (C)		- در دوره دوم جدول تناوبی قرار دارد. - سطح این عنصر، تیره است. - نافلز است. - رسانایی الکتریکی دارد، اما رسانایی گرمایی ندارد. - در اثر ضربه خرد می‌شود. - در واکنش با دیگر اتم‌ها فقط می‌تواند الکترون به اشتراک بگذارد.
سیلیسیم (Si)		- در دوره سوم جدول تناوبی قرار دارد. - سطح صیقلی (براق) دارد. - شبه فلز است. - رسانایی الکتریکی کمی داشته، اما رسانایی گرمایی نسبتاً بالایی دارد. - شکننده است و در اثر ضربه خرد می‌شود. - در واکنش با دیگر اتم‌ها الکترون به اشتراک می‌گذارد.
ژرمانیم (Ge)		- در دوره چهارم جدول تناوبی قرار دارد. - سطح صیقلی (براق) دارد. - شبه فلز است. - رسانایی الکتریکی کمی داشته، اما رسانایی گرمایی نسبتاً بالایی دارد. - شکننده است و در اثر ضربه خرد می‌شود. - در واکنش با دیگر اتم‌ها الکترون به اشتراک می‌گذارد.
قلع (Sn)		- در دوره پنجم جدول تناوبی قرار دارد. - سطح صیقلی دارد. - فلز است. - رسانایی الکتریکی و گرمایی بالایی دارد. - جامدی شکل‌پذیر یا چکش‌خوار است. - در واکنش با دیگر اتم‌ها الکترون از دست می‌دهد.
سرب (Pb)		- در دوره ششم جدول تناوبی قرار دارد. - سطح صیقلی دارد. - فلز است. - رسانایی الکتریکی و گرمایی بالایی دارد. - جامدی شکل‌پذیر یا چکش‌خوار است. - در واکنش با دیگر اتم‌ها الکترون از دست می‌دهد.

پاسخ خیلی تشریحی ✓

پنج عنصر ابتدایی گروه چهاردهم جدول تناوبی به ترتیب، کربن (C)، سیلیسیم (Si)، ژرمانیم (Ge)، قلع (Sn) و سرب (Pb) است.

۳ عنصر اول یعنی عناصر کربن (C)، سیلیسیم (Si) و ژرمانیم (Ge)، شکننده هستند و در اثر ضربه خرد می‌شوند.

بررسی سایر گزینه‌ها:

گزینه (۱): چهار عنصر سیلیسیم ($_{14}\text{Si}$)، ژرمانیم ($_{32}\text{Ge}$)، قلع ($_{50}\text{Sn}$) و سرب ($_{82}\text{Pb}$) سطحی صیقلی و رسانایی گرمایی خوبی دارند؛ بنابراین می‌توان گفت که $80 = 100 \times \frac{4}{5}$ درصد پنج عنصر ابتدایی گروه چهاردهم جدول تناوبی، سطحی صیقلی و رسانایی گرمایی خوبی دارند.

گزینه (۲): دومین شبه‌فلز گروه چهاردهم جدول تناوبی، ژرمانیم (Ge) با عدد اتمی ۳۲ و دومین فلز این گروه، سرب (Pb) با عدد اتمی ۸۲ است که تفاوت عدد اتمی این دو عنصر برابر $82 - 32 = 50$ می‌باشد. در صورتی که پنجمین گاز نجیب جدول تناوبی، زنون (Xe) با عدد اتمی ۵۴ است.

گزینه (۳): چهار عنصر سیلیسیم ($_{14}\text{Si}$)، ژرمانیم ($_{32}\text{Ge}$)، قلع ($_{50}\text{Sn}$) و سرب ($_{82}\text{Pb}$) نماد شیمیایی دوحرفی دارند که در میان آن‌ها، دو عنصر سیلیسیم ($_{14}\text{Si}$) و ژرمانیم ($_{32}\text{Ge}$) شبه‌فلز هستند و در واکنش با دیگر اتم‌ها، الکترون به اشتراک می‌گذارند ولی دو عنصر قلع ($_{50}\text{Sn}$) و سرب ($_{82}\text{Pb}$)، فلز هستند و در واکنش با دیگر اتم‌ها، الکترون از دست می‌دهند.

کدام مطلب نادرست است؟

۶۸

(۱) در یک گروه برخلاف یک دوره جدول تناوبی، عدد اتمی فلزها بیشتر از عدد اتمی نافلزهاست.

(۲) شیب تغییرات شعاع اتمی سه فلز دوره سوم جدول تناوبی از شیب تغییرات شعاع اتمی نافلزهای آن، بیشتر است.

(۳) فلزها برخلاف نافلزها و شبه فلزها، می توانند به هر چهار دسته جدول تناوبی تعلق داشته باشند.

(۴) فلزهای دسته S برخلاف همه فلزهای دسته p، به هنگام تشکیل یون به آرایش گاز نجیب می رسند.



همه فلزهای دسته S و یکی از فلزهای دسته p یعنی آلومینیم (Al) به هنگام تشکیل یون تک اتمی، به آرایش گاز نجیب می رسند. سایر فلزهای دسته p، با تشکیل یون با آرایش گاز نجیب نمی رسند.

پاسخ خیلی تشریحی ✓



همگی با تشکیل کاتیون به آرایش گاز نجیب می رسند. (لیتیم به آرایش دوتایی هلیوم و بقیه به آرایش هشت تایی می رسند).

فلزهای دسته S (قلیایی و قلیایی خاکی به جز بریلیم)

اغلب آن ها با تشکیل کاتیون به آرایش گاز نجیب نمی رسند.
برخی (تعداد کمی) از آن ها (مانند عنصرهای گروه ۳) با تشکیل کاتیون به آرایش گاز نجیب می رسند.

فلزهای دسته d (واسطه)

فلز آلومینیم با تشکیل کاتیون به آرایش گاز نجیب می رسد، اما بقیه آن ها (مانند Ga و Sn) با تشکیل کاتیون به آرایش گاز نجیب نمی رسند.

فلزهای دسته p

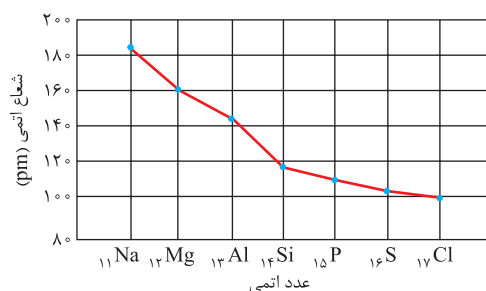
توجه: آرایش الکترونی همه آنیون های پایدار مشابه با آرایش گاز نجیب است.

بررسی سایر گزینه ها:

گزینه (۱): فلزها، پایین و سمت چپ جدول تناوبی را اشغال کرده اند و نافلزها در بالا و سمت راست حضور دارند. در میان این دو دسته، عناصر شبه فلز با خواص مشترک با این دو گروه دیده می شوند. در یک گروه از جدول تناوبی از بالا به پایین و با افزایش عدد اتمی، خصلت فلزی افزایش و خصلت نافلزی کاهش می یابد؛ پس در یک گروه جدول، عدد اتمی فلزها، بیشتر از عدد اتمی نافلزها است. در حالی که در یک دوره جدول تناوبی از چپ به راست و با افزایش عدد اتمی، خصلت فلزی کاهش و خصلت نافلزی افزایش می یابد؛ بنابراین در یک دوره جدول، عدد اتمی نافلزها، بیشتر از عدد اتمی فلزها است.

نافلز	دوره	
شبه فلز	فلز	شبه فلز
فلز		

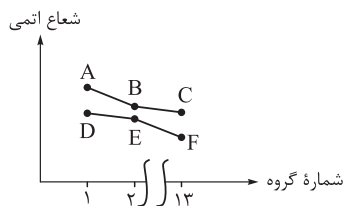
گزینه (۲): با توجه به نمودار زیر؛ در دوره سوم جدول تناوبی، شیب تغییرات شعاع اتمی سه فلز سدیم (Na)، منیزیم (Mg) و آلومینیم (Al)، بیشتر از شیب تغییرات شعاع اتمی سه نافلز فسفر (P)، گوگرد (S) و کلر (Cl) است.



گزینه (۳): همه عناصر دسته S به جز عناصر هیدروژن (H) و هلیوم (He)، برخی عناصر دسته p مانند قلع (Sn) و سرب (Pb)، همه عناصر دسته d و همه عناصر دسته f، فلز هستند؛ پس فلزها به هر چهار دسته s، p، d و f جدول تناوبی تعلق دارند. در صورتی که دو عنصر از دسته S که همان عناصر هیدروژن (H) و هلیوم (He) هستند و بعضی از عناصر دسته p، نافلز و تنها برخی عناصر دسته p، شبه فلز می باشند.

با توجه به نمودار زیر که تغییرات شعاع اتمی سه عنصر نخست دوره‌های دوم و سوم جدول تناوبی را نشان می‌دهد، کدام موارد از مطالب

داده‌شده نادرست است؟



- (الف) عنصر F در دوره دوم قرار دارد و عدد اتمی آن برابر ۵ است.
 (ب) واکنش پذیری عنصر B از واکنش پذیری عنصرهای A و E، بیشتر است.
 (پ) نسبت شمار آنیون به شمار کاتیون در اکسید عنصر C، سه برابر نسبت شمار کاتیون به شمار آنیون در اکسید عنصر D است.
 (ت) مجموع اعداد کوانتومی اصلی و فرعی الکترون‌های عنصر E، با مجموع اعداد کوانتومی اصلی و فرعی الکترون‌های ظرفیت عنصر B برابر است.

(۴) پ - ت

(۳) ب - پ

(۲) ب - ت

(۱) الف - ب



عبارت‌های «ب» و «پ» نادرست هستند.

می‌دانیم که در یک گروه جدول از بالا به پایین و با افزایش عدد اتمی عنصرها، شعاع اتمی بیشتر می‌شود؛ بنابراین نمودار بالایی مربوط به عنصرهای دوره سوم جدول تناوبی و نمودار پایینی مربوط به عنصرهای دوره دوم جدول است؛ پس عناصر مشخص شده در نمودار به صورت زیر می‌باشد:

	گروه ۱۳ جدول	گروه ۲ جدول	گروه ۱ جدول
دوره ۳ سوم جدول تناوبی	$C = {}_{13}\text{Al}$	$B = {}_{12}\text{Mg}$	$A = {}_{11}\text{Na}$
دوره ۲ دوم جدول تناوبی	$F = {}_5\text{B}$	$E = {}_4\text{Be}$	$D = {}_3\text{Li}$

بررسی عبارت‌ها:

(الف) عنصر F همان بور (${}_5\text{B}$) از دوره دوم و گروه ۱۳ جدول است.

(ب) در یک دوره جدول تناوبی از چپ به راست و با افزایش عدد اتمی، خصلت فلزی کاهش می‌یابد؛ بنابراین واکنش پذیری منیزیم (${}_{12}\text{Mg}$)، کمتر از واکنش پذیری سدیم (${}_{11}\text{Na}$) است. از طرفی در یک گروه جدول تناوبی از بالا به پایین و با افزایش عدد اتمی، خصلت فلزی افزایش می‌یابد؛ بنابراین واکنش پذیری منیزیم (${}_{12}\text{Mg}$)، بیشتر از واکنش پذیری بریلیم (${}_4\text{Be}$) می‌باشد.

(پ) نسبت شمار آنیون به شمار کاتیون در اکسید آلومینیم با فرمول شیمیایی Al_2O_3 ، $\frac{3}{4}$ یا 75% برابر نسبت شمار کاتیون به شمار آنیون در اکسید لیتیم با فرمول شیمیایی Li_2O است:

$$\left. \begin{array}{l} \text{I) } \text{Al}^{3+}, \text{O}^{2-} \Rightarrow \text{Al}_2\text{O}_3 : \frac{\text{شمار آنیون}}{\text{شمار کاتیون}} = \frac{3}{2} \\ \text{II) } \text{Li}^+, \text{O}^{2-} \Rightarrow \text{Li}_2\text{O} : \frac{\text{شمار کاتیون}}{\text{شمار آنیون}} = \frac{2}{1} = 2 \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{\text{I}}{\text{II}} = \frac{\frac{3}{2}}{2} = \frac{3}{4} = 75\%$$

(ت) مجموع اعداد کوانتومی اصلی و فرعی ($n+1$) در الکترون‌های بریلیم (${}_4\text{Be}$)، برابر مجموع اعداد کوانتومی اصلی و فرعی ($n+1$) در الکترون‌های ظرفیت منیزیم (${}_{12}\text{Mg}$) است:

$${}_4\text{Be} : \underbrace{1s^2}_{n+1=1} \underbrace{2s^2}_{n+1=2} \Rightarrow \text{مجموع اعداد کوانتومی اصلی و فرعی الکترون‌ها} = (2 \times 1) + (2 \times 2) = 2 + 4 = 6$$

$${}_{12}\text{Mg} : \underbrace{1s^2}_{n+1=1} \underbrace{2s^2}_{n+1=2} \underbrace{2p^6}_{n+1=3} \Rightarrow \text{مجموع اعداد کوانتومی اصلی و فرعی الکترون‌های ظرفیت} = 2 \times 3 = 6$$

در سؤال‌هایی که گزینه‌های آن به فرمت «الف و ب» و ... هستند، نیازی نیست همه عبارت‌ها را بررسی کنید. در این سؤال‌ها، معمولاً با بررسی دو عبارت، می‌توان به جواب سؤال رسید.

تیزبازی

۷۰ با توجه به جدول زیر، درستی یا نادرستی کدام گزینه با دیگر گزینه‌ها متفاوت است؟

	گروه ۱۶	گروه ۱۵	گروه ۱
دوره دوم	L		
دوره سوم	A	M	G
دوره چهارم			R

(۱) عنصر A، جامدی زردرنگ است که در اثر ضربه خرد می‌شود.

(۲) عنصر G، یک فلز قلیایی محسوب می‌شود.

(۳) عنصر M، دارای دو دگرشکل به رنگ‌های سفید و قرمز است که به دلیل واکنش پذیری زیاد، آن‌ها را زیر آب نگهداری می‌کنند.

(۴) عنصرهای R و L در واکنش با یکدیگر، ترکیب یونی تشکیل می‌دهند.



پاسخ خیلی تشریحی ✓ گزینه (۳) برخلاف سایر گزینه‌ها، نادرست است.

عناصر L، G، M، A و R در جدول تناوبی داده شده به ترتیب اکسیژن (O)، سدیم (Na)، فسفر (P)، گوگرد (S) و پتاسیم (K) هستند.

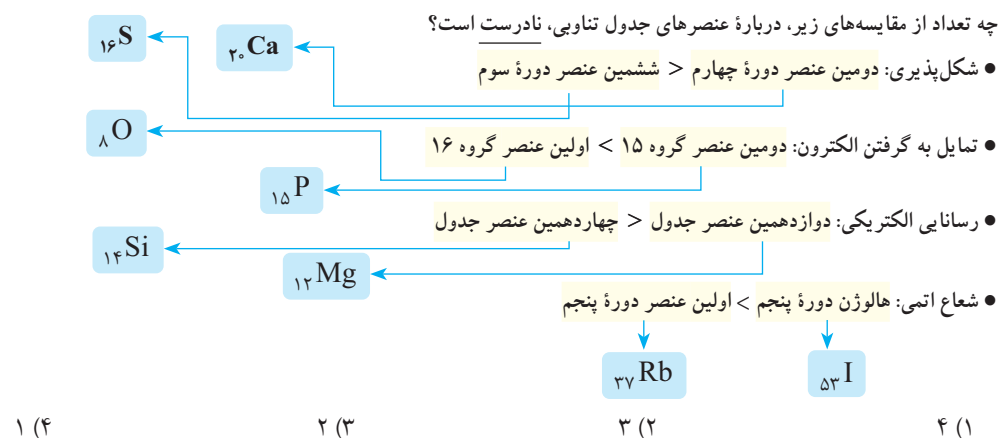
فسفر (P) دارای دو دگرشکل مختلف به رنگ‌های قرمز و سفید است که تنها فسفر سفید را داخل آب نگهداری می‌کنند؛ زیرا فسفر سفید به شدت آتش‌زا است و به طور خودبه‌خود در تماس با هوا آتش می‌گیرد؛ بنابراین آن را داخل آب نگهداری می‌کنند تا در تماس با هوا نباشد.

بررسی سایر گزینه‌ها:

گزینه (۱): گوگرد (S) نافلز و جامدی زردرنگ است که قابلیت چکش‌خواری ندارد و در اثر ضربه خرد می‌شود.

گزینه (۲): سدیم (Na) در گروه اول قرار دارد و جزء فلزهای قلیایی است.

گزینه (۴): عنصرهای R و L به ترتیب فلز و نافلز هستند و در واکنش با یکدیگر، به ترتیب با از دست دادن و گرفتن الکترون، به کاتیون و آنیون تبدیل شده و ترکیب یونی تشکیل می‌دهند.



درس‌Box

روندهای تناوبی در جدول دوره‌ای:

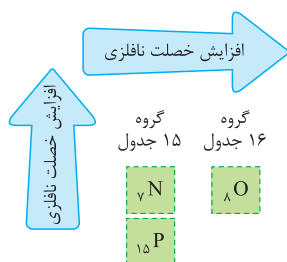
- ← شعاع اتمی عناصرها کاهش می‌یابد.
- ← در یک دوره از چپ به راست
- ← خصلت فلزی و واکنش‌پذیری فلزها کاهش می‌یابد.
- ← خصلت نافلزی و واکنش‌پذیری نافلزها افزایش می‌یابد.
- ← شعاع اتمی عناصرها افزایش می‌یابد.
- ← در یک گروه از بالا به پایین
- ← خصلت فلزی و واکنش‌پذیری فلزها افزایش می‌یابد.
- ← خصلت نافلزی و واکنش‌پذیری نافلزها کاهش می‌یابد.

پاسخ خیلی تشریحی ✓ همهٔ مقایسه‌های داده‌شده نادرست هستند.

بررسی موارد:

● دومین عنصر دورهٔ چهارم جدول تناوبی، کلسیم (Ca) است که نوعی فلز می‌باشد و خاصیت شکل‌پذیری دارد. در صورتی که ششمین عنصر دورهٔ سوم جدول تناوبی، گوگرد (S) است که نوعی نافلز می‌باشد و خاصیت شکل‌پذیری ندارد؛ بنابراین شکل‌پذیری کلسیم (Ca)، بیشتر از شکل‌پذیری گوگرد (S) است.

● دومین عنصر گروه ۱۵ جدول دوره‌ای، فسفر (P) و اولین عنصر گروه ۱۶ جدول دوره‌ای، اکسیژن (O) است. از طرفی، در یک دورهٔ جدول تناوبی از چپ به راست و با افزایش عدد اتمی، خصلت نافلزی افزایش و در یک گروه جدول تناوبی از بالا به پایین و با افزایش عدد اتمی، خصلت نافلزی کاهش می‌یابد؛ بنابراین خصلت نافلزی و تمایل به گرفتن الکترون در اکسیژن (O) نسبت به فسفر (P)، بیشتر است:



$$\Rightarrow \left. \begin{array}{l} \text{تمایل به گرفتن الکترون: } \text{N} < \text{O} \\ \text{تمایل به گرفتن الکترون: } \text{P} < \text{N} \end{array} \right\} \Rightarrow \text{تمایل به گرفتن الکترون: } \text{P} < \text{O}$$

● دوازدهمین عنصر جدول تناوبی، فلز منیزیم (Mg) است که رسانایی گرمایی بالایی دارد. چهاردهمین عنصر جدول، شبه‌فلز سیلیسیم (Si) است که رسانایی الکتریکی کمی دارد؛ بنابراین رسانایی الکتریکی منیزیم (Mg) بیشتر از سیلیسیم (Si) است.

● در یک دورهٔ جدول تناوبی از چپ به راست و با افزایش عدد اتمی، شعاع اتمی کاهش می‌یابد؛ بنابراین شعاع اتمی اولین عنصر دورهٔ پنجم، قطعاً از شعاع اتمی هالوژن این دوره، بزرگ‌تر است.

کدام یک از ویژگی‌های زیر را نمی‌توان به فلز طلا نسبت داد؟

- (۱) رسانایی الکتریکی بالا و حفظ این رسانایی در شرایط دمایی گوناگون
- (۲) واکنش‌ندادن با گازهای موجود در هواکره و مواد موجود در بدن انسان
- (۳) توانایی جذب زیاد پرتوهای خورشیدی
- (۴) تولید پسماند بسیار زیاد در هنگام استخراج آن از معدن



درس‌Box

طلا (Au ۷۹) فلزی ارزشمند و گرانبها از دسته d جدول دوره‌ای است که علاوه بر ویژگی‌های مشترک فلزها، ویژگی‌های منحصر به فردی نیز دارد.

ویژگی‌های طلا	کاربرد
چکش‌خواری بالا و نرم‌بودن	ساخت برگه‌ها و رشته‌سیم‌های بسیار نازک (نخ طلا)
رسانایی الکتریکی بالا و حفظ این رسانایی در شرایط دمایی گوناگون	در وسایل الکتریکی مثل لپ‌تاپ و قطعه‌الکترونیکی مربوط به چرخ ویلچر
واکنش‌ندادن با گازهای موجود در هواکره و مواد موجود در بدن انسان	ساخت جواهرات و استفاده در دندان‌پزشکی
توانایی بازتاب زیاد پرتوهای خورشیدی	کلاه فضانوردی

پاسخ خیلی تشریحی ✓

فلز طلا به دلیل پایداری شیمیایی بالا و واکنش‌پذیری بسیار کم، در طبیعت به شکل فلزی و عنصری (به حالت آزاد) یافت می‌شود؛ اما مقدار طلا در معادن آن بسیار کم است، به طوری که برای استخراج مقدار کمی از آن باید از حجم انبوهی خاک معدن استفاده کرد؛ به همین دلیل استخراج طلا با تولید پسماند زیادی همراه است و آثار زیان‌بار زیست‌محیطی را به دنبال دارد. فلز طلا توانایی بازتاب (نه جذب!) زیاد پرتوهای خورشیدی را دارد. از دیگر ویژگی‌های فلز طلا می‌توان به رسانایی الکتریکی بالا و حفظ آن در شرایط دمایی گوناگون، واکنش‌ندادن با گازهای موجود در هواکره و مواد موجود در بدن انسان و تولید پسماند بسیار زیاد در هنگام استخراج آن از معدن، اشاره کرد.

در کدام گزینه، اعداد اتمی داده شده مربوط به دو عنصر واسطه و یک عنصر اصلی است؟

دستۀ S و p

دستہ d

(۱) ۳۸، ۴۸ و ۵۳

(۲) ۲۳، ۴۷ و ۷۳

(۳) ۳۱، ۴۴ و ۸۰

14, 55, 17 (4

۷۳



پاسخ خیلی تشریحی ✓ عناصر واسطه در گروه‌های ۳ تا ۱۲ جدول تناوبی قرار دارند که با توجه به اعداد اتمی گازهای نجیب جدول، عدد اتمی عناصر واسطه در دوره‌های چهارم تا هفتم به صورت زیر است:

گازهای نجیب

																		^۲ He
																		^{۱۰} Ne
																		^{۱۸} Ar
دوره چهارم			۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱۰	۱۱	۱۲						^{۳۶} Kr
			۲۱	۲۲	۲۳	۲۴	۲۵	۲۶	۲۷	۲۸	۲۹	۳۰						^{۵۴} Xe
دوره پنجم			۳۹	۴۰	۴۱	۴۲	۴۳	۴۴	۴۵	۴۶	۴۷	۴۸						^{۸۶} Rn
دوره ششم			۷۱	۷۲	۷۳	۷۴	۷۵	۷۶	۷۷	۷۸	۷۹	۸۰						^{۱۱۸} Og
دوره هفتم			۱۰۳	۱۰۴	۱۰۵	۱۰۶	۱۰۷	۱۰۸	۱۰۹	۱۱۰	۱۱۱	۱۱۲						
	عناصر اصلی		عناصر واسطه											عناصر اصلی				

البته لازم به ذکر است که عناصر با اعداد اتمی ۵۷ تا ۷۰ و ۸۹ تا ۱۰۲ در دو ردیف پایین جدول تناوبی قرار دارند.

بررسی گزینه‌ها:

گزینه (۲):

- ۲۳ ← عنصر واسطه
- ۴۷ ← عنصر واسطه
- ۷۳ ← عنصر واسطه

گزینه (۱):

- ۳۸ ← عنصر اصلی
- ۴۸ ← عنصر واسطه
- ۵۳ ← عنصر اصلی

گزینه (۴):

۱۷ ← عنصر اصلی
۵۵ ← عنصر اصلی
۸۴ ← عنصر اصلی

گزینه (۳):

- ۳۱ ← عنصر اصلی
- ۴۴ ← عنصر واسطه
- ۸۰ ← عنصر واسطه

۷۴

کدام موارد از مطالب زیر، نادرست است؟

- (الف) همه فلزهای واسطه جدول تناوبی، سخت و چکش خوارند.
 (ب) زیرلایه p در لایه آخر همه فلزهای واسطه جدول تناوبی، خالی است.
 (پ) بیشترین شمار الکترونهای ظرفیتی در بین عناصر یک دوره جدول تناوبی، مربوط به گاز نجیب است.
 (ت) اتم هیچ یک از فلزهای واسطه جدول تناوبی، در لایه سوم خود ۱۲ الکترون ندارد.

یعنی $3s^2 3p^6 3d^4$ نداریم!

(۲) الف - ت

(۱) ب - ت

(۴) الف - پ

(۳) ب - پ



پاسخ خیلی تشریحی ✓

عبارت‌های «الف» و «پ» نادرست هستند.

بررسی عبارت‌ها:

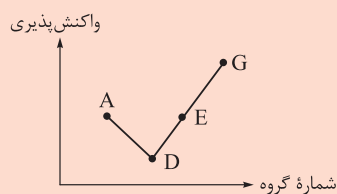
(الف) مثلاً طلا، فلزی نرم است.

(ب) آرایش الکترونی فلزهای واسطه به $(n-1)d^ns$ ختم می‌شود؛ بنابراین زیرلایه p لایه آخر آن‌ها (np) خالی است و الکترونی وارد آن نمی‌شود.

(پ) شمار الکترونهای ظرفیتی در گازهای نجیب جدول تناوبی به جز عنصر هلیم (${}^2\text{He}$)، ۸ است؛ در صورتی که در گروه‌های ۹ تا ۱۲ مربوط به عناصر واسطه در جدول، شمار الکترونهای ظرفیتی بیشتر از ۸ می‌باشد؛ بنابراین لزوماً بیشترین شمار الکترونهای ظرفیتی در بین عناصر یک دوره جدول تناوبی مربوط به گاز نجیب نیست.

(ت) برای این که یک اتم عنصر واسطه جدول تناوبی در لایه سوم خود ۱۲ الکترون داشته باشد، باید در آرایش الکترونی لایه سوم خود زیرلایه‌های $3s^2 3p^6 3d^4$ را دارا باشد؛ در صورتی که با توجه به داده‌های طیف‌سنجی، زیرلایه $3d^4$ وجود ندارد و به زیرلایه $3d^5$ تبدیل می‌شود؛ بنابراین اتم هیچ یک از فلزهای واسطه جدول تناوبی در لایه سوم خود، ۱۲ الکترون ندارد.

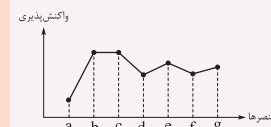
نمودار زیر، روند کلی واکنش پذیری چهار عنصر متوالی دوره دوم جدول تناوبی را نشان می‌دهد؛ با توجه به این نمودار، می‌توان دریافت که
 (۱) عنصر G در میان عناصر داده شده، بزرگ‌ترین شعاع اتمی را دارد.
 (۲) عنصر A نخستین عنصر دسته p جدول دوره‌ای است.
 (۳) عنصر D در جدول تناوبی با دو نافلز هم‌گروه است.
 (۴) در دمای اتاق، حالت فیزیکی عنصر E با حالت فیزیکی سه عنصر دیگر متفاوت است.



مشاوره این تست مشابه تست زیر که در کنکور تجربی خارج از کشور ۹۹ طرح شده است؛ می‌باشد:

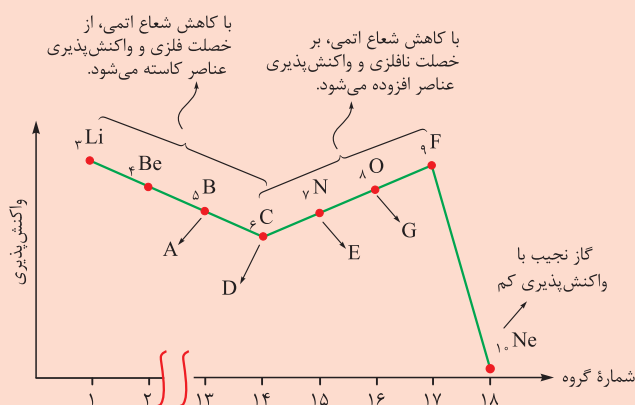
• با بررسی نمودار زیر، که واکنش پذیری شماری از عنصرهای دوره دوم جدول تناوبی را به صورت نامرتب نشان می‌دهد، می‌توان دریافت که است.

- (۱) ☒ a: کربن، c: فلور، g: اکسیژن
 (۲) ☐ f: نیتروژن، a: کربن
 (۳) ☐ f: کربن، e: بریلیم، b: فلور
 (۴) ☐ b: نیتروژن، d: بور، e: لیتیم



پاسخ خیلی تشریحی

در یک دوره جدول تناوبی از چپ به راست با افزایش عدد اتمی، خصلت فلزی و واکنش پذیری فلزها، کاهش و خصلت نافلزی و واکنش پذیری نافلزها، افزایش می‌یابد؛ بنابراین عناصر A، D، E و G به ترتیب عناصر بور (B_5)، کربن (C_6)، نیتروژن (N_7) و اکسیژن (O_8) هستند.



عنصرهای دسته p جدول تناوبی از دوره دوم و گروه ۱۳ جدول شروع می‌شود؛ بنابراین می‌توان گفت که عنصر بور (B_5)، اولین عنصر دسته p جدول تناوبی است.

بررسی سایر گزینه‌ها:

گزینه (۱): در یک دوره جدول تناوبی از چپ به راست با افزایش عدد اتمی و شماره گروه عناصر، شعاع اتمی کاهش می‌یابد؛ بنابراین عنصر اکسیژن (O_8) در میان عناصر مشخص شده، کوچک‌ترین (نه بزرگ‌ترین!) شعاع اتمی را دارد.

گزینه (۳): عنصر کربن (C_6) در گروه چهاردهم جدول تناوبی قرار دارد که در این گروه، نافلز دیگری به جز خود عنصر کربن (C_6) وجود ندارد.

گزینه (۴): در دمای اتاق، حالت فیزیکی عناصر بور (B_5) و کربن (C_6)، جامد و حالت فیزیکی عنصر نیتروژن (N_7) و اکسیژن (O_8)، گاز است.

با در نظر گرفتن عنصرهای دوره چهارم جدول تناوبی (به جز $_{22}\text{Ti}$ و $_{33}\text{As}$)، به ترتیب از راست به چپ، آرایش الکترونی یون پایدار چه تعداد از آن‌ها به زیرلایه‌های $3p^6$ ، $3d^{10}$ و $4p^6$ ختم می‌شود؟

۲، ۲، ۲ (۲)

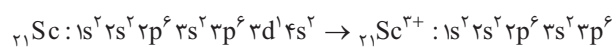
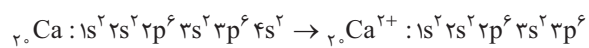
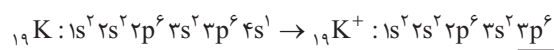
۲، ۳، ۳ (۱)

۳، ۳، ۳ (۴)

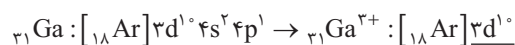
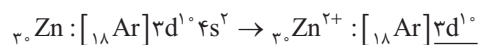
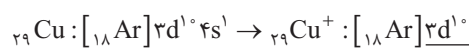
۳، ۲، ۲ (۳)



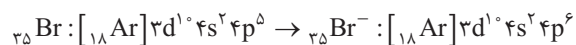
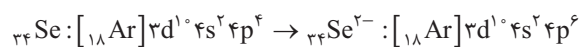
پاسخ خیلی تشریحی ✓ آرایش الکترونی یون‌های پایداری به زیرلایه $3p^6$ ختم می‌شود که اتم عناصر آن‌ها با تشکیل یون پایدار، به آرایش الکترونی هشت‌تایی گاز نجیب آرگون ($_{18}\text{Ar}$) برسد. این عناصر عبارت‌اند از:



آرایش الکترونی یون‌های پایداری به زیرلایه $3d^{10}$ ختم می‌شود که اتم عناصر آن‌ها با تشکیل یون پایدار، الکترون‌های زیرلایه $4s$ یا $4p$ و $4s$ خود را از دست بدهد. این عناصر عبارت‌اند از:



آرایش الکترونی یون‌های پایداری به زیرلایه $4p^6$ ختم می‌شود که اتم عناصر آن‌ها با تشکیل یون پایدار، الکترون‌های زیرلایه $4p$ خود را پر کرده و به آرایش الکترونی هشت‌تایی گاز نجیب کریپتون ($_{36}\text{Kr}$) برسد. این عناصر عبارت‌اند از:



کدام مطلب نادرست است؟

۷۷

(۱) در یون‌های پایدار هشتمین عنصر فلزی تناوب چهارم جدول دوره‌ای، زیرلایه‌ای با $n = 4$ و $l = 0$ فاقد الکترون است.

(۲) آخرین فلز واسطه دوره چهارم جدول تناوبی برخلاف سومین و چهارمین عناصر واسطه این دوره، تنها یک یون پایدار تشکیل می‌دهد.



(۳) عنصر A که آرایش الکترونی بیرونی‌ترین زیرلایه یون آن (A^{2+}) به $3d^9$ ختم شود، با چهارمین هالوژن جدول دوره‌ای، حالت فیزیکی یکسانی دارد.



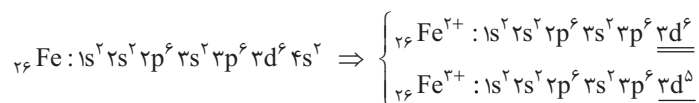
(۴) در تبدیل اتم اولین فلز واسطه جدول به یون پایدار و تبدیل اتم دومین فلز قلیایی خاکی به یون پایدار، تغییر شمار الکترون‌ها با هم برابر است.



پاسخ خیلی تشریحی

اولین فلز واسطه جدول، اسکندیم (${}_{21}\text{Sc}$) است که برای تبدیل اتم این عنصر به کاتیون پایدار Sc^{3+} ، سه الکترون از دست می‌دهد. در صورتی که دومین فلز قلیایی خاکی، منیزیم (${}_{12}\text{Mg}$) است که برای تبدیل اتم این عنصر به کاتیون پایدار Mg^{2+} ، دو الکترون از دست می‌دهد؛ پس تغییر شمار الکترون‌ها در تبدیل شدن اتم عناصر مورد نظر به یون پایدارشان، با هم برابر نیست. بررسی سایر گزینه‌ها:

گزینه (۱): در تناوب چهارم جدول دوره‌ای عناصر، گروه‌های اول تا سیزدهم فلز هستند؛ پس هشتمین عنصر فلزی دوره چهارم، در گروه هشتم قرار دارد که همان آهن (${}_{26}\text{Fe}$) است که دارای دو کاتیون پایدار Fe^{2+} و Fe^{3+} می‌باشد. در کاتیون‌های ذکر شده، زیرلایه $4s$ فاقد الکترون است:



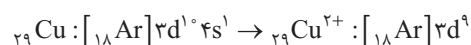
گزینه (۲): آخرین فلز واسطه دوره چهارم جدول تناوبی، روی (${}_{30}\text{Zn}$) است که تنها یک کاتیون پایدار Zn^{2+} تشکیل می‌دهد. در صورتی که سومین و چهارمین عناصر واسطه این دوره، به ترتیب وانادیم (${}_{23}\text{V}$) و کروم (${}_{24}\text{Cr}$) هستند که هر دو، دو نوع کاتیون پایدار دارند.

برخی از فلزهای واسطه بیش از یک نوع کاتیون پایدار دارند. اونهاهایی که شما باید بلد باشید! این‌هاست:



فلز	مس	آهن	کروم	وانادیم
کاتیون و نام آن	Cu^+ : مس (I)	Fe^{2+} : آهن (II)	Cr^{2+} : کروم (II)	V^{2+} : وانادیم (II)
	Cu^{2+} : مس (II)	Fe^{3+} : آهن (III)	Cr^{3+} : کروم (III)	V^{3+} : وانادیم (III)

گزینه (۳): عنصری که آرایش الکترونی بیرونی‌ترین زیرلایه یون آن (A^{2+}) به $3d^9$ ختم می‌شود؛ مس (${}_{29}\text{Cu}$) است که همانند چهارمین هالوژن جدول دوره‌ای یا همان ید (${}_{53}\text{I}$)، حالت فیزیکی جامد دارد.



حالت فیزیکی هالوژن‌های جدول تناوبی به صورت زیر است:



گروه ۱۷ جدول تناوبی

اولین هالوژن	${}_{9}\text{F}$	→	گاز
دومین هالوژن	${}_{17}\text{Cl}$	→	گاز
سومین هالوژن	${}_{35}\text{Br}$	→	مایع
چهارمین هالوژن	${}_{53}\text{I}$	→	جامد

اگر تفاوت تعداد نوترون‌ها و الکترون‌ها در یون $^{106}\text{X}^{2+}$ برابر تعداد عناصر با نماد شیمیایی دوحرفی موجود در ردیف چهارم جدول تناوبی

^{19}K

باشد، بین این عنصر و سومین فلز قلیایی جدول دوره‌ای، چند عنصر وجود دارد؟

۲۵ (۴)

۲۶ (۳)

۲۷ (۲)

۲۸ (۱)



پاسخ خیلی تشریحی ✓

از میان ۱۸ عنصر موجود در تناوب چهارم جدول دوره‌ای، تنها دو عنصر پتاسیم (^{19}K) و وانادیم (^{23}V) دارای نماد شیمیایی تک‌حرفی هستند و ۱۶ عنصر دیگر در این دوره، نماد شیمیایی دوحرفی دارند؛ پس با توجه به این که تفاوت تعداد نوترون‌ها و الکترون‌ها در یون $^{106}\text{X}^{2+}$ برابر ۱۶ است؛ بنابراین خواهیم داشت:

$$\begin{cases} n+p=106 \Rightarrow n=106-p \\ p-e=2 \Rightarrow e=p-2 \end{cases} \Rightarrow n-e=16 \Rightarrow 106-p-p+2=16$$

$$\Rightarrow 108-2p=16 \Rightarrow 2p=92 \Rightarrow p=46 \Rightarrow ^{106}_{46}\text{X}$$

سومین فلز قلیایی جدول دوره‌ای، پتاسیم (^{19}K) است. بین عنصر مورد نظر با پتاسیم (^{19}K)، $26 = (46 - 19) - 1$ عنصر وجود دارد.

تعداد عنصرهای موجود در جدول دوره‌ای بین دو عنصر A و B برابر است با:

۱ - تفاوت عدد اتمی A و B = تعداد عنصرها

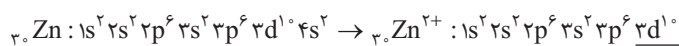


اگر فلز M_z به هنگام تشکیل یون پایدار، دو الکترون خود را از دست بدهد و آرایش الکترونی یون آن به زیرلایه $3d^{10}$ ختم شود، کدام یک از مطالب زیر در مورد این فلز، درست است؟

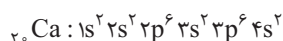
- (۱) آرایش الکترونی این عنصر همانند عنصر A_{z-6} ، از قاعده آفبا پیروی نمی‌کند.
- (۲) همه زیرلایه‌های اشغال شده از الکترون این عنصر همانند فلز قلیایی خاکی هم‌دوره خود، پر هستند.
- (۳) عنصر B_{z+4} ، برای رسیدن به آرایش گاز نجیب، تنها می‌تواند آنیون دو بار منفی تشکیل دهد.
- (۴) مجموع $n + l$ الکترون‌های ظرفیت اتم M ، برابر با ۵۴ است.



پاسخ خیلی تشریحی ✓ فلز مورد نظر، روی ($30Zn$) است:



فلز قلیایی خاکی موجود در دوره چهارم جدول تناوبی، کلسیم ($20Ca$) است که در اتم این فلز همانند فلز روی ($30Zn$)، همه زیرلایه‌های اشغال شده از الکترون آن، پر می‌باشد:

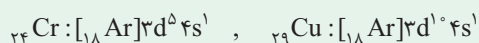


بررسی سایر گزینه‌ها:

گزینه (۱): عنصر A_{z-6} همان عنصر کروم ($24Cr$) است که آرایش الکترونی آن از قاعده آفبا پیروی نمی‌کند، ولی آرایش الکترونی عنصر روی ($30Zn$)، از قاعده آفبا پیروی می‌کند.

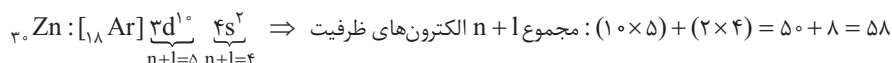


در میان ۳۶ عنصر اول جدول، آرایش الکترونی عنصرهای $24Cr$ و $29Cu$ ، از قاعده آفبا پیروی نمی‌کند.

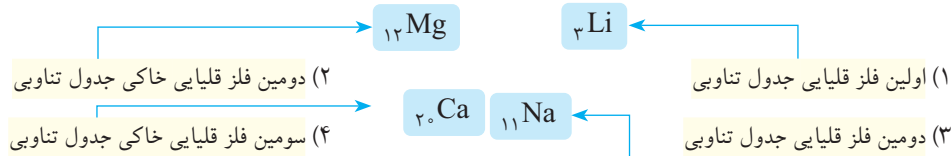


گزینه (۳): عنصر B_{z+4} همان عنصر سلنیم ($34Se$) است که این عنصر برای رسیدن به آرایش گاز نجیب، هم می‌تواند آنیون دو بار منفی (Se^{2-}) تشکیل دهد و هم می‌تواند دو الکترون خود را با اتم عنصر یا عناصر دیگری به اشتراک بگذارد.

گزینه (۴): مجموع اعداد کوانتومی اصلی و فرعی ($n + l$) الکترون‌های ظرفیت اتم عنصر روی ($30Zn$)، برابر ۵۸ است.



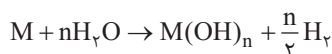
۱۰ گرم از یک فلز قلیایی یا قلیایی خاکی به طور کامل با آب واکنش می‌دهد. اگر پس از انجام واکنش، ۱۸/۵ گرم هیدروکسید فلز تولید شود، فلز مورد نظر کدام است؟ (فراورده دیگر واکنش، گاز هیدروژن است. $\text{Ca} = 40, \text{Mg} = 24, \text{Na} = 23, \text{Li} = 7$: g.mol^{-1})



Hint

با توجه به این که نمی‌دانیم فلز مورد نظر، یک فلز قلیایی است یا یک فلز قلیایی خاکی، معادله کلی واکنش را به صورت $M + H_2O \rightarrow M(OH)_n + H_2$ می‌نویسیم و با نوشتن رابطه استوکیومتری بین M و $M(OH)_n$ ، نسبت جرم مولی فلز به بار آن (n) را به دست می‌آوریم و با گزینه‌ها چک می‌کنیم.

با توجه به اطلاعات داده‌شده، معادله واکنش به صورت زیر است: **پاسخ خیلی تشریحی**



$$\frac{\text{جرم}}{\text{جرم مولی} \times \text{ضریب}} = \frac{\text{جرم}}{\text{جرم مولی} \times \text{ضریب}} \Rightarrow \frac{10}{M} = \frac{18.5}{M + 17n}$$

$$\Rightarrow 10/M = 10/M + 17n \Rightarrow 10/M = 17n \Rightarrow \frac{M}{n} = 20$$

باید نسبت جرم مولی فلز به بار آن، برابر ۲۰ باشد.

(۱) در جدول دوره‌ای، شش فلز قلیایی و شش فلز قلیایی خاکی وجود دارد.

(۲) فلزهای قلیایی در گروه اول قرار دارند و کاتیون یک بار مثبت (M^+) تشکیل می‌دهند؛ در حالی که فلزهای قلیایی خاکی در گروه دوم قرار دارند و کاتیون دو بار مثبت (M^{2+}) تشکیل می‌دهند.

۱H	
۳Li	۴Be
۱۱Na	۱۲Mg
۱۹K	۲۰Ca
۳۷Rb	۳۸Sr
۵۵Cs	۵۶Ba
۸۷Fr	۸۸Ra

بررسی گزینه‌ها:

$$\frac{M}{n} = \frac{7}{1} = 7 \quad (3\text{Li}) \leftarrow \text{لیتیم: اولین فلز قلیایی}$$

$$\frac{M}{n} = \frac{24}{2} = 12 \quad (12\text{Mg}) \leftarrow \text{منیزیم: دومین فلز قلیایی خاکی}$$

$$\frac{M}{n} = \frac{23}{1} = 23 \quad (11\text{Na}) \leftarrow \text{سدیم: سومین فلز قلیایی}$$

$$\frac{M}{n} = \frac{40}{2} = 20 \quad (20\text{Ca}) \leftarrow \text{کلسیم: چهارمین فلز قلیایی خاکی}$$

