دفترچه پاسخ تشریحی

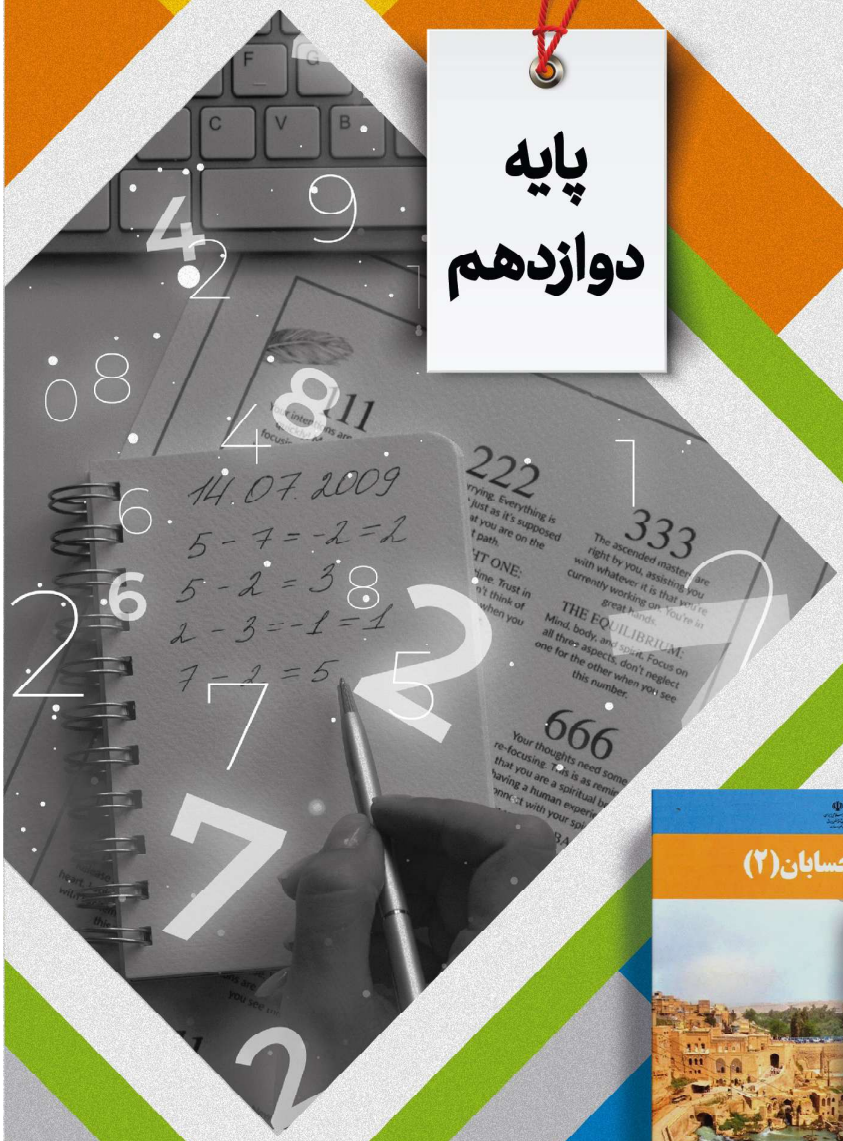
گروه آزمایشی علوم ریاضی

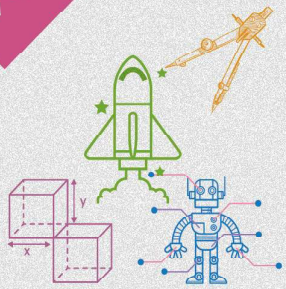
آزمون آزمایشی ۷ آذر ۱۴۰۴

ویژه داوطلبان آزمون سراسری ۱۴۰۵

پایه دوازدهم

مرحله ۳





گزینه دو
مؤسسه آموزشی فرهنگی

۱۴۰۴-۱۴۰۵

سنجش کلاد
www.SanjeshCloud.ir
Tme/SanjeshCloud

داوطلبان آزمون سراسری سال ۱۴۰۵

سال تحصیلی ۱۴۰۵-۱۴۰۴

تذکرهای مهم

- آزمون آزمایشی مرحلهٔ ۴ گزینه‌دو، در روز جمعه ۲۸ آذر ۱۴۰۴ برگزار می‌گردد.
- داوطلب گرامی، جهت استفاده از خدمات طلایی خود مانند کارنامه‌های هوشمند بعد از آزمون، آزمونک‌ها، بانک سؤال گزینه‌دو، رفع اشکال هوشمند، آرشیو آزمون‌های گزینه‌دو و... ، با استفاده از شمارهٔ داوطلبی (به‌عنوان نام کاربری) و کد ملی خود (به‌عنوان رمز عبور) وارد وب‌سایت گزینه‌دو به آدرس www.gozine2.ir شوید.
- **در صورتی که اینترنتی ثبت‌نام کرده‌اید، رمز عبور شما همان رمزی است که خودتان انتخاب نموده‌اید.**
- کارنامه‌های آزمون آزمایشی مرحلهٔ ۳ به‌صورت کامل، با فاصلهٔ زمانی کوتاهی پس از آزمون مطابق اطلاعیهٔ اعلام‌شده، بر روی پایگاه اینترنتی گزینه‌دو به آدرس www.gozine2.ir قرار می‌گیرد. در صورت بروز اشکال در دریافت کارنامه، موضوع را از طریق نمایندگی شهر خود پیگیری نمایید.

داوطلب گرامی، شما می‌توانید با اسکن تصویر بالا به‌وسیلهٔ گوشی هوشمند و یا تبلت خود، به صفحهٔ اینستاگرام مؤسسه گزینه‌دو وارد شوید.

gozine2.ir

سنجش کلاد
www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshCloud

گزینه دو
مؤسسه آموزشی فرهنگی
gozine2.ir

اسامی هیئت‌علمی آزمون‌های ادواری ویژه داوطلبان کنکور مؤسسه گزینه‌دو
در سال تحصیلی ۱۴۰۵_۱۴۰۴

● معاون تولید محتوا: **علی الفتی**
● مدیر واحد آموزش تخصصی: **محمدرضا محمدهاشمی**

گروه ریاضی
گروه سید امیرمحمد سید شاکری

	مسئول درس و دستیاران	طراحان	کارشناسان
حسابان و ریاضی پایه	مسئول درس: علی افضل‌زاده دستیاران: عباس سعیدی - وحید جعفری	حسین شفیع‌زاده ایمان اردستانی	سید مهدی عابدی سید علی موسوی‌راد
هندسه	مسئول درس: سعید اکبرزاده دستیار: هادی کاظم‌نژاد	سید محسن میراسلامی سعید اکبرزاده فرهاد فرزامی	علی صادقی مانی خدابنده
ریاضیات گسسته	مسئول درس: سعید اکبرزاده دستیار: فرهاد فرزامی	علیرضا شریف خطیبی امیدرضا پورحسینی سعید اکبرزاده	حسین خواجوند مانی خدابنده
ریاضی تجربی	مسئول درس: ایمان اردستانی دستیاران: وحید جعفری - مهدی پوررضایی	مهرداد کیوان ایمان اردستانی علی افضل‌زاده	پوپک مقدم
ریاضی انسانی	مسئول درس: حسین افسری دستیاران: مهدی پوررضایی - عباس مالکی	وحید رباعی حسین افسری علی افضل زاده	امیرحسین حریری ایمان حسین‌زاده

گروه علوم
گروه محمدحسین کشانی

	مسئول درس و دستیار	طراحان	کارشناسان
زیست شناسی	مسئول درس: امیر کبیری راد دستیار: پرسا کامکار	محمد پازوکی علی پناهی شایق بهرام میرحبیبی منصور کهن دل امیر کبیری راد علیرضا اکبرپور مسعود حدادی محمد شاملو	بتول خواجه‌پور رضا بهنامی علی حاجی محمدزاده
فیزیک	مسئول درس: منصور داودوندی دستیار: ساناز دریکوندی	علی نعیمی احمد رضوانی جمال خم‌خاجی بهمن شاهمرادی منصور داودوندی	مریم گلی حسن‌لو
شیمی	مسئول درس: شهرام شاه‌پرویزی دستیار: حنانه شریف‌خطیبی	ماشاءالله سلیمانی مهداد ملاصالحی حسین شرانلو محمدرضا پورجاوید بهنام ابراهیم‌پور سید صمد صفوی رضا بخشیان یاسر راش	مرتضی قدیانی حسین ایمانی‌پور
زمین شناسی	مسئول درس: شکیبا کریمی	فرزانه رجایی فرزانه صاعدی حسن علیمحمدی عباس روزبهانی	فرزانه صاعدی روزبه اسحاقیان حسن علیمحمدی

گروه انسانی
گروه علی اکبر آخوندی

	مسئول درس و دستیار	طراحان	کارشناسان
علوم و فنون ادبی	مسئول درس: محمدرضا پیرو دستیار: حسنا محمدی - سپهر سالارکیا	ابوالفضل قاضی علی عطری محمدرضا پیرو محمدرضا لمسه‌چی طاهره موسی زاده امیرمهبد اسفندی	محمدصادق حسام زاده محمدصدرا حسینی
جامعه شناسی	مسئول درس: الهام رضایی دستیار: فاطمه صفری	آزیتا بیدقی علیرضا مختاری محمود حسن پور فروغ تیموریان محمدزمان کبیر	مهتاب شیرازی هستی ناصح
روان شناسی	مسئول درس: سیده ضحی سکاکی دستیار: ثنا کاشیان	سیمین زاهدی حمیدرضا توکلی سیده ضحی سکاکی	علی شکری فاطمه یاری
زبان عربی	مسئول درس: پویا رضاداد	کاظم غلامی حمید جوهری مجد پویا رضاداد اسرافیل قربانپور پدرام علیمرادی عرفان جالیزی	فاطمه نظری مهتاب شیرازی سارا حمزه صبا پهلوان
تاریخ	مسئول درس: سیده ساره زاهدی	شهرام امامی نگار مروتی بهروز یحیی مریم قلی پور	مهتاب شیرازی محمدصدرا حسینی
جغرافیا	مسئول درس: الناز گنج‌کار دستیار: الهه ریاحی نسب	شهرام امامی نگار مروتی بهروز یحیی	مهتاب شیرازی محمدصدرا حسینی
فلسفه و منطق	مسئول درس: سعید رحیمیان دستیاران: محمدحسین خدام - فراز مختاری نژاد	حمید سودیان‌طهرانی سعید رحیمیان فرهاد قاسمی نژاد علی اکبر آخوندی مهدی لاجوردی ناصر آزادجو	سپهر علی‌پور امیررضا علیزاده ابوالفضل میرمحمدی
اقتصاد	مسئول درس: امیر محمدبیگی دستیار: محمدرضا مبارکی	حسین [illegible] میترا چینی‌ساز محمدرضا مبارکی آرش بدری	کوثر رعدی

سنجش کلاد
www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshCloud

ریاضـــــــــیات

۱- پاسخ: گزینهٔ ۲ ▲ مشخصات سؤال: ساده * ریاضی ۱ (فصل ۲، درس ۳)

خوبه اینو بدونی

- اگر α زاویهٔ دلخواهی باشد، همواره داریم:

$$\sin^۲\alpha+\cos^۲\alpha=۱$$

در رابطه‌های فوق، علامت نسبت مثلثاتی زاویهٔ α با توجه به ناحیه‌ای که زاویهٔ α در آن قرار دارد، تعیین می‌شود.

- برای زاویهٔ دلخواه α، داریم:

$$۱+\tan^۲\alpha=\frac{۱}{\cos^۲\alpha}\quad(\cos\alpha\neq۰)$$

جوابش اینه

ابتدا با استفاده از تساوی داده‌شده، مقدار $\tan\alpha$ را محاسبه می‌کنیم:

$$\sin\alpha=-۲\cos\alpha\Rightarrow\tan\alpha=-۲$$

اکنون با استفاده از مقدار $\tan\alpha$، مقادیر $\sin\alpha$ و $\cos\alpha$ را محاسبه می‌کنیم. توجه کنید که α در ناحیه دوم قرار دارد؛ پس مقدار $\sin\alpha$ مثبت و $\cos\alpha$ منفی است.

$$۱+\tan^۲\alpha=\frac{۱}{\cos^۲\alpha}\Rightarrow۵=\frac{۱}{\cos^۲\alpha}\Rightarrow\cos\alpha=-\frac{\sqrt{۵}}{۵}$$

$$\Rightarrow\sin\alpha=\sqrt{۱-(\frac{-\sqrt{۵}}{۵})^۲}=\frac{۲\sqrt{۵}}{۵}$$

بنابراین مقدار خواسته‌شده برابر است با:

$$\sin\alpha-۳\cos\alpha=\frac{۲\sqrt{۵}}{۵}+\frac{۳\sqrt{۵}}{۵}=\frac{۵\sqrt{۵}}{۵}=\sqrt{۵}$$

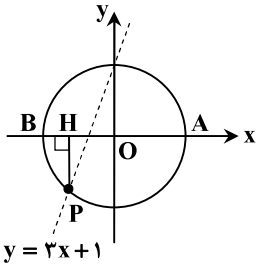
۲- پاسخ: گزینهٔ ۳ ▲ مشخصات سؤال: ساده * ریاضی ۱ (فصل ۲، درس ۲)

خوبه اینو بدونی

- در دایرهٔ مثلثاتی، محور طول‌ها را «محور کسینوس‌ها» و محور عرض‌ها را «محور سینوس‌ها» می‌نامیم. به‌عبارت‌دیگر، اگر P نقطهٔ دلخواهی روی دایرهٔ مثلثاتی باشد که نیم‌خط OP با جهت مثبت محور xها زاویهٔ θ می‌سازد، آنگاه P نقطه‌ای با مختصات (x,y) است که در آن $x=\cos\theta$ و $y=\sin\theta$.

جوابش اینه

نقطهٔ P روی خط $y=۳x+۱$ قرار دارد. فرض کنید مختصات P به‌صورت $P(a,۳a+۱)$ باشد. این نقطه روی دایرهٔ مثلثاتی با شعاع یک قرار دارد؛ بنابراین طبق رابطهٔ فیثاغورس در مثلث قائم‌الزاویهٔ OHP داریم:



$$a^۲+(۳a+۱)^۲=۱\Rightarrow a^۲+۹a^۲+۶a+۱=۱\Rightarrow ۱۰a^۲+۶a=۰$$

$$\Rightarrow a=۰\text{ غ‌ق‌ق}\ ,\ a=-\frac{۳}{۵}\text{ ق‌ق}$$

قدرمطلق طول نقطهٔ P برابر طول پاره‌خط OH است؛ پس:

$$OH=\frac{۳}{۵}\Rightarrow BH=۱-OH=\frac{۲}{۵}$$

سنجش کلاد
www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshCloud

۳- پاسخ: گزینهٔ ۳ ▲ مشخصات سؤال: ساده * حسابان ۱ (فصل ۴، درس ۲)

خوبه اینو بدونی

- برای زاویهٔ دلخواه α داریم:

$$\sin(۱۸۰^\circ-\alpha)=\sin\alpha \qquad \cos(۱۸۰^\circ-\alpha)=-\cos\alpha$$

- برای زاویهٔ دلخواه α داریم:

$$\sin(۱۸۰^\circ+\alpha)=-\sin\alpha \qquad \cos(۱۸۰^\circ+\alpha)=-\cos\alpha$$

- برای زاویهٔ دلخواه θ داریم:

$$\sin(۲۷۰^\circ-\theta)=-\cos\theta \qquad \cos(۲۷۰^\circ-\theta)=-\sin\theta$$

- برای زاویهٔ دلخواه θ داریم:

$$\sin(۲۷۰^\circ+\theta)=-\cos\theta \qquad \cos(۲۷۰^\circ+\theta)=\sin\theta$$

جوابش اینه

تمام زوایا را برحسب زاویهٔ ۱۵° می‌نویسیم. با استفاده از تساوی داده‌شده، داریم:

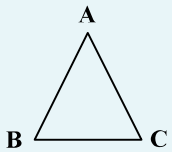
$$\frac{\sin ۱۹۵^\circ+m\sin ۱۶۵^\circ}{\cos ۲۸۵^\circ-۳\cos ۲۵۵^\circ}=۲ \Rightarrow \frac{\sin(۱۸۰^\circ+۱۵^\circ)+m\sin(۱۸۰^\circ-۱۵^\circ)}{\cos(۲۷۰^\circ+۱۵^\circ)-۳\cos(۲۷۰^\circ-۱۵^\circ)}=۲ \Rightarrow \frac{-\sin ۱۵^\circ+m\sin ۱۵^\circ}{\sin ۱۵^\circ+۳\sin ۱۵^\circ}=۲$$

$$\Rightarrow \frac{\sin ۱۵^\circ(-۱+m)}{\sin ۱۵^\circ(۱+۳)}=۲ \Rightarrow \frac{m-۱}{۴}=۲ \Rightarrow m-۱=۸ \Rightarrow m=۹$$

۴- پاسخ: گزینهٔ ۴ ▲ مشخصات سؤال: ساده * ریاضی ۱ (فصل ۲، درس ۱)

خوبه اینو بدونی

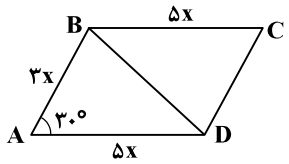
- در مثلث ABC، مساحت مثلث ABC از رابطهٔ زیر به‌دست می‌آید:



$$\text{مساحت } \overset{\triangle}{ABC}=\frac{۱}{۲}\times AB\times BC\times \sin\hat{B}$$

جوابش اینه

نسبت طول ضلع BC به AB برابر ۵ است؛ پس می‌توان فرض کرد $BC=۵x$ و $AB=۳x$. مساحت متوازی‌الاضلاع برابر ۳۰ است؛ پس مساحت مثلث ABD برابر $\frac{۳۰}{۲}=۱۵$ است:



$$S_{ABD}=\frac{۱}{۲}AB\cdot AD\cdot \sin ۳۰^\circ \Rightarrow ۱۵=\frac{۱}{۲}\times ۳x\times ۵x\times \frac{۱}{۲}$$

$$۱۵=\frac{۱۵x^۲}{۴} \Rightarrow x=۲$$

بنابراین محیط متوازی‌الاضلاع برابر است با:

$$\text{محیط}=۲(۳x+۵x)=۳۲$$

۵- پاسخ: گزینهٔ ۳ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * حسابان ۱ (فصل ۴، درس ۱)

خوبه اینو بدونی

- همواره بین اندازهٔ یک زاویه مانند θ برحسب رادیان و طول کمان l روبه‌رو به آن در یک دایره به شعاع r رابطهٔ زیر برقرار است:

$$\theta=\frac{l}{r}$$

- اگر D اندازهٔ زاویه‌ای برحسب درجه و R اندازهٔ آن برحسب رادیان باشد، آنگاه:

$$\frac{D}{۱۸۰^\circ}=\frac{R}{\pi}$$

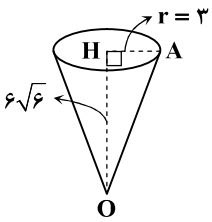
سنجش کلاد
www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshCloud

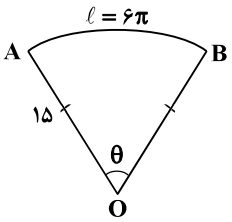
جوابش اینه

ابتدا با استفاده از حجم و ارتفاع مخروط، شعاع مخروط را به‌دست می‌آوریم.

$$V=\frac{1}{3}\pi r^2 h \Rightarrow 18\sqrt{6}\pi=\frac{1}{3}\pi r^2(6\sqrt{6}) \Rightarrow 3=\frac{1}{3}r^2 \Rightarrow r^2=9 \Rightarrow r=3$$

می‌دانیم در قطاع AOB که شکل گستردهٔ مخروط است، طول OA و OB همان طول مولد مخروط است؛ بنابراین با استفاده از رابطه فیثاغورس، داریم:





$$OA^2=OH^2+AH^2 \Rightarrow OA^2=216+9$$

$$\Rightarrow OA^2=225 \Rightarrow OA=15$$

همچنین طول کمان AB برابر محیط قاعدهٔ مخروط است؛ پس:

$$\overset{\frown}{AB}=\text{محیط قاعده} \Rightarrow \overset{\frown}{AB}=2\pi r=6\pi$$

اکنون اندازهٔ θ را برحسب رادیان به‌دست می‌آوریم:

$$\theta=\frac{\ell}{r}=\frac{6\pi}{15}=\frac{2\pi}{5}$$

با توجه به اینکه π رادیان برابر 180° است؛ پس:

$$\frac{2\pi}{5}\text{ رادیان}=\frac{2\times 180^\circ}{5}=72^\circ$$

۶- پاسخ: گزینهٔ ۲ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * حسابان ۱ (فصل ۴، درس ۲)

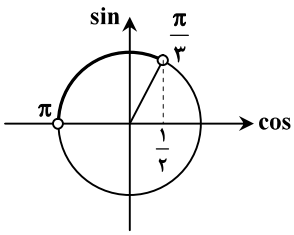
خوبه اینو بدونی

- برای زاویهٔ دلخواه θ داریم:

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)=\cos\theta$$

جوابش اینه

با توجه به اینکه $\sin\left(2\alpha-\frac{3\pi}{2}\right)=\sin\left(2\alpha+\frac{\pi}{2}\right)=\cos 2\alpha$، ابتدا حدود 2α را تعیین می‌کنیم؛ سپس محدودهٔ کسینوس آن را به‌دست می‌آوریم.



$$\frac{\pi}{6}<\alpha<\frac{\pi}{2} \Rightarrow \frac{\pi}{3}<2\alpha<\pi$$

$$\Rightarrow -1<\cos 2\alpha<\frac{1}{2} \Rightarrow -1<\frac{m-1}{2}<\frac{1}{2} \Rightarrow -2<m-1<1 \Rightarrow -1<m<2$$

۷- پاسخ: گزینهٔ ۱ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * ریاضی ۱ (فصل ۲، درس ۳)

خوبه اینو بدونی

- برای زاویهٔ دلخواه α، داریم:

$$1+\tan^2\alpha=\frac{1}{\cos^2\alpha} \quad (\cos\alpha\neq 0)$$

- برای زاویهٔ دلخواه α، داریم:

$$\tan\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\ ,\ \cot\alpha=\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$$

سنجش کلاد
www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshCloud

جوابش اینه

ابتدا عبارت خواسته‌شده را با استفاده از اتحادهای مثلثاتی ساده می‌کنیم. توجه کنید که زاویهٔ α در ناحیه سوم دایرهٔ مثلثاتی است؛ پس $\sin\alpha$ و $\cos\alpha$ منفی است.

$$(۱-\sin\alpha)(\frac{۱}{\cot\alpha}-\sqrt{۱+\tan^۲\alpha})=(۱-\sin\alpha)(\tan\alpha-\frac{۱}{|\cos x|})=(۱-\sin\alpha)(\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}-\frac{۱}{-\cos\alpha})$$

$$=(۱-\sin\alpha)\times\frac{\sin\alpha+۱}{\cos\alpha}=\frac{۱-\sin^۲\alpha}{\cos\alpha}=\cos\alpha$$

پس باید مقدار $\cos\alpha$ را پیدا کنیم:

$$\sin^۲\alpha+\cos^۲\alpha=۱\Rightarrow(\frac{۳}{۵})^۲+\cos^۲\alpha=۱\Rightarrow\cos^۲\alpha=\frac{۱۶}{۲۵}\Rightarrow\cos\alpha=\pm\frac{۴}{۵}$$

با توجه به اینکه $۱۸۰^\circ<\alpha<۲۷۰^\circ$؛ پس $\cos\alpha=-\frac{۴}{۵}$ و مقدار عبارت خواسته‌شده نیز برابر $-\frac{۴}{۵}$ است.

۸- پاسخ: گزینهٔ ۴ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * حسابان ۱ (فصل ۴، درس ۲)

خوبه اینو بدونی

- برای زاویهٔ دلخواه θ داریم: $\cot(\frac{\pi}{۲}-\theta)=\tan\theta$
- برای زاویهٔ دلخواه θ داریم: $\cos(\frac{\pi}{۲}+\theta)=-\sin\theta$

جوابش اینه

فرض کنید $\theta=x+\frac{\pi}{۳}$؛ در این صورت $x=\theta-\frac{\pi}{۳}$؛ بنابراین $-x=-\theta+\frac{\pi}{۲}$؛ پس با توجه به تساوی داده‌شده، داریم:

$$\frac{\tan(x+\frac{\pi}{۳})}{۱-\cot(\frac{\pi}{۶}-x)}=۲\Rightarrow\frac{\tan\theta}{۱-\cot(\frac{\pi}{۲}-\theta)}=۲\Rightarrow\frac{\tan\theta}{۱-\tan\theta}=۲\Rightarrow\tan\theta=۲-۲\tan\theta\Rightarrow\tan\theta=\frac{۲}{۳}\Rightarrow\cot\theta=\frac{۳}{۲}$$

اکنون مقدار خواسته‌شده را برحسب θ بازنویسی می‌کنیم:

$$\cos^۲(\frac{۵\pi}{۶}+x)=\cos^۲(\frac{\pi}{۲}+\frac{\pi}{۳}+x)=\cos^۲(\frac{\pi}{۲}+\theta)=\sin^۲\theta$$

اکنون با استفاده از مقدار $\cot\theta$، مقدار $\sin^۲\theta$ را محاسبه می‌کنیم:

$$۱+\cot^۲\theta=\frac{۱}{\sin^۲\theta}\Rightarrow\sin^۲\theta=\frac{۱}{۱+\frac{۹}{۴}}\Rightarrow\sin^۲\theta=\frac{۴}{۱۳}$$

بنابراین مقدار خواسته‌شده برابر $\frac{۴}{۱۳}$ است.

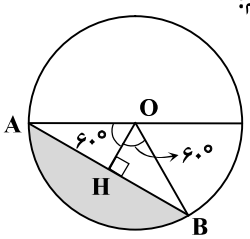
۹- پاسخ: گزینهٔ ۲ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * حسابان ۱ (فصل ۴، درس ۱)

خوبه اینو بدونی

- طول کمان مقابل به زاویهٔ θ (برحسب رادیان) در دایره‌ای به شعاع R برابر $R\theta$ است.

جوابش اینه

دقت کنید ۱۲۰° معادل $\frac{۲\pi}{۳}$ رادیان است، پس با توجه به اینکه طول شعاع در دایرهٔ مثلثاتی برابر ۱ است، داریم:



$$\overset{\frown}{AB}=۱\times\frac{۲\pi}{۳}=\frac{۲\pi}{۳}$$

اگر در مثلث متساوی‌الساقین OAB، ارتفاع OH را رسم کنیم، این ارتفاع، نیمساز نیز هست:

$$\overset{\triangle}{OBH}:BH=\sin۶۰^\circ\Rightarrow BH=\frac{\sqrt{۳}}{۲}\Rightarrow AB=۲BH=\sqrt{۳}$$

بنابراین محیط خواسته‌شده برابر است با:

$$\text{محیط ناحیه هاشورزده}=AB+\overset{\frown}{AB}=\sqrt{۳}+\frac{۲\pi}{۳}\simeq\sqrt{۳}+۲$$

سنجش کلاد
www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshCloud

۱۰- پاسخ: گزینهٔ ۲ ▲ مشخصات سؤال: دشوار * حسابان ۱ (فصل ۴، درس ۲)

خوبه اینو بدونی

- برای زاویهٔ دلخواه θ داریم: $\tan(\frac{\pi}{2}+\theta)=-\cot\theta$

جوابش اینه

ابتدا دقت کنید که چون $\frac{3\pi}{2}<\alpha<\frac{5\pi}{4}$ است؛ پس $\sin\alpha$ و $\cos\alpha$ هر دو منفی‌اند و در این محدوده $\sin\alpha<\cos\alpha$. اکنون رابطهٔ داده‌شده را ساده می‌کنیم:

$$\tan\alpha=3+\tan(\alpha+\frac{\pi}{2})\Rightarrow\tan\alpha=3-\cot\alpha\Rightarrow 3=\tan\alpha+\cot\alpha\Rightarrow\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}+\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}=3\Rightarrow\frac{1}{\sin\alpha\cos\alpha}=3$$

$$\Rightarrow\sin\alpha\cos\alpha=\frac{1}{3}$$

برای یافتن خواسته مسئله، ابتدا فرض کنید $A=\sin\alpha-\cos\alpha$؛ پس:

$$A^2=\sin^2\alpha+\cos^2\alpha-2\sin\alpha\cos\alpha=1-\frac{2}{3}=\frac{1}{3}$$

بنابراین $A=\pm\frac{\sqrt{3}}{3}$ و با توجه به اینکه $\sin\alpha<\cos\alpha$؛ در نتیجه A مقداری منفی است؛ یعنی $A=-\frac{\sqrt{3}}{3}$. اکنون خواستهٔ مسئله را با استفاده از مقدار A محاسبه می‌کنیم:

$$\sin^3\alpha-\cos^3\alpha=(\sin\alpha-\cos\alpha)(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha+\sin\alpha\cos\alpha)=-\frac{\sqrt{3}}{3}(1+\frac{1}{3})=-\frac{4}{9}\sqrt{3}$$

۱۱- پاسخ: گزینهٔ ۳ ▲ مشخصات سؤال: ساده * حسابان ۲ (فصل ۱، درس ۲)

خوبه اینو بدونی

- باقی‌ماندهٔ تقسیم چندجمله‌ای $f(x)$ بر دوجمله‌ای درجه اول $ax+b$ برابر است با $r=f(\frac{-b}{a})$.

جوابش اینه

خواستهٔ سؤال محاسبهٔ باقی‌ماندهٔ $x^2f(x+4)+f(1-2x)$ بر $x+1$ است؛ پس باید به جای x مقدار -1 را قرار دهیم:

$$r=(-1)^2f(-1+4)+f(1+2)=f(3)+f(3)=2f(3)$$

پس باقی‌مانده برابر $2f(3)$ است. حال کافی است با توجه به ضابطهٔ $f(x)$، این مقدار را به‌دست آوریم:

$$f(3)=\underbrace{3^{20}-9(3)^{18}}_{\text{صفر}}+\underbrace{3^{10}-3(3)^9}_{\text{صفر}}+27-18+1=10\Rightarrow r=2f(3)=20$$

۱۲- پاسخ: گزینهٔ ۱ ▲ مشخصات سؤال: ساده * حسابان ۲ (فصل ۱، درس ۲)

خوبه اینو بدونی

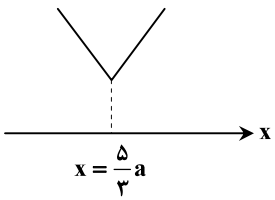
- تابع f را بر مجموعهٔ A یکنوا گوییم، هرگاه در این مجموعه، صعودی (نزولی) باشد.

جوابش اینه

ابتدا ریشهٔ عبارت داخل قدرمطلق را به‌دست می‌آوریم:

$$3x-5a=0\Rightarrow 3x=5a\Rightarrow x=\frac{5}{3}a$$

بنابراین نمودار تابع f شبیه شکل مقابل است:



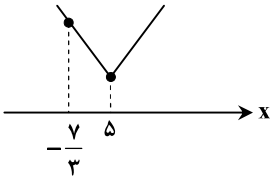
سنجش کلاد
www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshCloud

بدیهی است اگر $x=\frac{5}{3}a$ در بازهٔ $(-\frac{7}{3},5)$ باشد، تابع f غیریکنوا خواهد شد؛ یعنی:

$$-\frac{7}{3}<\frac{5}{3}a<5 \xrightarrow{\times\frac{3}{5}} -\frac{7}{5}<a<3$$

بنابراین در بین گزینه‌های داده‌شده به‌ازای $a=-1$ تابع f در بازهٔ موردنظر غیریکنوا است.

دقت کنید به‌ازای $a=3$ نمودار تابع در بازهٔ $\left[-\frac{7}{3},5\right]$ یکنوا است.



$$a=3 \Rightarrow f(x)=|3x-15|+1$$

۱۳- پاسخ: گزینهٔ ۲ ▲ مشخصات سؤال: ساده * حسابان ۲ (فصل ۲، درس ۱)

خوبه اینو بدونی

- توابع $y=a\sin bx+c$ و $y=a\cos bx+c$ دارای مقدار ماکزیمم $|a|+c$ و مقدار مینیمم $-|a|+c$ و دورهٔ تناوب $\frac{2\pi}{|b|}$ است.

جوابش اینه

با توجه به مقادیر ماکزیمم و مینیمم، داریم:

$$\begin{cases}\max=c+|a|=7\\ \min=c-|a|=-3\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}c=2\\ |a|=5 \Rightarrow a=\pm5\end{cases}$$

همچنین با توجه به مقدار دورهٔ تناوب، داریم:

$$T=\frac{2\pi}{\left|\frac{1}{b}\right|}=2|b|\pi=\frac{\pi}{2} \Rightarrow |b|=\frac{1}{4} \Rightarrow b=\pm\frac{1}{4}$$

با توجه به اعداد به‌دست‌آمده برای a و b، مقدار ab می‌تواند برابر $\frac{5}{4}$ یا $-\frac{5}{4}$ باشد. پس برای مقدار خواسته‌شده یعنی $c+ab$ دو مقدار $2+\frac{5}{4}$ و $2-\frac{5}{4}$ قابل‌قبول است که بیشترین آن برابر $2+\frac{5}{4}=3/25$ است.

۱۴- پاسخ: گزینهٔ ۲ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * حسابان ۲ (فصل ۲، درس ۱)

خوبه اینو بدونی

- تابع f را متناوب می‌نامیم هرگاه یک عدد حقیقی مثبت مانند T موجود باشد به‌طوری‌که برای هر $x\in D_f$ داشته باشیم $x\pm T\in D_f$ و $f(x\pm T)=f(x)$. کوچک‌ترین عدد مثبت T با این خاصیت را «دورهٔ تناوب» f می‌نامیم.

جوابش اینه

می‌دانیم اگر f متناوب با دورهٔ تناوب T باشد، آنگاه:

$$f(x)=f(x\pm T)=f(x\pm 2T)=f(x\pm 3T)=\cdots=f(x\pm nT)$$

ابتدا توجه کنید که:

$$f(125/5)=f(1/5+120)=f(1/5+\underbrace{30\times4}_{30T})=f(1/5)$$

حالا معادلهٔ خط گذرنده از نقاط $(1,2)$ و $(2,0)$ را می‌نویسیم و مقدار $f(1/5)$ را به‌دست می‌آوریم:

$$\begin{cases}(1,2)\\ (2,0)\end{cases} \Rightarrow \text{شیب}=\frac{2-0}{1-2}=-2 \xrightarrow{(2,0)} y=-2x+4 \Rightarrow f(1/5)=1$$

بنابراین مقدار خواسته‌شده برابر است با:

$$(fof)(12/5)=f(f(125/5))=f(f(1/5))=f(1)=2$$

سنجش کلاد
www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshCloud

۱۵- پاسخ: گزینهٔ ۱ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * حسابان ۲ (فصل ۲، درس ۱)

خوبه اینو بدونی

- توابع $y=a\sin bx+c$ و $y=a\cos bx+c$ دارای مقدار ماکزیمم $|a|+c$ و مقدار مینیمم $-|a|+c$ و دورهٔ تناوب $\frac{2\pi}{|b|}$ است.

جوابش اینه

با توجه به نمودار تابع، طول بازهٔ $[0,\pi]$ برابر $\frac{3}{2}T$ است (T دورهٔ تناوب تابع f است)؛ بنابراین:

$$\frac{3}{2}T=\pi \Rightarrow T=\frac{2\pi}{3} \Rightarrow \frac{2\pi}{\left|\frac{b}{a}\right|}=\frac{2\pi}{3} \Rightarrow \left|\frac{b}{a}\right|=3 \Rightarrow \frac{|b|}{|a|}=3 \Rightarrow |b|=3|a|$$

در $x=0$ تابع f نزولی است، پس $a\times\frac{b}{a}$ عددی منفی است و در نتیجه b کوچک‌تر از صفر است. از طرفی ماکزیمم تابع f برابر ۲ است:

$$\max=2 \Rightarrow -2+|a|=2 \Rightarrow |a|=4 \xrightarrow{|b|=3|a|} |b|=12 \xrightarrow{b<0} b=-12$$

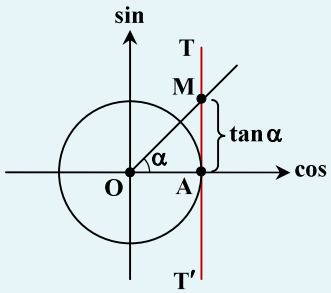
بنابراین دورهٔ تناوب تابع خواسته‌شده برابر است با:

$$T'=\frac{2\pi}{|b-2|}=\frac{2\pi}{14}=\frac{\pi}{7}$$

۱۶- پاسخ: گزینهٔ ۱ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * حسابان ۲ (فصل ۲، درس ۱)

خوبه اینو بدونی

- در دایرهٔ مثلثاتی خط TAT' را محور تانژانت‌ها می‌نامیم.
- مقدار تانژانت زاویهٔ α برابر طول پاره‌خط AM است.



جوابش اینه

با توجه به تعریف نسبت‌های مثلثاتی در دایره مثلثاتی، داریم: $a=\cos\theta\ ,\ c=\sin\theta\ ,\ b=\tan\theta$

بنابراین کسر $\frac{1-a}{b-c}$ برحسب نسبت‌های مثلثاتی زاویهٔ θ به‌صورت زیر است:

$$\frac{1-a}{b-c}=\frac{1-\cos\theta}{\tan\theta-\sin\theta}=\frac{1-\cos\theta}{\frac{\sin\theta}{\cos\theta}-\sin\theta}=\frac{\cos\theta(1-\cos\theta)}{\sin\theta-\sin\theta\cos\theta}=\frac{\cos\theta}{\sin\theta}=\cot\theta$$

بنابراین $\cot\theta=\frac{3}{4}$؛ پس با توجه به حاده بودن زاویهٔ θ، $\sin\theta=\frac{4}{5}$ و $\cos\theta=\frac{3}{5}$ و در نتیجه مقدار خواسته‌شده برابر است با:

$$a-c=\cos\theta-\sin\theta=-\frac{1}{5}$$

۱۷- پاسخ: گزینهٔ ۴ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * حسابان ۲ (فصل ۲، درس ۱)

خوبه اینو بدونی

- دامنهٔ تابع $y=\tan x$ مجموعهٔ $D=\left\{x\in\mathbb{R}\,|\,x\neq k\pi+\frac{\pi}{2}\ ,\ k\in\mathbb{Z}\right\}$ است و برد آن مجموعه اعداد حقیقی است. تابع $y=\tan x$، تابعی متناوب است و دورهٔ تناوب آن π است.

سنجش کلاد
www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshCloud

جوابش اینه

نقاط با طول $k\pi+\frac{\pi}{۲}$ در دامنهٔ تابع تانژانت وجود ندارند، پس برای یافتن مقادیر تعریف‌نشده تابع $y=۲-\tan(۳x-\frac{\pi}{۸})$، داریم:

$$۳x-\frac{\pi}{۸}=k\pi+\frac{\pi}{۲} \Rightarrow x=\frac{k\pi}{۳}+\frac{۵\pi}{۲۴} \Rightarrow x=(۸k+۵)\frac{\pi}{۲۴}$$

یعنی نمودار تابع داده‌شده، خطوط عمودی $x=(۸k+۵)\frac{\pi}{۲۴}$ را قطع نمی‌کند. به‌ازای $k=۰$ خط $x=\frac{۵\pi}{۲۴}$ به‌دست می‌آید.

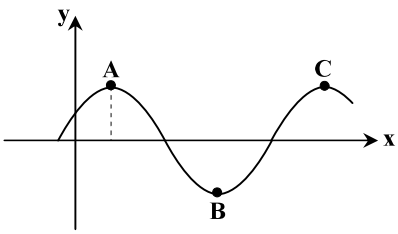
۱۸- پاسخ: گزینهٔ ۴ ▲ مشخصات سؤال: دشوار * حسابان ۲ (فصل ۲، درس ۱)

خوبه اینو بدونی

- توابع $y=a\sin bx+c$ و $y=a\cos bx+c$ دارای مقدار ماکزیمم $|a|+c$ و مقدار مینیمم $-|a|+c$ و دورهٔ تناوب $\frac{۲\pi}{|b|}$ است.

جوابش اینه

با توجه به ضابطهٔ تابع، دورهٔ تناوب تابع برابر $T=\frac{۲\pi}{۲\pi}=۱$ بوده و ماکزیمم و مینیمم آن برابر a و $-a$ است. مختصات نقاط A، B و C را محاسبه می‌کنیم. دقت کنید برای رسیدن به تابع f کافی است در تابع $y=\cos x$، هر نقطه را $\frac{\pi}{۳}$ به راست منتقل کرده و طول نقاط را بر ۲π تقسیم کنیم و در نهایت عرض نقاط را a برابر کنیم.



$$\begin{cases} x_A=\frac{۰+\frac{\pi}{۳}}{۲\pi}=\frac{۱}{۶} \Rightarrow A(\frac{۱}{۶},a) \\ x_B=\frac{\pi+\frac{\pi}{۳}}{۲\pi}=\frac{۴}{۶} \Rightarrow B(\frac{۴}{۶},-a) \\ x_C=\frac{۲\pi+\frac{\pi}{۳}}{۲\pi}=\frac{۷}{۶} \Rightarrow C(\frac{۷}{۶},a) \end{cases}$$

$$\Rightarrow m_{AB}\times m_{BC}=-۱ \Rightarrow \frac{-a-a}{\frac{۴}{۶}-\frac{۱}{۶}}\times\frac{a+a}{\frac{۷}{۶}-\frac{۴}{۶}}=-۱ \Rightarrow \frac{-۲a}{\frac{۳}{۶}}\times\frac{۲a}{\frac{۳}{۶}}=-۱ \Rightarrow ۴a^۲=\frac{۹}{۳۶} \Rightarrow a^۲=\frac{۱}{۱۶} \xrightarrow{a>۰} a=\frac{۱}{۴}$$

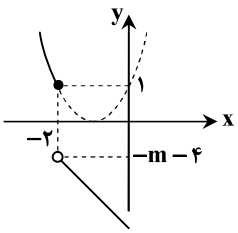
۱۹- پاسخ: گزینهٔ ۱ ▲ مشخصات سؤال: دشوار * حسابان ۲ (فصل ۱، درس ۲)

خوبه اینو بدونی

- تابع f را در یک مجموعه، اکیداً نزولی می‌گوییم، اگر برای هر دو مقدار a و b در این مجموعه که $a<b$، آنگاه: $f(a)>f(b)$
- در فاصله‌ای که یک تابع اکیداً نزولی است، با حرکت روی نمودار (از چپ به راست)، همواره روبه پایین خواهیم رفت.

جوابش اینه

نمودار هر دو ضابطه را رسم می‌کنیم. دو شرط برای ضابطهٔ دوم باید برقرار باشد. اولاً تابع خطی $y=mx+(m-۴)$ باید نزولی باشد، پس شیب آن باید منفی باشد. ثانیاً نقطهٔ شروع تابع خطی باید پایین‌تر یا مساوی نقطهٔ پایان سهمی باشد.



$$\begin{cases} m<۰ \\ -۴-m\le ۱ \end{cases} \Rightarrow -۵\le m<۰$$

پس m دارای پنج جواب صحیح شامل $-۱,-۲,-۳,-۴,-۵$ است.

سنجش کلاد
www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshCloud

۲۰- پاسخ: گزینهٔ ۳ ▲ مشخصات سؤال: دشوار * حسابان ۲ (فصل ۱، درس ۲)

خوبه اینو بدونی

- به‌ازای تمام اعداد طبیعی n، $x^n - a^n$ بر $x-a$ بخش‌پذیر است:

$$x^n - a^n = (x-a)(x^{n-1} + ax^{n-2} + a^2x^{n-3} + \cdots + a^{n-2}x + a^{n-1})$$

جوابش اینه

ابتدا سعی می‌کنیم با استفاده از اتحادها از عبارت $p(x)$ عامل $x-1$ را فاکتور بگیریم:

$$p(x) = x^9 - 1 + x^5 - 1 = (x-1)(x^8 + x^7 + \cdots + x + 1) + (x-1)(x^4 + x^3 + x^2 + x + 1)$$

$$= (x-1)(\underbrace{x^8 + x^7 + \cdots + x + 1 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1}_{f(x)})$$

برای یافتن باقی‌مانده تقسیم $p(x)$ بر $(x-1)^2$ پرانتز دوم را به‌صورت $f(x) = (x-1)g(x) + R$ فرض کنید.

$$f(x) = (x-1)g(x) + R \Rightarrow f(1) = R \Rightarrow R = 14$$

بنابراین ضابطهٔ $p(x)$ به‌صورت زیر درمی‌آید:

$$p(x) = (x-1)((x-1)g(x) + 14) = (x-1)^2 g(x) + 14x - 14$$

پس باقی‌مانده تقسیم $P(x)$ بر $(x-1)^2$ برابر $14x-14$ است.

۲۱- پاسخ: گزینهٔ ۲ ▲ مشخصات سؤال: ساده * هندسه ۱ (فصل ۳، درس ۲)

خوبه اینو بدونی

- مساحت چندضلعی شبکه‌ای با تعداد نقاط درونی i و تعداد نقاط مرزی b از رابطهٔ زیر به‌دست می‌آید. $S = \frac{b}{2} - 1 + i$

جوابش اینه

با استفاده از نکته، مساحت قسمت هاشور زده و مساحت چهارضلعی شبکه‌ای را می‌یابیم.

مساحت هاشورزده:

$$b = 6, i = 2 \Rightarrow S_1 = \frac{b}{2} + i - 1 = \frac{6}{2} + 2 - 1 = 4$$

مساحت چهارضلعی شبکه‌ای:

$$b = 8,\ i = 15 \Rightarrow S_2 = \frac{8}{2} + 15 - 1 = 18$$

خواستهٔ سؤال برابر است با:

$$\frac{S_1}{S_2} = \frac{4}{18} = \frac{2}{9}$$

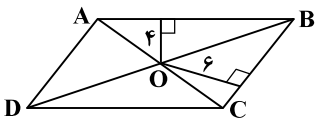
۲۲- پاسخ: گزینهٔ ۳ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * هندسه ۱ (فصل ۳، درس ۱)

خوبه اینو بدونی

- در متوازی‌الاضلاع هر دو زاویهٔ مجاور مکمل‌اند.
- در مثلث قائم‌الزاویه اگر یک زاویه 30° باشد، ضلع مقابل به آن، نصف وتر است.

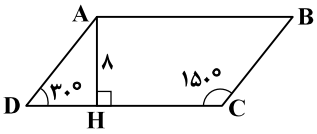
جوابش اینه

مطابق شکل روبه‌رو، فاصلهٔ مرکز تا هر ضلع، نصف یکی از ارتفاع‌های متوازی‌الاضلاع است، پس ارتفاع‌های متوازی‌الاضلاع، ۸ و ۱۲ هستند.



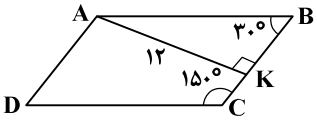
سنجش کلاد
www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshCloud

در مثلث ADH، ضلع روبه‌رو به زاویهٔ ۳۰° نصف وتر است:



$$AH = \frac{۱}{۲}AD \Rightarrow AD = ۲AH = ۲\times ۸ = ۱۶$$

در مثلث ABK، ضلع روبه‌رو به زاویهٔ ۳۰° نصف وتر است:



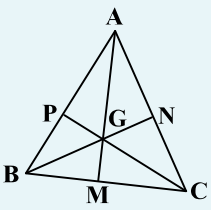
$$AK = \frac{۱}{۲}AB \Rightarrow AB = ۲AK = ۲\times ۱۲ = ۲۴$$

$$\text{محیط متوازی‌الاضلاع} = ۲(AD + AB) = ۲(۱۶ + ۲۴) = ۸۰$$

۲۳- پاسخ: گزینهٔ ۲ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * هندسه ۱ (فصل ۳، درس ۲)

خوبه اینو بدونی

- سه میانهٔ هر مثلث در یک نقطه درون آن مثلث همرس‌اند، به طوری که فاصلهٔ این نقطه تا وسط هر ضلع برابر $\frac{۱}{۳}$ اندازهٔ میانهٔ نظیر این ضلع است و فاصله‌اش تا هر رأس، $\frac{۲}{۳}$ اندازهٔ میانهٔ نظیر آن رأس است.

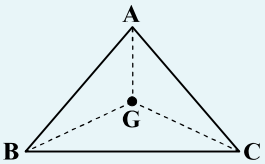


$$AG = ۲GM = \frac{۲}{۳}AM$$

$$GM = \frac{۱}{۲}AG = \frac{۱}{۳}AM$$

مشابه روابط فوق برای میانه‌های دیگر نیز برقرار است.

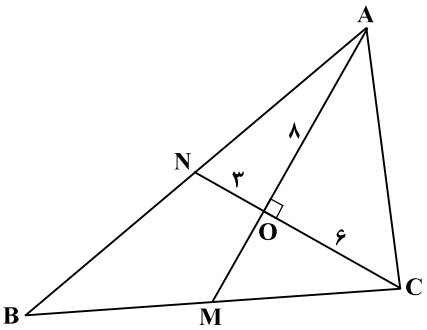
- اگر نقطهٔ همرسی میانه‌ها را به سه رأس مثلث وصل کنیم، سه مثلث هم‌مساحت به‌وجود می‌آید.



$$S_{AGB} = S_{BGC} = S_{AGC}$$

جوابش اینه

با توجه به نکته، در هر مثلث، میانه‌ها یکدیگر را به نسبت ۲ به ۱ تقسیم می‌کنند. در نتیجه:



$$AM = ۱۲ \Rightarrow AO = \frac{۲}{۳}AM = \frac{۲}{۳}\times ۱۲ = ۸$$

$$ON = ۳ \Rightarrow OC = ۲ON = ۲\times ۳ = ۶$$

با توجه به نکته، مساحت مثلث AOC، $\frac{۱}{۳}$ مساحت مثلث ABC است، پس داریم:

$$S_{ABC} = ۳S_{AOC} = ۳(\frac{۶\times ۸}{۲}) = ۷۲$$

۲۴- پاسخ: گزینهٔ ۳ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * هندسه ۱ (فصل ۳، درس ۱)

خوبه اینو بدونی

- در هر n ضلعی، تعداد قطرها $\frac{n(n-۳)}{۲}$ است.

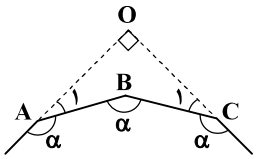
- مجموع زوایای داخلی هر n ضلعی محدب از رابطهٔ زیر به‌دست می‌آید.

$$(n-۲)\times ۱۸۰^\circ$$

سنجش کلاد
www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshCloud

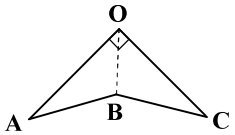
جوابش اینه

هر زاویهٔ داخلی یک n ضلعی منتظم برابر است با:



$$\hat{\alpha}=\frac{(n-2)}{n}\times 180^\circ$$
$$\hat{A}_1=\hat{C}_1=180^\circ-\alpha$$

در چهارضلعی مقعر OABC مطابق شکل زیر، مجموع زوایای داخلی برابر مجموع زوایای دو مثلث OAB و OBC است که برابر $2\times 180^\circ=360^\circ$ می‌باشد.

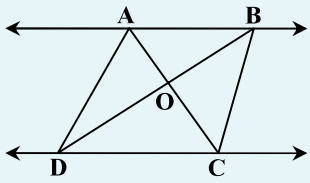


$$360^\circ=(180^\circ-\alpha)+(180^\circ-\alpha)+(360^\circ-\alpha)+90^\circ \Rightarrow 3\alpha=450^\circ \Rightarrow \hat{\alpha}=150^\circ$$
$$\hat{\alpha}=\frac{(n-2)}{n}\times 180^\circ \Rightarrow 150^\circ=(\frac{n-2}{n})180^\circ \Rightarrow 5=(\frac{n-2}{n})6 \Rightarrow 5n=6n-12 \Rightarrow n=12$$
$$\text{تعداد اقطار}=\frac{n(n-3)}{2}=\frac{12\times 9}{2}=54$$

۲۵- پاسخ: گزینهٔ ۴ ▲ **مشخصات سؤال: دشوار * هندسه ۱ (فصل ۳، درس ۲)**

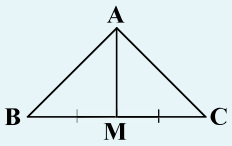
خوبه اینو بدونی

- اگر دو خط AB و CD موازی باشند، به طوری که دو خط AC و BD در نقطه‌ای مانند O متقاطع باشند. داریم:



$$S_{ADC}=S_{BDC} \text{ و } S_{OAD}=S_{OBC}$$

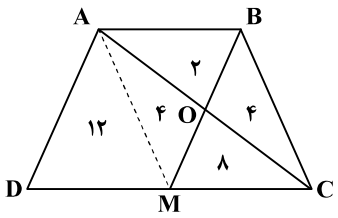
- یک میانه در هر مثلث، آن را به دو مثلث با مساحت‌های برابر تقسیم می‌کند.



$$AM \Rightarrow S_{\triangle ABM}=S_{\triangle ACM}=\frac{1}{2}S_{\triangle ABC}$$ میانه است.

جوابش اینه

با وصل کردن نقاط A و M به هم، ذوزنقهٔ ABCM ایجاد می‌شود. در این ذوزنقه طبق نکتهٔ بالا، داریم:



$$S_{BOC}=S_{AOM}=4$$

و همچنین در این ذوزنقه می‌توان نوشت:

$$\left.\begin{aligned}\frac{S_{ABO}}{S_{AOM}}&=\frac{OB}{OM}\\ \frac{S_{BOC}}{S_{MOC}}&=\frac{OB}{OM}\end{aligned}\right\}\Rightarrow \frac{S_{ABO}}{S_{AOM}}=\frac{S_{BOC}}{S_{MOC}}$$

$$\Rightarrow S_{ABO}\times S_{MOC}=S_{AOM}\times S_{BOC} \Rightarrow 2\times S_{MOC}=4\times 4 \Rightarrow S_{MOC}=8$$

از طرفی در مثلث ADC، میانهٔ AM آن را به دو مثلث هم مساحت تقسیم می‌کند، یعنی:

$$S_{ADM}=S_{AMC}=S_{AMO}+S_{MOC}=4+8=12$$

و مساحت ذوزنقهٔ ABCD برابر است با:

$$2+4+4+8+12=30$$

توجه کنید که در شکل بالا، مساحت هر قسمت را داخل آن نوشته‌ایم.

سنجش کلاد
www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshCloud

۲۶- پاسخ: گزینهٔ ۳ ▲ مشخصات سؤال: ساده * هندسه ۳ (فصل ۱، درس ۲)

خوبه اینو بدونی

- سه حالت زیر را برای دستگاه $\begin{cases} ax+by=c \\ a'x+b'y=c' \end{cases}$ می‌توان در نظر گرفت:

الف) اگر $\frac{a}{a'} \neq \frac{b}{b'}$، در این صورت دو خط متقاطع‌اند و دستگاه یک جواب یکتا دارد.

$$\begin{array}{l} ax+by=c \\ \hline a'x+b'y=c' \end{array}$$

ب) اگر $\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}$، در این صورت دو خط موازی‌اند و یکی از دو حالت زیر می‌تواند رخ دهد:

۱) $\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'} \neq \frac{c}{c'}$، در این حالت دو خط موازی‌اند و هیچ نقطهٔ اشتراکی ندارند، لذا دستگاه هیچ جوابی ندارد.

$$\begin{array}{l} ax+by=c \\ \hline a'x+b'y=c' \\ \hline \end{array}$$

۲) $\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}=\frac{c}{c'}$ در این حالت دو خط موازی‌اند و روی یکدیگر واقع‌اند یا به عبارتی هر دو معادله یک خط را نشان می‌دهند، لذا دستگاه تعداد بی‌شمار جواب دارد و هر نقطه‌ای که در یکی از معادلات صدق کند، در دیگری هم صدق می‌کند.

$$\begin{array}{l} ax+by=c \\ \hline a'x+b'y=c' \end{array}$$

جوابش اینه

با توجه به نکتهٔ بالا، شرط آنکه دستگاه معادلات بی‌شمار جواب داشته باشد به‌صورت زیر است:

$$\begin{cases} ۳x+Ky=۶ \\ (K-۱)x+۲y=۴ \end{cases} : \frac{۳}{K-۱}=\frac{K}{۲}=\frac{۶}{۴} \Rightarrow \begin{cases} \frac{۳}{K-۱}=\frac{۶}{۴} \Rightarrow \frac{۳}{K-۱}=\frac{۳}{۲} \Rightarrow K-۱=۲ \Rightarrow K=۳ \\ \frac{K}{۲}=\frac{۶}{۴} \Rightarrow \frac{K}{۲}=\frac{۳}{۲} \Rightarrow K=۳ \end{cases}$$

بنابراین به‌ازای $K=۳$ دستگاه بی‌شمار جواب دارد.

۲۷- پاسخ: گزینهٔ ۴ ▲ مشخصات سؤال: ساده * هندسه ۳ (فصل ۱، درس ۲)

خوبه اینو بدونی

- برای ماتریس وارون‌پذیر A داریم: $AA^{-۱}=A^{-۱}A=I$

جوابش اینه

طبق فرض سؤال، داریم:

$$A^{-۱}=A \xrightarrow{\times A} AA^{-۱}=A^{۲} \Rightarrow A^{۲}=I$$

$$A^{۲}=\begin{bmatrix} m & ۱ \\ -۱ & -m \end{bmatrix}\begin{bmatrix} m & ۱ \\ -۱ & -m \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} m^{۲}-۱ & ۰ \\ ۰ & m^{۲}-۱ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix}$$

$$m^{۲}-۱=۱ \Rightarrow m^{۲}=۲ \Rightarrow m=\pm\sqrt{۲}$$

۲۸- پاسخ: گزینهٔ ۴ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * هندسه ۳ (فصل ۱، درس ۲)

خوبه اینو بدونی

- برای هر ماتریس مربعی مانند A، وارون ماتریس A (در صورت وجود) ماتریسی است چون B به طوری که $A\times B=B\times A=I$. در این صورت B را وارون A می‌نامیم و با $A^{-۱}$ نشان می‌دهیم.

$$A\times B=B\times A=I \Rightarrow A^{-۱}=B$$

سنجش کلاد
www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshCloud

- اگر A و B دو ماتریس مربعی هم‌مرتبه و تعویض‌پذیر باشند، آنگاه اتحادها در مورد آن‌ها برقرار است. مانند:

$$(AB)^n = A^n \cdot B^n \qquad (A \pm B)^2 = A^2 \pm 2AB + B^2$$
$$(A+B)(A-B) = A^2 - B^2 \qquad (A \pm B)^3 = A^3 \pm 3A^2B + 3AB^2 \pm B^3$$

جوابش اینه

دو ماتریس A و $I+A$ وارون یکدیگرند، در نتیجه:

$$A(I+A) = I \Rightarrow A + A^2 = I \Rightarrow A^2 = I - A$$

ماتریس‌های A و I تعویض‌پذیرند، پس به کمک اتحادها عبارت $A^4 - I$ را ساده می‌کنیم:

$$A^4 - I = (A^2 - I)(A^2 + I) = (I - A - I)(I - A + I) = (-A)(2I - A) = -2A + A^2 = -2A + (I - A) = -3A + I$$

۲۹- پاسخ: گزینهٔ ۳ ▲ مشخصات سؤال: دشوار * هندسه ۳ (فصل ۱، درس ۲)

خوبه اینو بدونی

- اگر $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$، در این صورت وارون ماتریس A یعنی A^{-1} از تساوی زیر به‌دست می‌آید:

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \times \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

جوابش اینه

اگر $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ باشد، در این صورت $|A|A^{-1} = |A| \times \frac{1}{|A|}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$

بنابراین:

$$|A|A^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{cases} d = 3 \ , \ b = 1 \\ c = -2 \ , \ a = 1 \end{cases} \Rightarrow A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$$

حال وارون ماتریس A را محاسبه می‌کنیم:

$$A^{-1} = \frac{1}{3-(-2)}\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{5} & -\frac{1}{5} \\ \frac{2}{5} & \frac{1}{5} \end{bmatrix}$$

در رابطهٔ $AX = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -4 \end{bmatrix}$ با ضرب طرفین در A^{-1}، داریم:

$$AX = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -4 \end{bmatrix} \xrightarrow{\times A^{-1}} A^{-1} \cdot A \cdot X = A^{-1}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -4 \end{bmatrix} \Rightarrow X = \begin{bmatrix} \frac{3}{5} & -\frac{1}{5} \\ \frac{2}{5} & \frac{1}{5} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} * & \frac{4}{5} \\ \frac{4}{5} & * \end{bmatrix}$$

و تفاضل درایه‌های قطر فرعی ماتریس X برابر است با: $\frac{4}{5} - \frac{4}{5} = 0$

۳۰- پاسخ: گزینهٔ ۳ ▲ مشخصات سؤال: دشوار * هندسه ۳ (فصل ۱، درس ۲)

خوبه اینو بدونی

- اگر A یک ماتریس قطری باشد، برای محاسبهٔ A^n باید درایه‌های قطر اصلی آن را به توان n برسانیم.

$$A = \begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{bmatrix} \Rightarrow A^n = \begin{bmatrix} a^n & 0 & 0 \\ 0 & b^n & 0 \\ 0 & 0 & c^n \end{bmatrix}$$

- دترمینان ماتریس‌های قطری برابر با حاصل‌ضرب درایه‌های روی قطر اصلی است.

$$\begin{vmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{vmatrix} = abc$$

سنجش کلاد
www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshCloud

جوابش اینه

با استفاده از نکات بالا، داریم:

$$A=\begin{bmatrix}-۲ & ۰ & ۰\\ ۰ & -۱ & ۰\\ ۰ & ۰ & ۲\end{bmatrix}\Rightarrow A^{۴}=\begin{bmatrix}(-۲)^{۴} & ۰ & ۰\\ ۰ & (-۱)^{۴} & ۰\\ ۰ & ۰ & ۲^{۴}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۱۶ & ۰ & ۰\\ ۰ & ۱ & ۰\\ ۰ & ۰ & ۱۶\end{bmatrix},\ A^{۳}=\begin{bmatrix}(-۲)^{۳} & ۰ & ۰\\ ۰ & (-۱)^{۳} & ۰\\ ۰ & ۰ & ۲^{۳}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-۸ & ۰ & ۰\\ ۰ & -۱ & ۰\\ ۰ & ۰ & ۸\end{bmatrix}$$

$$A^{۴}-A^{۳}=\begin{bmatrix}۲۴ & ۰ & ۰\\ ۰ & ۲ & ۰\\ ۰ & ۰ & ۸\end{bmatrix}\Rightarrow \frac{۱}{۲}(A^{۴}-A^{۳})=\begin{bmatrix}۱۲ & ۰ & ۰\\ ۰ & ۱ & ۰\\ ۰ & ۰ & ۴\end{bmatrix}\Rightarrow \left|\frac{۱}{۲}(A^{۴}-A^{۳})\right|=۱۲\times۱\times۴=۴۸$$

$$B^{۲}=\begin{bmatrix}۰ & ۰ & ۲\\ ۰ & ۱ & ۰\\ ۲ & ۰ & ۰\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۰ & ۰ & ۲\\ ۰ & ۱ & ۰\\ ۲ & ۰ & ۰\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۴ & ۰ & ۰\\ ۰ & ۱ & ۰\\ ۰ & ۰ & ۴\end{bmatrix}\Rightarrow |B^{۲}|=۴\times۱\times۴=۱۶$$

خواستهٔ سؤال برابر است با: $۴۸+۱۶=۶۴$

۳۱- پاسخ: گزینهٔ ۲ ▲ مشخصات سؤال: ساده * ریاضیات گسسته (فصل ۱، درس ۳)

خوبه اینو بدونی

– مسائل تقویمی: اگر یک روز از تقویم در یک سال معلوم باشد و بخواهیم چندشنبه بودن روز دیگری که از نظر تاریخ، بعد از روز داده‌شده قرار گرفته (آینده) مشخص کنیم. باید اختلاف روزها را به دست آوریم و سپس اختلاف را در پیمانهٔ ۷ کوچک کنیم، یعنی باقی‌ماندهٔ آن را بر ۷ بیابیم و در انتها به‌اندازهٔ باقی‌مانده با شروع از روز معلوم پیش می‌رویم تا به جواب برسیم.

جوابش اینه

تعداد روزها از ۱۵ اردیبهشت تا ۲۰ آذر را محاسبه می‌کنیم.

$$۱۶+۴\times۳۱+۲\times۳۰+۲۰=۱۶+۱۲۴+۶۰+۲۰=۲۲۰$$

حال باقی‌ماندهٔ ۲۲۰ بر ۷ را می‌یابیم.

$$۲۲۰\overset{۷}{\equiv}۲۲۰-۳۰\times۷\overset{۷}{\equiv}۲۲۰-۲۱۰\overset{۷}{\equiv}۱۰\Rightarrow ۲۲۰\overset{۷}{\equiv}۱۰-۷\overset{۷}{\equiv}۳$$

اگر از دوشنبه ۳ روز جلو برویم به پنج‌شنبه می‌رسیم.

۳۲- پاسخ: گزینهٔ ۲ ▲ مشخصات سؤال: ساده * ریاضیات گسسته (فصل ۱، درس ۲)

خوبه اینو بدونی

– عدد طبیعی d را ب.م.م دو عدد صحیح a و b می‌نامیم (a و b هر دو با هم صفر نیستند) و می‌نویسیم $(a,b)=d$، هرگاه دو شرط «الف» و «ب» برقرار باشد.

الف) $d\mid a, d\mid b$

ب) $\forall m>۰; m\mid a, m\mid b \Rightarrow m\le d$

جوابش اینه

با توجه به تعریف ب.م.م، داریم: $(۵n,۸۱)=n \Rightarrow n\mid ۸۱ \Rightarrow n\mid ۳^{۴}$

چون ب.م.م برابر n است، پس n عدد طبیعی است و طبق رابطهٔ بالا، n مقسوم‌علیه‌های طبیعی $۳^{۴}$ است و داریم:

$$n=۱,۳,۳^{۲},۳^{۳},۳^{۴}$$

$$n=۱ \Rightarrow (۵\times۱,۸۱)=۱$$

$$n=۳ \Rightarrow (۵\times۳,۸۱)=۳$$

$$n=۳^{۲} \Rightarrow (۵\times۳^{۲},۸۱)=۳^{۲}$$

$$n=۳^{۳} \Rightarrow (۵\times۳^{۳},۸۱)=۳^{۳}$$

$$n=۳^{۴} \Rightarrow (۵\times۳^{۴},۸۱)=۳^{۴}$$

بنابراین برای n، پنج مقدار وجود دارد.

سنجش کلاد
www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshCloud

۳۳- پاسخ: گزینهٔ ۳ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * ریاضیات گسسته (فصل ۱، درس ۲)

خوبه اینو بدونی

- اگر عدد a، عدد b را بشمارد، آنگاه هر مضرب صحیحِ عدد b را نیز می‌شمارد؛ یعنی:

$$\boxed{a|b \Rightarrow a|mb}$$

- $\forall a,b,c\in\mathbb{Z}; ab|c \Rightarrow a|c \wedge b|c$
- $a|b \Leftrightarrow a^n|b^n \ ,(n\in\mathbb{N})$
- $a|b \Rightarrow na|nb$

جوابش اینه

با استفاده از خواص عاد کردن داریم:

$$۳a^۳|b^۲ \Rightarrow a^۳|b^۲ \Rightarrow a^۳|b^۲\times b \Rightarrow a^۳|b^۳ \Rightarrow a|b$$

حال از رابطهٔ بالا می‌توان نتایج زیر را به‌دست آورد.

گزینهٔ ۱: $a|b \Rightarrow a|۴b$

گزینهٔ ۲: $a|b \Rightarrow a^۲|b^۲ \Rightarrow a^۲|b^۲\times b \Rightarrow a^۲|b^۳$

برای اثبات درستی گزینهٔ ۴ داریم:

$$۳a^۳|b^۲ \Rightarrow a^۲(۳a)|b^۲ \Rightarrow ۳a|b^۲ \xrightarrow{\times ۲b} ۲b\times ۳a|۲b\times b^۲ \Rightarrow ۶ab|۲b^۳$$

برای رد کردن گزینهٔ ۳ مثال نقض زیر را در نظر بگیرید.

$$a=۲^۲, b=۳\times ۲^۳ \Rightarrow ۳a^۳|b^۲ \Rightarrow ۳\times ۲^۶|۳^۲\times ۲^۶$$
$$a^۵=۲^{۱۰}, b^۳=۳^۳\times ۲^۹ \Rightarrow ۲^{۱۰}\not| ۳^۳\times ۲^۹ \Rightarrow a^۵\not| b^۳$$

۳۴- پاسخ: گزینهٔ ۲ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * ریاضیات گسسته (فصل ۱، درس ۲)

خوبه اینو بدونی

- اگر عدد a عدد b را بشمارد، آنگاه هر مضرب صحیحِ عدد b را نیز می‌شمارد؛ یعنی:

$$\boxed{a|b \Rightarrow a|mb}$$

- هرگاه عددی دو عدد را بشمارد، آنگاه مجموع و تفاضل آن دو عدد را نیز می‌شمارد.

$$\boxed{a|b \wedge a|c \Rightarrow a|b\pm c}$$

- به $mb+nc$ وقتی m و n اعداد دلخواهی هستند، ترکیب خطی b و c می‌گویند. اگر a دو عدد b و c را عاد کند، آنگاه a هر ترکیب خطی b و c را هم عاد می‌کند.

$$\left.\begin{matrix}a|b\\ a|c\end{matrix}\right\} \Rightarrow a|mb+nc$$

جوابش اینه

با استفاده از خواص عاد کردن، در سمت راست، متغیر n را حذف می‌کنیم.

$$a|n-۳ \Rightarrow a|(n-۳)(n+۳) \Rightarrow a|n^۲-۹$$
$$\left.\begin{matrix}a|n^۲-۹\\ a|n^۲+۴n\end{matrix}\right\} \Rightarrow a|n^۲+۴n-(n^۲-۹) \Rightarrow a|n^۲+۴n-n^۲+۹ \Rightarrow a|۴n+۹$$

حال با استفاده از روابط $a|۴n+۹$ و $a|n-۳$ داریم:

$$\left.\begin{matrix}a|۴n+۹\\ a|n-۳\end{matrix}\right\} \Rightarrow a|(۴n+۹)-۴(n-۳) \Rightarrow a|۴n+۹-۴n+۱۲ \Rightarrow a|۲۱$$

بنابراین a، مقسوم‌علیه‌های طبیعی عدد ۲۱ است، پس:

$$a=۱,۳,۷,۲۱$$

برای a، ۴ مقدار متمایز طبیعی وجود دارد.

سنجش کلاد
www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshCloud

اینجوری هم میشه

ریشهٔ $n-۳=۰$ را یافته و در رابطهٔ $a \mid n^۲+۴n$ قرار می‌دهیم. $n-۳=۰ \Rightarrow n=۳ \Rightarrow a \mid ۹+۴\times ۳ \Rightarrow a \mid ۲۱$

ادامهٔ حل مانند روش قبل است.

۳۵- پاسخ: گزینهٔ ۱ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * ریاضیات گسسته (فصل ۱، درس ۲)

خوبه اینو بدونی

- قضیهٔ تقسیم: اگر a عددی صحیح و b عددی طبیعی باشد در این صورت، اعدادی صحیح و منحصربه‌فرد مانند q و r یافت می‌شوند به‌قسمی که $a=bq+r$ و $۰ \le r < b$.

جوابش اینه

طبق نکتهٔ فوق و فرض سؤال، داریم:

$$\left.\begin{array}{l} a=bq+۱۳, ۱۳<b \\ ۵a=bq'+۲۷, ۲۷<b \end{array}\right\} \Rightarrow ۲۷<b$$

طرفین رابطهٔ $a=bq+۱۳$ را در ۵ ضرب کرده و داریم:

$$\left.\begin{array}{l} ۵a=۵bq+۶۵ \\ ۵a=bq'+۲۷ \end{array}\right\} \xrightarrow{\text{از هم کم می‌کنیم}} ۵bq+۶۵-bq'-۲۷=۰ \Rightarrow bq'-۵bq=۶۵-۲۷ \Rightarrow b(q'-۵q)=۳۸ \Rightarrow b \mid ۳۸$$

b مقسوم‌علیه‌های طبیعی ۳۸ است، پس: $b=۱, ۲, ۱۹, ۳۸$

چون $b>۲۷$، پس $b=۳۸$ است و مجموع ارقام آن برابر است با: $۳+۸=۱۱$

۳۶- پاسخ: گزینهٔ ۴ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * ریاضیات گسسته (فصل ۱، درس ۳)

خوبه اینو بدونی

- می‌توان به دو طرف یا یک طرفِ یک رابطهٔ هم‌نهشتی هر مضربی از پیمانه را اضافه یا از آن کم کرد.

$$a \overset{m}{\equiv} b \Rightarrow \begin{cases} a+mt \overset{m}{\equiv} b+mk \\ a-mt \overset{m}{\equiv} b-mk \end{cases}$$

- دو طرف یک رابطهٔ هم‌نهشتی را می‌توان به توان n رساند. $(n \in \mathbb{N})$

$$a \overset{m}{\equiv} b \Rightarrow a^n \overset{m}{\equiv} b^n$$

جوابش اینه

با استفاده از خواص هم‌نهشتی، داریم:

$$۲۷ \overset{۱۳}{\equiv} ۲۷ \Rightarrow ۲۷ \overset{۱۳}{\equiv} ۲۷-۲\times ۱۳ \Rightarrow ۲۷ \overset{۱۳}{\equiv} ۱ \Rightarrow (۲۷)^{۳۴} \overset{۱۳}{\equiv} ۱$$

$$۱۲ \overset{۱۳}{\equiv} ۱۲ \Rightarrow ۱۲ \overset{۱۳}{\equiv} ۱۲-۱۳ \overset{۱۳}{\equiv} -۱ \Rightarrow (۱۲)^{۱۳} \overset{۱۳}{\equiv} (-۱)^{۱۳} \Rightarrow (۱۲)^{۱۳} \overset{۱۳}{\equiv} -۱$$

خواستهٔ سؤال برابر است با:

$$A=(۲۷)^{۳۴}-(۱۲)^{۱۳}-۷ \overset{۱۳}{\equiv} ۱-(-۱)-۷ \overset{۱۳}{\equiv} -۵ \overset{۱۳}{\equiv} -۵+۱۳ \overset{۱۳}{\equiv} ۸$$

۳۷- پاسخ: گزینهٔ ۳ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * ریاضیات گسسته (فصل ۱، درس ۳)

خوبه اینو بدونی

- می‌توان به دو طرف یا یک طرفِ یک رابطهٔ هم‌نهشتی هر مضربی از پیمانه را اضافه یا از آن کم کرد.

$$a \overset{m}{\equiv} b \Rightarrow \begin{cases} a+mt \overset{m}{\equiv} b+mk \\ a-mt \overset{m}{\equiv} b-mk \end{cases}$$

سنجش کلاد
www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshCloud

- اگر بخواهیم دو طرف یک رابطهٔ هم‌نهشتی را بر عددی تقسیم کنیم، باید پیمانهٔ آن هم‌نهشتی را بر ب.م.م آن عدد و پیمانه تقسیم کنیم.

$$ac \overset{m}{\equiv} bc, (c,m)=d \Rightarrow a \overset{\frac{m}{d}}{\equiv} b$$

- مجموعهٔ اعدادی را که باقی‌ماندهٔ تقسیم آن‌ها بر عدد m، مساوی عدد r باشد، با نماد $[r]_m$ نمایش می‌دهیم و به آن کلاس هم‌نهشتی r به پیمانهٔ m می‌گوییم.

$$[r]_m = \left\{ x \in \mathbb{Z} \mid x \overset{m}{\equiv} r \right\} = \{ x \in \mathbb{Z} \mid x = mk + r \}$$

جوابش اینه

می‌دانیم هر مضربی از پیمانه با عدد صفر هم‌نهشت است، پس داریم:

$$۱۷a + \underbrace{۲۰b}_{\text{مضرب ۵}} \overset{۵}{\equiv} ۳۱ \Rightarrow ۱۷a + ۰ \overset{۵}{\equiv} ۳۱ \Rightarrow ۱۷a \overset{۵}{\equiv} ۳۱$$

حال با استفاده از خواص هم‌نهشتی، داریم:

$$۱۷a - ۳a \times ۵ \overset{۵}{\equiv} ۳۱ - ۵ \times ۶ \Rightarrow ۲a \overset{۵}{\equiv} ۱ \Rightarrow ۲a \overset{۵}{\equiv} ۱ + ۵ \Rightarrow ۲a \overset{۵}{\equiv} ۶ \xrightarrow[(۲,۵)=۱]{\div ۲} a \overset{۵}{\equiv} ۳$$

پس باقی‌ماندهٔ a بر ۵ برابر ۳ است و $a \in [۳]_۵$

۳۸- پاسخ: گزینهٔ ۱ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * ریاضیات گسسته (فصل ۱، درس‌های ۲ و ۳)

خوبه اینو بدونی

- مربع هر عدد فرد به‌صورت $۸k+۱$ است، یعنی باقی‌ماندهٔ تقسیم مربع هر عدد فرد بر ۸ برابر یک است.

$$a \text{ فرد} \Rightarrow a^۲ = ۸k + ۱$$

- اگر باقی‌ماندهٔ تقسیم عدد صحیح a بر عدد طبیعی b برابر r باشد، داریم: $۰ \le r < b \ , \ a \overset{b}{\equiv} r$

- دو طرف یک رابطهٔ هم‌نهشتی را می‌توان به توان n رساند. $(n \in \mathbb{N})$

$$a \overset{m}{\equiv} b \Rightarrow a^n \overset{m}{\equiv} b^n$$

- می‌توان به دو طرف یا یک طرفِ یک رابطهٔ هم‌نهشتی هر مضربی از پیمانه را اضافه یا از آن کم کرد.

$$a \overset{m}{\equiv} b \Rightarrow \begin{cases} a + mt \overset{m}{\equiv} b + mk \\ a - mt \overset{m}{\equiv} b - mk \end{cases}$$

جوابش اینه

عدد $!۱۳$ عددی زوج است؛ زیرا حداقل یک عامل ۲ دارد. a عددی فرد است، پس $!۱۳ + a$ عددی فرد است. از طرفی عدد فرد $!۱۳ + a$ بر b بخش‌پذیر است، $(b \mid !۱۳ + a)$ پس b نیز فرد است. حال طبق نکات بالا، داریم:

$$a \text{ فرد است} \Rightarrow a^۲ = ۸q + ۱ \Rightarrow a^۲ \overset{۸}{\equiv} ۱ \xrightarrow{\text{توان } ۷} (a^۲)^۷ \overset{۸}{\equiv} ۱^۷ \Rightarrow a^{۱۴} \overset{۸}{\equiv} ۱$$

$$b \text{ فرد است} \Rightarrow b^۲ = ۸q' + ۱ \Rightarrow b^۲ \overset{۸}{\equiv} ۱ \xrightarrow{\text{توان } ۱۱} (b^۲)^{۱۱} \overset{۸}{\equiv} ۱^{۱۱} \Rightarrow b^{۲۲} \overset{۸}{\equiv} ۱$$

خواستهٔ سؤال برابر است با: $۲a^{۱۴} - b^{۲۲} - ۴ \overset{۸}{\equiv} ۲ \times ۱ - ۱ - ۴ \overset{۸}{\equiv} -۳ \overset{۸}{\equiv} -۳ + ۸ \overset{۸}{\equiv} ۵$

باقی‌مانده برابر ۵ است.

۳۹- پاسخ: گزینهٔ ۴ ▲ مشخصات سؤال: دشوار * ریاضیات گسسته (فصل ۱، درس ۲)

خوبه اینو بدونی

- اگر دو عدد صحیح نسبت به هم اول باشند، ک.م.م آن‌ها برابر با قدرمطلق حاصل‌ضرب دو عدد است و برعکس.

$$(a,b) = ۱ \Leftrightarrow [a,b] = |ab|$$

سنجش کلاد
www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshCloud

جوابش اینه

از فرض سؤال، داریم:

$$[۱۳, n-۳] = ۱۳n - ۳۹ = ۱۳(n-۳)$$

چون ک.م.م ۱۳ و $n-۳$ برابر با حاصل‌ضرب آن‌ها است؛ پس نسبت به هم اول هستند؛ یعنی: $(n-۳, ۱۳) = ۱$ در نتیجه $n-۳$ عامل ۱۳ ندارد.

حال از روش متمم استفاده می‌کنیم، اگر $n-۳$ عامل ۱۳ داشته باشد، یعنی بر ۱۳ بخش‌پذیر باشد، داریم:

$$n-۳ = ۱۳k \Rightarrow n = ۱۳k+۳$$

اعداد دورقمی n را به‌دست آوریم.

$$۱۰ \le ۱۳k+۳ \le ۹۹ \Rightarrow ۷ \le ۱۳k \le ۹۶ \Rightarrow \frac{۷}{۱۳} \le k \le \frac{۹۶}{۱۳} \Rightarrow k = ۱,۲,\dots,۷ \Rightarrow \text{تعداد} = ۷$$

تعداد اعداد دورقمی n که به‌ازای آن‌ها ۱۳ و $n-۳$ نسبت به هم اول هستند برابر است با: $۹۰ - ۷ = ۸۳$

۴۰- پاسخ: گزینهٔ ۲ ▲ **مشخصات سؤال: دشوار * ریاضیات گسسته (فصل ۱، درس ۳)**

خوبه اینو بدونی

- باقی‌ماندهٔ تقسیم هر عدد بر ۳ یا ۹ برابر است با باقی‌ماندهٔ تقسیم مجموع ارقام آن عدد بر ۳ یا ۹؛ یعنی:

$$\overline{a_n a_{n-۱} \cdots a_۲ a_۱ a_۰} \overset{۳\text{ یا }۹}{\equiv} a_n + a_{n-۱} + \cdots + a_۲ + a_۱ + a_۰$$

- برای پیداکردن باقی‌ماندهٔ تقسیم هر عدد بر ۱۱ کافی است ارقام آن عدد را از سمت راست یکی‌درمیان مثبت و منفی بنویسیم و با هم جمع کنیم، سپس باقی‌ماندهٔ عدد به‌دست‌آمده را در پیمانهٔ ۱۱ محاسبه کنیم.

$$\overline{a_n a_{n-۱} \cdots a_۲ a_۱ a_۰} \overset{۱۱}{\equiv} a_۰ - a_۱ + a_۲ - \cdots + (-۱)^n a_n$$

- باقی‌ماندهٔ تقسیم هر عدد بر ۴ برابر با باقی‌ماندهٔ تقسیم عدد دورقمی حاصل از دو رقم سمت راست آن عدد است، یعنی:

$$\overline{a_n a_{n-۱} \cdots a_۲ a_۱ a_۰} \overset{۴}{\equiv} \overline{a_۱ a_۰}$$

جوابش اینه

چون عدد ۵ رقمی $N = \overline{a۳۷b۶}$ بر ۱۲ بخش‌پذیر است، پس بر ۴ و ۳ نیز بخش‌پذیر است و طبق نکات فوق داریم:

$$\overline{a۳۷b۶} \overset{۴}{\equiv} ۰ \Rightarrow \overline{b۶} \overset{۴}{\equiv} ۰ \Rightarrow ۱۰b+۶ \overset{۴}{\equiv} ۰ \Rightarrow ۱۰b \overset{۴}{\equiv} -۶ \Rightarrow (۱۰-۲\times۴)b \overset{۴}{\equiv} -۶+۲\times۴ \Rightarrow ۲b \overset{۴}{\equiv} ۲$$

$$\xrightarrow[(۲,۴)=۲]{\div ۲} b \overset{۲}{\equiv} ۱ \Rightarrow b = ۲k+۱ \xrightarrow{b\text{ رقم است}} b = ۱,۳,۵,۷,۹$$

$$\overline{a۳۷b۶} \overset{۳}{\equiv} ۰ \Rightarrow a+۳+۷+b+۶ \overset{۳}{\equiv} ۰ \Rightarrow a+b \overset{۳}{\equiv} -۱۶ \Rightarrow a+b \overset{۳}{\equiv} -۱۶+۳\times۶ \Rightarrow a+b \overset{۳}{\equiv} ۲$$

برحسب مقادیر مختلف b، داریم:

$$b=۱ \Rightarrow a+۱ \overset{۳}{\equiv} ۲ \Rightarrow a \overset{۳}{\equiv} ۱ \Rightarrow a = ۳q+۱ \Rightarrow a = ۱,۴,۷$$

$$b=۳ \Rightarrow a+۳ \overset{۳}{\equiv} ۲ \Rightarrow a \overset{۳}{\equiv} ۲ \Rightarrow a = ۳q+۲ \Rightarrow a = ۲,۵,۸$$

$$b=۵ \Rightarrow a+۵ \overset{۳}{\equiv} ۲ \Rightarrow a \overset{۳}{\equiv} -۳ \overset{۳}{\equiv} ۰ \Rightarrow a = ۳q \Rightarrow a = ۰,۳,۶,۹$$

$$b=۷ \Rightarrow a+۷ \overset{۳}{\equiv} ۲ \Rightarrow a \overset{۳}{\equiv} -۵+۲\times۳ \overset{۳}{\equiv} ۱ \Rightarrow a \overset{۳}{\equiv} ۱ \Rightarrow a = ۳q+۱ \Rightarrow a = ۱,۴,۷$$

$$b=۹ \Rightarrow a+۹ \overset{۳}{\equiv} ۲ \Rightarrow a \overset{۳}{\equiv} ۲ \Rightarrow a = ۳q+۲ \Rightarrow a = ۲,۵,۸$$

بزرگ‌ترین عدد $\overline{۵ab۹}$ به‌ازای $a=۹$ و $b=۵$ به‌دست می‌آید و خواستهٔ سؤال برابر است با:

$$۵۹۵۹ \overset{۱۱}{\equiv} ۹-۵+۹-۵ \overset{۱۱}{\equiv} ۸$$

سنجش کلاد
www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshCloud

فیـــزیک

۴۱- پاسخ: گزینهٔ ۳ ▲ مشخصات سؤال: ساده * فیزیک ۱ (فصل ۵)

جوابش اینه

$Q = +۴۰۰\,J$

$W = -۵۰۰\,J$

طبق قانون اول ترمودینامیک داریم: $\Delta U = W + Q \Rightarrow \Delta U = ۴۰۰ + (-۵۰۰) = -۱۰۰\,J$

۴۲- پاسخ: گزینهٔ ۳ ▲ مشخصات سؤال: ساده * فیزیک ۱ (فصل ۵)

جوابش اینه

انرژی درونی گاز آرمانی فقط به دمای گاز بستگی دارد؛ بنابراین با توجه به اینکه دمای اولیه و نهایی در همهٔ فرایندها یکی است، تغییر انرژی درونی گاز در هر سه فرایند برابر است.

۴۳- پاسخ: گزینهٔ ۱ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * فیزیک ۱ (فصل ۵)

جوابش اینه

الف) در فرایند هم‌حجم کار صفر است و بین گاز و محیط فقط گرما مبادله می‌شود؛ به‌طوری که با توجه به رابطهٔ $PV = nRT$ حجم ثابت است. برای افزایش فشار باید دمای گاز بالا رود، به این ترتیب به گاز گرما داده می‌شود و گرما مثبت است $(Q > ۰)$.

ب) با توجه به توضیح قسمت «الف»، برای کاهش فشار در فرایند هم‌حجم باید دما کاهش یابد و باید از گاز گرما بگیریم. از این رو گرما منفی است $(Q < ۰)$.

پ) در فرایند هم‌دما، دما ثابت است و تغییر انرژی درونی گاز که تابع دما است، صفر است و کار و گرما قرینهٔ هم‌اند. در تراکم هم‌دما، کار مثبت و گرما منفی است $(Q < ۰)$.

ت) در انبساط هم‌دما با توجه به توضیحات قسمت «ب»، کار منفی و گرما مثبت است $(Q > ۰)$.

ث) در تراکم هم‌فشار دما کاهش می‌یابد و انرژی درونی منفی است. از طرفی کار مثبت است، پس گرما منفی است $(Q < ۰)$.

ج) در انبساط هم‌فشار دما افزایش می‌یابد و انرژی درونی مثبت است. از طرفی کار منفی است، پس گرما مثبت است $(Q > ۰)$.

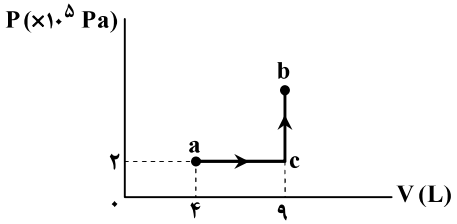
۴۴- پاسخ: گزینهٔ ۱ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * فیزیک ۱ (فصل ۵)

خوبه اینو بدونی

- کار فرایند هم‌حجم صفر است: $W_{\text{هم‌حجم}} = ۰$

جوابش اینه

فرایند ac هم‌فشار است و کار آن برابر است با:



$W_{\text{هم‌فشار}} = -P\Delta V \Rightarrow W = -۲\times۱۰^{۵}\times(۹-۴)\times۱۰^{-۳} = -۱۰۰۰\,J$

$Q_{\text{هم‌فشار}} = ۲/۵|W| \Rightarrow Q = ۲/۵\times۱۰۰۰ = ۲۵۰۰\,J$

$\Delta U_{ab} = \Delta U_{\text{هم‌فشار}} + \Delta U_{\text{هم‌حجم}}$

$\Rightarrow ۵۵۵۰ = -۱۰۰۰ + ۲۵۰۰ + ۰ + Q_{\text{هم‌حجم}} \Rightarrow Q_{\text{هم‌حجم}} = +۴۰۵۰\,J$

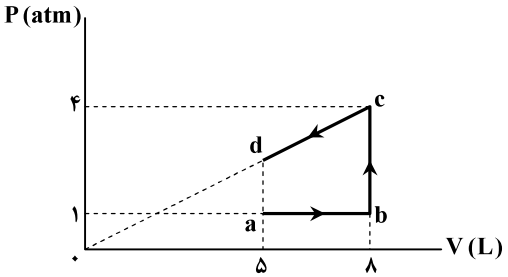
۴۵- پاسخ: گزینهٔ ۳ ▲ مشخصات سؤال: ساده * فیزیک ۱ (فصل ۵)

جوابش اینه

$P = \frac{nR}{V}T \Rightarrow \frac{nR}{V} = \frac{P}{T} \Rightarrow ۷۵۰ = \frac{۳۰۰\times۱۰^{۳}}{T_۱} \Rightarrow T_۱ = ۴۰۰\,K$

سنجش کلاد
www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshCloud

۴۶- پاسخ: گزینهٔ ۲ ▲ مشخصات سؤال: دشوار * فیزیک ۱ (فصل ۵)



فرایند ab هم‌فشار است؛ بنابراین داریم:

$$\frac{T_b}{T_a}=\frac{V_b}{V_a} \Rightarrow \frac{T_b}{T_a}=\frac{۸}{۵} \quad \text{رابطهٔ (۱)}$$

فرایند bc هم‌حجم است؛ بنابراین داریم:

$$\frac{T_c}{T_b}=\frac{P_c}{P_b} \Rightarrow \frac{T_c}{T_b}=\frac{۴}{۱} \quad \text{رابطهٔ (۲)}$$

فرایند cd به‌صورت یک خط شیب‌دار از مبدأ می‌گذرد؛ بنابراین فشار و حجم به یک نسبت تغییر می‌کنند $(P=mV)$. از این رو چون حجم گاز $\frac{۵}{۸}$ برابر شده؛ پس فشار گاز هم $\frac{۵}{۸}$ برابر شده و با توجه به رابطهٔ $PV=nRT$، دمای گاز $(\frac{۵}{۸})^۲$ برابر شده است؛ بنابراین داریم:

$$\frac{T_d}{T_c}=(\frac{۵}{۸})^۲ \quad \text{رابطهٔ (۳)}$$

با استفاده از روابط (۱)، (۲) و (۳) می‌توان نوشت:

$$\frac{T_d}{T_a}=\frac{T_d}{T_c}\times\frac{T_c}{T_b}\times\frac{T_b}{T_a}=(\frac{۵}{۸})^۲\times۴\times\frac{۸}{۵} \Rightarrow \frac{T_d}{T_a}=۲/۵$$

۴۷- پاسخ: گزینهٔ ۲ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * فیزیک ۱ (فصل ۵)

کار در فرایند هم‌حجم صفر است، از این رو تغییر انرژی درونی گاز با گرمای داده‌شده به آن برابر است. $\Delta U_{\text{هم‌حجم}}=Q$

در فرایند هم‌فشار وقتی به گاز گرما داده می‌شود، گاز مقداری کار روی محیط انجام می‌دهد. از این رو تغییر انرژی درونی گاز کمتر از گرمای داده‌شده خواهد بود.

$$\Delta U_{\text{هم‌فشار}}=Q+W \xrightarrow{W<۰} \Delta U_{\text{هم‌فشار}}<Q$$

۴۸- پاسخ: گزینهٔ ۴ ▲ مشخصات سؤال: ساده * فیزیک ۱ (فصل ۵)

برای آنکه گاز، کار روی محیط انجام بدهد، باید افزایش حجم یابد یعنی منبسط شود. پس در انبساط کار منفی است و گاز روی محیط کار انجام می‌دهد. در فرایند بی‌دررو گرما مبادله نمی‌شود، پس کار با تغییر انرژی درونی برابر است. به این ترتیب در انبساط بی‌دررو کاری که گاز روی محیط انجام می‌دهد با کاهش انرژی درونی گاز برابر است.

۴۹- پاسخ: گزینهٔ ۳ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * فیزیک ۱ (فصل ۵)

$$\Delta U_{abc}=\Delta U_{adc} \Rightarrow \Delta U_{abc}=\Delta U_{ab}+\Delta U_{bc} \Rightarrow \Delta U_{abc}=W_{ab}+Q_{ab}+W_{bc}+Q_{bc}$$
$$\Rightarrow \Delta U_{abc}=۰+۱۰۰۰+\left[-۹۰۰\times۱۰^{۳}(۶-۲)\times۱۰^{-۳}\right]+۹۰۰۰ \Rightarrow \Delta U_{abc}=۶۴۰۰J$$
$$\Delta U_{adc}=۶۴۰۰J \Rightarrow W_{ad}+W_{dc}+Q_{adc}=۶۴۰۰ \Rightarrow -۴۰۰\times۴+۰+Q_{adc}=۶۴۰۰ \Rightarrow Q_{adc}=۸۰۰۰J$$

۵۰- پاسخ: گزینهٔ ۲ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * فیزیک ۱ (فصل ۵)

در فرایند هم‌فشار وقتی کار مثبت است، گاز متراکم شده است و تغییر حجم و در نتیجه تغییر دما منفی است. از این رو دما از $۳۰۰K$ به $۲۰۰K$ رسیده است.

$$W=-P\Delta V=-nR\Delta T \Rightarrow ۵۰۰۰=-nR(۲۰۰-۳۰۰) \Rightarrow nR=۵۰$$
$$PV=nRT \Rightarrow P\times۲۰\times۱۰^{-۳}=۵۰\times۲۰۰ \Rightarrow P=۵۰۰\times۱۰^{۳}Pa=۵۰۰kPa$$

سنجش کلاد
www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshCloud

۵۱- پاسخ: گزینهٔ ۲ ▲ مشخصات سؤال: ساده * فیزیک ۱ (فصل ۵)

جوابش اینه

در شکل «الف»، انبساط بی‌دررو صورت می‌گیرد و در اثر سرد شدن مولکول‌های آب به‌هم می‌پیوندند و تشکیل هاله‌ای از بخار آب سردشده ایجاد می‌شود.

در شکل «ب» تراکم بی‌دررو صورت می‌گیرد و گاز به‌قدری گرم می‌شود که آتش می‌گیرد.

در هر دو فرایند به‌خاطر سریع انجام شدن فرصت انتقال گرما وجود ندارد و فرایندهای بی‌دررو طی می‌شود.

۵۲- پاسخ: گزینهٔ ۳ ▲ مشخصات سؤال: دشوار * فیزیک ۱ (فصل ۵)

جوابش اینه

$$\eta=\frac{|W|}{Q_H}\Rightarrow \eta=\frac{Q_H-|Q_L|}{Q_H}\Rightarrow \eta=1-\frac{|Q_L|}{Q_H}\Rightarrow \frac{25}{100}=1-\frac{9000}{Q_H}\Rightarrow Q_H=12000\,J$$

سوخت مصرفی سبب تولید گرمای Q_H برای منبع دمابالا می‌شود.

$$\text{گرمای ایجادشده در ثانیه}=4000\frac{J}{g}\times 18\frac{g}{s}=72000\frac{J}{s}$$

$$\text{تعداد چرخه در ثانیه}=\frac{72000\frac{J}{s}}{12000\frac{J}{\text{چرخه}}}=6\frac{\text{چرخه}}{s}\Rightarrow \text{تعداد چرخه در دقیقه}=6\frac{\text{چرخه}}{s}\times\frac{60\,s}{1\,min}=360\frac{\text{چرخه}}{min}$$

۵۳- پاسخ: گزینهٔ ۴ ▲ مشخصات سؤال: ساده * فیزیک ۱ (فصل ۵)

جوابش اینه

در یخچال توسط کار W، گرمای Q_L از منبع دماپایین گرفته می‌شود و مجموعاً کار و گرما به‌صورت گرمای Q_H به منبع دمابالا منتقل می‌شود. به این ترتیب گزینهٔ ۴ این انتقال را به‌درستی نشان می‌دهد.

۵۴- پاسخ: گزینهٔ ۳ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * فیزیک ۱ (فصل ۵)

جوابش اینه

پ) درست؛ در چرخهٔ ساعتگرد کار منفی است.

ت) درست؛ در فرایند (۲) تغییر انرژی درونی مثبت و کار منفی و گاز گرما می‌گیرد. در فرایند (۱) برعکس، تغییر انرژی درونی منفی و کار مثبت و گاز گرما از دست می‌دهد. از طرفی با توجه به اینکه چرخه ساعتگرد و کار آن منفی است و تغییر انرژی درونی آن صفر است، پس باید گرمای خالص مثبت باشد. از این رو گرمای گرفته‌شده در فرایند (۲) بیشتر از اندازهٔ گرمایی است که گاز در فرایند (۱) از دست می‌دهد.

نباید سراغ اینا برری

الف) نادرست؛ چون چرخه ساعتگرد است، کار آن منفی و گرمای آن مثبت است؛ بنابراین گاز در این چرخه گرما می‌گیرد.

ب) نادرست؛ در تمام چرخه‌ها چون گاز به حالت اولیهٔ خود بازمی‌گردد، به دمای اولیهٔ خود می‌رسد و تغییر دما ندارد؛ بنابراین تغییر انرژی درونی چرخه‌ها صفر است.

۵۵- پاسخ: گزینهٔ ۱ ▲ مشخصات سؤال: ساده * فیزیک ۳ (فصل ۱)

جوابش اینه

شتاب متحرک $a=6\frac{m}{s^2}$ و سرعت اولیهٔ آن $v_0=0$ است؛ بنابراین معادلهٔ مکان- زمان آن در SI به‌صورت زیر می‌شود:

$$x=\frac{1}{2}at^2+v_0t+x_0\Rightarrow x=3t^2+x_0\xrightarrow[t=2s]{x=10m}10=3(2)^2+x_0\Rightarrow x_0=-2m$$

معادلهٔ مکان- زمان متحرک به‌صورت $x=3t^2-2$ است؛ بنابراین مکان متحرک در لحظهٔ $t=5s$ برابر است با:

$$x=3t^2-2\Rightarrow x=3(5)^2-2=73m$$

سنجش کلاد
www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshCloud

۵۶- پاسخ: گزینهٔ ۴ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * فیزیک ۳ (فصل ۱)

جوابش اینه

نمودار سرعت- زمان هر دو متحرک، خط مستقیم و مایل است، پس هر دو حرکت با شتاب ثابت هستند.

$$a_A = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{۴۹-۲۵}{۱۲} = ۲\frac{m}{s^۲}$$

دو متحرک وقتی به هم می‌رسند که x آن‌ها مساوی شود $(x_B = x_A)$:

$$x = \frac{۱}{۲}at^۲ + v_۰t + x_۰ \Rightarrow \begin{cases} x_A = \frac{۱}{۲}\times ۲t^۲ + ۲۵t + (x_۰ + ۱۰۰) \\ x_B = \frac{۱}{۲}at^۲ + ۱۰t + x_۰ \end{cases}$$

$$x_A = x_B \Rightarrow t^۲ + ۲۵t + ۱۰۰ = \frac{۱}{۲}at^۲ + ۱۰t \Rightarrow t^۲(۱-\frac{۱}{۲}a) + ۱۵t + ۱۰۰ = ۰ \xrightarrow{t=۲۰s} ۴۰۰(۱-\frac{۱}{۲}a) + ۳۰۰ + ۱۰۰ = ۰$$

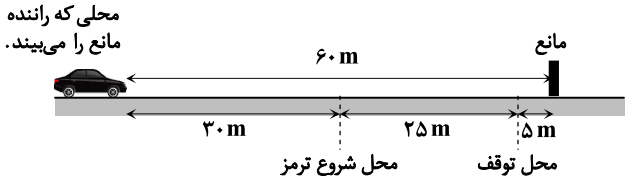
$$\Rightarrow ۱-\frac{۱}{۲}a = -۱ \Rightarrow \frac{۱}{۲}a = ۲ \Rightarrow a = ۴\frac{m}{s^۲}$$

۵۷- پاسخ: گزینهٔ ۳ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * فیزیک ۳ (فصل ۱)

جوابش اینه

در مدت ۱ ثانیهٔ واکنش راننده، ماشین هنوز با همان تندی $۳۰\frac{m}{s}$ به حرکت ادامه می‌دهد.

$$\Delta x = v_۰\Delta t = ۳۰\times ۱ = ۳۰m$$



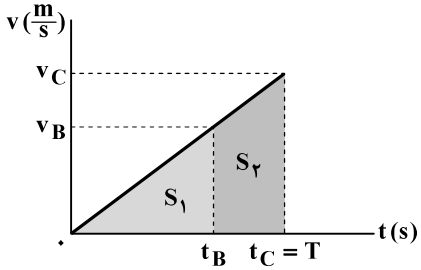
مسافت ترمز $= ۶۰-۳۰-۵ = ۲۵m$

$$v_۲^۲ - v_۱^۲ = ۲a\cdot\Delta x \Rightarrow ۰ - ۳۰^۲ = ۲a\times ۲۵ \Rightarrow a = \frac{-۹۰۰}{۵۰} = -۱۸\frac{m}{s^۲} \Rightarrow |a| = ۱۸\frac{m}{s^۲}$$

۵۸- پاسخ: گزینهٔ ۱ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * فیزیک ۳ (فصل ۱)

جوابش اینه

می‌توانیم از نمودار سرعت- زمان استفاده کنیم. (مدت کل سقوط را T نامیده‌ایم که همان t_C است.)



$$S_۱ = \frac{۱۶}{۲۵}H$$

$$S_۲ = \frac{۹}{۲۵}H$$

در مثلث‌های متشابه، نسبت مساحت‌ها برابر مربع نسبت تشابه است.

$$\frac{S_۱}{S_{کل}} = (\frac{t_B}{T})^۲ \Rightarrow \frac{۱۶}{۲۵} = (\frac{t_B}{T})^۲ \Rightarrow t_B = \frac{۴}{۵}T$$

$$\frac{v_B}{v_C} = \frac{t_B}{t_C} \Rightarrow v_B = \frac{۴}{۵}v_C$$

سرعت متوسط در قسمت BC : $v_{av} = \frac{v_B + v_C}{۲} \Rightarrow ۳۱/۵ = \frac{\frac{۴}{۵}v_C + v_C}{۲} = \frac{۹}{۱۰}v_C \Rightarrow v_C = \frac{۱۰}{۹}\times ۳۱/۵ = ۳۵\frac{m}{s}$

سنجش کلاد
www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshCloud

۵۹- پاسخ: گزینهٔ ۲ ▲ مشخصات سؤال: دشوار * فیزیک ۳ (فصل ۱)

جوابش اینه

در حرکت با شتاب ثابت بین سرعت و جابه‌جایی رابطهٔ $v_۲^۲ - v_۱^۲ = ۲a\Delta x$ برقرار است.

$$v_B^۲ - v_A^۲ = ۲a \cdot AB$$
$$v_C^۲ - v_B^۲ = ۲a \cdot BC$$
$$v_D^۲ - v_C^۲ = ۲a \cdot CD$$

اگر تندی متحرک در نقطهٔ A را $v_۱$ و فاصلهٔ AB را l بنامیم، خواهیم داشت:

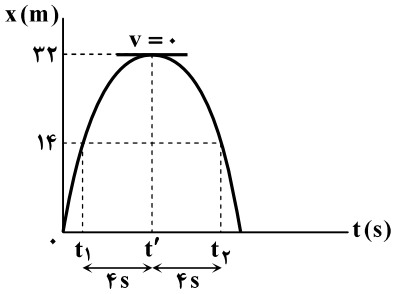
$$\begin{cases} ۴v_۱^۲ - v_۱^۲ = ۲al \Rightarrow ۲al = ۳v_۱^۲ \\ v_C^۲ - ۴v_۱^۲ = ۲a \cdot ۴l \Rightarrow v_C^۲ - ۴v_۱^۲ = ۴ \times ۳v_۱^۲ \Rightarrow v_C^۲ = ۱۶v_۱^۲ \Rightarrow v_C = ۴v_۱ \\ v_D^۲ - (۴v_۱)^۲ = ۲a \cdot ۱۶l \Rightarrow v_D^۲ - ۱۶v_۱^۲ = ۱۶ \times ۳v_۱^۲ \Rightarrow v_D^۲ = ۶۴v_۱^۲ \Rightarrow v_D = ۸v_۱ \end{cases}$$

$$\Delta x = \frac{v_۱ + v_۲}{۲} \cdot \Delta t \Rightarrow \begin{cases} \Delta t_{CD} = \frac{۲ \times ۱۶l}{۴v_۱ + ۸v_۱} = \frac{۱۶l}{۶v_۱} = \frac{۸l}{۳v_۱} \\ \Delta t_{BC} = \frac{۲ \times ۴l}{۲v_۱ + ۴v_۱} = \frac{۴l}{۳v_۱} \end{cases} \Rightarrow \frac{\Delta t_{CD}}{\Delta t_{BC}} = ۲$$

۶۰- پاسخ: گزینهٔ ۲ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * فیزیک ۳ (فصل ۱)

جوابش اینه

با توجه به تقارن نمودار سهمی در شکل روبه‌رو، متحرک در مدت ۴ ثانیه از لحظهٔ $t_۱$ تا t' به‌اندازهٔ $\Delta x = ۳۲ - ۱۴ = ۱۸m$ در جهت محور x جابه‌جا شده است:



$$t' \text{ تا } t_۱ \text{ در بازهٔ } : \Delta x = -\frac{۱}{۲}at^۲ + v_{\text{نهایی}}t$$
$$\Rightarrow ۱۸ = -\frac{۱}{۲}a(۴)^۲ + ۰ \Rightarrow a = \frac{۱۸}{-۸} = -\frac{۹}{۴}\frac{m}{s^۲}$$

با استفاده از معادلهٔ سرعت- جابه‌جایی در بازهٔ زمانی $t = ۰$ تا t' داریم:

$$v^۲ - v_۰^۲ = ۲a\Delta x \Rightarrow ۰ - v_۰^۲ = ۲ \times (-\frac{۹}{۴}) \times ۳۲ \Rightarrow v_۰^۲ = ۲ \times ۹ \times ۸ = ۱۴۴ \Rightarrow v_۰ = ۱۲\frac{m}{s}$$

۶۱- پاسخ: گزینهٔ ۳ ▲ مشخصات سؤال: دشوار * فیزیک ۳ (فصل ۱)

جوابش اینه

هنگامی که خودرو شروع به حرکت می‌کند، کامیون از آن جلو می‌افتد تا اینکه تندی خودرو لحظه به لحظه افزایش یافته و به کامیون می‌رسد. از لحظه‌ای که تندی خودرو و کامیون برابر می‌شود تا لحظه‌ای که دو متحرک به یکدیگر می‌رسند، فاصلهٔ آن‌ها در حال کاهش است.

تندی ثابت کامیون $۷۲\frac{km}{h}$ است که برابر با $۲۰\frac{m}{s}$ می‌شود:

$$v_{\text{کامیون}} = ۷۲\frac{km}{h} \div ۳/۶ = ۲۰\frac{m}{s}$$

معادلهٔ سرعت- زمان خودرو را می‌نویسیم و لحظهٔ برابری اندازهٔ سرعت‌های دو متحرک را می‌یابیم:

$$v_{\text{خودرو}} = at + v_۰ \Rightarrow v_{\text{خودرو}} = ۲/۵t$$
$$v_{\text{خودرو}} = v_{\text{کامیون}} \Rightarrow ۲/۵t = ۲۰ \Rightarrow t = \frac{۲۰}{۲/۵} = ۸s$$

معادلهٔ مکان- زمان هر دو متحرک را به‌دست می‌آوریم:

$$x_{\text{کامیون}} = vt + x_۰ \Rightarrow x_{\text{کامیون}} = ۲۰t + x_۰$$
$$x_{\text{خودرو}} = \frac{۱}{۲}at^۲ + v_۰t + x_۰ \Rightarrow x_{\text{خودرو}} = \frac{۱}{۲} \times ۲/۵t^۲ + x_۰ = ۱/۲۵t^۲ + x_۰$$

سنجش کلاد
www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshCloud

معادلهٔ مکان- زمان دو متحرک را برابر با هم قرار می‌دهیم تا لحظه‌ای را که دو متحرک به‌هم می‌رسند، پیدا کنیم. دقت کنید در لحظه‌ای که خودرو شروع به حرکت می‌کند، کامیون در کنار خودرو قرار دارد و در حال سبقت گرفتن از آن است؛ پس مکان اولیهٔ آن‌ها یکسان است:

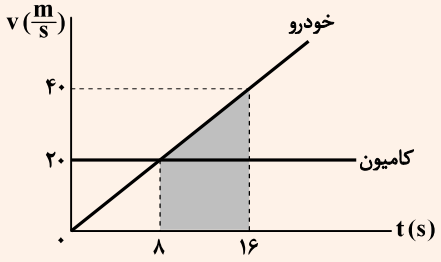
$$x_{\text{خودرو}} = x_{\text{کامیون}} \Rightarrow ۱/۲۵t^۲ + x_۰ = ۲۰t + x_۰ \Rightarrow ۱/۲۵t^۲ - ۲۰t = ۰ \Rightarrow t(۱/۲۵t - ۲۰) = ۰ \Rightarrow t = ۱۶s$$

تندی خودرو در لحظهٔ $t = ۸s$ با تندی کامیونی که جلوتر از آن قرار دارد، برابر می‌شود و در لحظهٔ $t = ۱۶s$، دو متحرک به‌هم می‌رسند؛ بنابراین در بازهٔ زمانی $t_۱ = ۸s$ تا $t_۲ = ۱۶s$ فاصلهٔ آن‌ها در حال کاهش است؛ در نتیجه مسافتی که خودرو در این مدت طی می‌کند، برابر است با:

$$\ell_{\text{خودرو}} = \Delta x_{\text{خودرو}} = \frac{۱}{۲}a(t_۲^۲ - t_۱^۲) \Rightarrow \ell_{\text{خودرو}} = ۱/۲۵(۱۶^۲ - ۸^۲) = ۱/۲۵ \times (۱۶-۸) \times (۱۶+۸) = ۱/۲۵ \times ۸ \times ۲۴ = ۲۴۰m$$

اینجوری هم میشه

اگر نمودار سرعت- زمان $(v-t)$ دو متحرک را در یک دستگاه رسم کنیم، بخش رنگ‌شده ناحیه‌ای است که فاصلهٔ دو متحرک در حال کاهش است. با توجه به اینکه مساحت محصور بین نمودار سرعت متحرک با محور زمان برابر با جابه‌جایی متحرک است، داریم:



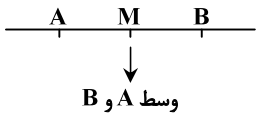
$$\ell_{\text{خودرو}} = \Delta x_{\text{خودرو}} = S_{\text{ذوزنقهٔ رنگی}} = (\frac{۲۰+۴۰}{۲}) \times ۸$$

$$\Rightarrow \ell_{\text{خودرو}} = ۲۴۰m$$

۶۲- پاسخ: گزینهٔ ۱ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * فیزیک ۳ (فصل ۱)

جوابش اینه

$$\Delta x = \frac{۱}{۲}at^۲ + v_۰t \Rightarrow ۹۶ = \frac{۱}{۲} \times ۳ \times ۴^۲ + v_B \times ۴ \Rightarrow ۹۶ = ۲۴ + ۴v_B \Rightarrow v_B = ۱۸\frac{m}{s}$$

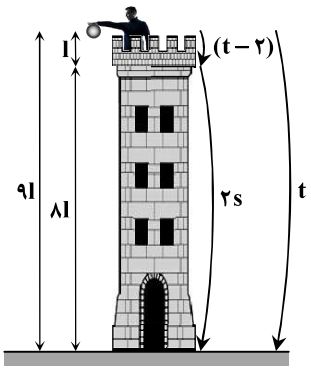


$$\begin{cases} v_B^۲ - v_A^۲ = ۲a \cdot AB & \text{رابطهٔ (۱)} \\ v_M^۲ - v_A^۲ = ۲a \cdot AM & \text{رابطهٔ (۲)} \end{cases}$$

$$\xrightarrow{\text{تقسیم دو رابطه}} \frac{v_B^۲ - ۰}{v_M^۲ - ۰} = ۲ \Rightarrow v_M = \frac{v_B}{\sqrt{۲}} = \frac{۱۸}{\sqrt{۲}}\frac{m}{s} = ۹\sqrt{۲}\frac{m}{s}$$

۶۳- پاسخ: گزینهٔ ۳ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * فیزیک ۳ (فصل ۱)

جوابش اینه



اگر کل مدت سقوط t باشد، قسمت اول (تا قبل از ۲ ثانیهٔ آخر) می‌شود $(t-۲)$:

$$\frac{۱}{۲}gt^۲ = ۹ \times \frac{۱}{۲}g(t-۲)^۲ \Rightarrow t = ۳(t-۲) \Rightarrow t = ۳s$$

$$v = gt = ۱۰ \times ۳ = ۳۰\frac{m}{s}$$

۶۴- پاسخ: گزینهٔ ۴ ▲ مشخصات سؤال: ساده * فیزیک ۳ (فصل ۱)

جوابش اینه

تندی گلوله در لحظه‌ای که ۳ ثانیه مانده تا به زمین برسد، برابر است با:

$$g = \frac{\Delta v}{\Delta t} \Rightarrow ۱۰ = \frac{۴۸ - v_۱}{۳} \Rightarrow v_۱ = ۱۸\frac{m}{s}$$

$$\Delta y = \frac{v_۱ + v_۲}{۲} \cdot \Delta t = \frac{۱۸+۴۸}{۲} \times ۳ = \frac{۶۶}{۲} \times ۳ = ۹۹m$$

سنجش کلاد
www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshCloud

۶۵- پاسخ: گزینهٔ ۳ ▲ مشخصات سؤال: دشوار * فیزیک ۳ (فصل ۱)

جوابش اینه

هر دو گلوله از یک محل رها می‌شوند و تا زمین سقوط می‌کنند؛ پس حرکت آن‌ها کاملاً مشابه است و با تندی یکسان به زمین می‌رسند. فقط گلولهٔ اولی ۱/۵ ثانیه زودتر می‌رسد.

در لحظه‌ای که گلولهٔ دومی رها می‌شود، تندی گلولهٔ اولی $۱۵\frac{m}{s}$ است $(v = gt = ۱۰\times ۱/۵)$ و از آن به بعد، تندی هر دو با شتاب g زیاد می‌شود. پس همیشه تندی اولی بیشتر از دومی است و هرچه زمان بگذرد، فاصلهٔ آن‌ها از یکدیگر زیاد می‌شود. این وضعیت تا زمانی ادامه دارد که اولی به زمین برسد و از آن به بعد فاصلهٔ آن‌ها کم می‌شود. بنابراین بیشترین فاصلهٔ آن‌ها از یکدیگر مربوط به زمانی است که گلولهٔ اولی به زمین می‌رسد. مسلم است که در این لحظه، گلولهٔ دومی هنوز ۱/۵ ثانیه فرصت لازم دارد تا به زمین برسد. پس می‌توان گفت که هر یک از گلوله‌ها در ۱/۵ ثانیهٔ آخر ۳۶ متر را طی می‌کند.

اگر کل مدت سقوط را t در نظر بگیریم، می‌توانیم بگوییم:

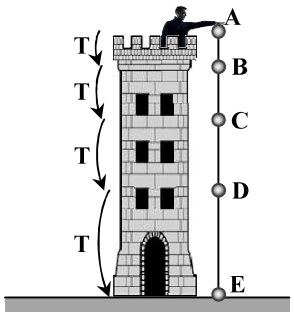
$$x(t)-x(t-۱/۵)=۳۶ \Rightarrow \frac{۱}{۲}gt^۲-\frac{۱}{۲}g(t-۱/۵)^۲=۳۶ \Rightarrow ۵(t^۲-(t-۱/۵)^۲)=۳۶$$

$$\xrightarrow{\text{اتحاد مزدوج}} ۷/۲=۱/۵(۲t-۱/۵) \Rightarrow ۲t-۱/۵=\frac{۷/۲}{۱/۵}=\frac{۲۴}{۵}=۴/۸ \Rightarrow ۲t=۶/۳ \Rightarrow t=۳/۱۵s$$

$$v=gt=۱۰\times ۳/۱۵=۳۱/۵\frac{m}{s}$$

۶۶- پاسخ: گزینهٔ ۳ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * فیزیک ۳ (فصل ۱)

جوابش اینه



طول هر یک از پاره‌خط‌های BC، CD و DE را برحسب پاره‌خط AB می‌یابیم:

$$y=\frac{۱}{۲}gt^۲ \Rightarrow \begin{cases} AB=\frac{۱}{۲}gT^۲ \\ AC=\frac{۱}{۲}g(۲T)^۲=۴AB \Rightarrow BC=۳AB \\ AD=\frac{۱}{۲}g(۳T)^۲=۹AB \Rightarrow CD=۵AB \\ AE=\frac{۱}{۲}g(۴T)^۲=۱۶AB \Rightarrow DE=۷AB \end{cases}$$

نسبت خواسته‌شده برابر است با:

$$\frac{CE}{AD}=\frac{(۵+۷)AB}{۹AB}=\frac{۱۲}{۹} \Rightarrow CE=\frac{۴}{۳}AD$$

برای مقایسهٔ تندی گلوله در نقاط مختلف داریم:

$$v=gt \Rightarrow \begin{cases} v_A=۰ \\ v_B=gT \\ v_C=۲gT \Rightarrow v_D=۳v_B \\ v_D=۳gT \\ v_E=۴gT \end{cases}$$

۶۷- پاسخ: گزینهٔ ۴ ▲ مشخصات سؤال: دشوار * فیزیک ۳ (فصل ۱)

جوابش اینه

$$\Delta y_{BC}=\frac{v_B+v_C}{۲}\cdot\Delta t \Rightarrow ۲۸=\frac{v_B+v_C}{۲}\times ۱/۴ \Rightarrow v_B+v_C=۴۰\frac{m}{s} \quad \text{رابطهٔ (۱)}$$

$$\Delta v=g\cdot\Delta t \Rightarrow v_C-v_B=۱۰\times ۱/۴ \Rightarrow v_C=v_B+۱۴\frac{m}{s} \quad \text{رابطهٔ (۲)}$$

با استفاده از روابط (۱) و (۲) داریم:

$$v_B+v_B+۱۴=۴۰ \Rightarrow v_B=۱۳\frac{m}{s}$$

سنجش کلاد
www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshCloud

حالا می‌توان زمان سقوط گلوله تا رسیدن به نقطهٔ B را حساب کرد:

$$v = gt \Rightarrow ۱۳ = ۱۰t_B \Rightarrow t_B = ۱/۳s$$

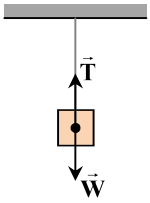
کل مدت سقوط : $T = ۱/۳ + ۱/۴ + ۰/۸ = ۳/۵s$

$$\Delta y = \frac{۱}{۲}gt^۲ \Rightarrow AD = \frac{۱}{۲}gT^۲ \Rightarrow AD = \frac{۱}{۲}\times ۱۰ \times ۳/۵ \times ۳/۵ = ۶۱/۲۵m$$

۶۸- پاسخ: گزینهٔ ۲ ▲ مشخصات سؤال: ساده * فیزیک ۳ (فصل ۲)

جوابش اینه

دو نیروی کشش نخ و وزن بر وزنه وارد می‌شوند که واکنش هر یک بر عامل به‌وجودآورندهٔ آن‌ها یعنی نخ و زمین وارد می‌شود.



۶۹- پاسخ: گزینهٔ ۳ ▲ مشخصات سؤال: ساده * فیزیک ۳ (فصل ۲)

جوابش اینه

طبق قانون دوم نیوتون داریم:

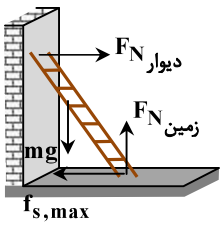
$$\vec{F}_{net} = m\vec{a} \Rightarrow \vec{F}_{net} = ۲ \times (۷/۵\vec{i} + ۱۰\vec{j}) = (۱۵N)\vec{i} + (۲۰N)\vec{j}$$

$$\left|\vec{F}_{net}\right| = \sqrt{(۱۵)^۲ + (۲۰)^۲} = ۲۵N$$

۷۰- پاسخ: گزینهٔ ۲ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * فیزیک ۳ (فصل ۲)

جوابش اینه

نیروهای وارد بر نردبان مطابق شکل مقابل است:



با توجه به ساکن بودن نردبان می‌توان نوشت:

در راستای عمودی : $F_{net} = ۰ \Rightarrow F_{N_{\text{زمین}}} = mg = ۲۴ \times ۱۰ = ۲۴۰N$

نردبان در آستانهٔ سر خوردن است؛ بنابراین داریم:

$$f_{s,max} = \mu_s F_{N_{\text{زمین}}} \Rightarrow f_{s,max} = ۰/۷۵ \times ۲۴۰ = ۱۸۰N$$

حالا می‌توان اندازهٔ نیروی سطح زمین بر نردبان را حساب کرد:

$$R = \sqrt{(F_{N_{\text{زمین}}})^۲ + (f_{s,max})^۲} = \sqrt{(۲۴۰)^۲ + (۱۸۰)^۲} = ۳۰۰N$$

۷۱- پاسخ: گزینهٔ ۳ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * فیزیک ۳ (فصل ۲)

جوابش اینه

در هر حالت، وزنه در حالت تعادل است؛ بنابراین می‌توان نوشت:

$$F_{net} = ۰ \Rightarrow \begin{cases} F_{e_۱} = kx_۱ = m_۱g \Rightarrow k(L_۱ - L_۰) = m_۱g & \text{رابطهٔ (۱)} \\ F_{e_۲} = kx_۲ = m_۲g \Rightarrow k(L_۲ - L_۰) = m_۲g & \text{رابطهٔ (۲)} \end{cases}$$

از تقسیم روابط (۱) و (۲) بر هم داریم:

$$\frac{L_۱ - L_۰}{L_۲ - L_۰} = \frac{m_۱}{m_۲} \Rightarrow \frac{۲۴ - L_۰}{۲۵ - L_۰} = \frac{۴۰۰}{۴۰۰ + ۱۰۰} \Rightarrow ۵(۲۴ - L_۰) = ۴(۲۵ - L_۰) \Rightarrow ۱۲۰ - ۵L_۰ = ۱۰۰ - ۴L_۰ \Rightarrow L_۰ = ۲۰cm$$

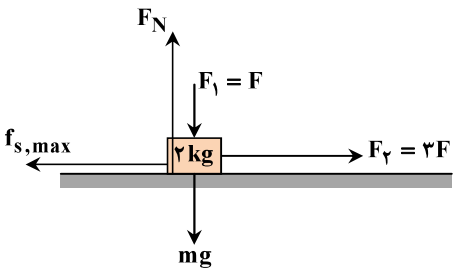
سنجش کلاد
www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshCloud

۷۲- پاسخ: گزینهٔ ۲ ▲ مشخصات سؤال: دشوار * فیزیک ۳ (فصل ۲)

جوابش اینه

حالت اول:

در حالت اول، جهت نیروی $\vec{F}_1$ رو به پایین است و جسم در آستانهٔ حرکت است؛ بنابراین داریم:



نیروی خالص در راستای قائم : $F_{net,y} = 0$

$\Rightarrow F_1 + mg - F_N = 0 \Rightarrow F_N = F_1 + mg$

$= F + (2\times 10) = F + 20$ رابطهٔ (۱)

حالا می‌توان رابطهٔ نیروی اصطکاک ایستایی بیشینه را برحسب F به‌دست آورد:

$f_{s,max} = \mu_s F_N \xrightarrow{\text{رابطهٔ (۱)}} f_{s,max} = 0/5(F+20)$ رابطهٔ (۲)

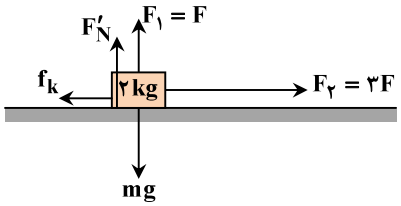
با نوشتن برایند نیروهای افقی داریم:

$F_{net,x} = 0 \Rightarrow F_2 = f_{s,max}$

$\xrightarrow{\text{رابطهٔ (۲)}} 3F = 0/5(F+20) \Rightarrow 6F = F + 20 \Rightarrow 5F = 20 \Rightarrow F = 4\,N$ رابطهٔ (۳)

حالت دوم:

در حالت دوم، جهت نیروی $\vec{F}_1$ رو به بالا است و جسم با شتاب ثابت روی سطح افقی حرکت می‌کند. در حالت جدید نیروی عمودی سطح را به‌دست می‌آوریم:



$F_{net,y} = 0 \Rightarrow F'_N + F_1 = mg \Rightarrow F'_N = mg - F = 20 - F$

$\xrightarrow{\text{رابطهٔ (۳)}} F'_N = 20 - 4 = 16\,N$

چون جسم حرکت می‌کند، نیروی اصطکاک آن از نوع جنبشی است و مقدار آن برابر است با:

$f_k = \mu_k F'_N = 0/3\times 16 = 4/8\,N$ رابطهٔ (۴)

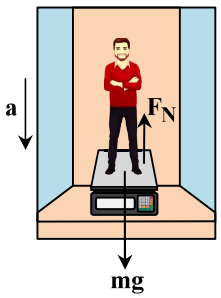
برایند نیروهای افقی وارد بر جسم سبب شتاب آن به‌اندازهٔ a می‌شود؛ بنابراین داریم:

$F_{net,x} = ma \Rightarrow F_2 - f_k = ma \Rightarrow 3F - f_k = ma \xrightarrow{\text{روابط (۳) و (۴)}} 3(4) - 4/8 = 2a \Rightarrow 7/2 = 2a \Rightarrow a = 3/6\,\frac{m}{s^2}$

۷۳- پاسخ: گزینهٔ ۱ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * فیزیک ۳ (فصل ۲)

جوابش اینه

جهت مثبت را رو به پایین در نظر می‌گیریم، بنابراین می‌توان نوشت:

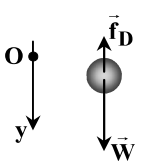


$F_{net} = ma \Rightarrow mg - F_N = ma \Rightarrow F_N = m(g-a) = 75\times(10-4) = 450\,N$

۷۴- پاسخ: گزینهٔ ۴ ▲ مشخصات سؤال: دشوار * فیزیک ۳ (فصل ۲)

جوابش اینه

بر این گوی‌ها دو نیروی وزن و مقاومت هوا وارد می‌شود. طبق قانون دوم نیوتون، نیروی خالص وارد بر گوی با حاصل‌ضرب جرم در شتاب، برابر است. اگر جهت محور y را به‌سمت پایین در نظر بگیریم، می‌توان نوشت:



$W - f_D = ma \Rightarrow a = \frac{W - f_D}{m} = \frac{mg - f_D}{m} = g - \frac{f_D}{m}$

سنجش کلاد
www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshCloud

f_D برای هر دو گوی یکسان است و $m_۲ > m_۱$ است، در نتیجه $a_۲ > a_۱$ است؛ زیرا:

$$m_۲ > m_۱ \Rightarrow \frac{f_D}{m_۲} < \frac{f_D}{m_۱} \Rightarrow g - \frac{f_D}{m_۲} > g - \frac{f_D}{m_۱} \Rightarrow a_۲ > a_۱$$

با توجه به رابطهٔ سرعت- جابه‌جایی می‌توان نوشت:

$$v^۲ - v_۰^۲ = ۲a\Delta y \Rightarrow v^۲ - ۰ = ۲ah \Rightarrow \begin{cases} v = \sqrt{۲ah} \\ a_۲ > a_۱ \end{cases} \Rightarrow v_۲ > v_۱$$

با توجه به معادلهٔ مکان- زمان داریم:

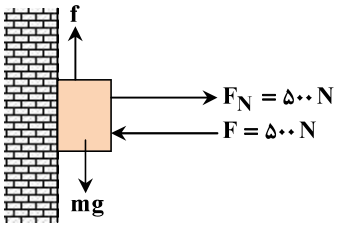
$$\Delta y = \frac{۱}{۲}at^۲ \Rightarrow h = \frac{۱}{۲}at^۲ \Rightarrow \begin{cases} t = \sqrt{\frac{۲h}{a}} \\ a_۲ > a_۱ \end{cases} \Rightarrow t_۲ < t_۱$$

پس گوی (۱) دیرتر و با تندی کمتر نسبت به گوی (۲) به زمین می‌رسد.

۷۵- پاسخ: گزینهٔ ۲ ▲ **مشخصات سؤال: متوسط * فیزیک ۳ (فصل ۲)**

جوابش اینه

نیروهای وارد بر جسم مطابق شکل است:



در راستای افقی: $F_{net} = ۰ \Rightarrow F_N = F = ۵۰۰\,N$

اندازهٔ نیروی اصطکاک ایستایی بیشینه برابر است با:

$$f_{s,max} = \mu_s F_N = ۰/۴ \times ۵۰۰ = ۲۰۰\,N$$

از آنجا که نیروی $mg = ۱۵ \times ۱۰ = ۱۵۰\,N$ کمتر از نیروی اصطکاک ایستایی بیشینه است، جسم ساکن می‌ماند و در راستای قائم حرکت نمی‌کند؛ بنابراین نیروی اصطکاک ایستایی بین جسم و دیوار برابر با وزن جسم است:

در راستای قائم: $F_{net} = ۰ \Rightarrow f_s = mg = ۱۵۰\,N$

شیـــــــمی

۷۶- پاسخ: گزینهٔ ۲ ▲ **مشخصات سؤال: متوسط * شیمی ۱ (فصل ۲)**

جوابش اینه

الف) نادرست؛ بر اثر واکنش اغلب اکسیدهای نافلزی با آب، محلولی با خاصیت اسیدی حاصل می‌شود که کاغذ pH را به رنگ سرخ در می‌آورند.

ب) درست؛ برگ گیاه بر اثر ریختن محلول هیدروکلریک اسید، از سبز به قهوه‌ای تغییر رنگ می‌دهد و شکر نیز بر اثر گرما دادن به آن، از سفید به قهوه‌ای تغییر رنگ می‌دهد.

پ) نادرست؛ فرمول شیمیایی آهک یا کلسیم اکسید به‌صورت CaO است نه $Ca(OH)_۲$!

ت) درست؛ اسکلت آهکی ($CaCO_۳$) مرجان‌ها در آب‌های با خاصیت اسیدی از بین می‌رود؛ بنابراین آب اقیانوس‌هایی که pH بزرگ‌تر از ۷ (خاصیت بازی) دارند، می‌توانند زیستگاه مناسبی برای این کیسه‌تنان باشند.

۷۷- پاسخ: گزینهٔ ۴ ▲ **مشخصات سؤال: دشوار * شیمی ۱ (فصل ۲)**

جوابش اینه

معادلهٔ موازنه شدهٔ واکنش‌ها به‌صورت زیر است:

گزینهٔ ۱: $N_۲H_۴(aq) + ۲NaClO(l) \rightarrow N_۲(g) + ۲NaCl(aq) + ۲H_۲O(l)$

گزینهٔ ۲: $۳CS_۲(g) + ۶NaOH(aq) \rightarrow ۲Na_۲CS_۳(aq) + Na_۲CO_۳(aq) + ۳H_۲O(l)$

گزینهٔ ۳: $۵HClO_۲(aq) + NaOH(aq) \rightarrow ۴ClO_۲(g) + NaCl(aq) + ۳H_۲O(l)$

گزینهٔ ۴: $H_۲S(g) + ۴Cl_۲(g) + ۴H_۲O(l) \rightarrow H_۲SO_۴(aq) + ۸HCl(aq)$

تنها در معادلهٔ موازنه شدهٔ واکنش گزینهٔ ۴، مجموع ضرایب استوکیومتری واکنش‌دهنده‌ها با فراورده‌ها برابر است.

سنجش کلاد
www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshCloud

۷۸- پاسخ: گزینهٔ ۲ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * شیمی ۱ (فصل ۲)

جوابش اینه

فقط مورد چهارم نادرست است. مقایسه گرمای آزادشده از سوختن یک گرم از سوخت‌های نام برده شده چنین است.

زغال‌سنگ < بنزین < گاز طبیعی < هیدروژن

۷۹- پاسخ: گزینهٔ ۴ ▲ مشخصات سؤال: ساده * شیمی ۱ (فصل ۲)

جوابش اینه

فرایندهای شیمی سبز برای کاهش ردپای کربن‌دی‌اکسید روی کرهٔ زمین است؛ بنابراین اثر گلخانه‌ای ارتباطی با این فرایندها ندارد.

۸۰- پاسخ: گزینهٔ ۴ ▲ مشخصات سؤال: ساده * شیمی ۱ (فصل ۲)

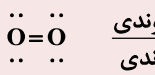
جوابش اینه

عنصر اکسیژن دارای دو آلوتروپ O_2 و O_3 (اوزون) است.

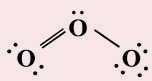
گزینهٔ ۴: نادرست؛ اوزون (O_3) در مقایسه با گاز اکسیژن (O_2) مولکولی ناپایدارتر بوده و واکنش‌پذیری بیشتری دارد.

نباید سراغ اینا بری

گزینهٔ ۱: درست؛ با توجه به ساختار لوویس هر دو مولکول، شمار جفت الکترون‌های ناپیوندی در آن‌ها دو برابر شمار جفت الکترون‌های پیوندی است:



$$\frac{\text{شمار جفت الکترون ناپیوندی}}{\text{شمار جفت الکترون پیوندی}} = \frac{۴}{۲} = ۲$$



$$\frac{\text{شمار جفت الکترون ناپیوندی}}{\text{شمار جفت الکترون پیوندی}} = \frac{۶}{۳} = ۲$$

گزینهٔ ۲: درست؛ اوزون (O_3) مولکولی سه اتمی و خمیده شکل است.

گزینهٔ ۳: درست؛ نقطهٔ جوش هر دو آلوتروپ کمتر از صفر درجه است؛ بنابراین در دمای اتاق $(۲۵^\circ C)$ هر دو گازی شکل هستند.

۸۱- پاسخ: گزینهٔ ۱ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * شیمی ۱ (فصل ۲)

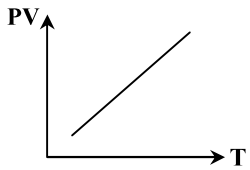
جوابش اینه

عبارت «اول»: نادرست؛ در دمای ثابت، میان حجم یک نمونهٔ گازی و فشار آن رابطهٔ معکوس یا وارونه وجود دارد.

عبارت «دوم»: درست؛ بر اثر افزایش فشار سامانهٔ حاوی یک نمونه گاز، فاصلهٔ میان مولکول‌های گاز کاهش می‌یابد (و برعکس)؛ بنابراین فاصلهٔ میان مولکول‌های آن وابسته به فشاری است که به سامانه اعمال می‌شود.

عبارت «سوم»: نادرست؛ برای توصیف یک نمونه گاز، افزون بر دما، مقدار و فشار آن نیز باید مشخص و معین باشد.

عبارت «چهارم»: نادرست؛ رابطهٔ PV با T به‌صورت صعودی و خطی است و می‌تواند به‌صورت زیر باشد:



۸۲- پاسخ: گزینهٔ ۳ ▲ مشخصات سؤال: دشوار * شیمی ۱ (فصل ۲)

جوابش اینه

با حرارت دادن $KMnO_4$ در ظرفی سرباز، گاز اکسیژن تولید شده از ظرف خارج می‌شود و بقیه مواد جامد تولیدشده در داخل ظرف باقی می‌مانند.

$$۲KMnO_4(s) \rightarrow K_2MnO_4(s) + MnO_2(s) + O_2(g)$$

$$?gO_2 = ۲۳/۷gKMnO_4 \times \frac{۱molKMnO_4}{۱۵۸gKMnO_4} \times \frac{۱molO_2}{۲molKMnO_4} \times \frac{۳۲gO_2}{۱molO_2} = ۲/۴gO_2$$

سنجش کلاد
www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshCloud

اینجوری هم میشه

$$۲KMnO_۴ \sim ۱O_۲$$

$$\frac{۲۳/۷g}{۱۵۸g\times ۲}=\frac{xg}{۳۲\times ۱} \Rightarrow x=۲/۴gO_۲$$

پس مجموع جرم دو فراودهٔ جامد برابر است با:

جرم فراورده‌های جامد = جرم $KMnO_۴$ اولیه − جرم $O_۲$ تولیدشده $= ۲۳/۷-۲/۴=۲۱/۳$

بنابراین نسبت جرم مواد جامد باقی‌مانده به گاز اکسیژن تولیدشده برابر است با:

$$\frac{۲۱/۳}{۲/۴}=۸/۸۷۵$$

۸۳- پاسخ: گزینهٔ ۲ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * شیمی ۱ (فصل ۲)

جوابش اینه

معادلهٔ موازنه شده واکنش چنین است:

$$CO(g)+۲H_۲(g) \rightarrow CH_۳OH(g)$$

با توجه به ضرایب مواد، اختلاف گازهای CO و $H_۲$ به‌ازای تولید یک مول متانول برابر یک مول است، پس:

$$۸۰gCH_۳OH\times\frac{۱molCH_۳OH}{۳۲gCH_۳OH}\times\frac{۱mol\,\text{اختلاف مول گازی}}{۱molCH_۳OH}\times\frac{۲۲/۴L}{۱mol\,\text{گاز}}=۵۶L$$

اختلاف حجم محاسبه شده همان $x-y$ است.

۸۴- پاسخ: گزینهٔ ۲ ▲ مشخصات سؤال: دشوار * شیمی ۱ (فصل ۲)

جوابش اینه

معادلهٔ موازنه شده واکنش چنین است:

$$۴KNO_۳(s) \rightarrow ۲K_۲O(s)+۲N_۲(g)+۵O_۲(g)$$

در مرحلهٔ اول با استفاده از چگالی گاز نیتروژن، حجم مولی گازها را در شرایط آزمایش به‌دست می‌آوریم:

$$۱molN_۲\times\frac{۲۸g}{۱molN_۲}\times\frac{۱L}{۱/۱۲g}=۲۵L$$

در ادامه با استفاده از کسرهای استوکیومتری حجم گازهای تولید شده را محاسبه می‌کنیم:

$$۱۲۱/۲gKNO_۳\times\frac{۱molKNO_۳}{۱۰۱gKNO_۳}\times\frac{۷mol\,\text{گاز}}{۴molKNO_۳}\times\frac{۲۵L}{۱mol\,\text{گاز}}=۵۲/۵L$$

اینجوری هم میشه

$$۴KNO_۳ \sim ۷\,\text{گاز}$$

$$\frac{۱۲۱/۲gKNO_۳}{۴\times ۱۰۱gKNO_۳}=\frac{?L}{۷mol\,\text{گاز}\times ۲۵L} \Rightarrow ?=۵۲/۵L\,\text{گاز}$$

۸۵- پاسخ: گزینهٔ ۲ ▲ مشخصات سؤال: ساده * شیمی ۱ (فصل ۲)

جوابش اینه

$$N_۲(g)+۳H_۲(g) \underset{۲۰۰atm}{\overset{Fe,۴۵۰^\circ C}{\rightleftharpoons}} ۲NH_۳(g)$$

الف) درست؛ ازآنجاکه واکنش تولید آمونیاک واکنش برگشت‌پذیر است و کامل نیست، گازهای $N_۲$ و $H_۲$ واکنش نداده و $NH_۳$ تولیدشده به‌طور هم‌زمان در ظرف واکنش حضور خواهند داشت.

ت) درست؛ ترتیب نقطهٔ جوش سه گاز به‌صورت $NH_۳ > N_۲ > H_۲$ است. به این ترتیب نقطهٔ جوش فراوردهٔ واکنش ($NH_۳$) از هر دو واکنش‌دهنده بالاتر است.

سنجش کلاد
www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshCloud

نباید سراغ اینا بری

ب) نادرست؛ سرد کردن مخلوط واکنش در فرایند هابر منجر به مایع شدن آمونیاک تولیدشده و جدا شدن آن از مخلوط واکنش خواهد شد.
پ) نادرست؛ واکنش‌دهنده‌های این فرایند N_2 و H_2 هستند، که گاز N_2 به‌عنوان فراوان‌ترین جزء هواکره از تقطیر جزءبه‌جزء هوای مایع به‌دست می‌آید. اما گاز هیدروژن از هوای مایع به‌دست نمی‌آید.

۸۶- پاسخ: گزینهٔ ۱ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * شیمی ۱ (فصل ۳)

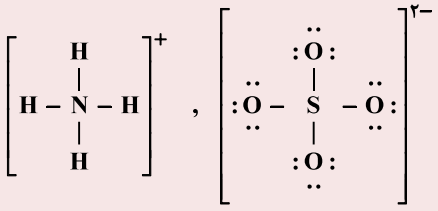
جوابش اینه

گزینهٔ ۱: نادرست

$$(NH_4)_2SO_4(s) \xrightarrow{H_2O} 2NH_4^+(aq) + SO_4^{2-}(aq)$$
$$RbNO_3(s) \xrightarrow{H_2O} Rb^+(aq) + NO_3^-(aq)$$

نباید سراغ اینا بری

گزینهٔ ۲: درست؛ در ساختار لوویس هر دو یون آمونیوم (NH_4^+) و سولفات (SO_4^{2-})، چهار جفت الکترون پیوندی وجود دارد.



گزینهٔ ۳: درست

گزینهٔ ۴: درست؛ مجموع بار الکتریکی یون‌های کربنات (CO_3^{2-}) و کلرید (Cl^-) برابر با بار الکتریکی یون فسفات (PO_4^{3-}) است.

۸۷- پاسخ: گزینهٔ ۳ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * شیمی ۱ (فصل ۳)

جوابش اینه

برای تشخیص وجود یون سولفات (SO_4^{2-}) در یک نمونه، از یون باریم (Ba^{2+}) استفاده می‌شود، که باعث تشکیل باریم سولفات $(BaSO_4)$ نامحلول و سفیدرنگ در آب می‌شود.

گزینهٔ ۳: درست؛ معادلهٔ موازنه شده واکنش چنین است:

$$Ba^{2+}(aq) + SO_4^{2-}(aq) \xrightarrow{\text{رسوب سفیدرنگ}} BaSO_4(s)$$

نباید سراغ اینا بری

گزینهٔ ۱: نادرست؛ در فرمول شیمیایی رسوب سفیدرنگ تولید شده $(BaSO_4)$، نسبت شمار کاتیون‌ها به شمار آنیون‌ها ۱ به ۱ است.

گزینهٔ ۲: نادرست؛ در فرمول شیمیایی آنیون تهنشین شده (SO_4^{2-})، ۴ اتم اکسیژن وجود دارد.

گزینهٔ ۴: نادرست؛ در ساختار رسوب حاصل، آنیون چند اتمی (SO_4^{2-}) و کاتیونی تک اتمی (Ba^{2+}) وجود دارد.

۸۸- پاسخ: گزینهٔ ۳ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * شیمی ۳ (فصل ۱)

جوابش اینه

گزینهٔ ۱: نادرست؛ کربن (گرافیت) نوعی رسانای الکترونی است و تمایلی به تشکیل کاتیون ندارد.

گزینهٔ ۲: نادرست؛ سولفوریک اسید (H_2SO_4) همانند هیدروکلریک اسید (HCl) یک الکترولیت قوی است، اما رسانایی الکتریکی محلول‌هایی با شرایط یکسان از سولفوریک اسید و هیدروکلریک اسید متفاوت است. سولفوریک اسید برخلاف هیدروکلریک اسید یک اسید دو پروتون‌دار بوده و در محلول آن یون‌های بیشتری وجود دارد.

سنجش کلاد
www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshCloud

گزینهٔ ۳: درست؛ هر دو اسید تک پروتون‌دار هستند و از یونش هر مولکول از آن‌ها دو یون تولید می‌شود. معادلهٔ یونش دو اسید ضعیف HF و HA به‌صورت زیر است:

$$HF(aq) \rightleftharpoons H^+(aq) + F^-(aq)$$

$$HA(aq) \rightleftharpoons H^+(aq) + A^-(aq)$$

اکنون غلظت مولی کل یون‌ها در دو محلول را حساب می‌کنیم:

$$\text{غلظت مولی کل یون‌ها در محلول HF} = M \cdot \alpha \cdot i = ۱ \times ۰/۰۲ \times ۲ = ۰/۰۴ \, mol \cdot L^{-1}$$

$$\text{غلظت مولی کل یون‌ها در محلول HA} = M \cdot \alpha \cdot i = ۰/۲ \times ۰/۲ \times ۲ = ۰/۰۸ \, mol \cdot L^{-1}$$

توجه داشته باشید که i نشان‌دهندهٔ تعداد یون‌های حاصل از یونش اسید است.

ازآنجایی‌که غلظت مولی کل یون‌ها در محلول اسید HA بیشتر است؛ بنابراین رسانایی الکتریکی محلول آن نیز بیشتر خواهد بود.

گزینهٔ ۴: نادرست؛ گلوکز برخلاف سدیم کلرید غیرالکترولیت است و محلول آن رسانایی الکتریکی ایجاد نمی‌کند.

۸۹- پاسخ: گزینهٔ ۳ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * شیمی ۳ (فصل ۱)

جوابش اینه

هر دو اسید تک پروتون‌دار و ضعیف هستند که معادلهٔ یونش آن‌ها را می‌توان به‌صورت کلی زیر نشان داد:

$$HX(aq) \rightleftharpoons H^+(aq) + X^-(aq)$$

بنابراین شمار یون‌های موجود در محلول اسیدها، دو برابر شمار مولکول‌های یونیده شده است. به عبارتی به‌ازای هر مولکول اسید یونش یافته، دو یون تولید می‌شود.

$$\text{درجهٔ یونش} = \frac{\text{شمار مولکول‌های یونیده شده}}{\text{شمار کل مولکول‌های حل شده}} = \frac{\text{شمار مولکول‌های یونیده شده}}{\text{شمار مولکول‌های یونیده نشده} + \text{شمار مولکول‌های یونیده شده}}$$

$$\begin{cases} \alpha_{HA} = \dfrac{(\frac{۲۰۰}{۲})}{۸۰۰ + \frac{۲۰۰}{۲}} = \dfrac{۱}{۹} \\ \alpha_{HB} = \dfrac{(\frac{۳۶۰}{۲})}{۶۴۰ + \frac{۳۶۰}{۲}} = \dfrac{۹}{۴۱} \end{cases} \Rightarrow \frac{\alpha_{HA}}{\alpha_{HB}} = \frac{\frac{۱}{۹}}{\frac{۹}{۴۱}} = \frac{۴۱}{۸۱}$$

۹۰- پاسخ: گزینهٔ ۳ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * شیمی ۳ (فصل ۱)

جوابش اینه

$$HA \rightleftharpoons H^+ + A^-$$

$$K_a = \frac{[H^+][A^-]}{[HA]} = \frac{(۸ \times ۱۰^{-۵})^۲}{۰/۱ - \underbrace{۸ \times ۱۰^{-۵}}_{\text{چشم‌پوشی}}} = ۶/۴ \times ۱۰^{-۸}$$

۹۱- پاسخ: گزینهٔ ۱ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * شیمی ۳ (فصل ۱)

جوابش اینه

$$\alpha_{HA} \cdot \alpha_{BOH} = \frac{[H^+]}{M_{HA}} \times \frac{[OH^-]}{M_{BOH}} \xrightarrow[[H^+][OH^-] = ۱۰^{-۱۴}]{[H^+] = ۱۰^{-pH}} \frac{۱۰^{-a}}{۰/۱} \times \frac{\frac{۱۰^{-۱۴}}{[H^+]}}{۰/۰۱}$$

$$= \frac{۱۰^{-a}}{۱۰^{-۱}} \times \frac{۱۰^{-۱۴}}{۱۰^{-۲} \times ۱۰^{-a-۵}} = \frac{۱۰^{-a}}{۱۰^{-۱}} \times \frac{۱۰^{-۱۴}}{۱۰^{-۲} \times ۱۰^{-a} \times ۱۰^{-۵}} = ۱۰^{-۶}$$

سنجش کلاد
www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshCloud

۹۲- پاسخ: گزینهٔ ۱ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * شیمی ۳ (فصل ۱)

جوابش اینه

ابتدا معادلهٔ واکنش را می‌نویسیم:

$$2Li + 2H_2O \rightarrow 2LiOH + H_2$$

$$pH = 11/7 \Rightarrow pOH = 14 - pH = 2/3 \Rightarrow \left[OH^-\right] = 10^{-pOH} = 10^{-2/3} = 10^{-3} \times 10^{0/7} = 5 \times 10^{-3}\ mol \cdot L^{-1}$$

$$?g\ Li = 200\ L \times \frac{5 \times 10^{-3}\ mol\ OH^-}{1\ L} \times \frac{1\ mol\ LiOH}{1\ mol\ OH^-} \times \frac{2\ mol\ Li}{2\ mol\ LiOH} \times \frac{7\ g\ Li}{1\ mol\ Li} = 7\ g\ Li$$

در ادامه با توجه به مقدار Li مصرف شده می‌توان حجم گاز H_2 تولیدشده را محاسبه کرد:

$$?L\ H_2 = 7\ g\ Li \times \frac{1\ mol\ Li}{7\ g\ Li} \times \frac{1\ mol\ H_2}{2\ mol\ Li} \times \frac{22/4\ L}{1\ mol\ H_2} = 11/2\ L\ H_2$$

۹۳- پاسخ: گزینهٔ ۳ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * شیمی ۳ (فصل ۱)

جوابش اینه

در محلول اسید قوی تک پروتون‌دار، غلظت $H^+(aq)$ با غلظت مولی اسید برابر است، پس:

$$HA \rightarrow H^+ + A^-$$

$$pH = 2 \Rightarrow \left[H^+\right] = 10^{-pH} = 10^{-2}\ mol \cdot L^{-1}$$

$$50 \times 10^{-3}\ L \times \frac{10^{-2}\ mol(HA)}{1\ L} \times \frac{M\ g(HA)}{1\ mol(HA)} = 31/5 \times 10^{-3}\ g(HA) \Rightarrow M(HA) = 63\ g \cdot mol^{-1}$$

۹۴- پاسخ: گزینهٔ ۱ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * شیمی ۳ (فصل ۱)

جوابش اینه

pH محلول HNO_3 به‌دلیل قوی بودن اسید، کمتر است و از آنجایی‌که درجه یونش آن با افزایش دما تغییر نمی‌کند، pH ثابت است؛ ولی در اسید ضعیف HNO_2 با افزایش دما، درجه یونش افزایش می‌یابد، در نتیجه pH کاهش می‌یابد.

۹۵- پاسخ: گزینهٔ ۳ ▲ مشخصات سؤال: دشوار * شیمی ۳ (فصل ۱)

جوابش اینه

$$SO_3 + H_2O \rightarrow H_2SO_4 \rightarrow 2H^+$$

$$N_2O_5 + H_2O \rightarrow 2HNO_3 \rightarrow 2H^+$$

$$3/36\ L\ SO_3 \times \frac{1\ mol\ SO_3}{22/4\ L\ SO_3} \times \frac{2\ mol\ H^+}{1\ mol\ SO_3} = 0/3\ mol\ H^+$$

$$10/8\ g\ N_2O_5 \times \frac{1\ mol\ N_2O_5}{108\ g\ N_2O_5} \times \frac{2\ mol\ H^+}{1\ mol\ N_2O_5} = 0/2\ mol\ H^+$$

$$\text{مول کل } H^+ = 0/3 + 0/2 = 0/5\ mol$$

$$\text{غلظت یون هیدرونیوم}: \left[H^+\right] = \frac{0/5\ mol}{10^4\ L} = 5 \times 10^{-5}\ \frac{mol}{L}$$

اکنون می‌توان pH محلول را محاسبه کرد:

$$pH = -\log\left[H^+\right] = -\log 5 \times 10^{-5} = 5 - 0/7 = 4/3$$

و در نهایت میزان تغییر pH آب برابر است با:

$$\Delta pH = 7 - 4/3 = 2/7$$

سنجش کلاد
www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshCloud

۹۶- پاسخ: گزینهٔ ۳ ▲ مشخصات سؤال: دشوار * شیمی ۳ (فصل ۱)

جوابش اینه

$$۳KOH + H_۳PO_۴ \rightarrow K_۳PO_۴ + ۳H_۲O$$

$$\frac{۰/۸\times M}{۳} = \frac{۰/۴\times ۰/۲}{۱} \Rightarrow M = ۰/۳ \Rightarrow [OH^-] = ۰/۳ mol\cdot L^{-۱}$$

$$\Rightarrow pOH = -\log[OH^-] = -\log ۳\times ۱۰^{-۱} = ۱ - ۰/۵ = ۰/۵ \Rightarrow pH = ۱۴ - pOH = ۱۳/۵$$

$$K_۲O + H_۲O \rightarrow ۲KOH$$

$$\frac{?g K_۲O \times \frac{۷۰/۵}{۱۰۰}}{۹۴ g K_۲O} = \frac{۰/۸ L\times ۰/۳ mol\cdot L^{-۱}}{۲ mol KOH} \Rightarrow ? = ۱۶ g K_۲O$$

۹۷- پاسخ: گزینهٔ ۳ ▲ مشخصات سؤال: دشوار * شیمی ۳ (فصل ۱)

جوابش اینه

گزینهٔ ۱: درست؛ با توجه به اینکه هر دو اسید و باز داده‌شده قوی هستند، تفاوت pH دو محلول برابر ۱۲ خواهد بود.

$$HA: \begin{cases} M = ۰/۱ \\ \alpha = ۱ \end{cases} \Rightarrow [H^+] = M\cdot\alpha = ۰/۱\times ۱ \Rightarrow pH = ۱$$

$$BOH: \begin{cases} M = ۰/۱ \\ \alpha = ۱ \end{cases} \Rightarrow [OH^-] = M\cdot\alpha = ۰/۱\times ۱ \Rightarrow [H^+] = \frac{۱۰^{-۱۴}}{[OH^-]} = ۱۰^{-۱۳} \Rightarrow pH = ۱۳$$

گزینهٔ ۲: درست؛ نمک به‌دست آمده از واکنش یک مقدار معین اسید قوی مانند HCl و باز قوی مانند NaOH خنثی است و pH محلول دارای آن برابر ۷ است.

گزینهٔ ۳: نادرست؛ در اثر افزودن آب به محلول اسیدها یا بازهای قوی، اگر حجم محلول n برابر شود، pH به میزان $\log n$ تغییر خواهد کرد. با افزودن ۱۰۰mL آب به ۱۰۰mL محلول، حجم محلول دو برابر می‌شود، پس:

$$\Delta pH = \log n = \log ۲ = ۰/۳$$

گزینهٔ ۴: درست؛ اگر هر دو ماده به یک اندازه یونش یابند، پس غلظت مولی یون‌ها در هر دو محلول برابر است و رسانایی الکتریکی که تابع غلظت یون‌هاست نیز برابر می‌شود.

۹۸- پاسخ: گزینهٔ ۳ ▲ مشخصات سؤال: دشوار * شیمی ۳ (فصل ۱)

جوابش اینه

ابتدا شمار مول‌های OH^- حاصل از NaOH را به‌دست می‌آوریم:

$$?mol OH^- = ۰/۸ g NaOH \times \frac{۱ mol NaOH}{۴۰ g NaOH} \times \frac{۱ mol OH^-}{۱ mol NaOH} = ۰/۰۲ mol OH^-$$

سپس شمار مول‌های H^+ حاصل از HCl را به‌دست می‌آوریم:

$$?mol H^+ = ۱۰۰ mL HCl \times \frac{۱ L HCl}{۱۰۰۰ mL HCl} \times \frac{۰/۱ mol HCl}{۱ L HCl} \times \frac{۱ mol H^+}{۱ mol HCl} = ۰/۰۱ mol H^+$$

از مخلوط شدن NaOH با محلول HCl، خنثی شدن به‌صورت کامل انجام نمی‌شود، چون شمار مول‌های OH^- بیشتر است و محلول نهایی بازی می‌شود:

$$\text{مول هیدروکسید باقی‌مانده} = ۰/۰۲ - ۰/۰۱ = ۰/۰۱ mol OH^-$$

$$[OH^-] = \frac{۰/۰۱ mol}{۰/۱ L} = ۱۰^{-۱} mol\cdot L^{-۱} \Rightarrow [H^+] = \frac{۱۰^{-۱۴}}{[OH^-]} = \frac{۱۰^{-۱۴}}{۱۰^{-۱}} = ۱۰^{-۱۳}$$

$$pH = -\log[H^+] = -\log ۱۰^{-۱۳} = ۱۳$$

برای قسمت دوم سؤال که غلظت مولی نمک سدیم کلرید را خواسته است، ابتدا معادله واکنش را می‌نویسیم.

$$HCl(aq) + NaOH(aq) \rightarrow NaCl(aq) + H_۲O(l)$$

سنجش کلاد
www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshCloud

با توجه به اینکه شمار مول‌های HCl کمتر است، پس مول نمک تولیدشده را با توجه به مول HCl محاسبه می‌کنیم:

$$?\,mol\,NaCl = ۰/۰۱\,mol\,HCl \times \frac{۱\,mol\,NaCl}{۱\,mol\,HCl} = ۰/۰۱\,mol\,NaCl$$

$$[NaCl] = \frac{۰/۰۱\,mol}{۰/۱۰۰\,L} = ۰/۱\,mol\cdot L^{-۱}$$

۹۹- پاسخ: گزینهٔ ۳ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * شیمی ۳ (فصل ۱)

نباید سراغ اینا بری

گزینهٔ ۱: نادرست؛ pH آب خالص در دمای اتاق $(۲۵^\circ C)$ برابر ۷ است.

گزینهٔ ۲: نادرست؛ در دمای اتاق، حاصل‌ضرب $[H^+][OH^-]$ برابر $۱۰^{-۱۴}$ است.

گزینهٔ ۴: نادرست؛ رابطه میان pH و $[H^+]$ چنین است: $[H^+] = ۱۰^{-pH} \Leftrightarrow pH = -\log[H^+]$

۱۰۰- پاسخ: گزینهٔ ۴ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * شیمی ۳ (فصل ۱)

جوابش اینه

با توجه به اینکه سود سوزآور یا همان NaOH یک باز قوی است می‌توان گفت اگر حجم باز با اضافه کردن آب n برابر شود، pH به اندازهٔ $\log n$ کاهش می‌یابد:

$$\Delta pH = \log n \Leftrightarrow n = ۱۰^{\Delta pH}$$

$$۹۰\,mL + ۱۰\,mL = ۱۰۰\,mL$$

حجم باز ۱۰ برابر شده و چون $\log ۱۰ = ۱$، پس pH یک واحد کم می‌شود:

$$pH = ۱۲ - ۱ = ۱۱$$

۱۰۱- پاسخ: گزینهٔ ۴ ▲ مشخصات سؤال: دشوار * شیمی ۳ (فصل ۱)

جوابش اینه

ابتدا غلظت محلول بازی مورد استفاده را به‌دست می‌آوریم:

$$[H^+] = ۱۰^{-pH} = ۱۰^{-۱۲} \Rightarrow [OH^-] = [KOH] = \frac{۱۰^{-۱۴}}{[H^+]} = \frac{۱۰^{-۱۴}}{۱۰^{-۱۲}} = ۱۰^{-۲}\,mol\cdot L^{-۱}$$

اکنون می‌توان غلظت محلول اسیدی خنثی شده توسط این باز را تعیین کرد:

$$n_a M_a V_a = n_b M_b V_b \Rightarrow ۱ \times M_a \times ۲۵ = ۱ \times ۱۰^{-۲} \times ۱۰۰ \Rightarrow M_a = ۰/۰۴\,mol\cdot L^{-۱}$$

ازآنجاکه با افزودن آب به محلول اسیدی اولیه حجم آن ۵ برابر شده است، می‌توان نتیجه گرفت که محلول حاصل با غلظت ۰/۰۴ مول بر لیتر، ۵ برابر رقیق‌تر از محلول اولیه بوده است. به این ترتیب غلظت محلول اولیه برابر خواهد بود با:

$$[HNO_۳]_{\text{اولیه}} = ۰/۰۴ \times ۵ = ۰/۲\,mol\cdot L^{-۱}$$

۱۰۲- پاسخ: گزینهٔ ۱ ▲ مشخصات سؤال: دشوار * شیمی ۳ (فصل ۱)

جوابش اینه

ابتدا حجم محلول را با استفاده از چگالی به‌دست می‌آوریم:

$$d = \frac{m\,(g)}{V\,(mL)} \Rightarrow ۱/۲ = \frac{۳۰}{V\,(mL)} \Rightarrow V = \frac{۳۰}{۱/۲} = ۲۵\,mL = ۰/۰۲۵\,L$$

در ادامه شمار مول‌های سدیم هیدروکسید موجود در محلول را حساب می‌کنیم:

$$n\,(NaOH) = \frac{۰/۱۶\,g}{۴۰\,g\cdot mol^{-۱}} = ۰/۰۰۴\,mol\,NaOH$$

اکنون غلظت مولی محلول NaOH را حساب می‌کنیم:

$$M_{NaOH} = \frac{۰/۰۰۴\,mol}{۰/۰۲۵\,L} = ۰/۱۶\,mol\cdot L^{-۱}$$

سنجش کلاد
www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshCloud

سدیم هیدروکسید یک باز قوی است؛ بنابراین غلظت یون هیدروکسید در محلول آن با غلظت محلول برابر است. در نتیجه برای محاسبهٔ pH محلول، غلظت یون هیدرونیوم را با استفاده از غلظت یون هیدروکسید حساب می‌کنیم:

$$\left[H^+\right]\left[OH^-\right]=10^{-14} \Rightarrow \left[H^+\right]=\frac{10^{-14}}{16\times10^{-2}}=\frac{1}{16}\times10^{-12}$$

$$\Rightarrow pH=-\log\left[H^+\right]=-\log\left[\frac{1}{16}\times10^{-12}\right]=-\log16^{-1}-\log10^{-12}=\log16+12=\underbrace{4\log2}_{0/3}+12=13/2$$

$$pOH=-\log\left[OH^-\right]=-\log16\times10^{-2}=\underbrace{-4\log2}_{-0/3}+2=0/8$$

$$pH+pOH=14 \Rightarrow pH=14-0/8=13/2$$

۱۰۳- پاسخ: گزینهٔ ۴ ▲ مشخصات سؤال: دشوار * شیمی ۳ (فصل ۱)

فرمول شیمیایی جوش شیرین، $NaHCO_3$ است.

گزینهٔ ۱: درست؛ نسبت کاتیون Na^+، به آنیون چند اتمی HCO_3^-، برابر یک است.

گزینهٔ ۲: درست

$$HCl(aq)+NaHCO_3(s) \rightarrow NaCl(aq)+H_2O(l)+CO_2(g)$$

هر سه فراورده سه حالت فیزیکی متفاوت دارند.

گزینهٔ ۳: درست

$$RCOOH(s)+NaHCO_3(aq) \rightarrow RCOONa(aq)+CO_2(g)+H_2O(l)$$

گزینهٔ ۴: نادرست؛ سدیم هیدروژن کربنات در آب محلول است و مخلوط آن با آب، از نوع همگن است.

۱۰۴- پاسخ: گزینهٔ ۱ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * شیمی ۳ (فصل ۱)

$$?\,mg\,NaHCO_3=50\,mL\,HCl\times\frac{1\,L\,HCl}{1000\,mL\,HCl}\times\frac{0/001\,mol\,HCl}{1\,L\,HCl}\times\frac{1\,mol\,NaHCO_3}{1\,mol\,HCl}\times\frac{84\,g\,NaHCO_3\ \text{خالص}}{1\,mol\,NaHCO_3}$$

$$\times\frac{100\,g\,NaHCO_3\ \text{ناخالص}}{80\,g\,NaHCO_3\ \text{خالص}}\times\frac{1000\,mg\,NaHCO_3}{1\,g\,NaHCO_3}=5/25\,mg\,NaHCO_3$$

$$\frac{?\times10^{-3}\,g\times\frac{80}{100}}{84\,g\,NaHCO_3}=\frac{0/050\,L\times0/001\,mol\cdot L^{-1}}{1\,mol\,HCl} \Rightarrow ?=5/25\,g\,NaHCO_3$$

۱۰۵- پاسخ: گزینهٔ ۱ ▲ مشخصات سؤال: ساده * شیمی ۳ (فصل ۱)

منیزیم هیدروکسید $(Mg(OH)_2)$ یا شیر منیزی یک ضداسید است که اگر با اسید معده واکنش دهد، آن را خنثی کرده و در نتیجه سبب بالا رفتن pH آن می‌شود. واکنش انجام شده به‌صورت زیر است:

$$2HCl+Mg(OH)_2 \rightarrow MgCl_2+2H_2O$$

سنجش کلاد
www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshCloud