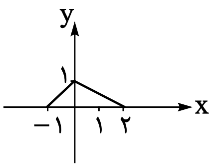
سؤالات امتحان شبیه‌ساز نهایی: ریاضی (۳)	رشته: تجربی	تاریخ امتحان:
نام و نام خانوادگی:	پایه دوازدهم دورهٔ دوم متوسطه	مدت امتحان: ۱۲۰ دقیقه
منطبق بر رویکرد جدید امتحانات نهایی	مرکز ارزشیابی خیلی‌سبز	تعداد صفحه: ۲

ردیف	سـؤالات (پاسخ‌نامه دارد.)	نمره
۱	درستی یا نادرستی عبارت‌های زیر را مشخص کنید. الف) تابع $f(x) = \frac{۱}{\sqrt{۲}}x^۳ - \sqrt{۷}x^۲ - \frac{\sqrt{۳}}{۵}$ یک تابع چندجمله‌ای نیست. ب) بی‌شمار تابع مانند f و g وجود دارد که $f \neq g$ و $fog = gof$. پ) اگر $۰ < k < ۱$، نمودار $y = f(kx)$ از انبساط افقی نمودار $y = f(x)$ به دست می‌آید. ت) تابع $f(x) = x^۲ + ۲x - ۵$ در بازهٔ $(-\infty, -۱]$ وارون‌پذیر است.	۱
۲	جاهای خالی را با عبارت مناسب تکمیل کنید. الف) نقطهٔ $A(۲,۱)$ در تابع $y = f(x)$ متناظر با نقطهٔ .... روی نمودار $g(x) = ۲f(\frac{۱}{۲}x)$ است. ب) اگر تابع $f(x) = ۶x - x^۲$ روی بازهٔ $[a, +\infty)$ اکیداً نزولی باشد، کم‌ترین مقدار a برابر است با .... پ) اگر $f(x) = \sqrt{x-۲} + ۱$ باشد، آن‌گاه دامنهٔ تابع $fof^{-۱}$ برابر است با .... ت) اگر $f(x) = \frac{۱}{۲}x - ۱$ و $g(x) = x^۳$، حاصل $(fog)^{-۱}(۳)$ برابر است با	۲
۳	نمودار تابع $y = -(x-۱)^۳ + ۱$ را رسم کنید و وضعیت یکنوایی آن را بررسی کنید.	۰/۷۵
۴	نمودار تابع $\begin{cases} x^۲ - ۱ & x < ۰ \\ ۱ & ۰ \leq x < ۱ \\ \sqrt{x-۱} + ۲ & x \geq ۱ \end{cases}$ را رسم کنید و مشخص کنید تابع f در چه بازه‌ای صعودی، در چه بازه‌ای نزولی و در چه بازه‌ای ثابت است.	۱/۵
۵	اگر تابع $f = \{(۱, ۲m-۱), (-۲, ۵), (۴, ۳)\}$ نزولی باشد، حدود m را به دست آورید.	۱/۲۵
۶	نمودار تابعی را رسم کنید که در هر یک از بازه‌های $(-\infty, ۰]$ و $(۰, +\infty)$ اکیداً نزولی باشد، ولی روی $\mathbb{R}$ اکیداً نزولی نباشد.	۰/۵
۷	اگر $f = \{(۱,۲), (-۱,۴), (۲,۰)\}$ و $g = \{(۴,۹), (۲,-۳), (۱,۶)\}$ باشد، تابع gof را به دست آورید.	۱
۸	اگر $f(x) = \sqrt{x+۲}$ و $g(x) = \sqrt{۱۶ - x^۲}$ باشد، الف) دامنهٔ تابع gof را با استفاده از تعریف به دست آورید. ب) مقدار $(fog)(\sqrt{۱۲})$ را به دست آورید.	۲
۹	اگر $f(g(x)) = ۴x^۳ + ۲\sqrt{x} - ۱$ و $f(x) = ۲x + ۷$ باشد، ضابطهٔ تابع g را به دست آورید.	۱
۱۰	تابع $h(x) = \sqrt[۳]{x^۲ + ۱}$ را به صورت ترکیب دو تابع بنویسید.	۰/۷۵
۱۱	شکل زیر نمودار تابع $y = f(x)$ است. نمودار تابع $g(x) = -۲f(\frac{۱}{۲}x)$ را رسم کنید و دامنه و برد آن را به دست آورید.  	۱
۱۲	با استفاده از نمودار $y = \sqrt{x}$، نمودار تابع $y = \sqrt{۲-x}$ را رسم کنید.	۰/۵

سؤالات امتحان شبیه‌ساز نهایی: ریاضی (۳)	رشته: تجربی	تاریخ امتحان:	
نام و نام خانوادگی:	پایه دوازدهم دورهٔ دوم متوسطه	مدت امتحان: ۱۲۰ دقیقه	
منطبق بر رویکرد جدید امتحانات نهایی	مرکز ارزشیابی خیلی‌سبز	تعداد صفحه: ۲	

ردیف	سـؤالات (پاسخ‌نامه دارد.)	نمره
۱۳	نمودار تابع $y=-x^{2}+3x$ را ابتدا یک واحد به سمت راست و سپس دو واحد به پایین منتقل کرده و در نهایت نمودار حاصل را ابتدا نسبت به محور yها و سپس نسبت به محور xها قرینه می‌کنیم. ضابطهٔ تابع را در هر مرحله بنویسید.	۱/۵
۱۴	نشان دهید توابع $f(x)=2x^{3}-1$ و $g(x)=\sqrt[3]{\frac{x+1}{2}}$ وارون یکدیگرند.	۱/۲۵
۱۵	ضابطهٔ وارون تابع با ضابطهٔ $f(x)=2-\sqrt{3x-1}$ را به دست آورید.	۱/۲۵
۱۶	ابتدا دامنهٔ تابع $f(x)=x^{2}-4x+3$ را به گونه‌ای محدود کنید که این تابع وارون‌پذیر باشد و سپس نمودار f و f^{-1} را در یک دستگاه رسم کنید.	۱
۱۷	اگر $f(x)=\frac{3x+1}{x-1}$ و $g(x)=x^{3}-9$ باشد، حاصل $(f^{-1}og^{-1})(-1)$ را به دست آورید.	۱/۷۵
	«پیروز و سربلند باشید.» جمع بارم	۲۰

ریاضی ۳

۱ درستی یا نادرستی عبارت‌های زیر را مشخص کنید.

الف) تابع $f(x)=\frac{۱}{\sqrt{۲}}x^۳-\sqrt{۷}x^۲-\frac{\sqrt{۳}}{۵}$ یک تابع چندجمله‌ای نیست.

ب) بی‌شمار تابع مانند f و g وجود دارد که $f\neq g$ و $fog=gof$.

پ) اگر $۰<k<۱$، نمودار $y=f(kx)$ از انبساط افقی نمودار $y=f(x)$ به دست می‌آید.

ت) تابع $f(x)=x^۲+۲x-۵$ در بازهٔ $(-\infty,-۱]$ وارون‌پذیر است.

راهنمای تصحیح

الف) نادرست (۰/۲۵) ب) درست (۰/۲۵) پ) درست (۰/۲۵) ت) درست (۰/۲۵)

پاسخ خیلی تشریحی

الف) چون توان تمام متغیرها یک عدد حسابی است، پس این تابع، یک تابع چندجمله‌ای است، در نتیجه این جمله نادرست است.

ب) درست؛ زیرا با فرض $f(x)=x^۲$ و $g(x)=x^۳$، داریم $f\neq g$ و $(fog)(x)=(gof)(x)=x^۶$. به طور کلی اگر $m\neq n$ (m و n اعداد طبیعی‌اند) و $f(x)=x^m$ و $g(x)=x^n$، آن‌گاه $f\neq g$ و همواره داریم $(fog)(x)=(gof)(x)=x^{mn}$؛ بنابراین بی‌شمار تابع مانند f و g با شرایط سؤال وجود دارد.

پ) درست؛ به طور مثال اگر $k=\frac{۱}{۲}$، آن‌گاه برای رسم $y=f(\frac{۱}{۲}x)$، باید xها را در نمودار $y=f(x)$ در ۲ ضرب کنیم و این یعنی این‌که نمودار $y=f(\frac{۱}{۲}x)$ از انبساط افقی نمودار $y=f(x)$ حاصل می‌شود.

ت) درست؛ نمودار f، یک سهمی رو به بالا است، واضح است که سهمی‌ها یک‌به‌یک نیستند، اما اگر سهمی را از رأس برش دهیم، هر یک از شاخه‌های سهمی یک‌به‌یک و لذا وارون‌پذیرند. داریم:

$$x_S=-\frac{b}{۲a}=-\frac{۲}{۲}=-۱$$

بنابراین سهمی داده‌شده روی هر یک از بازه‌های $(-\infty,-۱]$ یا $[-۱,+\infty)$ و نیز روی هر زیرمجموعه‌ای از این دو بازه وارون‌پذیر است.

۲ جاهای خالی را با عبارت مناسب تکمیل کنید.

الف) نقطهٔ $A(2,1)$ در تابع $y = f(x)$ متناظر با نقطهٔ .... روی نمودار $g(x) = 2f(\frac{1}{3}x)$ است.

ب) اگر تابع $f(x) = 6x - x^2$ روی بازهٔ $[a,+\infty)$ اکیداً نزولی باشد، کم‌ترین مقدار a برابر است با ....

پ) اگر $f(x) = \sqrt{x-2} + 1$ باشد، آن‌گاه دامنهٔ تابع fof^{-1} برابر است با ....

ت) اگر $f(x) = \frac{1}{2}x - 1$ و $g(x) = x^3$، حاصل $(fog)^{-1}(3)$ برابر است با ....

راهنمای تصحیح الف) $A'(6,2)$ (۰/۵) ب) ۳ (۰/۵) پ) $[1,+\infty)$ (۰/۵) ت) ۲ (۰/۵)

پاسخ خیلی تشریحی الف) می‌دانیم برای رسم نمودار $y = 2f(\frac{1}{3}x)$ کافی است در نمودار $y = f(x)$ طول نقاط را در ۳ و عرض نقاط را در ۲ ضرب کنیم. پس:

$$\left.\begin{array}{l} x_A = 2 \xrightarrow{\times 3} x_{A'} = 6 \\ y_A = 1 \xrightarrow{\times 2} y_{A'} = 2 \end{array}\right. \Rightarrow A'(6,2) \in g$$

ب)

$$f(x) = 6x - x^2 \Rightarrow x_S = -\frac{b}{2a} = \frac{-6}{-2} = 3$$

نمودار f یک سهمی رو به پایین است و لذا در بازهٔ $[3,+\infty)$ و یا هر زیرمجموعهٔ آن اکیداً نزولی است؛ در نتیجه کم‌ترین مقدار a برابر ۳ است.

پ)

نکته

$$D_{fof^{-1}} = D_{f^{-1}} = R_f \quad , \quad D_{f^{-1}of} = D_f$$

بنابر نکتهٔ فوق، دامنهٔ تابع $y = fof^{-1}$ با دامنهٔ تابع f^{-1} و لذا با برد تابع f برابر است. پس کافی است برد تابع f را بیابیم، داریم:

$$\sqrt{x-2} \geq 0 \xrightarrow{+1} \sqrt{x-2} + 1 \geq 1 \Rightarrow f(x) \geq 1 \Rightarrow R_f = D_{f^{-1}} = [1,+\infty)$$

پس: $D_{fof^{-1}} = D_{f^{-1}} = [1,+\infty)$.

ت) می‌دانیم اگر $f^{-1}(b) = a$، آن‌گاه $f(a) = b$. داریم:

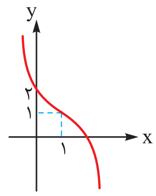
$$(fog)(x) = f(g(x)) = f(x^3) = \frac{1}{2}x^3 - 1$$

$$(fog)^{-1}(3) = x \Rightarrow (fog)(x) = 3 \Rightarrow \frac{1}{2}x^3 - 1 = 3 \Rightarrow \frac{1}{2}x^3 = 4 \Rightarrow x^3 = 8 \Rightarrow x = 2$$

$$\Rightarrow (fog)^{-1}(3) = 2$$

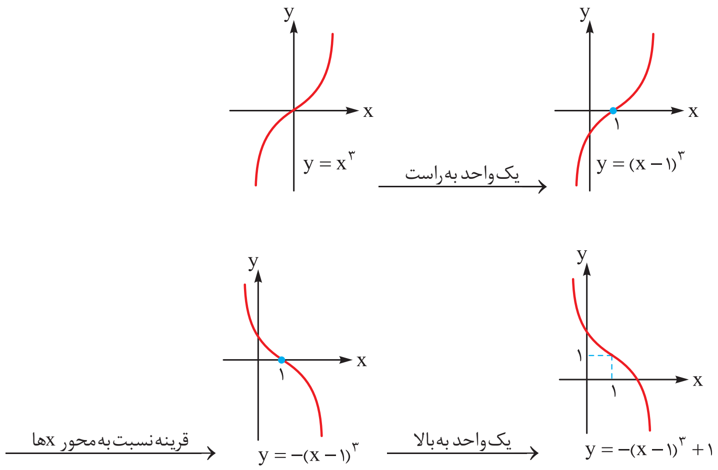
۳ **نمودار تابع $y=-(x-1)^3+1$ را رسم کنید و وضعیت یکنوایی آن را بررسی کنید.**

راهنمای تصحیح روی دامنه‌اش اکیداً نزولی است. (۰/۲۵)



رسم شکل (۰/۵)

پاسخ خیلی تشریحی مرحله‌به‌مرحله نمودار تابع داده‌شده را رسم می‌کنیم:



با توجه به نمودار تابع $y=-(x-1)^3+1$ ، درمی‌یابیم که این تابع روی $\mathbb{R}$ اکیداً نزولی است.

۴ نمودار تابع $f(x)=\begin{cases} x^2-1 & x<0 \\ 1 & 0\le x<1 \\ \sqrt{x-1}+2 & x\ge 1 \end{cases}$ را رسم کنید و مشخص کنید تابع f در چه بازه‌ای صعودی، در چه بازه‌ای نزولی و در چه بازه‌ای ثابت است.

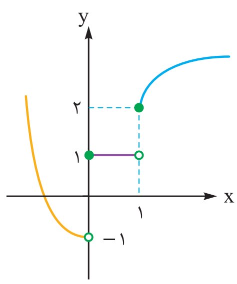
راهنمای تصحیح

$(-\infty,0) \leftarrow$ اکیداً نزولی (۰/۲۵)

$[0,1) \leftarrow$ ثابت (۰/۲۵)

$[0,+\infty) \leftarrow$ صعودی (۰/۲۵)

هر قسمت از شکل (۰/۲۵)



پاسخ خیلی تشریحی

برای رسم نمودار f، کافی است سهمی $y=x^2-1$ را در بازهٔ $(-\infty,0)$، خط $y=1$ را در بازهٔ $[0,1)$ و تابع $y=\sqrt{x-1}+2$ را در بازهٔ $[1,+\infty)$ رسم کنیم. بدیهی است که برای رسم $y=x^2-1$، کافی است سهمی $y=x^2$ را یک واحد به پایین منتقل کنیم و برای رسم نمودار $y=\sqrt{x-1}+2$ کافی است نمودار $y=\sqrt{x}$ را یک واحد به راست و ۲ واحد به بالا منتقل کنیم.

بنابراین نمودار تابع به صورت فوق درمی‌آید. با توجه به نمودار می‌توان نوشت:

در بازهٔ $(-\infty,0)$ اکیداً نزولی است.

در بازهٔ $[0,1)$ ثابت (هم صعودی و هم نزولی) است.

در بازهٔ $[1,+\infty)$ اکیداً صعودی است.

در بازهٔ $[0,+\infty)$ صعودی است.

۵ اگر تابع $f = \{(۱,۲m-۱),(-۲,۵),(۴,۳)\}$ نزولی باشد، حدود m را به دست آورید.

راهنمای تصحیح

$$\underbrace{-۲<۱<۴}_{(۰/۲۵)} \Rightarrow \underbrace{f(-۲)\ge f(۱)\ge f(۴)}_{(۰/۵)} \Rightarrow \underbrace{۵\ge ۲m-۱\ge ۳}_{(۰/۲۵)} \Rightarrow ۲\le m\le ۳ \quad (۰/۲۵)$$

درس Box

اگر تابع f روی بازه‌ای نزولی باشد و a و b متعلق به این بازه باشند، آن‌گاه:

$$a<b \Rightarrow f(a)\ge f(b)$$

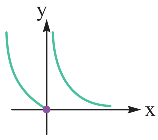
پاسخ خیلی تشریحی

با توجه به دامنهٔ تابع f داریم: $-۲<۱<۴$، چون f تابعی نزولی است، با توجه به درس‌باکس فوق می‌توان نوشت:

$$f(-۲)\ge f(۱)\ge f(۴) \Rightarrow ۵\ge ۲m-۱\ge ۳ \xrightarrow{+۱} ۶\ge ۲m\ge ۴ \xrightarrow{\div ۲} ۲\le m\le ۳$$

۶ **نمودار تابعی را رسم کنید که در هر یک از بازه‌های $(-\infty,0]$ و $(0,+\infty)$ اکیداً نزولی باشد، ولی روی $\mathbb{R}$ اکیداً نزولی نباشد.**

راهنمای تصحیح



رسم شکل (۰/۵)

به جواب‌های مشابه به شرط درستی نمره تعلق می‌گیرد.

پاسخ خیلی تشریحی

نمودارهای زیادی با شرایط مسئله می‌توان رسم کرد که نمودار فوق یکی از آن‌هاست. با توجه به نمودار، این تابع در هر یک از بازه‌های $(-\infty,0]$ و $(0,+\infty)$ اکیداً نزولی است؛ اما همان طور که دیده می‌شود، تابع روی دامنه‌اش یعنی روی $\mathbb{R}$، غیریکنواست.

۷ اگر $f = \{(۱,۲),(-۱,۴),(۲,۰)\}$ و $g = \{(۴,۹),(۲,-۳),(۱,۶)\}$ باشد، تابع **gof** را به دست آورید.

راهنمای تصحیح هر زوج مرتب (۰/۵)

$gof = \{(۱,-۳),(-۱,۹)\}$

پاسخ خیلی تشریحی وقتی توابع f و g به صورت زوج مرتبی داده شده‌اند، در تشکیل تابع gof، ابتدا f اثر می‌کند و سپس g:

$(gof)(۱) = g(f(۱)) = g(۲) = -۳ \Rightarrow (۱,-۳) \in gof$

$(gof)(-۱) = g(f(-۱)) = g(۴) = ۹ \Rightarrow (-۱,۹) \in gof$

$(gof)(۲) = g(f(۲)) = g(۰) \rightarrow$ تعریف‌نشده

$\Rightarrow gof = \{(۱,-۳),(-۱,۹)\}$

۸ اگر $f(x)=\sqrt{x+۲}$ و $g(x)=\sqrt{۱۶-x^۲}$ باشد.

الف) دامنهٔ تابع **gof** را با استفاده از تعریف به دست آورید.

ب) مقدار $(fog)(\sqrt{۱۲})$ را به دست آورید.

راهنمای تصحیح

الف)

$$D_f=[-۲,+\infty)\ (۰/۲۵)\ ,D_g=[-۴,۴]\ (۰/۲۵)$$

$$D_{gof}=\{x\in D_f\,|\,f(x)\in D_g\}=\{x\geq -۲\,|\,-۴\leq\sqrt{x+۲}\leq ۴\}\ \ (۰/۵)$$
$$=\{x\geq -۲\,|\,x\leq ۱۴\}\ (۰/۲۵)\ =[-۲,۱۴]\ (۰/۲۵)$$

ب)

$$(fog)\underbrace{(\sqrt{۱۲})=f(g(\sqrt{۱۲}))}_{(۰/۲۵)}=f(۲)=۲\ \ (۰/۲۵)$$

نکته

$$D_{fog}=\{x\in D_g\,|\,g(x)\in D_f\}\ ,\ D_{gof}=\{x\in D_f\,|\,f(x)\in D_g\}$$

$$(fog)(x)=f(g(x))\ \ ,\ \ (gof)(x)=g(f(x))$$

پاسخ خیلی تشریحی

الف)

$$f(x)=\sqrt{x+۲}\ \Rightarrow\ x+۲\geq ۰\ \Rightarrow\ x\geq -۲$$

$$g(x)=\sqrt{۱۶-x^۲}\ \Rightarrow\ ۱۶-x^۲\geq ۰\ \Rightarrow x^۲\leq ۱۶\ \Rightarrow\ |x|\leq ۴\ \Rightarrow\ -۴\leq x\leq ۴$$

$$D_{gof}=\{x\in D_f\,|\,f(x)\in D_g\}=\{x\geq -۲\,|\,-۴\underbrace{\leq\sqrt{x+۲}\leq ۴}_{(*)}\}$$

$$(*):\ \underbrace{-۴\leq\sqrt{x+۲}}_{\text{بدیهی}}\leq ۴\ \Rightarrow\ \sqrt{x+۲}\leq ۴\ \xrightarrow{\text{توان ۲}}\ x+۲\leq ۱۶\ \Rightarrow\ x\leq ۱۴$$

$$\Rightarrow\ D_{gof}=\{x\geq -۲\,|\,x\leq ۱۴\}\ \Rightarrow\ D_{gof}=[-۲,۱۴]$$

ب)

$$g(\sqrt{۱۲})=\sqrt{۱۶-۱۲}=\sqrt{۴}=۲$$
$$\Rightarrow\ (fog)(\sqrt{۱۲})=f(g(\sqrt{۱۲}))=f(۲)=\sqrt{۴}=۲$$

۹ اگر $f(g(x)) = ۴x^۳ + ۲\sqrt{x} - ۱$ و $f(x) = ۲x + ۷$ باشد، ضابطهٔ تابع g را به دست آورید.

راهنمای تصحیح

$$(fog)(x) = \underbrace{f(g(x)) = ۲g(x) + ۷}_{(۰/۲۵)} = \underbrace{۴x^۳ + ۲\sqrt{x} - ۱}_{(۰/۲۵)} \Rightarrow g(x) = ۲x^۳ + \sqrt{x} - ۴ \quad (۰/۵)$$

پاسخ خیلی تشریحی

$$f(x) = ۲x + ۷ \Rightarrow f(g(x)) = ۲g(x) + ۷ \quad (۱)$$

از طرفی طبق فرض $f(g(x)) = ۴x^۳ + ۲\sqrt{x} - ۱ \quad (۲)$

$$(۱),(۲) \Rightarrow ۲g(x) + ۷ = ۴x^۳ + ۲\sqrt{x} - ۱ \Rightarrow ۲g(x) = ۴x^۳ + ۲\sqrt{x} - ۸ \xrightarrow{\div ۲} g(x) = ۲x^۳ + \sqrt{x} - ۴$$

۱۰ تابع $h(x)=\sqrt[3]{x^{2}+1}$ را به صورت ترکیب دو تابع بنویسید.

راهنمای تصحیح

$$\overbrace{f(x)=\sqrt[3]{x}\ ,\ g(x)=x^{2}+1}^{(0/5)} \Rightarrow h(x)=(fog)(x)=\sqrt[3]{x^{2}+1}\ (0/25)$$

به جواب‌های مشابه به شرط درستی نمره تعلق می‌گیرد.

پاسخ خیلی تشریحی

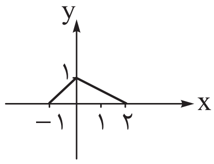
با فرض $f(x)=\sqrt[3]{x}$ و $g(x)=x^{2}+1$ داریم:

$$(fog)(x)=f(g(x))=f(x^{2}+1)=\sqrt[3]{x^{2}+1} \Rightarrow h(x)=(fog)(x)$$

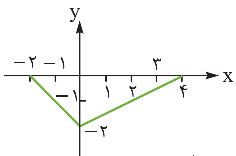
البته باید توجه داشته باشیم که توابع f و g منحصربه‌فرد نیستند. در واقع تابع h را به شکل ترکیب دو تابع دیگری به‌جز توابع فوق نیز می‌توان نوشت. ببینید:

$$f(x)=\sqrt[3]{x+1}\ ,\ g(x)=x^{2} \Rightarrow (fog)(x)=f(g(x))=f(x^{2})=\sqrt[3]{x^{2}+1} \Rightarrow h(x)=(fog)(x)$$

۱۱ شکل زیر نمودار تابع $y=f(x)$ است. نمودار تابع $g(x)=-2f(\frac{1}{2}x)$ را رسم کنید و دامنه و برد آن را به دست آورید.



راهنمای تصحیح



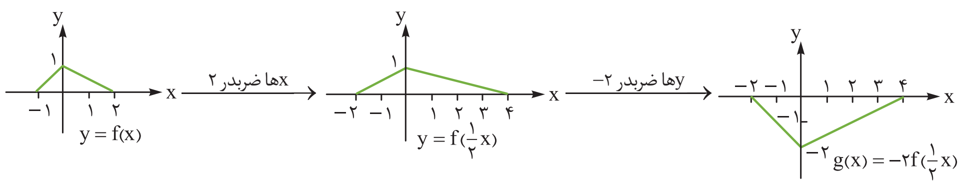
$g(x)=-2f(\frac{1}{2}x)$ رسم شکل (۰/۵)

$$\Rightarrow D_g=[-2,4]\ ,\ R_g=[-2,0]$$

(۰/۲۵) (۰/۲۵)

پاسخ خیلی تشریحی

مرحله‌به‌مرحله، نمودار تابع g را رسم می‌کنیم:

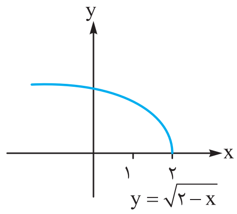


با توجه به نمودار تابع g داریم:

$$D_g=[-2,4]\ ,\ R_g=[-2,0]$$

۱۲ **با استفاده از نمودار $y=\sqrt{x}$، نمودار تابع $y=\sqrt{۲-x}$ را رسم کنید.**

راهنمای تصحیح برای رسم نمودار تابع $y=\sqrt{۲-x}$ کافی است نمودار $y=\sqrt{x}$ را ابتدا ۲ واحد به چپ منتقل کرده و سپس نمودار حاصل را نسبت به محور yها قرینه کنیم:

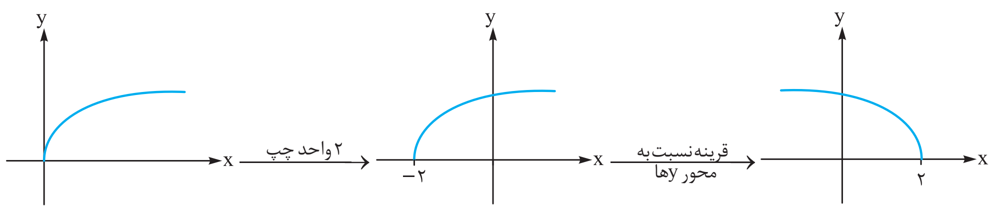


رسم شکل (۰/۵)

پاسخ خیلی تشریحی می‌توان نوشت: $y=\sqrt{۲-x}=\sqrt{-x+۲}$

بدیهی است که تغییرات در راستای محور xها صورت می‌گیرد، زیرا همهٔ تغییرات زیر رادیکال اتفاق افتاده است.

مرحله‌به‌مرحله نمودار $y=\sqrt{۲-x}$ را رسم می‌کنیم:



۱۳ نمودار تابع $y=-x^{۲}+۳x$ را ابتدا یک واحد به سمت راست و سپس دو واحد به پایین منتقل کرده و در نهایت نمودار حاصل را ابتدا نسبت به محور yها و سپس نسبت به محور xها قرینه می‌کنیم. ضابطهٔ تابع را در هر مرحله بنویسید.

راهنمای تصحیح

$$\underset{(۰/۲۵)}{y=-x^{۲}+۳x}\xrightarrow[x\to x-۱]{\text{یک واحد به راست}}\underset{(۰/۲۵)}{y=-(x-۱)^{۲}+۳(x-۱)}\xrightarrow{\text{۲ واحد به پایین}}\underset{(۰/۲۵)}{y=-(x-۱)^{۲}+۳(x-۱)-۲}$$

$$\Rightarrow y=-x^{۲}+۲x-۱+۳x-۳-۲\Rightarrow \underset{(۰/۲۵)}{y=-x^{۲}+۵x-۶}\xrightarrow[x\to -x]{\text{قرینه نسبت به محور } y\text{ها}}\underset{(۰/۲۵)}{y=-(-x)^{۲}+۵(-x)-۶}$$

$$\Rightarrow y=-x^{۲}-۵x-۶\ (۰/۲۵)\xrightarrow{\text{قرینه نسبت به محور } x\text{ها}} y=x^{۲}+۵x+۶\ (۰/۲۵)$$

(ساده‌سازی ضابطهٔ تابع در هر مرحله که انجام شود نمرهٔ آن به دانش‌آموز تعلق می‌گیرد.)

۱۴ نشان دهید توابع $f(x)=۲x^۳-۱$ و $g(x)=\sqrt[۳]{\frac{x+۱}{۲}}$ وارون یکدیگرند.

راهنمای تصحیح

$$(fog)(x)=۲(\sqrt[۳]{\frac{x+۱}{۲}})^۳-۱=x \quad (۰/۵)$$

$$(gof)(x)=\sqrt[۳]{\frac{(۲x^۳-۱)+۱}{۲}}=x \quad (۰/۵)$$

$\Rightarrow$ f و g وارون یکدیگرند. (۰/۲۵)

درس Box

شرط آن‌که دو تابع f و g وارون یکدیگر باشند، آن است که:

$$\begin{cases}(fog)(x)=x\ ;\ x\in D_g\\(gof)(x)=x\ ;\ x\in D_f\end{cases}$$

پاسخ خیلی تشریحی

$$(fog)(x)=f(g(x))=f(\sqrt[۳]{\frac{x+۱}{۲}})=۲(\sqrt[۳]{\frac{x+۱}{۲}})^۳-۱=\cancel{۲}(\frac{x+۱}{\cancel{۲}})-۱=x+۱-۱=x$$

$$(gof)(x)=g(f(x))=g(۲x^۳-۱)=\sqrt[۳]{\frac{(۲x^۳-۱)+۱}{۲}}=\sqrt[۳]{\frac{۲x^۳}{۲}}=\sqrt[۳]{x^۳}=x$$

چون $(fog)(x)=x$ و $(gof)(x)=x$، پس توابع f و g وارون یکدیگرند.

۱۵ **ضابطهٔ وارون تابع با ضابطهٔ $f(x)=۲-\sqrt{۳x-۱}$ را به دست آورید.**

راهنمای تصحیح

$$y=۲-\sqrt{۳x-۱} \Rightarrow \sqrt{۳x-۱}=۲-y \quad (۰/۲۵) \quad \Rightarrow ۳x-۱=(۲-y)^۲ \quad (۰/۲۵) \Rightarrow x=\frac{(۲-y)^۲+۱}{۳} \quad (۰/۲۵)$$

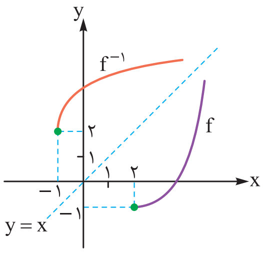
$$\Rightarrow f^{-۱}(x)=\frac{(۲-x)^۲+۱}{۳} \quad (۰/۵)$$

درس Box

برای یافتن وارون تابع $y=f(x)$ در صورت وجود، ابتدا x را برحسب y به دست آورده و سپس به جای y، x و به جای x، $f^{-۱}(x)$ یا همان y قرار می‌دهیم.

۱۶ ابتدا دامنهٔ تابع $f(x) = x^{۲} - ۴x + ۳$ را به گونه‌ای محدود کنید که این تابع وارون‌پذیر باشد و سپس نمودار f و $f^{-۱}$ را در یک دستگاه رسم کنید.

راهنمای تصحیح



رسم شکل (۰/۵)

هر زیرمجموعه‌ای از این بازه درست است. هم‌چنین هر زیرمجموعه‌ای از $(-\infty, ۲]$ نیز قابل قبول است. (۰/۲۵) $D_f = [۲, +\infty)$

$f(x) = (x-۲)^{۲} - ۱$ (۰/۲۵)

نکته به طور کلی اگر دامنهٔ تابع درجه‌دوم $y = ax^{۲} + bx + c$ به یکی از بازه‌های $[-\frac{b}{۲a}, +\infty)$ یا $(-\infty, -\frac{b}{۲a}]$ و یا هر زیرمجموعه‌ای از آن‌ها محدود شود، تابع وارون‌پذیر می‌شود.

پاسخ خیلی تشریحی بنابر نکتهٔ فوق داریم:

$$x = -\frac{b}{۲a} = \frac{۴}{۲} = ۲$$

بنابراین اگر دامنهٔ تابع f مثلاً به بازهٔ $[۲, +\infty)$ محدود شود، تابع وارون‌پذیر می‌شود. داریم:

$$f(x) = x^{۲} - ۴x + ۳ = (x^{۲} - ۴x + ۴) - ۱ = (x-۲)^{۲} - ۱ \ ; \ x \geq ۲$$

برای رسم تابع f کافی است نمودار $y = x^{۲}$ را ۲ واحد به راست و یک واحد به پایین منتقل کرده و فقط نمودار واقع در بازهٔ $[۲, +\infty)$ را نگه داشته و بقیه را حذف می‌کنیم. برای رسم نمودار $f^{-۱}$، کافی است نمودار f را نسبت به خط $y = x$ (نیمساز ربع اول و سوم) قرینه کنیم. لذا نمودار f و $f^{-۱}$ مانند نمودار فوق رسم می‌شود.

تذکر: اگر قرینه‌کردن دشوار است می‌توانید ضابطهٔ وارون تابع را به دست آورید و سپس رسم کنید.

$$y = (x-۲)^{۲} - ۱$$

$$y + ۱ = (x-۲)^{۲} \xrightarrow{\text{جذر}} \sqrt{y+۱} = |x-۲| \xrightarrow{x \geq ۲} \sqrt{y+۱} + ۲ = x$$

$$\Rightarrow f^{-۱}(x) = \sqrt{x+۱} + ۲$$

برای رسم این تابع کافی است نمودار $\sqrt{x}$ را یک واحد به چپ و دو واحد به بالا ببرید.

۱۷ اگر $f(x)=\frac{۳x+۱}{x-۱}$ و $g(x)=x^۳-۹$ باشد، حاصل $(f^{-۱}og^{-۱})(-۱)$ را به دست آورید.

راهنمای تصحیح

$$\underbrace{g^{-۱}(-۱)=x}_{(۰/۲۵)} \Rightarrow \underbrace{g(x)=-۱ \Rightarrow x^۳-۹=-۱}_{(۰/۲۵)} \Rightarrow x=۲ \ (۰/۲۵)$$

$$\underbrace{f^{-۱}(g^{-۱}(-۱))=f^{-۱}(۲)=x}_{(۰/۲۵)} \Rightarrow f(x)=۲ \ (۰/۲۵) \Rightarrow \frac{۳x+۱}{x-۱}=۲ \ (۰/۲۵) \Rightarrow ۳x+۱=۲x-۲ \Rightarrow x=-۳ \ (۰/۲۵)$$

روش دوم:

$$g^{-۱}(x)=\sqrt[۳]{x+۹} \Rightarrow g^{-۱}(-۱)=۲$$

$$f^{-۱}(x)=\frac{x+۱}{x-۳} \Rightarrow f^{-۱}(g^{-۱}(-۱))=f^{-۱}(۲)=-۳$$

نکته: اگر $f^{-۱}(b)=a$، آن‌گاه $f(a)=b$.

پاسخ خیلی تشریحی

$$(f^{-۱}og^{-۱})(-۱)=f^{-۱}(g^{-۱}(-۱))$$

ابتدا $g^{-۱}(-۱)$ را می‌یابیم:

$$g^{-۱}(-۱)=x \Rightarrow g(x)=-۱ \Rightarrow x^۳-۹=-۱ \Rightarrow x^۳=۸ \Rightarrow x=۲ \Rightarrow g^{-۱}(-۱)=۲$$

حال $f^{-۱}(g^{-۱}(-۱))$ را می‌یابیم:

$$f^{-۱}(g^{-۱}(-۱))=f^{-۱}(۲)=x$$

$$\Rightarrow f(x)=۲ \Rightarrow \frac{۳x+۱}{x-۱}=۲ \Rightarrow ۳x+۱=۲x-۲ \Rightarrow x=-۳ \Rightarrow f^{-۱}(۲)=-۳$$

$$\Rightarrow (f^{-۱}og^{-۱})(-۱)=-۳$$

روش دوم:

$$f(x)=\frac{۳x+۱}{x-۱} \Rightarrow y=\frac{۳x+۱}{x-۱} \Rightarrow ۳x+۱=xy-y \Rightarrow y+۱=xy-۳x$$

$$\Rightarrow y+۱=x(y-۳) \Rightarrow x=\frac{y+۱}{y-۱} \Rightarrow f^{-۱}(x)=\frac{x+۱}{x-۳}$$

$$g(x)=x^۳-۹ \Rightarrow y=x^۳-۹ \Rightarrow y+۹=x^۳ \Rightarrow x=\sqrt[۳]{y+۹} \Rightarrow g^{-۱}(x)=\sqrt[۳]{x+۹}$$