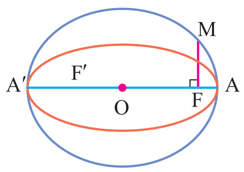
سؤالات امتحان شبیه‌ساز نهایی: هندسه (۳)	رشته: ریاضی و فیزیک	تاریخ امتحان:
نام و نام خانوادگی:	پایه دوازدهم دوره دوم متوسطه	مدت امتحان: ۱۲۰ دقیقه
منطبق بر رویکرد جدید امتحانات نهایی	مرکز ارزشیابی خیلی‌سبز	تعداد صفحه: ۲

ردیف	ســـــؤالات (پاسخنامه دارد.)	نمره
۱	الف) ماتریس مربعی A، یک ماتریس قطری نامیده می‌شود، هرگاه تمام درایه‌های واقع بر قطر اصلی آن برابر صفر باشد. (درست ـ نادرست) ب) اگر A و B دو ماتریس مربعی دلخواه از مرتبهٔ n باشند، آنگاه رابطهٔ $(A+B)(A-B)=A^۲-B^۲$ همواره برقرار است. پ) اگر A ماتریس ضرایب یک دستگاه دو معادله دو مجهولی و $\|A\| \neq ۰$ باشد، آنگاه دستگاه .... ت) اگر دو سطر ماتریس مربعی A یکسان باشد، آنگاه دترمینان ماتریس A برابر .... است.	۱
۲	ریشه‌های معادلهٔ $\begin{bmatrix} x & ۲ & ۱ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ۱ & ۱ & ۰ \\ ۲ & ۱ & ۱ \\ ۱ & ۲ & ۰ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ ۰ \\ -۳ \end{bmatrix} = ۰$ را به‌دست آورید.	۱/۲۵
۳	اگر $A=\begin{bmatrix} ۲ & -۱ \\ ۳ & ۴ \end{bmatrix}$ باشد، مقادیر α و β را به‌گونه‌ای بیابید که رابطهٔ $A^{-۱}=\alpha A+\beta I$ برقرار باشد.	۱/۲۵
۴	به ازای چه مقداری از k، دستگاه $\begin{cases} kx+۲y=۲k+۱ \\ ۳x+(k-۱)y=۷ \end{cases}$ بی‌شمار جواب دارد؟	۱/۲۵
۵	اگر A یک ماتریس ۲×۲ و $\|A\|=۸$ باشد، حاصل $\left\| \|A\|\, ۲A^{-۱} \right\|$ را به‌دست آورید.	۱/۲۵
۶	الف) اگر صفحهٔ P با مولد رویهٔ مخروطی موازی باشد و از رأس مخروط عبور نکند، در این صورت فصل مشترک صفحه و سطح مخروطی، یک بیضی است. (درست ـ نادرست) ب) رابطهٔ ضمنی $x^۲+y^۲+ax+by+c=۰$ معادلهٔ یک دایره است، اگر و تنها اگر	۰/۵
۷	با رسم شکل، مکان هندسی مرکزهای همهٔ دایره‌هایی با شعاع ۲ را تعیین کنید که بر دایرهٔ $C(O,۵)$ در صفحهٔ این دایـره مماس داخل‌اند. (روش خود را شرح دهید.)	۰/۷۵
۸	معادلهٔ دایره‌ای را بنویسید که با دایرهٔ $x^۲+y^۲-۲x-۴y-۵=۰$ هم‌مرکز بوده و از خط d به معادلهٔ $y=\frac{۳}{۴}x+۵$، وتری بـه طول ۸ جدا کند.	۱
۹	نقاط $O(۰,۰)$، $A(۲,-۱)$ و $B(۴,۳)$ رئوس مثلث OAB هستند. معادلهٔ دایرهٔ محیطی این مثلث را بنویسید.	۱/۵
۱۰	در شکل زیر قطر دایره همان قطر بزرگ بیضی است. از کانون F عمودی بر قطر بزرگ بیضی رسم کرده‌ایم تا دایـره را در نقطه‌ای مانند M قطع کند. ثابت کنید MF برابر نصف قطر کوچک بیضی است. 	۰/۷۵
۱۱	خروج از مرکز یک بیضی $\frac{۵}{۱۳}$ و فاصلهٔ یکی از دو سر قطر بزرگ تا کانون دورتر ۳۶ است. طول قطر کوچک این بیضـی را به‌دست آورید.	۱/۲۵
۱۲	معادلهٔ دایره‌ای را بنویسید که مرکز آن کانون سهمی به معادلهٔ $x=y^۲+۳y+۵$ بوده و بر خط هادی این سـهمی ممـاس باشد.	۱/۵
۱۳	فاصلهٔ کانون تا رأس یک دیش مخابراتی ۷۲ سانتی‌متر و قطر دهانهٔ آن ۱۶۸ سانتی‌متر است. عمق این دیش مخـابراتی چقدر است؟	۰/۷۵

سؤالات امتحان شبیه‌ساز نهایی: هندسه (۳)	رشته: ریاضی و فیزیک	تاریخ امتحان:
نام و نام خانوادگی:	پایه دوازدهم دوره دوم متوسطه	مدت امتحان: ۱۲۰ دقیقه
منطبق بر رویکرد جدید امتحانات نهایی	مرکز ارزشیابی خیلی‌سبز	تعداد صفحه: ۲

ردیف	ســــؤالات (پاسخ‌نامه دارد.)	نمره
۱۴	الف) معادلهٔ $x = 0$، نمودار محور x ها را در فضا مشخص می‌کند. (درست ـ نادرست) ب) اگر $\lvert \vec{a}-\vec{b} \rvert = \lvert \vec{a}+\vec{b} \rvert$ باشد، زاویهٔ بین دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ برابر 90° است. (درست ـ نادرست) پ) نقطهٔ $A = (-2,3,1)$ در ناحیهٔ .... دستگاه $\mathbb{R}^3$ قرار دارد. ت) فاصلهٔ نقطهٔ $B = (2,1,3)$ از مبدأ مختصات برابر .... است.	۱
۱۵	بر روی دو بردار $\vec{a} = 2\vec{i} + 3\vec{j}$ و $\vec{b} = \vec{i} - \vec{j} - 2\vec{k}$ متوازی‌الاضلاعی ساخته شده است. زاویهٔ حادهٔ بین قطرهای این متوازی‌الاضلاع را بیابید.	۱/۵
۱۶	سه نقطهٔ $A = (1,-2,3)$، $B = (2,0,1)$ و $C = (-3,2,1)$ در صفحه مفروض‌اند. الف) مساحت مثلث ABC را به‌دست آورید. ب) تصویر قائم بردار $\overrightarrow{AB}$ بر امتداد بردار $\overrightarrow{BC}$ را به‌دست آورید.	۲
۱۷	بر روی سه بردار $\vec{a} = 2\vec{i} - \vec{j}$، $\vec{b} = \vec{j} + 3\vec{k}$ و $\vec{c} = 4\vec{i} - \vec{k}$ یک متوازی‌السطوح ساخته شده است. اگر قاعدهٔ این متوازی‌السطوح را بردارهای $\vec{a}$ و $\vec{b}$ تشکیل دهند، اندازهٔ ارتفاع متوازی‌السطوح را به‌دست آورید.	۱/۵
	سربلند و پیروز باشید. جمع نمره	۲۰

هندسه (۳)

۱ **الف) ماتریس مربعی A ، یک ماتریس قطری نامیده می‌شود، هرگاه تمام درایه‌های واقع بر قطر اصلی آن برابر صفر باشد. (درست ـ نادرست)** (۱)

ب) اگر A و B دو ماتریس مربعی دلخواه از مرتبهٔ n باشند، آنگاه رابطهٔ $(A+B)(A-B)=A^۲-B^۲$ همواره برقرار است.

پ) اگر A ماتریس ضرایب یک دستگاه دو معادله دو مجهولی و $|A|\neq ۰$ باشد، آنگاه دستگاه ....

ت) اگر دو سطر ماتریس مربعی A یکسان باشد، آنگاه دترمینان ماتریس A برابر .... است.

راهنمای تصحیح

الف) نادرست (۰/۲۵) (صفحهٔ ۱۲)

ب) نادرست (۰/۲۵) (صفحهٔ ۱۹)

پ) دارای جواب منحصر به فرد است. (۰/۲۵) (صفحهٔ ۲۶)

ت) صفر (۰/۲۵) (صفحهٔ ۳۰)

پاسخ خیلی تشریحی

الف) ماتریس قطری، ماتریسی است مربعی که تمام درایه‌های غیر واقع بر قطر اصلی آن صفر باشد.

$$A=\begin{bmatrix} ۲ & ۰ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix} \ , \ B=\begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & -۲ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۵ \end{bmatrix}$$

ب) اتحادهای جبری تنها در صورتی برای ماتریس‌ها برقرار هستند که دو ماتریس تعویض‌پذیر باشند. به یاد داشته باشید که ضرب دو ماتریس در حالت کلی خاصیت جابه‌جایی ندارد.

پ) اگر A ماتریس ضرایب دستگاه و $|A|\neq ۰$ باشد، آنگاه دستگاه جواب منحصر به فرد دارد.

ت) اگر دو سطر ماتریس مربعی A یکسان باشد، آنگاه دترمینان ماتریس A برابر صفر است.

$$A=\begin{bmatrix} a & b & c \\ a & b & c \\ d & e & f \end{bmatrix} \Rightarrow |A|=۰$$

مشاوره این سؤال مشابه سؤالی از کنکور ریاضی داخل ۹۸ طراحی شده است. مشابه این سؤال (در حالتی که ماتریس وسطی ۲×۲ باشد) بارها در امتحانات نهایی تکرار شده است.

۲ ریشه‌های معادلهٔ $\begin{bmatrix} x & ۲ & ۱ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۱ & ۱ & ۰ \\ ۲ & ۱ & ۱ \\ ۱ & ۲ & ۰ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ ۰ \\ -۳ \end{bmatrix} = ۰$ را به‌دست آورید. (۱/۲۵)

راهنمای تصحیح (۱/۲۵) (صفحه‌های ۱۷ و ۱۸)

$$\begin{bmatrix} x & ۲ & ۱ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۱ & ۱ & ۰ \\ ۲ & ۱ & ۱ \\ ۱ & ۲ & ۰ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ ۰ \\ -۳ \end{bmatrix} = ۰ \Rightarrow \underbrace{\begin{bmatrix} x+۵ & x+۴ & ۲ \end{bmatrix}}_{(۰/۵)}\begin{bmatrix} x \\ ۰ \\ -۳ \end{bmatrix} = ۰$$

$$\Rightarrow \left[x(x+۵)+۲(-۳)\right] = ۰ \Rightarrow \underbrace{x^۲+۵x-۶=۰}_{(۰/۲۵)} \Rightarrow (x+۶)(x-۱)=۰ \Rightarrow \begin{cases} x=-۶ & (۰/۲۵) \\ x=۱ & (۰/۲۵) \end{cases}$$

درس Box

ضرب ماتریس‌ها خاصیت شرکت‌پذیری دارد، یعنی برای سه ماتریس A ، B و C (در صورتی‌که ضرب ۳ ماتریس امکان‌پذیر باشد) داریم:

$$A(BC) = (AB)C$$

نکته

ماتریس $[k]_{۱\times۱}$ را مساوی با عدد حقیقی k تعریف می‌کنیم.

$$[k] = k$$

مشاوره محاسبهٔ ماتریس وارون یکی از سؤالات احتمالی امتحان نهایی خواهد بود (ممکن است به‌طور مستقیم مورد سؤال قرار گیرد و یا به‌طور غیرمستقیم مثلاً در قالب حل دستگاه مطرح شود). مشابه این سؤال در گذشته در امتحان نهایی و کنکور طراحی شده است.

۳ اگر $A=\begin{bmatrix} ۲ & -۱ \\ ۳ & ۴ \end{bmatrix}$ باشد، مقادیر α و β را به‌گونه‌ای بیابید که رابطهٔ $A^{-1}=\alpha A+\beta I$ برقرار باشد. (۱/۲۵)

راهنمای تصحیح (۱/۲۵ ـ صفحهٔ ۲۳)

$$A=\begin{bmatrix} ۲ & -۱ \\ ۳ & ۴ \end{bmatrix} \Rightarrow A^{-۱}=\frac{۱}{۱۱}\begin{bmatrix} ۴ & ۱ \\ -۳ & ۲ \end{bmatrix} \ (۰/۲۵)$$

$$A^{-۱}=\alpha A+\beta I \Rightarrow \frac{۱}{۱۱}\begin{bmatrix} ۴ & ۱ \\ -۳ & ۲ \end{bmatrix}=\alpha\begin{bmatrix} ۲ & -۱ \\ ۳ & ۴ \end{bmatrix}+\beta\begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} \frac{۴}{۱۱} & \frac{۱}{۱۱} \\ -\frac{۳}{۱۱} & \frac{۲}{۱۱} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۲\alpha+\beta & -\alpha \\ ۳\alpha & ۴\alpha+\beta \end{bmatrix} \ (۰/۵)$$

$$-\alpha=\frac{۱}{۱۱} \Rightarrow \alpha=-\frac{۱}{۱۱} \ (۰/۲۵)$$

$$۲\alpha+\beta=\frac{۴}{۱۱} \Rightarrow -\frac{۲}{۱۱}+\beta=\frac{۴}{۱۱} \Rightarrow \beta=\frac{۶}{۱۱} \ (۰/۲۵)$$

درس Box

ماتریس مربعی A را در نظر بگیرید. اگر $|A|\neq ۰$ باشد، آنگاه ماتریس A وارون‌پذیر است و وارون آن طبق رابطهٔ زیر به‌دست می‌آید:

$$A=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \Rightarrow A^{-۱}=\frac{۱}{|A|}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

پاسخ‌خیلی‌تشریحی ابتدا وارون ماتریس A را محاسبه می‌کنیم:

$$|A|=۲\times۴-(-۱)\times۳=۱۱ \Rightarrow A^{-۱}=\frac{۱}{۱۱}\begin{bmatrix} ۴ & ۱ \\ -۳ & ۲ \end{bmatrix}$$

حال ماتریس‌های $A^{-۱}$، A و I را در رابطهٔ صورت سؤال قرار می‌دهیم:

$$A^{-۱}=\alpha A+\beta I$$

$$\Rightarrow \frac{۱}{۱۱}\begin{bmatrix} ۴ & ۱ \\ -۳ & ۲ \end{bmatrix}=\alpha\begin{bmatrix} ۲ & -۱ \\ ۳ & ۴ \end{bmatrix}+\beta\begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۲\alpha & -\alpha \\ ۳\alpha & ۴\alpha \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} \beta & ۰ \\ ۰ & \beta \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۲\alpha+\beta & -\alpha \\ ۳\alpha & ۴\alpha+\beta \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} ۲\alpha+\beta=\frac{۴}{۱۱} \\ -\alpha=\frac{۱}{۱۱} \\ ۳\alpha=-\frac{۳}{۱۱} \\ ۴\alpha+\beta=\frac{۲}{۱۱} \end{cases}$$

دو معادله را انتخاب کرده و با حل آنها مقادیر α و β را پیدا می‌کنیم.

$$\begin{cases} -\alpha = \frac{۱}{۱۱} \Rightarrow \alpha = -\frac{۱}{۱۱} \\ ۲\alpha + \beta = \frac{۴}{۱۱} \Rightarrow -\frac{۲}{۱۱} + \beta = \frac{۴}{۱۱} \Rightarrow \beta = \frac{۶}{۱۱} \end{cases}$$

مشاوره این سؤال براساس مطالب صفحهٔ ۲۶ کتاب درسی طراحی شده است و از الگوهای پرتکرار سؤالات فصل ماتریس در امتحان نهایی محسوب می‌شود.

۴ به ازای چه مقداری از k، دستگاه $\begin{cases} kx+2y=2k+1 \\ 3x+(k-1)y=7 \end{cases}$ بی‌شمار جواب دارد؟ (۱/۲۵)

راهنمای تصحیح (۱/۲۵) (صفحهٔ ۲۶)

شرط بی‌شمار جواب : $\frac{k}{3}=\frac{2}{k-1}=\frac{2k+1}{7}$ (۰/۲۵)

$\frac{k}{3}=\frac{2}{k-1} \Rightarrow k(k-1)=6 \Rightarrow k^2-k-6=0 \Rightarrow (k-3)(k+2)=0$

$\Rightarrow \begin{cases} k=3 \\ k=-2 \end{cases}$ (۰/۵)

$k=3 \Rightarrow \frac{3}{3}=\frac{7}{7}$ قابل قبول (۰/۲۵)

$k=-2 \Rightarrow -\frac{2}{3}\neq-\frac{3}{7}$ غیرقابل قبول (۰/۲۵)

درس Box

دستگاه معادلات $\begin{cases} ax+by=c \\ a'x+b'y=c' \end{cases}$ را در نظر بگیرید.

الف) اگر $\frac{a}{a'}\neq\frac{b}{b'}$ باشد، دستگاه دارای جواب منحصر به فرد است.

ب) اگر $\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}\neq\frac{c}{c'}$ باشد، دستگاه جواب ندارد.

پ) اگر $\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}=\frac{c}{c'}$ باشد، دستگاه بی‌شمار جواب دارد.

پاسخ خیلی تشریحی

ابتدا شرط وجود بی‌شمار جواب برای دستگاه را می‌نویسیم:

$$\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}=\frac{c}{c'}$$

با توجه به دستگاه، ضرایب را در معادله قرار می‌دهیم:

$$\frac{k}{3}=\frac{2}{k-1}=\frac{2k+1}{7}$$

حال معادلهٔ سمت چپ را حل کرده و مقادیر k را به‌دست می‌آوریم:

$$\frac{k}{3}=\frac{2}{k-1} \Rightarrow k(k-1)=6 \Rightarrow k^2-k=6 \Rightarrow k^2-k-6=0$$

$$\Rightarrow (k-3)(k+2)=0 \Rightarrow \begin{cases} k=3 \\ k=-2 \end{cases}$$

حال معادلهٔ $\frac{2k+1}{7}=\frac{k}{3}$ را در نظر گرفته و مقادیر k را در آن قرار می‌دهیم. در صورت برقراری رابطه، جواب قابل قبول است.

$k=3 \Rightarrow \frac{3}{3}=\frac{7}{7}=1 \Rightarrow$ قابل قبول

$k=-2 \Rightarrow -\frac{2}{3}\neq-\frac{3}{7} \Rightarrow$ غیرقابل قبول

مشاوره این سؤال از تیپ‌های پرتکرار امتحان نهایی در مبحث دترمینان است و سؤالاتی مشابه آن نیز در کنکورهای ریاضی داخل ۹۸ و نوبت اول ۱۴۰۲ نیز طرح شده است.

۵ اگر A یک ماتریس ۲×۲ و $||A|A| = 8$ باشد، حاصل $|2A^{-1}|$ را به‌دست آورید. (۱/۲۵)

راهنمای تصحیح (۱/۲۵) (صفحهٔ ۳۱)

$$||A|A| = 8 \Rightarrow \underbrace{|A|^2 \times |A| = 8}_{(0/25)} \Rightarrow |A|^3 = 8 \Rightarrow |A| = 2 \ (0/25)$$

$$|A^{-1}| = \frac{1}{|A|} = \frac{1}{2} \ (0/25)$$

$$|2A^{-1}| = \underbrace{2^2 \times |A|^{-1}}_{(0/25)} = 4 \times \frac{1}{2} = 2 \ (0/25)$$

درس Box

۱) اگر A یک ماتریس مربعی وارون‌پذیر باشد، آنگاه $|A^{-1}| = \frac{1}{|A|}$.

۲) اگر k عددی حقیقی و A یک ماتریس مربعی از مرتبهٔ n باشد، آنگاه داریم:

$$|kA| = k^n |A|$$

۶ **الف) اگر صفحهٔ P با مولد رویهٔ مخروطی موازی باشد و از رأس مخروط عبور نکند، در این صورت فصل مشترک صفحه و سطح مخروطی، یک بیضی است. (درست ـ نادرست)** (۰/۵)

ب) رابطهٔ ضمنی $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$ معادلهٔ یک دایره است، اگر و تنها اگر ....

راهنمای تصحیح

الف) نادرست (۰/۲۵) (صفحهٔ ۳۵)

ب) $a^2 + b^2 > 4c$ (۰/۲۵) (صفحهٔ ۴۲) (اشاره به $a^2 + b^2 - 4c > 0$ نیز قابل قبول است و نمره تعلق می‌گیرد.)

پاسخ خیلی تشریحی

الف) اگر صفحهٔ P با مولد رویهٔ مخروطی موازی باشد و از رأس مخروط عبور نکند، در این صورت فصل مشترک صفحه و سطح مخروطی، یک سهمی است.

ب) رابطهٔ ضمنی $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$ معادلهٔ یک دایره است، اگر و تنها اگر $a^2 + b^2 > 4c$ باشد.

اگر $a^2 + b^2 < 4c$ باشد، این معادله هیچ نقطه‌ای از صفحه را مشخص نمی‌کند.

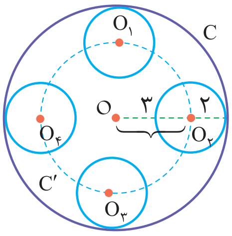
اگر $a^2 + b^2 = 4c$ باشد، این معادله تنها یک نقطه با مختصات $O(-\frac{a}{2}, -\frac{b}{2})$ را در صفحه مشخص می‌کند.

مشاوره این سؤال مشابه تمرین ۱ (ت) صفحهٔ ۳۹ کتاب درسی طراحی شده است.

۷ **با رسم شکل، مکان هندسی مرکزهای همهٔ دایره‌هایی با شعاع ۲ را تعیین کنید که بر دایرهٔ $C(O,5)$ در صفحهٔ این دایره مماس داخل‌اند. (روش خود را شرح دهید.)** (۰/۷۵)

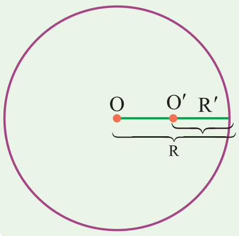
راهنمای تصحیح (۰/۷۵) (صفحهٔ ۳۹)

مطابق شکل، مکان هندسی مرکزهای همهٔ دایره‌هایی با شعاع ۲ که بر دایرهٔ $C(O,5)$ در صفحهٔ این دایره مماس داخل هستند، دایرهٔ C' به مرکز O و شعاع ۳ است. (۰/۵)



رسم شکل (۰/۲۵)

درس Box دو دایرهٔ $C(O,R)$ و $C'(O',R')$ مماس داخل‌اند، هرگاه $OO' = |R-R'|$ باشد.



مشاوره این سؤال مشابه کار در کلاس صفحهٔ ۴۳ کتاب درسی طراحی شده است و یکی از پرتکرارترین تیپ‌های سؤالات دایره در امتحان نهایی محسوب می‌شود.

۸ معادلهٔ دایره‌ای را بنویسید که با دایرهٔ $x^2+y^2-2x-4y-5=0$ هم‌مرکز بوده و از خط d به معادلهٔ $y=\frac{3}{4}x+5$، وتری به طول ۸ جدا کند. (ا)

راهنمای تصحیح (ا) (صفحهٔ ۴۳)

$x^2+y^2-2x-4y-5=0 \Rightarrow$ مرکز دایره : $O(1,2)$ (۰/۲۵)

$y=\frac{3}{4}x+5 \xrightarrow{\times 4} 4y=3x+20 \Rightarrow 3x-4y+20=0$

$OH=\frac{|3(1)-4(2)+20|}{\sqrt{3^2+(-4)^2}}=\frac{15}{5}=3$ (۰/۲۵)

$\overset{\Delta}{OAH}: OA^2=OH^2+AH^2=3^2+4^2=25 \Rightarrow OA=5$ (۰/۲۵)

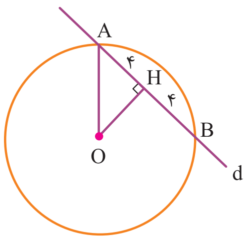
معادلهٔ دایره: $(x-1)^2+(y-2)^2=25$ (۰/۲۵)

درس Box

۱) فاصلهٔ نقطهٔ $A(x_0,y_0)$ از خط به معادلهٔ $ax+by+c=0$، از رابطهٔ $d=\frac{|ax_0+by_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$ محاسبه می‌شود.

۲) هرگاه از مرکز یک دایره عمودی بر یکی از وترهای آن دایره رسم کنیم، خط رسم شده آن وتر و کمان نظیر آن وتر را نصف می‌کند.

پاسخ خیلی تشریحی مطابق شکل ابتدا فاصلهٔ نقطهٔ O را از خط $3x-4y+20=0$ محاسبه می‌کنیم و با توجه به اینکه عمود رسم شده از مرکز دایره، وتر را نصف می‌کند، به کمک قضیهٔ فیثاغورس شعاع دایره را محاسبه می‌کنیم.



$x^2+y^2-2x-4y-5=0 \Rightarrow$ مرکز دایره : $O(1,2)$

$y=\frac{3}{4}x+5 \xrightarrow{\times 4} 4y=3x+20 \Rightarrow 3x-4y+20=0$

$OH=\frac{|3(1)-4(2)+20|}{\sqrt{3^2+(-4)^2}}=\frac{15}{5}=3$

$\overset{\Delta}{OAH}: OA^2=OH^2+AH^2=3^2+4^2=25 \Rightarrow OA=5$

معادلهٔ دایره: $(x-1)^2+(y-2)^2=25$

مشاوره این سؤال مشابه تمرین ۵ صفحهٔ ۴۶ طراحی شده است و نمونه‌های مشابه آن در کنکورهای گذشته به چشم می‌خورد.

۹ **نقاط $O(0,0)$، $A(2,-1)$ و $B(4,3)$ رئوس مثلث OAB هستند. معادلهٔ دایرهٔ محیطی این مثلث را بنویسید.** (۱/۵)

راهنمای تصحیح (۱/۵) (صفحهٔ ۴۶)

فرض کنید معادلهٔ دایره به‌صورت $x^2+y^2+ax+by+c=0$ باشد. مختصات نقاط O، A و B را در این معادله جای‌گذاری می‌کنیم.

$O(0,0) \Rightarrow C=0$ (۰/۲۵)

$A(2,-1) \Rightarrow 4+1+2a-b=0 \Rightarrow 2a-b=-5$ (۰/۲۵)

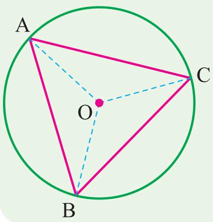
$B(4,3) \Rightarrow 16+9+4a+3b=0 \Rightarrow 4a+3b=-25$ (۰/۲۵)

$$\begin{cases}2a-b=-5\\4a+3b=-25\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}a=-4 \ (0/25)\\b=-3 \ (0/25)\end{cases}$$

معادلهٔ دایره: $x^2+y^2-4x-3y=0$ (۰/۲۵)

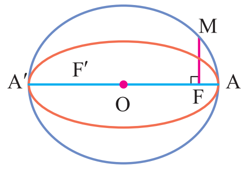
درس Box

فرض کنید نقاط A، B و C روی یک خط راست نباشند. دایره‌ای که از این سه نقطه عبور می‌کند، دایرهٔ محیطی مثلث ABC نامیده می‌شود. مرکز این دایره از سه نقطهٔ A، B و C به یک فاصله است، پس مرکز دایره همان نقطهٔ همرسی عمود منصف‌های اضلاع مثلث ABC است.



مشاوره این سؤال دقیقاً تمرین ۲ صفحهٔ ۵۷ کتاب درسی است و چندین بار سؤال امتحان نهایی بوده است.

۱۰ **در شکل زیر قطر دایره همان قطر بزرگ بیضی است. از کانون F عمودی بر قطر بزرگ بیضی رسم کرده‌ایم تا دایره را در نقطه‌ای مانند M قطع کند. ثابت کنید MF برابر نصف قطر کوچک بیضی است.** (۰/۷۵)



راهنمای تصحیح (۰/۷۵) (صفحهٔ ۵۷)

نقطهٔ M روی دایره قرار دارد، پس داریم:

$OM = OA = a$ (۰/۲۵)

$\overset{\Delta}{OMF} : \underbrace{MF^2 = OM^2 - OF^2 = a^2 - c^2}_{(0/25)} = b^2 \Rightarrow MF = b$ (۰/۲۵)

درس Box در هر بیضی به قطر بزرگ ۲a، قطر کوچک ۲b و فاصلهٔ کانونی ۲c، رابطهٔ $a^2 = b^2 + c^2$ برقرار است.

مشاوره معمولاً یکی از دو سؤال بیضی در امتحان نهایی به یک مسئله عددی ترکیبی از روابط بین اندازهٔ قطرهای بیضی و فاصلهٔ کانونی آن با خروج از مرکز بیضی اختصاص دارد.

۱۱ خروج از مرکز یک بیضی $\frac{۵}{۱۳}$ و فاصلهٔ یکی از دو سر قطر بزرگ تا کانون دورتر ۳۶ است. طول قطر کوچک این بیضی را به‌دست آورید. (۱/۲۵)

راهنمای تصحیح (۱/۲۵) (صفحه‌های ۴۸ و ۴۹)

فاصلهٔ هر یک از دو سر قطر بزرگ بیضی تا کانون دورتر نسبت به آن، برابر $a+c$ است، بنابراین داریم:

$$e=\frac{c}{a}=\frac{۵}{۱۳} \Rightarrow c=\frac{۵}{۱۳}a \quad (۰/۲۵)$$

$$a+c=۳۶ \Rightarrow a+\frac{۵}{۱۳}a=۳۶ \Rightarrow \frac{۱۸}{۱۳}a=۳۶ \Rightarrow a=۲۶ \quad (۰/۲۵)$$

$$\Rightarrow c=\frac{۵}{۱۳}\times ۲۶=۱۰ \quad (۰/۲۵)$$

$$a^۲=b^۲+c^۲ \Rightarrow ۲۶^۲=b^۲+۱۰^۲ \Rightarrow b^۲=۶۷۶-۱۰۰=۵۷۶ \Rightarrow b=۲۴ \quad (۰/۲۵)$$

طول قطر کوچک $=۲b=۴۸$ (۰/۲۵)

درس Box

۱) برای هر بیضی، مقدار $e=\frac{c}{a}$ را که عددی بین صفر و یک است، خروج از مرکز بیضی می‌نامیم. خروج از مرکز، شاخص کشیدگی بیضی است. هرچه خروج از مرکز کوچکتر باشد (به صفر نزدیک‌تر باشد)، بیضی به دایره شبیه‌تر است و هر چه خروج از مرکز بزرگتر باشد (به یک نزدیکتر باشد)، بیضی کشیده‌تر است.

۲) در هر بیضی، فاصلهٔ هر یک از دو سر قطر بزرگ (رئوس کانونی بیضی) از کانون نزدیکتر برابر $a-c$ و از کانون دورتر برابر $a+c$ است.

۱۲

معادلهٔ دایره‌ای را بنویسید که مرکز آن کانون سهمی به معادلهٔ $x = y^2 + 3y + 5$ بوده و بر خط هادی این سهمی مماس باشد. (۱/۵)

راهنمای تصحیح (۱/۵) (صفحهٔ ۵۸)

ابتدا معادلهٔ سهمی را به حالت متعارف (استاندارد) تبدیل می‌کنیم تا فاصلهٔ کانونی و مختصات کانون سهمی را بیابیم.

$$x = y^2 + 3y + 5 \Rightarrow y^2 + 3y = x - 5 \xrightarrow{+\frac{9}{4}} y^2 + 3y + \frac{9}{4} = x - \frac{11}{4}$$

$$\Rightarrow (y + \frac{3}{2})^2 = x - \frac{11}{4}$$ (۰/۵)

$$4a = 1 \Rightarrow a = \frac{1}{4}$$

رأس سهمی : $A(\frac{11}{4}, -\frac{3}{2}) \xrightarrow{\text{سهمی رو به راست باز می‌شود}} F(3, -\frac{3}{2})$ (۰/۵)

شعاع دایره‌ای که مرکز آن کانون سهمی بوده و بر خط هادی سهمی مماس باشد، برابر است با:

$$R = 2a = \frac{1}{2}$$ (۰/۲۵)

معادلهٔ دایره : $(x - 3)^2 + (y + \frac{3}{2})^2 = \frac{1}{4}$ (۰/۲۵)

درس Box

معادلهٔ گستردهٔ سهمی به یکی از دو صورت $Ay^2 + By + Cx + D = 0$ یا $Ax^2 + Bx + Cy + D = 0$ است.
برای تبدیل هر یک از این معادلات به معادلهٔ استاندارد سهمی، متغیر درجه ۲ و متغیر هم‌نام آن (مثلاً y^2 و y) را در یک طرف تساوی نگه داشته و سایر عبارت‌ها را به طرف دیگر منتقل می‌کنیم و سپس این عبارت درجه ۲ را با افزودن مقداری مناسب به‌صورت مربع کامل در می‌آوریم. در این‌صورت معادله به یکی از صورت‌های زیر تبدیل می‌شود:

۱) سهمی رو به راست: $(y-k)^2 = 4a(x-h)$

۲) سهمی رو به چپ: $(y-k)^2 = -4a(x-h)$

۳) سهمی رو به بالا: $(x-h)^2 = 4a(y-k)$

۴) سهمی رو به پایین: $(x-h)^2 = -4a(y-k)$

(در موارد بالا فرض شده است که $S(h,k)$ رأس سهمی بوده و $a > 0$ است.)

۱۳

فاصلهٔ کانون تا رأس یک دیش مخابراتی ۷۲ سانتی‌متر و قطر دهانهٔ آن ۱۶۸ سانتی‌متر است. عمق ایـن دیـش مخابراتی چقدر است؟ (۰/۷۵)

مشاوره: این سؤال براساس تمرین ۱۳ صفحهٔ ۵۹ کتاب درسی طراحی شده است و مشابه این سؤال چندین بار در امتحان نهایی تکرار شده است.

راهنمای تصحیح (۰/۷۵) (صفحهٔ ۵۸)

رابطهٔ بین فاصلهٔ کانونی، قطر دهانه و عمق دیش مخابراتی را می‌نویسیم:

$$\underbrace{a=\frac{d^۲}{۱۶h}}_{(۰/۲۵)} \Rightarrow ۷۲=\frac{(۱۶۸)^۲}{۱۶h} \Rightarrow h=\frac{۱۶۸}{۷۲}\times\frac{۱۶۸}{۱۶}=\frac{۷}{۳}\times\frac{۲۱}{۲}$$

$$\Rightarrow h=\frac{۴۹}{۲}=۲۴/۵ \ (۰/۵)$$

درس Box: اگر فاصلهٔ کانونی یک دیش مخابراتی برابر a و قطر دهانه و گودی (عمـق) آن بـه‌ترتیب برابـر d و h باشـد، آنگـاه همواره داریم:

$$a=\frac{d^۲}{۱۶h}$$

۱۴

الف) معادلهٔ $x=0$، نمودار محور x ها را در فضا مشخص می‌کند. (درست ـ نادرست) (۱)

ب) اگر $|\vec{a}+\vec{b}|=|\vec{a}-\vec{b}|$ باشد، زاویهٔ بین دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ برابر 90° است. (درست ـ نادرست)

پ) نقطهٔ $A=(-2,3,1)$ در ناحیهٔ .... دستگاه $\mathbb{R}^3$ قرار دارد.

ت) فاصلهٔ نقطهٔ $B=(2,1,3)$ از مبدأ مختصات برابر .... است.

راهنمای تصحیح

الف) نادرست (۰/۲۵) (صفحهٔ ۶۷)

ب) درست (۰/۲۵) (صفحه‌های ۷۳ و ۷۴)

پ) دوم (۰/۲۵) (صفحهٔ ۶۴)

ت) $\sqrt{14}$ (۰/۲۵) (صفحهٔ ۶۶)

پاسخ خیلی تشریحی

الف) معادلات محورها و صفحات مختصات در فضا به‌صورت زیر است:

محور x ها: $\begin{cases} y=0 \\ z=0 \end{cases}$

محور y ها: $\begin{cases} x=0 \\ z=0 \end{cases}$

محور z ها: $\begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases}$

صفحهٔ $xy: z=0$

صفحهٔ $xz: y=0$

صفحهٔ $yz: x=0$

ب) روابط زیر همواره برای دو بردار غیر صفر $\vec{a}$ و $\vec{b}$ (در صفحه یا فضا) برقرار است:

$$\begin{cases} |\vec{a}+\vec{b}|=|\vec{a}-\vec{b}| \Leftrightarrow \vec{a}\perp\vec{b} \\ |\vec{a}|=|\vec{b}| \Leftrightarrow \vec{a}+\vec{b}\perp\vec{a}-\vec{b} \end{cases}$$

پ) علامت محورهای x، y و z در نواحی هشت‌گانهٔ دستگاه مختصات فضایی مطابق جدول مقابل است:

شماره ناحیه	علامت محورها x	y	z
۱	+	+	+
۲	−	+	+
۳	−	−	+
۴	+	−	+
۵	+	+	−
۶	−	+	−
۷	−	−	−
۸	+	−	−

ت)

$$OB=\sqrt{(2-0)^2+(1-0)^2+(3-0)^2}=\sqrt{14}$$

۱۵

مشاوره پیدا کردن زاویهٔ بین دو بردار یکی از سؤالات رایج در امتحانات نهایی محسوب می‌شود. در این سؤال، زاویهٔ بین دو بردار با مفهوم جمع و تفریق دو بردار ترکیب شده است.

بر روی دو بردار $\vec{a} = 3\vec{i} + 3\vec{j}$ و $\vec{b} = \vec{i} - \vec{j} - 2\vec{k}$ متوازی‌الاضلاعی ساخته شده است. زاویهٔ حادهٔ بین قطرهای این متوازی‌الاضلاع را بیابید. (۱/۵)

راهنمای تصحیح (۱/۵) *(صفحه‌های ۷۷ و ۷۸)*

بردارهای $\vec{a}+\vec{b}$ و $\vec{a}-\vec{b}$ قطرهای متوازی‌الاضلاعی هستند که بر روی دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ ساخته می‌شود. بنابراین اگر زاویهٔ بین دو قطر این متوازی‌الاضلاع را با θ نشان دهیم، آنگاه داریم:

$\vec{a}+\vec{b} = (3,3,0) + (1,-1,-2) = (4,2,-2)$ (۰/۲۵)

$\vec{a}-\vec{b} = (3,3,0) - (1,-1,-2) = (2,4,2)$ (۰/۲۵)

$$\cos\theta = \frac{(\vec{a}+\vec{b}).(\vec{a}-\vec{b})}{|\vec{a}+\vec{b}||\vec{a}-\vec{b}|} = \frac{\overbrace{8+8-4}^{(0/25)}}{\underbrace{\sqrt{24}\times\sqrt{24}}_{(0/25)}} = \frac{12}{24} = \frac{1}{2} \ (0/25)$$

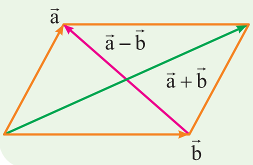
$\Rightarrow \theta = 60^\circ$ (۰/۲۵)

درس Box

۱) اگر زاویهٔ بین دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ برابر θ باشد، آنگاه داریم:

$$\cos\theta = \frac{\vec{a}.\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}$$

۲) بردارهای $\vec{a}+\vec{b}$ و $\vec{a}-\vec{b}$ قطرهای متوازی‌الاضلاعی هستند که روی دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ ساخته می‌شود.



۱۶

سه نقطهٔ $A=(1,-2,3)$ ، $B=(2,0,1)$ و $C=(-3,2,1)$ در صفحه مفروض‌اند. (۲)

الف) مساحت مثلث ABC را به‌دست آورید.

ب) تصویر قائم بردار $\overrightarrow{AB}$ بر امتداد بردار $\overrightarrow{BC}$ را به‌دست آورید.

مشاوره هر دو بخش این سؤال از سؤالات پرتکرار در امتحانات نهایی هستند. محاسبهٔ مساحت مثلث به کمک ضرب خارجی و محاسبهٔ تصویر قائم یک بردار روی بردار دیگر به کمک ضرب داخلی از مفاهیم اصلی بردارها بوده و سؤالات متعددی در کنکور را نیز به خود اختصاص داده‌اند.

راهنمای تصحیح (۲) (صفحه‌های ۷۹ و ۸۲)

الف)

$$\overrightarrow{AB}=B-A=(2,0,1)-(1,-2,3)=(1,2,-2)\ (0/25)$$

$$\overrightarrow{BC}=C-B=(-3,2,1)-(2,0,1)=(-5,2,0)\ (0/25)$$

$$\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{BC}=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\1&2&-2\\-5&2&0\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}2&-2\\2&0\end{vmatrix}\vec{i}-\begin{vmatrix}1&-2\\-5&0\end{vmatrix}\vec{j}+\begin{vmatrix}1&2\\-5&2\end{vmatrix}\vec{k}=(4,10,12)\ (0/25)$$

$$S=\frac{1}{2}|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{BC}|=\frac{1}{2}\sqrt{4^2+10^2+12^2}=\frac{1}{2}\sqrt{260}=\sqrt{65}\ (0/5)$$

ب) اگر بردار $\vec{a}'$ تصویر قائم بردار $\overrightarrow{AB}$ بر امتداد بردار $\overrightarrow{BC}$ باشد، آنگاه داریم:

$$\vec{a}'=\frac{\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC}}{|\overrightarrow{BC}|^2}\overrightarrow{BC}=\underbrace{\frac{-5+4+0}{(-5)^2+2^2+0}}_{(0/5)}(-5,2,0)=-\frac{1}{29}(-5,2,0)$$

$$=(\frac{5}{29},-\frac{2}{29},0)\ (0/25)$$

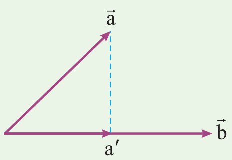
درس Box

۱) مساحت مثلثی که بر روی دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ ساخته می‌شود، برابر است با:

$$S=\frac{1}{2}|\vec{a}\times\vec{b}|$$

در یک مثلث که سه رأس آن مشخص است، کافی است دو بردار دلخواه به دست آورد و به جای $\vec{a}$ و $\vec{b}$ در رابطهٔ بالا قرار دهیم.

۲) تصویر قائم بردار $\vec{a}$ بر امتداد بردار $\vec{b}$، یعنی بردار $\vec{a}'$ از رابطهٔ زیر به‌دست می‌آید:



$$\vec{a}'=\frac{\vec{a}.\vec{b}}{|\vec{b}|^2}\vec{b}$$

۱۷

مشاوره این سؤال مشابه سؤالی از امتحان نهایی خرداد ۱۴۰۲ طراحی شده است و چنین مدل سؤالاتی چندین بار در سؤالات کنکور نیز دیده شده

بر روی سه بردار $\vec{a}=2\vec{i}-\vec{j}$ ، $\vec{b}=\vec{j}+3\vec{k}$ و $\vec{c}=4\vec{i}-\vec{k}$ یک متوازی‌السطوح ساخته شده است. اگر قاعدهٔ این متوازی‌السطوح را بردارهای $\vec{a}$ و $\vec{b}$ تشکیل دهند، اندازهٔ ارتفاع متوازی‌السطوح را به‌دست آورید. (۱/۵)

راهنمای تصحیح (۱/۵) (صفحهٔ ۸۳)

$$\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 2 & -1 & 0\\ 0 & 1 & 3\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}-1 & 0\\ 1 & 3\end{vmatrix}\vec{i}-\begin{vmatrix}2 & 0\\ 0 & 3\end{vmatrix}\vec{j}+\begin{vmatrix}2 & -1\\ 0 & 1\end{vmatrix}\vec{k}=(-3,-6,2)$$ (۰/۲۵)

حجم متوازی‌السطوح $=V=|\vec{c}.(\vec{a}\times\vec{b})|=|(4,0,-1).(-3,-6,2)|=14$ (۰/۵)

مساحت قاعده $=S=|\vec{a}\times\vec{b}|=\sqrt{(-3)^2+(-6)^2+2^2}=7$ (۰/۵)

$V=Sh \Rightarrow 14=7h \Rightarrow h=2$ (۰/۲۵)

درس Box

۱) مساحت متوازی‌الاضلاعی که روی دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ ساخته می‌شود، برابر است با:

$S=|\vec{a}\times\vec{b}|$

۲) حجم متوازی‌السطوحی که روی سه بردار $\vec{a}$، $\vec{b}$ و $\vec{c}$ ساخته می‌شود، برابر است با:

$V=|\vec{a}.(\vec{b}\times\vec{c})|$

نکته برای سه بردار $\vec{a}$، $\vec{b}$ و $\vec{c}$ همواره داریم:

$\vec{a}.(\vec{b}\times\vec{c})=\vec{b}.(\vec{c}\times\vec{a})=\vec{c}.(\vec{a}\times\vec{b})$