

A

دفترچه پاسخ تشریحی

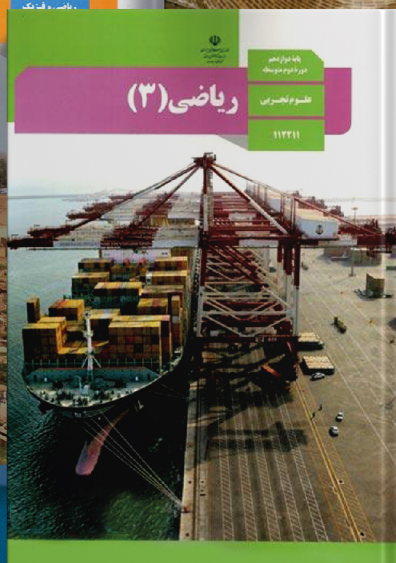
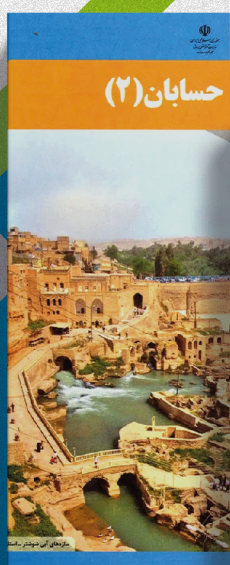
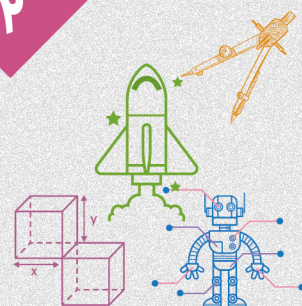
گروه آزمایشی علوم ریاضی

آزمون آزمایشی ۲۴ مهر ۱۴۰۵

ویژه داوطلبان آزمون سراسری ۱۴۰۶

پایه
دوازدهم

مرحله
۲



۱۴۰۵ - ۱۴۰۶

گزیده دو
مؤسسه آموزشی فرهنگی

تذکرات مهم ↓

➤ آزمون آزمایشی مرحله ۳ گزینه دو، در روز جمعه ۱ آبان ۱۴۰۵ برگزار می گردد.

➤ داوطلب گرامی، جهت استفاده از خدمات طلایی خود مانند کارنامه های هوشمند بعد از آزمون، آزمونک ها، بانک سؤال گزینه دو، رفع اشکال هوشمند، آرشیو آزمون های گزینه دو و...، با استفاده از شماره داوطلبی (به عنوان نام کاربری) و کد ملی خود (به عنوان رمز عبور) وارد وبسایت گزینه دو به آدرس www.gozine2.ir شوید.

➤➤ در صورتی که اینترنتی ثبت نام کرده اید، رمز عبور شما همان رمزی است که خودتان انتخاب نموده اید.

➤ کارنامه های آزمون آزمایشی مرحله ۲ به صورت کامل، با فاصله زمانی کوتاهی پس از آزمون مطابق اطلاعیه اعلام شده، بر روی پایگاه اینترنتی گزینه دو به آدرس www.gozine2.ir قرار می گیرد. در صورت بروز اشکال در دریافت کارنامه، موضوع را از طریق نمایندگی شهر خود پیگیری نمایید.



داوطلب گرامی، شما می توانید با اسکن تصویر بالا به وسیله گوشی هوشمند و یا تبلت خود، به صفحه اینستاگرام مؤسسه گزینه دو وارد شوید.

gozine2.ir

ریاضیات



۱- پاسخ: گزینه ۳

▲ مشخصات سؤال: متوسط * ریاضی ۱ (فصل ۵، درس ۱)

نکته: اگر یک رابطه به صورت زوج‌های مرتب داده شده باشد، هنگامی این رابطه تابع است که هیچ دو زوج مرتب متمایزی دارای مؤلفه اول یکسان نباشند؛ یعنی اگر در آن زوج مرتب‌هایی دارای مؤلفه اول یکسان باشند، مؤلفه دوم آن‌ها نیز با یکدیگر برابر باشند. با توجه به نکته فوق، می‌توان نوشت:

$$(4,0), (4, 2 - \frac{b}{2}) \in f \Rightarrow 2 - \frac{b}{2} = 0 \Rightarrow b = 4$$

$$(5, a^2 - a), (5, 5a - 8) \in f \Rightarrow a^2 - a = 5a - 8 \Rightarrow a^2 - 6a + 8 = 0 \Rightarrow (a-2)(a-4) = 0 \Rightarrow a = 2 \text{ یا } a = 4$$

با جایگذاری a و b در رابطه f داریم:

$$a = 4 \Rightarrow \{(4,0), (5,12), (4,1), (4,0), (5,12)\} \quad \times \text{ تابع نیست.}$$

$$a = 2 \Rightarrow f = \{(4,0), (5,2), (2,1), (4,0), (5,2)\} \quad \checkmark \text{ تابع است.}$$

$$a + b = 4 + 2 = 6$$

پس فقط $a = 2$ قابل قبول است؛ بنابراین:

▲ مشخصات سؤال: ساده * ریاضی ۱ (فصل ۵، درس ۲)

۲- پاسخ: گزینه ۱

نکته: هر تابع به صورت $y = mx + n$ را یک تابع خطی می‌نامیم.

فرض می‌کنیم $f(x) = mx + n$ ، پس داریم:

$$\begin{cases} f(a) = b + 4 \Rightarrow ma + n = b + 4 \\ f(b) = a + 4 \Rightarrow mb + n = a + 4 \end{cases} \Rightarrow m(a-b) = b-a \Rightarrow \begin{cases} m = -1 \\ n = a + b + 4 \end{cases}$$

پس ضابطه تابع f به صورت زیر است:

$$f(x) = -x + a + b + 4$$

بنابراین:

$$f(a+b) = -a-b+a+b+4 \Rightarrow f(a+b) = 4$$

▲ مشخصات سؤال: متوسط * ریاضی ۱ (فصل ۵، درس ۳)

۳- پاسخ: گزینه ۱

نکته: تابعی مانند f را که برد آن تنها شامل یک عضو است، «تابع ثابت» می‌نامیم.

نکته: اگر دامنه و برد یک تابع برابر باشند و هر عضو از دامنه تابع دقیقاً به همان عضو در برد نظیر شود، تابع را «همانی» می‌گوییم. اگر دامنه تابع همانی $\mathbb{R}$ باشد، نمودار آن همان خط $y = x$ است که با معادله $f(x) = x$ نمایش داده می‌شود.

با توجه به نکات و فرضیات سؤال داریم:

$$f = \{(1, m+n), (-1, 2m)\} \xrightarrow{f \text{ تابع ثابت}} m+n = 2m \Rightarrow m = n \quad (1)$$

$$g(x) = (m+2)x + p \xrightarrow{\substack{g \text{ همانی است} \\ g(x)=x}} \begin{cases} m+2=1 \Rightarrow m=-1 \\ p=0 \end{cases} \quad (2)$$

$$\xrightarrow{(2) \text{ و } (1)} m = n = -1$$

$$2m + 4n + 6p = 2(-1) + 4(-1) + 6(0) = -6$$

در نتیجه:

▲ مشخصات سؤال: ساده * حسابان ۱ (فصل ۲، درس ۱)

۴- پاسخ: گزینه ۱

نکته: هم دامنه تابع را می‌توان هر مجموعه دلخواهی شامل برد تابع در نظر گرفت.

هر یک از گزینه‌ها را بررسی می‌کنیم:

گزینه ۱: اگر برد f برابر $\mathbb{R} - \{0\}$ باشد و برد g شامل برد f باشد، هم دامنه g می‌تواند برابر $\mathbb{R}$ و هم دامنه f می‌تواند برابر $\mathbb{R} - \{0\}$ باشد که برابر نیستند؛ پس گزینه ۱ درست است.

گزینه ۲:

$$f(x) = \sqrt{x} + 1, \quad g(x) = 2\sqrt{-x} \Rightarrow R_f = [1, +\infty), \quad R_g = [0, +\infty), \quad R_f \subseteq R_g \Rightarrow D_f \not\subseteq D_g$$

گزینه ۳:

$$\begin{cases} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ f(x) = x^2 \end{cases}, \begin{cases} \mathbb{R} \rightarrow [0, +\infty) \\ g(x) = x^2 \end{cases} \Rightarrow D_f = D_g = \mathbb{R}, \quad R_f = R_g = [0, +\infty) \Rightarrow \mathbb{R} \neq [0, +\infty)$$

گزینه ۴:

$$f(x) = 2x + 1, \quad g(x) = 1 - 5x \Rightarrow D_f = D_g = \mathbb{R}, \quad R_f = R_g = \mathbb{R} \Rightarrow f \neq g$$

۵- پاسخ: گزینه ۱

▲ مشخصات سؤال: متوسط * حسابان ۱ (فصل ۲، درس ۱)

نکته: دو تابع f و g را برابر نامیم هرگاه:الف) دامنه f و دامنه g با هم برابر باشند.ب) برای هر x از این دامنه یکسان داشته باشیم: $f(x) = g(x)$

$$k(x) = -l(x) - 2x + 3$$

از رابطه $k(x) + l(x) + 2x = 3$ تابع $k(x)$ را بر حسب سایر عبارتها به دست می آوریم، داریم:با توجه به اینکه $l(x)$ تابعی خطی با دامنه $\mathbb{R}$ است، تابع $k(x)$ نیز تابعی خطی با دامنه $\mathbb{R}$ خواهد بود.

حال توابع موجود در هریک از گزینه ها را ساده می کنیم تا ضابطه و دامنه هریک را به دست آوریم:

گزینه ۱:

$$g(x) = \frac{27 - x^2}{x^2 + 3x + 9} = \frac{(3-x)(x^2 + 3x + 9)}{x^2 + 3x + 9} = 3 - x, \quad D_g: x^2 + 3x + 9 \neq 0 \Rightarrow \Delta < 0 \Rightarrow D_g = \mathbb{R}$$

گزینه ۲:

$$h(x) = \frac{9 - x^2}{x + 3} = \frac{(3-x)(x+3)}{x+3} = 3 - x, \quad D_h: x + 3 \neq 0 \Rightarrow x \neq -3 \Rightarrow D_h = \mathbb{R} - \{-3\}$$

گزینه ۳:

$$f(x) = \sqrt{x^2 - 6x + 9} = \sqrt{(x-3)^2} = |x-3|, \quad D_f: x^2 - 6x + 9 \geq 0 \Rightarrow (x-3)^2 \geq 0 \Rightarrow D_f = \mathbb{R}$$

تابع k فقط با تابع g می تواند برابر باشد، زیرا دامنه هر دو تابع برابر $\mathbb{R}$ است و $g(x) = 3 - x$ که یک تابع خطی است. ولی سایر توابع یا خطی نیستند یا دامنه برابر با تابع $l(x)$ ندارند.

پس پاسخ، گزینه ۱ است.

▲ مشخصات سؤال: متوسط * حسابان ۱ (فصل ۲، درس ۲)

۶- پاسخ: گزینه ۳

ابتدا بررسی می کنیم به ازای چه ورودی ای خروجی برابر ۲ می شود؛ واضح است که فقط ضابطه پایینی خروجی های مثبت دارد، پس:

$$-\frac{5}{x} = 2 \Rightarrow x = -\frac{5}{2}$$

بنابراین ورودی تابع یعنی همان $f\left(\frac{a}{16}\right)$ برابر $-\frac{5}{2}$ می باشد؛ حال چون خود $f\left(\frac{a}{16}\right)$ یک مقدار خروجی از تابع است و مقداری منفی دارد،

پس از ضابطه بالا به دست آمده؛ پس داریم:

$$f\left(\frac{a}{16}\right) = -\frac{5}{2} \Rightarrow -2\sqrt{\frac{a}{16}} = -\frac{5}{2} \Rightarrow \sqrt{\frac{a}{16}} = \frac{5}{4} \Rightarrow \frac{a}{16} = \frac{25}{16} \Rightarrow a = 25$$

▲ مشخصات سؤال: دشوار * حسابان ۱ (فصل ۲، درس ۲)

۷- پاسخ: گزینه ۲

نکته: $[x]$ نماد جزء صحیح x است و داریم: $[x] = n \Rightarrow n \leq x < n+1, n \in \mathbb{Z}$ بازه را براساس مقدار $\left[\frac{x}{2}\right]$ به سه زیربازه تقسیم می کنیم:

$$0 \leq x < 2 \Rightarrow \left[\frac{x}{2}\right] = 0 \Rightarrow f(x) = x \times 1 = x$$

$$2 \leq x < 4 \Rightarrow \left[\frac{x}{2}\right] = 1 \Rightarrow f(x) = x \times 2 = 2x$$

$$4 \leq x < 6 \Rightarrow \left[\frac{x}{2}\right] = 2 \Rightarrow f(x) = x \times 3 = 3x$$

بنابراین نمودار سه پاره خطی تابع f روی بازه $[0, 6]$ به صورت روبه رو است:

طول هر یک از سه پاره خط با فرمول فاصله دو نقطه محاسبه می شود:

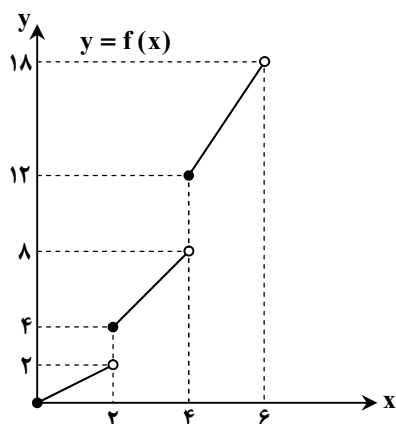
$$\text{پاره خط اول: از } (0, 0) \text{ تا } (2, 2) \Leftarrow \sqrt{(4+4)} = 2\sqrt{2}$$

$$\text{پاره خط دوم: از } (2, 4) \text{ تا } (4, 8) \Leftarrow \sqrt{(4+16)} = 2\sqrt{5}$$

$$\text{پاره خط سوم: از } (4, 12) \text{ تا } (6, 18) \Leftarrow \sqrt{(4+36)} = 2\sqrt{10}$$

بنابراین حاصل ضرب طول این ۳ پاره خط برابر است با:

$$2\sqrt{2} \times 2\sqrt{5} \times 2\sqrt{10} = 8 \times \sqrt{100} = 8 \times 10 = 80$$



۸- پاسخ: گزینه ۴

▲ مشخصات سؤال: متوسط * حسابان ۱ (فصل ۲، درس ۳)

نکته: در تابع وارون پذیر f ، اگر $f(a) = b$ آنگاه: $f^{-1}(b) = a$

ابتدا فرض می‌کنیم $g^{-1}(1) = a$. در این صورت مطابق نکته $g(a) = 1$ ، پس می‌توان نوشت:

$$\frac{2a}{a+3} = 1 \Rightarrow 2a = a+3 \Rightarrow a = 3 \Rightarrow g^{-1}(1) = 3$$

با توجه به تساوی داده‌شده در صورت سؤال می‌توان نتیجه گرفت:

$$f^{-1}(4\alpha+1) = 3 \Rightarrow f(3) = 4\alpha+1 \xrightarrow{(3,5) \in f} 5 = 4\alpha+1 \Rightarrow \alpha = 1$$

بنابراین گزینه ۴ پاسخ است.

۹- پاسخ: گزینه ۱

▲ مشخصات سؤال: متوسط * حسابان ۱ (فصل ۲، درس ۳)

نکته: برای به‌دست آوردن ضابطه تابع وارون یک تابع یک‌به‌یک مانند f ، در معادله $y = f(x)$ در صورت امکان x را برحسب y محاسبه

می‌کنیم، سپس با تبدیل y به x ، $f^{-1}(x)$ را به‌دست می‌آوریم.

ابتدا ضابطه وارون تابع f را به‌دست می‌آوریم. مطابق نکته داریم:

$$y = \frac{2x+6}{x-2} \Rightarrow xy - 2y = 2x+6 \Rightarrow x(y-2) = 2y+6 \Rightarrow x = \frac{2y+6}{y-2} \Rightarrow f^{-1}(x) = \frac{2x+6}{x-3}$$

حال نقاط تلاقی f و f^{-1} را به‌دست می‌آوریم:

$$\begin{cases} f(x) = \frac{2x+6}{x-2} \\ f^{-1}(x) = \frac{2x+6}{x-3} \end{cases} \Rightarrow \frac{2x+6}{x-2} = \frac{2x+6}{x-3} \Rightarrow 2x^2 - 9x + 6x - 18 = 2x^2 - 4x + 6x - 12 \Rightarrow x^2 - 5x - 6 = 0$$

$$\Rightarrow (x-6)(x+1) = 0 \Rightarrow x = -1, 6$$

پس طول نقاط A و B اعداد -1 و 6 است که مجموع آن‌ها برابر 5 است.

۱۰- پاسخ: گزینه ۱

▲ مشخصات سؤال: متوسط * حسابان ۱ (فصل ۲، درس ۴)

نکته: معادله سهمی با مختصات رأس (α, β) به‌صورت $f(x) = k(x-\alpha)^2 + \beta$ است.

رأس سهمی نقطه $S(-1, 3)$ است و سهمی از نقطه $(1, -1)$ می‌گذرد، داریم:

$$f(x) = k(x+1)^2 + 3 \xrightarrow{f(1)=-1} k(1+1)^2 + 3 = -1 \Rightarrow 4k = -4 \Rightarrow k = -1 \Rightarrow f(x) = -(x+1)^2 + 3$$

تابع g با ضابطه $g(x) = x+2$ به‌صورت مستقیم در سؤال داده شده است و محاسبه مقدار $(g \circ (g-f))(\cdot)$ خواسته شده است، داریم:

$$g(\cdot) = 2, f(\cdot) = 2 \Rightarrow (g-f)(\cdot) = 2-2 = 0$$

پس همان مقدار $g(0)$ را می‌خواهیم که برابر است با:

$$g(0) = 2$$

۱۱- پاسخ: گزینه ۱

▲ مشخصات سؤال: متوسط * حسابان ۱ (فصل ۲، درس ۴)

نکته: هر تابع که بتوان آن را به شکل $y = ax + b$ نمایش داد، یک «تابع خطی» نامیده می‌شود.

نکته: اگر f و g دو تابع باشند، ترکیب g با f با $g \circ f$ نمایش می‌دهیم و آن را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم: به شرط آنکه مقادیر f در دامنه g

قرار داشته باشند: $(g \circ f)(x) = g(f(x))$

نکته: به‌طور کلی اگر f و g دو تابع باشند، اعمال بین توابع به‌صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x) \quad ; \quad D_{f+g} = D_f \cap D_g$$

ضابطه تابع خطی (درجه اول) f را به‌صورت $f(x) = ax + b$ در نظر می‌گیریم. با توجه به مفروضات سؤال، داریم:

$$\begin{cases} f(g(4)) = -3 \\ g(4) = -3 \end{cases} \Rightarrow f(-3) = -3 \Rightarrow -3a + b = -3$$

$$(f+g)(1) = 2 \Rightarrow f(1) + \underbrace{g(1)}_2 = 2 \Rightarrow f(1) = 1 \Rightarrow a + b = 1$$

از حل دستگاه $\begin{cases} -3a + b = -3 \\ a + b = 1 \end{cases}$ به جواب $b = 0$ و $a = 1$ می‌رسیم، بنابراین مقدار خواسته شده برابر است با:

$$f(4) = 4a + b = 4(1) + 0 = 4$$

▲ مشخصات سؤال: ساده * حسابان ۲ (فصل ۱، درس ۱)

۱۲- پاسخ: گزینه ۳

چون $A(-3, 5)$ روی نمودار f است، پس $f(-3) = 5$. برای یافتن نقطه متناظر روی نمودار تابع $y = 2 + f(7 - 2x)$ کافی است x را چنان بیابیم که $7 - 2x = -3$ و در نتیجه $x = 5$ ، پس با جایگذاری $x = 5$ در y داریم:

$$y = 2 + f(-3) = 2 + 5 = 7$$

بنابراین نقطه متناظر $(5, 7)$ است و گزینه ۳ پاسخ است.

▲ مشخصات سؤال: ساده * حسابان ۲ (فصل ۱، درس ۱)

۱۳- پاسخ: گزینه ۳

نکته: برای رسم نمودار تابع $y = f(kx)$ ، کافی است طول نقاط نمودار تابع $y = f(x)$ را در $\frac{1}{k}$ ضرب کنیم. اگر $k > 1$ ، نمودار $y = f(kx)$ از انقباض افقی نمودار $y = f(x)$ در راستای محور x ها به دست می آید و اگر $0 < k < 1$ ، این نمودار از انبساط افقی نمودار $y = f(x)$ حاصل می شود.

نکته: برای رسم نمودار تابع $y = kf(x)$ ، کافی است عرض نقاط نمودار تابع $y = f(x)$ را در k ضرب کنیم. اگر $k > 1$ ، نمودار $y = kf(x)$ از انبساط عمودی نمودار $y = f(x)$ حاصل می شود و اگر $0 < k < 1$ ، نمودار $y = kf(x)$ از انقباض عمودی نمودار $y = f(x)$ به دست می آید. مطابق فرض سؤال می دانیم $g(x)$ وارون تابع $f(x)$ است، یعنی:

$$g(x) = f^{-1}(x) \Rightarrow f(x) = g^{-1}(x)$$

می خواهیم نمودار $\frac{1}{3}g^{-1}(\frac{x}{3})$ بر $f(x)$ منطبق شود، پس کافی است $\frac{1}{3}g^{-1}(\frac{x}{3})$ به $g^{-1}(x)$ تبدیل شود. مطابق نکات برای تبدیل

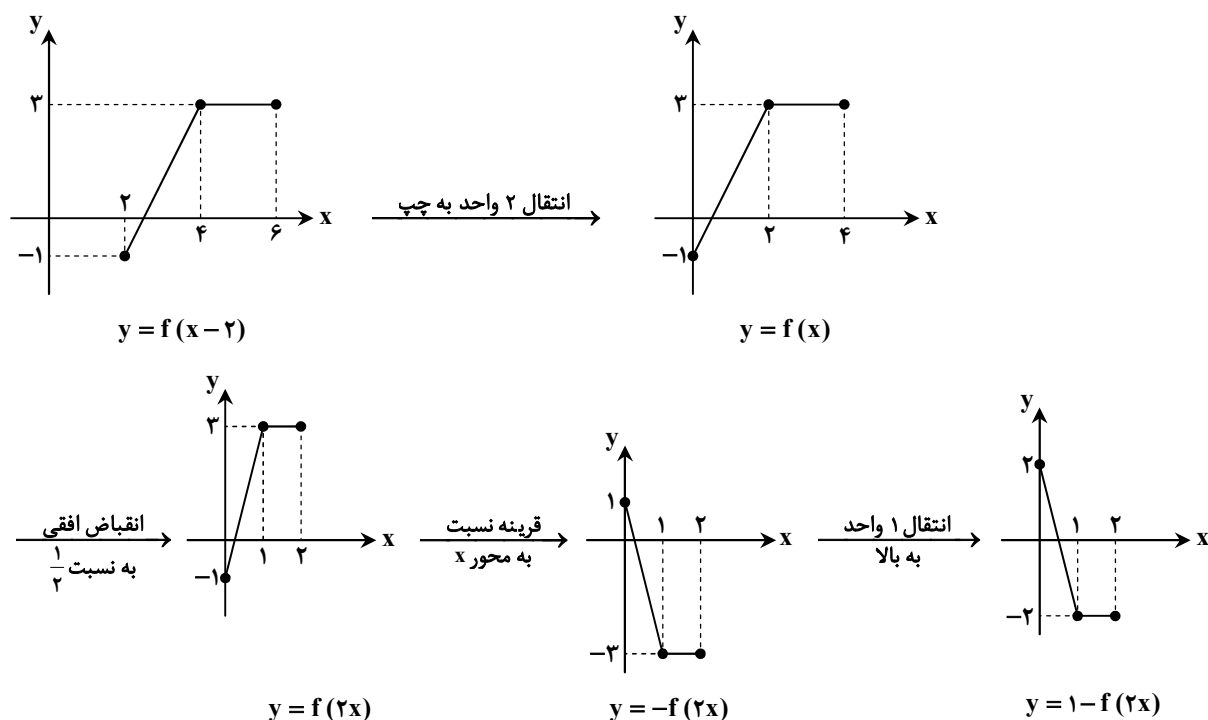
$\frac{1}{3}g^{-1}(\frac{x}{3})$ به $g^{-1}(x)$ باید به جای x ، $3x$ را قرار دهیم (انبساط افقی) و کل ضابطه را در ۳ ضرب کنیم (انبساط عمودی)، بنابراین گزینه ۳ پاسخ است.

▲ مشخصات سؤال: متوسط * حسابان ۲ (فصل ۱، درس ۱)

۱۴- پاسخ: گزینه ۳

نکته: برای رسم $y = f(x + k)$ با $k > 0$ ، نمودار f ، k واحد به چپ منتقل می شود. برای رسم $y = f(kx)$ با $k > 1$ ، نمودار f با نسبت $\frac{1}{k}$ انقباض افقی می شود. برای رسم $y = -f(x)$ نمودار f نسبت به محور x قرینه می شود و برای رسم $y = f(x) + k$ با $k > 0$ ، نمودار f ، k واحد به بالا می رود.

برای رسم $y = 1 - f(2x)$ با استفاده از نکات چهار گام نموداری متوالی زیر را طی می کنیم:



این نمودار نهایی دقیقاً با شکل گزینه ۳ یکسان است.

بررسی گزینه های نادرست:

گزینه ۱: به جای انقباض با ضریب ۲، اشتباهاً انبساط با ضریب ۲ به کار رفته است.

گزینه ۲: انقباض افقی انجام نشده (مقیاس x اشتباه است).

گزینه ۴: انتقال ۱ واحد به بالا فراموش شده است.

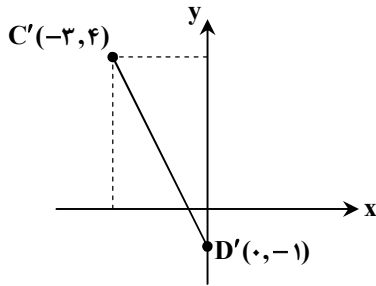
▲ مشخصات سؤال: متوسط * حسابان ۲ (فصل ۱، درس ۱)

۱۵- پاسخ: گزینه ۱

نقطه $C(-3, 6)$ روی نمودار f است، پس $f(-3) = 6$ ؛ برای یافتن نقطه متناظر C' کافی است x را چنان بیابیم که $2x + 3 = -3$ باشد:

$$2x + 3 = -3 \Rightarrow x = -3, y = \frac{1}{2}(6) + 1 = 4 \Rightarrow C'(-3, 4)$$

$$2x + 3 = 3 \Rightarrow x = 0, y = \frac{1}{2}(-6) + 1 = -1 \Rightarrow D'(0, -1) \quad \text{به همین ترتیب برای نقطه } D(3, -4):$$



بنابراین نقاط متناظر C و D روی نمودار جدید به صورت مقابل اند و داریم:

$$\text{شیب } C'D' = \frac{4 - (-1)}{-3 - 0} = -\frac{5}{3}$$

▲ مشخصات سؤال: متوسط * حسابان ۲ (فصل ۱، درس ۱)

۱۶- پاسخ: گزینه ۳

نکته: در اثر تبدیل $y = f(x)$ به $y = k \cdot f(x)$ ، مختصه x نقاط بدون تغییر می ماند، اما مختصه y هر نقطه در k ضرب می شود. پس اگر (x_0, y_0) روی $y = f(x)$ باشد، نقطه متناظر آن روی $y = k \cdot f(x)$ به صورت $(x_0, k \cdot y_0)$ است.

ابتدا از ستونی که هر دو مقدار آن معلوم است، k را می یابیم:

$$x = 0: f(0) = 2, k \cdot f(0) = 4 \Rightarrow 2k = 4 \Rightarrow k = 2$$

$$x = -3: f(-3) = a \text{ (نامعلوم)} \Rightarrow k \cdot f(-3) = 6 \Rightarrow 2a = 6 \Rightarrow a = 3$$

$$x = 2: f(2) = 5, k \cdot f(2) = b \text{ (نامعلوم)} \Rightarrow b = 2 \times 5 = 10$$

$$x = 5: f(5) = c \text{ (نامعلوم)} \Rightarrow k \cdot f(5) = -8 \Rightarrow 2c = -8 \Rightarrow c = -4$$

بنابراین:

$$a \times b \times c \times k = 3 \times 10 \times (-4) \times 2 = -240$$

▲ مشخصات سؤال: متوسط * حسابان ۲ (فصل ۱، درس ۱)

۱۷- پاسخ: گزینه ۳

مختصات نقاط را در ضابطه توابع جایگزین می کنیم:

$$\begin{cases} y = 2 + bf(-3x) \\ x = -2, y = 4 \end{cases} \Rightarrow 4 = 2 + bf(6) \Rightarrow f(6) = \frac{2}{b}$$

$$\begin{cases} y = 6 - 4f\left(\frac{x}{2}\right) \\ x = a, y = 8 \end{cases} \Rightarrow 8 = 6 - 4f\left(\frac{a}{2}\right) \Rightarrow f\left(\frac{a}{2}\right) = -\frac{1}{2}$$

این دو نقطه متناظر یکدیگر روی دو نمودار بودند، پس:

$$\begin{cases} \frac{a}{2} = 6 \Rightarrow a = 12 \\ \frac{2}{b} = -\frac{1}{2} \Rightarrow b = -4 \end{cases}$$

بنابراین $a + b = 8$ است.

▲ مشخصات سؤال: متوسط * حسابان ۲ (فصل ۱، درس ۱)

۱۸- پاسخ: گزینه ۳

نکته: برای رسم نمودار تابع $y = f(kx)$ ، کافی است طول نقاط نمودار تابع $y = f(x)$ را در $\frac{1}{k}$ ضرب کنیم. اگر $k > 1$ ، نمودار $y = f(kx)$ از انقباض افقی نمودار $y = f(x)$ در راستای محور x به دست می آید و اگر $0 < k < 1$ ، این نمودار از انبساط افقی نمودار $y = f(x)$ حاصل می شود.

نکته: برای رسم نمودار تابع $y = kf(x)$ ، کافی است عرض نقاط نمودار تابع $y = f(x)$ را در k ضرب کنیم. اگر $k > 1$ ، نمودار $y = kf(x)$ از انقباض عمودی نمودار $y = f(x)$ حاصل می شود و اگر $0 < k < 1$ ، نمودار $y = kf(x)$ از انقباض عمودی نمودار $y = f(x)$ به دست می آید. مطابق نکات بالا برای آنکه عرض نقاط ۲ برابر شود، ضابطه تابع را در ۲ ضرب می کنیم و برای آنکه طول نقاط در ۳ ضرب شود، باید به جای x ،

$$y = 2f\left(\frac{x}{3}\right) = \frac{8}{\frac{x}{3} - 2} = \frac{24}{x - 6} \quad \text{قرار دهیم: } \frac{x}{3}$$

$$\frac{24}{x - 6} = \frac{4}{x - 2} \Rightarrow 6x - 12 = x - 6 \Rightarrow x = \frac{6}{5}$$

حال نمودار حاصل را با f تقاطع می دهیم:

۱۹- پاسخ: گزینه ۴

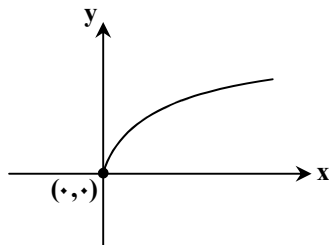
▲ مشخصات سؤال: متوسط * حسابان ۲ (فصل ۱، درس ۱)

تابع $f(x) = \sqrt{x-1} + 2$ یک تابع افزایشی است که تنها برای $x \geq 1$ تعریف شده و کمترین مقدار آن (در نقطه شروع) برابر ۲ است. از طرفی می‌دانیم برای $y = f(x+k)$ با $k > 0$ نمودار k واحد به چپ و برای $y = f(x) - k$ با $k > 0$ نمودار k واحد به پایین منتقل می‌شود.

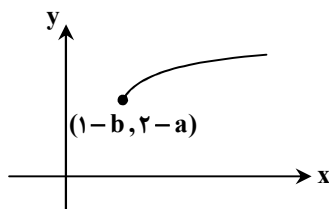
با تحلیل نموداری، عبارت $y = f(x+b) - a$ معادل انتقال افقی و عمودی منحنی f است که به صورت زیر درمی‌آید:

$$y = \sqrt{x+b-1} + 2 - a$$

این منحنی از نقطه شروع $(1-b, 2-a)$ آغاز شده و به صورت افزایشی تا بی‌نهایت بالا می‌رود. حالت مرزی وقتی است که این نقطه شروع دقیقاً روی مبدأ مختصات باشد:



برای آنکه منحنی هیچ یک از محورها را قطع نکند، باید نقطه شروع هم از محور y به راست فاصله بگیرد و هم از محور x به بالا فاصله بگیرد (زیرا منحنی از آن نقطه به طور افزایشی بالا می‌رود و دیگر هرگز به محورها برنمی‌گردد):



بنابراین باید داشته باشیم:

$$1-b > 0 \Rightarrow b < 1$$

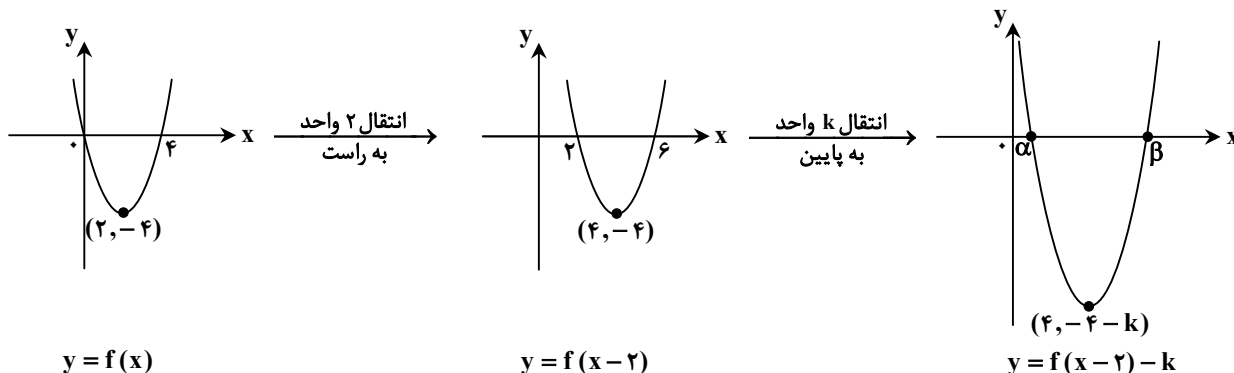
$$2-a > 0 \Rightarrow a < 2$$

بنابراین گزینه ۴ پاسخ است.

۲۰- پاسخ: گزینه ۲

▲ مشخصات سؤال: دشوار * حسابان ۲ (فصل ۱، درس ۱)

می‌دانیم برای $k > 0$ با انتقال k واحد به راست به نمودار $f(x-k)$ و با انتقال k واحد به پایین به نمودار $f(x) - k$ می‌رسیم. اکنون با ترکیب این دو تبدیل، گام به گام نمودار g را رسم می‌کنیم:



چون این سهمی رو به بالاست، $g(x) < 0$ دقیقاً بین دو ریشه برقرار است. رأس $g(x)$ در نقطه $(4, -4-k)$ قرار دارد و چون طول رأس عدد صحیح ۴ است، بازه جواب حول این نقطه متقارن خواهد بود. برای آنکه دقیقاً پنج عدد صحیح $\{2, 3, 4, 5, 6\}$ در این بازه قرار گیرند، باید اختلاف ریشه‌ها حداکثر برابر $6-1=5$ و بیشتر از $6-2=4$ باشد، زیرا در حدی‌ترین حالت اگر نمودار محور x ‌ها را در $x=1$ و $x=7$ قطع کند، آن‌ها جز جواب نامعادله $g(x) < 0$ نخواهند بود، پس داریم:

$$f(x-2) - k = 0 \Rightarrow (x-2)^2 - 4(x-2) - k = 0 \Rightarrow x^2 - 8x + 12 - k = 0 \Rightarrow |x_1 - x_2| = \frac{\sqrt{\Delta}}{a} = \frac{\sqrt{64 - 4(12-k)}}{1}$$

$$= \sqrt{16 + 4k} \Rightarrow 4 < \sqrt{16 + 4k} \leq 6 \Rightarrow 16 < 16 + 4k \leq 36 \Rightarrow 0 < 4k \leq 20 \Rightarrow 0 < k \leq 5$$

پس مقادیر صحیح مجاز برای k عبارت‌اند از ۱، ۲، ۳، ۴ و ۵ که مجموع آن‌ها برابر است با:

$$\text{مجموع} = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 = 15$$

۲۱- پاسخ: گزینه ۴

▲ مشخصات سؤال: ساده * هندسه ۱ (فصل ۱، درس ۱)

$$AC = AD = 5$$

با توجه به شکل روبه‌رو داریم:

چون C و D روی عمودمنصف AB هستند، داریم:

$$BC = AC = 5, \quad BD = AD = 5$$

$$CO = \sqrt{AC^2 - AO^2} = \sqrt{5^2 - 3^2} = \sqrt{16} = 4$$

چون $AC = AD = DB = CB$ ، شکل حاصل یک لوزی با اقطار ۶ و ۸ است و مساحت

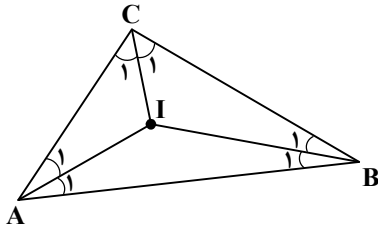
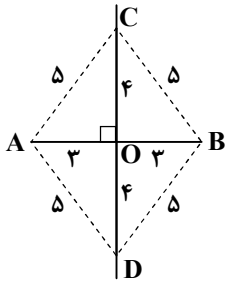
$$S_{ACBD} = \frac{1}{2} AB \times CD = \frac{1}{2} \times 6 \times 8 = 24$$

آن برابر است با:

۲۲- پاسخ: گزینه ۱

▲ مشخصات سؤال: متوسط * هندسه ۱ (فصل ۱، درس ۲)

نقطه‌ای که از سه ضلع مثلث به یک فاصله است، محل هم‌رسمی نیمسازهای زوایای داخلی مثلث است.



از فرض $IA > IC$ در مثلث AIC نتیجه می‌گیریم:

$$\hat{A}_1 < \hat{C}_1 \xrightarrow{\times 2} 2\hat{A}_1 < 2\hat{C}_1 \Rightarrow \hat{A} < \hat{C}$$

$$BC < AB$$

بنابراین در مثلث ABC داریم:

از طرف دیگر طبق فرض $AB > AC$ است. پس AB هم از BC و هم از AC بزرگ‌تر است. به عبارت دیگر $\hat{C} > \hat{B}$ و $\hat{C} > \hat{A}$.

۲۳- پاسخ: گزینه ۴

▲ مشخصات سؤال: متوسط * هندسه ۱ (فصل ۱، درس ۱)

چون O روی عمودمنصف BC است، پس $OB = OC$ و مثلث BOC

متساوی‌الساقین است. چون $\hat{BOC} = 150^\circ$ است، در نتیجه:

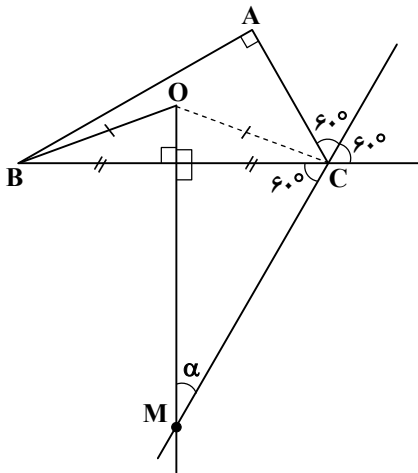
$$\hat{OCB} = \hat{OBC} = 15^\circ$$

چون OB نیمساز داخلی زاویه B است، پس $\hat{B} = 30^\circ$. در نتیجه $\hat{C} = 60^\circ$:

بنابراین زاویه خارجی C برابر با 120° درجه است.

بنابراین زاویه بین CM و OM برابر است با:

$$\alpha = 90 - 60 = 30^\circ$$



۲۴- پاسخ: گزینه ۲

▲ مشخصات سؤال: متوسط * هندسه ۱ (فصل ۱، درس ۱)

نکته: هر نقطه که روی عمودمنصف یک پاره‌خط باشد از دو سر پاره‌خط به یک فاصله باشد، روی عمودمنصف آن پاره‌خط قرار دارد.

نکته: محل برخورد عمودمنصف‌ها در مثلث قائم‌الزاویه، وسط وتر، در مثلث

منفرجه‌الزاویه، خارج مثلث و در مثلث حاده‌الزاویه، داخل مثلث است.

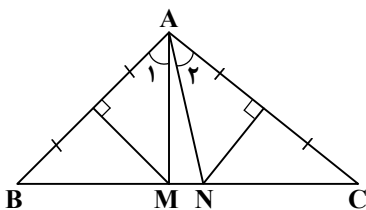
در مثلث ABC داریم:

$$\hat{A} = 96^\circ \Rightarrow \hat{B} = \hat{C} = \frac{180^\circ - 96^\circ}{2} = 42^\circ$$

مثلث ABC منفرجه‌الزاویه است، پس طبق نکته ۲، محل هم‌رسمی عمودمنصف‌ها، خارج مثلث است؛ پس M در طرف AB و N در طرف AC خواهد بود.

طبق نکته فوق، هر نقطه روی عمودمنصف، از دو سر پاره‌خط به یک فاصله است، پس:

$$\begin{cases} BM = AM \Rightarrow \hat{A}_1 = \hat{B} = 42^\circ \\ AN = NC \Rightarrow \hat{A}_2 = \hat{C} = 42^\circ \end{cases} \Rightarrow \hat{MAN} = \hat{A} - (\hat{A}_1 + \hat{A}_2) = 96^\circ - (42^\circ + 42^\circ) = 12^\circ$$



مثلت AMN نیز متساوی الساقین است و داریم:

$$M_1 = N_1 = \frac{180^\circ - 120^\circ}{2} = 84^\circ$$

$$\frac{96^\circ}{120^\circ} = 8$$

۲۵- پاسخ: گزینه ۳ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * هندسه ۳ (فصل ۱، درس ۱)

نکته (ضرب ماتریس در ماتریس): اگر A ماتریسی $m \times p$ و B ماتریسی $p \times n$ باشد (تعداد ستون‌های A با تعداد سطرهای B برابر باشد)، در این صورت $A_{mp} \times B_{pn} = C_{mn} = [c_{ij}]$ قابل تعریف بوده و اگر فرض کنیم $A_{mp} \times B_{pn} = C_{mn}$ ، ماتریس C ماتریسی $m \times n$ بوده که درایه روی سطر i ام و ستون j ام در آن یعنی، c_{ij} از ضرب سطر i ام A در ستون j ام B به دست می‌آید، یعنی:

$$c_{ij} = \text{سطر } i \text{ ام } A \times \text{ستون } j \text{ ام } B = a_{i1} \times b_{1j} + a_{i2} \times b_{2j} + \dots + a_{ip} \times b_{pj}$$

طبق نکته فوق داریم:

$$\begin{bmatrix} x & 1 & 2 \\ 2 & x & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x+2x-1 & 2-x-x & 4+2x-x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4x-1 & 2-2x & x+4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ x \end{bmatrix}$$

$$= -4x+1+4-4x+x^2+4x=0 \Rightarrow x^2-4x+5=0 \Rightarrow \Delta=16-20 < 0$$

دقت داشته باشید که دلتای این معادله مثبت است و دو ریشه حقیقی قابل قبول دارد، پس:

$$S = -\frac{b}{a} = 4$$

۲۶- پاسخ: گزینه ۱ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * هندسه ۳ (فصل ۱، درس ۱)

$$A^2 + 3A = I \Rightarrow A^2 = I - 3A \xrightarrow{\times A} A^3 = A - 3A^2 = A - 3(I - 3A) = A - 3I + 9A = 10A - 3I$$

$$A^3 = 10A - 3I \xrightarrow{\text{از راست } \times B} A^3 B = 10AB - 3B = 10 \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} - 3 \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 30-6 \\ 20-15 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 24 \\ 5 \end{bmatrix}$$

۲۷- پاسخ: گزینه ۳ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * هندسه ۳ (فصل ۱، درس ۱)

نکته: اگر A و B دو ماتریس تعویض پذیر باشند؛ یعنی $AB = BA$ ، آنگاه همه اتحادهای جبری برای آن‌ها برقرار است.

$$A = 3B^2 - 2B + I \Rightarrow \begin{cases} AB = 3B^3 - 2B^2 + B \\ BA = 3B^3 - 2B^2 + B \end{cases} \Rightarrow AB = BA$$

ابتدا داریم:

پس A و B تعویض پذیرند، پس اتحادهای جبری برای آن‌ها برقرار است؛ بنابراین با استفاده از اتحاد مزدوج داریم:

$$(A+B)^2 - (A-B)^2 = [(A+B) - (A-B)][(A+B) + (A-B)] = (2B)(2A) = 4BA = 4AB$$

تذکر: اگر ماتریس A را بتوان به صورت یک چندجمله‌ای بر حسب B نوشت، آنگاه A و B تعویض پذیرند؛ یعنی: $AB = BA$

۲۸- پاسخ: گزینه ۴ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * هندسه ۳ (فصل ۱، درس ۱)

نکته: برای هر ماتریس مربعی A ، داریم:

$$A^2 = A \times A$$

$$A^3 = A^2 \times A$$

$$A^4 = A^3 \times A$$

$$\vdots$$

$$A^n = A^{n-1} \times A$$

نکته: هر ماتریس مربعی با ماتریس همانی هم مرتبه‌اش تعویض پذیر است؛ یعنی: $AI = IA = A$

نکته: در ماتریس‌های تعویض پذیر، اتحادهای جبری برقرار است.

$$I^n = I \quad (n \in \mathbb{N})$$

نکته:

ابتدا رابطه $A^2 + A + 2I = 0$ را به صورت $A^2 = -A - 2I$ می‌نویسیم و طرفین آن را به توان ۲ می‌رسانیم:

$$A^2 = -A - 2I \xrightarrow{\text{توان ۲}} A^4 = (-A - 2I)^2 = A^2 + 4A + 4I = (-A - 2I) + 4A + 4I \Rightarrow A^4 = 3A + 2I$$

$$\xrightarrow{\times A} A^5 = 3A^2 + 2A = 3(-A - 2I) + 2A = -A - 6I \xrightarrow{\times A} A^6 = -A^2 - 6A = -(-A - 2I) - 6A = -5A + 2I$$

$$\Rightarrow -5A + 2I = \alpha A + \beta I \Rightarrow \begin{cases} \alpha = -5 \\ \beta = 2 \end{cases} \Rightarrow \alpha + \beta = -3$$

▲ مشخصات سؤال: دشوار * هندسه ۳ (فصل ۱، درس ۱)

۲۹- پاسخ: گزینه ۴

نکته (ضرب ماتریس در ماتریس): اگر A ماتریسی $m \times p$ و B ماتریسی $p \times n$ باشد (تعداد ستون‌های ماتریس A با تعداد سطرهای B برابر باشد)، در این صورت $A_{m \times p} \times B_{p \times n} = C_{m \times n} = [c_{ij}]$ قابل تعریف بوده و اگر فرض کنیم $A_{m \times p} \times B_{p \times n} = C_{m \times n}$ ماتریس C ماتریسی $m \times n$ بوده که درایه روی سطر i ام و ستون j ام در آن یعنی، c_{ij} از ضرب سطر i ام A در ستون j ام B به دست می‌آید، یعنی:

$$c_{ij} = A \text{ سطر } i \times B \text{ ستون } j = a_{i,1} \times b_{1,j} + a_{i,2} \times b_{2,j} + \dots + a_{i,p} \times b_{p,j}$$

$$\Rightarrow c_{ij} = \begin{bmatrix} a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ip} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} b_{1j} \\ b_{2j} \\ \vdots \\ b_{pj} \end{bmatrix} = a_{i1} \times b_{1j} + a_{i2} \times b_{2j} + \dots + a_{ip} \times b_{pj}$$

طبق نکته فوق، داریم:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \dots \begin{bmatrix} 1 & n+1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow A = \begin{bmatrix} 1 & 2+3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \dots \begin{bmatrix} 1 & n+1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \dots = \begin{bmatrix} 1 & 2+3+\dots+(n+1) \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\text{می‌دانیم } 1+2+3+\dots+(n) = \frac{n(n+1)}{2} \text{ پس:}$$

$$2+3+4+\dots+(n+1) = \frac{(n+1)(n+2)}{2} - 1 = \frac{(n)(n+2)}{2}$$

$$1 + \frac{n(n+2)}{2} + 0 + 1 = 37 \Rightarrow \frac{n^2+2n}{2} + 2 = 37 \Rightarrow n^2+2n = 70 \Rightarrow n^2+2n-70 = 0$$

$$\Rightarrow (n+10)(n-7) = 0 \Rightarrow n = 7$$

▲ مشخصات سؤال: دشوار * هندسه ۳ (فصل ۱، درس ۱)

۳۰- پاسخ: گزینه ۱

نکته: برای هر ماتریس مربعی A ، داریم:

$$A^2 = A \times A$$

$$A^3 = A^2 \times A$$

$$A^4 = A^3 \times A$$

⋮

$$A^n = A^{n-1} \times A$$

ابتدا A^2 و B^2 را محاسبه می‌کنیم:

$$A^2 = \begin{bmatrix} \cos 35^\circ & \sin 35^\circ \\ \sin 35^\circ & -\cos 35^\circ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos 35^\circ & \sin 35^\circ \\ \sin 35^\circ & -\cos 35^\circ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I$$

$$B^2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I$$

حال C^{26} را به دست می‌آوریم:

$$C^{26} = (ABA)^{26} = \underbrace{AB}_{I} \underbrace{AA}_{I} \underbrace{BA}_{I} \dots \underbrace{ABA}_{I} = \underbrace{ABB}_{I} \dots \underbrace{BA}_{I} = \underbrace{AB^{26}}_{I} A = A(B^2)^{13} A = A I^{13} A = A I A = A^2 = I$$

▲ مشخصات سؤال: ساده * آمار و احتمال (فصل ۱، درس ۱)

۳۱- پاسخ: گزینه ۴

$$\sim (\forall x; P(x)) \equiv \exists x; \sim P(x)$$

نکته: نقیض گزاره دارای سور عمومی به صورت روبه‌رو است:

$$\sim (\exists x; P(x)) \equiv \forall x; \sim P(x)$$

نکته: نقیض گزاره دارای سور وجودی به صورت روبه‌رو است:

مطابق نکات، گزینه ۴ درست است و نقیض دیگر گزینه‌ها به صورت زیر است:

$$\sim (\exists x \in \mathbb{R}; x^2 - 4 = 0) \equiv \forall x \in \mathbb{R}; x^2 - 4 \neq 0$$

گزینه ۱:

$$\sim (\exists x \in \mathbb{R}; \sqrt{x^2 + 4} \geq 2) \equiv \forall x \in \mathbb{R}; \sqrt{x^2 + 4} < 2$$

گزینه ۲:

$$\sim (\forall x \in \mathbb{R}; (x-2)^2 \geq 0) \equiv \exists x \in \mathbb{R}; (x-2)^2 < 0$$

گزینه ۳:

▲ مشخصات سؤال: متوسط * آمار و احتمال (فصل ۱، درس ۱)

۳۲- پاسخ: گزینه ۳

با توجه به جدول می‌توان ارزش q را مشخص کرد.

p	q	$\sim q$	r	A
د	د	ن	د	ن
د	ن	د	ن	د
ن	د	ن	ن	د

مطابق با سطر اول جدول p ، q و r هر سه درست هستند و گزاره A نادرست است. پس داریم:

گزینه ۱: $p \Rightarrow (q \wedge r) \equiv T \Rightarrow (T \wedge T) \equiv T \Rightarrow T \equiv T$ *

گزینه ۲: $(p \wedge q) \Rightarrow r \equiv (T \wedge T) \Rightarrow T \equiv T \Rightarrow T \equiv T$ *

گزینه ۳: $(p \wedge r) \Rightarrow \sim q \equiv (T \wedge T) \Rightarrow F \equiv T \Rightarrow F \equiv F$ ✓

گزینه ۴: $(p \vee q) \Rightarrow r \equiv (T \vee T) \Rightarrow T \equiv T \Rightarrow T \equiv T$ *

همان‌طور که مشاهده می‌کنید براساس سطر اول جدول، فقط گزینه ۳ قابل قبول است و همچنین ارزش دو سطر ستون A و گزینه ۳ یکسان است.

▲ مشخصات سؤال: متوسط * آمار و احتمال (فصل ۱، درس ۱)

۳۳- پاسخ: گزینه ۲

گزاره شرطی زمانی نادرست است که مقدم درست و تالی نادرست باشد. پس:

۱) $(p \Rightarrow q) \wedge (q \vee r) \equiv T \Rightarrow \begin{cases} p \Rightarrow q \equiv T \\ q \vee r \equiv T \end{cases}$

۲) $\sim p \vee r \equiv F \Rightarrow \begin{cases} \sim p \equiv F \Rightarrow p \equiv T \\ r \equiv F \end{cases}$

چون $p \equiv T$ و $p \Rightarrow q \equiv T$ پس $q \equiv T$ است؛ بنابراین: $r \equiv F$ و $q \equiv T$ و $p \equiv T$

$$p \Rightarrow r \equiv T \Rightarrow F \equiv F$$

در گزینه ۲ داریم:

سه گزینه دیگر همگی ارزش درست دارند.

▲ مشخصات سؤال: متوسط * آمار و احتمال (فصل ۱، درس ۱)

۳۴- پاسخ: گزینه ۳

نکته ۱: گزاره‌نما شامل متغیر x که با سور عمومی (۷) همراه می‌شود زمانی درست است که هر عضو از دامنه متغیر در گزاره‌نما صدق کند یا به عبارتی هیچ مثال نقضی نداشته باشد.نکته ۲: گزاره‌نما شامل متغیر x که با سور وجودی ($\exists$) همراه می‌شود زمانی درست است که مجموعه جواب آن تهی نبوده و حداقل یک جواب داشته باشد.

با توجه به نکته ۱، اگر در گزاره نمای $k \leq x^2 + 5x$ قرار دهیم $x = 2$ ، داریم:

و واضح است که به ازای $k \leq 14$ مقادیر ۳، ۴، ۵، ۶ نیز در گزاره صدق می‌کنند. با توجه به نکته ۲، اگر در گزاره نمای $k - 4 \leq 18 - 2x$ قرار دهیم $x = 6$ ، داریم:

$$18 - 12 \leq k - 4 \Rightarrow k \geq 10$$

و واضح است که به ازای $k \geq 10$ ؛ مقادیر ۲، ۳، ۴، ۵ نیز در گزاره صدق می‌کنند.پس $10 \leq k \leq 14$ بوده و تعداد k برابر با ۵ عدد طبیعی است.

$$k = \{10, 11, 12, 13, 14\}$$

▲ مشخصات سؤال: ساده * ریاضیات گسسته (فصل ۱، درس ۱)

۳۵- پاسخ: گزینه ۴

نکته ۱: مثال نقض، مثالی است که برای رد یک حکم کلی به کار می‌رود.

گزینه‌های ۱، ۲ و ۳ را بررسی می‌کنیم:

عددی اول نیست $15 = 2^4 - 1$: $n = 4 \Rightarrow$ مثال نقض برای گزینه ۱

عددی اول است $17 = 2^4 + 1$: $n = 4 \Rightarrow$ مثال نقض برای گزینه ۲

عددی اول نیست $63 = 2^6 - 1$: $n = 3 \Rightarrow$ مثال نقض برای گزینه ۳

برای $n > 2$ ($n \in \mathbb{N}$)، ثابت می‌کنیم $2^{2^n} - 1$ عددی مرکب است.

$$2^{2^n} - 1 = 2^2 \times 2^{2^{n-1}} - 1 = (2^{2^{n-1}}) - 1 = (2^{2^{n-1}} - 1)(2^{2^{n-1}} + 1)$$

پس عدد موردنظر به حاصل ضرب دو عدد صحیح بزرگ‌تر از یک تجزیه می‌شود. بنابراین برای هر $n > 2$ ($n \in \mathbb{N}$)، $2^{2^n} - 1$ عددی مرکب است.

۳۶- پاسخ: گزینه ۳

▲ مشخصات سؤال: ساده * ریاضیات گسسته (فصل ۱، درس ۱)

$x^2 + y^2$ فرد است پس x^2 و y^2 هر دو عدد صحیح وقتی فرد است که یکی زوج و دیگری فرد باشد. پس x^2 و y^2 یکی فرد و دیگری زوج است. از طرفی می‌دانیم اگر n^2 زوج (فرد) باشد، آنگاه n زوج (فرد) است؛ پس x و y یکی فرد و دیگری زوج است. پس $x + y$ عددی فرد است.

برای رد گزینه ۴ می‌توان گفت: با توجه به اینکه x و y یکی زوج و دیگری فرد است، اگر x فرد باشد، آنگاه $x + 2y$ فرد می‌باشد و اگر x زوج باشد، آنگاه $x + 2y$ زوج می‌باشد؛ بنابراین عبارت $x + 2y$ زوج است حتماً درست نیست.

۳۷- پاسخ: گزینه ۴

▲ مشخصات سؤال: متوسط * ریاضیات گسسته (فصل ۱، درس ۱)

نکته (اثبات بازگشتی): در اثبات برخی نامساوی‌های ریاضی، ابتدا عبارت را تا حد امکان ساده می‌کنیم تا به یک عبارت همیشه درست برسیم. آنگاه با بازگشت از مسیر طی شده به نامساوی اولیه می‌رسیم و از آنجایی که همه عملیات مسیر رفت، بازگشت پذیرند به این نوع اثبات، «اثبات بازگشتی» می‌گوییم.

با استفاده از اثبات بازگشتی، رابطه داده شده را با تشکیل مربع کامل به صورت زیر می‌نویسیم:

$$x^2 - 8x + 16 - 16 + 9y^2 + 6y + 1 - 1 + 5m \geq 0 \Leftrightarrow (x-4)^2 + (3y+1)^2 + 5m - 17 \geq 0 \Leftrightarrow (x-4)^2 + (3y+1)^2 \geq 17 - 5m$$

برای آنکه نامساوی بالا، همواره برقرار باشد، باید داشته باشیم:

$$17 - 5m \leq 0 \Rightarrow 5m \geq 17 \Rightarrow m \geq \frac{17}{5} \Rightarrow m \geq 3.4 \Rightarrow \text{کمترین مقدار صحیح} = 4$$

۳۸- پاسخ: گزینه ۴

▲ مشخصات سؤال: متوسط * ریاضیات گسسته (فصل ۱، درس ۱)

به کمک اثبات غیرمستقیم، فرض می‌کنیم معادله دارای جواب بوده و اعداد طبیعی فرد x ، y و z موجود باشند، به طوری که:

$$\frac{x^2z + y^2x + z^2y}{xyz} = \frac{24}{y} \Rightarrow 7(x^2z + y^2x + z^2y) = 24(xyz)$$

چون x ، y و z همگی فرد هستند، پس حاصل ضرب آن‌ها نیز فرد است؛ یعنی همه اعداد xyz ، x^2y ، z^2y و x^2z فرد هستند. در نتیجه:

$$7 \underbrace{(x^2z + y^2x + z^2y)}_{\text{فرد}} = 24 \underbrace{(xyz)}_{\text{فرد}}$$

بنابراین سمت چپ معادله عددی فرد است و سمت راست معادله عددی زوج می‌شود و این غیرممکن است. پس فرض داشتن معادله باطل و این معادله قطعاً جواب ندارد.

۳۹- پاسخ: گزینه ۲

▲ مشخصات سؤال: دشوار * ریاضیات گسسته (فصل ۱، درس ۱)

نکته (اثبات بازگشتی): در اثبات برخی تساوی‌ها یا نامساوی‌های ریاضی، ابتدا عبارت را تا حد امکان ساده می‌کنیم تا به یک عبارت همیشه درست برسیم. آنگاه با بازگشت از مسیر طی شده به رابطه اولیه می‌رسیم و از آنجایی که همه عملیات مسیر رفت، بازگشت پذیرند به این نوع اثبات، «اثبات بازگشتی» می‌گوییم.

با توجه به نکته، عبارت را تا حد امکان ساده می‌کنیم:

$$\frac{1}{x+y+z} = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \Leftrightarrow \frac{1}{x+y+z} = \frac{xy+xz+yz}{xyz} \Leftrightarrow (x+y+z)(xy+xz+yz) = xyz$$

$$\Leftrightarrow x^2y + x^2z + xyz + xy^2 + xyz + y^2z + \cancel{xyz} + xz^2 + yz^2 - \cancel{xyz} = 0$$

$$\Leftrightarrow (x^2y + x^2z) + (xyz + xz^2) + (xy^2 + xyz) + (y^2z + yz^2) = 0 \Leftrightarrow x^2(y+z) + xz(y+z) + xy(y+z) + yz(y+z) = 0$$

$$\Leftrightarrow (y+z)(x^2 + xz + xy + yz) = 0 \Leftrightarrow (y+z)[x(x+z) + y(x+z)] = 0 \Leftrightarrow (y+z)(x+z)(x+y) = 0$$

$$\Rightarrow y = -z \text{ یا } x = -z \text{ یا } x = -y$$

برای اینکه تساوی اخیر همواره درست باشد بایستی حداقل دو تا از اعداد x ، y یا z قرینه باشند، پس دو حالت داریم:

(۱) فقط یک جفت از سه عدد x ، y و z قرینه هستند: (مثلاً x و y قرینه باشند و z با هیچ کدام قرینه نباشد).

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} \times \overset{x}{\uparrow} 8 \times \overset{y}{\uparrow} 1 \times \overset{z}{\uparrow} 6 = 144$$

(۲) دو جفت از سه جفت x, y یا x, z یا y, z قرینه هستند: مثلاً $x = -y$ و $y = -z$ در نتیجه: $x = -(-z) = z$ پس:

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} \times \overset{(x,y)}{\uparrow} 8 \times \overset{z}{\uparrow} 1 = 24$$

و در مجموع $144 + 24 = 168$ سه تایی به صورت (x, y, z) وجود دارد.

- ۴۰- پاسخ: گزینه ۳ **▲ مشخصات سؤال: دشوار * ریاضیات گسسته (فصل ۱، درس ۱)**
نکته: اگر P و Q دو گزاره هم‌ارز (یعنی همواره هر دو درست یا هر دو نادرست) باشند، آنگاه گزاره‌های $P \Rightarrow Q$ و $Q \Rightarrow P$ هر دو درست هستند و در نتیجه $P \Leftrightarrow Q$ یک گزاره درست است.
گزینه ۳: وقتی $n(n+2)$ زوج است، چون n و $n+2$ همواره هم‌زوج یا هم‌فرد هستند، پس n زوج است و در نتیجه $(n+3)^2$ و $(n+3)$ هر دو فرد هستند و از فرد بودن $(n+3)^2$ می‌توان فرد بودن $n+3$ و از آنجا زوج بودن n و $n(n+2)$ را نتیجه گرفت. بررسی سایر گزینه‌ها:
گزینه ۱: $(4n+1)^2$ همیشه عددی فرد است ولی مقدار n هم می‌تواند فرد و هم زوج باشد، پس $n+5$ نیز ممکن است فرد یا زوج باشد.
گزینه ۲: اگر $n+2$ مضرب ۸ باشد، $(n+2)^2$ همواره مضرب ۸ است ولی عکس آن همیشه درست نیست. اگر $n=2$ باشد $(n+2)^2 = 16$ مضرب ۸ است ولی $n+2=4$ مضرب ۸ نیست.
گزینه ۴: از فرد بودن n می‌توان فرد بودن n^5 و $2n+7$ را ثابت کرد ولی از فرد بودن $2n+7$ نمی‌توان ثابت کرد لزوماً n عددی فرد است و می‌توان با مثال نقض $n=2$ این گزینه را رد کرد.

فیزیک



- ۴۱- پاسخ: گزینه ۱ **▲ مشخصات سؤال: ساده * فیزیک ۱ (فصل ۱)**
مدل‌ها و نظریه‌های فیزیکی در طول زمان همواره معتبر نیستند و ممکن است دستخوش تغییر شوند.
۴۲- پاسخ: گزینه ۴ **▲ مشخصات سؤال: ساده * فیزیک ۱ (فصل ۲)**
الف) ذرات به یکدیگر نزدیک‌اند، اما ماده جاری می‌شود و شکل ظرف را می‌گیرد؛ پس مایع است.
ب) حجم و شکل معین دارد و ذرات آن پس از دور شدن از وضعیت تعادل به جای نخست بازمی‌گردند؛ پس جامد است.
بنابراین، گزینه ۴ درست است.
۴۳- پاسخ: گزینه ۱ **▲ مشخصات سؤال: ساده * فیزیک ۱ (فصل ۲)**
در هنگام دمیدن در فضای میان ورقه‌ها، هوای میان ورقه‌ها نسبت به هوای بیرون آن‌ها تندی بیشتری دارد و در نتیجه فشار هوای میان ورقه‌ها کمتر می‌شود؛ بنابراین فاصله ورقه‌ها کم می‌شود و ورقه‌ها به هم نزدیک می‌شوند.
۴۴- پاسخ: گزینه ۱ **▲ مشخصات سؤال: متوسط * فیزیک ۱ (فصل ۱)**
گزاره «الف»: درست
$$30 \cdot \frac{\text{mJ}}{\text{cm}^2 \cdot \text{min}} = \frac{30 \cdot (10^{-3})}{(10^{-4})(60)} \cdot \frac{\text{J}}{\text{m}^2 \cdot \text{s}} = 5 \cdot \frac{\text{J}}{\text{m}^2 \cdot \text{s}}$$

گزاره «ب»: درست؛ طول، جرم، دما، زمان، شدت جریان الکتریکی، شدت روشنایی و مقدار ماده، کمیت‌های اصلی هستند.
گزاره «پ»: درست؛ مایل دریایی یکای طول برای سنجش فاصله‌های دریایی است و سال نوری مسافتی است که نور در خلأ در مدت یک سال طی می‌کند.
گزاره «ت»: نادرست

- ۴۵- پاسخ: گزینه ۳ **▲ مشخصات سؤال: متوسط * فیزیک ۱ (فصل ۱)**
$$P = \frac{W \rightarrow J}{t \rightarrow s} \Rightarrow \frac{\text{N} \cdot \text{m}}{\text{s}} = \frac{\text{kg} \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot \text{m}}{\text{s}} = \frac{\text{kg} \cdot \text{m}^2}{\text{s}^3}$$

۴۶- پاسخ: گزینه ۲ **▲ مشخصات سؤال: متوسط * فیزیک ۱ (فصل ۱)**
دقت اندازه‌گیری در ابزارهای رقمی (دیجیتال) برابر یک واحد از آخرین رقمی است که آن ابزار می‌خواند. در این آزمایش، دقت اندازه‌گیری ۰/۱ سانتی‌متر است، پس آخرین رقم عدد گزارش شده از مرتبه ۰/۱ سانتی‌متر خواهد بود.
گزینه ۱: نادرست
$$6/3 \times 10^2 \text{ mm} = 6/3 \times 10^2 \times 10^{-1} \text{ cm} = 6/3 \times 10^1 \text{ cm} = 63 \text{ cm}$$

گزینه ۲: درست
$$6/3 \times 10^4 \mu\text{m} = 6/3 \times 10^4 \times 10^{-4} \text{ cm} = 6/3 \text{ cm}$$

گزینه ۳: نادرست

گزینه ۴: نادرست

۴۷- پاسخ: گزینه ۱

▲ مشخصات سؤال: متوسط * فیزیک ۱ (فصل ۱)

$$6/3 \times 10^{-4} \text{ m} = 6/3 \times 10^{-4} \times 10^2 \text{ cm} = 6/3 \times 10^{-2} \text{ cm} = 0.063 \text{ cm}$$

$$6/3 \times 10^{-1} \text{ cm} = 0.63 \text{ cm}$$

$$V_{\text{قطعه}} = 43 - 24 = 19 \text{ cm}^3$$

$$\rho_{\text{شیشه}} = 2/7 \frac{\text{kg}}{\text{L}} = 2/7 \times \frac{1000 \text{ g}}{1000 \text{ cm}^3} = 2/7 \frac{\text{g}}{\text{cm}^3}$$

$$\rho_{\text{شیشه}} = \frac{m_{\text{شیشه}}}{V_{\text{شیشه}}} \Rightarrow 2/7 \frac{\text{g}}{\text{cm}^3} = \frac{27 \text{ g}}{V_{\text{شیشه}}} \Rightarrow V_{\text{شیشه}} = \frac{27}{2/7} = 10 \text{ cm}^3$$

$$V_{\text{حفره}} = V_{\text{قطعه}} - V_{\text{شیشه}} = 19 - 10 = 9 \text{ cm}^3$$

۴۸- پاسخ: گزینه ۱

▲ مشخصات سؤال: متوسط * فیزیک ۱ (فصل ۱)

چون قطعه در مایع کاملاً غوطه‌ور است، چگالی آن با چگالی مایع برابر است. حجم چوب به کار رفته را $\frac{x}{100}$ حجم کل در نظر می‌گیریم؛ پس حجم سنگ به کار رفته برابر $(1 - \frac{x}{100})$ حجم کل است.

$$\rho_{\text{قطعه}} = \rho_{\text{مایع}} \Rightarrow \frac{m_{\text{چوب}} + m_{\text{سنگ}}}{V_{\text{چوب}} + V_{\text{سنگ}}} = 1/7 \xrightarrow{m = \rho V} \frac{\rho_{\text{چوب}}(\frac{x}{100})V + \rho_{\text{سنگ}}(1 - \frac{x}{100})V}{V} = 1/7$$

$$\Rightarrow 0.6(\frac{x}{100}) + 5(1 - \frac{x}{100}) = 1/7 \Rightarrow 0.6x + 500 - 5x = 170 \Rightarrow 4/4x = 330 \Rightarrow x = 75$$

بنابراین ۷۵ درصد حجم قطعه از چوب تشکیل شده است (گزینه ۱).

▲ مشخصات سؤال: ساده * فیزیک ۱ (فصل ۲)

۴۹- پاسخ: گزینه ۲

چون نیروی دگرچسبی بین آب و شیشه بیشتر از نیروی هم‌چسبی بین ذرات آب است. سطح آب داخل لوله‌ها بالاتر از سطح آب ظرف بوده و سطح آن مقعر (فرورفته) است و هر قدر لوله باریک‌تر باشد، آب در آن بیشتر بالا می‌رود.

▲ مشخصات سؤال: متوسط * فیزیک ۱ (فصل ۲)

۵۰- پاسخ: گزینه ۲

$$\frac{P_{24}}{P_{12}} = \frac{P_0 + \rho g \times 24}{P_0 + \rho g \times 12} = \frac{11}{8} \Rightarrow 11P_0 + 132\rho g = 8P_0 + 96\rho g \Rightarrow 60\rho g = 3P_0 \quad (1) \text{ رابطه}$$

$$P_{60} = P_0 + (\rho g \times 60) \xrightarrow{\text{رابطه (1)}} P_{60} = P_0 + 3P_0 = 4P_0 \Rightarrow \frac{P_{60}}{P_0} = 4$$

▲ مشخصات سؤال: متوسط * فیزیک ۱ (فصل ۲)

۵۱- پاسخ: گزینه ۳

$$\rho_{\text{مخلوط}} = \frac{m_1 + m_2}{V_1 + V_2} = \frac{m_1 + 3m_1}{\frac{m_1}{0.8} + \frac{3m_1}{1/2}} = \frac{4}{0.8 + 1.5} = \frac{4}{2.3} = \frac{4 \times 0.96}{2.3} \frac{\text{g}}{\text{cm}^3}$$

$$\text{cmHg} = \frac{\rho_{\text{مخلوط}} g h}{\rho_{\text{جیوه}} g} = \frac{\frac{4 \times 0.96}{2.3} \times 255}{13.6} = \frac{4 \times 68}{13.6} = 20 \text{ cmHg}$$

▲ مشخصات سؤال: دشوار * فیزیک ۱ (فصل ۲)

۵۲- پاسخ: گزینه ۳

فشار در نقاط هم‌تراز N و M' برابر است:

$$P_{M'} - P_M = \rho_2 h_{MM'} \xrightarrow{P_{M'} = P_N} P_N - P_M = \rho_2 h_{MM'}$$

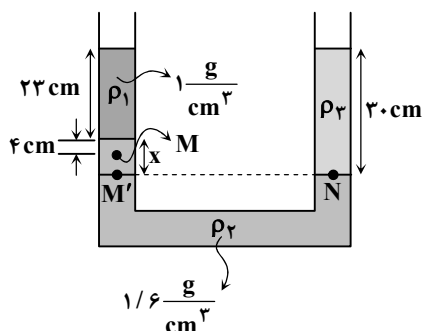
$$\Rightarrow 480 = 1600 \times 10 \times (x - 0.04) \Rightarrow 0.03 = x - 0.04 \Rightarrow x = 0.07 \text{ m}$$

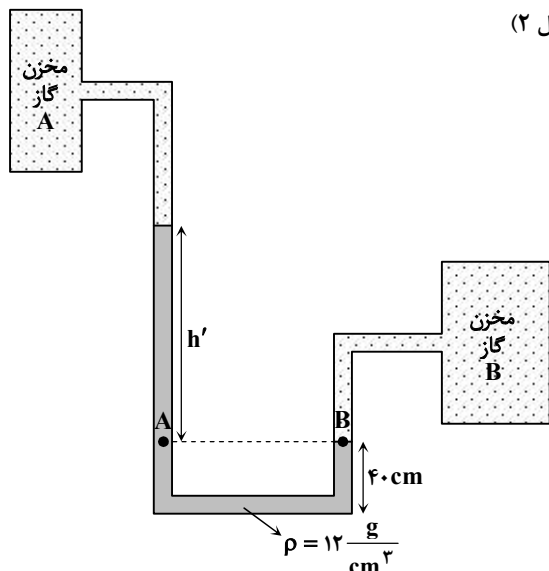
فشار در نقاط هم‌تراز N و M' را برابر قرار می‌دهیم:

$$P_N = P_{M'} \Rightarrow \rho_2 g h_2 = \rho_2 g x + \rho_1 g h_1$$

$$\Rightarrow \rho_2 \times 10 \times (0.3) = 1600 \times 10 \times (0.07) + 1000 \times 10 \times (0.3 - 0.07)$$

$$\Rightarrow 3\rho_2 = 1120 + 2300 \Rightarrow 3\rho_2 = 3420 \Rightarrow \rho_2 = 1140 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$$





۵۳- پاسخ: گزینه ۳ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * فیزیک ۱ (فصل ۲)

فشار گاز درون مخزن B بیشتر از فشار گاز درون مخزن A است:

$$P_B = P_A \Rightarrow P_{\text{مخزن B}} = P_{\text{مخزن A}} + (h' \text{ ارتفاع})$$

اختلاف فشار پیمانه‌ای دو گاز با اختلاف فشار مطلق دو گاز برابر است:

$$\Delta P_g = \rho g h' \Rightarrow 144000 = 12 \times 10^3 \times 10 \times h'$$

$$\Rightarrow h' = 1/2 \text{ m} = 120 \text{ cm}$$

$$h = h' + 40 \Rightarrow h = 120 + 40 = 160 \text{ cm}$$

۵۴- پاسخ: گزینه ۱ ▲ مشخصات سؤال: دشوار * فیزیک ۱ (فصل ۲)

با استفاده از رابطه محاسبه نیرو بر حسب فشار می‌توان نوشت:

$$\frac{F_1}{F_2} = \frac{P_1}{P_2} \times \frac{A_1}{A_2} \Rightarrow \frac{F_1}{F_2} = \frac{P_0 + \rho g h_1}{P_0 + \rho g h_2} \times \frac{A_1}{A_2} \Rightarrow \frac{F_1}{F_2} = \frac{(10^5 + 1200 \times 10 \times 0.5)}{(10^5 + 1200 \times 10 \times 1)} \times \frac{1}{2} = \frac{106000}{112000 \times 2} \Rightarrow \frac{F_1}{F_2} = \frac{53}{112}$$

۵۵- پاسخ: گزینه ۳ ▲ مشخصات سؤال: ساده * فیزیک ۱ (فصل ۲)

$$P_{\text{گاز}} + P_{\text{مایع}} = P_0 \Rightarrow \text{فشار پیمانه‌ای گاز: } P_{\text{گاز}} = P_{\text{گاز}} - P_0 = -P_{\text{مایع}}$$

$$\Rightarrow P_{\text{مایع}} = 15 \text{ cmHg}$$

$$P_{\text{مایع}} = \rho_{\text{مایع}} g h_{\text{مایع}} = \rho_{\text{جیوه}} g h_{\text{جیوه}} \Rightarrow \rho_{\text{مایع}} \times 60 = \rho_{\text{جیوه}} \times 15 \Rightarrow \rho_{\text{مایع}} = \frac{1}{4} \rho_{\text{جیوه}}$$

۵۶- پاسخ: گزینه ۴ ▲ مشخصات سؤال: دشوار * فیزیک ۱ (فصل ۲)

برای آنکه سطح آزاد دو طرف هم‌تراز باشد، باید وضعیت مطابق شکل روبه‌رو باشد:
در بخش سمت راست لوله داریم:

$$\text{ارتفاع سطح آزاد مایع تا کف لوله: } h = 20 + 60 - x_1 = 78 \Rightarrow x_1 = 2 \text{ cm}$$

برای مایع (۱) ارتفاع بخش سمت راست و چپ لوله برابر است، داریم:

$$54 + x_2 = 60 - x_1 \Rightarrow 54 + x_2 = 60 - 2 \Rightarrow x_2 = 58 - 54 \Rightarrow x_2 = 4 \text{ cm}$$

$$\text{حجم مایع (۱) ثابت است.} \Rightarrow A_2 x_2 = A_1 x_1 \Rightarrow A_2 (4) = A_1 (2)$$

$$\Rightarrow \frac{A_2}{A_1} = \frac{1}{2}$$

۵۷- پاسخ: گزینه ۴ ▲ مشخصات سؤال: ساده * فیزیک ۱ (فصل ۲)

آهنگ شارش حجمی شاره یعنی حجم شاره عبوری از مقطع لوله در یکای زمان ثابت است. برای مقایسه تندی حرکت شاره در دو قسمت با استفاده از معادله پیوستگی می‌توان نوشت:

$$r_{1, \text{ضخیم}} = 2 r_{2, \text{نازک}} \Rightarrow A_{2, \text{نازک}} = \frac{1}{4} A_{1, \text{ضخیم}}$$

$$A_1 v_1 = A_2 v_2 \Rightarrow A_1 v_1 = \frac{1}{4} A_1 v_2 \Rightarrow v_2 = 4 v_1$$

۵۸- پاسخ: گزینه ۳ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * فیزیک ۳ (فصل ۱)

در لحظه $t = 6 \text{ s}$ نمودار مکان-زمان متحرک صعودی است (شیب خط مماس بر نمودار مکان-زمان مثبت است) پس سرعت لحظه‌ای مثبت است و متحرک در جهت محور X حرکت می‌کند، پس گزینه ۳ درست است.

بررسی علت نادرستی سایر گزینه‌ها:

گزینه ۱: در لحظه $t = 16 \text{ s}$ نمودار مکان-زمان متحرک نزولی است (شیب خط مماس بر نمودار مکان-زمان منفی است) و در خلاف جهت محور X حرکت می‌کند.

گزینه ۲: در لحظه $t = 9 \text{ s}$ متحرک از مبدأ ($x = 0$) عبور می‌کند اما سرعت آن صفر نیست (شیب خط مماس بر نمودار مکان-زمان صفر نیست).

گزینه ۴: در لحظه $t = 14 \text{ s}$ جهت حرکت عوض می‌شود و در این لحظه سرعت متحرک صفر می‌شود، اما در لحظه $t = 20 \text{ s}$ متحرک از مبدأ مکان ($x = 0$) عبور می‌کند و سرعت آن صفر نیست.

▲ مشخصات سؤال: متوسط * فیزیک ۳ (فصل ۱، فصل ۱)

۵۹- پاسخ: گزینه ۴

گزینه ۴: نادرست؛ برابری تندی متوسط و اندازه سرعت متوسط به معنای صفر بودن شتاب نیست. تندی متوسط $(s_{av} = \frac{\ell}{\Delta t})$ از مسافت

طی شده و اندازه سرعت متوسط $(|\vec{v}_{av}| = \frac{\Delta \vec{x}}{\Delta t})$ از اندازه جابه جایی به دست می آید.

در حرکت بر خط راست و در صورتی که متحرک تغییر جهت ندهد، بزرگی سرعت متوسط برابر تندی متوسط است؛ اما تندی می تواند تغییر کند و شتاب صفر نباشد.

بررسی سایر گزینه ها:

گزینه ۱: شتاب متحرک برابر شیب نمودار سرعت - زمان است. پاره خط شیب دار، شیب ثابتی دارد؛ بنابراین شتاب متحرک در سراسر بازه ثابت است.

گزینه ۲: در حرکت با تندی ثابت روی مسیر منحنی، جهت سرعت که در هر لحظه مماس بر مسیر است، تغییر می کند.

گزینه ۳: با بازگشت متحرک به مکان آغازین روی خط راست، جابه جایی صفر و مسافت طی شده مثبت است؛ بنابراین تندی متوسط از اندازه سرعت متوسط بیشتر است.

▲ مشخصات سؤال: متوسط * فیزیک ۳ (فصل ۱)

۶۰- پاسخ: گزینه ۱

$\left. \begin{array}{l} \text{نمودار مکان-زمان خطی است.} \\ \text{پس حرکت یکنواخت بر خط راست است.} \end{array} \right\} \Rightarrow \ell = |\Delta x| = |v \cdot \Delta t|$

$$v_{av} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{0 - 30}{6} = -5 \frac{m}{s}$$

$$\ell = |v_{av} \cdot \Delta t| = 5 \times (14 - 4) = 50 \text{ m}$$

▲ مشخصات سؤال: دشوار * فیزیک ۳ (فصل ۱)

۶۱- پاسخ: گزینه ۳

برای محاسبه شتاب متوسط در بازه $t = 6 \text{ s}$ تا $t = 11 \text{ s}$ به سرعت این لحظه ها نیاز داریم:

سرعت متحرک در بازه $t = 5 \text{ s}$ تا $t = 10 \text{ s}$ ثابت و برابر $8 \frac{m}{s}$ است، پس

سرعت لحظه $t = 6 \text{ s}$ هم $8 \frac{m}{s}$ است.

در بازه $t = 10 \text{ s}$ تا $t = 12 \text{ s}$ شتاب ثابت و برابر شتاب متوسط در همین بازه است، داریم:

$$a_{av} = \frac{v_2 - v_1}{t_2 - t_1} \Rightarrow a_{av} = \frac{0 - 8}{12 - 10} = -4 \frac{m}{s^2}$$

$$t = 12 \text{ s} \text{ تا } t = 11 \text{ s} : -4 = \frac{0 - v(t=11s)}{12 - 11} \Rightarrow v(t=11s) = 4 \frac{m}{s}$$

$$t = 11 \text{ s} \text{ تا } t = 6 \text{ s} : a_{av} = \frac{4 - 8}{11 - 6} = -0.8 \frac{m}{s^2} \Rightarrow |a_{av}| = 0.8 \frac{m}{s^2}$$

شتاب متوسط در بازه $t = 0$ تا $t = 5 \text{ s}$ با شتاب هر لحظه در این بازه برابر است، چون نمودار خط راست است و شیب آن ثابت است.

$$a_{av} = \frac{8 - (-8)}{5} = \frac{16}{5} = 3.2 \frac{m}{s^2} \Rightarrow a(t=3s) = 3.2 \frac{m}{s^2}$$

نسبت خواسته شده برابر است با:

$$\frac{|a_{av}|}{a} = \frac{0.8}{3.2} = 0.25$$

▲ مشخصات سؤال: متوسط * فیزیک ۳ (فصل ۱)

۶۲- پاسخ: گزینه ۱

با استفاده از رابطه تندی متوسط، مدت زمان حرکت متحرک را به دست می آوریم:

$$s_{av} = \frac{\ell}{\Delta t} \Rightarrow \Delta t = \frac{\ell}{s_{av}} \Rightarrow \Delta t = \frac{6 + 10 + 8}{4} = \frac{24}{4} = 6 \text{ s}$$

$$\Delta x = -8 - (4) = -12 \text{ m}$$

اکنون سرعت متوسط متحرک را محاسبه می کنیم:

$$v_{av} = \frac{\Delta x}{\Delta t} \Rightarrow v_{av} = \frac{-12}{6} = -2 \frac{m}{s} \Rightarrow |v_{av}| = 2 \frac{m}{s}$$

۶۳- پاسخ: گزینه ۳

▲ مشخصات سؤال: دشوار * فیزیک ۳ (فصل ۱)

متحرک از نقطه A تا B با تندی متوسط $\frac{10}{s}$ و از نقطه B تا C را با تندی متوسط $s_{av,BC}$ حرکت می‌کند.

$$s_{av} = \frac{\ell}{\Delta t} = \frac{AB + 2AB}{\frac{AB}{10} + \frac{2AB}{s_{av,BC}}} \Rightarrow 15 = \frac{3AB}{\frac{AB}{10} + \frac{2AB}{s_{av,BC}}} \Rightarrow \frac{5}{10} + \frac{10}{s_{av,BC}} = 1 \Rightarrow \frac{10}{s_{av,BC}} = \frac{1}{2} \Rightarrow s_{av,BC} = 20 \frac{m}{s}$$

۶۴- پاسخ: گزینه ۴

▲ مشخصات سؤال: متوسط * فیزیک ۳ (فصل ۱)

تندی را از کیلومتر بر ساعت به متر بر ثانیه تبدیل می‌کنیم:

$$v = 72 \frac{km}{h} \xrightarrow{\div 3.6} 20 \frac{m}{s}$$

$$\begin{cases} \Delta x = L_{\text{قطار}} + L_{\text{تونل}} \\ \Delta x = v \cdot \Delta t \end{cases} \Rightarrow L_{\text{تونل}} + L_{\text{قطار}} = 20 \times 40 \Rightarrow 100 + L_{\text{تونل}} = 800 \Rightarrow L_{\text{تونل}} = 700 m$$

۶۵- پاسخ: گزینه ۲

▲ مشخصات سؤال: متوسط * فیزیک ۳ (فصل ۱)

فقط موارد «الف» و «پ» درست بیان شده‌اند.

بررسی علت نادرستی سایر موارد:

مورد «ب»: نمودار مکان-زمان متحرک B یک خط راست با شیب ثابت است؛ بنابراین سرعت آن در تمام لحظه‌ها ثابت و شتاب متوسط آن صفر است؛ اما شتاب متوسط متحرک A در بازه t_1 تا t_2 غیر صفر است.

مورد «ت»: در بازه زمانی t_1 تا t_2 فاصله دو متحرک از یکدیگر ابتدا زیاد و سپس کم می‌شود.

۶۶- پاسخ: گزینه ۴

▲ مشخصات سؤال: متوسط * فیزیک ۳ (فصل ۱)

$$v(t=3s) = v_{av}(0,4s) = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{20-0}{4} = 5 \frac{m}{s}$$

در مدت $t=0$ تا $t=4s$ حرکت یکنواخت و با سرعت ثابت است، پس:

در مدت $t=8s$ تا $t=18s$ حرکت یکنواخت و با سرعت ثابت است، بنابراین:

$$v(t=12s) = v_{av}(8s,18s) = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{20 - (-40)}{18-8} = \frac{60}{10} = 6 \frac{m}{s}$$

$$a_{av} = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v(t=12s) - v(t=3s)}{12-3} = \frac{6-5}{9} = \frac{1}{9} \frac{m}{s^2}$$

۶۷- پاسخ: گزینه ۲

▲ مشخصات سؤال: متوسط * فیزیک ۳ (فصل ۱)

حالت اول:

$$\Delta t = \Delta t_1 + \Delta t_2 \Rightarrow 6 = \frac{5L}{100} + \frac{L}{60} \Rightarrow 6 = \frac{L}{15} \Rightarrow L = 90 km$$

حالت دوم:

$$4L = 360 km$$

$$\Delta t' = \frac{360}{120} = 3 \text{ ساعت}$$

۶۸- پاسخ: گزینه ۱

▲ مشخصات سؤال: متوسط * فیزیک ۳ (فصل ۱)

فرض می‌کنیم برای آنکه به موقع برسد به اندازه زمان t باید با تندی v حرکت کند. فاصله دو نقطه را برابر با Δx قرار می‌دهیم و از معادله حرکت با سرعت ثابت استفاده می‌کنیم.

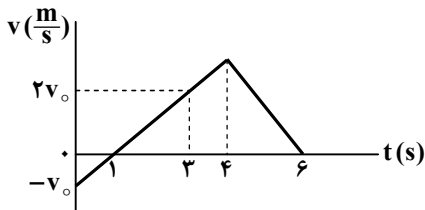
$$x = vt + x_0 \Rightarrow \Delta x = v\Delta t \Rightarrow \begin{cases} \Delta x = (120 \frac{km}{h}) \left[t - (\frac{20}{60} h) \right] & \text{وقتی ۲۰ دقیقه زودتر می‌رسد} \\ \Delta x = (80 \frac{km}{h}) \left[t + (\frac{20}{60} h) \right] & \text{وقتی ۲۰ دقیقه دیرتر می‌رسد} \end{cases} \Rightarrow 120t - 40 = 80t + \frac{80}{3} \Rightarrow t = \frac{5}{3} h$$

$$\Delta x = 120 \left(\frac{5}{3} - \frac{20}{60} \right) = 160 km$$

$$v = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{160 km}{\frac{5}{3} h} = 96 \frac{km}{h}$$

۶۹- پاسخ: گزینه ۴ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * فیزیک ۳ (فصل ۱)

با توجه به نمودار، شتاب متوسط در دو بازه مشخص شده را حساب می‌کنیم.



$$a_{av,1} = \frac{2v_0 - (-v_0)}{3} = \frac{3v_0}{3} = v_0 \quad \text{در بازه } t=0 \text{ تا } t=3 \text{ s داریم:}$$

$$a_{av,2} = \frac{0 - 2v_0}{3} = -\frac{2}{3}v_0 \quad \text{در بازه } t=3 \text{ s تا } t=6 \text{ s داریم:}$$

$$\left| \frac{a_{av,2}}{a_{av,1}} \right| = \frac{\frac{2}{3}v_0}{v_0} = \frac{2}{3} \quad \text{در این صورت نسبت خواسته شده برابر است با:}$$

۷۰- پاسخ: گزینه ۱ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * فیزیک ۳ (فصل ۱)

نمودار مکان-زمان یک خط مستقیم است، پس حرکت با سرعت ثابت است. ($x = vt + x_0$)

$$v = v_{av} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{22 - 6}{4 - 3} = \frac{16}{1} = 16 \frac{m}{s}$$

$$x = vt + x_0 \Rightarrow 6 = 16 \times 3 + x_0 \Rightarrow x_0 = -42 m \Rightarrow x = 16t - 42$$

با توجه به شکل $v > 0$ و $x_0 < 0$ است و نادرستی گزینه‌های ۲ و ۳ کاملاً مشخص است.

۷۱- پاسخ: گزینه ۳ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * فیزیک ۳ (فصل ۱)

$$\Delta x = v \cdot \Delta t$$

$$v_2 = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{240 - 160}{12 - 8} = \frac{80}{4} = 20 \frac{m}{s}$$

$$\Delta x = v_2 \Delta t \Rightarrow x_{(t=8s)} - x_{(t=4s)} = v_2 \times 4 \Rightarrow 160 - x_{(t=4s)} = 80 \Rightarrow x_{(t=4s)} = 80 m$$

$$v_1 = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{120 - 20}{6 - 1} = \frac{100}{5} = 20 \frac{m}{s}$$

۷۲- پاسخ: گزینه ۳ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * فیزیک ۳ (فصل ۱)

این حرکت، یک حرکت یکنواخت بر خط راست است.

$$v = v_{av} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{-60 - 180}{28 - 12} = -15 \frac{m}{s}$$

$$x = vt + x_0 \Rightarrow 180 = -15 \times 12 + x_0 \Rightarrow x_0 = 360 m$$

فاصله متحرک از مبدأ مکان یعنی $|x|$. بنابراین:

$$|x| = 300 m \Rightarrow x = \pm 300 m \Rightarrow -15t + 360 = \pm 300 \Rightarrow \begin{cases} t = 4 s \\ t = 44 s \end{cases}$$

۷۳- پاسخ: گزینه ۳ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * فیزیک ۳ (فصل ۱)

هر دو نمودار مکان-زمان به صورت خط راست هستند؛ بنابراین هر دو حرکت یکنواخت روی خط راست است.

$$x = vt + x_0 \Rightarrow \begin{cases} A: v = v_{av} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{60 - 10}{10} = 5 \frac{m}{s} \\ \Rightarrow x_A = 5t + 10 \\ B: v = v_{av} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{0 - 60}{8} = -7.5 \frac{m}{s} \\ \Rightarrow x_B = -7.5t + 60 \end{cases}$$

$$x_A = x_B \Rightarrow 5t + 10 = -7.5t + 60 \Rightarrow 12.5t = 50 \Rightarrow t = 4 s$$

$$x_A = x_B = 5 \times 4 + 10 = 30 m$$

۷۴- پاسخ: گزینه ۱ ▲ مشخصات سؤال: دشوار * فیزیک ۳ (فصل ۱)

$$\begin{cases} AC = v_1 \times \Delta t \\ BC = v_2 \times \Delta t \end{cases} \Rightarrow \frac{AC}{BC} = \frac{v_1}{v_2} \quad \text{رابطه (۱)}$$

$$\begin{cases} BC = v_1 \times 4 \times 3600 \\ AC = v_2 \times 25 \times 3600 \end{cases} \Rightarrow \frac{AC}{BC} = \frac{25}{4} \times \frac{v_2}{v_1} \quad \text{رابطه (۲)}$$

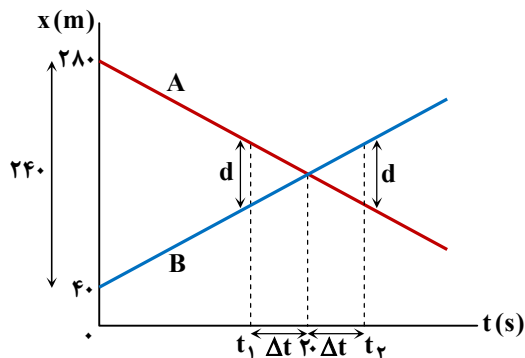
$$\xrightarrow{\text{رابطه‌های (۱) و (۲)}} \frac{v_1}{v_2} = \frac{25}{4} \times \frac{v_2}{v_1} \Rightarrow \left(\frac{v_1}{v_2}\right)^2 = \frac{25}{4} \Rightarrow \frac{v_1}{v_2} = \frac{5}{2} \Rightarrow \frac{AC}{BC} = \frac{5}{2} \Rightarrow BC = \frac{2}{5} AC$$

$$AB = AC + BC \Rightarrow AC + \frac{2}{5} AC = AB \Rightarrow \frac{7}{5} AC = AB \Rightarrow \frac{AB}{AC} = \frac{7}{5}$$

۷۵- پاسخ: گزینه ۴

▲ مشخصات سؤال: دشوار * فیزیک ۳ (فصل ۱)

نمودار مکان - زمان هر دو متحرک به صورت خط راست است، بنابراین حرکت آن‌ها با سرعت ثابت است:



$$x = vt + x_0 \Rightarrow \begin{cases} x_A = v_A t + 280 \\ x_B = v_B t + 40 \end{cases}$$

دو متحرک در لحظه $t = 20\text{ s}$ به هم رسیده‌اند.

$$20v_A + 280 = 20v_B + 40$$

$$\Rightarrow 20(v_B - v_A) = 240 \Rightarrow v_B - v_A = 12 \frac{\text{m}}{\text{s}} \quad \text{رابطه (۱)}$$

با توجه به یکنواخت بودن حرکت‌ها، زمان‌های t_1 و t_2 که در آن‌ها فاصله دو متحرک برابر d است، نسبت به لحظه به هم رسیدن کاملاً متقارن هستند: ($t = 20\text{ s}$)

$$t_2 - t_1 = 2\Delta t = 16 \Rightarrow \Delta t = 8\text{ s} \Rightarrow \begin{cases} t_1 = 20 - 8 = 12\text{ s} \\ t_2 = 20 + 8 = 28\text{ s} \end{cases}$$

$$t_1 = 12\text{ s} \text{ در لحظه (۱) رابطه (۱): } x_A - x_B = (v_A - v_B)t_1 + 240 \rightarrow d = -12 \times 12 + 240 \Rightarrow d = 96\text{ m}$$

به‌طور مشابه در لحظه $t_2 = 28\text{ s}$ داریم:

$$x_B - x_A = (v_B - v_A)t_2 - 240 \Rightarrow d = 12 \times 28 - 240 = 96\text{ m}$$

راه حل دوم:

$$\Rightarrow \text{تشابه مثلث‌ها} \Rightarrow \frac{\Delta t}{20} = \frac{d}{240} \Rightarrow \frac{8}{20} = \frac{d}{240} \Rightarrow d = 96\text{ m}$$

شیمی



۷۶- پاسخ: گزینه ۱

▲ مشخصات سؤال: ساده * شیمی ۱ (فصل ۱)

در دما و فشار بسیار بالای درون ستارگان، با انجام واکنش‌های هسته‌ای، عنصرهای سبک‌تر به عنصرهای سنگین‌تر تبدیل می‌شوند. در این فرایندها مقداری از ماده (جرم) طبق رابطه معروف اینشتین ($E = mc^2$) به انرژی تبدیل شده و به‌صورت نور و گرما آزاد می‌شود؛ بنابراین، مجموع جرم فرآورده‌ها همواره اندکی کمتر از مجموع جرم واکنش‌دهنده‌ها خواهد بود. بررسی گزینه‌های نادرست:

گزینه ۲: عنصرهای سازنده سیاره‌هایی مانند زمین و مشتری فراوانی متفاوتی دارند و توزیع آن‌ها در کیهان همگون نیست.

گزینه ۳: در ستاره‌ای مانند خورشید، تبدیل هیدروژن به هلیوم با واکنش‌های هسته‌ای انجام می‌شود و نور و گرما پدید می‌آورد.

گزینه ۴: در آغاز پیدایش کیهان، هیدروژن و هلیوم پیش از شکل‌گیری سحابی‌ها پدید آمدند.

▲ مشخصات سؤال: متوسط * شیمی ۱ (فصل ۱)

۷۷- پاسخ: گزینه ۱

فقط عبارت‌های «ب» و «پ» درست هستند.

بررسی عبارت‌های نادرست:

الف) در برخی از عناصر مانند لیتیم و بور، ایزوتوپ سنگین‌تر فراوانی بیشتری دارد.

ت) انرژی گرمایی خورشید از تبدیل هیدروژن به هلیوم (عنصر سبک‌تر به سنگین‌تر) در واکنش‌های هسته‌ای تأمین می‌شود.

▲ مشخصات سؤال: متوسط * شیمی ۱ (فصل ۱)

۷۸- پاسخ: گزینه ۴

$$44 = 79 - 35 = \text{تعداد الکترون‌های } R^{2+} = \text{تعداد نوترون‌های } Br^-$$

$$46 = 44 + 2 = e + 2 = \text{تعداد پروتون‌های } R^{2+}$$

$$58 = 46 + 12 = \text{تعداد نوترون‌های } R^{2+}$$

$$104 = p + n = 46 + 58 = \text{عدد جرمی } R$$

▲ مشخصات سؤال: متوسط * شیمی ۱ (فصل ۱)

۷۹- پاسخ: گزینه ۴

نماد شیمیایی پتاسیم، K است نه P! (P نماد شیمیایی فسفر است).

بررسی سایر گزینه‌ها:

گزینه ۱: جدول دوره‌ای شامل ۱۸ گروه و ۷ دوره است؛ بنابراین اختلاف شمار این دو برابر ۱۱ است.

گزینه ۲: عدد اتمی تعداد پروتون‌ها و در اتم خنثی تعداد الکترون‌ها را نشان می‌دهد و عدد جرمی، نشان‌دهنده مجموع تعداد پروتون‌ها و نوترون‌ها است؛

$${}^{56}_{26}\text{Fe} = 56 + 26 = 82 \quad \text{و} \quad {}^{56}_{26}\text{Fe} = 56 + 26 = 82 \quad \text{شمار ذره‌های زیراتمی}$$

گزینه ۳: جرم هر الکترون، به تقریب $\frac{1}{1836} \text{ amu}$ و جرم ${}^{20}_{10}\text{Ne}$ الکترون اتم خنثی کلسیم، $20 \times \frac{1}{1836} \text{ amu} = 0.011 \text{ amu}$ است.

▲ مشخصات سؤال: دشوار * شیمی ۱ (فصل ۱)

۸۰- پاسخ: گزینه ۳

راه حل اول:

ایزوتوپ ${}^{74}\text{X}$ دارای ۴۵ درصد فراوانی است، پس مجموع فراوانی دو ایزوتوپ دیگر $(F_2 + F_3)$ برابر ۵۵٪ خواهد بود:

$$72/4 = \frac{(74 \times 45) + 72 \times (F_2) + 70 \times (55 - F_2)}{100} \Rightarrow F_2 = 30, F_3 = 55 - 30 = 25\%$$

▲ مشخصات سؤال: دشوار * شیمی ۱ (فصل ۱)

۸۱- پاسخ: گزینه ۱

براساس نمودار طیف جرمی:

سهم ایزوتوپ سبک (${}^{31}\text{E}$): ۱ واحد

سهم ایزوتوپ سنگین (${}^{35}\text{E}$): ۳ واحد

$$\bar{M} = \frac{31 \times 1 + 35 \times 3}{1 + 3} = \frac{31 + 105}{4} = 34 \text{ amu}$$

$${}^{31}\text{E} \text{ تعداد اتم‌های } = \frac{1}{4} \times 400 = 100$$

$${}^{35}\text{E} \text{ تعداد اتم‌های } = \frac{3}{4} \times 400 = 300$$

$$\Rightarrow 100 \times (31 - 15) = 1600 \quad \text{کل نوترون‌های ایزوتوپ سبک}$$

$$\Rightarrow 300 \times (35 - 15) = 6000 \quad \text{کل نوترون‌های ایزوتوپ سنگین}$$

$$4400 = 6000 - 1600 = \text{اختلاف شمار نوترون‌ها}$$

▲ مشخصات سؤال: متوسط * شیمی ۱ (فصل ۱)

۸۲- پاسخ: گزینه ۴

گزینه ۱:

$$1/806 \times 10^{24} \text{ molecule } C_7H_{16} \times \frac{1 \text{ mol } C_7H_{16}}{6/02 \times 10^{23} \text{ molecule}} \times \frac{23 \text{ mol atom}}{1 \text{ mol } C_7H_{16}} = 69 \text{ mol atom}$$

گزینه ۲:

$$14 \text{ mol } CH_4 \times \frac{5 \text{ mol atom}}{1 \text{ mol } CH_4} = 70 \text{ mol atom}$$

گزینه ۳:

$$400 \text{ mL } C_7H_6O \times \frac{0/783 \text{ g } C_7H_6O}{1 \text{ mL } C_7H_6O} \times \frac{1 \text{ mol } C_7H_6O}{58 \text{ g } C_7H_6O} \times \frac{10 \text{ mol atom}}{1 \text{ mol } C_7H_6O} = 54 \text{ mol atom}$$

گزینه ۴:

$$216 \text{ g C} \times \frac{1 \text{ mol C}}{12 \text{ g C}} \times \frac{1 \text{ mol } C_7H_8O}{7 \text{ mol C}} \times \frac{12 \text{ mol atom}}{1 \text{ mol } C_7H_8O} = 72 \text{ mol atom}$$

۸۳- پاسخ: گزینه ۲

▲ مشخصات سؤال: متوسط * شیمی ۱ (فصل ۱)

در هر مول BX_3 ، ۴ مول اتم وجود دارد، بنابراین:

$$\text{mol } BX_3 = 2 / 612 \times 10^{23} \text{ atom} \times \frac{1 \text{ mol atom}}{6 / 02 \times 10^{23} \text{ atom}} \times \frac{1 \text{ mol } BX_3}{4 \text{ mol atom}} = 0 / 15 \text{ mol } BX_3$$

$$M(BX_3) = \frac{m}{n} = \frac{10 / 2}{0 / 15} = 68 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$$

$$M(BX_3) = 11 + 3M(X) = 68$$

$$M(X) = 19 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$$

محاسبه جرم ۰ / ۲۵ مول X_2 :

$$M(X_2) = 2 \times 19 = 38 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$$

$$m = 0 / 25 \times 38 = 9 / 5 \text{ g}$$

۸۴- پاسخ: گزینه ۲

▲ مشخصات سؤال: ساده * شیمی ۱ (فصل ۱)

در گستره مرئی، پرتوهایی که طول موج کوتاه‌تری دارند هنگام عبور از منشور بیشتر منحرف می‌شوند، بنابراین انحراف نور بنفش از نارنجی بیشتر خواهد بود.

۸۵- پاسخ: گزینه ۲

▲ مشخصات سؤال: متوسط * شیمی ۱ (فصل ۱)

بررسی گزینه‌های نادرست:

گزینه ۱: نور شعله تک طول موج نیست و طیف نشری این عناصر در ناحیه مرئی شامل چندین خط رنگی مجزا است. برای مثال طیف نشری خطی لیتیم شامل ۴ خط در گستره مرئی می‌باشد.

گزینه ۳: رنگ سبز شعله، برآیند چند پرتو است و مشاهده خطوط طیف نشری خطی (تفکیک پرتوها)، به تجزیه نور توسط منشور نیاز دارد.
گزینه ۴: رنگ شعله به عنصر فلزی موجود در نمک بستگی دارد؛ بنابراین شعله سدیم نیترات و سدیم سولفات هر دو زرد رنگ است و تفاوت آنیون، رنگ شعله را تغییر نمی‌دهد.

۸۶- پاسخ: گزینه ۲

▲ مشخصات سؤال: متوسط * شیمی ۱ (فصل ۱)

در دوره چهارم جدول تناوبی سه زیرلایه $4s$ ، $3d$ و $4p$ شروع به پر شدن می‌کنند. در دوره سوم نیز دو زیرلایه $3s$ و $3p$ شروع به پر شدن می‌کنند، پس شمار این زیرلایه‌ها در دوره چهارم یک واحد بیشتر از دوره سوم است.
بررسی سایر گزینه‌ها:

گزینه ۱: نادرست؛ حداکثر گنجایش الکترونی زیرلایه‌ای با عدد کوانتومی فرعی یک (p) برابر با ۶ الکترون و حداکثر گنجایش زیرلایه‌ای با عدد کوانتومی فرعی صفر (s) برابر با ۲ الکترون است، بنابراین اختلاف گنجایش این دو زیرلایه برابر ۴ می‌باشد.
گزینه ۳: نادرست؛ اختلاف گنجایش الکترونی لایه‌های چهارم و سوم برابر با $14 - 18 = 32$ الکترون و اختلاف گنجایش لایه‌های سوم و دوم برابر با $10 - 18 = 8$ الکترون است.

گزینه ۴: نادرست؛ در دوره چهارم جدول تناوبی ابتدا زیرلایه دوالکترونی $4s$ شروع به پر شدن می‌کند و زیرلایه ده‌الکترونی $3d$ پس از آن الکترون می‌گیرد.

۸۷- پاسخ: گزینه ۴

▲ مشخصات سؤال: متوسط * شیمی ۱ (فصل ۱)

عدد ۱۷ نادرست است؛ سه زیرلایه نخست لایه چهارم، $4s$ ، $4p$ و $4d$ هستند که مجموع $n+1$ آن‌ها برابر ۱۵ می‌شود.

$$\begin{cases} 4s \Rightarrow 4+0=4 \\ 4p \Rightarrow 4+1=5 \Rightarrow 4+5+6=15 \\ 4d \Rightarrow 4+2=6 \end{cases}$$

بنابراین باید عدد ۱۵ جایگزین ۱۷ شود.

۸۸- پاسخ: گزینه ۳

▲ مشخصات سؤال: دشوار * شیمی ۱ (فصل ۱)

الف) در لایه چهارم مقادیر l برابر با $0, 1, 2, 3$ است و دو مقدار $l = 2$ و $l = 3$ مطابق شرط سؤال، بزرگ‌تر از ۱ هستند.

ب) چهارمین زیرلایه در اتم، «f» بوده و عدد کوانتومی فرعی آن برابر ۳ است.

پ) گنجایش زیرلایه‌ای با $l = 3$ ، طبق رابطه گنجایش زیرلایه‌ها برابر با $14 = 4(3) + 2 = 4l + 2$ الکترون می‌باشد.

ت) طبق رابطه $2n^2$ حداکثر ظرفیت تئوری پذیرش الکترون در لایه $n = 5$ برابر ۵۰ است و در این لایه تعداد زیرلایه‌های موجود برابر ۵ می‌باشد. (تعداد زیرلایه‌های موجود در هر لایه برابر عدد کوانتومی اصلی آن لایه است).

۸۹- پاسخ: گزینه ۱ ▲ مشخصات سؤال: دشوار * شیمی ۱ (فصل ۱)

در اتمی با ۴ لایه الکترونی اشغال شده، زیرلایه‌های دارای $n+1=5$ ، زیرلایه‌های ۴p و ۳d هستند. با توجه به اینکه آخرین زیرلایه ۴p است، زیرلایه ۳d کاملاً پر (۱۰ الکترون) بوده و زیرلایه ۴p بین ۱ تا ۶ الکترون دارد:

$$11 = 1 + 10: \text{حداقل تعداد الکترون}$$

$$16 = 10 + 6: \text{حداکثر تعداد الکترون}$$

$$5 = 16 - 11: \text{اختلاف شمار الکترون‌ها}$$

طبق رابطه حداکثر گنجایش الکترونی لایه‌ها $(2n^2)$ ، ظرفیت الکترونی لایه چهارم ($n=4$) برابر ۳۲ است.

۹۰- پاسخ: گزینه ۱ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * شیمی ۱ (فصل ۱)

چون الکترون در لایه پنجم فاصله بیشتری از هسته دارد، بازگشت آن به لایه دوم در مقایسه با بازگشت از لایه چهارم، با اختلاف انرژی بیشتری همراه است و از آنجایی که میان انرژی پرتو و طول موج آن رابطه عکس برقرار است، هرچه انرژی آزاد شده بیشتر باشد، طول موج پرتو حاصل کوتاه‌تر خواهد بود؛ نه بلندتر.

۹۱- پاسخ: گزینه ۴ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * شیمی ۳ (فصل ۱)

عبارت‌های «اول»، «سوم» و «چهارم» درست هستند.

بررسی عبارت‌های نادرست:

عبارت «دوم»: تشکیل پیوند هیدروژنی تنها به وجود گروه هیدروکسیل ($-OH$) محدود نمی‌شود؛ شرط اصلی آن، اتصال مستقیم اتم H به اتم‌های بسیار الکترونگاتیو مثل N، O یا F است. در مولکول اوره، اتم‌های هیدروژن مستقیماً به N متصل‌اند؛ بنابراین اوره به راحتی می‌تواند با آب پیوند هیدروژنی برقرار کند.

۹۲- پاسخ: گزینه ۴ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * شیمی ۳ (فصل ۱)

در مولکول اوره $CO(NH_2)_2$ ، اتم کربن ۴ پیوند اشتراکی (یک پیوند دوگانه با اکسیژن و دو پیوند یگانه با نیتروژن‌ها) دارد و ۴ اتم هیدروژن نیز مجموعاً ۴ پیوند اشتراکی با نیتروژن‌ها تشکیل داده‌اند؛ بنابراین شمار این پیوندها با هم برابر است. بررسی بقیه گزینه‌ها:

گزینه ۱: هر مولکول اتیلن گلیکول و اوره دارای ۴ جفت الکترون ناپیوندی بوده و هر دو با تشکیل پیوند هیدروژنی در آب حل می‌شوند.

گزینه ۲: وازلین و روغن زیتون موادی ناقطبی با نیروی بین مولکولی غالب لاندن هستند و در هگزان حل می‌شوند.

گزینه ۳: در هر مولکول اتیلن گلیکول $C_2H_4(OH)_2$ ، شمار جفت الکترون‌های پیوندی برابر با ۹ و شمار جفت الکترون‌های ناپیوندی (روی دو اتم اکسیژن) برابر با ۴ است؛ بنابراین نسبت آن‌ها $\frac{9}{4}$ می‌شود.

۹۳- پاسخ: گزینه ۱ ▲ مشخصات سؤال: دشوار * شیمی ۳ (فصل ۱)

فرمول کلی اسید چربی که در ساختار خود فقط یک پیوند دوگانه $(-C=O)$ دارد، به صورت $C_nH_{2n}O_2$ است و به ازای هر پیوند دوگانه $C=C$ ، ۲ اتم هیدروژن از ساختار ترکیب کم می‌شود:

از آنجایی که در اسید چرب موردنظر دو پیوند دوگانه وجود دارد، نتیجه می‌گیریم علاوه بر گروه کربونیل $(-C=O)$ در ساختار زنجیر هیدروکربنی نیز یک پیوند دوگانه $(C=C)$ داریم و اسید چرب دارای ۱۷ پیوند کربن-کربن (شامل ۱ پیوند $C=C$ و ۱۶ پیوند $C-C$) و فرمول ساختاری $C_nH_{2n-2}O_2$ می‌باشد.

$$\frac{2(n) + 1(2n-2) + 2(2)}{2} = \frac{(4 \times 18) + 34 + (2 \times 2)}{2} = 55$$

شمار پیوندهای اشتراکی برابر است با:

$$\frac{\text{جرم H}}{\text{جرم O}} = \frac{34 \times 1}{2 \times 16} = \frac{17}{16}$$

۹۴- پاسخ: گزینه ۱ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * شیمی ۳ (فصل ۱)

فقط عبارت سوم درست است.

بررسی عبارت‌های نادرست:

عبارت اول: ترکیب (C) نوعی استر است و نیروی بین مولکولی در آن از نوع واندروالسی است.

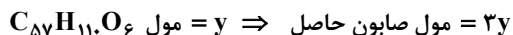
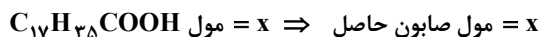
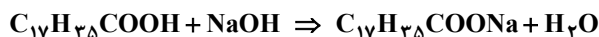
عبارت دوم: ترکیب (A) یک پاک‌کننده غیرصابونی است و برای پاک کردن لکه‌ها، واکنش شیمیایی انجام نمی‌دهد.

عبارت چهارم: ترکیب (B) یک صابون مایع است که در آب سخت رسوب تشکیل داده و در پی آن، از قدرت شویندگی و میزان کف‌کنندگی آن کاسته می‌شود.

عبارت پنجم: ترکیب (C) یک استر است و گروه عاملی استری دارد و به دلیل غلبه بخش هیدروکربنی ناقطبی، برخلاف اتانول در آب نامحلول است.

۹۵- پاسخ: گزینه ۴

▲ مشخصات سؤال: دشوار * شیمی ۳ (فصل ۱)



$$\begin{cases} \frac{y}{x+y} = \frac{40}{100} \Rightarrow y=4, x=6 \\ x+3y=18 \end{cases}$$



۹۶- پاسخ: گزینه ۴

▲ مشخصات سؤال: ساده * شیمی ۳ (فصل ۱)

کلئید همانند سوسپانسیون، مخلوطی ناهمگن است.

۹۷- پاسخ: گزینه ۱

▲ مشخصات سؤال: متوسط * شیمی ۳ (فصل ۱)

فقط عبارت‌های «الف» و «ت» درست هستند.

بررسی عبارت‌های نادرست:

(ب) افزودن کلسیم کلرید به مخلوط آب مقطر و صابون، با تشکیل رسوب، ارتفاع کف را کاهش می‌دهد.

(پ) قدرت پاک‌کنندگی پاک‌کننده‌های غیرصابونی در آب سخت بیشتر از صابون است.

۹۸- پاسخ: گزینه ۳

▲ مشخصات سؤال: متوسط * شیمی ۳ (فصل ۱)

عبارت‌های «دوم» و «چهارم» درست هستند.

بررسی عبارت‌های نادرست:

عبارت اول: اندازه ذرات کلئیدی بزرگ‌تر از ذرات محلول و کوچک‌تر از ذرات سوسپانسیون است. در واقع ترتیب اندازه ذرات به‌صورت:

«محلول > کلئید > سوسپانسیون» می‌باشد.

عبارت سوم: رفتار کلئیدها را می‌توان رفتاری بین محلول‌ها و سوسپانسیون‌ها در نظر گرفت.

۹۹- پاسخ: گزینه ۴

▲ مشخصات سؤال: متوسط * شیمی ۳ (فصل ۱)

صابون مایع با کاتیون تک اتمی، نمک پتاسیم اسیدهای چرب با فرمول کلی R-COOK است. با توجه به اینکه شمار کل اتم‌های کربن در

این صابون برابر n است و ۱۱ اتم کربن در گروه کربوکسیلات (COO^-) قرار دارد، زنجیر هیدروکربنی سیرشده (R) دارای n-۱ اتمکربن بوده و فرمول آن به‌صورت $C_{n-1}H_{2(n-1)+1} = C_{n-1}H_{2n-1}$ می‌باشد. از این‌رو فرمول شیمیایی این صابون مایع $C_{n-1}H_{2n-1}COOK$ بوده و جرم مولی آن به‌صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$M = 12(n-1) + 1(2n-1) + 12 + 16(2) + 39 = 14n + 70 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$$

۱۰۰- پاسخ: گزینه ۳

▲ مشخصات سؤال: ساده * شیمی ۳ (فصل ۱)

پاک‌کننده‌های غیرصابونی، برخلاف صابون، با یون‌های کلسیم و منیزیم موجود در آب سخت رسوب تشکیل نداده و به همین دلیل قدرت

پاک‌کنندگی خود را حفظ می‌کنند.

۱۰۱- پاسخ: گزینه ۴

▲ مشخصات سؤال: ساده * شیمی ۳ (فصل ۱)

پاک‌کننده‌های غیرصابونی در آب سخت رسوب تولید نمی‌کنند، اما یون‌های سختی‌زای آب (کلسیم و منیزیم) را نیز جدا نکرده و آب سخت

را نرم نمی‌کنند؛ بلکه تنها به دلیل عدم تشکیل رسوب، کارایی و قدرت پاک‌کنندگی خود را در آب سخت حفظ می‌کنند.

۱۰۲- پاسخ: گزینه ۱

▲ مشخصات سؤال: دشوار * شیمی ۳ (فصل ۱)

برای شروع، تعداد کربن‌های زنجیر R برای پاک‌کننده صابونی را n در نظر می‌گیریم. اگر این زنجیر، هیدروکربنی سیرشده باشد فرمول آن

 C_nH_{2n+1} خواهد بود و با حضور هر پیوند دوگانه، ۲ هیدروژن از این ساختار کم می‌شود. در نتیجه فرمول صابونی که زنجیر هیدروکربنیآن دارای ۳ پیوند دوگانه است، $C_nH_{2n-5}COONa$ می‌باشد. در مرحله بعد به کمک جرم مولی صابون تعداد کربن‌های زنجیر R را

به‌دست می‌آوریم.

$$12(n) + (2n-5) + 12 + 32 + 23 = 258 \Rightarrow 14n + 62 = 258 \Rightarrow n = 14$$

با توجه به اینکه تعداد کربن‌های دو شوینده برابر است و پاک‌کننده صابونی دارای ۱۵ اتم کربن (۱۴ اتم در زنجیره R و یک اتم در بخش یونی

ساختار) است، پاک‌کننده غیرصابونی در کل ۱۵ اتم کربن و در زنجیر R خود ۹ اتم کربن دارد؛ و ساختار آن با احتساب سیرشده بودن زنجیر

کربنی (۳ پیوند ۲ گانه در قسمت حلقه بنزنی می‌باشد و زنجیر R سیرشده است) به‌صورت $C_9H_{19} - C_6H_5 - SO_3Na$ است.

$$M = 12(15) + 1(23) + 32 + 48 + 23 = 306 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$$

۱۰۳- پاسخ: گزینه ۲

▲ مشخصات سؤال: متوسط * شیمی ۳ (فصل ۱)

چربی‌ها و اسیدهای چرب با بازهای قوی مانند NaOH واکنش داده و به نمک‌های محلول (صابون) تبدیل می‌شوند؛ بنابراین بازها برای رفع گرفتگی‌های چربی مؤثرتر از اسیدها هستند.
بررسی عبارت‌های نادرست:

گزینه ۱: پاک‌کننده‌های خورنده برخلاف صابون‌ها، لکه‌ها را با انجام واکنش شیمیایی می‌زدایند نه از طریق برهم‌کنش‌های فیزیکی.

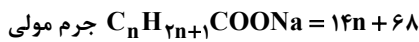
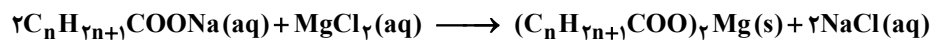
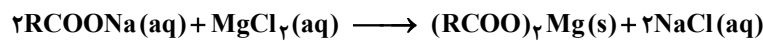
گزینه ۳: در واکنش مخلوط آلومینیم و سود با آب، گاز هیدروژن (H_2) تولید می‌شود، نه اکسیژن.

گزینه ۴: این واکنش به شدت گرماده است و به دلیل آزاد شدن گرما (نه جذب گرما)، چربی‌ها ذوب و روان می‌شوند.

۱۰۴- پاسخ: گزینه ۴

▲ مشخصات سؤال: دشوار * شیمی ۳ (فصل ۱)

با توجه به واکنش زیر می‌دانیم هر مول منیزیم کلرید می‌تواند با دو مول صابون به‌طور کامل رسوب دهد و 0.15 مول رسوب تشکیل شده به دلیل حضور 0.3 مول صابون در واکنش است. همچنین با توجه به اینکه در این صابون R یک زنجیر هیدروکربنی سیرشده است، فرمول شیمیایی آن همانند فرمول عمومی آلکیل‌ها C_nH_{2n+1} خواهد بود.



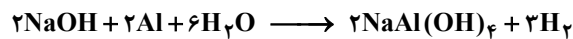
$$8 / 34 = 0.3 \times (14n + 68) \Rightarrow 278 = 14n + 68 \Rightarrow 210 = 14n \Rightarrow n = 15$$

از آنجایی که زنجیر هیدروکربنی (R) این صابون ۱۵ کربن دارد تعداد کل کربن‌های موجود در این شوینده صابونی برابر ۱۶ خواهد بود.

۱۰۵- پاسخ: گزینه ۴

▲ مشخصات سؤال: متوسط * شیمی ۳ (فصل ۱)

گاز X، همان گاز هیدروژن است. معادله واکنش مربوطه را نوشته و موازنه می‌کنیم:



حجم $44/8$ لیتر گاز هیدروژن در شرایط STP معادل با ۲ مول است. به ازای تولید ۲ مول گاز هیدروژن، $\frac{4}{3}$ مول آلومینیم و ۴ مول H_2O

مصرف می‌شود؛ بنابراین گزینه ۴ درست است.