ریاضیات

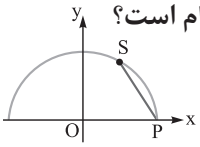
۱- کدام‌یک از دنباله‌های اعداد حقیقی زیر، همواره تشکیل یک دنبالهٔ هندسی می‌دهد؟

۱) $a, a^۲, a^۳, \ldots$ ۲) $a, ۱, \frac{۱}{a}, \ldots$ ۳) $a^۲, a, ۱, \ldots$ ۴) $۱, a, a^۲, \ldots$

۲- یک دنباله با جملات غیر صفر، دنباله‌ای حسابی با قدرنسبت d و دنباله‌ای هندسی با قدرنسبت r است. مقدار $r+d$ کدام است؟

۱) $\sqrt{۲}$ ۲) $\frac{۱}{۲}$ ۳) ۱ ۴) صفر

۳- نقطهٔ $S(a,۳)$ روی نیم‌دایرهٔ شکل مقابل داده شده است. اگر طول وتر PS برابر شعاع نیم‌دایره باشد، مقدار a کدام است؟



۱) ۱ ۲) $\frac{۱}{۲}$

۳) $\sqrt{۳}$ ۴) $\frac{\sqrt{۳}}{۲}$

۴- اگر $x^۲ + \frac{۱۰}{x^۲+۱} = ۹$ باشد، مقدار $(x^۲+۱)^۲ + \frac{۱۰۰}{(x^۲+۱)^۲}$ کدام است؟

۱) ۹۸ ۲) ۹۰ ۳) ۸۸ ۴) ۸۰

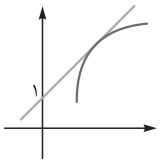
۵- نقاط $(-۴, ۳)$ و $(-۴, -۱/۵)$ روی یک تابع درجه‌دوم واقع هستند. مجموع صفرهای این تابع کدام است؟

۱) $\frac{۳}{۲}$ ۲) $\frac{۳}{۴}$ ۳) $\frac{۵}{۲}$ ۴) $\frac{۵}{۴}$

۶- حاصل $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{۲}} \frac{\sin ۲x \cot(\frac{\pi}{۲} - \frac{x}{۲})}{x - \frac{\pi}{۲}}$ کدام است؟

۱) ۳ ۲) ۲ ۳) -۲ ۴) -۳

۷- نمودار تابع f و خط مماس بر آن در نقطهٔ $(۳,۵)$ در شکل زیر رسم شده است. مقدار $f'(۳)$ کدام است؟



۱) ۲ ۲) ۱

۳) $\frac{۲}{۳}$ ۴) $\frac{۴}{۳}$

۸- در بین مثلث‌هایی با مساحت ۳۰ واحد مربع که در ضلعی به اندازهٔ ۱۵ واحد مشترک هستند، کم‌ترین مقدار محیط کدام است؟

۱) ۳۰ ۲) ۳۲ ۳) ۳۴ ۴) ۳۶

۹- در مربع ABCD، نقطهٔ $(۴,۱)$ رأس A و عرض رأس‌های C و D به ترتیب ۱ و ۳ است. اگر بازتاب نقطهٔ C نسبت به محور yها بر خودش منطبق شود، فاصلهٔ بازتاب نقطهٔ D نسبت به قطر AC از مبدأ مختصات چه‌قدر است؟

۱) $\sqrt{۵}$ ۲) $\sqrt{۱۳}$ ۳) $\sqrt{۱۷}$ ۴) $\sqrt{۷}$

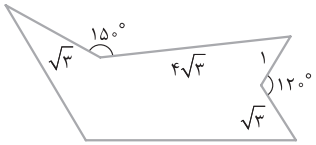
۱۰- در مربع ABCD، نقطهٔ $(۳,۵)$ رأس B و طول رأس‌های C و D به ترتیب ۵/۵ و ۳ است. اگر بازتاب نقطهٔ D نسبت به محور xها بر خودش منطبق شود، فاصلهٔ بازتاب نقطهٔ C نسبت به قطر BD از مبدأ مختصات چه‌قدر است؟

۱) ۲/۵ ۲) $\sqrt{۶/۵}$ ۳) $\sqrt{۶}$ ۴) ۲

۱۱- مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC به طول وتر ۸ واحد مفروض است. این مثلث را توسط بردار $\overrightarrow{AT}$ که در جهت بردار $\overrightarrow{AM}$ (M وسط وتر BC) قرار دارد، انتقال می‌دهیم. اگر مساحت محدود بین مثلث اولیه و جدید، $\frac{۱}{۱۶}$ مساحت اولیه باشد، اندازهٔ بردار $\overrightarrow{AT}$، کدام است؟

۱) ۳ ۲) ۴ ۳) $\frac{۱}{۳}$ ۴) $\frac{۱}{۴}$

۱۲- میزان افزایش مساحت شکل زیر، بدون تغییر در محیط و تعداد اضلاع کدام است؟



۱) ۱۵
۲) ۹
۳) ۷/۵
۴) ۴/۵

۱۳- خط $x=-\frac{۵}{۴}$ خط هادی سهمی به معادلهٔ $۳y^۲-۳x-ay=۰$ است. اختلاف مقادیر a کدام است؟

۱) ۱۲
۲) ۸
۳) ۶
۴) ۴

۱۴- یک متوازی‌السطوح توسط بردارهای $\vec{a}=(۲,-۳,۴)$، $\vec{b}=(-۱,۲,۳)$ و $\vec{c}=(۳,-۲,۱)$ تولید شده و صفحهٔ P شامل بردارهای b و c است. اندازهٔ ارتفاع این متوازی‌السطوح عمود بر صفحهٔ P، کدام است؟

۱) $\sqrt{۵}$
۲) $۵\sqrt{۲}$
۳) $\frac{\sqrt{۵}}{۵}$
۴) $\frac{۵\sqrt{۲}}{۲}$

۱۵- اگر دو بردار ناصفر $\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}-\frac{۳\vec{b}}{|\vec{b}|}$ و $\frac{۷\vec{b}}{|\vec{b}|}+\frac{۹\vec{a}}{|\vec{a}|}$ بر هم عمود باشند، مساحت متوازی‌الاضلاعی را که توسط بردارهای ناصفر $\frac{\vec{a}}{|\vec{b}|}-\frac{۲\vec{b}}{|\vec{a}|}$ و $\frac{۳\vec{a}}{|\vec{b}|}+\frac{۲\vec{b}}{|\vec{a}|}$ ساخته می‌شود، کدام است؟

۱) ۱/۶
۲) ۳/۲
۳) ۴/۸
۴) ۶/۴

۱۶- خطی به معادلهٔ $y+۲x=۰$، عمودمنصف خط‌المرکزین دو دایره است که شعاع یکی نصف شعاع دیگری است. اگر معادلهٔ دایرهٔ بزرگ‌تر به صورت $x^۲+y^۲+۶x-۲y=a$ و خط مفروض بر دایرهٔ کوچک‌تر مماس باشد، مجموع طول نقاط برخورد دو دایره کدام است؟

۱) $\frac{\sqrt{۱۵}}{۲}$
۲) $-\frac{\sqrt{۱۵}}{۲}$
۳) ۱
۴) -۱

۱۷- دو تاس همگن را پرتاب می‌کنیم. با کدام احتمال، حداقل یک عدد مضرب ۳ و مجموع دو عدد روشده برابر ۷ است؟

۱) $\frac{۱}{۱۸}$
۲) $\frac{۱}{۹}$
۳) $\frac{۱}{۶}$
۴) $\frac{۱}{۳}$

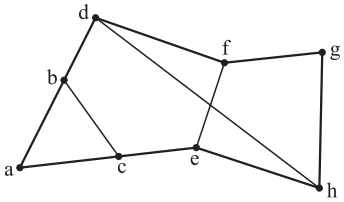
۱۸- میانگین دستهٔ اول با ۴ داده برابر میانگین دستهٔ دوم با ۵ داده است. یک داده از دستهٔ اول را با یک داده از دستهٔ دوم جابه‌جا می‌کنیم، به طوری که میانگین دسته‌های جدید مجدداً برابر خواهند شد. اگر واریانس دستهٔ اول قبل از جابه‌جایی داده‌ها برابر ۱/۲۵ باشد، واریانس دستهٔ اول بعد از جابه‌جایی داده‌ها کدام است؟

۱) ۱/۲۵
۲) ۲/۵
۳) ۳/۷۵
۴) ۴/۵

۱۹- اگر درجهٔ رأس‌های یک گراف ۴، ۴، ۲، ۲، ۲ و ۲ باشد، تعداد تمام دورهای موجود، کدام است؟

۱) ۳
۲) ۴
۳) ۵
۴) ۶

۲۰- در گراف زیر، کدام مجموعه، یک مجموعهٔ احاطه‌گر مینیمال، نیست؟



۱) $\{a,e,g\}$
۲) $\{a,f,g\}$
۳) $\{b,c,g\}$
۴) $\{c,f,h\}$

۲۱- در گراف با درجه رأس‌های ۳،۳،۳،۱،۱ و ۳، دو رأس با کم‌ترین درجه، غیر مجاورند. تعداد دورها به طول ۳ کدام است؟

۱) ۱
۲) ۲
۳) ۳
۴) ۴

۲۲- در یک گراف کامل $q(G)=\Delta^۲(G)-۲\delta(G)$ است. مقدار $p(G)$ کدام است؟

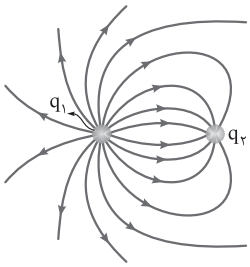
۱) ۵
۲) ۶
۳) ۷
۴) ۸

فیزیک

۲۳- یک باتری با نیروی محرکهٔ $\varepsilon = 9\ V$ به دو سر یک مقاومت وصل است و جریان $I = 1/5\ A$ از مقاومت عبور می‌کند. اگر در این حالت اختلاف پتانسیل دو سر باتری ۶ ولت باشد، توان خروجی باتری چند وات است؟

۱) ۶ ۲) ۹ ۳) ۱۲ ۴) ۱۸

۲۴- در شکل زیر، با توجه به خطوط میدان الکتریکی، کدام رابطه‌ها در مورد بارهای الکتریکی درست است؟



۱) $q_1 < 0$ و $|q_2| < |q_1|$
۲) $q_1 < 0$ و $|q_1| < |q_2|$
۳) $q_2 < 0$ و $|q_2| < |q_1|$
۴) $q_2 < 0$ و $|q_1| < |q_2|$

۲۵- کدام مورد دربارهٔ دماسنج مقاومت پلاتینی درست نیست؟

۱) یکی از سه دماسنج معیار است.
۲) اساس کار آن مبتنی بر تغییر مقاومت با دماست.
۳) پلاتین استفاده‌شده در این دماسنج دچار خوردگی نمی‌شود.
۴) در این دماسنج از پلاتین که نقطهٔ ذوب پایینی دارد، استفاده می‌شود.

۲۶- بار الکتریکی $q = -20\ nC$ در راستای میدان الکتریکی یکنواخت، از نقطهٔ A به نقطهٔ B منتقل می‌شود و انرژی پتانسیل الکتریکی آن ۲ mJ افزایش می‌یابد. $V_B - V_A$، چند ولت است و جهت حرکت بار الکتریکی در مقایسه با جهت میدان الکتریکی چگونه است؟

۱) -10^5 و در خلاف جهت میدان
۲) $+10^5$ و در خلاف جهت میدان
۳) $+10^5$ و در جهت میدان
۴) -10^5 و در جهت میدان

۲۷- شعاع کرهٔ فلزی A دو برابر شعاع کرهٔ فلزی B است. اگر بار الکتریکی کرهٔ B، ۵۰ درصد بار الکتریکی A باشد، چگالی سطحی بار الکتریکی کرهٔ A، چند برابر چگالی سطحی بار کرهٔ B است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ۴) $\frac{1}{2}$

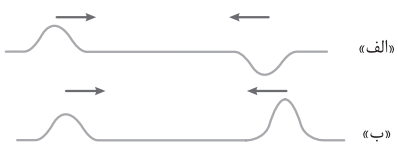
۲۸- پرتوی نوری با زاویهٔ تابش 60° از هوا وارد آب می‌شود. کدام کمیت‌های وابسته به پرتو، با ورود آن به آب تغییر می‌کند؟

۱) جهت انتشار، تندی و طول موج
۲) بسامد، جهت انتشار و طول موج
۳) بسامد، جهت انتشار و تندی
۴) تندی، بسامد و طول موج

۲۹- بسامد اصلی یک تار ویولن به طول ۲۰ cm برابر ۵۰۰ Hz است. طول موج امواج صوتی گسیل‌شده توسط تار، چند سانتی‌متر است؟ (سرعت صوت را در هوا $340\ m/s$ بگیرید.)

۱) ۸۰ ۲) ۶۸ ۳) ۴۰ ۴) ۳۴

۳۰- شکل زیر انتشار دو تپ موج در ریسمان را نشان می‌دهد. در تداخل این دو تپ، در طناب «الف» تداخل ..... و در طناب «ب» تداخل ..... ایجاد می‌شود و بعد از همپوشانی، هر تپ ..... حرکت اولیه، ادامهٔ مسیر می‌دهد.



۱) ویرانگر ـ سازنده ـ در خلاف جهت
۲) سازنده ـ ویرانگر ـ در خلاف جهت
۳) ویرانگر ـ سازنده ـ در جهت
۴) سازنده ـ ویرانگر ـ در جهت

۳۱- دو بسامد تشدیدی متوالی یک تار دو انتها ثابت، ۲۴۰ هرتز و ۲۸۰ هرتز است. کدام بسامد برحسب هرتز، از بسامدهای تشدیدی این تار نیست؟

۱) ۶۰ ۲) ۸۰ ۳) ۱۶۰ ۴) ۳۲۰

۳۲- تاری به طول ۶۰ cm با دو انتهای ثابت ارتعاش می‌کند و در طول آن ۳ شکم تشکیل شده است. اگر بسامد ایجادشده ۳۰۰ هرتز باشد، تندی موج عرضی در تار چند متر بر ثانیه است و بسامد صوت اصلی تار چند هرتز است؟

۱) ۵۰۰ و ۳۰۰ ۲) ۱۲۰ و ۳۰۰ ۳) ۱۲۰ و ۱۰۰ ۴) ۵۰۰ و ۱۰۰

شیمی

۳۳- کدام مورد دربارهٔ روند تغییر ویژگی‌های عنصرهای اصلی جدول تناوبی درست است؟

۱) در هر دوره با کاهش عدد اتمی، شعاع اتمی برخلاف خصلت فلزی کاهش می‌یابد.

۲) در هر گروه با کاهش عدد اتمی، خصلت نافلزی برخلاف واکنش‌پذیری افزایش می‌یابد.

۳) در هر گروه با افزایش شعاع اتمی، تمایل به جذب الکترون همانند خصلت نافلزی کاهش می‌یابد.

۴) در هر دوره با افزایش شعاع اتمی، واکنش‌پذیری همانند شمار الکترون‌های ظرفیت افزایش می‌یابد.

۳۴- در فشار معیّن، کدام مورد همواره درست است؟

۱) آنتالپی تبخیر یک ماده، برابر با آنتالپی میعان آن است.

۲) آنتالپی میعان یک ماده، برابر با آنتالپی انجماد آن است.

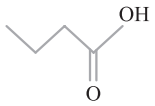
۳) تغییر انرژی گرمایی در فرایند ذوب یک ماده، کم‌تر از تغییر انرژی گرمایی در فرایند فرازش آن است.

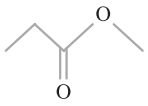
۴) تغییر انرژی گرمایی در فرایند چگالش یک ماده، کم‌تر از تغییر انرژی گرمایی در فرایند میعان آن است.

۳۵- فرایندهای ..... و ..... مواد خالص، برخلاف میعان بخار آب، با افزایش سطح انرژی همراه است.

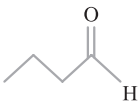
۱) چگالش ـ انجماد ۲) چگالش ـ تبخیر ۳) فرازش ـ انجماد ۴) فرازش ـ ذوب

۳۶- کدام دو ترکیب، ایزومر یکدیگرند و نقطهٔ جوش کدام ترکیب، بالاتر از ترکیب‌های دیگر است؟

الف) 

ب) 

پ)

ت) 

۱) «الف» و «ب» ـ «ت»

۲) «الف» و «ت» ـ «الف»

۳) «ب» و «پ» ـ «ت»

۴) «پ» و «ت» ـ «الف»

۳۷- کدام مورد، نادرست است؟

۱) بازیافت فلزها از جمله فلز آهن، به توسعهٔ پایدار کشور کمک می‌کند.

۲) کم‌تر از ده درصد نفت خام استخراج‌شده برای تولید الیاف، پارچه و شوینده‌ها به کار می‌رود.

۳) مقدار فلزاتی مانند آهن و نیکل در ذخایر زمینی، بیشتر از ذخایر آن‌ها در کف اقیانوس است.

۴) در استخراج آهن، نسبت جرم «سنگ معدن آهن» استفاده‌شده به جرم «منابع معدنی دیگر» مصرف‌شده به تقریب، برابر ۲ است.

۳۸- کدام مورد نادرست است؟

۱) شعاع اتمی کربن معیار مناسبی از سنجش میزان ضخامت گرافن است.

۲) تکهٔ کوچکی از گرافیت را می‌توان در یک لیوان آب به صورت شناور نگه داشت.

۳) در ساختار جامدهای کووالانسی، پیوندهای اشتراکی می‌توانند بر یک صفحه منطبق باشند.

۴) در ساختار سیلیسیم خالص، اتم‌ها با استفاده از پیوندهای اشتراکی در سه بعد به یکدیگر متصل شده‌اند.

۳۹- ترکیب‌های کدام مورد می‌تواند نمایندهٔ مناسبی برای ساختارهای داده‌شده باشد؟

(a) (b) (c) (d)

۱) $a: SCO \text{ ، } b: SiF_4 \text{ ، } d: CHCl_3$

۲) $a: HCN \text{ ، } b: CH_4 \text{ ، } c: H_2S$

۳) $b: SiH_4 \text{ ، } c: OF_2 \text{ ، } d: NH_3$

۴) $a: HF \text{ ، } c: H_2O \text{ ، } d: SO_3$

۴۰- کدام موارد دربارهٔ مقایسهٔ ویژگی‌های فولاد و تیتانیم درست است؟

الف) نقطهٔ ذوب: فولاد > تیتانیم

ب) شدت واکنش خوردگی: تیتانیم > فولاد

پ) مقاومت در برابر واکنش با ذره‌های موجود در آب دریا: فولاد > تیتانیم

ت) میزان استفاده در ساخت پروانهٔ کشتی: فولاد > تیتانیم

۱) «الف» و «ب»

۲) «الف» و «پ»

۳) «ب» و «ت»

۴) «پ» و «ت»

۴۱- کدام ماده در حالت مایع، انرژی گرمایی را بیشتر نگه می‌دارد؟

۱) پتاسیم کلرید

۲) آب

۳) نیتروژن

۴) هیدروژن فلوئورید

۴۲- ساختار فلزها، آرایش منظمی از کاتیون‌ها در ..... بُعد است که در فضای بین آن‌ها، سست‌ترین الکترون‌های موجود در ..... آزادانه جابه‌جا می‌شوند.

۱) دو ـ کاتیون‌ها

۲) دو ـ اتم‌های فلز

۳) سه ـ اتم‌های فلز

۴) سه ـ کاتیون‌ها

ریاضیات

۱- گزینه ۲و۳

درس‌نامه به دنباله‌ای که **جملهٔ اولش غیر صفر باشد** و هر جمله‌اش (به غیر از اولی) از ضرب جملهٔ قبل از خودش در یک عدد غیر صفر به دست می‌آید، دنبالهٔ هندسی می‌گوییم.

گام دنباله‌ها را با توجه به رفتارشان ادامه می‌دهیم:

- $a, 1, \frac{1}{a}, \frac{1}{a^2}, \frac{1}{a^3}, \ldots$ (×$\frac{1}{a}$، ×$\frac{1}{a}$)
- $a^2, a^3, a^4, a^5, a^6, \ldots$ (×a، ×a)
- $1, a, a^2, a^3, a^4, \ldots$ (×a، ×a)
- $a^2, a, 1, \frac{1}{a}, \frac{1}{a^2}, \ldots$ (×$\frac{1}{a}$، ×$\frac{1}{a}$)

گام در تمام گزینه‌ها هر جمله از ضرب جملهٔ قبلی‌اش در یک عدد ثابت به دست می‌آید؛ پس باید شرط دوم، یعنی صفر نبودن جملهٔ اول را بررسی کنیم. ۱ و ۴ **همواره** هندسی نیستند، چون در حالتی که $a=0$ باشد، جملهٔ اولشان صفر می‌شود، اما ۲ و ۳ به خاطر وجود $\frac{1}{a}$ و حقیقی‌بودن جملات، $a\neq 0$ می‌شود؛ پس در این گزینه‌ها شرط صفر نبودن جملهٔ اول هم برقرار است. در نتیجه ۲ و ۳ جواب‌اند ولی متأسفانه سازمان سنجش فقط ۲ را به عنوان جواب اعلام کرده است!

۲- گزینه ۳

درس‌نامه اگر a، b و c سه جملهٔ متوالی یک دنبالهٔ هندسی باشند، داریم:
$ac=b^2$

روش **گام** سه جملهٔ اول دنبالهٔ حسابی را a، $a+d$ و $a+2d$ در نظر می‌گیریم. این سه جمله، سه جملهٔ متوالی دنبالهٔ هندسی هم هستند، پس با توجه به درس‌نامه می‌توانیم بنویسیم: $a\times(a+2d)=(a+d)^2 \Rightarrow a^2+2ad=a^2+2ad+d^2$

$\Rightarrow d^2=0 \Rightarrow d=0$

گام $d=0$ است، پس قدرنسبت جملات دنبالهٔ حسابی صفر است و همهٔ جملات آن با هم برابر می‌شوند: $a,a+d,a+2d,\ldots \xrightarrow{d=0} a,a,a,\ldots$ **جملات دنبالهٔ حسابی**

گام به گفتهٔ سؤال، جملات دنبالهٔ حسابی (همین جملات بالا که همگی برابر a هستند)، جملات دنبالهٔ هندسی هم هستند که واضح است قدرنسبت دنبالهٔ هندسی $r=1$ می‌شود، پس $r+d=1+0=1$ است.

روش

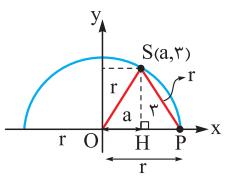
نکته تنها دنباله‌ای که هم حسابی است و هم هندسی، دنبالهٔ ثابت است که در آن قدرنسبت جملات دنبالهٔ حسابی صفر و قدرنسبت جملات دنبالهٔ هندسی ۱ است:
دنباله‌ای که هم حسابی و هم هندسی است: $a,a,a,\ldots$

با توجه به نکتهٔ بالا، $d=0$ و $r=1$ است که $r+d=1$ می‌شود.

۳- گزینه ۳

درس‌نامه ۱ طول ارتفاع مثلث متساوی‌الاضلاع به ضلع a می‌شود $\frac{\sqrt{3}}{2}a$.
۲ در مثلث متساوی‌الاضلاع، هر ارتفاع، میانه و نیمساز هم هست.

گام فرض می‌کنیم شعاع نیم‌دایرهٔ مقابل r باشد. به گفتهٔ سؤال $SP=r$ است؛ پس اگر شعاع OS را به شکل اضافه کنیم، مثلثی به اسم OSP ساخته می‌شود که طول هر ضلعش برابر r است؛ پس این مثلث متساوی‌الاضلاع است.



گام طبق شکل بالا، طول ارتفاع مثلث متساوی‌الاضلاع برابر ۳ است؛ پس طبق مورد (۱) درس‌نامه می‌توانیم بنویسیم:

$$SH=\frac{\sqrt{3}}{2}r \Rightarrow 3=\frac{\sqrt{3}}{2}r \Rightarrow r=\frac{6}{\sqrt{3}}\times\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}}=\frac{6\sqrt{3}}{3}=2\sqrt{3}$$

از طرفی طبق مورد (۲) درس‌نامه، ارتفاع SH، میانه هم هست؛ پس H وسط OP است.
در نتیجه:

$$OH=a=\frac{r}{2}=\frac{2\sqrt{3}}{2}=\sqrt{3}$$

۴- گزینه ۴

گام فرض می‌کنیم $x^2+1=t$ باشد، پس به دنبال $(x^2+1)^2+\frac{100}{(x^2+1)^2}=t^2+\frac{100}{t^2}$ هستیم.

گام به طرفین تساوی $x^2+\frac{10}{x^2+1}=9$، ۱ واحد اضافه می‌کنیم تا بتوانیم جای «x^2+1»ها بنویسیم t:

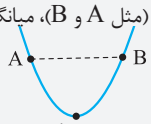
$$(x^2+1)+\frac{10}{x^2+1}=9+1 \Rightarrow t+\frac{10}{t}=10$$

گام طرفین تساوی بالا را به توان ۲ می‌رسانیم:

$$t^2+2t(\frac{10}{t})+(\frac{10}{t})^2=10^2 \Rightarrow t^2+20+\frac{100}{t^2}=100 \Rightarrow t^2+\frac{100}{t^2}=80$$

۵- گزینه ۱

درس‌نامه ۱ اگر مطابق شکل، دو نقطه با عرض یکسان روی سهمی $y=ax^2+bx+c$ داشته باشیم (مثل A و B)، میانگین طول این دو نقطه، مساوی طول رأس سهمی $(-\frac{b}{2a})$ است:



$$S(-\frac{b}{2a},-\frac{\Delta}{4a}) \qquad \frac{x_A+x_B}{2}=-\frac{b}{2a}$$

۲ اگر α و β ریشه‌های سهمی $y=ax^2+bx+c$ باشند، مجموع ریشه‌ها از رابطهٔ مقابل محاسبه می‌شود:

$$\alpha+\beta=\frac{-b}{a}$$

۳ اگر دو مورد قبل را با هم ترکیب کنیم، می‌فهمیم که جمع طول نقطه‌های A و B در سهمی بالا مساوی مجموع ریشه‌هایش می‌شود:

$$\frac{x_A+x_B}{\cancel{2}}=-\frac{b}{\cancel{2}a} \Rightarrow x_A+x_B=\alpha+\beta$$

به گفتهٔ سؤال دو نقطهٔ $(3,-4)$ و $(-1/5,-4)$ با عرض یکسان، روی سهمی قرار دارند؛ پس طبق درس‌نامه، مجموع صفرهای سهمی با جمع طول این نقاط برابر است:

$$\text{مجموع صفرها}=-1/5+3=1/5=\frac{3}{2}$$

۶- گزینه ۳

درس‌نامه ۱ اگر در محاسبهٔ حد توابع کسری به $\frac{0}{0}$ برسیم، طبق قاعدهٔ هوپیتال می‌توانیم به جای صورت و مخرج، مشتقشان را بنویسیم و بعد حد را حساب کنیم. این یعنی اگر $\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{0}{0}$ باشد، داریم:

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

۲ قبل از استفاده از هوپیتال، مقدار عوامل ضربی غیر صفر را جای‌گذاری می‌کنیم. مثلاً در حد $\lim_{x\to 1}\frac{x^3-x}{x-1}\cos(\pi x)$، $x=1$ به ازای $\cos(\pi x)$ می‌شود $\cos\pi=-1$ که غیر صفر است؛ پس جای $\cos(\pi x)$ می‌نویسیم -1 و بعد هوپیتال می‌زنیم:

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^3-x}{x-1}\cos(\pi x)=\lim_{x\to 1}-\frac{x^3-x}{x-1}\overset{\text{Hop}}{=}\lim_{x\to 1}-\frac{3x^2-1}{1}=-(3-1)=-2$$

۳ فرمول مشتق بعضی از توابع را در جدول زیر برایتان آورده‌ایم:

تابع	فرمول مشتق
$\cos u$	$-u'\sin u$
$\sin u$	$u'\cos u$
$\cos x$	$-\sin x$
$\sin x$	$\cos x$

گام در $x=\frac{\pi}{۲}$، $\sin ۲x$ و $x-\frac{\pi}{۲}$ هر دو برابر صفرند، ولی $\cot(\frac{\pi}{۲}-\frac{x}{۲})$ صفر نیست، ببینید:

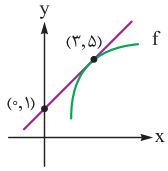
$$\cot(\frac{\pi}{۲}-\frac{x}{۲})=\cot(\frac{\pi}{۲}-\frac{\frac{\pi}{۲}}{۲})=\cot(\frac{\pi}{۴})=۱$$

گام پس با حد $\frac{۰}{۰}$ طرف هستیم ولی طبق مورد (۲) درس‌نامه، اول $\cot(\frac{\pi}{۲}-\frac{x}{۲})=۱$ را جای‌گذاری می‌کنیم، بعد هوپیتال می‌زنیم:

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{۲}}\frac{\sin ۲x.\cot(\frac{\pi}{۲}-\frac{x}{۲})}{x-\frac{\pi}{۲}}\overset{Hop}{=}\lim_{x\to\frac{\pi}{۲}}\frac{۲\cos ۲x}{۱}=۲\underbrace{\cos(\pi)}_{-۱}=-۲$$

۷- گزینه ۴

مقدار $f'(۳)$ همان شیب خط مماس بر f در $x=۳$ است.
خط d در شکل زیر



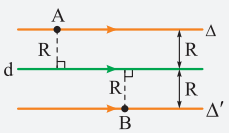
خط d از دو نقطهٔ $(۰,۱)$ و $(۳,۵)$ می‌گذرد؛ پس شیبش می‌شود:

$$f'(۳)=m=\frac{۵-۱}{۳-۰}=\frac{۴}{۳}$$

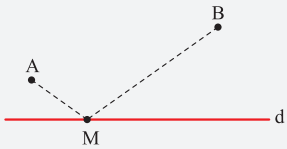
۸- گزینه ۲

استراتژی اول ببینید رأس روبه‌روی ضلعِ ثابت (ضلع به طول ۱۵) کجاها می‌تواند باشد. این‌جوری متوجه می‌شوید که با نوع خاص مسئلهٔ هرون طرف هستید.

درس‌نامه ۱ برای پیداکردن نقطه‌هایی که از خط d به فاصلهٔ R باشند، باید دو خط موازی با d و به فاصلهٔ R در دو طرف آن رسم کنیم (Δ,Δ'). هر نقطه‌ای که روی یکی از این خط‌ها باشد (مثل A و B)، فاصله‌اش از خط d برابر R است. نگاه کنید:

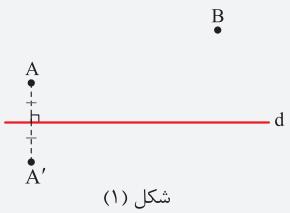


۲ مسئلهٔ هرون: در این مسئله مطابق شکل مقابل، دو نقطهٔ A و B در یک طرف خط d قرار دارند. می‌خواهیم نقطه‌ای مثل M را روی خط d پیدا کنیم، به طوری که مسیر AMB (همون $AM+MB$) کم‌ترین طول ممکن را داشته باشد. برای پیداکردن نقطهٔ M کارهای زیر را انجام می‌دهیم:

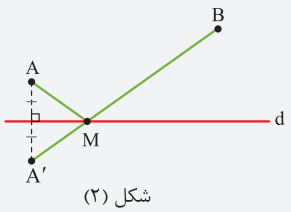


الف) نقطهٔ A را نسبت به خط d بازتاب می‌دهیم تا به نقطهٔ A' برسیم. (شکل ۱)

ب) A' را به B وصل می‌کنیم تا d را در نقطهٔ M قطع کند. M همان نقطه‌ای است که به دنبالش هستیم.

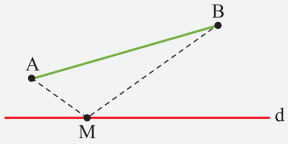


شکل (۱)

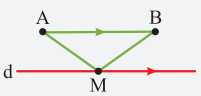


شکل (۲)

۳ بعد از پیداکردن نقطهٔ M در مسئلهٔ هرون (شکل مقابل را ببینید)، می‌توانیم بگوییم از بین همهٔ مثلث‌هایی که دو رأس آن‌ها A و B و رأس سومشان روی d قرار دارد، مثلث AMB، کم‌ترین محیط را دارد.

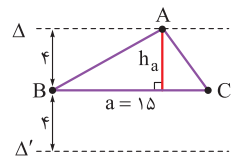


۴ حالت خاصِ مسئلهٔ هرون، وقتی اتفاق می‌افتد که AB با خط d موازی باشد (شکل مقابل را ببینید). در چنین حالتی اگر محیط مثلث AMB کم‌ترین باشد، حتماً **متساوی‌الساقین** است.



گام **(پیداکردن جایِ رأسِ روبه‌روی ضلع ثابت)**

سؤال در مورد مثلث‌هایی حرف می‌زند که در ضلع $BC=۱۵$ مشترک هستند. یکی از این مثلث‌ها را در شکل مقابل ببینید.

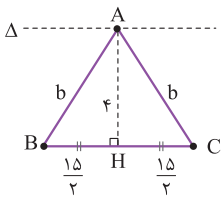


به گفتهٔ سؤال، مساحت این مثلث ۳۰ واحد مربع است، پس می‌توانیم بنویسیم:

$$S_{ABC}=\frac{۱}{۲}a.h_a\Rightarrow ۳۰=\frac{۱}{۲}\times ۱۵\times h_a\Rightarrow h_a=۴$$

حالا می‌توانیم بگوییم فاصلهٔ نقطهٔ متغیر A از خط ثابت BC، ۴ واحد است، پس طبق مورد (۱) درس‌نامه، نقطهٔ A می‌تواند روی هر کدام از دو خط Δ یا Δ' قرار بگیرد.

گام **(استفاده از حالت خاص مسئلهٔ هرون)**



حالا خوب به نقطهٔ A، خط Δ و ضلع BC نگاه کنید. همان‌طور که می‌بینید ضلع BC با Δ موازی است و می‌خواهیم نقطهٔ A را روی خط Δ طوری انتخاب کنیم که محیط مثلث ABC کم‌ترین شود. طبق مورد (۴) درس‌نامه (حالت خاص مسئلهٔ هرون) در چنین حالتی مثلث ABC حتماً متساوی‌الساقین است. می‌دانیم در هر مثلث متساوی‌الساقین ارتفاع وارد بر قاعده، میانه هم هست، پس در شکل بالا ارتفاع AH میانه هم هست؛ یعنی: $BH=HC=\frac{۱۵}{۲}$

گام **(محاسبهٔ خواستهٔ سؤال)**

مثلث قائم‌الزاویهٔ ABH را در شکل گام قبل ببینید، با استفاده از قضیهٔ فیثاغورس در آن، داریم:

$$b=\sqrt{AH^۲+BH^۲}\Rightarrow b=\sqrt{۴^۲+(\frac{۱۵}{۲})^۲}=\sqrt{۱۶+\frac{۲۲۵}{۴}}$$

$$=\sqrt{\frac{۶۴+۲۲۵}{۴}}=\sqrt{\frac{۲۸۹}{۴}}=\frac{۱۷}{۲}\Rightarrow \overset{\Delta}{ABC}\text{ محیط}=(۲\times\frac{۱۷}{۲})+۱۵=۳۲$$

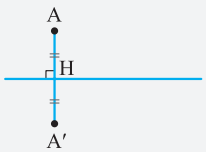
(البته اگر دقت کنید اضلاع قائم مثلث قائم‌الزاویهٔ ABH به صورت $\frac{۱}{۲}\times ۱۵$ و $\frac{۱}{۲}\times ۸$ هستند که آدم را یاد اعداد فیثاغورسی ۸k، ۱۵k و ۱۷k می‌اندازد؛ پس طول وتر آن می‌شود $\frac{۱}{۲}\times ۱۷$)

۹- گزینه ۱

شفاف‌سازی ۱ «بازتاب نقطهٔ C نسبت به محور yها بر خودش منطبق می‌شود»، یعنی نقطهٔ C روی محور yها قرار دارد. **۲** «بازتاب نقطهٔ D نسبت به قطر AC» همان نقطهٔ B است.

استراتژی از تعریف بازتاب و خاصیت عمودمنصف‌بودن قطرها در مربع، برای پیداکردن مختصات رأس B استفاده کنید.

درس‌نامه ۱ الف) همان‌طور در شکل مقابل می‌بینید؛ برای پیداکردن بازتاب نقطهٔ A نسبت به خط d (عمود بازتاب)، اول از A به خط d عمود می‌کنیم و پای عمود را H می‌نامیم. بعد AH را به اندازهٔ خودش امتداد می‌دهیم تا به A' برسیم. نقطهٔ A'، بازتاب نقطهٔ A نسبت به خط d است.



ب) مطابق شکل مقابل، وقتی نقطه‌ای روی محور بازتاب باشد، بازتابش می‌شود خودش و برعکس؛ یعنی اگر بازتاب نقطه‌ای بشود خودش، می‌توانیم بگوییم آن نقطه روی محور بازتاب قرار دارد.

۲ در هر لوزی (و در نتیجه هر مربع، چون مربع هم نوعی لوزی است) قطرها عمودمنصف هم هستند.

۳ یادآوری از هندسهٔ تحلیلی:

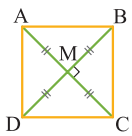
الف) اگر نقطهٔ M وسط پاره‌خط AC باشد، آن‌گاه:

$$x_M=\frac{x_A+x_C}{۲}\quad\text{و}\quad y_M=\frac{y_A+y_C}{۲}$$

ب) فاصلهٔ نقطهٔ $A(a,b)$ از مبدأ مختصات $(O(۰,۰))$، از رابطهٔ زیر محاسبه می‌شود:

$$OA=\sqrt{a^۲+b^۲}$$

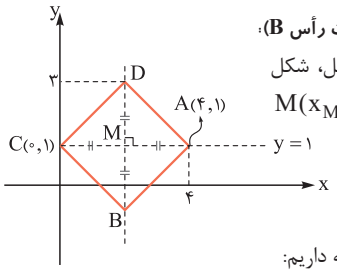
گام **(رسم شکل فرضی و تحلیل سؤال)**:



ابتدا شکل فرضی مقابل را می‌کشیم:

سؤال گفته مختصات رأس A به صورت $A(۴,۱)$ است، ضمن آن‌که بازتاب نقطهٔ C نسبت به محور yها بر خودش منطبق است، پس طبق شفاف‌سازی، نقطهٔ C روی محور yهاست؛ از طرفی عرض این نقطه برابر ۱ است، بنابراین مختصاتش به صورت $C(۰,۱)$ می‌شود. از آن‌جا که در هر مربع، قطرها عمودمنصف هم هستند، در مربع ABCD، بازتاب رأس D نسبت به قطر AC، همان رأس B است و دو رأس A و C هم بازتاب یکدیگر نسبت به قطر BD هستند.

گام (رسم شکل دقیق و پیداکردن مختصات رأس B):
با توجه به فرضیات سؤال و توضیحات گام قبل، شکل دقیق به این صورت است. برای نقطهٔ $M(x_M, y_M)$ دو چیز می‌توانیم بگوییم:



◇ **M وسط BD است**: طبق مورد (۳) درس‌نامه داریم:

$$y_M = \frac{y_B + y_D}{۲} \Rightarrow ۱ = \frac{y_B + ۳}{۲} \Rightarrow y_B = -۱$$

◇ **M وسط AC است**: باز هم طبق مورد (۳) درس‌نامه داریم:

$$x_M = \frac{x_A + x_C}{۲} \Rightarrow x_M = x_B = \frac{۴ + ۰}{۲} = ۲$$

پس مختصات نقطهٔ B به این صورت می‌شود: $B(۲, -۱)$

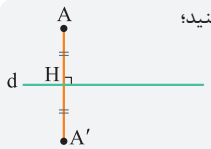
گام (محاسبهٔ خواستهٔ سؤال):
در گام قبل، مختصات نقطهٔ B را به دست آوردیم، حالا می‌توانیم فاصلهٔ $B(۲,-۱)$ را از مبدأ مختصات محاسبه کنیم (به کمک مورد ۳ درس‌نامه):

$$OB = \sqrt{۲^۲ + (-۱)^۲} = \sqrt{۵}$$

۱۰- گزینه ۲

استراتژی از تعریف بازتاب و خاصیت عمودمنصف‌بودن قطرها در مربع، برای پیداکردن مختصات رأس A استفاده کنید.

درس‌نامه ۱ **الف)** همان‌طور که در شکل مقابل می‌بینید؛ برای پیداکردن بازتاب نقطهٔ A نسبت به خط d (محور بازتاب)، اول از نقطهٔ A به خط d عمود می‌کنیم و پای عمود را H می‌نامیم؛ بعد AH را به اندازهٔ خودش امتداد می‌دهیم تا به نقطهٔ A' برسیم. نقطهٔ A'، بازتاب نقطهٔ A نسبت به خط d است.



ب) مطابق شکل مقابل، وقتی نقطه روی محور بازتاب باشد، بازتابش می‌شود خودش و برعکس.

۲ در هر لوزی (و در نتیجه هر مربع، چون مربع هم نوعی لوزی است) قطرها عمودمنصف هم هستند.

۳ **یادآوری از هندسهٔ تحلیلی**: **الف)** اگر نقطهٔ M وسط پاره‌خط AC باشد، آن‌گاه:

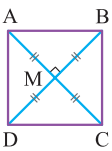
$$y_M = \frac{y_A + y_C}{۲} \quad , \quad x_M = \frac{x_A + x_C}{۲}$$

ب) فاصلهٔ نقطهٔ $A(a,b)$ از مبدأ مختصات $O(۰,۰)$، از رابطهٔ زیر محاسبه می‌شود:

$$OA = \sqrt{a^۲ + b^۲}$$

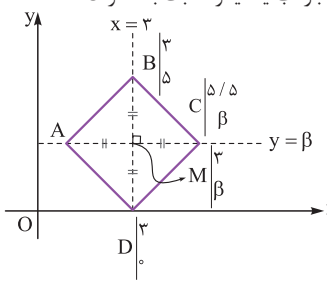
شفاف‌سازی «اگر بازتاب نقطهٔ D نسبت به محور xها بر خودش منطبق شود»؛ یعنی D روی محور xها قرار دارد. همین‌طور منظور از «بازتاب نقطهٔ C نسبت به قطر BD» رأس A است.

گام (رسم شکل فرضی و تحلیل آن)
ابتدا شکل فرضی مقابل را می‌کشیم:



به گفتهٔ سؤال، مختصات رأس B به صورت $B(۳,۵)$ است، ضمن آن‌که بازتاب نقطهٔ D نسبت به محور xها بر خودش منطبق است، پس طبق شفاف‌سازی نقطهٔ D روی محور xهاست؛ حالا طول این نقطه ۳ است پس مختصات آن $D(۳,۰)$ می‌شود. از طرفی به دلیل آن‌که در هر مربع، قطرها عمودمنصفِ هم هستند، در مربع ABCD، بازتاب رأس C نسبت به قطر BD، همان رأس A است و دو رأس B و D هم بازتاب یکدیگر نسبت به قطر AC هستند.

گام (رسم شکل دقیق و پیداکردن مختصات رأس A) با توضیحات گام قبل و فرضیات سؤال، شکل دقیق را کشیده‌ایم. در این شکل M، وسط قطر AC است، پس:



$$x_M = \frac{x_A + x_C}{۲}$$

$$\Rightarrow ۳ = \frac{x_A + ۵/۵}{۲} \Rightarrow x_A = ۰/۵$$

M، وسط قطر BD هم هست:

$$\underbrace{y_M}_{\beta} = \frac{y_B + y_D}{۲} \Rightarrow \beta = \frac{۵ + ۰}{۲} = ۲/۵ \Rightarrow y_A = \beta = ۲/۵$$

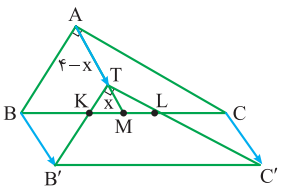
گام (محاسبهٔ خواستهٔ سؤال)
در گام قبل فهمیدیم که مختصات A به صورت $A(۰/۵, ۲/۵)$ است، پس فاصلهٔ آن از مبدأ مختصات می‌شود:

$$OA = \sqrt{۰/۵^۲ + ۲/۵^۲} = \sqrt{۰/۲۵ + ۶/۲۵} = \sqrt{۶/۵}$$

۱۱- گزینه ۱

درس‌نامه ۱ انتقال، شیب خط را تغییر **نمی‌دهد**.
۲ در مثلث قائم‌الزاویه، طول میانهٔ وارد بر وتر، نصف وتر است.
۳ در دو مثلث متشابه، نسبت مساحت‌ها برابر است با مجذور نسبت تشابه.

گام (رسم شکل مناسب و تحلیل سؤال): شکل مسئله به صورت زیر است، در این شکل مثلث $TB'C'$ انتقال‌یافتهٔ مثلث ABC در انتقال با بردار AT است. طبق مورد (۱) درس‌نامه، انتقال، شیب خطوط را تغییر نمی‌دهد، این یعنی اضلاع مثلث ABC و TKL موازی هستند، بنابراین مثلث TKL و ABC متشابه‌اند.



گام (محاسبهٔ طول بردار انتقال): AM در مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC، میانهٔ وارد بر وتر است، پس طبق مورد (۲) درس‌نامه می‌توانیم بگوییم، $AM = \frac{۸}{۲} = ۴$. فرض می‌کنیم $TM = x$ باشد، در این صورت طول بردار انتقال $\overrightarrow{AT}$ می‌شود، $۴ - x$.

به گفتهٔ سؤال مساحت مثلث TKL، $\frac{۱}{۱۶}$ مساحت مثلث ABC است، پس طبق مورد (۳) درس‌نامه می‌توانیم بنویسیم:

$$\frac{S_{\Delta TKL}}{S_{\Delta ADC}} = (\frac{x}{AM})^۲ \Rightarrow \frac{۱}{۱۶} = (\frac{x}{۴})^۲ \xrightarrow{\sqrt{\ }} \frac{۱}{۴} = \frac{x}{۴} \Rightarrow x = ۱$$

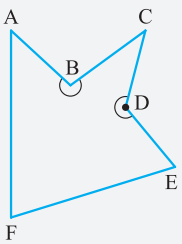
بنابراین طول بردار انتقال $\overrightarrow{AT}$ برابر با:

$$AT = ۴ - x = ۴ - ۱ = ۳$$

مشاوره در کنکور، معمولاً سؤال‌های سخت هندسهٔ پایه ترکیبی هستند، این سؤال هم سؤال نسبتاً سختی است که در آن، خواص مثلث‌های قائم‌الزاویه و تشابه از هندسهٔ ۱ با ویژگی‌های انتقال از هندسهٔ ۲ ترکیب شده است.

۱۲- گزینه ۳

درس‌نامه ۱ به شش‌ضلعی زیر که بعضی از زاویه‌های داخلی‌اش ($\hat{D}$ و $\hat{B}$) بیشتر از ۱۸۰° است، نگاه کنید.

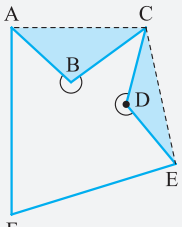


مساحت این‌جور چندضلعی‌ها را می‌توانیم زیاد کنیم؛ جوری که محیط‌شان تغییری نکند. برای این‌که بفهمیم چه‌قدر می‌توانیم مساحت را زیاد کنیم، کارهای زیر را انجام می‌دهیم:

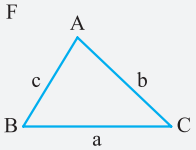
◇ در کدام رأس‌های چندضلعی، زاویهٔ بیشتر از ۱۸۰° داریم؟ B و D؛ رأس‌های کنار B، یعنی A و C و همین‌طور رأس‌های کنار D، یعنی C و E را مثل شکل بالا به هم وصل می‌کنیم.

◇ میزان افزایش مساحت، دو برابر قسمت‌های رنگی بالا است، یعنی:

$$\text{میزان افزایش مساحت} = ۲S_{ABC} + ۲S_{CDE}$$

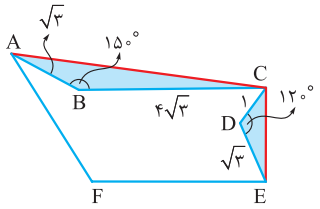


۲ مساحت هر مثلث را می‌توانیم از رابطهٔ «سینوس زاویهٔ بین همان دو ضلع × نصف حاصل‌ضرب دو ضلع = S» به دست بیاوریم، این یعنی برای مساحت مثلث مقابل، می‌توانیم رابطه‌های زیر را بنویسیم:



$$S = \frac{۱}{۲}bc.\sin\hat{A} \text{ یا } \frac{۱}{۲}ac.\sin\hat{B} \text{ یا } \frac{۱}{۲}ab.\sin\hat{C}$$

گام تشخیص میزان افزایش مساحت:
طبق مورد (۱) درس‌نامه، میزان افزایش مساحت چندضلعی ABCDEF، به شرط ثابت‌ماندن محیط و تعداد اضلاعش، دو برابر مساحت مثلث‌های رنگی است، یعنی:



$$(*) \quad \text{میزان افزایش مساحت} = ۲S_{ABC} + ۲S_{CDE}$$

گام محاسبهٔ میزان افزایش مساحت: در ادامه به کمک مورد (۲) درس‌نامه، مساحت مثلث‌های ABC و CDE را حساب می‌کنیم:

$$\begin{cases} S_{ABC} = \frac{۱}{۲}(\sqrt{۳})(۴\sqrt{۳})\underbrace{\sin ۱۵۰^\circ}_{\sin ۳۰^\circ = \frac{۱}{۲}} = \frac{۱}{۴}(۴ \times ۳) = ۳ \\ S_{CDE} = \frac{۱}{۲}(۱)(\sqrt{۳})\underbrace{\sin ۱۲۰^\circ}_{\sin ۶۰^\circ = \frac{\sqrt{۳}}{۲}} = \frac{\sqrt{۳}}{۲} \times \frac{\sqrt{۳}}{۲} = \frac{۳}{۴} \end{cases}$$

در آخر موارد بالا را در تساوی (*) جای‌گذاری می‌کنیم تا به خواستهٔ سؤال برسیم:

$$\text{میزان افزایش مساحت} = ۲(۳) + ۲(\frac{۳}{۴}) = ۶ + \frac{۳}{۲} = ۶ + ۱/۵ = ۷/۵$$

۱۳- گزینه ۱

درس‌نامه ۱ در معادلهٔ گستردهٔ سهمی، اگر نسبت به متغیر درجه‌دوم مشتق بگیریم، یا عرض رأس پیدا می‌شود یا طولش. احتمالاً می‌پرسید «چه‌طور تشخیص بدهیم؟» باید خدمتتان عرض کنیم که اگر متغیر درجه‌دوم x بود طول رأس و اگر متغیر درجه‌دوم y بود، عرض رأس پیدا شده است.

۲ مختصات رأس سهمی در معادله‌اش صدق می‌کند.

۳ هر وقت معادلهٔ گستردهٔ سهمی را داشتید و مقدار پارامتر آن یعنی a را می‌خواستید، از رابطهٔ مقابل استفاده کنید:

$$a = -\frac{\text{ضریب متغیر درجه ۱}}{۴ \times \text{ضریب متغیر درجه ۲}}$$

منفی یادت نره

۴ اگر در سهمی $y^۲$ وجود داشته باشد، سهمی افقی است. در این‌جور سهمی‌ها معادلهٔ خط هادی از این رابطه به دست می‌آید:

پارامتر سهمی

$$x = \text{طول رأس} - a$$

گام **پیداکردن طول رأس سهمی:** در معادلهٔ گستردهٔ سهمی $y^۲$ داریم، پس طبق مورد (۱) درس‌نامه، اگر نسبت به y مشتق بگیریم، عرض رأس سهمی پیدا می‌شود:

$$۳y^۲ - ۳x - ay = ۰ \xrightarrow{\text{مشتق نسبت به y}} ۶y - a = ۰ \Rightarrow y = \frac{a}{۶}$$

حالا $y = \frac{a}{۶}$ را در معادلهٔ سهمی جای‌گذاری می‌کنیم تا به طول رأس سهمی برسیم (مورد (۲) درس‌نامه):

$$۳(\frac{a}{۶})^۲ - ۳x - a(\frac{a}{۶}) = ۰ \Rightarrow ۳(\frac{a^۲}{۳۶}) - ۳x - \frac{a^۲}{۶} = ۰$$

$$۳x = \frac{a^۲}{۱۲} - \frac{a^۲}{۶} \Rightarrow ۳x = -\frac{a^۲}{۱۲} \Rightarrow x = -\frac{a^۲}{۳۶}$$

طول رأس

گام **محاسبهٔ پارامتر سهمی:** به کمک مورد (۳) درس‌نامه، پارامتر سهمیِ

ضریب متغیر درجهٔ ۱

$$۳y^۲ - ۳x - ay = ۰$$

ضریب متغیر درجهٔ ۲

را به دست می‌آوریم؛ فقط چون در معادلهٔ سهمی a داریم، پارامتر سهمی را با A نشان می‌دهیم:

$$A = -\frac{\text{ضریب متغیر درجه ۱}}{۴ \times \text{ضریب متغیر درجه ۲}} = -\frac{-۳}{۳ \times ۴} = \frac{۱}{۴}$$

گام **نوشتن معادلهٔ خط هادی برحسب A:** طبق مورد (۴) سهمی معادلهٔ خط هادی را باید به این صورت بنویسیم:

$$x = -A - \text{طول رأس} \Rightarrow x = -\frac{a^۲}{۳۶} - \frac{۱}{۴}$$

گام **محاسبهٔ خواستهٔ سؤال:** سؤال معادلهٔ خط هادی را به صورت $x = -\frac{۵}{۴}$ داده. از مقایسهٔ این معادله با معادلهٔ آبی‌رنگ بالا نتیجه می‌گیریم که:

$$-\frac{a^۲}{۳۶} - \frac{۱}{۴} = -\frac{۵}{۴} \Rightarrow \frac{a^۲}{۳۶} = -\frac{۵}{۴} + \frac{۱}{۴} = -۱ \Rightarrow a^۲ = ۳۶ \Rightarrow a = \pm ۶$$

سؤال اختلاف مقادیر a را می‌خواهد که می‌شود $۱۲ = (-۶) - ۶$.

۱۴- گزینه ۱

درس‌نامه ۱ طول بردار $\vec{a} = (a_۱, a_۲, a_۳)$ برابر است با:

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_۱^۲ + a_۲^۲ + a_۳^۲}$$

۲ ضرب خارجی دو بردار مثل $\vec{a} = (a_۱, a_۲, a_۳)$ و $\vec{b} = (b_۱, b_۲, b_۳)$ به صورت زیر محاسبه می‌شود:

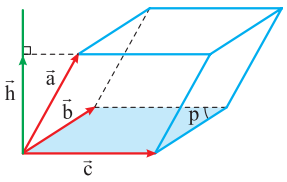
$$\vec{a} \times \vec{b} = \left(\begin{vmatrix} a_۲ & a_۳ \\ b_۲ & b_۳ \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} a_۱ & a_۳ \\ b_۱ & b_۳ \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_۱ & a_۲ \\ b_۱ & b_۲ \end{vmatrix}\right)$$

۳ اگر با بردارهای $\vec{a}$ و $\vec{b}$ یک متوازی‌الاضلاع بسازیم، مساحتش برابر می‌شود با:

$$S = |\vec{a} \times \vec{b}|$$

۴ حجم متوازی‌السطوح ساخته‌شده با بردارهای $\vec{a}$، $\vec{b}$ و $\vec{c}$ از رابطهٔ زیر محاسبه می‌شود:

$$V = \left|\begin{vmatrix} a_۱ & a_۲ & a_۳ \\ b_۱ & b_۲ & b_۳ \\ c_۱ & c_۲ & c_۳ \end{vmatrix}\right|$$



گام **(محاسبهٔ مساحت قاعدهٔ متوازی‌السطوح):** شکل مسئله به صورت مقابل است. همان‌طور که می‌بینید، قاعدهٔ متوازی‌السطوح، متوازی‌الاضلاعی که روی بردارهای $\vec{b} = (-۱, ۲, ۳)$ و $\vec{c} = (۳, -۲, ۱)$ ساخته شده است.

اول $\vec{b} \times \vec{c}$ را پیدا می‌کنیم:

$$\vec{b} \times \vec{c} = \left(\begin{vmatrix} ۲ & ۳ \\ -۲ & ۱ \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} -۱ & ۳ \\ ۳ & ۱ \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} -۱ & ۲ \\ ۳ & -۲ \end{vmatrix}\right) = (۸, ۱۰, -۴)$$

حالا طبق مورد (۳) درس‌نامه می‌توانیم بگوییم مساحت قاعده برابر می‌شود با:

$$|\vec{b} \times \vec{c}| = \sqrt{۸^۲ + ۱۰^۲ + (-۴)^۲} = \sqrt{۶۴ + ۱۰۰ + ۱۶} = \sqrt{\underbrace{۱۸۰}_{۳۶ \times ۵}} = ۶\sqrt{۵}$$

گام **(محاسبهٔ حجم متوازی‌السطوح):** حالا به کمک مورد (۴) درس‌نامه، حجم متوازی‌السطوح را حساب می‌کنیم:

$$V = \left|\begin{vmatrix} ۲ & -۳ & ۴ \\ -۱ & ۲ & ۳ \\ ۳ & -۲ & ۱ \end{vmatrix}\right| = \left|۲\underbrace{\begin{vmatrix} ۲ & ۳ \\ -۲ & ۱ \end{vmatrix}}_{۲-(-۶)} - (-۳)\underbrace{\begin{vmatrix} -۱ & ۳ \\ ۳ & ۱ \end{vmatrix}}_{-۱-۹} + ۴\underbrace{\begin{vmatrix} -۱ & ۲ \\ ۳ & -۲ \end{vmatrix}}_{۲-۶}\right|$$

$$= |۲(۸) + ۳(-۱۰) + ۴(-۴)| = ۳۰$$

گام **(محاسبهٔ خواستهٔ سؤال):** حالا به کمک رابطهٔ $V = S_{\text{قاعده}} \times h$، طول ارتفاع را به دست می‌آوریم:

$$۳۰ = ۶\sqrt{۵} \times h \Rightarrow h = \frac{۵}{\sqrt{۵}} \times \frac{\sqrt{۵}}{\sqrt{۵}} = \frac{۵\sqrt{۵}}{۵} = \sqrt{۵}$$

۱۵- گزینه ۴

درس‌نامه ۱ اگر زاویهٔ بین دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$، α باشد، در این صورت $\vec{a} \cdot \vec{b}$ و $|\vec{a} \times \vec{b}|$ به صورت زیر محاسبه می‌شوند:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\cos\alpha \ , \ |\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}||\vec{b}|\sin\alpha$$

۲ زاویهٔ بین دو بردار، عددی بین صفر تا ۱۸۰° است.

۳ دو بردار ناصفر $\vec{\bigcirc}$ و $\vec{\square}$ وقتی بر هم عمودند که ضرب داخلی‌شان صفر شود؛ یعنی

$\vec{\bigcirc}\cdot\vec{\square}=0$ باشد. برعکس این موضوع هم درست است؛ یعنی اگر $\vec{\bigcirc}\cdot\vec{\square}=0$ باشد، می‌توانیم بگوییم بردارهای $\vec{\bigcirc}$ و $\vec{\square}$ بر هم عمودند.

۴ مساحت متوازی‌الاضلاعی که روی بردارهای $\vec{\bigcirc}$ و $\vec{\square}$ ساخته می‌شود، برابر است با:

$$S=|\vec{\bigcirc}\times\vec{\square}|$$

۵ سه تا از قوانین مهم ضرب داخلی و خارجی بردارها را ببینید:

الف) ضرب خارجی هر بردار در خودش، بردار صفر است، یعنی: $\vec{a}\times\vec{a}=\vec{0}$

ب) ضرب داخلی هر بردار در خودش مساوی مربع اندازهٔ آن بردار است، یعنی: $\vec{a}\cdot\vec{a}=|\vec{a}|^2$

پ) در ضرب خارجی، ترتیب ضرب‌کردن مهم است، اما در ضرب داخلی نه:

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{a} \quad \text{و} \quad \vec{a}\times\vec{b}=-\vec{b}\times\vec{a} \text{ یا } \vec{b}\times\vec{a}=-\vec{a}\times\vec{b}$$

گام (محاسبهٔ سینوس و کسینوس زاویهٔ بین بردارهای $\vec{a}$ و $\vec{b}$)

به گفتهٔ سؤال، بردارهای $(\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}-\frac{۳\vec{b}}{|\vec{b}|})$ و $(\frac{۹\vec{a}}{|\vec{a}|}+\frac{۷\vec{b}}{|\vec{b}|})$ بر هم عمودند، پس طبق مورد (۳) درس‌نامه می‌توانیم ضرب داخلی‌شان را مساوی صفر بگذاریم:

$$(\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}-\frac{۳\vec{b}}{|\vec{b}|}).(\frac{۹\vec{a}}{|\vec{a}|}+\frac{۷\vec{b}}{|\vec{b}|})=0$$

$$\Rightarrow \frac{۹\vec{a}\cdot\vec{a}}{|\vec{a}|^2}+\frac{۷\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}-\frac{۲۷\vec{b}\cdot\vec{a}}{|\vec{a}||\vec{b}|}-\frac{۲۱\vec{b}\cdot\vec{b}}{|\vec{b}|^2}=۹-\frac{۲۰\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}-۲۱=0$$

$$\Rightarrow \frac{-۲۰\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}=۴ \Rightarrow -۵\vec{a}\cdot\vec{b}=۳|\vec{a}||\vec{b}|$$

حالا فرض می‌کنیم زاویهٔ بین بردارهای $\vec{a}$ و $\vec{b}$ برابر α باشد، در این صورت به جای $\vec{a}.\vec{b}$ در تساوی بالا می‌توانیم بنویسیم $|\vec{a}||\vec{b}|\cos\alpha$.

$$-۵\vec{a}\cdot\vec{b}=۳|\vec{a}||\vec{b}| \Rightarrow -۵|\vec{a}||\vec{b}|\cos\alpha=۳|\vec{a}||\vec{b}| \Rightarrow \cos\alpha=-\frac{۳}{۵}$$

در آخر به کمک اتحاد $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$، $\sin\alpha$ را حساب می‌کنیم:

$$\sin^2\alpha+(-\frac{۳}{۵})^2=1 \Rightarrow \sin^2\alpha=1-\frac{۹}{۲۵}=\frac{۱۶}{۲۵} \Rightarrow \sin\alpha=\pm\frac{۴}{۵}$$

این‌جا باید حواسمان باشد که طبق مورد (۲) درس‌نامه، $0<\alpha<۱۸۰^\circ$ و در نتیجه $\sin\alpha>0$ است، پس مقدار مثبت سینوس را انتخاب می‌کنیم: $\sin\alpha=+\frac{۴}{۵}$

گام (محاسبهٔ خواستهٔ سؤال)

حالا به کمک مورد (۴) درس‌نامه، مساحت متوازی‌الاضلاعی را که توسط بردارهای $(\frac{\vec{a}}{|\vec{b}|}-\frac{۲\vec{b}}{|\vec{a}|})$ و $(\frac{۳\vec{a}}{|\vec{b}|}+\frac{۲\vec{b}}{|\vec{a}|})$ ساخته می‌شود، حساب می‌کنیم:

$$S=|(\frac{\vec{a}}{|\vec{b}|}-\frac{۲\vec{b}}{|\vec{a}|})\times(\frac{۳\vec{a}}{|\vec{b}|}+\frac{۲\vec{b}}{|\vec{a}|})|=|\vec{0}+\frac{۲\vec{a}\times\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}-\frac{\overbrace{-۶\vec{a}\times\vec{b}}}{|\vec{a}||\vec{b}|}-\vec{0}|$$

$$\Rightarrow S=|\frac{۸\vec{a}\times\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}|=\frac{۸}{|\vec{a}||\vec{b}|}|\vec{a}\times\vec{b}|$$

در آخر به جای $|\vec{a}\times\vec{b}|$ می‌نویسیم $|\vec{a}||\vec{b}|\sin\alpha$:

$$S=\frac{۸}{|\vec{a}||\vec{b}|}(|\vec{a}||\vec{b}|\underbrace{\sin\alpha}_{\frac{۴}{۵}})=\frac{۳۲}{۵}=۶/۴$$

مشاوره سؤال‌های هندسهٔ دوازدهم در کنکورهای جدید بسیار پرمحاسبه شده‌اند، به همین خاطر پیشنهاد می‌کنیم با حل سؤال‌های این‌چنینی آمادگی خودتان را بالا ببرید.

۱۶- گزینه ۳

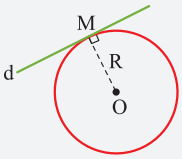
درس‌نامه ۱ معادلهٔ گستردهٔ هر دایره به صورت $x^2+y^2+ax+by+c=0$ است. برای به دست آوردن شعاع و مرکز دایره در این معادله، از روابط زیر استفاده می‌کنیم:

$$O(-\frac{\text{ضریب } x}{۲},-\frac{\text{ضریب } y}{۲}) \quad , \quad r=\sqrt{(\text{عرض مرکز})^2+(\text{طول مرکز})^2-c}$$

عدد ثابت معادلهٔ گسترده

فقط حواستان باشد، زمانی می‌توانید از رابطه‌های بالا استفاده کنید که در معادلهٔ گسترده، ضریب x^2 و y^2 برابر ۱ و عدد ثابت، سمت چپ باشد. اگر معادلهٔ گسترده این‌شکلی نبود، باید چنین شرایطی را خودتان بسازید.

۲ اگر خط d مثل شکل مقابل بر دایرهٔ $C(O,R)$ مماس باشد، می‌توانیم بگوییم فاصلهٔ مرکز دایره از خط d مساوی شعاع دایره است: $OH=R$



۳ معادلهٔ دایره به مرکز $O(\alpha,\beta)$ و شعاع R به این صورت نوشته می‌شود: $(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=R^2$

۴ برای به دست آوردن معادلهٔ وتر مشترک دو دایره، کارهای زیر را انجام می‌دهیم:

الف) چک می‌کنیم که ضرایب x^2 و y^2 در معادلهٔ گسترده‌شان ۱ باشد (اگر نبود این کار را انجام می‌دهیم).

ب) طرفین معادله‌های گسترده را از هم کم می‌کنیم.

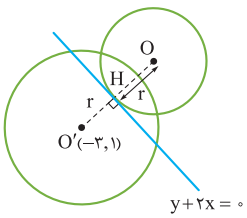
۵ طول نقطه‌های برخورد دو دایره را می‌توانیم در دو مرحله به دست بیاوریم:

الف) معادلهٔ وترمشترک دو دایره را پیدا می‌کنیم.

ب) معادلهٔ وترمشترک را به صورت $y=\square x+\square$ می‌نویسیم و در معادلهٔ یکی از دایره‌ها، جای‌گذاری می‌کنیم. جواب‌های معادلهٔ به دست آمده، طول نقاط برخورد دو دایره هستند. با جای‌گذاری این جواب‌ها در معادلهٔ وترمشترک، عرض نقاط تقاطع هم به دست می‌آیند.

گام (پیداکردن مرکز دایرهٔ بزرگ و شعاع دایره‌ها)

اول شکل فرضی مقابل را می‌کشیم.



سؤال معادلهٔ دایرهٔ بزرگ را به صورت $x^2+y^2+۶x-۲y=a$ داده است، پس طبق مورد (۱) درس‌نامه، مرکزش می‌شود:

$$O'(-\frac{۶}{۲},-\frac{-۲}{۲})=(-۳,۱)$$

فرض می‌کنیم شعاع دایرهٔ کوچک r باشد، در این صورت چون خط آبی‌رنگ در شکل بالا بر این دایره مماس است، $OH=r$ می‌شود. از طرفی این خط آبی‌رنگ، عمودمنصف OO' است، پس می‌توانیم بگوییم $OH=O'H=r$ است. $O'H$ هم فاصلهٔ نقطهٔ $O'(-۳,۱)$ از خط $y+۲x=0$ است که برابر می‌شود با:

$$O'H=\frac{|۱+۲(-۳)|}{\sqrt{۱^2+(۲)^2}}=\frac{۵}{\sqrt{۵}}\times\frac{\sqrt{۵}}{\sqrt{۵}}=\sqrt{۵}$$

پس شعاع دایرهٔ کوچک شد: $OH=r=\sqrt{۵}$

از طرفی سؤال می‌گوید، شعاع دایرهٔ کوچک، نصف شعاع دایرهٔ بزرگ است؛ پس اگر شعاع دایرهٔ بزرگ را R در نظر بگیریم، می‌توانیم بنویسیم:

$$r=\frac{R}{۲} \Rightarrow \sqrt{۵}=\frac{R}{۲} \Rightarrow R=۲\sqrt{۵}$$

گام (محاسبهٔ a)

در گام قبلی دیدیم مرکز دایرهٔ $x^2+y^2+۶x-۲y=a$، نقطهٔ $O'(-۳,۱)$ و شعاعش $R=۲\sqrt{۵}$ شد. معادلهٔ دایره را به صورت $x^2+y^2+۶x-۲y-a=0$ می‌نویسیم تا بتوانیم شعاعش را به کمک مورد (۱) درس‌نامه برحسب a پیدا کنیم:

$$R=\sqrt{(\text{عرض مرکز})^2+(\text{طول مرکز})^2-c}$$

عدد ثابت

$$\Rightarrow ۲\sqrt{۵}=\sqrt{\underbrace{(-۳)^2+۱^2-(-a)}_{۱۰+a}} \xrightarrow{\text{توان ۲}} ۲۰=۱۰+a \Rightarrow a=۱۰$$

پس معادلهٔ دایرهٔ بزرگ به این صورت می‌شود: $x^2+y^2+۶x-۲y-۱۰=0$

گام (پیداکردن مختصات نقطهٔ H)

همان‌طور که در شکل گام (۱)، H نقطهٔ برخورد OO' و خط $y+2x=0$ است؛ پس برای به دست آوردن نقطهٔ H، اول باید معادلهٔ خط‌المرکزین OO' را بنویسیم. خط‌المرکزین OO' بر خط $y+2x=0$ عمود است، پس شیبشان قرینه معکوس هم است. اگر معادلهٔ خط $y+2x=0$ را به صورت $y=-2x$ بنویسیم، می‌بینیم که شیبش -2 است؛ بنابراین شیب خط OO' می‌شود $\frac{1}{2}$. حالا می‌توانیم بگوییم OO' از نقطهٔ $O'(-3,1)$ می‌گذرد و شیبش $\frac{1}{2}$ است، پس معادله‌اش به صورت زیر می‌شود:

$$OO': y-1=\frac{1}{2}(x-(-3)) \Rightarrow y-1=\frac{1}{2}x+\frac{3}{2} \Rightarrow y-\frac{1}{2}x=\frac{5}{2}$$

حالا با حل دستگاه زیر نقطهٔ برخورد OO' و خط $y+2x=0$ را به دست می‌آوریم تا مختصات نقطهٔ H معلوم شود:

$$\begin{cases} y+2x=0 \\ y-\frac{1}{2}x=\frac{5}{2} \end{cases} \xrightarrow{\text{بالایی-پایینی}} -\frac{1}{2}x-2x=\frac{5}{2} \Rightarrow -\frac{5}{2}x=\frac{5}{2} \Rightarrow x=-1$$

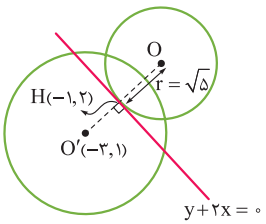
$x=-1$ را در خط $y+2x=0$ جای‌گذاری می‌کنیم تا عرض نقطهٔ H هم به دست بیاید:

$$y+2(-1)=0 \Rightarrow y=2$$

بنابراین مختصات نقطهٔ H به صورت $H(-1,2)$ شد.

گام (نوشتن معادلهٔ دایرهٔ کوچک‌تر)

از دایرهٔ کوچک‌تر شعاعش را می‌دانیم ولی مرکزش را نه؛ فرض می‌کنیم مختصات مرکزش $O(\alpha,\beta)$ باشد. برای پیداکردن α,β، خوب به نقطهٔ H و خط‌المرکزین OO' در شکل مقابل توجه کنید.



نکته اگر مطابق شکل زیر، M وسط پاره‌خط AB باشد، می‌توانیم بنویسیم:

$$M=\frac{A+B}{2}$$

همان‌طور که می‌بینید $H(-1,2)$، وسط پاره‌خط OO' است، پس طبق نکتهٔ بالا می‌توانیم بگوییم:

$$H=\frac{O+O'}{2} \Rightarrow (-1,2)=\frac{(\alpha,\beta)+(-3,1)}{2} \Rightarrow (-2,4)=(\alpha-3,\beta+1)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \alpha-3=-2 \Rightarrow \alpha=1 \\ \beta+1=4 \Rightarrow \beta=3 \end{cases} \Rightarrow O(1,3)$$

حالا که مرکز و شعاع دایرهٔ کوچک‌تر را داریم؛ می‌توانیم معادله‌اش را به کمک مورد (۳) درس‌نامه بنویسیم:

$$(x-1)^2+(y-3)^2=(\sqrt{5})^2$$

$$\Rightarrow (x^2-2x+1)+(y^2-6y+9)=5 \Rightarrow x^2+y^2-2x-6y+5=0$$

گام (محاسبهٔ خواستهٔ سؤال)

در آخر محل تقاطع دو دایره را طبق مورد (۵) درس‌نامه در ۲ مرحله پیدا می‌کنیم:

◇ **پیداکردن معادلهٔ وترمشترک دو دایره:** طبق مورد (۴) درس‌نامه معادلهٔ وترمشترک دایره‌های $x^2+y^2+6x-2y-10=0$ و $x^2+y^2-2x-6y+5=0$ به صورت زیر به دست می‌آید:

$$(x^2+y^2-2x-6y+5)-(x^2+y^2+6x-2y-10)=0-0$$

$$\Rightarrow -8x-4y+15=0 \Rightarrow y=-2x+\frac{15}{4}$$

◇ **جای‌گذاری وترمشترک در معادلهٔ یکی از دایره‌ها:** حالا $y=-2x+\frac{15}{4}$ را در معادلهٔ $x^2+y^2-2x-6y+5=0$ جای‌گذاری می‌کنیم تا به یک معادلهٔ درجه۲ برحسب x (طول نقاط تقاطع) برسیم:

$$x^2+(-2x+\frac{15}{4})^2-2x-6(-2x+\frac{15}{4})+5=0 \quad (*)$$

نکته مجموع ریشه‌های معادلهٔ درجه‌دوم $Ax^2+Bx+C=0$ به شرطی که $\Delta>0$ باشد برابر است با:

$$\text{مجموع ریشه‌ها}=-\frac{B}{A}$$

طبق نکتهٔ قبلی، برای به دست آوردن مجموع طول نقطه‌های برخورد دو دایره (که همان ریشه‌های معادلهٔ (*) می‌شود)، فقط به ضریب x و x^2 احتیاج داریم، پس دیگر محاسبات اضافی روی معادلهٔ (*) انجام نمی‌دهیم:

$$x^2+(4x^2-15x+\bigcirc)-2x+12x-\bigcirc=0$$

$$\Rightarrow \underbrace{5}_{A}x^2\underbrace{-5}_{B}x+\bigcirc=0 \Rightarrow \text{مجموع ریشه‌ها}=-\frac{B}{A}=-\frac{-5}{5}=1$$

۱۷- گزینه ۲

درس‌نامه در پرتاب دو تاس، برای به دست آوردن احتمال رخ‌دادن هر پیشامدی، اول جدولی به شکل زیر رسم کنید و داخل خانه‌های مطلوب ضربدر بزنید تا تعداد حالات مطلوب به دست آید؛ بعد حاصل را بر تعداد کل حالت‌ها تقسیم کنید.

تاس اول

تاس دوم	۱	۲	۳	۴	۵	۶
۱			×			×
۲			×			×
۳	×	×	×	×	×	×
۴			×			×
۵			×			×
۶	×	×	×	×	×	×

تعداد کل حالت‌های پرتاب دو تاس $6\times6=36$ تا است.

مثلاً در جدول بالا، حالاتی را مشخص کردیم که حاصل‌ضرب اعداد روشده، مضرب ۳ باشد؛ پس احتمال این‌که دو تاس پرتاب کنیم و حاصل‌ضرب اعداد روشده مضرب ۳ شود، برابر $\frac{20}{36}=\frac{5}{9}$ است.

طبق درس‌نامه، اول جدول زیر را می‌کشیم. حالا باید به دنبال خانه‌هایی باشیم که حداقل یک عدد مضرب ۳ و مجموع دو عدد روشده برابر ۷ باشد. این خانه‌ها را در جدول با × مشخص می‌کنیم. همان‌طور که می‌بینید، ۴ خانه از ۳۶ خانه علامت‌دار شده‌اند، پس احتمال مورد نظر برابر می‌شود با:

$$P=\frac{4}{36}=\frac{1}{9}$$

تاس اول

تاس دوم	۱	۲	۳	۴	۵	۶
۱						×
۲						
۳				×		
۴			×			
۵						
۶	×					

۱۸- گزینه ۱

درس‌نامه میانگین و واریانس n دادهٔ x_1، x_2، ... و x_n از رابطه‌های زیر محاسبه می‌شوند:

میانگین: $\bar{x}=\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}$

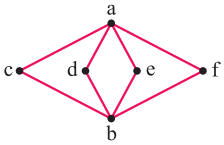
واریانس: $\sigma^2=\frac{(x_1-\bar{x})^2+(x_2-\bar{x})^2+\cdots+(x_n-\bar{x})^2}{n}$

گام میانگین دو دسته در ابتدا مساوی و برابر $\bar{x}$ است. می‌دانیم با جابه‌جایی یک داده بین دو دسته، باز هم میانگین‌ها مساوی شده‌اند؛ پس داده‌های جابه‌جاشده بین دو دسته، یکسان بوده‌اند. (وگرنه میانگین تغییر می‌کرد.)

گام حالا که فهمیدیم دادهٔ یکسانی مثل a بین دو دسته جابه‌جاشده است، می‌توانیم بگوییم در واقع دو گروه (a,b,c,d) و (a,e,f,g,h) را داشته‌ایم که با تغییر جای a و a، عملاً هیچ تغییری نکرده‌اند.

پس واریانس دسته‌ها با قبل هیچ فرقی ندارد و واریانس دستهٔ اول، مثل قبل، همان ۱/۲۵ است.

۱۹- گزینه ۴

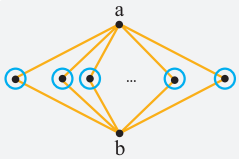


این گراف را به دو صورت می‌توانیم رسم کنیم که در هر دو حالت، ۶ دور داریم:

حالت اول: اگر گراف به شکل مقابل باشد، دورهای گراف عبارت‌اند از:

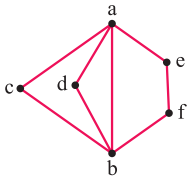
afbea , afbda , afbca , aebda , aebca , adbca

البته می‌توانستیم تعداد دورهای این گراف را به کمک نکتهٔ زیر هم محاسبه کنیم:



نکته اگر در گرافی با مرتبهٔ p، دو رأس از درجهٔ $p-2$ و رئوس دیگر از درجهٔ ۲ باشند به شرطی که دو رأس از درجهٔ $p-2$ مجاور نباشند، نمودار گراف به شکل مقابل می‌شود:

در این گراف فقط دورهایی به طول ۴ داریم که در همهٔ این دورها، دو رأس بالایی و پایینی (رئوس a و b) و ۲ رأس از بین رئوس رنگی وجود دارند. برای انتخاب ۲ رأس از بین رئوس رنگی (تعداد رئوس رنگی $p-2$ تاست) $\binom{p-2}{2}$ حالت داریم، پس تعداد دورها هم $\binom{p-2}{2}$ می‌شود.



با توجه به نکتهٔ گفته‌شده، در گراف G، ۶ $=\binom{4}{2}$ دور داریم.

حالت دوم: اگر گراف به شکل مقابل باشد، دورهای گراف عبارت‌اند از:

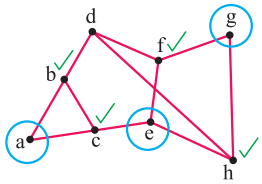
aefba , aefbda , aefbca , abda , abca , adbca

۲۰- گزینه ۱

درس‌نامه ۱ به زیرمجموعهٔ D از رئوس گراف G، یک **مجموعهٔ احاطه‌گر** می‌گوییم هرگاه هر رأس از گراف یا در D باشد یا حداقل با یکی از اعضای D مجاور باشد.

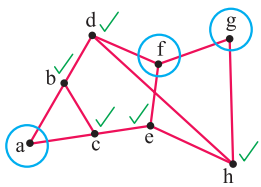
۲ مجموعهٔ احاطه‌گری که با حذف هر کدام از عضوهایش دیگر احاطه‌گر نباشد را یک **مجموعهٔ احاطه‌گر مینیمال** می‌نامیم.

گزینه‌ها را بررسی می‌کنیم:



۱ مطابق شکل، با انتخاب رئوس a، e و g، رأس d احاطه نمی‌شود، پس این مجموعه اصلاً احاطه‌گر نیست که بخواهد احاطه‌گر مینیمال باشد.

بررسی سایر گزینه‌ها: ۲ با انتخاب رئوس a، f و g، تمام رئوس گراف احاطه می‌شوند، پس این مجموعه احاطه‌گر هست. حالا اگر رأس a را از مجموعه حذف کنیم خود رأس a احاطه نمی‌شود. اگر رأس f را حذف کنیم، رأس‌های d و e احاطه نمی‌شوند و اگر رأس g را حذف کنیم، h احاطه نمی‌شود، پس با حذف‌کردن هر کدام از رئوس، این مجموعه دیگر احاطه‌گر نیست؛ در نتیجه احاطه‌گرِ مینیمال است.

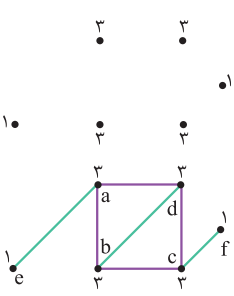


۳ و ۴ این مجموعه‌ها هم احاطه‌گر مینیمال هستند که بررسی آن‌ها مثل ۲ است.

مشاوره احاطه‌گری (درس ۲ گراف) از جمله مباحثی است که در نظام جدید به کتاب درسی اضافه شده و طراحان، علاقهٔ زیادی به این مبحث دارند، پس لازم است روی آن وقت کافی بگذارید.

۲۱- گزینه ۲

گام ۱ اول باید گراف را رسم کنیم. می‌خواهیم دو رأس با کم‌ترین درجه، غیرمجاور باشند، پس رأس‌ها را به این شکل می‌چینیم تا بیشترین فاصله را بین دو رأس با درجهٔ ۱ بیندازیم:



گام ۲ حالا یال‌ها را طوری به رأس‌های بالا اضافه می‌کنیم که درجه‌ها به هم نریزند؛ این‌طوری:

گام ۳ با توجه به گراف رسم‌شده، واضح است که فقط ۲ دور به طول ۳ داریم؛ یکی abda و دیگری dbcd.

مشاوره این چندمین بار است که طراحان، سؤال گراف را طوری می‌دهند که شما باید گراف را رسم کنید. پس حتماً رسم گراف از روی درجه‌های آن را خیلی خوب تمرین کنید.

۲۲- گزینه ۲

استراتژی کافی است به جای $\delta(G)$، $\Delta(G)$ و $q(G)$ به ترتیب بنویسید «$p-1$»، «$p-1$» و «$\frac{p(p-1)}{2}$» و معادلهٔ به‌دست‌آمده را حل کنید تا جواب حاصل شود.

درس‌نامه در هر گراف کامل pرأسی، مثل G، اگر درجهٔ بزرگ‌ترین رأس را با $\Delta(G)$، درجهٔ کوچک‌ترین رأس را با $\delta(G)$ و تعداد یال‌ها را با $q(G)$ نمایش دهیم، داریم:

$$\Delta(G)=\delta(G)=p-1\ ,\ q(G)=\frac{p(p-1)}{2}$$

با توجه به درس‌نامه، به جای $\Delta(G)$، $\delta(G)$ و $q(G)$ به ترتیب می‌نویسیم «$p-1$»، «$p-1$» و «$\frac{p(p-1)}{2}$»:

$$q(G)=\Delta^2(G)-2\delta(G)\ \Rightarrow\ \frac{p(p-1)}{2}=(p-1)^2-2(p-1)$$

در بین گزینه‌ها $p=1$ موجود نیست، پس $p-1\neq 0$ و در نتیجه حق داریم $(p-1)$ها را از طرفین معادله بزنیم:

$$\frac{p}{2}=(p-1)-2\ \Rightarrow\ \frac{p}{2}=p-3\ \xrightarrow{\times 2}\ p=2p-6\ \Rightarrow\ p=6$$

مشاوره شاید از نظر اکثر دانش‌آموزان، گراف سخت‌ترین فصل گسسته باشد، اما بعضی وقت‌ها مثل همین کنکور ساده‌ترین سؤال گسسته از گراف می‌آید. به همین خاطر پیشنهاد می‌کنیم هیچ مبحث و فصلی را حذف نکنید.

فیزیک

۲۳- گزینه ۲

درس‌نامه توان خروجی باتری: اختلاف پتانسیل دو سر باتری $\rightarrow P_{\text{خروجی}}=I\downarrow V$ جریان عبوری از باتری

توان خروجی باتری برابر است با:

$$P_{\text{خروجی}}=IV=1/5\times 6=9\ W$$

۲۴- گزینه ۳

گام ۱ خطوط میدان الکتریکی از بار مثبت خارج شده و به بار منفی وارد می‌شوند؛ پس با توجه به شکل، $q_1>0$ و $q_2<0$ است. (۱ و ۲ پَر!)

گام ۲ از آن‌جا که تعداد خطوط میدان الکتریکی خارج‌شده از q_1 نسبت به تعداد خطوط میدان الکتریکی واردشده به q_2 بیشتر است؛ پس $|q_1|>|q_2|$ است. (۴ پَرپَر!)

مشاوره این سؤال و شکل آن دقیقاً از تمرین کتاب درسی آمده است. پرسش‌ها و تمرین‌های کتاب درسی را جدی‌تر بگیرید.

۲۵- گزینه ۴

دماسنج‌های معیار عبارت‌اند از: ۱ دماسنج گازی ۲ دماسنج مقاومت پلاتینی ۳ تَفسنج (پیرومتر) (درستی ۱)

اساس کار دماسنج‌های مقاومت پلاتینی، مبتنی بر تغییر مقاومت الکتریکی با دما است (درستی ۲). در این دماسنج‌ها از پلاتین استفاده می‌کنند که تقریباً دچار خوردگی نمی‌شود (درستی ۳) و نقطهٔ ذوب بالایی دارد (نادرستی ۴).

۲۶- گزینه ۴

درس‌نامه ۱ اختلاف پتانسیل الکتریکی بین دو نقطه از میدان الکتریکی:

$$\Delta V = \frac{\Delta U}{q}$$

ΔV: اختلاف پتانسیل الکتریکی (V)، ΔU: تغییر انرژی پتانسیل الکتریکی (J)، q: بار الکتریکی (C)

هواستون باشه! توی این رابطه باید بار q رو با علامتش بذارین.

۲ اگر ذره‌ای با بار الکتریکی منفی در جهت میدان الکتریکی حرکت کند، انرژی پتانسیل الکتریکی آن افزایش و اگر در خلاف جهت میدان الکتریکی حرکت کند، انرژی پتانسیل الکتریکی آن کاهش می‌یابد.

انرژی پتانسیل الکتریکی این بار الکتریکی در حرکت از نقطهٔ A تا نقطه B افزایش یافته است. با توجه به این‌که علامت این بار الکتریکی منفی است، پس در جهت میدان الکتریکی حرکت کرده است (رد ۱ و ۲). با جای‌گذاری داده‌ها در رابطهٔ زیر، مقدار $V_B - V_A$ را به دست می‌آوریم:

$$\Delta V = \frac{\Delta U}{q} \xrightarrow[q=-۲۰\times۱۰^{-۹}\ C]{\Delta U=۲\times۱۰^{-۳}\ J} V_B - V_A = \frac{۲\times۱۰^{-۳}}{-۲۰\times۱۰^{-۹}} = -۱۰^{۵}\ V$$

تیزبازی علامت این بار الکتریکی منفی است و انرژی پتانسیل الکتریکی آن در حرکت از نقطهٔ A تا نقطهٔ B افزایش یافته است؛ بنابراین این بار الکتریکی در جهت میدان الکتریکی حرکت کرده است (رد ۱ و ۲). هم‌چنین با توجه به این‌که با حرکت در جهت میدان الکتریکی پتانسیل الکتریکی کاهش می‌یابد، پس $V_B < V_A$ و در نتیجه $V_B - V_A < ۰$ است. بنابراین فقط ۴ می‌تواند درست باشد.

۲۷- گزینه ۴

درس‌نامه ۱ چگالی سطحی بار الکتریکی: تراکم بار الکتریکی در سطح یک جسم را چگالی سطحی بار الکتریکی می‌گوییم و از رابطهٔ زیر به دست می‌آید.

$$\sigma = \frac{Q\ (C)\ \text{بار الکتریکی موجود در سطح}}{A\ (m^۲)\ \text{مساحت سطح}}$$

۲ مساحت سطح یک کره به شعاع r: $A = ۴\pi r^۲$

کافیست نسبت چگالی سطحی بار دو کرهٔ A و B را بنویسیم:

$$\frac{\sigma_A}{\sigma_B} = \frac{Q_A}{Q_B}\times\frac{A_B}{A_A} \xrightarrow[A=۴\pi r^۲]{Q_B=۰/۵\,Q_A} \frac{\sigma_A}{\sigma_B} = \frac{Q_A}{۰/۵Q_A}\times\frac{۴\pi r_B^۲}{۴\pi r_A^۲}$$

$$\xrightarrow{r_A=۲r_B} \frac{\sigma_A}{\sigma_B} = ۲\times\frac{r_B^۲}{(۲r_B)^۲} \Rightarrow \frac{\sigma_A}{\sigma_B} = ۲\times\frac{۱}{۴} = \frac{۱}{۲}$$

تله اگر در محاسبهٔ مساحت سطح کره، شعاع را به توان ۲ نرسانیم، به گزینهٔ نادرست ۱ می‌رسیم یا اگر نسبت $\frac{\sigma_B}{\sigma_A}$ را به دست بیاوریم، ۲ چشم به راه ماست.

۲۸- گزینه ۱

اگر بدانیم که بسامد، کمیت وابسته به چشمهٔ موج است و با تغییر محیط تغییر نمی‌کند، ۲، ۳ و ۴ حذف می‌شوند و فقط ۱ می‌ماند.

۲۹- گزینه ۲

شفاف‌سازی باید طول موج امواج صوتی گسیل‌شده توسط تار یعنی طول موج در هوا را حساب کنیم.

درس‌نامه رابطهٔ بین طول موج، تندی انتشار موج، دورهٔ تناوب موج و بسامد موج:

$$v = \frac{\lambda}{T} = \lambda f$$

v: تندی انتشار موج (m/s)، λ: طول موج (m)، T: دورهٔ تناوب (s)، f: بسامد (Hz)

وقتی موجی از یک محیط وارد یک محیط دیگر می‌شود، بسامد آن ثابت می‌ماند. با توجه به این‌که در صورت سؤال گفته نشده که طول موج صوت هماهنگ چندم را می‌خواهیم، ما صوت اصلی را در نظر می‌گیریم.

$$\lambda = \frac{v_{صوت}}{f} \xrightarrow[v_{صوت}=۳۴۰\ m/s]{f=۵۰۰\ Hz} \lambda = \frac{۳۴۰}{۵۰۰} = ۰/۶۸\ m = ۶۸\ cm$$

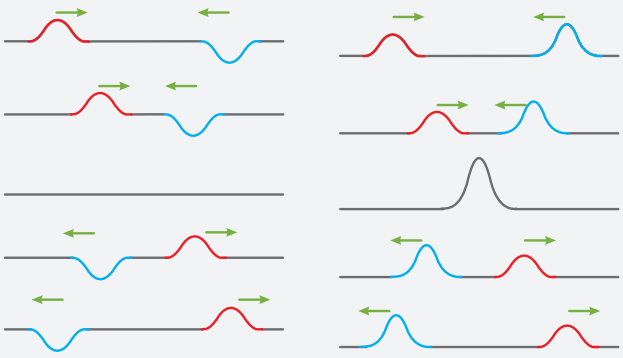
تذکر: در صورت سؤال باید گفته می‌شد که صوت هماهنگ چندم مد نظر است. اگر صوت هماهنگ دوم مد نظر طراح بود، طول موج صوت گسیل‌شده به صورت زیر به دست می‌آمد.

$$f_{موج\ صوتی} = f_{چشمه} = nf_۱ \xrightarrow[f_۱=۵۰۰\ Hz]{n=۲} f_{موج\ صوتی} = ۲\times۵۰۰ = ۱۰۰۰\ Hz$$

$$\lambda = \frac{v}{f} = \frac{۳۴۰}{۱۰۰۰} = ۰/۳۴\ m = ۳۴\ cm$$

۳۰- گزینه ۳

درس‌نامه وقتی دو یا چند موج هم‌زمان از یک منطقه عبور می‌کنند، با یکدیگر ترکیب می‌شوند که به آن **تداخل** می‌گوییم. شکل‌های «الف» و «ب» زیر، عکس‌های دو تپ را در چند لحظه‌های متوالی که در خلاف جهت یکدیگر حرکت می‌کنند، نشان می‌دهد. تپ‌ها در شکل «الف» هنگام هم‌پوشانی، تپ بزرگ‌تری را ایجاد کرده‌اند که به آن **تداخل سازنده** می‌گوییم، اما همان‌طور که در شکل «ب» می‌بینید، تپ‌ها هنگام هم‌پوشانی، اثر یکدیگر را حذف کرده‌اند که به آن **تداخل ویرانگر** می‌گوییم. توجه کنید که تپ‌ها یا موج‌هایی که هم‌پوشانی می‌کنند، شکل و حرکت یکدیگر را تغییر نمی‌دهند و پس از هم‌پوشانی، بدون تغییر شکل در **همان جهت** حرکت اولیهٔ خود، ادامهٔ مسیر می‌دهند.



الف) تداخل سازنده — ب) تداخل ویرانگر

با توجه به درس‌نامه، در تداخل دو تپ در طناب «الف»، تداخل **ویرانگر** و در طناب «ب»، تداخل **سازنده** ایجاد می‌شود و بعد از هم‌پوشانی، هر تپ **در جهت** حرکت اولیه، ادامهٔ مسیر می‌دهد.

مشاوره حتماً شما هم می‌دانید که این سؤال از شکل و متن کتاب درسی طراحی شده است و اگر حتی یک بار کتاب درسی را ورق می‌زدید، این سؤال را قبل از آزمون می‌دیدید!

۳۱- گزینه ۱

شفاف‌سازی کدام بسامد از بسامدهای تشدیدی تار نیست، یعنی کدام بسامد مضرب درستی از بسامد اصلی نیست.

درس‌نامه ۱ بسامدهای تشدیدی تار مرتعش دو انتها بسته، مضارب درستی از بسامد اصلی تار هستند.

$$f_n = n f_۱$$

f_n: بسامد تشدیدی هماهنگ nام (Hz)، $f_۱$: بسامد تشدیدی هماهنگ اول (اصلی) (Hz)

۲ در تار مرتعش دو انتها بسته، اختلاف دو بسامد تشدیدی متوالی برابر با بسامد تشدیدی هماهنگ اول است.

$$f_{n+۱} - f_n = f_۱$$

گام بسامد اصلی تار را با استفاده از اختلاف دو بسامد تشدیدی متوالی به دست می‌آوریم.

$$f_۱ = f_{n+۱} - f_n \Rightarrow f_۱ = ۲۸۰ - ۲۴۰ = ۴۰\ Hz$$

گام بسامدهای تشدیدی تار دو انتها بسته باید مضارب درستی از بسامد اصلی تار باشند؛ بنابراین بسامد ۶۰ Hz چون مضرب درستی از ۴۰ Hz نیست، نمی‌تواند بسامد تشدیدی تار باشد.

بررسی سایر گزینه‌ها:

۲) $n=\frac{۸۰}{۴۰}=۲$ ۳) $n=\frac{۱۶۰}{۴۰}=۴$ ۴) $n=\frac{۳۲۰}{۴۰}=۸$

مشاوره مبحث بسامدهای تشدیدی تار مرتعش دو انتها بسته، جزء مباحث پرتکرار کنکورهای اخیر است. این مبحث ساده را از دست ندهید.

۳۲- گزینه ۳

شفاف‌سازی در طول تار ۳ شکم تشکیل شده، یعنی شمارهٔ هماهنگ ۳ است.

درس‌نامه ۱ برای محاسبهٔ بسامد تشدیدی هماهنگ nام (f_n) با استفاده از بسامد تشدیدی اصلی $(f_۱)$ در تار مرتعش دو انتها بسته، از رابطهٔ زیر استفاده می‌کنیم:

$$f_n = nf_۱$$

تعداد شکم در طول تار مرتعش دو انتها بسته برابر با شمارهٔ هماهنگ (n) است.

۲ بسامد تشدیدی هماهنگ nام در تار مرتعش دو انتها بسته:

$$f_n=\frac{n\,v}{۲L}$$

(شمارهٔ هماهنگ، تندی انتشار (m/s)، طول تار (m))

گام ۳ سه شکم در طول تار ایجاد شده است، پس تار بسامد تشدیدی هماهنگ سوم $(n=۳)$ خود را انجام می‌دهد. بنابراین می‌توانیم بنویسیم:

$$f_n=nf_۱ \Rightarrow ۳۰۰=۳\times f_۱ \Rightarrow f_۱=۱۰۰\,Hz$$

گام ۴ در آخر داده‌ها را در رابطهٔ زیر جای‌گذاری می‌کنیم و تندی انتشار موج عرضی در تار را به دست می‌آوریم:

$$f_n=\frac{nv}{۲L} \xrightarrow[L=۶۰\,cm=۰/۶\,m]{f_n=۳۰۰\,Hz,\,n=۳} ۳۰۰=\frac{۳v}{۲\times ۰/۶} \Rightarrow v=۱۲۰\,m/s$$

شیمی

۳۳- گزینه ۳

درس‌نامه

در یک دوره از چپ به راست	در یک گروه از بالا به پایین
شعاع اتمی عنصرها کاهش می‌یابد.	شعاع اتمی عنصرها افزایش می‌یابد.
خصلت فلزی و واکنش‌پذیری فلزها کاهش می‌یابد.	خصلت فلزی و واکنش‌پذیری فلزها افزایش می‌یابد.
خصلت نافلزی و واکنش‌پذیری نافلزها افزایش می‌یابد.	خصلت نافلزی و واکنش‌پذیری نافلزها کاهش می‌یابد.

در هر گروه از جدول تناوبی با افزایش عدد اتمی (از بالا به پایین)، شعاع اتمی بزرگ‌تر می‌شود؛ بنابراین تمایل اتم به جذب الکترون و خصلت نافلزی، کاهش می‌یابد.

بررسی سایر گزینه‌ها: ۱) در هر دوره با کاهش عدد اتمی (از راست به چپ)، به دلیل افزایش شعاع اتمی، خصلت فلزی نیز افزایش می‌یابد.

۲) در هر گروه با کاهش عدد اتمی (از پایین به بالا)، شعاع اتمی کوچک‌تر می‌شود و خصلت نافلزی و واکنش‌پذیری یک نافلز، افزایش می‌یابد.

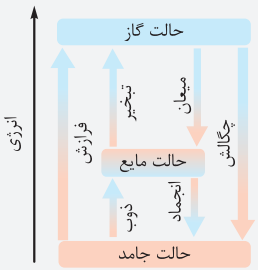
۴) در یک دوره از سمت راست به چپ با کاهش عدد اتمی و افزایش شعاع اتمی، خصلت نافلزی و واکنش‌پذیری نافلزها کاهش یافته و خصلت فلزی و واکنش‌پذیری فلزهای یک دوره، افزایش می‌یابد.

در ضمن می‌دونیم که تعداد الکترون‌های ظرفیت عناصر اصلی جدول (عناصر دسته‌های s و p) برابر با یکان شمارهٔ گروه آن‌ها در جدول تناوبی (۱ و ۲ و ۱۳ تا ۱۸) است؛ بنابراین می‌توان گفت بدون در نظر گرفتن گاز نجیب در هر دوره، با کاهش عدد اتمی و کاهش شمارهٔ گروه عنصرها، شمار الکترون‌های ظرفیت آن‌ها کاهش می‌یابد.

۳۴- گزینه ۳

نکته تغییر حالت‌های فیزیکی مواد خالص

تفاوت سطح انرژی یک ماده در حالت‌های مایع و گاز، بیشتر از تفاوت سطح انرژی حالت‌های جامد و مایع است؛ بنابراین برای مقدار معینی از یک مادهٔ خالص، میزان تغییر انرژی در فرایندهای تغییر حالت‌های فیزیکی، به صورت مقابل است:



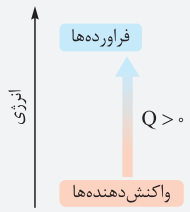
$$|\Delta H_{(ذوب\ یا\ انجماد)}| > |\Delta H_{(تبخیر\ یا\ میعان)}| > |\Delta H_{(فرازش\ یا\ چگالش)}|$$

فرایند تصعید (فرازش) یک ماده، دشوارتر از فرایندهای تبخیر و ذوب‌کردن آن ماده است. در ضمن ΔH تبخیر با $-\Delta H$ میعان برابر است.

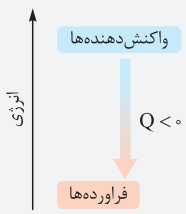
۳۵- گزینه ۴

درس‌نامه واکنش‌های گرماده، با آزادسازی انرژی همراه‌اند و سطح انرژی فراورده‌ها در آن‌ها پایین‌تر از واکنش‌دهنده‌ها است.

در حالی که واکنش‌های گرماگیر، با جذب انرژی همراه هستند و سطح انرژی فراورده‌ها در آن‌ها بالاتر از واکنش‌دهنده‌هاست.

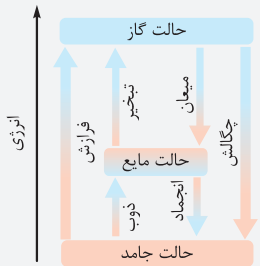


واکنش‌های گرماگیر



واکنش‌های گرماده

تغییر حالت فیزیکی مواد خالص: تغییر حالت فیزیکی مواد خالص با **تغییر انرژی** همراه است. در نمودار روبه‌رو تغییر انرژی متناظر با تغییر حالت‌های فیزیکی مختلف نشان داده شده است:



هر دو فرایند ذوب (تبدیل حالت فیزیکی جامد به مایع) و فرازش (تبدیل حالت فیزیکی جامد به گاز) گرماگیر و با افزایش سطح انرژی همراه‌اند، در حالی که فرایند میعان (تبدیل حالت فیزیکی گاز به مایع) گرماده بوده و با کاهش سطح انرژی همراه است.

۳۶- گزینه ۴

نکته اطلاعاتی را که در مورد ۴ نوع ترکیب آلی کربوکسیلیک اسیدها، استرها، کتون‌ها و آلدهیدها باید *بلد باشین*، در جدول زیر *براتون آوردیم*:

نام ترکیب	کربوکسیلیک‌اسید	استر	آلدهید	کتون
ساختار کلی	$R-\overset{O}{\overset{\|\|}{C}}-OH$	$R-\overset{O}{\overset{\|\|}{C}}-O-R'$	$R-\overset{O}{\overset{\|\|}{C}}-H$	$R-\overset{O}{\overset{\|\|}{C}}-R'$
گروه عاملی	کربوکسیل $(-\overset{O}{\overset{\|\|}{C}}-OH)$	استری $(-\overset{O}{\overset{\|\|}{C}}-O-)$	آلدهیدی $(-\overset{O}{\overset{\|\|}{C}}-H)$	کربونیل یا کتونی $(-\overset{O}{\overset{\|\|}{C}}-)$
نیروی بین مولکولی	هیدروژنی + وان‌دروالس	وان‌دروالس	وان‌دروالس	وان‌دروالس

نام ترکیب	کربوکسیلیک‌اسید	استر	آلدهید	کتون
فرمول مولکولی ترکیب سیرشده و فاقد حلقه	$C_nH_{2n}O_2$	$C_nH_{2n}O_2$	$C_nH_{2n}O$	$C_nH_{2n}O$
	ایزومر		ایزومر	

ترکیب «الف» یک کربوکسیلیک اسید ۴کربنه و ترکیب «ب»، یک استر ۴کربنه را نمایش می‌دهد. فرمول مولکولی این دو ترکیب به صورت $C_4H_8O_2$ بوده و ایزومر یکدیگر هستند. از طرفی ترکیب «پ»، یک کتون ۴کربنه و ترکیب «ت» نیز یک آلدهید ۴کربنه را نمایش می‌دهد. فرمول مولکولی این دو ترکیب نیز به صورت C_4H_8O بوده و ایزومرند. تا الان ۲ و ۳ پَر! با توجه به یکسان‌بودن شمار اتم‌های کربن (هر ۴ ترکیب، ۴کربنه هستند)، جرم مولی کربوکسیلیک اسید و استر ($C_nH_{2n}O_2$) به اندازهٔ جرم یک اتم اکسیژن، بیشتر از جرم مولی کتون و آلدهید ($C_nH_{2n}O$) است. از طرفی از میان این ۴ ترکیب، فقط کربوکسیلیک اسید توانایی تشکیل پیوند هیدروژنی را با مولکول‌های خود دارد؛ بنابراین ترکیب «الف» نقطهٔ جوش بالاتری از ۳ ترکیب دیگر دارد.

تیزبازی در این سؤال اصلاً نیاز نبود برای چک کردن ایزومربودن ترکیب‌ها، فرمول مولکولی اون‌ها رو به دست بیارید! با یه نگاه به ساختارها، متوجه می‌شید («الف» و «ت») و («ب» و «پ») نمی‌توانند ایزومر هم باشند، زیرا شمار اکسیژن‌های متفاوتی دارند و بین «الف» و «ت»، ترکیب (الف) چون توانایی تشکیل پیوند هیدروژنی را دارد، نقطهٔ جوش بالاتری را داراست.

۳۷- گزینه ۳

نکته

موارد مصرف نفت‌خام:
- حدود ۵۰٪ به عنوان سوخت در وسایل نقلیه
- حدود ۴۰٪ برای تأمین گرما و انرژی الکتریکی
- کم‌تر از ۱۰٪ برای تهیهٔ مواد (الیاف، پارچه، پلاستیک و ...)

حدود ۹۰٪ در تأمین انرژی

غلظت برخی گونه‌های فلزی مانند منگنز، کبالت، آهن، نیکل و مس، در کف اقیانوس نسبت به ذخایر زمینی بیشتر است.

مشاوره ۴ این سؤال، یه نکتهٔ کاملاً حفظی از متن کتاب درسی است. هرچند در این‌جا سؤال، شمارشی نیست و با توجه به گزینه‌های دیگر، به راحتی می‌شود به پاسخ تست رسید، اما با وجود چنین سؤالاتی، بهتره همهٔ نکات حفظی کتاب درسی را هم خوب بخونید.

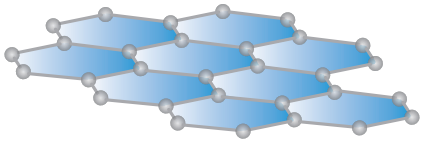
در استخراج ۱۰۰۰ کیلوگرم آهن، تقریباً ۲۰۰۰ کیلوگرم سنگ معدن آهن و ۱۰۰۰ کیلوگرم از منابع معدنی دیگر استفاده می‌شود.

$$\frac{\text{جرم سنگ معدن آهن}}{\text{جرم منابع معدنی دیگر}} = \frac{2000}{1000} = 2 \Leftarrow$$

۳۸- گزینه ۲

چگالی گرافیت ($2/27\ g.cm^{-3}$) از چگالی آب ($1\ g.cm^{-3}$) بیشتر است و تکهٔ کوچکی از آن بر روی آب شناور نمی‌ماند.

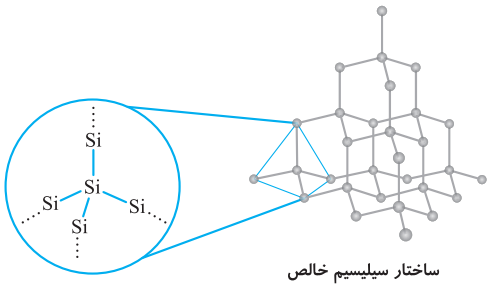
بررسی سایر گزینه‌ها: ۱ می‌دانیم که گرافن تک‌لایه‌ای از گرافیت است و ضخامت آن به اندازهٔ یک اتم کربن است؛ بنابراین با داشتن شعاع اتم کربن می‌توان ضخامت گرافن را اندازه‌گیری کرد.



گرافن

۳ در ساختار جامدهای کووالانسی دوبعدی مانند هر صفحهٔ گرافیت و جامد کووالانسی گرافن، اتم‌های کربن توسط پیوندهای اشتراکی در یک صفحه قرار گرفته‌اند.

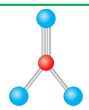
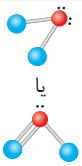
۴ سیلیسیم خالص (Si) یک جامد کووالانسی سه‌بعدی است؛ یعنی اتم‌های Si در این شبکه، در یک صفحه قرار نمی‌گیرند.



ساختار سیلیسیم خالص

۳۹- گزینه ۳

درس‌نامه با توجه به شمار جفت‌الکترون‌های ناپیوندی اتم مرکزی و شمار اتم‌های متصل به آن، می‌توان شکل هندسی یک گونه را تعیین کرد:

شمار اتم‌های متصل به اتم مرکزی	شمار جفت‌الکترون‌های ناپیوندی اتم مرکزی	شکل گونه	شکل کلی	مثال
۲	۰	خطی		N_2O، SCO، HCN و CO_2
۳	۰	سه‌ضلعی مسطح		SO_3، NO_3^- و CO_3^{2-}
۴	۰	چهاروجهی		$CHCl_3$، CH_4، CCl_4، NH_4^+، SO_4^{2-}، SiF_4 و SiH_4
۲	۱ یا ۲	خمیده	 یا	H_2O، H_2S، OF_2، O_3 و SO_2
۳	۱	هرمی		H_3O^+، PCl_3، NH_3 و NF_3

a یک مولکول دواتمی ناجورهسته مانند HF است؛ پس خیلی سریع، گزینه‌های ۱ و ۲ پَر!

از طرفی با توجه به مدل فضاپرکن SO_3 ( ) که در کتاب درسی اومده، می‌شه فهمید

۴ هم غلطه! پس جواب درست، ۳ است.

۴۰- گزینه ۱

نکته مقایسهٔ فولاد و تیتانیم:

جدول زیر برخی از ویژگی‌های تیتانیم را در مقایسه با فولاد زنگ‌نزن نشان می‌دهد. شما با توجه به این جدول، باید مقایسهٔ خواص تیتانیم و فولاد *رو بلد باشین*:

ویژگی / ماده	تیتانیم	فولاد
نقطهٔ ذوب ($^\circ C$)	۱۶۶۷	۱۵۳۵
چگالی ($g.mL^{-1}$)	۴/۵۱	۷/۹۰
واکنش با ذره‌های موجود در آب دریا	ناچیز	متوسط
مقاومت در برابر خوردگی	عالی	ضعیف
مقاومت در برابر سایش	عالی	عالی

۱ نقطهٔ ذوب: فولاد > تیتانیم
۲ چگالی: فولاد < تیتانیم
۳ واکنش با ذره‌های موجود در آب دریا: فولاد < تیتانیم
۴ مقاومت در برابر خوردگی: فولاد < تیتانیم
۵ مقاومت در برابر سایش: فولاد = تیتانیم

۱) از فلز تیتانیم برای ساختن موتور جت استفاده می‌شود. *به چند تا دلیل!* اول این‌که هنگامی که موتور جت کار می‌کند، همهٔ اجزای سازنده (ثابت و متحرک) دمای بالایی دارند، پس فلز مورد استفاده باید نقطهٔ ذوب بالایی داشته باشد که *تیتانیم داره!* دوم این‌که در ساخت موتور جت چگالی قطعات استفاده‌شده در آن هم مهم است *(هرچی سبک‌تر بهتر!)*. همان‌طور که می‌بینید چگالی تیتانیم از فولاد کم‌تر است؛ بنابراین قطعات ساخته‌شده از جنس تیتانیم نسبت به فولاد، سبک‌تر خواهند بود. *از طرف دیگه! مقاومت در برابر خوردگی و سایش هم مهمه! که تیتانیم در مقابل فولاد، گزینهٔ بهتری برای موتور جت است!*

۲) تیتانیم با ذره‌های موجود در آب دریا تقریباً واکنش نمی‌دهد، به همین دلیل از این فلز در ساخت پروانهٔ کشتی اقیانوس‌پیما استفاده می‌شود.

۳) از آن‌جا که تیتانیم در برابر خوردگی و سایش، مقاومت بالایی دارد، ساخت بناهایی از جمله موزهٔ گوگنهایم در اسپانیا با پوشش بیرونی تیتانیم، باعث افزایش ماندگاری آن شده است.

موارد «الف» و «ب» درست‌اند.

بررسی موارد نادرست:

(پ) فولاد با ذره‌های موجود در آب دریا بیشتر واکنش می‌دهد؛ بنابراین **مقاومت** آن در برابر واکنش با ذره‌های موجود در آب دریا، کم‌تر است.

(ت) به دلیل این‌که تیتانیم با ذره‌های موجود در آب دریا تقریباً واکنش نمی‌دهد، از این فلز در ساخت پروانهٔ کشتی اقیانوس‌پیما استفاده می‌شود.

مشاوره تجربهٔ کنکورهای اخیر ثابت کرده که طراحان محترم به حفظیات کتاب درسی، شکل‌ها، جدول‌ها و نمودارها، خیلی علاقه دارند! پس باید این موارد رو به خوبی بخونید و از هیچ جای کتاب درسی غافل نشید!

۴۱- گزینه ۱

نکته ۱ هر چه نیروهای جاذبهٔ میان ذره‌های سازندهٔ یک مادهٔ خالص، قوی‌تر باشد، تفاوت نقطهٔ ذوب و جوش آن بیشتر بوده و بنابراین در گسترهٔ دمایی بیشتری به حالت مایع است.

۲ مواد مولکولی، نقطهٔ ذوب و جوش پایین‌تری نسبت به مواد یونی دارند و گسترهٔ دمایی که در آن، مواد مولکولی به حالت مایع هستند، خیلی کم‌تر از گسترهٔ دمایی مایع‌بودن مواد یونی است.

هر ماده‌ای که در گسترهٔ دمایی بیشتری به حالت مایع باشد (تفاوت بین نقطهٔ ذوب و جوش آن بیشتر باشد)، می‌تواند انرژی گرمایی را بیشتر (برای مدت طولانی‌تری) نگه دارد.

H_2O ، N_2 و HF جزء مواد مولکولی هستند و گسترهٔ دمایی که در آن، این مواد به حالت مایع هستند، خیلی کم‌تر از گسترهٔ دمایی مایع‌بودن ترکیب‌های یونی، مانند KCl است.

۴۲- گزینه ۳

براساس مدل دریای الکترونی، ساختار فلزها، آرایش منظمی از **کاتیون‌ها** در **سه بعد** است که در فضای میان آن‌ها، **سست‌ترین الکترون‌های موجود در اتم** (الکترون‌های ظرفیت)، دریایی را ساخته‌اند و در آن آزادانه جابه‌جا می‌شوند.