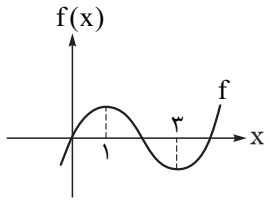
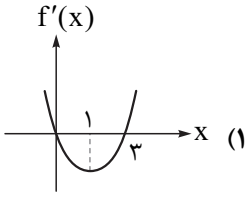
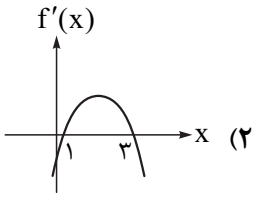
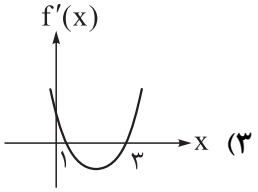
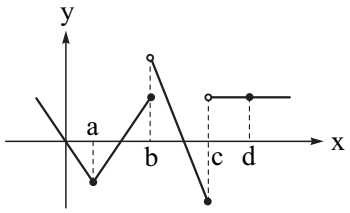
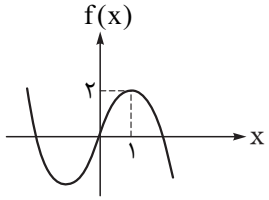
DECODE
رمزگشایی ۲۰ نهایی و ۱۰۰ کنکور!
SanjeshCloud

سؤالات آزمون شبیه‌ساز نهایی: ریاضی (۳)	رشته: علوم تجربی	تاریخ آزمون:	
نام و نام خانوادگی:	پایه دوازدهم دوره دوم متوسطه	مدت آزمون: ۱۲۰ دقیقه	
منطبق بر رویکرد جدید امتحانات نهایی	مرکز ارزشیابی خیلی‌سبز	تعداد صفحه: ۲	

ردیف	سـؤالات (پاسخ‌نامه دارد.) ـ استفاده از ماشین‌حساب ساده مجاز است.	نمره
۱	درستی یا نادرستی عبارات زیر را مشخص کنید. الف) تابع با ضابطهٔ $f(x)=[x]$ در بازه $(۱,۲]$ مشتق‌پذیر ولی در نقطه $x=۱$ مشتق‌ناپذیر است. ب) آهنگ تغییر متوسط تابع $f(x)=\sqrt{x}$ همواره صعودی است. ج) نقطه‌ای با طول $x=۲$ برای تابع $f(x)=(x-۲)^۳$ نقطهٔ بحرانی است، اما اکسترمم نسبی آن نیست.	۰/۷۵
۲	جاهای خالی را با عبارت یا عدد مناسب کامل کنید. الف) خط $x=۰$ را ..... منحنی $y=\sqrt[۳]{x}$ می‌نامیم. ب) اگر $f(x)=۴x^۳+x^۲-x$ مقدار $f''(۲)$ برابر با ..... می‌باشد. ج) در تابع $f(x)=۲x^۳-۳x^۲$ طول نقطهٔ ماکزیمم نسبی برابر با ..... است.	۰/۷۵
۳	اگر $f'(۲)=۳$ و $g'(۲)=-۵$؛ حاصل $(۳f-۴g)'(۲)$ را به دست آورید.	۰/۵
۴	اگر نمودار f به شکل مقابل باشد، نمودار f' شبیه به کدام گزینه است؟ چرا؟  ۱)  ۲)  ۳)  	۰/۷۵
۵	معادله نیم مماس چپ تابع $f(x)=\lvert x^۲-۹\rvert$ را در $x=۳$ به دست آورید.	۱/۲۵
۶	مشتق تابع‌های زیر را به‌دست آورید. (ساده کردن الزامی نیست) الف) $f(x)=\dfrac{(x^۲-x)^۳}{۲-\sqrt{x}}$ ب) $g(x)=\sqrt{\dfrac{x^۲+۳}{۵-x}}$	۲/۵
۷	نمودار تابع $f(x)=\begin{cases}x^۲ & x\geq ۰\\ ۳-\lvert x\rvert & x<۰\end{cases}$ را رسم کنید و مشتق‌پذیری آن را در بازه‌های $[۰,\infty)$ و $(-\infty,۰]$ مشخص کنید.	۱
۸	اگر $f(x)=(x+۳)\sqrt{x+۱}$، آهنگ تغییر متوسط در بازهٔ $[۳,۸]$ چه‌قدر با آهنگ تغییر لحظه‌ای تابع در $x=۰$ اختلاف دارد؟	۱/۵
۹	اگر $f(۲)=۳$، $f'(۲)=۵$ و $g'(۳)=-۲$؛ مشتق تابع gof در $x=۲$ را به‌دست آورید.	۱
۱۰	با رسم جدول تغییرات مشتق تابع $f(x)=x^۴-۴x^۳$ مشخص کنید این تابع در چه بازه‌ای صعودی و در چه بازه‌ای نزولی است.	۱/۷۵
۱۱	طول نقاط بحرانی تابع $f(x)=\dfrac{۳}{x^۲-۴}$ را به دست آورید.	۱
۱۲	با رسم نمودار توابع $f(x)=x\lvert x\rvert$ و $g(x)=x^۲\lvert x\rvert$ مشخص کنید کدام تابع در مبدأ مختصات دارای اکسترمم است؟ نوع این اکسترمم را مشخص کنید.	۱/۲۵

DECODE
رمزگشایی ۲۰ نهایی و ۱۰۰ کنکور!
SanjeshCloud

سؤالات آزمون شبیه‌ساز نهایی: ریاضی (۳)	رشته: علوم تجربی	تاریخ آزمون:	
نام و نام خانوادگی:	پایه دوازدهم دوره دوم متوسطه	مدت آزمون: ۱۲۰ دقیقه	
منطبق بر رویکرد جدید امتحانات نهایی	مرکز ارزشیابی خیلی‌سبز	تعداد صفحه: ۲	

ردیف	سـؤالات (پاسخ‌نامه دارد.) ـ استفاده از ماشین‌حساب ساده مجاز است.	نمره
۱۳	با توجه به نمودار تابع f کدام‌یک از نقاط مشخص شده:  الف) هم نقطه ماکزیمم نسبی است و هم نقطه مینیمم نسبی؟ ب) هم نقطه مینیمم مطلق است و هم نقطه مینیمم نسبی؟ ج) نقطه اکسترمم نسبی نیست؟	۰/۷۵
۱۴	نمودار تابع $f(x)=ax^3+bx+c$ به شکل مقابل است. مقادیر a و b و c را بیابید.  	۱/۵
۱۵	مقادیر ماکزیمم و مینیمم مطلق تابع $f(x)=x-\sqrt{x}$ را در بازه $[0,4]$ به دست آورید.	۱
۱۶	نشان دهید در بین تمام مستطیل‌های با محیط ۲۰ سانتی‌متر، بیش‌ترین مساحت آن‌ها برابر با ۲۵ سانتی‌متر می‌باشد.	۱/۲۵
۱۷	یک قوطی فلزی دربسته با حجم دو لیتر، چه ارتفاعی داشته باشد تا مقدار فلز به کار رفته در ساخت آن مینیمم شـود؟ (جدول تغییرات نیاز نیست)	۱/۵
	«پیروز و سربلند باشید.» جمع نمره	۲۰

ریاضی (۳)

۱ درستی یا نادرستی عبارات زیر را مشخص کنید.

الف) تابع با ضابطهٔ $f(x)=[x]$ در بازه $[1,2)$ مشتق‌پذیر ولی در نقطه $x=1$ مشتق‌ناپذیر است.

ب) آهنگ تغییر متوسط تابع $f(x)=\sqrt{x}$ همواره صعودی است.

ج) نقطه‌ای با طول $x=2$ برای تابع $f(x)=(x-2)^3$ نقطهٔ بحرانی است، اما اکسترمم نسبی آن نیست.

راهنمای تصحیح» الف) درست (۰/۲۵) (صفحهٔ ۸۱)

ب) نادرست(۰/۲۵) (صفحهٔ ۹۵)

ج) درست(۰/۲۵) (صفحهٔ ۱۰۶)

درس Box الف) اگر تابع f در $x=a$ هریک از شرایط زیر را داشته باشد، در این صورت f در این نقطه مشتق‌پذیر نیست:

۱) اگر تابع f در نقطه $x=a$ پیوسته نباشد حتماً در آن نقطه مشتق‌پذیر نیست.

۲) اگر f در a پیوسته باشد و مشتق چپ و راست در $x=a$:

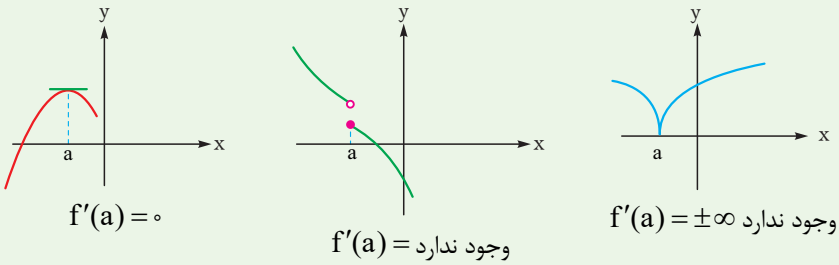
- هر دو موجود (متناهی) ولی نابرابر باشند (نقاط گوشه‌ای).
- یکی متناهی و یکی نامتناهی باشد (نقطه گوشه‌ای).
- هر دو نامتناهی باشند.

ب) آهنگ تغییر متوسط:

اگر تابع f در بازه $[a,b]$ پیوسته باشد، آهنگ تغییر متوسط این تابع در این بازه برابر است با:

$$\text{آهنگ تغییر متوسط در بازه } [a,b] = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

ج) نقطه به طول C از دامنهٔ تابع f را یک نقطه بحرانی برای تابع می‌نامیم هرگاه $f'(c)=0$ یا $f'(c)$ موجود نباشد.



$f'(a)=0$ — $f'(a)$ وجود ندارد — $f'(a)=\pm\infty$ وجود ندارد

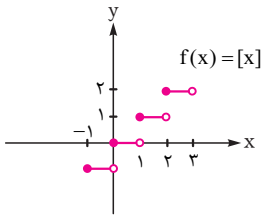
نکته دقت کنید که اگر تابع $f(x)$ در بازه $[a,b]$ تعریف شود نقاط a و b (نقاط ابتدایی و انتهایی بازه) نقاط بحرانی تابع‌اند.

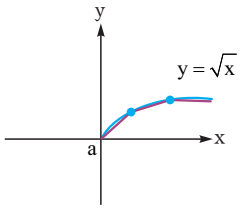
اگر در تابع $f(x)$ با دامنهٔ D_f، یک همسایگی مانند I $(I\subseteq D_f)$ شامل نقطه c وجود داشته باشد که برای هر $x\in I$، اگر $f(x)\le f(c)$ برقرار باشد در این صورت $f(c)$ مقدار ماکزیمم نسبی تابع f است.

اگر در تابع $f(x)$ با دامنه D_f، یک همسایگی مانند I $(I\subseteq D)$ شامل نقطه C وجود داشته باشد که برای هر $x\in I$، اگر $f(c)\le f(x)$ برقرار باشد، در اینصورت $f(c)$ مقدار مینیمم نسبی تابع f است.

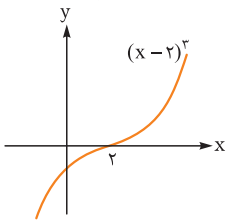
پاسخ خیلی تشریحی✔ الف) تابع $f(x)=[x]$ را در بازه $[1,2)$ رسم می‌کنیم.

با توجه به شکل، تابع $f(x)$ در $x=1$ پیوسته نیست در نتیجه مشتق تابع در $x=1$ موجود نیست و تابع $f(x)$ در $x=1$ مشتق‌ناپذیر است.





ب) با افزایش x آهنگ تغییر متوسط نزولی است (شیب خطوط قاطع کم می‌شود):



ج) در $x = ۲$ مشتق برابر صفر است (شیب خط مماس صفر است):

اما این نقطه اکسترمم نسبی (مینیمم نسبی یا ماکزیمم نسبی) نیست.

۲ جاهای خالی را با عبارت یا عدد مناسب کامل کنید.

الف) خط $x = 0$ را ..... منحنی $y = \sqrt[3]{x}$ می‌نامیم.

ب) اگر $f(x) = 4x^3 + x^2 - x$ مقدار $f''(2)$ برابر با ..... می‌باشد.

ج) در تابع $f(x) = 2x^3 - 3x^2$ طول نقطهٔ ماکزیمم نسبی برابر با ..... است.

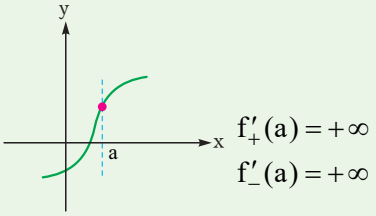
راهنمای تصحیح» الف) مماس قائم (۰/۲۵) (صفحهٔ ۸۰)

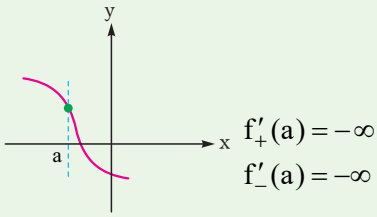
ب) ۵۰ (۰/۲۵) (صفحهٔ ۹۰)

ج) صفر (۰/۲۵) (صفحهٔ ۱۰۵)

درس Box الف) اگر تابع f در $x = a$ پیوسته باشد و در این نقطه مشتق چپ و راست هر دو نامتناهی و هم‌علامت باشند، در این صورت تابع f در $x = a$ مشتق‌ناپذیر است و خط $x = a$ را «مماس قائم» بر منحنی تابع f در نقطهٔ $(a , f(a))$ می‌نامیم.

- بعضی از حالت‌های مماس قائم در نمودارهای زیر دیده می‌شوند:





هر دو مشتق چپ و راست در a نامتناهی و هم‌علامتند. هر دو مشتق چپ و راست در a نامتناهی و هم‌علامتند.

ب) **مشتق دوم:**

مشتق تابع $f(x)$ را با نماد $f'(x)$ نمایش می‌دهیم و اگر تابع مشتق $f'(x)$ مشتق‌پذیر باشد مشتق مرتبهٔ دوم $f(x)$ را به‌صورت $f''(x)$ نمایش می‌دهیم که برای محاسبهٔ آن کافی است از تابع $f'(x)$ نسبت به x مشتق بگیریم.

ج) برای پیداکردن اکسترمم‌های نسبی یک تابع از آزمون مشتق اول استفاده می‌کنیم.

اگر تابع f یک تابع پیوسته در بازه I $(I \subseteq D_f)$ باشد ابتدا نقاط بحرانی تابع f را در این بازه پیدا می‌کنیم. سپس جدول تعیین علامت f' را مشخص می‌کنیم به جدول‌های تعیین علامت زیر دقت کنید:

۱) $x = c$ ماکزیمم نسبی است:

x		c	
$f'(x)$		+	−
$f(x)$		صعودی ↗	نزولی ↘

max

۲) $x = c$ مینیمم نسبی است:

x		c	
$f'(x)$		−	+
$f(x)$		نزولی ↘	صعودی ↗

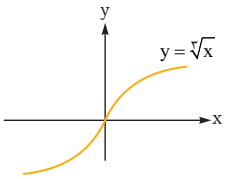
min

۳) $x = c$ نه مینیمم نسبی است نه ماکزیمم نسبی.

x		c	
$f'(x)$		+	+
$f(x)$		صعودی ↗	صعودی ↗

x		c	
$f'(x)$	−		−
$f(x)$	نزولی ↘		↘

پاسخ خیلی تشریحی ✔ الف)



$$f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{x}-0}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{x}}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}=+\infty \Rightarrow x=0 \text{ مماس قائم است}$$

ب) در ابتدا مشتق تابع $f(x)$ را محاسبه کرده تا $f'(x)$ بدست آید و پس از آن از $f'(x)$ مشتق گرفته تا $f''(x)$ محاسبه شود.

$$f(x)=4x^3+x^2-x \Rightarrow f'(x)=12x^2+2x-1 \Rightarrow f''(x)=24x+2$$

$$f''(2)=24(2)+2=48+2=50$$

ج) برای پیداکردن اکسترمم‌های تابع از آزمون مشتق اول استفاده می‌کنیم. برای این منظور ابتدا طول نقطه بحرانی f را پیدا کرده سپس $f'(x)$ را تعیین علامت می‌کنیم:

$$f(x)=2x^3-3x^2 \Rightarrow f'(x)=0 \Rightarrow 6x^2-6x=0$$

$$6x(x-1)=0 \begin{cases} x=0 \\ x=1 \end{cases}$$

x		0		1	
$f'(x)$	+	0	−	0	+
$f(x)$	↗	max	↘	min	↗

۳ اگر $f'(۲)=۳$ و $g'(۲)=-۵$؛ حاصل $(۳f-۴g)'(۲)$ را به دست آورید.

راهنمای تصحیح (صفحهٔ ۸۷)

$(۳f-۴g)'(۲)=۳f'(۲)-۴g'(۲)$ (۰/۲۵) $=۳(۳)-۴(-۵)=۲۹$ (۰/۲۵)

درس Box

اگر توابع f و g در $x=a$ مشتق‌پذیر باشند آن‌گاه توابع $(k\in\mathbb{R})kf(a)$، $(f\pm g)(a)$، $(f.g)(a)$ و $(g(a)\neq ۰)\frac{f}{g}(a)$ در $x=a$ مشتق‌پذیرند و داریم:

الف) $(f\pm g)'(a)=f'(a)\pm g'(a)$

ب) $(kf)'(a)=kf'(a)$

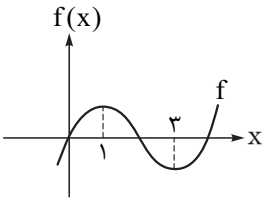
پ) $(fg)'(a)=f'(a)g(a)+g'(a)\times f(a)$

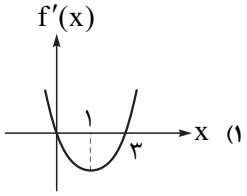
$$(\frac{f}{g})'(a)=\frac{f'(a)g(a)-g'(a)f(a)}{(g(a))^{۲}}$$

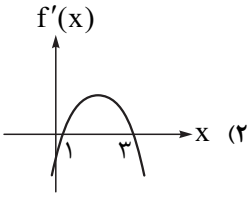
پاسخ خیلی تشریحی ✔ با توجه درس Box داریم:

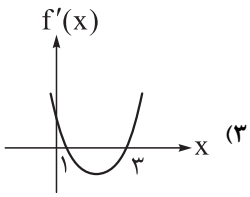
$$(۳f-۴g)'(۲)\xrightarrow{(f-g)'(a)=f'(a)-g'(a)}۳f'(۲)-۴g'(۲)$$
$$\xrightarrow{f'(۲)=۳\,,\,g'(۲)=-۵}۳(۳)-۴(-۵)=۲۹$$

۴ اگر نمودار f به شکل مقابل باشد، نمودار f' شبیه به کدام گزینه است؟ چرا؟



۱) 

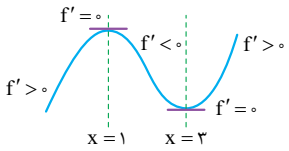
۲) 

۳) 

راهنمای تصحیح گزینهٔ «۳» (۰/۲۵) شیب خط مماس بر f همان f' است.

x		۱		۳	
f'	$+$	۰	$-$	۰	$+$

(۰/۵)



(۰/۵)

یه‌جور دیگه اگر دانش‌آموز به روش روبه‌رو نیز استدلال کند نمره تعلق می‌گیرد:

(صفحهٔ ۷۴)

نکته شیب خط مماس بر f در a همان $f'(a)$ است. اگر شیب خط مماس بر نمودار در یک نقطه مثبت بود $f'(a) > ۰$، اگر منفی بود $f'(a) < ۰$ و اگر خط مماس برنمودار در نقطه a افقی باشد $f'(a) = ۰$ است.

پاسخ خیلی تشریحی طبق شکل خطوط مماس در $x = ۱$ و $x = ۳$ افقی هستند بنابراین شیب خط مماس بر f (f') در این نقاط برابر صفر است پس در نمودار f' نقاط ۳ و ۱ محل برخورد با محور x هستند. در نتیجه گزینهٔ ۱ حذف می‌شود.
از طرفی شیب خط مماس بر نمودار f در فاصله بین ۱ تا ۳ منفی است بنابراین بین این دو عدد نمودار f' پایین محور x می‌باشد. پس گزینهٔ ۳ صحیح است.

۵ معادله نیم مماس چپ تابع $f(x)=|x^۲-۹|$ را در $x=۳$ به دست آورید.

راهنمای تصحیح»

$$m=f'_-(۳)=\lim_{x\to ۳^-}\frac{f(x)-f(۳)}{x-۳}\ (۰/۲۵)=\lim_{x\to ۳^-}\frac{|x^۲-۹|-۰}{x-۳}=\lim_{x\to ۳^-}\frac{-(x^۲-۹)}{x-۳}\ (۰/۲۵)$$

$$=\lim_{x\to ۳^-}\frac{-(\cancel{x-۳})(x+۳)}{\cancel{x-۳}}=-۶\ (۰/۲۵)$$

معادلهٔ نیم مماس چپ: $y-۰=-۶(x-۳)\Rightarrow y=-۶x+۱۸$ (۰/۵) (صفحهٔ ۷۹)

نکته مشتق راست، شیب نیم مماس راست و مشتق چپ، شیب نیم مماس چپ است.

پاسخ خیلی تشریحی✔ برای نوشتن معادله نیم مماس چپ، ابتدا باید مشتق چپ تابع را در $x=۳$ محاسبه کنیم تا شیب معادله نیم مماس به‌دست آید، پس داریم:

$$m=f'_-(۳)=\lim_{x\to ۳^-}\frac{f(x)-f(۳)}{x-۳}=\lim\frac{|x^۲-۹|-۰}{x-۳}\xrightarrow[\text{به ازای } ۳^- \text{ منفی است}]{\text{علامت } |x^۲-۹|}\lim_{x\to ۳^-}\frac{-(x^۲-۹)}{x-۳}$$

$$=\lim_{x\to ۳^-}\frac{-(\cancel{x-۳})(x+۳)}{\cancel{x-۳}}=\lim_{x\to ۳^-}-(x+۳)=-۶$$

حال معادله نیم مماس چپ را به ازای $m=-۶$ و نقطه $(۳,۰)$ می‌نویسیم:

معادله نیم مماس چپ: $y-۰=-۶(x-۳)\Rightarrow y=-۶x+۱۸$

۶ مشتق تابع‌های زیر را به‌دست آورید. (ساده کردن الزامی نیست)

الف) $f(x)=\dfrac{(x^2-x)^3}{2-\sqrt{x}}$ ب) $g(x)=\sqrt{\dfrac{x^2+3}{5-x}}$

راهنمای تصحیح

الف) $\dfrac{\overbrace{3(2x-1)(x^2-x)^2(2-\sqrt{x})}^{(0/5)}-\overbrace{(-\frac{1}{2\sqrt{x}})(x^2-x)^3}^{(0/5)}}{\underbrace{(2-\sqrt{x})^2}_{(0/5)}}$

ب) $\overbrace{\dfrac{(2x)(5-x)-(-1)(x^2+3)}{(5-x)^2}}^{(0/5)}\ (0/25)\times\underbrace{\dfrac{1}{2\sqrt{\dfrac{x^2+3}{5-x}}}}_{(0/25)}$

(صفحهٔ ۸۵ تا ۸۷)

درس Box

فرمول‌های مهم مشتق:

		مثال
چندجمله‌ای	$y=ax^n \Rightarrow y'=anx^{n-1}$ $y=mx+h \Rightarrow y'=m$ $y=h \Rightarrow y'=0$	$y=x^7 \Rightarrow y'=7x^6$ $y=7x+2 \Rightarrow y'=7$ $y=7 \Rightarrow y'=0$
رادیکالی	$y=\sqrt[m]{O^n} \Rightarrow y'=\dfrac{nO'}{m\sqrt[m]{O^{m-n}}}$	$y=\sqrt{2x+4} \Rightarrow y'=\dfrac{2}{2\sqrt{2x+4}}$
ضرب	$f(x).g(x) \xrightarrow{\text{مشتق}} f'(x).g(x)+g'(x).f(x)$	$y=(4x+3)(x^2-4)$ $y'=4(x^2-4)+2x(4x+3)$
تقسیم	$\dfrac{f(x)}{g(x)} \xrightarrow{\text{مشتق}} \dfrac{f'(x).g(x)-g'(x).f(x)}{g^2(x)}$	$y=\dfrac{4x+3}{x^2-4}$ $y'=\dfrac{4(x^2-4)-2x(4x+3)}{(x^2-4)^2}$
جمع و تفریق	$(f\pm g)'(x) \xrightarrow{\text{مشتق}} f'(x)\pm g'(x)$	$y=\sqrt{x}+\dfrac{1}{x} \Rightarrow y'=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}-\dfrac{1}{x^2}$
توان‌دار	$u^n \xrightarrow{\text{مشتق}} nu'u^{n-1}$	$y=(x^2-4x)^5$ $\Rightarrow y'=5(2x-4)(x^2-4)^4$

پاسخ خیلی تشریحی

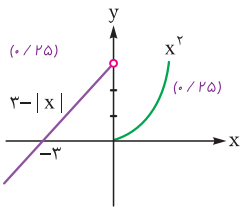
$$f'(x)=\frac{(\text{صورت})(\text{مشتق مخرج})-(\text{مخرج})(\text{مشتق صورت})}{(\text{مخرج})^2}$$

$$=\frac{\overbrace{3(2x-1)(x^2-x)^2}^{\text{مشتق صورت}}\times\overbrace{(2-\sqrt{x})}^{\text{مخرج}}-\overbrace{(-\frac{1}{2\sqrt{x}})}^{\text{مشتق مخرج}}\overbrace{(x^2-x)^3}^{\text{صورت}}}{\underbrace{(2-\sqrt{x})^2}_{(\text{مخرج})^2}}$$

$$f(x)=\sqrt{\frac{x^2+3}{5-x}}\xrightarrow[y=\sqrt[m]{O^n}\Rightarrow y'=\frac{nO'}{m\sqrt[m]{O^{m-n}}}]{n=1,m=2,O=\frac{x^2+3}{5-x}}\frac{2x(5-x)-(-1)(x^2+3)}{(5-x)^2}\times\frac{1}{2\sqrt{\frac{x^2+3}{5-x}}}$$

۷ نمودار تابع $f(x)=\begin{cases} x^2 & x \geq 0 \\ 3-|x| & x<0 \end{cases}$ را رسم کنید و مشتق‌پذیری آن را در بازه‌های $(-\infty , 0]$ و $[0 , \infty)$ مشخص کنید.

راهنمای تصحیح »



در بازه $(-\infty , 0]$ مشتق‌پذیر است (۰/۲۵) اما در بازهٔ $[0 , +\infty)$ مشتق‌پذیر نیست (۰/۲۵). (در $x=0$ از چپ ناپیوسته است.) *(صفحهٔ ۷۸)*

درس Box

مشتق‌پذیری تابع پیوسته f در بازه به صورت زیر بررسی می‌شود:

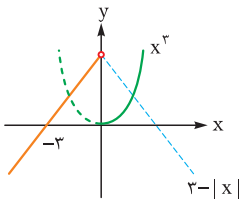
۱) **مشتق‌پذیری f روی بازه (a , b):** تابع f در تمام نقاط بازه (a , b) مشتق‌پذیر باشد.

۲) **مشتق‌پذیری f روی بازه $[a , b)$:** تابع f روی بازه (a , b) مشتق‌پذیر باشد و در نقطه a مشتق راست داشته باشد.

۳) **مشتق‌پذیری f روی بازه $(a , b]$:** تابع f روی بازه (a , b) مشتق‌پذیر باشد و در نقطه b مشتق چپ داشته باشد.

۴) **مشتق‌پذیری f روی بازه $[a , b]$:** تابع f روی بازه (a , b) مشتق‌پذیر باشد و در نقطه a مشتق راست و در نقطه b مشتق چپ داشته باشد.

پاسخ خیلی تشریحی ✔ ابتدا نمودار تابع f را رسم می‌کنیم:



در نقطه $x=0$ پیوستگی راست داریم (حد راست و مقدار تابع با هم برابرند) اما پیوستگی چپ نداریم (حد چپ و مقدار تابع با هم برابر نیستند) پس در بازه $[0 , +\infty)$ مشتق‌پذیر و در بازه $(-\infty , 0]$ مشتق‌ناپذیر است.

۸ اگر $f(x)=(x+۳)\sqrt{x+۱}$، آهنگ تغییر متوسط در بازهٔ $[۳\ ,\ ۸]$ چه‌قدر با آهنگ تغییر لحظه‌ای تابع در $x=۰$ اختلاف دارد؟

راهنمای تصحیح »

$$f'(x)=\underbrace{۱\times\sqrt{x+۱}}_{(۰/۲۵)}+\underbrace{\frac{۱}{۲\sqrt{x+۱}}(x+۳)}_{(۰/۲۵)}$$

آهنگ تغییر لحظه‌ای تابع در $x=۰$: $f'(۰)=\sqrt{۰+۱}+\frac{۱}{۲\sqrt{۰+۱}}(۰+۳)=۱+\frac{۳}{۲}=\frac{۵}{۲}=۲/۵$ (۰/۲۵)

آهنگ تغییر متوسط در بازهٔ $[۳\ ,\ ۸]$: $\underbrace{\frac{f(۸)-f(۳)}{۸-۳}}_{(۰/۲۵)}=\frac{۳۳-۱۲}{۵}=\frac{۲۱}{۵}=۴/۲$ (۰/۲۵)

پس آهنگ تغییر متوسط در بازه $[۳\ ,\ ۸]$ با آهنگ تغییر لحظه‌ای تابع در $x=۰$، به اندازهٔ ۱/۷ اختلاف دارد.

$۴/۲-۲/۵=۱/۷$ (۰/۲۵) (صفحهٔ ۹۵)

درس Box

آهنگ متوسط تغییر یک تابع را در بازه‌ای مانند $[a\ ,\ b]$ به‌صورت زیر محاسبه می‌کنیم:

$$\text{آهنگ تغییر متوسط در بازه } [a\ ,\ b]=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

و آهنگ تغییر لحظه‌ای f در $x=a$ $(f'(a))$ شیب خط مماس بر f در $x=a$ است که برابر با مقدار مشتق تابع f در نقطهٔ $x=a$ است.

$$\text{آهنگ تغییر لحظه‌ای تابع } f \text{ در نقطه } a=f'(a)=\lim_{h\to ۰}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

آهنگ متوسط تغییر با شیب خط قاطع و آهنگ لحظه‌ای تغییر با مقدار مشتق و شیب خط مماس آن نقطه برابر است.

پاسخ خیلی تشریحی ✔ ابتدا با استفاده از فرمول $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$، آهنگ تغییر متوسط تابع f را در بازه $[۳\ ,\ ۸]$ محاسبه می‌کنیم:

$$\text{آهنگ تغییر متوسط در بازه } [a\ ,\ b]:\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

$$\xrightarrow{[a\ ,\ b]=[۳\ ,\ ۸]}\frac{f(۸)-f(۳)}{۸-۳}=\frac{۳۳-۱۲}{۵}=\frac{۲۱}{۵}=۴/۲$$

برای محاسبه آهنگ تغییر لحظه‌ای تابع f کافیست مقدار مشتق تابع را در نقطه $x=۰$ پیدا کنیم.

$$f'(x)=\sqrt{x+۱}+\frac{۱}{۲\sqrt{x+۱}}(x+۳)\ \Rightarrow\ f'(۰)=\sqrt{۰+۱}+\frac{۱}{۲\sqrt{۰+۱}}(۰+۳)=۱+\frac{۳}{۲}=\frac{۵}{۲}=۲/۵$$

اختلاف آهنگ تغییر متوسط با آهنگ تغییر لحظه‌ای: $۴/۲-۲/۵=۱/۷$

۹ اگر $f(۲)=۳$، $f'(۲)=۵$ و $g'(۳)=-۲$؛ مشتق تابع gof در $x=۲$ را به‌دست آورید.

راهنمای تصحیح»

$$\underbrace{(gof)'(۲)=f'(۲).g'(f(۲))}_{(۰/۲۵)} \xrightarrow{f'(۲)=۵\,,\,f(۲)=۳} \underbrace{(gof)'(۲)=۵g'(۳)}_{(۰/۵)}$$

$$\xrightarrow{g'(۳)=-۲} (gof)'(۲)=۵(-۲)=-۱۰ \quad (۰/۲۵)$$

(صفحهٔ ۸۷)

درس Box

اگر f و g دو تابع مشتق‌پذیر باشند در این صورت تابع مرکب fog مشتق‌پذیر است و داریم:

$$(fog)'(x)=g'(x).f'(g(x))$$

و این رابطه را به صورت زیر نیز می‌توان نوشت:

$$y=f(u) \Rightarrow y'=u'f'(u)$$

۱۰ **با رسم جدول تغییرات مشتق تابع $f(x)=x^4-4x^3$ مشخص کنید این تابع در چه بازه‌ای صعودی و در چه بازه‌ای نزولی است.**

راهنمای تصحیح»

$\underbrace{f'(x)=4x^3-12x^2}_{(۰/۲۵)}=۰ \Rightarrow 4x^2(x-3)=۰ \Rightarrow x=۰,3$ (۰/۵)

x		۰		۳	
f'	$-$	۰	$-$	۰	$+$
f	نزولی ↘		نزولی ↘		صعودی ↗

(۰/۵)

در بازه $\underbrace{(-\infty,3]}_{(۰/۲۵)}$ نزولی و در بازه $\underbrace{[3,+\infty)}_{(۰/۲۵)}$ صعودی است. (صفحهٔ ۱۰۴)

درس Box

فرض کنید تابع f بر بازه $[a,b]$ پیوسته باشد و بر بازه (a,b) مشتق‌پذیر باشد. در این صورت:

۱) اگر به ازای هر x در بازه (a,b)، $f'(a)>۰$؛ آن‌گاه تابع f بر $[a,b]$ صعودی اکید است.

۲) اگر به ازای هر x در بازه (a,b)، $f'(a)<۰$؛ آن‌گاه تابع f بر بازه $[a,b]$ نزولی اکید است.

۳) اگر به‌ازای هر x در بازه (a,b)، $f'(a)=۰$؛ آن‌گاه تابع f بر $[a,b]$ یک تابع ثابت است.

برای تعیین صعودی یا نزولی بودن تابع f مشتق اول را به دست می‌آوریم و سپس تابع مشتق را تعیین علامت می‌کنیم.

پاسخ خیلی تشریحی✔

برای مشخص کردن اینکه تابع در چه بازه‌ای صعودی و در چه بازه‌ای نزولی است به سراغ تعیین علامت f' می‌رویم. برای این منظور ابتدا نقاطی که در آن مقدار f' صفر می‌شود را یافته و سپس جدول تعیین علامت را رسم می‌کنیم:

$$f(x)=x^4-4x^3 \Rightarrow f'(x)=۰ \Rightarrow 4x^3-12x^2=۰ \Rightarrow 4x^2(x-3)=۰ \begin{cases} x=۰ \\ x=۳ \end{cases}$$

x		۰		۳	
f'	$-$	۰	$-$	۰	$+$
f	نزولی ↘		نزولی ↘		صعودی ↗

نتیجه می‌شود که تابع f در بازه $(-\infty,3]$ نزولی و در بازه $[3,+\infty)$ صعودی است.

۱۱ طول نقاط بحرانی تابع $f(x)=\frac{۳}{x^۲-۴}$ را به دست آورید.

راهنمای تصحیح »

$$f'(x)=\frac{۰-۲x(۳)}{(x^۲-۴)^۲}=\frac{-۶x}{(x^۲-۴)^۲}$$ (۰/۵)

$$f'(x)=۰ \Rightarrow \frac{-۶x}{(x^۲-۴)^۲}=۰ \Rightarrow x=۰$$ (۰/۲۵)

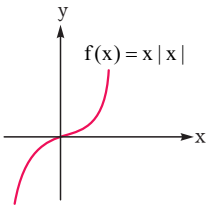
نقاط بحرانی حتماً عضو دامنه تابع هستند پس فقط $x=۰$ بحرانی است. (۰/۲۵) (صفحهٔ ۱۰۶)

نکته نقطه بحرانی نقطه‌ای از دامنه است که در آن مشتق تابع صفر است یا وجود نداشته باشد.

۱۲ با رسم نمودار توابع $f(x)=x|x|$ و $g(x)=x^{۲}|x|$ مشخص کنید کدام تابع در مبدأ مختصات دارای اکسترمم است؟ نوع این اکسترمم را مشخص کنید.

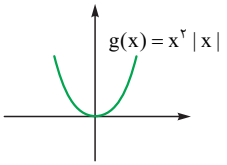
راهنمای تصحیح »

$$f(x)=\begin{cases} x(x)=x^{۲} & x\geq ۰ \\ x(-x)=-x^{۲} & x<۰ \end{cases}$$



(۰/۵)

$$g(x)=\begin{cases} x^{۲}(x)=x^{۳} & x\geq ۰ \\ x^{۲}(-x)=-x^{۳} & x<۰ \end{cases}$$

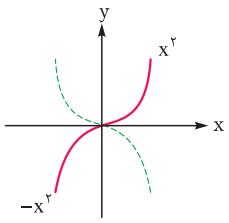


(۰/۵)

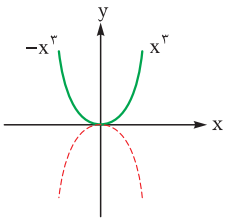
در تابع $g(x)$، $x=۰$ نقطه مینیمم نسبی است. (۰/۲۵) (صفحهٔ ۱۰۵)

پاسخ خیلی تشریحی ✔ ابتدا توابع $f(x)$ و $g(x)$ را به توابع دوضابطه‌ای تبدیل می‌کنیم و پس با توجه به محدوده xها، ضابطه هرکدام را رسم می‌کنیم:

$$f(x)=\begin{cases} x(x)=x^{۲} & x\geq ۰ \\ x(-x)=-x^{۲} & x<۰ \end{cases}$$

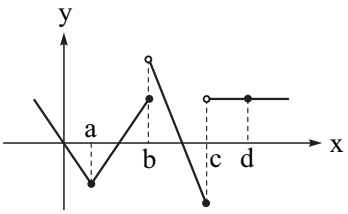


$$g(x)=\begin{cases} x^{۲}(x)=x^{۳} & x\geq ۰ \\ x^{۲}(-x)=-x^{۳} & x<۰ \end{cases}$$



با توجه به شکل‌های رسم شده نتیجه می‌گیریم که در تابع $g(x)$ نقطهٔ $x=۰$ مینیمم نسبی است.

۱۳ با توجه به نمودار تابع f کدام‌یک از نقاط مشخص شده:



الف) هم نقطه ماکزیمم نسبی است و هم نقطه مینیمم نسبی؟

ب) هم نقطه مینیمم مطلق است و هم نقطه مینیمم نسبی؟

ج) نقطه اکسترمم نسبی نیست؟

راهنمای تصحیح

الف) d (۰/۲۵) (صفحهٔ ۱۰۵)

ب) c (۰/۲۵) (صفحهٔ ۱۱۰)

ج) b (۰/۲۵) (صفحهٔ ۱۰۴ و ۱۰۵)

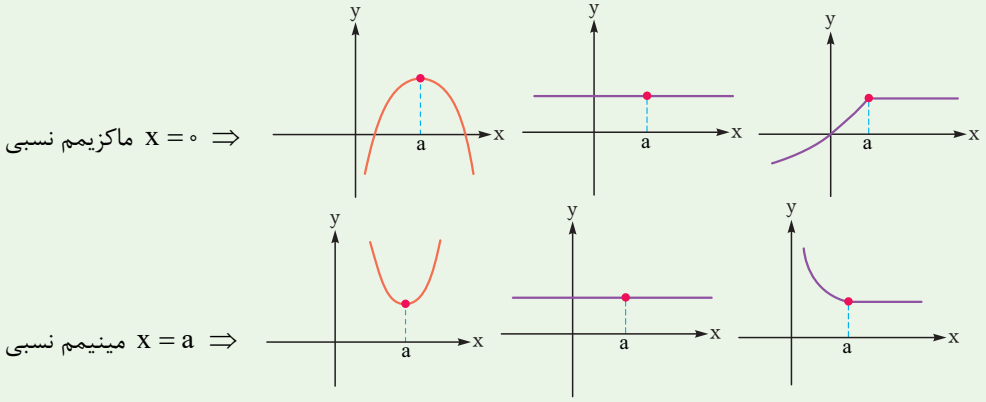
درس Box

اکسترمم نسبی:

اگر f یک تابع و $I \subseteq D_f$ یک همسایگی از نقطهٔ c (بازه باز شامل نقطهٔ c) باشد که:

الف) به‌ازای هر x متعلق به I داشته باشیم $f(x) \le f(c)$؛ در این صورت $f(c)$ را یک ماکزیمم نسبی تابع f می‌نامیم.

ب) به‌ازای هر x متعلق به I داشته باشیم $f(x) \ge f(c)$؛ در این صورت $f(c)$ را یک مینیمم نسبی تابع f می‌نامیم.



اکسترمم مطلق:

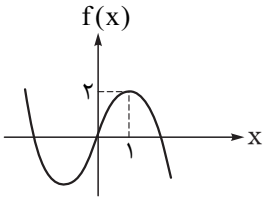
الف) ماکزیمم مطلق

با فرض $c \in D_f$، نقطه $(c, f(c))$، یک نقطه ماکزیمم مطلق برای تابع f نامیده می‌شود، هرگاه به‌ازای هر x از دامنه f داشته باشیم $f(c) \ge f(x)$ در این حالت $f(c)$ مقدار ماکزیمم مطلق تابع f روی دامنه است.

ب) مینیمم مطلق:

با فرض $c \in D_f$، نقطه $(c, f(c))$ یک نقطه مینیمم مطلق برای تابع f نامیده می‌شود هرگاه به ازای هر x از دامنه f داشته باشیم $f(c) \le f(x)$. در این حالت $f(c)$ مقدار مینیمم مطلق تابع f روی دامنه است.

۱۴ نمودار تابع $f(x)=ax^۳+bx+c$ به شکل مقابل است. مقادیر a و b و c را بیابید.



راهنمای تصحیح»

$f(x)=ax^۳+bx+c \Rightarrow f'(x)=۳ax^۲+b$

$\underbrace{f(۰)=۰}_{(۰/۲۵)} \Rightarrow a(۰)^۳+b(۰)+c=۰ \Rightarrow c=۰$ (۰/۲۵)

$\underbrace{f(۱)=۲}_{(۰/۲۵)} \Rightarrow a(۱)^۳+b(۱)+c=۲ \xrightarrow{c=۰} a+b=۲$

$\underbrace{f'(۱)=۰}_{(۰/۲۵)} \Rightarrow ۳a+b=۰$

$$-\begin{cases}a+b=۲\\ ۳a+b=۰\end{cases}$$

$$-۲a=۲ \Rightarrow \underbrace{a=-۱}_{(۰/۲۵)} \text{ و } \underbrace{b=۳}_{(۰/۲۵)}$$

(صفحهٔ ۱۱۲)

پاسخ خیلی تشریحی✔ از روی نمودار واضح است که $f(۰)=۰$ و $f(۱)=۲$ پس داریم:

$f(۰)=۰ \Rightarrow a(۰)^۳+b(۰)+c=۰ \Rightarrow c=۰$

$f(۱)=۲ \Rightarrow a(۱)^۳+b(۱)+c=۲ \xrightarrow{c=۰} a+b=۲ \ (۱)$

از طرفی شیب خط مماس بر نمودار یا همان $f'(x)$ در نقطه $x=۱$ برابر صفر است، پس ابتدا $f'(x)$ را محاسبه می‌کنیم:

شیب خط مماس بر نمودار: $f'(x)=۳ax^۲+b$

$f'(۱)=۰ \Rightarrow ۳a(۱)+b=۰ \ (۲)$

از معادله (۱) و (۲) دستگاه دو معادله دو مجهول زیر را حل می‌کنیم تا مقدار a و b پیدا شود:

$$\begin{cases}a+b=۲\\ ۳a+b=۰\end{cases} \Rightarrow a=-۱, b=۳$$

۱۵ مقادیر ماکزیمم و مینیمم مطلق تابع $f(x)=x-\sqrt{x}$ را در بازه $[۰\ ,\ ۴]$ به دست آورید.

راهنمای تصحیح »

$f'(x)=۰ \Rightarrow f'(x)=۱-\frac{۱}{۲\sqrt{x}}=۰$ (۰/۲۵)

$۲\sqrt{x}=۱ \Rightarrow x=\frac{۱}{۴}$ (۰/۲۵)

$f(۰)=۰$

$f(\frac{۱}{۴})=\underbrace{\frac{-۱}{۴}}$

مینیمم مطلق (۰/۲۵)

$f(۴)=۲$

ماکزیمم مطلق (۰/۲۵)

(صفحهٔ ۱۱۲)

درس Box

برای پیداکردن نقاط مینیمم و ماکزیمم مطلق:

۱) نقاط بحرانی تابع را در بازه $[a\ ,\ b]$ پیدا می‌کنیم.

۲) عرض نقاط بحرانی را محاسبه می‌کنیم.

۳) هر کدام از نقاط که عرض کم‌تری داشت مینیمم مطلق و هرکدام که عرض بیشتری داشت ماکزیمم مطلق است.

پاسخ خیلی تشریحی ✔

ابتدا نقاط بحرانی تابع و در بازه $[۰\ ,\ ۴]$ پیدا می‌کنیم:

$f'(x)=۰$ را بررسی می‌کنیم:

$$f'(x)=۱-\frac{۱}{۲\sqrt{x}} \rightarrow ۲\sqrt{x}=۱ \rightarrow \sqrt{x}=\frac{۱}{۲} \rightarrow x=\frac{۱}{۴}$$

پس یکی از نقاط بحرانی $x=\frac{۱}{۴}$ است (در بازه $[۰\ ,\ ۴]$ قرار دارد)؛ از طرفی نقاط ابتدا و انتهای بازه یعنی ۰ و ۴ نیز بحرانی هستند. (دقت کنید که نقطه $x=۰$ به دو دلیل نقطه بحرانی به حساب میاد اولاً نقطه ابتدایی بازه است دوماً ریشه زیر رادیکال است)

حال عرض نقاط بحرانی را محاسبه می‌کنیم:

$f(۰)=۰$

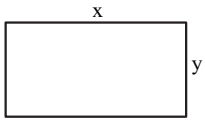
$f(\frac{۱}{۴})=\frac{۱}{۴}-\frac{۱}{۲}=-\frac{۱}{۴}$

واضح است که $f(\frac{۱}{۴})=\frac{-۱}{۴}$ کم‌ترین مقدار را دارد پس $-\frac{۱}{۴}$ مینیمم مطلق است.

از طرفی $f(۴)=۲$ بیش‌ترین مقدار را دارد پس ۲ ماکزیمم مطلق است.

۱۶ **نشان دهید در بین تمام مستطیل‌های با محیط ۲۰ سانتی‌متر، بیش‌ترین مساحت آن‌ها برابر با ۲۵ سانتی‌متر می‌باشد.**

راهنمای تصحیح»



محیط مستطیل: $P=۲۰\Rightarrow ۲(x+y)=۲۰\Rightarrow x+y=۱۰\Rightarrow y=۱۰-x$ (۰/۲۵)

مساحت مستطیل: $S=xy=x(۱۰-x)=-x^۲+۱۰x$ (۰/۲۵)

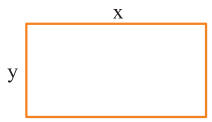
$$\underbrace{S'=۰ \Rightarrow -۲x+۱۰=۰}_{(۰/۲۵)} \Rightarrow x=۵ \quad y=۵ \quad (۰/۲۵)$$

$S=xy=۵\times ۵=۲۵$ (۰/۲۵) (صفحهٔ ۱۱۴)

درس Box

در مسائل بهینه‌سازی با توجه به اطلاعات مسأله تابع به دست آمده را تک‌متغیره می‌کنیم و سپس از تابع تک‌متغیرشده مشتق می‌گیریم و با برابر صفر قرار دادن مشتق، نقاط بحرانی را به دست می‌آوریم و با جایگذاری در تابع ماکزیمم یا مینیمم را محاسبه می‌کنیم.

پاسخ خیلی تشریحی✔ فرض کنید مستطیلی به طول x و عرض y داریم:



با توجه به‌صورت مسئله، محیط مستطیل ۲۰ است پس:

محیط مستطیل $p=۲۰ \Rightarrow ۲(x+y)=۲۰ \Rightarrow x+y=۱۰ \Rightarrow y=۱۰-x$

مساحت مستطیل $S=xy \xrightarrow{y=۱۰-x} S(x)=x(۱۰-x)=-x^۲+۱۰x$

حال باید ماکزیمم مطلق (بیشترین مقدار مساحت) تابع S را بیابیم:

$$S'=۰ \Rightarrow -۲x+۱۰=۰ \Rightarrow x=۵$$

جدول تغییرات تابع S را بررسی می‌کنیم:

x	۰	۵	۶
$S'(x)=-۲x+۱۰$	+	۰	−
$S(x)=-x^۲+۱۰x$	۰ ↗	۲۵ max مطلق	↘ ۲۴

پس با توجه به جدول متوجه می‌شویم بیشترین مساحت ۲۵ سانتی‌متر است و این مقدار زمانی رخ می‌دهد که $x=y=۵$ است پس داریم:

$$S=xy=۵\times ۵=۲۵$$

۱۷ یک قوطی فلزی دربسته با حجم دو لیتر، چه ارتفاعی داشته باشد تا مقدار فلز به کار رفته در ساخت آن مینیمم شود؟ (جدول تغییرات نیاز نیست)

راهنمای تصحیح

$$v = \pi r^2 h = 2000 cm^3 \ (0/25) \Rightarrow r = \sqrt{\frac{2000}{\pi h}} \ (0/25)$$

$$\underbrace{S = 2\pi rh + 2\pi r^2}_{(0/25)} = 2\pi\sqrt{\frac{2000}{\pi h}} \times h + 2\pi\left(\frac{2000}{\pi h}\right)$$

$$S(h) = 2\sqrt{2000\pi h} + \frac{4000}{h} \ (0/25)$$

$$S'(h) = 0 \Rightarrow \sqrt{8000\pi} \times \frac{1}{2\sqrt{h}} - \frac{4000}{h^2} = 0 \ (0/25)$$

$$\sqrt{8000\pi}\,\frac{1}{2\sqrt{h}} = \frac{4000}{h^2} \Rightarrow \sqrt{8000\pi}\, h\sqrt{h} = 8000$$

$$h\sqrt{h} = \frac{8000}{\sqrt{8000\pi}} = \frac{\sqrt{8000}}{\sqrt{\pi}}$$

$$h^3 = \frac{8000}{\pi} \Rightarrow h = \sqrt[3]{\frac{8000}{\pi}} \ (0/25)$$

(صفحهٔ ۱۱۴)