

A

دفترچه پاسخ تشریحی

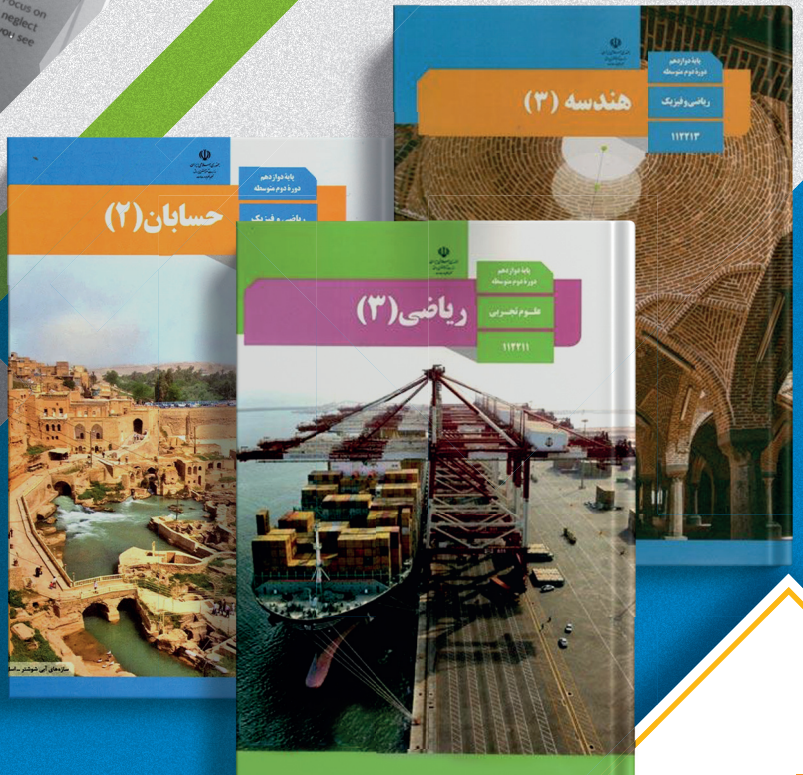
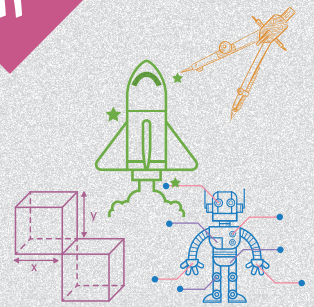
گروه آزمایشی علوم ریاضی

آزمون آزمایشی ۲۸ دی ۱۴۰۳

ویژه داوطلبان آزمون سراسری ۱۴۰۴

پایه
دوازدهم

مرحله
۱۱



۱۴۰۳-۱۴۰۴

گزیده دو
مؤسسه آموزشی فرهنگی

تذکرات مهم ↓

➤ آزمون آزمایشی مرحله ۱۲ گزینه دو، در روز جمعه ۱۲ بهمن ۱۴۰۳ برگزار می گردد.

➤ داوطلب گرامی، جهت استفاده از خدمات طلایی خود مانند کارنامه های هوشمند بعد از آزمون، آزمونک ها، بانک سؤال گزینه دو، رفع اشکال هوشمند، جزوه های کمک آموزشی، آرشیو آزمون های گزینه دو و...، با استفاده از شماره داوطلبی (به عنوان نام کاربری) و کد ملی خود (به عنوان رمز عبور) وارد وب سایت گزینه دو به آدرس www.gozine2.ir شوید.

➤➤ در صورتی که اینترنتی ثبت نام کرده اید، رمز عبور شما همان رمزی است که خودتان انتخاب نموده اید.

➤ کارنامه های آزمون آزمایشی مرحله ۱۱ به صورت کامل، با فاصله زمانی کوتاهی پس از آزمون مطابق اطلاعیه اعلام شده، بر روی پایگاه اینترنتی گزینه دو به آدرس www.gozine2.ir قرار می گیرد. در صورت بروز اشکال در دریافت کارنامه، موضوع را از طریق نمایندگی شهر خود پیگیری نمایید.



داوطلب گرامی، شما می توانید با اسکن تصویر بالا به وسیله گوشی هوشمند و یا تبلت خود، به صفحه اینستاگرام مؤسسه گزینه دو وارد شوید.

[gozine2.ir](https://www.instagram.com/gozine2.ir)

مدیر واحد آموزش تخصصی: محمدرضا محمدهاشمی

معاون تولید محتوا: علی الفتی

کارشناسان

علی صادقی • نیکو دهقان

محمد امین خدابخنده • امیرورودی

محمد امین خدابخنده • امیرورودی

پوپک مقدم

طراحان

حسین شفیع زاده • ایمان اردستانی

سید محسن میراسلامی • علی نعمت

علیرضا شریف خطیبی • امیدرضا پورحسینی

علی افضل زاده • مهرداد کیوان

وحید رباعی

مسئول درس: علی افضل زاده
دستیاران: عباس سعیدی - امین کبیری

مسئول درس: سعید اکبرزاده
دستیار: هادی کاظم نژاد

مسئول درس: سعید اکبرزاده
دستیار: فرهاد فرزانی

مسئول درس: ایمان اردستانی
دستیاران: وحید جعفری - مهدی پوررضایی

مسئول درس: مهدی مجدآرا
دستیاران: حسین اسدزاده - مهدی پوررضایی

حسابان و ریاضی پایه

هندسه

ریاضیات گسسته

ریاضی تجربی

ریاضی انسانی

گروه ریاضی

مدیر گروه: محمدرضا محمدهاشمی
معاون: علی الفتی

کارشناسان

بتول خواجه پور • حسین ایمانی پور
مرتضی فرهنگد

سید علیرضا کشفیان • نرگس سادات حسینی
مریم کلی حسنلو

محمد احمدی • حسین ایمانی پور

فرزانه صاعدی • آنیتا هرطونیان
سهیلا مرادی

طراحان

محمد یازوکی • امیر کبیری راد
علی پناهی شایق • علیرضا اکبریور
بهرام میرحبیبی • مسعود حدادی
منصور کهن دل • فرزاد صادقیان

علی نعیمی • بهمن شاهمرادی
احمد رضوانی • احمد مصلاهی
جمال خم خاجی

مشاء الله سلیمانی • بهنام ابراهیم پور
مهرداد ملاصالحی • شهرام شاه پرویزی
محمد علی توسلی فر • محمد احمدی

فرزانه رجایی • حسن علی محمدی
فرزانه صاعدی

مسئول درس: امیر کبیری راد
دستیار: پرسا کامکار

مسئول درس: منصور داودوندی
دستیار: ساناز دریکوندی

مسئول درس: شهرام شاه پرویزی

مسئول درس: شکبیا کریمی

زیست شناسی

فیزیک

شیمی

زمین شناسی

گروه علوم

مدیر گروه: محمدرضا محمدهاشمی
معاون: علی الفتی

کارشناسان

سپهر سالار کیا • سید محمد صادق حسام زاده
محمد حسن مزروعی • عرشیا شریفیان

هستی ناصح • نیایش غریبی
مهتاب شیرازی

ثنا کاشیان • فاطمه انوری

سارا حمزه • فاطمه نظری
مهتاب شیرازی • یکتا فضل الهی
صبا پهلوان

علی سلوکی • مهتاب شیرازی

علی سلوکی • مهتاب شیرازی

مهدی مشایخی • مهتاب بیشه
محمد علی مهرآبادی • فرزاد مختاری نژاد

کوثر رعدی

طراحان

محمدرضا لمسه چی • ابوالفضل قاضی
عماد فیض آبادی • علی عطری

فروغ تیموریان • آریتا بیدقی
محمد زمان کبیر • علیرضا مختاری

سیده ضحی سکاکی • سیمین زاهدی
مهدی جاهدی

اسرافیل قربانپور • کاظم غلامی
پدرام علیمرادی • حمید جوهری مجد
عرفان جالیزی • پویا رضاداد

بهرز یحیی • شهرام امامی
فاطمه نیتی • نگار مروتی

بهرز یحیی • شهرام امامی
نگار مروتی

احمد خداداد حسینی • حمید سودیان طهرانی
سعید رحیمیان • علی اکبر آخوندی
مهدی لاجوردی

میترا چینی ساز • حسین خاکساری
محمدرضا مبارکی • طاهره کریمی
آرش بدری • علی محسنی

مسئول درس: محمدرضا پیرو
دستیار: حسنا محمدی

مسئول درس: الهام رضایی
دستیار: فاطمه صفری

مسئول درس: سیده ضحی سکاکی
دستیار: حسین اصفهانی

مسئول درس: پویا رضاداد

مسئول درس: مهسا اصغری
دستیار: ثنا کاشیان

مسئول درس: الناز گنج کار
دستیار: الهه ریاحی نسب

مسئول درس: سعید رحیمیان
دستیاران: منصور کاظم بیگی - محمد حسین خدام

مسئول درس: امیر محمد بیگی
دستیار: محمدرضا مبارکی

علوم و فنون ادبی

جامعه شناسی

روان شناسی

زبان عربی

تاریخ

جغرافیا

فلسفه و منطق

اقتصاد

گروه انسانی

مدیر گروه: علی الفتی
معاون: علی الفتی

ریاضیات

۱- پاسخ: گزینه ۲

▲ مشخصات سؤال: ساده * حسابان ۲ (فصل ۳، درس ۲)



- به ازای هر x داریم:

$$\sqrt{x^2} = |x|$$

- به طور کلی حد هر چند جمله‌ای به صورت $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ در $\pm\infty$ برابر حد جمله‌ای از آن است که دارای بزرگ‌ترین درجه است یعنی:

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} (a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} a_n x^n$$



با جای گذاری $2x$ به جای x در تابع f ، تابع $f(2x)$ را پیدا کرده و حاصل حد را به دست می‌آوریم:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(2x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x - \sqrt{16x^2 + 2x - 1}}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x - |4x|}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x + 4x}{x} = 6$$

▲ مشخصات سؤال: ساده * حسابان ۲ (فصل ۱، درس ۲)

۲- پاسخ: گزینه ۳



- قضیه تقسیم برای چند جمله‌ای‌ها: اگر $f(x)$ و $p(x)$ چند جمله‌ای باشند و درجه $p(x)$ از صفر بزرگ‌تر باشد، آن‌گاه چند جمله‌ای‌های منحصر به فرد $q(x)$ و $r(x)$ وجود دارند به طوری که:

$$f(x) = p(x)q(x) + r(x)$$

که در آن $r(x) = 0$ یا درجه $r(x)$ از درجه $p(x)$ کمتر است.

- (قضیه): باقی‌مانده تقسیم چند جمله‌ای $f(x)$ بر $ax + b$ عبارت است از $r(x) = f\left(\frac{-b}{a}\right)$.



قضیه تقسیم را نوشته و ریشه‌های معادله $x^2 + x - 6 = 0$ یعنی 2 و -3 را جایگزین x می‌کنیم:

$$f(x) = (x^2 + x - 6)g(x) + 3x + 1 \Rightarrow \begin{cases} f(2) = 2 \times 2 + 1 = 7 \\ f(-3) = 3 \times (-3) + 1 = -8 \end{cases}$$

برای محاسبه باقی‌مانده خواسته شده، ریشه معادله $x + 1 = 0$ یعنی $x = -1$ را جایگزین x می‌کنیم:

$$g(x) = 2f(x+3) + xf(x-2)$$

$$R = g(-1) = 2f(2) - f(-3) = 2 \times 7 - (-8) = 22$$

▲ مشخصات سؤال: ساده * حسابان ۲ (فصل ۲، درس ۱)

۳- پاسخ: گزینه ۴



- توابع $y = a \sin bx + c$ و $y = a \cos bx + c$ دارای مقدار ماکزیمم $|a| + c$ و مقدار مینیمم $-|a| + c$ و دوره تناوب $\frac{2\pi}{|b|}$ است.



ضابطه تابع به صورت زیر است:

$$f(x) = c + \frac{a}{\gamma} \sin \gamma bx$$

از آنجا که $f(0) = c$ پس $c = 1/5$

ضمناً در $x = 0$ تابع نزولی است، پس $ab < 0$ است. فرض کنید $a < 0$ و $b > 0$ باشد.

دوره تناوب تابع برابر $4\pi - (-\pi) = 3\pi$ است، پس:

$$T = 4\pi = \frac{2\pi}{|\gamma b|} \xrightarrow{b > 0} b = \frac{1}{4}$$

همچنین مقدار مینیمم تابع برابر -1 است، پس:

$$\min = -1 \Rightarrow c - \left| \frac{a}{\gamma} \right| = -1 \xrightarrow{a < 0} c + \frac{a}{\gamma} = -1 \xrightarrow{c = 1/5} a = -5$$

بنابراین مقدار خواسته شده برابر است با:

$$c + ab = \frac{1}{5} - 5 \times \frac{1}{4} = \frac{1}{5} - \frac{5}{4} = \frac{1}{5} - \frac{5}{4} = \frac{1}{4}$$

▲ مشخصات سؤال: ساده * حسابان ۲ (فصل ۱، درس ۲)

۴- پاسخ: گزینه ۲



باقی مانده تقسیم چندجمله‌ای $f(x)$ بر $ax + b$ عبارت است از $r(x) = f\left(\frac{-b}{a}\right)$.



نمودار تابع $y = x^3$ ، یک واحد به چپ منتقل شده است:

$$f(x) = -(x+1)^3 + b \Rightarrow a = -1$$

همچنین تابع f از مبدأ مختصات می‌گذرد، پس:

$$f(0) = 0 \Rightarrow -1 + b = 0 \Rightarrow b = 1$$

پس $f(x) = -(x+1)^3 + 1$ است.

باقی مانده تقسیم $f(x-b)$ بر $x-a$ برابر $f(a-b)$ است.

$$R = f(a-b) = f(-1-1) = f(-2) = -(-2+1)^3 + 1 = 1 + 1 = 2$$

▲ مشخصات سؤال: ساده * حسابان ۲ (فصل ۱، درس ۱)

۵- پاسخ: گزینه ۴



- برای رسم نمودار $y = f(x) + k$ ، اگر $k > 0$ باشد، کافی است نمودار تابع $f(x)$ را k واحد در راستای قائم به سمت بالا انتقال دهیم و برای $k < 0$ این انتقال به سمت پایین انجام می‌شود.

- برای رسم نمودار $y = f(x+k)$ ، اگر $k > 0$ باشد، کافی است نمودار تابع $f(x)$ را k واحد در جهت افقی به سمت چپ انتقال دهیم و برای $k < 0$ این انتقال به اندازه $|k|$ واحد به سمت راست انجام می‌شود.

- اگر طول نقاط تابع $y = f(x)$ را قرینه کنیم، نقاط تابع $y = f(-x)$ به دست می‌آیند. بنابراین نمودار تابع $y = f(-x)$ قرینه نمودار تابع $y = f(x)$ نسبت به محور عرض‌ها است.



ابتدا رأس تابع f را پیدا می‌کنیم:

$$f(x) = x^2 - 4x + k \Rightarrow f(x) = (x-2)^2 + k - 4 \Rightarrow \text{رأس}(2, k-4)$$

در اثر تبدیلات انجام شده، مختصات رأس جدید را محاسبه می‌کنیم:

$$(2, k-4) \xrightarrow{\text{۳ واحد راست}} (\delta, k-4) \xrightarrow{\text{۲ واحد پایین}} (\delta, k-6) \xrightarrow[\text{محور عرض‌ها}]{\text{قرینه نسبت به}} (-\delta, k-6)$$

$$k-6 = -(-\delta) \Rightarrow k-6 = \delta \Rightarrow k = 11$$

نقطه به دست آمده باید روی خط $y = -x$ باشد، پس:



مطابق قوانین تبدیل نمودار توابع، با فرض $f(x) = x^2 - 4x + k$ ، داریم:

$$f(x) \xrightarrow{\text{۳ واحد راست}} f(x-3) \xrightarrow{\text{۲ واحد پایین}} f(x-3)-2 \xrightarrow[\text{محور عرض‌ها}]{\text{قرینه نسبت به}} f(-x-3)-2$$

$$\text{منحنی جدید: } y = f(-x-3)-2 = (-x-3)^2 - 4(-x-3) + k - 2 = x^2 + 10x + 19 + k$$

اکنون به محاسبه رأس سهمی جدید می‌پردازیم:

$$x = -\frac{b}{2a} = -\frac{10}{2} = -5 \Rightarrow y = 25 - 50 + 19 + k = k - 6$$

معادله نیمساز ناحیه دوم به صورت $y = -x$ است، پس از آنجا که رأس سهمی روی نیمساز ربع دوم قرار دارد، داریم:

$$k-6 = -(-5) \Rightarrow k = 11$$

۶- پاسخ: گزینه ۴ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * حسابان ۲ (فصل ۳، درس ۲)



معادله خطوط f و g را به دست می‌آوریم:

تابع خطی f از دو نقطه $(a, 0)$ و $(0, 2)$ می‌گذرد، پس شیب آن برابر $-\frac{2}{a}$ و عرض از مبدأ آن برابر ۲ است.

تابع خطی g از دو نقطه $(-2, 0)$ و $(0, 2a)$ می‌گذرد، پس شیب آن برابر $\frac{2a}{2}$ و عرض از مبدأ آن برابر $2a$ است؛ بنابراین ضابطه دو تابع f و g

و ترکیب آن‌ها به صورت زیر است:

$$\begin{cases} f(x) = -\frac{2}{a}x + 2 \\ g(x) = ax + 2a \end{cases} \Rightarrow fog(x) = -\frac{2}{a}(ax + 2a) + 2 = -2x - 2$$

اکنون حد داده شده را بر حسب a محاسبه می‌کنیم:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{fog}{f+g} \right)(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-2x-2}{-\frac{2}{a}x+2+ax+2a} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-2x-2}{(-\frac{2}{a}+a)x+2+2a} = \frac{-2}{-\frac{2}{a}+a} = \frac{-2a}{a^2-2}$$

مقدار این حد برابر ۱۲ است، پس:

$$\frac{-2a}{a^2-2} = 12 \Rightarrow 6a^2 + a - 12 = 0 \Rightarrow \begin{cases} a = -\frac{3}{2} \\ a = \frac{4}{3} \end{cases} \xrightarrow{a < 0} a = -\frac{3}{2}$$

۷- پاسخ: گزینه ۳ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * حسابان ۲ (فصل ۲، درس ۲)



$$\begin{aligned} - \tan 2\alpha &= \frac{2 \tan \alpha}{1 - \tan^2 \alpha} \\ - \tan(\alpha + \beta) &= \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \tan \beta} \\ - \tan\left(\alpha - \frac{\pi}{4}\right) &= -\cot \alpha \end{aligned}$$



با توجه به اتحادهای مثلثاتی، مقدار $\tan \alpha$ را محاسبه می‌کنیم:

$$\tan\left(2\alpha - \frac{\pi}{2}\right) = \frac{12}{5} \Rightarrow -\cot 2\alpha = \frac{12}{5} \Rightarrow \tan 2\alpha = -\frac{5}{12} \Rightarrow \frac{2 \tan \alpha}{1 - \tan^2 \alpha} = -\frac{5}{12} \Rightarrow 5 \tan^2 \alpha - 24 \tan \alpha - 5 = 0$$

$$\Rightarrow (\tan \alpha - 5)(5 \tan \alpha + 1) = 0 \xrightarrow{\tan \alpha < 0} \tan \alpha = -\frac{1}{5}$$

$$\tan\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right) = \frac{1 + \tan \alpha}{1 - \tan \alpha} = \frac{1 - \frac{1}{5}}{1 + \frac{1}{5}} = \frac{2}{3}$$

از طرفی مقدار خواسته شده برابر است با:



می‌دانیم $\tan\left(2\alpha + \frac{\pi}{2}\right) = \tan\left(2\alpha - \frac{\pi}{2}\right)$ بنابراین:

$$\tan\left(2\alpha - \frac{\pi}{2}\right) = \frac{12}{5} \Rightarrow \tan\left(2\alpha + \frac{\pi}{2}\right) = \frac{12}{5} \Rightarrow \tan\left(2\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right)\right) = \frac{12}{5} \Rightarrow \frac{2 \tan\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right)}{1 - \tan^2\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right)} = \frac{12}{5}$$

$$\Rightarrow 10 \tan\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right) = 12 - 12 \tan^2\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right) \Rightarrow 6 \tan^2\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right) + 5 \tan\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right) - 6 = 0 \Rightarrow \tan\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{2}{3} \text{ یا } -\frac{2}{2}$$

با توجه به اینکه $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$ ، پس $\frac{2\pi}{4} < \alpha + \frac{\pi}{4} < \frac{5\pi}{4}$ یعنی $-1 < \tan\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right) < 1$ ؛ بنابراین جواب $-\frac{2}{2}$ برای $\tan\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right)$ غیر قابل قبول است و داریم:

$$\tan\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{2}{3}$$

▲ مشخصات سؤال: متوسط * حسابان ۲ (فصل ۱، درس ۲)

۸- پاسخ: گزینه ۱



- تابع f را در یک مجموعه، اکیداً صعودی می‌گوییم، اگر برای هر دو مقدار a و b در این مجموعه که $a < b$ ، آن‌گاه $f(a) < f(b)$ در فاصله‌ای که یک تابع اکیداً صعودی است، با حرکت روی نمودار (از چپ به راست)، همواره روبه بالا خواهیم رفت.



بزرگ‌ترین بازه‌ای که تابع $y = 2 - f\left(1 - \frac{x}{3}\right)$ در آن اکیداً صعودی است، بازه $[-\infty, 2]$ است، پس $x = 2$ طول رأس سهمی

$$-\frac{m}{4} = \frac{1}{3} \Rightarrow m = -\frac{4}{3} \quad \text{پس طول رأس سهمی } y = f(x) \text{ برابر } 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3} \text{ است، پس:}$$



اگر $x = \alpha$ رأس سهمی g باشد، آن‌گاه بازه $[-\infty, \alpha]$ بزرگ‌ترین بازه‌ای است که تابع g در آن بازه اکیداً یکنواست. رأس سهمی

$$f(x) = 2x^2 + mx - 1 \text{، به طول } \frac{-b}{2a} = -\frac{m}{4} \text{ است.}$$

برای رسم تابع $y = 2 - f\left(1 - \frac{x}{3}\right)$ باید تابع f را یک واحد به چپ برده، سپس طول نقاط را سه برابر کرده و آن را نسبت به محور عرض‌ها

قرینه کنیم؛ بنابراین رأس سهمی $y = 2 - f\left(1 - \frac{x}{3}\right)$ به صورت $x = -3\left(-\frac{m}{4} - 1\right)$ است.

$$\text{طول رأس سهمی باید برابر ۲ باشد، پس: } -3\left(-\frac{m}{4} - 1\right) = 2 \Rightarrow \frac{3m}{4} + 3 = 2 \Rightarrow m = -\frac{4}{3}$$

۹- پاسخ: گزینه ۲

▲ مشخصات سؤال: متوسط * حسابان ۲ (فصل ۱، درس ۲)



- تابع f را در یک مجموعه، اکیداً نزولی می‌گوییم، اگر برای هر دو مقدار a و b در این مجموعه که $a < b$ ، آن‌گاه $f(a) > f(b)$. در فاصله ای که یک تابع اکیداً نزولی است، با حرکت روی نمودار (از چپ به راست)، همواره روبه پایین خواهیم رفت.



اگر $f(a) > f(b)$ و f اکیداً نزولی باشد، آن‌گاه $a < b$ است.

$$f(6x - x^2) > f(8) \Rightarrow 6x - x^2 < 8 \Rightarrow x^2 - 6x + 8 > 0 \Rightarrow x < 2 \text{ یا } x > 4 \quad (1)$$

از طرفی طبق شرط دامنه داریم:

$$(6x - x^2) \in D_f \Rightarrow 6x - x^2 > 0 \Rightarrow x^2 - 6x < 0 \Rightarrow 0 < x < 6 \quad (2)$$

پس از اشتراک (۱) و (۲) مجموعه جواب به صورت $(0, 2) \cup (4, 6)$ است که شامل دو عدد صحیح ۵ و ۱ است.

۱۰- پاسخ: گزینه ۲ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * حسابان ۲ (فصل ۲، درس ۲)



$$\begin{aligned} - \tan 2\alpha &= \frac{2 \tan \alpha}{1 - \tan^2 \alpha} \\ - \tan(\alpha - \beta) &= \frac{\tan \alpha - \tan \beta}{1 + \tan \alpha \tan \beta} \end{aligned}$$



ابتدا $\tan \alpha$ را محاسبه می‌کنیم:

$$\tan 2\alpha = \frac{2 \tan \alpha}{1 - \tan^2 \alpha} \Rightarrow \frac{3}{4} = \frac{2 \tan \alpha}{1 - \tan^2 \alpha} \Rightarrow 3 \tan^2 \alpha + 8 \tan \alpha - 3 = 0 \Rightarrow (\tan \alpha + 3)(3 \tan \alpha - 1) = 0$$

$$\xrightarrow{\tan \alpha > 0} \tan \alpha = \frac{1}{3}$$

حال، از آنجا که $\alpha + \beta = \frac{\pi}{4}$ است، پس:

$$\tan \beta = \tan\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right) = \frac{1 - \tan \alpha}{1 + \tan \alpha} = \frac{1 - \frac{1}{3}}{1 + \frac{1}{3}} = \frac{1}{2}$$

اکنون اگر طول BD را x بنامیم، با توجه به اینکه $BC = AB = DB + 2$ ، داریم:

$$\tan \beta = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{x}{x+2} = \frac{1}{2} \Rightarrow 2x = x+2 \Rightarrow x = 2$$

۱۱- پاسخ: گزینه ۳ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * حسابان ۲ (فصل ۲، درس ۲)



ابتدا معادله را فقط بر حسب سینوس می‌نویسیم:

$$2(1 - \sin^2 x) + a \sin x = a \Rightarrow 2(1 - \sin^2 x) = a(1 - \sin x) \Rightarrow 2(1 - \sin x)(1 + \sin x) = a(1 - \sin x)$$

یکی از جواب‌های معادله، از تساوی $1 - \sin x = 0$ به دست می‌آید که همان $x = \frac{\pi}{2}$ است. پس با توجه به اینکه مجموع دو جواب معادله در

بازه $(0, \frac{3\pi}{2})$ برابر $\frac{5\pi}{3}$ است، جواب دیگر برابر $\frac{7\pi}{6}$ است.

$$2(1 + \sin x) = a \Rightarrow \sin x = \frac{a}{2} - 1 \xrightarrow{x = \frac{7\pi}{6}} -\frac{1}{2} = \frac{a}{2} - 1 \Rightarrow a = 1$$

بنابراین دوره تناوب تابع $y = \cos \frac{x}{a} = \cos x$ برابر 2π است.

▲ مشخصات سؤال: متوسط * حسابان ۲ (فصل ۳، درس ۲)

۱۲- پاسخ: گزینه ۲



- خط $x = a$ را مجانب قائم نمودار تابع $f(x)$ گویند هرگاه حداقل یکی از شرایط زیر برقرار باشد:

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = +\infty \quad \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = -\infty \quad \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = -\infty$$

- خط $y = L$ را مجانب افقی نمودار $y = f(x)$ می‌نامیم به شرطی که حداقل یکی از دو شرط $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = L$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = L$ برقرار باشد.



مجانب‌های تابع فقط در یک نقطه متقاطع هستند، پس تابع فقط یک مجانب افقی و یک مجانب قائم دارد. عدد a صفر نیست، پس معادلهٔ مخرج نمی‌تواند درجه یک باشد. همچنین c صفر نیست، پس معادلهٔ مخرج نمی‌تواند ریشهٔ مشترک با صورت داشته باشد، پس حتماً باید مخرج ریشهٔ مضاعف داشته باشد. بنابراین باید $x = -1$ ریشهٔ مضاعف مخرج و $y = 2$ برابر حد f در $+\infty$ و $-\infty$ باشد.

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \frac{c+3}{a} = 2 \Rightarrow c+3 = 2a$$

$$ax^2 + bx + c = a(x+1)^2 = ax^2 + 2ax + a \Rightarrow \begin{cases} 2a = b \\ a = c \end{cases}$$

از حل دستگاه $\begin{cases} a = c \\ c+3 = 2a \end{cases}$ نتیجه می‌گیریم $a = c = 3$ و در نتیجه $b = 6$ ؛ بنابراین مقدار خواسته شده برابر است با:

$$f(x) = \frac{6x^2}{3(x+1)^2} \Rightarrow f(-2) = 8$$

▲ مشخصات سؤال: متوسط * حسابان ۲ (فصل ۱، درس‌های ۱ و ۲)

۱۳- پاسخ: گزینه ۲



- برای رسم نمودار $y = f(x+k)$ ، اگر $k > 0$ باشد، کافی است نمودار تابع $f(x)$ را k واحد در جهت افقی به سمت چپ انتقال دهیم و برای $k < 0$ ، این انتقال به اندازه $|k|$ واحد به سمت راست انجام می‌شود.

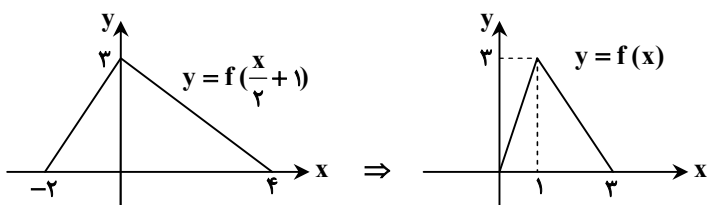
- برای رسم نمودار تابع $y = f(kx)$ ، کافی است طول نقاط نمودار تابع $y = f(x)$ را در $\frac{1}{k}$ ضرب کنیم.

- اگر $k > 1$ باشد، نمودار $y = f(kx)$ از انقباض افقی نمودار $y = f(x)$ در راستای محور x ها به دست می‌آید و اگر $0 < k < 1$ باشد، این نمودار از انبساط افقی نمودار $y = f(x)$ حاصل می‌شود.

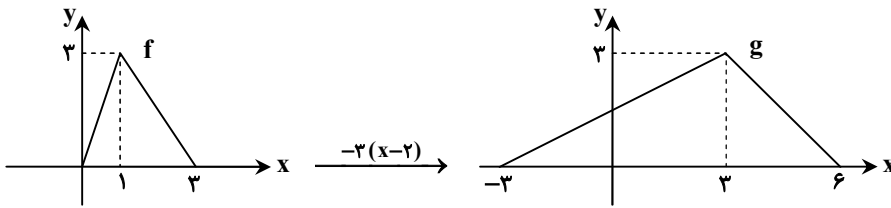


اگر طول نقاط روی نمودار تابع $y = f(\frac{x}{4} + 1)$ را نصف کرده و سپس یک واحد به سمت راست ببریم، به نمودار تابع f می‌رسیم.

$$y = f\left(\frac{x}{4} + 1\right) \xrightarrow{x \rightarrow 2x} y = f(x+1) \xrightarrow{x \rightarrow x-1} y = f(x)$$



برای رسم نمودار تابع $g(x) = f(-\frac{x}{3} + 2)$ ، نمودار تابع f را دو واحد به سمت چپ می‌آوریم و سپس طول نقاط حاصل را سه برابر کرده و نمودار را نسبت به محور عرض‌ها قرینه می‌کنیم:



پس نمودار تابع g در بازه $[-3, 3]$ و زیرمجموعه‌های آن اکیداً صعودی است، پس حداکثر $\beta - \alpha$ برابر ۶ است.

اینجوری هم میشه

بعد از رسم تابع f می‌توان گفت، تابع $y = 2 - \frac{x}{3}$ اکیداً نزولی است، پس باید قسمتی از دامنه f را انتخاب کنیم که در آن نزولی باشد، تا تابع g اکیداً صعودی باشد. تابع f در بازه $[1, 3]$ اکیداً نزولی است؛ بنابراین:

$$1 \leq -\frac{x}{3} + 2 \leq 3 \xrightarrow{-2} -1 \leq -\frac{x}{3} \leq 1 \xrightarrow{\times(-3)} -3 \leq x \leq 3$$

پس حداکثر $\beta - \alpha$ برابر ۶ است.

اینجوری هم میشه

طول بازه صعودی بودن با انتقال تغییر نمی‌کند، پس فقط تبدیل‌های انقباض و انبساط و قرینه را روی طول بازه اکیداً نزولی تابع اولیه انجام می‌دهیم:

$$y = f\left(\frac{x}{3}\right) \xrightarrow{\text{نصف کردن افقی}} y = f(x) \xrightarrow{\text{برابر کردن افقی}} y = f\left(\frac{x}{3}\right)$$

$$\max(\beta - \alpha) = 3 \times \frac{1}{3} \times (3 - 0) = 3$$

▲ مشخصات سؤال: متوسط * حسابان ۲ (فصل ۳، درس ۱)

۱۴- پاسخ: گزینه ۱

جوابش اینه

حاصل حد داده شده برابر $+\infty$ است، پس $f^{-1}(2) = 1$ و یعنی $f(1) = 2$ ، اگر شیب تابع خطی f برابر m باشد، داریم:

$$f(x) = m(x-1) + 2 \quad \text{پس} \quad f^{-1}(x) = \frac{x-2+m}{m}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{f(x)}{1-f^{-1}(x)} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{m(x-1)+2}{1-\frac{x-2+m}{m}} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{m^2(x-1)+2m}{2-x}$$

مخرج کسر با مقادیر منفی به صفر میل می‌کند، پس برای آنکه حاصل حد برابر $+\infty$ باشد، باید حد صورت کسر، منفی باشد، یعنی:

$$m^2 + 2m < 0 \Rightarrow -2 < m < 0$$

حال تابع g را می‌سازیم:

$$g(x) = \frac{x}{2-f(x)} = \frac{x}{2-m(x-1)-2} = \frac{-x}{m(x-1)}$$

از آنجا که $m < 0$ ، پس:

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} g(x) = \frac{-1}{m \times 0^+} = +\infty$$

▲ مشخصات سؤال: متوسط * حسابان ۲ (فصل ۲، درس ۲)

۱۵- پاسخ: گزینه ۳

خوبه اینو بدونی

- جواب‌های کلی معادله $\cos x = \cos \alpha$ به صورت $x = 2k\pi \pm \alpha$ می‌باشند که $k \in \mathbb{Z}$.



با دقت در سمت چپ معادله، داریم:

$$-1 \leq \sin^3 x \leq 1 \Rightarrow 0 \leq \sin^2 x \leq 1$$

$$-1 \leq \cos\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) \leq 1$$

پس حداکثر مقدار $\sin^2 x$ و $\cos\left(2x + \frac{\pi}{3}\right)$ برابر یک است.

از طرفی سمت راست معادله برابر ۲ است، پس باید هر دو عبارت سمت چپ بیشترین مقدار خود را داشته باشند. ابتدا معادله زیر را حل می‌کنیم و جواب‌های آن را در معادله $\sin^2 x = 1$ امتحان می‌کنیم:

$$\cos\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) = 1 \Rightarrow 2x + \frac{\pi}{3} = 2k\pi \Rightarrow 2x = 2k\pi - \frac{\pi}{3} \Rightarrow x = k\pi - \frac{\pi}{6} \quad \begin{matrix} x \in [0, 2\pi] \\ k \in \mathbb{Z} \end{matrix} \rightarrow x = \frac{5\pi}{6}, \frac{11\pi}{6}$$

$$x = \frac{5\pi}{6} \Rightarrow \sin^2 x = \sin^2 \frac{5\pi}{6} = 1 \quad \checkmark$$

$$x = \frac{11\pi}{6} \Rightarrow \sin^2 x = \sin^2 \frac{11\pi}{6} = 1 \quad \checkmark$$

پس هر دو جواب قابل قبول بوده و $x = \frac{5\pi}{6}$ و $x = \frac{11\pi}{6}$ دو جواب معادله در بازه $[0, 2\pi]$ هستند. اختلاف این دو جواب برابر π است.

▲ مشخصات سؤال: دشوار * حسابان ۲ (فصل ۱، درس ۱)

۱۶- پاسخ: گزینه ۴



با انجام تبدیلات بر روی $f\left(\frac{a-x}{3}\right)$ به تابع $f\left(1 + \frac{x}{b}\right)$ می‌رسیم.

$x \rightarrow -x$	$x \rightarrow x-a$	$x \rightarrow 3x$	$x \rightarrow x+1$	$x \rightarrow \frac{x}{b}$
$f\left(\frac{a-x}{3}\right)$	$f\left(\frac{a+x}{3}\right)$	$f\left(\frac{x}{3}\right)$	$f(x)$	$f\left(1 + \frac{x}{b}\right)$
دامنه: $[-4, 2]$	$[-2, 4]$	$[-2+a, 4+a]$	$\left[\frac{-2+a}{3}, \frac{4+a}{3}\right]$	$\left[\frac{-5+a}{3}, \frac{1+a}{3}\right]$
				$\left[\frac{ab-5b}{3}, \frac{ab+b}{3}\right]$

دامنه به دست آمده باید همان دامنه اصلی یعنی $[-4, 2]$ باشد، پس:

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{ab-5b}{3} = -4 \\ \frac{ab+b}{3} = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} ab = -12 + 5b \\ ab = 6 - b \end{cases} \Rightarrow -12 + 5b = 6 - b \Rightarrow \begin{cases} b = 3 \\ a = 1 \end{cases} \Rightarrow a + b = 4$$

▲ مشخصات سؤال: دشوار * حسابان ۲ (فصل ۳، درس ۲)

۱۷- پاسخ: گزینه ۱



$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x - \frac{f(x)}{x+2}\right) = 3 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + 2x - f(x)}{x+2} = 3$$

ابتدا حد داده شده را ساده می‌کنیم:

به شرطی تساوی فوق برقرار است که صورت کسر به صورت $3x+k$ باشد، پس: $x^2 + 2x - f(x) = 3x+k \Rightarrow f(x) = x^2 - x - k$

$$y = \frac{f(x)}{x^2} = \frac{x^2 - x - k}{x^2} = 1 - \frac{1}{x} - \frac{k}{x^2} \quad \text{بنابراین ضابطه تابع } y = \frac{f(x)}{x^2} \text{ به صورت روبه‌رو است:}$$

برای بررسی نمودار تابع حاصل در مجاورت مجانب افقی از $\frac{k}{x^2}$ صرف نظر می‌کنیم (زیرا در $x \rightarrow +\infty$ ، به صفر میل می‌کند). بنابراین مجانب افقی خط $y = 1$ است.

$$y = 1 - \frac{1}{x} \Rightarrow \begin{cases} x \rightarrow +\infty & y < 1 \text{ زیرمجانب} \\ x \rightarrow -\infty & y > 1 \text{ بالایمجانب} \end{cases}$$

فقط گزینه ۱ چنین ویژگی‌هایی دارد.

۱۸- پاسخ: گزینه ۱

▲ مشخصات سؤال: دشوار * حسابان ۲ (فصل ۳، درس ۱)



با توجه به شکل $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$ و صورت کسر عبارتی درجه اول است.

پس f در اطراف $x = a$ تغییر علامت نمی‌دهد؛ بنابراین $x = a$ ریشه مضاعف مخرج کسر است. از طرفی چون $x = a$ تنها مجانب قائم تابع است، پس عامل دیگر مخرج $x + 3$ است و در نتیجه مخرج کسر به صورت $(x + 3)(x - a)^2$ است و داریم:

$$(x + 3)(x - a)^2 = (x + 3)(x^2 - 2ax + a^2) = x^3 - 2ax^2 + a^2x + 3x^2 - 6ax + 3a^2 = x^3 + (3 - 2a)x^2 + (a^2 - 6a)x + 3a^2$$

اکنون عبارت به دست آمده را با مخرج متحد قرار می‌دهیم:

$$x^3 + (3 - 2a)x^2 + (a^2 - 6a)x + 3a^2 = x^3 - ax^2 - bx + c \Rightarrow \begin{cases} 3 - 2a = -a \Rightarrow a = 3 \\ a^2 - 6a = -b \Rightarrow -9 = -b \Rightarrow b = 9 \\ 3a^2 = c \Rightarrow c = 27 \end{cases}$$

دقت کنید اگر مخرج به صورت $(x + 3)^3$ باشد، باید $a = -3$ باشد در این صورت:

$$(x + 3)^3 = x^3 + 9x^2 + 27x + 27 = x^3 - ax^2 - bx + c \Rightarrow \text{غقی } a = -9$$

بنابراین مقدار خواسته شده برابر است با:

$$\frac{b^2}{ac} = \frac{81}{81} = 1$$

۱۹- پاسخ: گزینه ۳

▲ مشخصات سؤال: ساده * هندسه ۳ (فصل ۱، درس ۱)



- توان‌های ماتریس مربعی A به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$A^2 = A \cdot A, A^3 = A \cdot A^2 = A^2 \cdot A, A^4 = A \cdot A^3 = A^2 \cdot A^2 = A^3 \cdot A, A^{n+1} = A \cdot A^n = A^n \cdot A$$



ابتدا ماتریس A^2 و سپس ماتریس A^3 را محاسبه می‌کنیم:

$$A^2 = A \cdot A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & -3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A^3 = A \cdot A^2 = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & -3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I$$

حال ماتریس A^{111} را به دست می‌آوریم:

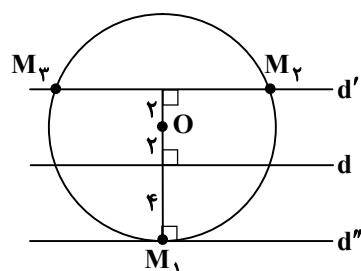
$$A^3 = I \Rightarrow (A^3)^{37} = I^{37} \Rightarrow A^{111} = I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \text{مجموع درایه‌ها} = 2$$

۲۰- پاسخ: گزینه ۳

▲ مشخصات سؤال: ساده * هندسه ۳ (فصل ۲، درس ۱)



مکان هندسی نقاطی از صفحه که از نقطه O به فاصله ۶ باشند، دایره‌ای به مرکز O و شعاع ۶ می‌باشد. مکان هندسی نقاطی از صفحه که از خط d به فاصله ۴ باشد، دو خط موازی d به فاصله ۴ در طرفین آن می‌باشد (خطوط d' و d''). محل تلاقی این دو مکان، نقاط جواب است:



چون فاصله O از خط d برابر ۲ است، مطابق شکل، دایره با دو خط d' و d'' در ۳ نقطه مشترک است. (M_3, M_2, M_1)

۲۱- پاسخ: گزینه ۲

▲ مشخصات سؤال: متوسط * هندسه ۳ (فصل ۱، درس ۲)



- اگر $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ ، در این صورت وارون ماتریس A یعنی A^{-1} از تساوی زیر به دست می آید:

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \times \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$



ابتدا از رابطه داده شده، ماتریس BA را می یابیم.

$$BA + C = I \Rightarrow BA + \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow B \cdot A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow BA = \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}$$

برای به دست آوردن B، وارون A را از سمت راست در دو طرف تساوی بالا ضرب می کنیم.

$$BA \cdot A^{-1} = \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ -2 & 0 \end{bmatrix} \times A^{-1} \Rightarrow B = \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ -2 & 0 \end{bmatrix} \times A^{-1}$$

حال ماتریس A^{-1} را یافته و داریم:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 7 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{|A|} \begin{bmatrix} 3 & -7 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} = \frac{1}{9-7} \begin{bmatrix} 3 & -7 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} \Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 3 & -7 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$B = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ -2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & -7 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -10 & 24 \\ -6 & 14 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 & 12 \\ -3 & 7 \end{bmatrix}$$

▲ مشخصات سؤال: متوسط * هندسه ۳ (فصل ۱، درس ۲)

۲۲- پاسخ: گزینه ۴



- دترمینان ماتریس های 2×2 به صورت مقابل است:

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

- سه حالت زیر را برای دستگاه $\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$ می توان در نظر گرفت:

الف) اگر $\frac{a}{a'} \neq \frac{b}{b'}$ ، در این صورت دو خط متقاطع اند و دستگاه یک جواب یکتا دارد.

$$\begin{array}{l} ax + by = c \\ \hline a'x + b'y = c' \end{array}$$

ب) اگر $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'}$ ، در این صورت دو خط موازی اند و یکی از دو حالت زیر می تواند رخ دهد:

(۱) $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} \neq \frac{c}{c'}$ ، در این حالت دو خط موازی اند و هیچ نقطه اشتراکی ندارند، لذا دستگاه هیچ جوابی ندارد.

$$\begin{array}{l} ax + by = c \\ \hline a'x + b'y = c' \end{array}$$

(۲) $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}$ ، در این حالت دو خط موازی اند و روی یکدیگر واقع اند یا به عبارتی هر دو معادله یک خط را نشان می دهند، لذا

دستگاه تعداد بی شمار جواب دارد و هر نقطه ای که در یکی از معادلات صدق کند، در دیگری هم صدق می کند.

$$\begin{array}{l} ax + by = c \\ \hline a'x + b'y = c' \end{array}$$



دستگاه معادلات دارای بی‌شمار جواب است، پس طبق نکته، داریم:

$$\frac{a}{4} = \frac{2}{1} = \frac{6}{3} \Rightarrow a = 8$$

ماتریس ضرایب به صورت $A = \begin{bmatrix} 8 & 2 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$ است.

حال گزینه‌ها را بررسی می‌کنیم:

گزینه ۱: $A - I = \begin{bmatrix} 8 & 2 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 2 \\ 4 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{vmatrix} 7 & 2 \\ 4 & 0 \end{vmatrix} = 0 - 8 = -8$

گزینه ۲: $A + 3I = \begin{bmatrix} 8 & 2 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 & 2 \\ 4 & 4 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{vmatrix} 11 & 2 \\ 4 & 4 \end{vmatrix} = 44 - 8 = 36$

گزینه ۳: $A^2 = \begin{bmatrix} 8 & 2 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 8 & 2 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 72 & 18 \\ 36 & 9 \end{bmatrix} \Rightarrow A^2 - I = \begin{bmatrix} 72 & 18 \\ 36 & 9 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow A^2 - I = \begin{bmatrix} 71 & 18 \\ 36 & 8 \end{bmatrix}$
 $\Rightarrow \begin{vmatrix} 71 & 18 \\ 36 & 8 \end{vmatrix} = 568 - 648 = -80$

گزینه ۴: $A - 9I = \begin{bmatrix} 8 & 2 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 9 & 0 \\ 0 & 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 4 & -8 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 4 & -8 \end{vmatrix} = 8 - 8 = 0$

▲ مشخصات سؤال: متوسط * هندسه ۳ (فصل ۱، درس ۲)

۲۳- پاسخ: گزینه ۳



- دترمینان ماتریس‌های 2×2 به صورت مقابل است:

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

- برای ماتریس مربعی مرتبه n و عدد حقیقی k ، داریم:

$$|kA_{n \times n}| = k^n |A_{n \times n}|$$



طبق نکات فوق از تساوی داده‌شده دترمینان می‌گیریم:

$$|2A| = \begin{vmatrix} |A| & -2 \\ 2 & |A| \end{vmatrix} \Rightarrow 2^2 |A| = |A|^2 - (-4) = |A|^2 + 4 \Rightarrow |A|^2 - 4|A| + 4 = 0 \Rightarrow (|A| - 2)^2 = 0 \Rightarrow |A| = 2$$

خواسته سؤال برابر است با:

$$|3A| = 3^2 |A| = 9 \times 2 = 18$$

▲ مشخصات سؤال: متوسط * هندسه ۳ (فصل ۱، درس ۲)

۲۴- پاسخ: گزینه ۲



اگر A ماتریسی مربعی از مرتبه n باشد، ($1 \leq n \leq 3$) در این صورت دترمینان ماتریس A را با نماد $\det(A) = |A|$ نمایش می‌دهیم و داریم:

I) $A = [k]_{1 \times 1} \Rightarrow |A| = k$

II) $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \Rightarrow |A| = ad - bc$

III) $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \Rightarrow |A| = a_{11} \times (-1)^{1+1} \times \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{12} \times (-1)^{1+2} \times \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \times (-1)^{1+3} \times \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$

برحسب سطر اول $|A| = a_{11} \times \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \times \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \times \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$



(برای هر ماتریس 3×3 دلخواه می‌توان دترمینان A را برحسب هر سطر یا ستونی به‌دست آورد که حاصل در همه حالت‌ها یکسان خواهد بود.)

$$\begin{vmatrix} x & 0 & -1 \\ 2x & x+1 & x \\ 1 & 0 & x+2 \end{vmatrix} = 0$$

طبق نکته بالا این دترمینان را برحسب ستون دوم بسط می‌دهیم:

$$(x+1) \begin{vmatrix} x & -1 \\ 1 & x+2 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow (x+1)(x^2 + 2x + 1) = 0 \Rightarrow (x+1)(x+1)^2 = 0 \Rightarrow (x+1)^3 = 0 \Rightarrow x = -1$$

بنابراین معادله فقط یک ریشه $x = -1$ دارد.

۲۵- پاسخ: گزینه ۲ **▲ مشخصات سؤال: متوسط * هندسه ۳ (فصل ۲، درس ۲)**

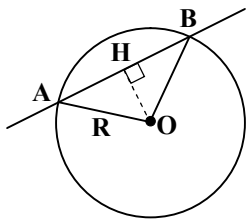


- با داشتن مختصات مرکز و طول شعاع دایره، می‌توان معادله آن را تعیین کرد و برعکس، با داشتن معادله دایره می‌توان مختصات مرکز و طول شعاع آن را به‌دست آورد.

$$(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 = R^2 \Rightarrow \text{مرکز دایره } O'(\alpha, \beta) \text{ و شعاع دایره } = R$$



ابتدا مختصات مرکز دایره و طول شعاع آن را به‌دست می‌آوریم:



$$\begin{aligned} x^2 + y^2 - 6x + 5 &= 0 \\ (x-3)^2 + y^2 &= 4 \\ \text{مرکز } O(3, 0) \\ \text{شعاع } R &= \sqrt{4} = 2 \end{aligned}$$

حال برای اینکه مساحت مثلث OAB را محاسبه کنیم، باید فاصله $O(3,0)$ تا خط $x+y-5=0$ را به‌دست آوریم:

$$OH = \frac{|3+0-5|}{\sqrt{1+1}} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$$

$$OAH \text{ در مثلث } R^2 = OH^2 + AH^2 \Rightarrow 2^2 = (\sqrt{2})^2 + AH^2 \Rightarrow AH = \sqrt{2}$$

می‌دانیم اگر از مرکز به وتر عمود کنیم، وتر نصف می‌شود، پس:

$$AB = 2 \times AH = 2\sqrt{2}$$

$$OAB \text{ مساحت} = \frac{1}{2} OH \times AB = \frac{1}{2} \times \sqrt{2} \times 2\sqrt{2} = 2$$

۲۶- پاسخ: گزینه ۳ **▲ مشخصات سؤال: متوسط * هندسه ۳ (فصل ۲، درس ۲)**



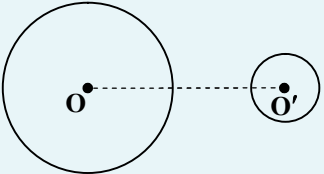
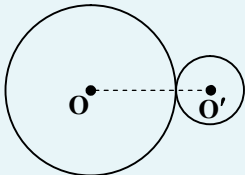
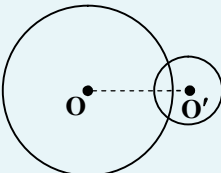
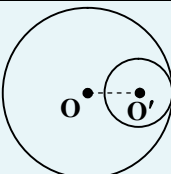
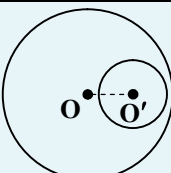
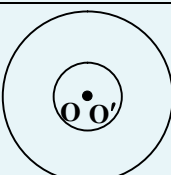
- در معادله گسترده (ضمنی) دایره به صورت $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$:

(الف) همواره ضرایب x^2 و y^2 با هم برابر و مساوی ۱ است.

(ب) مرکز دایره به مختصات $(-\frac{a}{2}, -\frac{b}{2})$ است.

(پ) شعاع دایره $R = \frac{1}{2} \sqrt{a^2 + b^2 - 4c}$ است.

- حالت‌های دو دایره نسبت به هم با شعاع‌های R و R' و خط‌المركزين OO' = d به صورت زیر است: (R > R')

	$d > R + R'$	دو دایره متخارج
	$d = R + R'$	دو دایره مماس بیرون
	$ R - R' < d < R + R'$	دو دایره متقاطع
	$d = R - R' $	دو دایره مماس درون
	$d < R - R' $	دو دایره متداخل
	$d = 0$	دو دایره هم‌مركز



ابتدا مختصات مرکز و شعاع دو دایره را به دست می‌آوریم:

$$x^2 + y^2 + 8x + 2y + 16 = 0 \Rightarrow \text{مرکز دایره } O(-4, -1)$$

$$\text{شعاع دایره } R = \frac{1}{2} \sqrt{64 + 4 - 4 \times 16} = \frac{1}{2} \sqrt{4} = 1$$

$$x^2 + y^2 + 2x + 2y - m = 0 \Rightarrow \text{مرکز دایره } O'(-1, -1)$$

$$\text{شعاع دایره } R' = \frac{1}{2} \sqrt{4 + 4 - 4(-m)} = \frac{1}{2} \sqrt{8 + 4m} = \frac{1}{2} \sqrt{4(2+m)} = \sqrt{2+m}$$

دو دایره فقط یک مماس مشترک دارند، پس دو دایره مماس داخل هستند و طبق نکته، داریم: $d = OO' = |R - R'|$ ، پس خط‌المركزين را محاسبه کرده و داریم:

$$d = \sqrt{(-4+1)^2 + (-1+1)^2} = \sqrt{9+0} = \sqrt{9} = 3$$

$$|1 - \sqrt{2+m}| = 3 \Rightarrow 1 - \sqrt{2+m} = \pm 3$$

$$\begin{cases} 1 - \sqrt{2+m} = 3 \Rightarrow \sqrt{2+m} = -2 \text{ غیرممکن} \\ 1 - \sqrt{2+m} = -3 \Rightarrow \sqrt{2+m} = 4 \Rightarrow 2+m = 16 \Rightarrow m = 14 \end{cases}$$

حال مختصات مرکز دایره $x^2 + y^2 - mx + (m+2)y = 8$ را تعیین می‌کنیم:

$$x^2 + y^2 - 14x + 16y - 8 = 0 \Rightarrow \text{مرکز دایره } O_1(7, -8)$$

▲ مشخصات سؤال: متوسط * هندسه ۳ (فصل ۲، درس ۲)

۲۷- پاسخ: گزینه ۲



- با داشتن مختصات مرکز و طول شعاع دایره، می توان معادله آن را تعیین کرد و برعکس با داشتن معادله دایره می توان مختصات مرکز و طول شعاع آن را به دست آورد.

$$= r = \text{شعاع دایره}, O'(\alpha, \beta) : \text{مرکز دایره} \Rightarrow (x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = r^2$$



ابتدا مختصات مرکز و شعاع دایره داده شده را می یابیم.

$$x^2 + y^2 - 2x + 12y - 27 = 0 \Rightarrow (x - 1)^2 - 1 + (y + 6)^2 - 36 - 27 = 0$$

$$(x - 1)^2 + (y + 6)^2 = 64 \Rightarrow O(1, -6), R = 8$$

اگر M نقطه ای از مکان هندسی مورد نظر باشد، داریم:

$$MT = 6 \Rightarrow OM = \sqrt{OT^2 + MT^2} = \sqrt{8^2 + 6^2} = 10$$

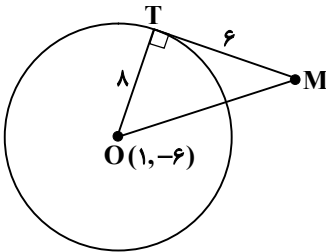
چون OM مقدار ثابتی است؛ بنابراین مکان M دایره ای است به مرکز O و شعاع OM = 10، پس:

$$C : (x - 1)^2 + (y + 6)^2 = 10^2$$

حال نقطه برخورد دایره C با محور xها را می یابیم:

$$y = 0 \Rightarrow (x - 1)^2 + (0 + 6)^2 = 100 \Rightarrow (x - 1)^2 = 64 \Rightarrow \begin{cases} x - 1 = 8 \\ x - 1 = -8 \end{cases}$$

$$\Rightarrow x = -7, x = 9$$



▲ مشخصات سؤال: دشوار * هندسه ۳ (فصل ۱، درس ۲)

۲۸- پاسخ: گزینه ۳



ابتدا A^2 را محاسبه می کنیم:

$$A^2 = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 0 \\ 0 & 7 \end{bmatrix} = 7I$$

از رابطه داده شده، داریم:

$$A^2 = AB(3I - A)^{-1} - 2A \Rightarrow AB(3I - A)^{-1} = A^2 + 2A$$

دو طرف این تساوی را از سمت راست در $3I - A$ ضرب می کنیم:

$$AB \underbrace{(3I - A)^{-1}(3I - A)}_I = (A^2 + 2A)(3I - A)$$

$$AB = A(A + 3I)(3I - A) = A(9I - A^2) = A(9I - 7I) = 2A$$

A وارون پذیر است؛ زیرا:

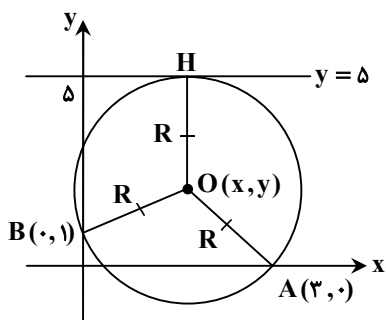
$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} = -4 - 3 \neq 0$$

طرفین رابطه $AB = 2A$ را از چپ در A^{-1} ضرب می کنیم:

$$AB = 2A \xrightarrow{\times A^{-1}} A^{-1} \cdot A \cdot B = 2A^{-1} \cdot A \Rightarrow B = 2I$$

۲۹- پاسخ: گزینه ۲

▲ مشخصات سؤال: دشوار * هندسه ۳ (فصل ۲، درس ۲)



مختصات مرکز دایره را به صورت $O(x, y)$ در نظر گرفته و با توجه به شکل زیر، داریم:

$$OA = OB$$

$$\sqrt{(x-3)^2 + y^2} = \sqrt{x^2 + (y-1)^2}$$

$$\Rightarrow x^2 - 6x + 9 + y^2 = x^2 + y^2 - 2y + 1 \Rightarrow 9 - 6x = -2y + 1$$

$$\Rightarrow 2y = 6x - 8 \Rightarrow y = 3x - 4$$

مرکز دایره را نقطه $O(x, 3x-4)$ در نظر می‌گیریم. با توجه به شکل، طول نقطه O مثبت است و داریم:

$$R = OA = OH$$

$$\sqrt{(x-3)^2 + (3x-4)^2} = |3x-4-5| \Rightarrow x^2 - 6x + 9 + 9x^2 - 24x + 16 = 9x^2 + 81 - 54x \Rightarrow x^2 + 24x = 56$$

$$\Rightarrow x^2 + 24x + 144 = 144 + 56 \Rightarrow (x+12)^2 = 200 \Rightarrow x+12 = \pm 10\sqrt{2} \Rightarrow \begin{cases} x = -12 - 10\sqrt{2} < 0 & \text{غ ق} \\ x = 10\sqrt{2} - 12 > 0 & \text{ق ق} \end{cases}$$

۳۰- پاسخ: گزینه ۴ ▲ مشخصات سؤال: ساده * ریاضیات گسسته (فصل ۱، درس ۲)



- قضیه تقسیم: اگر a عددی صحیح و b عددی طبیعی باشد در این صورت، اعدادی صحیح و منحصربه‌فرد مانند q و r یافت می‌شوند به‌قسمی که $a = bq + r$ و $0 \leq r < b$.



طبق نکته بالا و مفروضات سؤال داریم:

$$a = bq + r, \quad 47 + a = b(q+3) + 8 + r$$

$$\Rightarrow 47 + bq + r = bq + 3b + 8 + r \Rightarrow 47 - 8 = 3b \Rightarrow 3b = 39 \Rightarrow b = 13$$

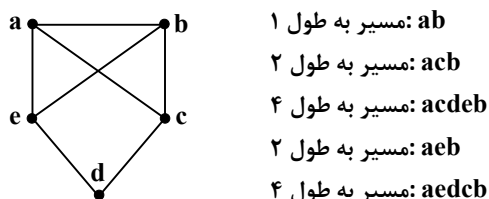
۳۱- پاسخ: گزینه ۲ ▲ مشخصات سؤال: ساده * ریاضیات گسسته (فصل ۲، درس ۱)



- (مسیر): اگر u و v دو رأس از گراف G باشند، یک مسیر از u به v (یک $v-u$ مسیر) در G دنباله‌ای از رئوس دوه‌دو متمایز در G است که از u شروع و به v ختم می‌شود به طوری که هر دو رأس متوالی این دنباله در G مجاور هم باشند. طول یک مسیر برابر است با تعداد بال‌های موجود در آن مسیر (یکی کمتر از تعداد رئوس موجود در آن مسیر). قرارداد می‌کنیم که دنباله متشکل از تنها یک رأس u ، یک مسیر است با طول صفر از رأس u به خودش.



طبق نکته فوق، مسیرهای از a به b به صورت زیر هستند:



بنابراین ۵ مسیر از a به b وجود دارد.

۳۲- پاسخ: گزینه ۲

▲ مشخصات سؤال: متوسط * ریاضیات گسسته (فصل ۱، درس‌های ۱ و ۲)



- اگر $a \in \mathbb{Z}$ و a زوج باشد، آن‌گاه a^2 نیز زوج است و بالعکس.
- اگر $a \in \mathbb{Z}$ و a فرد باشد، آن‌گاه a^2 نیز فرد است و بالعکس.



مجموع دو عدد صحیح زمانی زوج است که هر دو زوج یا هر دو فرد باشند، پس چون $a^2 + b^2$ زوج است، دو حالت زیر را داریم:

الف) a^2 و b^2 هر دو زوج هستند که طبق نکات بالا، a و b نیز هر دو زوج هستند و داریم:

$$a = 2k, b = 2t \Rightarrow a^2 - b^2 = (2k)^2 - (2t)^2 = 4k^2 - 4t^2 = 4(k^2 - t^2) = 4q$$

ب) a^2 و b^2 هر دو فرد هستند که طبق نکات بالا، a و b نیز هر دو فرد هستند و داریم:

$$a = 2k+1, b = 2t+1 \Rightarrow a^2 - b^2 = (2k+1)^2 - (2t+1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 - 4t^2 - 4t - 1 = 4k^2 - 4t^2 + 4k - 4t = 4(k^2 - t^2 + k - t) = 4q'$$

بنابراین $a^2 - b^2$ همواره زوج است.

▲ مشخصات سؤال: متوسط * ریاضیات گسسته (فصل ۲، درس ۱)

۳۳- پاسخ: گزینه ۳



- (گراف k - منتظم): گرافی را که درجه تمام رئوس آن با هم مساوی و برابر با عدد k باشند، گراف k - منتظم می‌نامیم.
- در گراف k - منتظم مرتبه p با اندازه q داریم: $kp = 2q$



طبق نکات بالا و اطلاعات سؤال اگر فرض کنیم گراف مورد نظر، k منتظم است، داریم:

$$2q = kp \xrightarrow{q=4p} 8p = pk \Rightarrow k = 8$$

حال با توجه به اینکه این گراف 8 - منتظم است پس حداقل مرتبه باید 9 باشد. بنابراین گزینه ۳ پاسخ است.

▲ مشخصات سؤال: متوسط * ریاضیات گسسته (فصل ۱، درس ۲)

۳۴- پاسخ: گزینه ۲



- (مربع کامل): عددی مربع کامل است که در تجزیه آن به اعداد اول توان همه عوامل آن زوج باشد مانند 36 .

$$36 = 2^2 \times 3^2$$



عدد مورد نظر را a فرض کرده و باید $48a$ مربع کامل باشد، با تجزیه $48a$ داریم:

$$48a = 2^4 \times 3 \times a$$

با توجه به نکته بالا، برای آنکه عدد فوق مربع کامل باشد، باید $a = 3k^2$ باشد و چون مقادیر سه رقمی a را می‌خواهیم، داریم:

$$100 \leq 3k^2 \leq 999 \Rightarrow 33/3 \leq k^2 \leq 333 \Rightarrow 6 \leq k \leq 18$$

$$\Rightarrow k = 6, \dots, 18 \Rightarrow \text{تعداد} = 18 - 6 + 1 = 13$$

۳۵- پاسخ: گزینه ۳

▲ مشخصات سؤال: متوسط * ریاضیات گسسته (فصل ۱، درس ۲)



- عدد طبیعی d را ب.م.م دو عدد صحیح a و b می‌نامیم (a و b هر دو با هم صفر نیستند) و می‌نویسیم $(a, b) = d$ ، هرگاه دو شرط «الف» و «ب» برقرار باشد:

الف) $d | a, d | b$

ب) $\forall m > 0; m | a, m | b \Rightarrow m \leq d$

- در ک.م.م و ب.م.م می‌توان از عامل مشترک فاکتور گرفت؛ یعنی:

$[ka, kb] = |k|[a, b]$ $(ka, kb) = |k|(a, b)$



طبق نکات بالا، داریم:

$(a, b) = \gamma \Rightarrow \begin{cases} \gamma | a \Rightarrow a = \gamma k \\ \gamma | b \Rightarrow b = \gamma t \end{cases}, (k, t) = 1$

خواسته سؤال به صورت زیر ساده می‌شود:

$(3a, 11b) = (3 \times \gamma k, 11 \times \gamma t) = \gamma(3k, 11t)$

با توجه به اینکه $(k, t) = 1$ ، بیشترین مقدار $(3k, 11t)$ زمانی است که k یک عامل ۱۱ و t یک عامل ۳ داشته باشد، پس $(3 \times 11k', 11 \times 3t') = 11 \times 3$ و داریم:

$\gamma(3k, 11t) = \gamma \times 11 \times 3 = 33\gamma \Rightarrow$ رقم وسط = ۳

▲ مشخصات سؤال: متوسط * ریاضیات گسسته (فصل ۱، درس ۳)

۳۶- پاسخ: گزینه ۱



- می‌توان به دو طرف یا یک طرف یک رابطه هم‌نهستی هر ضربی از پیمانه را اضافه یا از آن کم کرد.

$a \equiv b \pmod{m} \Rightarrow \begin{cases} a + mt \equiv b + mk \\ a - mt \equiv b - mk \end{cases}$

- اگر بخواهیم دو طرف یک رابطه هم‌نهستی را بر عددی تقسیم کنیم، باید پیمانه آن هم‌نهستی را بر ب.م.م آن عدد و پیمانه تقسیم کنیم.

$ac \equiv bc, (c, m) = d \Rightarrow a \equiv b \pmod{\frac{m}{d}}$

$\left. \begin{matrix} a \equiv b \pmod{m} \\ a \equiv b \pmod{n} \end{matrix} \right\} \Rightarrow a \equiv b \pmod{[m, n]}$



با استفاده از نکات بالا، داریم:

$-2x \equiv 3 \pmod{5} \Rightarrow -2x \equiv 3 - 5 \pmod{5} \Rightarrow -2x \equiv -2 \pmod{5} \Rightarrow 2x \equiv 2 \pmod{5} \xrightarrow{(+2)} x \equiv 1 \pmod{5} \Rightarrow x \equiv 1 + 5 \pmod{5} \Rightarrow x \equiv 6 \pmod{5}$

$5x \equiv 2 \pmod{7} \Rightarrow 5x \equiv 2 - 7 \pmod{7} \Rightarrow 5x \equiv -5 \pmod{7} \xrightarrow{(+5)} x \equiv -1 \pmod{7} \Rightarrow x \equiv -1 + 7 \pmod{7} \Rightarrow x \equiv 6 \pmod{7}$

حال از دو رابطه بالا داریم:

$\left. \begin{matrix} x \equiv 6 \pmod{5} \\ x \equiv 6 \pmod{7} \end{matrix} \right\} \Rightarrow x \equiv 6 \pmod{[5, 7]} \Rightarrow x \equiv 6 \pmod{35} \Rightarrow x = 35k + 6$

چون کوچک‌ترین عدد سه رقمی x را می‌خواهیم، داریم:

$x \geq 100 \Rightarrow 35k + 6 \geq 100 \Rightarrow 35k \geq 94 \Rightarrow k \geq \frac{94}{35} \Rightarrow k \geq 3$

$k = 3 \Rightarrow x = 35 \times 3 + 6 = 111 \Rightarrow$ مجموع ارقام = $1 + 1 + 1 = 3$

۳۷- پاسخ: گزینه ۲

▲ مشخصات سؤال: متوسط * ریاضیات گسسته (فصل ۲، درس ۱)

خوبه اینو بدونی



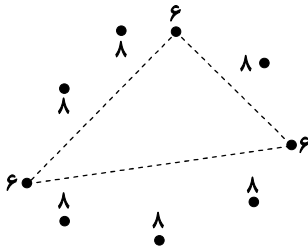
- (گراف کامل): گرافی را که هر رأس آن با تمام رئوس دیگر مجاور باشد، گراف کامل می‌نامیم. گراف کامل n رأسی را با K_n نمایش می‌دهیم. می‌توان گفت K_n یک گراف n رأسی و $n-1$ - منتظم است.
- در هر گراف کامل n رأسی تعداد یال‌ها برابر است با:

$$q = \binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$$

جوابش اینه



در گراف داده‌شده، $p = 9$ و $q = 33$ است. اگر فرض کنیم گراف کامل ۹ رأسی داشته باشیم تعداد یال‌ها برابر است با:



$$q = \binom{9}{2} = \frac{9 \times 8}{2} = 36$$

گراف داده‌شده، ۳ یال کمتر از گراف کامل K_9 دارد. اگر ۳ یال را به صورت مقابل از K_9 حذف کنیم، بیشترین تعداد رئوس با درجه ۶ را خواهیم داشت که برابر ۳ است.
توجه کنید که در شکل مقابل، درجه هر رأس کنار آن نوشته شده و یال‌های حذف‌شده را به صورت نقطه چین نشان داده‌ایم.

▲ مشخصات سؤال: متوسط * ریاضیات گسسته (فصل ۲، درس ۱)

۳۸- پاسخ: گزینه ۲

خوبه اینو بدونی



- اگر G یک گراف با مرتبه p و اندازه q و $V = \{v_1, v_2, \dots, v_p\}$ مجموعه رئوس آن باشند، آن‌گاه:

$$\sum_{i=1}^p \deg(v_i) = 2q \Rightarrow \deg(v_1) + \deg(v_2) + \dots + \deg(v_p) = 2q$$

جوابش اینه



تعداد رأس‌های با درجه ۶ را x فرض می‌کنیم. چون گراف دارای ۸ رأس است، طبق مفروضات سؤال درجات رئوس گراف به صورت زیر است:

$$\underbrace{6, \dots, 6}_{x \text{ تا}}, \underbrace{4, 4, \dots, 4}_{5 \text{ تا}}, \underbrace{2, \dots, 2}_{3-x \text{ تا}}$$

طبق نکته بالا داریم:

$$6x + 5 \times 4 + 2(3-x) = 2q \Rightarrow 6x + 20 + 6 - 2x = 2 \times 17 \Rightarrow 4x + 26 = 34 \Rightarrow 4x = 8 \Rightarrow x = 2$$

▲ مشخصات سؤال: دشوار * ریاضیات گسسته (فصل ۲، درس ۱)

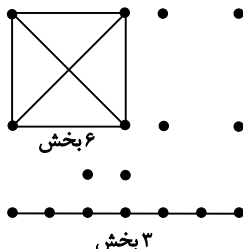
۳۹- پاسخ: گزینه ۲

خوبه اینو بدونی



- (همبندی و ناهمبندی یک گراف): گراف G را همبند می‌نامیم هرگاه بین هر دو رأس آن حداقل یک مسیر وجود داشته باشد، در غیر این صورت آن را ناهمبند می‌نامیم.

جوابش اینه



برای داشتن حداقل تعداد بخش‌های جدا از هم باید بیشترین رأس ایزوله را داشته باشیم.
از طرفی برای رسم ۶ یال حداقل ۴ رأس لازم داریم. بنابراین گراف به صورت مقابل است:
برای داشتن حداقل تعداد بخش‌های جدا از هم بایستی کمترین رأس ایزوله را داشته باشیم و بیشترین رأس به کمک ۶ یال به هم متصل باشند، بنابراین گراف به صورت مقابل است.
خواسته سؤال برابر $3 = 6 - 3$ است.
بنابراین گزینه ۲ پاسخ است.

۴۰- پاسخ: گزینه ۱

▲ مشخصات سؤال: دشوار * ریاضیات گسسته (فصل ۱، درس‌های ۲ و ۳)



- قضیه تقسیم: اگر a عددی صحیح و b عددی طبیعی باشد در این صورت، اعدادی صحیح و منحصر به فرد مانند q و r یافت می‌شوند به قسمی که $a = bq + r$ و $0 \leq r < b$.
 - می‌توان به دو طرف یا یک طرف یک رابطه هم‌نهستی هر ضربی از پیمانه را اضافه یا از آن کم کرد.

$$a \equiv b \Rightarrow \begin{cases} a + mt \equiv b + mk \\ a - mt \equiv b - mk \end{cases}$$

- اگر بخواهیم دو طرف یک رابطه هم‌نهستی را بر عددی تقسیم کنیم، باید پیمانه آن هم‌نهستی را بر ب.م.م آن عدد و پیمانه تقسیم کنیم.

$$ac \equiv bc, (c, m) = d \Rightarrow a \equiv b \pmod{\frac{m}{d}}$$



طبق نکات بالا و مفروضات سؤال، داریم:

$$a = 20b + 14 \xrightarrow{a=6t} 20b + 14 \equiv 0 \pmod{6} \Rightarrow 20b - 6 \times 3b + 14 - 6 \times 2 \equiv 0 \pmod{6} \Rightarrow 2b + 2 \equiv 0 \pmod{6} \Rightarrow 2b \equiv -2 \pmod{6}$$

$$\xrightarrow{\div 2} \xrightarrow{(2,6)=2} b \equiv -1 \pmod{3} \Rightarrow b = 3k - 1 \quad (*)$$

$$r < b \Rightarrow 14 < b \Rightarrow b \geq 15 \quad (1)$$

$$a \text{ سه رقمی است} \Rightarrow 100 \leq 20b + 14 \leq 999 \Rightarrow 86 \leq 20b \leq 985 \Rightarrow 5 \leq b \leq 49 \quad (2)$$

$$(1), (2) \Rightarrow 15 \leq b \leq 49 \xrightarrow{(*)} 15 \leq 3k - 1 \leq 49 \Rightarrow 16 \leq 3k \leq 50 \Rightarrow 6 \leq k \leq 16$$

$$\Rightarrow k_{\max} = 16 \Rightarrow b_{\max} = 3(16) - 1 = 47 \Rightarrow a_{\max} = 20(47) + 14 = 954$$

رقم یکان عدد ۹۵۴ برابر ۴ است.

فیزیک

▲ مشخصات سؤال: متوسط * فیزیک ۳ (فصل ۱)

۴۱- پاسخ: گزینه ۲

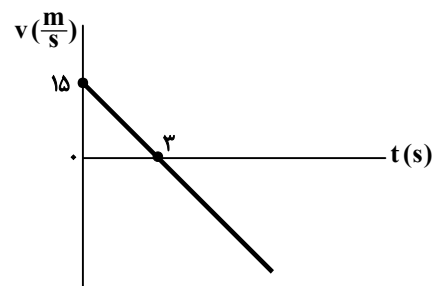


$$v = -5t + 15 = at + v_0 \Rightarrow a = -5 \frac{m}{s^2}$$

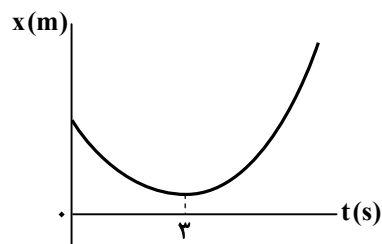
حرکت با شتاب ثابت است، چون معادله سرعت - زمان درجه ۱ است:

پس شتاب لحظه‌ای و متوسط برابر $-5 \frac{m}{s^2}$ و بزرگی آن‌ها $5 \frac{m}{s^2}$ است و جمله «پ» درست است.

از $t = 0$ تا $t = 3$ حرکت کندشونده و پس از آن حرکت تندشونده است؛ بنابراین جمله «ب» نادرست است.



با توجه به تقارن منحنی سهمی در هر دو لحظه‌ای که $t = 3$ s وسط آن‌ها باشد، متحرک از یک محل عبور می‌کند؛ بنابراین جمله «الف» درست است.



▲ مشخصات سؤال: متوسط * فیزیک ۳ (فصل ۱)

۴۲- پاسخ: گزینه ۴



$$v = gt \Rightarrow \frac{11}{2}g = gt \Rightarrow t = \frac{11}{2}s$$

$$v_{av} = \frac{v_1 + v_2}{2} \Rightarrow \begin{cases} \text{کل مدت سقوط} : v_{av} = \frac{0 + \frac{11}{2}g}{2} = \frac{11}{4}g \\ \text{۳ ثانیه آخر} : v_{av} = \frac{\frac{5}{2}g + \frac{11}{2}g}{2} = \frac{16}{4}g \end{cases}$$

$$\frac{v_{av} \text{ سه ثانیه آخر}}{v_{av} \text{ کل مدت سقوط}} = \frac{\frac{16}{4}}{\frac{11}{4}} = \frac{16}{11}$$

$$v_2 - v_1 = a \cdot \Delta t \Rightarrow \frac{11}{2}g - v_1 = 3 \times g \Rightarrow v_1 = \frac{5}{2}g$$

توضیح در مورد سرعت ۳ ثانیه قبل از رسیدن به زمین:

▲ مشخصات سؤال: متوسط * فیزیک ۳ (فصل ۱)

۴۳- پاسخ: گزینه ۱



$$\Delta x = \frac{1}{2}at^2 + v_0t \Rightarrow AM = \frac{1}{2} \times 2 \times 2^2 + 0 = 4m \Rightarrow PB = 16m$$

$$\Delta v = a \cdot \Delta t \Rightarrow v_B - v_P = 2 \times 2 = 4 \Rightarrow v_P = v_B - 4$$

$$\Delta x = \frac{v_1 + v_2}{2} \cdot \Delta t \Rightarrow 16 = \frac{v_B + (v_B - 4)}{2} \times 2 \Rightarrow 2v_B - 4 = 16 \Rightarrow v_B = 10 \frac{m}{s}$$

▲ مشخصات سؤال: متوسط * فیزیک ۳ (فصل ۱)

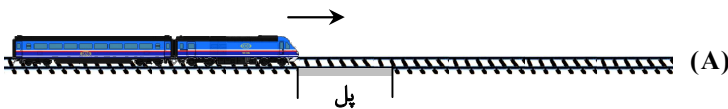
۴۴- پاسخ: گزینه ۳



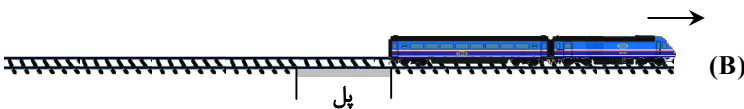
مدت عبور قطار از پل یعنی فاصله زمانی بین دو

لحظه (A) و (B):

از این لحظه:



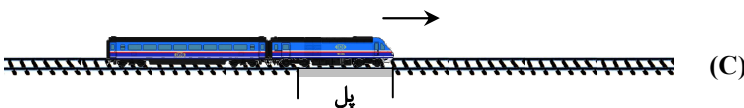
تا این لحظه:



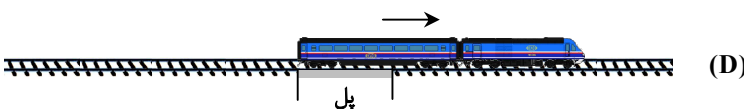
$$\Delta t_1 = \frac{\text{طول پل} + \text{طول قطار}}{\text{تندی قطار}} = \frac{120 + 30}{v} = \frac{150}{v}$$

مدتی که تمام پل توسط قطار اشغال شده یعنی از لحظه (C) تا لحظه (D):

از این لحظه:



تا این لحظه:



$$\Delta t_2 = \frac{\text{طول پل} - \text{طول قطار}}{\text{تندی قطار}} = \frac{120 - 30}{v} = \frac{90}{v}$$

نسبت خواسته شده برابر است با:

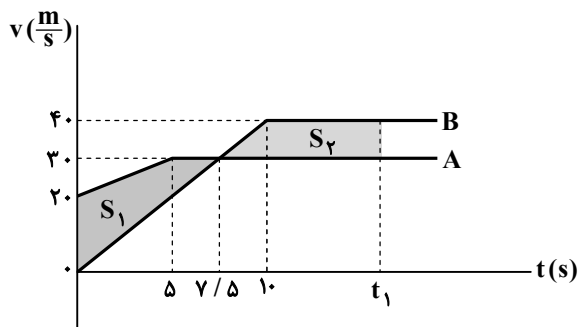
$$\frac{\Delta t_2}{\Delta t_1} = \frac{\frac{90}{v}}{\frac{150}{v}} = \frac{3}{5}$$

۴۵- پاسخ: گزینه ۳

▲ مشخصات سؤال: دشوار * فیزیک ۳ (فصل ۱)



دو اتومبیل در لحظه $t = 0$ در زمان موردنظر هم مکان هستند، پس می توان گفت Δx آن ها برابر است. یعنی مساحت زیر نمودار $v-t$ آن ها مساوی است.



در مدت ۵ ثانیه تندی اتومبیل A از $20 \frac{m}{s}$ به $30 \frac{m}{s}$ می رسد.

$$A \text{ متحرک: } v = at + v_0 = 5 \times 2 + 20 = 30 \frac{m}{s}$$

در این مدت تندی اتومبیل B به $20 \frac{m}{s}$ رسیده است.

$$B \text{ متحرک: } v = at + v_0 = 4 \times 5 + 0 = 20 \frac{m}{s}$$

در لحظه $t = 7/5 s$ تندی اتومبیل B به $30 \frac{m}{s}$ می رسد.

$$30 = 4t + 0 \Rightarrow t = 7/5 s$$

و در لحظه $t = 10 s$ تندی اتومبیل B به $40 \frac{m}{s}$ می رسد:

$$v = at + v_0 = 10 \times 4 + 0 = 40 \frac{m}{s}$$

اگر t_1 لحظه ای باشد که دو متحرک به هم می رسند، لازم است S_1 و S_2 برابر شوند.

$$S_1 = \frac{7/5 \times 30}{2} - \frac{10 \times 5}{2}, \quad S_2 = \frac{2/5 \times 10}{2} + (t_1 - 10) \times 10$$

$$S_1 = S_2 \Rightarrow t_1 - 10 = 7/5 \Rightarrow t_1 = 17/5 s$$

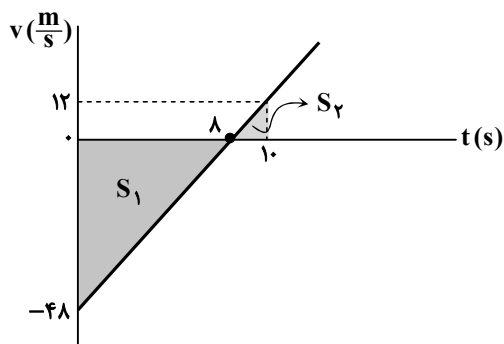
▲ مشخصات سؤال: متوسط * فیزیک ۳ (فصل ۱)

۴۶- پاسخ: گزینه ۲



$$x = \frac{1}{2}at^2 + v_0t + x_0 \Rightarrow \begin{cases} \frac{1}{2}a = 3 \frac{m}{s^2} \Rightarrow a = 6 \frac{m}{s^2} \\ v_0 = -48 \frac{m}{s} \end{cases}$$

برای حساب کردن مسافت طی شده یک روش خیلی خوب، رسم نمودار « $v-t$ » است.



$$v = at + v_0 = 6t - 48$$

$$I = S_1 + S_2 = \frac{8 \times 48}{2} + \frac{2 \times 12}{2} = 192 + 12 = 204 m$$

$$s_{av} = \frac{I}{\Delta t} = \frac{204}{10} = 20.4 \frac{m}{s}$$

▲ مشخصات سؤال: ساده * فیزیک ۳ (فصل ۱)

۴۷- پاسخ: گزینه ۳



$$v_B = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{-300}{25} = -12 \frac{m}{s} \Rightarrow x_B = -12t + 300$$

$$t = 20 s : x_A = x_B \Rightarrow v_A(20) - 100 = -12(20) + 300 \Rightarrow v_A = \frac{60 - (-100)}{20} = 8 \frac{m}{s}$$

▲ مشخصات سؤال: متوسط * فیزیک ۳ (فصل ۱)

۴۸- پاسخ: گزینه ۳

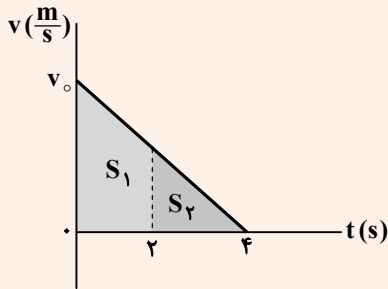


$$\Delta x = \frac{v_1 + v_2}{2} \times \Delta t \Rightarrow 15 = \frac{v(2) + v(4)}{2} \times 2 \Rightarrow 15 = \frac{v(2) + 0}{2} \times 2 \Rightarrow v(2) = 15 \frac{m}{s}$$

$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t} \Rightarrow \frac{v(4) - v(0)}{4 - 0} = \frac{v(4) - v(2)}{4 - 2} \Rightarrow \frac{0 - v_0}{4} = \frac{0 - 15}{2} \Rightarrow v_0 = 30 \frac{m}{s}$$



می توانیم نمودار $v-t$ را رسم کنیم:



$$S_2 = 15$$

$$\text{تشابه دو مثلث} \Rightarrow \frac{S_2}{S_1 + S_2} = \left(\frac{2}{4}\right)^2 \Rightarrow \frac{15}{S_1 + S_2} = \frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow S_1 + S_2 = 60$$

$$S_{\text{کل}} = \frac{v_0 \times 4}{2} \Rightarrow 60 = \frac{v_0 \times 4}{2} \Rightarrow v_0 = 30 \frac{m}{s}$$

▲ مشخصات سؤال: متوسط * فیزیک ۳ (فصل ۱)

۴۹- پاسخ: گزینه ۲



$$\begin{cases} 60 = \frac{v_B + v_A}{2} \times 2 \Rightarrow v_B + v_A = 60 \\ v_B - v_A = g \times 2 \Rightarrow v_B - v_A = 20 \end{cases} \Rightarrow v_B = 35 \frac{m}{s}, v_A = 5 \frac{m}{s}$$

$$v_C^2 - v_B^2 = 2g\Delta y \Rightarrow v_C^2 - 1225 = 2 \times 10 \times 90 \Rightarrow v_C^2 = 3025 \Rightarrow v_C = 55 \frac{m}{s}$$

▲ مشخصات سؤال: دشوار * فیزیک ۳ (فصل ۱)

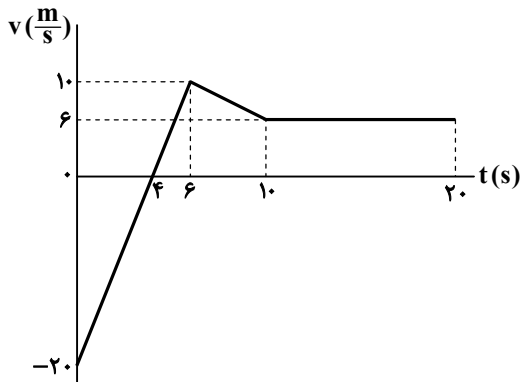
۵۰- پاسخ: گزینه ۲



با رسم نمودار سرعت- زمان می توان همه موارد داده شده را بررسی کرد.

متحرک در ۶ ثانیه اول با شیب ثابت ۵ صعود می کند و در ۴ ثانیه بعدی با شیب -۱

تندی خود را کاهش می دهد.



با توجه به نمودار می توان تشخیص داد که در مدت $t=0$ تا $t=6s$ حرکت متحرک کندشونده است. از لحظه $t=6s$ تا $t=10s$ حرکت متحرک کندشونده است. از لحظه $t=10s$ تا $t=20s$ حرکت متحرک با شیب ثابت است. بنابراین

مورد «الف» نادرست و مورد «ب» درست است.

در مدت $t=6s$ تا $t=10s$ جهت حرکت ثابت است و $\Delta x = \frac{10+6}{2} \times 4 = 32m$ است؛ یعنی مورد «ب» هم درست است.

۵۱- پاسخ: گزینه ۴

▲ مشخصات سؤال: متوسط * فیزیک ۳ (فصل ۱)



با توجه به نمودار مکان- زمان $v(\Delta) = 0$ است.

$$\Delta x = \frac{v_1 + v_2}{2} \cdot \Delta t \Rightarrow \begin{cases} \Delta x_{(3 \rightarrow \Delta)} = \frac{v(3) + v(\Delta)}{2} \times 2 = v(3) + 0 = v(3) \\ \Delta x_{(\Delta \rightarrow 10)} = \frac{v(\Delta) + v(10)}{2} \times \Delta = \frac{0 + v(10)}{2} \times \Delta = \frac{\Delta}{2} v(10) \end{cases} \quad \text{رابطه (۱)}$$

$$\Delta v = a \cdot \Delta t \Rightarrow \begin{cases} v(\Delta) = v(3) + 2a \Rightarrow v(3) = -2a \\ v(10) = v(\Delta) + \Delta a \Rightarrow v(10) = \Delta a \end{cases} \quad \text{رابطه (۲)}$$

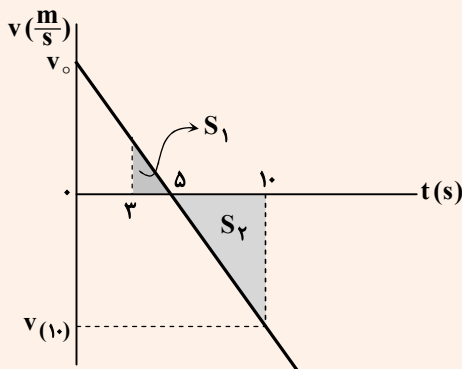
از دو رابطه (۱) و (۲) داریم:

$$l = \Delta x_{(3 \rightarrow \Delta)} + [-\Delta x_{(\Delta \rightarrow 10)}] = -2a - \Delta a \times \frac{\Delta}{2} = -\frac{29}{2}a \Rightarrow -\frac{29}{2}a = 145 \Rightarrow a = -10 \frac{m}{s^2}$$

$$v(\Delta) = \Delta a + v_0 \Rightarrow 0 = -\Delta \cdot 10 + v_0 \Rightarrow v_0 = 10 \frac{m}{s}$$



نمودار سرعت- زمان را رسم می‌کنیم. در لحظه $t = 5s$ سرعت متحرک صفر است. قبل از لحظه $t = 5s$ سرعت متحرک مثبت است (x صعودی است) و بعد از $t = 5s$ سرعت آن منفی است.



$$\text{تشابه دو مثلث} \Rightarrow \frac{S_2}{S_1} = \left(\frac{\Delta}{2}\right)^2 \Rightarrow \frac{4}{25} S_2 = S_1$$

$$S_1 + S_2 = 145 \Rightarrow S_2 + \frac{4}{25} S_2 = 145 \Rightarrow \frac{29}{25} S_2 = 145$$

$$\Rightarrow S_2 = 125$$

$$\frac{|v(10)| \times \Delta}{2} = 125 \Rightarrow |v(10)| = 10 \frac{m}{s} \Rightarrow \begin{cases} v_{10} = -10 \frac{m}{s} \\ v_0 = 10 \frac{m}{s} \end{cases}$$

$v(10)$ قرینه v_0 است.

۵۲- پاسخ: گزینه ۱

▲ مشخصات سؤال: متوسط * فیزیک ۳ (فصل ۱)



$$\Delta y = \frac{1}{2} g t^2 \Rightarrow \begin{cases} H = \frac{1}{2} g t_A^2 \\ H = \frac{1}{2} g t_B^2 \end{cases} \Rightarrow t_A = t_B$$

$$\text{دو گلوله B پنج ثانیه دیرتر رها شده و دو گلوله هم‌زمان به زمین رسیده‌اند} \Rightarrow t_A = t_B + 5 \Rightarrow 2t_B = t_B + 5 \Rightarrow t_B = 5s$$

$$v = g t \Rightarrow v_B = 10 \times 2 / 5 = 25 \frac{m}{s}$$

۵۳- پاسخ: گزینه ۱

▲ مشخصات سؤال: دشوار * فیزیک ۳ (فصل ۲)



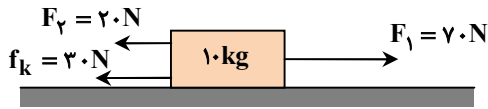
از روی گزینه‌های داده‌شده، مشخص است که وزنه تحت تأثیر دو نیروی F_1 و F_2 حرکت می‌کند اما برای درک بهتر، ابتدا نیروی اصطکاک ایستایی بیشینه را می‌یابیم:

$$f_{s, \max} = \mu_s F_N \xrightarrow{F_N = mg} f_{s, \max} = 0.4 \times 10 \times 10 = 40N$$

برایند دو نیروی F_1 و F_2 بیشتر از $40N$ است؛ بنابراین وزنه شروع به حرکت می‌کند:

$$f_k = \mu_k \cdot F_N = \mu_k \cdot mg = 0.3 \times 100 = 30N$$

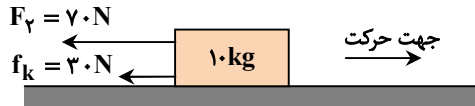
در پنج ثانیه اول وضعیت نیروها به ترتیب مقابل است:



$$F_{net} = ma \Rightarrow 70 - 20 - 30 = 10a \Rightarrow a = 2 \frac{m}{s^2}$$

$$v = at + v_0 \Rightarrow v = 2 \times 5 + 0 = 10 \frac{m}{s}$$

در $t = 5s$ سرعت جسم $10 \frac{m}{s}$ به طرف راست است. در این زمان F_1 حذف می شود و $F_2 = 70N$ می شود اما تا وقتی که حرکت به طرف راست باشد، هنوز f_k به طرف چپ است.



$$F_{net} = ma \Rightarrow -70 - 30 = 10a \Rightarrow a = -10 \frac{m}{s^2}$$

پس یک حرکت کندشونده داریم که بزرگی شتاب آن $10 \frac{m}{s^2}$ و سرعت اولیه آن $10 \frac{m}{s}$ به طرف راست است. باید لحظه تغییر جهت حرکت را پیدا کنیم:

$$v = 0 \Rightarrow -10t + 10 = 0 \Rightarrow t = 1s$$

۱ ثانیه بعد از حذف نیروی F_1 یعنی در $t = 6s$ جهت حرکت عوض می شود و از آن به بعد، جهت f_k به طرف راست است:

$$F_{net} = ma \Rightarrow 70 - 30 = 10a \Rightarrow a = 4 \frac{m}{s^2}$$

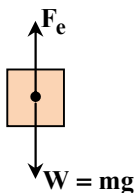
از این لحظه ($t = 6s$) تا $t = 10s$ یعنی به مدت ۴ ثانیه حرکت تندشونده با شتاب $4 \frac{m}{s^2}$ داریم:

$$v = at + v_0 = 4 \times 4 + 0 = 16 \frac{m}{s}$$

$$p = mv = 10 \times 16 = 160 \frac{kg \cdot m}{s}$$

▲ مشخصات سؤال: متوسط * فیزیک ۳ (فصل ۲)

۵۴- پاسخ: گزینه ۲



$$(1) \text{ حرکت تندشونده رو به بالا: } F_{e1} - mg = ma_1 \Rightarrow F_{e1} = m(a_1 + g)$$

$$(2) \text{ حرکت تندشونده رو به پایین: } W - F_{e2} = ma_2 \Rightarrow F_{e2} = m(g - a_2)$$

$$F_e = kx \Rightarrow F_{e1} - F_{e2} = k(x_1 - x_2)$$

$$\Rightarrow m(a_1 + g) - m(g - a_2) = k(x_1 - x_2)$$

$$\Rightarrow 5(3 + 6) = k \times \frac{12}{100}$$

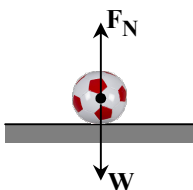
$$k = \frac{5 \times 9 \times 100}{12} = \frac{5 \times 3 \times 100}{4} = 375 \frac{N}{m}$$

▲ مشخصات سؤال: دشوار * فیزیک ۳ (فصل ۲)

۵۵- پاسخ: گزینه ۳



حرکت توپ از ارتفاع ۲۰ متری تا سطح زمین با شتاب ثابت g است.



$$v_2^2 - v_1^2 = 2g\Delta y \Rightarrow v^2 - 0 = 2 \times 10 \times 20 \Rightarrow v = 20 \frac{m}{s}$$

$$F_{net} \cdot \Delta t = m \cdot \Delta v \Rightarrow (F_N - W) \times \Delta t = m \cdot \Delta v \Rightarrow (F_N - 0 / 2 \times 10) \times 0 / 3 = 0 / 2 \times (16 - (-20))$$

$$\Rightarrow F_N - 2 = \frac{2}{3} \times 36 \Rightarrow F_N = 2 + 24 = 26N$$

▲ مشخصات سؤال: ساده * فیزیک ۳ (فصل ۲)

۵۶- پاسخ: گزینه ۲



شتاب لحظه‌ای در حرکت یکنواخت دایره‌ای یعنی همان شتاب مرکزگرا:

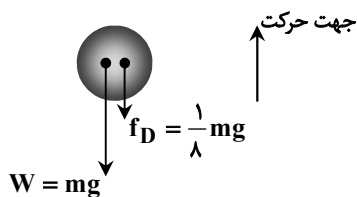
$$a_c = \frac{v^2}{r} = \frac{100}{5} = 20 \frac{m}{s^2}$$

۵۷- پاسخ: گزینه ۱

▲ مشخصات سؤال: ساده * فیزیک ۳ (فصل ۲)

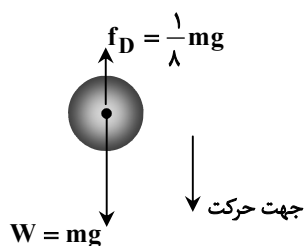


نیروی مقاومت هوای وارد بر گلوله در خلاف جهت حرکت آن است، پس در هنگام بالارفتن، جهت f_D به طرف پایین است و در هنگام پایین آمدن، جهت f_D به طرف بالا است. بالارفتن:



$$F_{net} = ma_1 \Rightarrow mg + \frac{1}{\lambda}mg = ma_1 \Rightarrow a_1 = \frac{9}{\lambda}g$$

جهت شتاب رو به پایین است. پایین آمدن:



$$F_{net} = ma_2 \Rightarrow mg - \frac{1}{\lambda}mg = ma_2 \Rightarrow a_2 = \frac{7}{\lambda}g$$

جهت شتاب رو به پایین است. نسبت خواسته شده برابر است با:

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{\frac{9}{\lambda}g}{\frac{7}{\lambda}g} = \frac{9}{7}$$

۵۸- پاسخ: گزینه ۲

▲ مشخصات سؤال: دشوار * فیزیک ۳ (فصل ۲)



$$\begin{cases} K = \frac{1}{2}mv^2 \Rightarrow K = \frac{1}{2}pv \Rightarrow e = \gamma \times \frac{v_A}{v_B} \Rightarrow \frac{v_A}{v_B} = \gamma \\ p = mv \end{cases}$$

در گردش ماهواره به دور زمین: $v = \sqrt{\frac{GM_e}{r}}$, $T = 2\pi\sqrt{\frac{r^3}{GM_e}}$

اثبات: $\begin{cases} \frac{GM_e m}{r^2} = \frac{mv^2}{r} \Rightarrow \frac{GM_e}{r} = v^2 \Rightarrow v = \sqrt{\frac{GM_e}{r}} \\ T = \frac{2\pi r}{v} = \frac{2\pi r}{\sqrt{\frac{GM_e}{r}}} = 2\pi\sqrt{\frac{r^3}{GM_e}} \end{cases}$

$$v_A = \gamma v_B \xrightarrow{r \propto \frac{1}{v^2}} r_B = \gamma^2 r_A \xrightarrow{r^3 \propto T^2} T_B^2 = (\gamma^2)^3 T_A^2 \Rightarrow T_B = (\gamma^3) T_A \Rightarrow T_A = \frac{1}{\gamma^3} T_B$$

تعداد دور در یک مدت معین با بسامد، نسبت مستقیم و با دوره، نسبت عکس دارد.

$$N_A = \gamma^3 N_B = \gamma^3 \times 4 = 108$$

۵۹- پاسخ: گزینه ۲

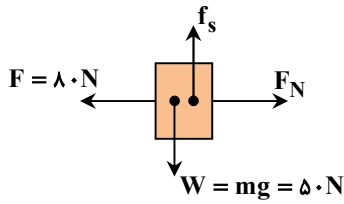
▲ مشخصات سؤال: ساده * فیزیک ۳ (فصل ۲)



طبق صورت مسئله هر دو جعبه به تندی حدی رسیده‌اند. وقتی تندی جسم به تندی حدی می‌رسد، مقاومت هوا (f_D) با وزن جسم (mg) برابر می‌شود. چون وزن جعبه دوم بیشتر است، باید مقدار f_D هم برای آن بیشتر شود. f_D به شکل و ابعاد جسم بستگی دارد (که برای هر دو جعبه و چترها مشابه است) و هرچه تندی بیشتر شود، مقدار f_D هم زیادتر می‌شود. پس جعبه (۲) با تندی بیشتری به تندی حدی می‌رسد. ضمناً چون هر دو جعبه به تندی حدی می‌رسند، شتاب هر دو در بخش انتهایی حرکت صفر است.

۶۰- پاسخ: گزینه ۲

▲ مشخصات سؤال: متوسط * فیزیک ۳ (فصل ۲)



$$F_{net,y} = 0 \Rightarrow f_s = 50 \text{ N}$$

$$F_{net,x} = 0 \Rightarrow F_N = 80 \text{ N}$$

$$f_s \leq \mu_s F_N \Rightarrow 50 \leq 80 \mu_s \Rightarrow \mu_s \geq \frac{5}{8}$$

گزاره‌های «الف» و «پ» درست هستند اما گزاره «ب» نادرست است؛ چون نیرویی که دیوار بر جعبه وارد می‌کند $R = \sqrt{f_s^2 + F_N^2}$ است و با دو برابر شدن نیروی F مقدار F_N هم ۲ برابر می‌شود. اگرچه مقدار f_s عوض نمی‌شود؛ اما مقدار R تغییر می‌کند.

▲ مشخصات سؤال: متوسط * فیزیک ۳ (فصل ۲)

۶۱- پاسخ: گزینه ۱



حالت اول:

وقتی جسم در آستانه لغزیدن است:

$$F = f_{s,max} \Rightarrow f_{s,max} = 80 \text{ N}$$

حالت دوم:

$$F - f_k = ma \Rightarrow 90 - f_k = 10 \times 3 \Rightarrow f_k = 60 \text{ N}$$

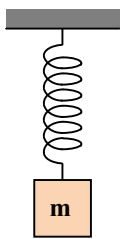
حالت سوم:

$$F - f_k = ma \Rightarrow 50 - 60 = 10a \Rightarrow a = -1 \frac{m}{s^2}$$

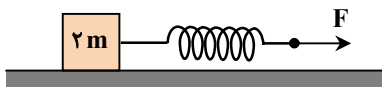
یعنی در حالت $F = 50 \text{ N}$ حرکت جسم کندشونده و بزرگی شتاب آن $1 \frac{m}{s^2}$ می‌شود.

▲ مشخصات سؤال: متوسط * فیزیک ۳ (فصل ۲)

۶۲- پاسخ: گزینه ۲



رابطه (۱) $F_e = mg \Rightarrow k \times \frac{5}{100} = 10 \text{ m}$ حالت اول



حالت دوم: $F'_e - f_k = 2m \cdot a$

رابطه (۲) $f_k = \mu_k F_N = \mu_k \times 2mg \rightarrow F'_e - 2mg\mu_k = 2ma$

مقدار F'_e برای تغییر طول ۴ سانتی‌متر $k \times \frac{4}{100}$ است که $\frac{4}{5}$ مقدار F_e در حالت اول است. با استفاده از رابطه (۱) داریم:

$$F'_e = \frac{4}{5} \times 10 \text{ m} = 8 \text{ m}$$

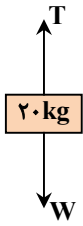
با استفاده از رابطه (۲) می‌توان نوشت:

$$8 \text{ m} - (2 \text{ m} \times 10 \times 0.2) = 2ma \Rightarrow 4 \text{ m} = 2ma \Rightarrow a = 2 \frac{m}{s^2}$$

۶۳- پاسخ: گزینه ۱



▲ مشخصات سؤال: متوسط * فیزیک ۳ (فصل ۲)



$$\Delta y = \frac{1}{2}at^2 + v_0 t \Rightarrow 25 = \frac{1}{2}a \times 10^2 \Rightarrow a = \frac{1}{2} \frac{m}{s^2}$$

$$T - W = ma \Rightarrow T - 200 = 20 \times \frac{1}{2} \Rightarrow T = 210 \text{ N}$$

طناب بر وزنه نیروی ۲۱۰ نیوتون وارد می کند، پس وزنه هم بر طناب نیروی ۲۱۰ نیوتون وارد می کند.

۶۴- پاسخ: گزینه ۲



▲ مشخصات سؤال: متوسط * فیزیک ۳ (فصل ۲)

معادله سهمی: $p = A(t - 10)^2 + B$

رابطه (۱) $t = 0, p = 400 \frac{\text{kg} \cdot \text{m}}{\text{s}} \Rightarrow 100A + B = 400$

$t = 10 \text{ s}, p = -200 \frac{\text{kg} \cdot \text{m}}{\text{s}} \Rightarrow 0 + B = -200 \xrightarrow{(1)} A = 6$

معادله تکانه- زمان به صورت مقابل می شود:

$$p = 6(t - 10)^2 - 200$$

$$F_{\text{av}} = \frac{\Delta p}{\Delta t} = \frac{p(30) - p(10)}{30 - 10} = \frac{(2400 - 200) - (-200)}{20} = \frac{2400}{20} = 120 \text{ N}$$

۶۵- پاسخ: گزینه ۴



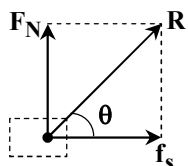
▲ مشخصات سؤال: متوسط * فیزیک ۳ (فصل ۲)

نیروی مرکزگرا نیروی اصطکاک است که سطح جاده بر ماشین وارد می کند:

$$f_s = \frac{mv^2}{R}$$

ضمناً در راستای قائم نیروی خالص وارد بر ماشین صفر است:

$$F_N = mg$$



$$\tan \theta = \frac{F_N}{f_s} = \frac{mg}{\frac{mv^2}{R}} \Rightarrow \tan \theta = \frac{Rg}{v^2}$$

۶۶- پاسخ: گزینه ۴

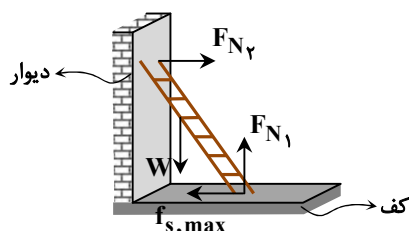


▲ مشخصات سؤال: متوسط * فیزیک ۳ (فصل ۲)

$$f_{s,\text{max}} = \mu_s F_{N_1}$$

$$F_{N_1} = W$$

نیروی کف بر نردبان برابری دو نیروی $f_{s,\text{max}}$ و F_{N_1} است.



$$R = \sqrt{F_{N_1}^2 + f_{s,\text{max}}^2} \Rightarrow mg + 10 = \sqrt{(mg)^2 + (0.75 \times mg)^2}$$

$$\Rightarrow mg + 10 = mg \sqrt{1 + \left(\frac{3}{4}\right)^2} \Rightarrow 10 = mg \times \frac{5}{4}$$

$$\Rightarrow mg = 40 \text{ N} \Rightarrow m = 4 \text{ kg}$$

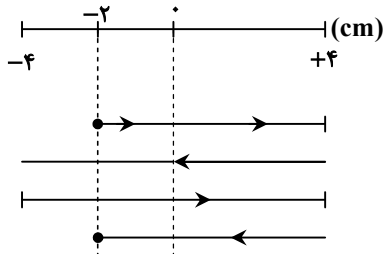
▲ مشخصات سؤال: متوسط * فیزیک ۳ (فصل ۳)

۶۷- پاسخ: گزینه ۲



$$t_1 = \frac{1}{15} \text{ s} \Rightarrow \omega t_1 = 2 \cdot \pi \cdot t_1 = \frac{4\pi}{3} \text{ rad} \Rightarrow x_1 = 0.04 \cos \frac{4\pi}{3} = -0.02 \text{ m} = -2 \text{ cm}$$

وقتی زاویه (ωt) در ربع های فرد دایره مثلثاتی است، متحرک به وضع تعادل $(x = 0)$ نزدیک می شود.



$$t_2 = \frac{7}{30} \text{ s} \Rightarrow \omega t_2 = 2 \cdot \pi \cdot t_2 = \frac{2 \cdot \pi \cdot 7}{30} = \frac{14\pi}{30} = \frac{7\pi}{15} = 2\pi + \frac{7\pi}{15}$$

$$\Rightarrow x_2 = 0.04 \cos \left(\frac{7\pi}{15} \right) = -0.02 \text{ m} = -2 \text{ cm}$$

در زوایای $\theta = 0, 2\pi, 4\pi$ بر حسب رادیان متحرک به نقطه $+A$ می رسد و در زوایای

$\theta = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}, \frac{7\pi}{2}, \dots$ به مرکز $(x = 0)$ می رسد.

$$l = 2 + 4 + 8 + 8 + 4 + 2 = 28 \text{ cm} \Rightarrow s_{av} = \frac{l}{\Delta t} = \frac{28}{\frac{5}{30}} = 168 \frac{\text{cm}}{\text{s}}$$

دقت کنید: هرگاه مدت زمان داده شده مضرب درست $\frac{T}{n}$ باشد $(\Delta t = \frac{nT}{\nu})$ مسافت طی شده هم همان مضرب درست از $(2A)$ می شود

$(l = n \times 2A)$ و تندی متوسط برابر $\frac{2A}{T}$ یعنی $\frac{4A}{T}$ می شود. در این مسئله این طور نیست اما اگر بود کار خیلی ساده تر می شد.

▲ مشخصات سؤال: ساده * فیزیک ۳ (فصل ۳)

۶۸- پاسخ: گزینه ۱



$$\text{است دوره } 120 \text{ دقیقه} \Rightarrow f = \frac{120}{60} = 2 \text{ Hz} \Rightarrow \omega = 2\pi f = 4\pi \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

$$2A = 5 \Rightarrow A = \frac{5}{2} \text{ cm} = \frac{1}{40} \text{ m}$$

با داشتن A و ω به سراغ محاسبه v_{\max} و a_{\max} می رویم:

$$\begin{cases} v_{\max} = A\omega = \frac{1}{40} \times 4\pi = \frac{\pi}{10} \frac{\text{m}}{\text{s}} \\ a_{\max} = A\omega^2 = \frac{1}{40} \times 4\pi \times 4\pi = \frac{2\pi^2}{5} \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \end{cases}$$



$$E = \frac{1}{2} kA^2 \Rightarrow \frac{1}{2} m v_{\max}^2 = \frac{1}{2} kA^2 \Rightarrow v_{\max}^2 = \frac{k}{m} A^2 \xrightarrow{\frac{k}{m} = \omega^2} v_{\max}^2 = \omega^2 A^2 \Rightarrow v_{\max} = A\omega$$

$$a_{\max} = \frac{F_{\max}}{m} = \frac{kA}{m} = \omega^2 A$$

▲ مشخصات سؤال: ساده * فیزیک ۳ (فصل ۳)

۶۹- پاسخ: گزینه ۴

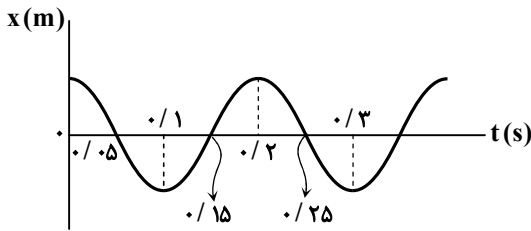


$$E = \frac{1}{2} kA^2 \Rightarrow E' = 2 \times 2^2 E = 8E$$

$$f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{m}} \Rightarrow f' = \sqrt{\frac{2}{1}} f = 2f$$

۷۰- پاسخ: گزینه ۲

▲ مشخصات سؤال: ساده * فیزیک ۳ (فصل ۳)



$$\frac{3}{2}T = 0.3 \Rightarrow T = 0.2 \text{ s}$$

- در زمان‌های $t = 0.05 \text{ s}$ ، $t = 0.15 \text{ s}$ و $t = 0.25 \text{ s}$ نوسانگر از وضع تعادل ($x = 0$) عبور می‌کند. پس شتاب آن صفر و تندی بیشینه است.
- در زمان‌های $t = 0$ ، $t = 0.1 \text{ s}$ ، $t = 0.2 \text{ s}$ و $t = 0.3 \text{ s}$ متحرک از $\pm A$ می‌گذرد؛ یعنی تندی صفر و اندازه شتاب بیشینه می‌شود.

▲ مشخصات سؤال: متوسط * فیزیک ۳ (فصل ۳)

۷۱- پاسخ: گزینه ۳



$$\begin{cases} I_{\max} = I_0 + A \\ I_{\min} = I_0 - A \end{cases} \Rightarrow 60 - 40 = 2A \Rightarrow A = 10 \text{ cm}$$

در هر دوره ۲ بار شتاب صفر می‌شود (هنگام عبور از وضع تعادل)؛ پس هر دقیقه ۹۰ دوره است. $(\frac{180}{\pi} = 90)$

$$F_{\max} = k \cdot A = m\omega^2 A = m \times \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 \times A = 0.1 \times \left(\frac{2\pi}{0.2}\right)^2 \times 0.1 = 0.1 \times 9\pi^2 \times 0.1 = 0.9 \text{ N}$$

▲ مشخصات سؤال: متوسط * فیزیک ۳ (فصل ۳)

۷۲- پاسخ: گزینه ۴



دامنه حرکت نوسانگر ۱۰ سانتی‌متر و بیشینه انرژی پتانسیل کشسانی آن ۸ J است.

$$E = U_{\max} = 8 \text{ J} \Rightarrow K_{\max} = 8 \text{ J}$$

$$K = \frac{1}{2}mv^2, E = \frac{1}{2}m(v_{\max})^2, v = \frac{1}{4}v_{\max} \Rightarrow K = \left(\frac{1}{4}\right)^2 \times E \Rightarrow K = \frac{1}{16} \times 8 = 0.5 \text{ J}$$

$$U + K = E \Rightarrow U + 0.5 = 8 \Rightarrow U = 7.5 \text{ J}$$

▲ مشخصات سؤال: متوسط * فیزیک ۳ (فصل ۳)

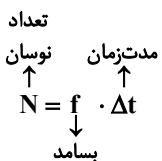
۷۳- پاسخ: گزینه ۱



دوره و بسامد آونگ ساده به جرم وزنه بستگی ندارد.

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$$

با افزایش طول آونگ دوره تناوب زیاد و بسامد نوسان کم می‌شود؛ یعنی تعداد نوسان در یک مدت معین کم می‌شود.



$$\frac{N_2}{N_1} = \frac{f_2}{f_1} = \sqrt{\frac{l_1}{l_2}} \Rightarrow \frac{20}{30} = \sqrt{\frac{l_1}{l_1 + 20}} \Rightarrow \frac{4}{9} = \frac{l_1}{l_1 + 20} \Rightarrow 4l_1 + 80 = 9l_1 \Rightarrow 5l_1 = 80 \Rightarrow l_1 = 16 \text{ cm}$$

▲ مشخصات سؤال: دشوار * فیزیک ۳ (فصل ۳)

۷۴- پاسخ: گزینه ۴



روی نمودار مکان- زمان حرکت هماهنگ ساده اگر مقدار قرینه شود و جهت تغییرات تابع (صعودی یا نزولی بودن) تغییر کند، فاصله زمانی آن دو لحظه $\frac{T}{2}$ می شود:

$$\frac{T}{2} = 0.4 \Rightarrow T = 0.8 \text{ s}$$

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{0.8} = \frac{2.5\pi}{1} = \frac{5\pi}{2} \text{ rad/s}$$

$$a = -\omega^2 x \Rightarrow |a| = \omega^2 \cdot |x| = \frac{5\pi}{2} \times \frac{5\pi}{2} \times \frac{2}{100} = \frac{5 \times 5 \times 10}{200} = \frac{5}{4} \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

▲ مشخصات سؤال: دشوار * فیزیک ۳ (فصل ۳)

۷۵- پاسخ: گزینه ۳



این نمودار نشان می دهد که انرژی جنبشی وزنه در لحظه ای که سرعت $\pm\sqrt{30} \frac{\text{m}}{\text{s}}$ باشد با انرژی پتانسیل کشسانی فنر در لحظه ای که سرعت وزنه $\pm\sqrt{10} \frac{\text{m}}{\text{s}}$ شود، برابر است.

$$U + K = E \Rightarrow K_1 + K_2 = E$$

\swarrow انرژی جنبشی در حالت $v_1 = -\sqrt{10} \frac{\text{m}}{\text{s}}$ \searrow انرژی جنبشی در حالت $v_2 = \sqrt{30} \frac{\text{m}}{\text{s}}$

با توجه به رابطه $K = \frac{1}{2}mv^2$ داریم:

$$K_2 = 3K_1 \Rightarrow K_1 + 3K_1 = E \Rightarrow 4K_1 = E$$

می دانیم $K = \frac{1}{2}mv^2$ و $E = \frac{1}{2}mv_{\text{max}}^2$ پس می توان گفت:

$$K_1 = \frac{1}{4}E \Rightarrow v_1^2 = \frac{1}{4}v_{\text{max}}^2 \Rightarrow v_{\text{max}}^2 = 4v_1^2 = 4 \times (-\sqrt{10})^2 \Rightarrow |v_{\text{max}}| = 2\sqrt{10} \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$v_{\text{max}} = A\omega \Rightarrow 2\sqrt{10} = \frac{2}{100} \times 2\pi f \Rightarrow f = \frac{5 \times \sqrt{10}}{\pi} = 5 \cdot \text{Hz}$$



– اگر انرژی جنبشی به ازای $v = v_1$ با انرژی پتانسیل به ازای $v = v_2$ برابر شود، $v_1^2 + v_2^2 = v_{\text{max}}^2$ می شود. با استفاده از این مطلب می توانیم حل فوق را کوتاه تر کنیم.

شیمی

▲ مشخصات سؤال: دشوار * شیمی ۳ (فصل ۲)

۷۶- پاسخ: گزینه ۴



عدد اتمی چهار عنصر نافلز در دوره سوم جدول تناوبی به ترتیب برابر ۱۵، ۱۶، ۱۷ و ۱۸ است که شماره گروه آن ها نیز به طور تصادفی برابر عدد اتمی آن هاست. از سویی عدد اتمی اکسنده ترین عنصر در جدول تناوبی برابر ۹ و متعلق به F است، پس شماره گروه فلز B از دوره چهارم باید ۶، ۷، ۸ و ۹ باشد. در نتیجه عدد اتمی فلز B باید ۲۴، ۲۵، ۲۶ و ۲۷ باشد.

اکنون مجموع $n+1$ چهار نافلز دوره سوم را محاسبه می‌کنیم.

$$15 P: 3s^2 3p^3 \Rightarrow 2(3+0) + 3(3+1) = 18 \quad \times$$

$$16 S: 3s^2 3p^4 \Rightarrow 2(3+0) + 4(3+1) = 22 \quad \times$$

$$17 Cl: 3s^2 3p^5 \Rightarrow 2(3+0) + 5(3+1) = 26 \quad \checkmark$$

$$18 Ar: 3s^2 3p^6 \Rightarrow 2(3+0) + 6(3+1) = 30 \quad \times$$

پس عنصر A، Cl و عنصر B، Fe است.

(الف) درست؛ یکی از دو فرآورده برکافت منیزیم کلرید مذاب، گاز کلر است.

(ب) نادرست؛ برای مثال قدرت کاهندگی فلز Zn از فلز Fe بیشتر است.

(پ) درست؛ عنصر آهن دارای دو کاتیون با بارهای $2+$ و $3+$ است.

(ت) نادرست؛ پتانسیل کاهش عنصر کلر از پتانسیل کاهش عنصر فلونور به یقین کوچک‌تر است ولی پتانسیل آن از پتانسیل کاهش دو

عنصر برم و ید نیز به یقین بزرگ‌تر است؛ زیرا خصلت نافلزی دو عنصر برم و ید از خصلت نافلزی عنصر کلر کمتر است.

۷۷- پاسخ: گزینه ۳ ▲ مشخصات سؤال: دشوار * شیمی ۳ (فصل ۲)



معادله کلی واکنش انجام شده در سلول گالوانی « $Al-Cu$ » به صورت زیر است:



$$\frac{xg}{2 \times 27g Al} = \frac{yg}{3 \times 64g Cu} = \frac{0/3 \text{ mol}}{6 \text{ mole}^-} \Rightarrow x = 2/7, y = 9/6$$

بنابراین از جرم تیغه Al به اندازه $2/7$ گرم کاسته شده و بر جرم تیغه Cu به اندازه $9/6$ گرم افزوده می‌شود، پس:

$$\frac{(100 - 2/7)}{(100 + 9/6)} = 0/88$$

۷۸- پاسخ: گزینه ۱ ▲ مشخصات سؤال: ساده * شیمی ۳ (فصل ۲)



در سلول گالوانی «آهن-مس» الکتروکد آهن در نقش آند اکسید شده و به Fe^{2+} تبدیل می‌شود. از سویی در نیم‌واکنش کاتدی، یون‌های

Cu^{2+} با گرفتن الکترون کاهش می‌یابند، پس:

$$emf = E^{\circ}_{\text{کاتد}} - E^{\circ}_{\text{آند}} = (+0/34) - (-0/44) = 0/78 V$$

۷۹- پاسخ: گزینه ۳ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * شیمی ۳ (فصل ۲)



مورد ۳: درست؛ در سلول گالوانی « $Al-H_2$ » نیم‌سلول هیدروژن نقش کاتد را دارد، پس یون‌های الکترولیت یا $H^+(aq)$ با گرفتن

الکترون به H_2 تبدیل می‌شوند. در نتیجه غلظت آن‌ها کاهش یافته و pH محلول افزایش می‌یابد.



مورد ۱: نادرست؛ فلز Al نقش اکسندگی ندارد؛ زیرا نمی‌تواند الکترون جذب کند. بلکه نقش کاهندگی دارد و می‌تواند الکترون از دست بدهد.

مورد ۲: نادرست؛ emf سلول گالوانی همواره عددی مثبت است.

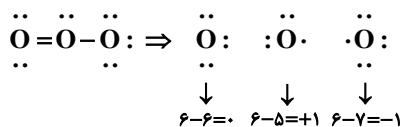
مورد ۴: نادرست؛ واکنش H_2 با Al^{3+} خودبه‌خودی نیست؛ زیرا قدرت کاهندگی H_2 از قدرت کاهندگی Al کمتر است.

▲ مشخصات سؤال: متوسط * شیمی ۳ (فصل ۲)

۸۰- پاسخ: گزینه ۴

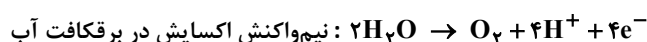
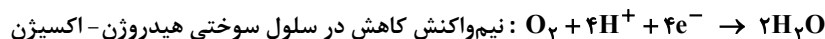


مورد الف: درست



مورد ب: نادرست؛ لیتیم سبک‌ترین فلز است نه سبک‌ترین عنصر.

مورد پ: درست



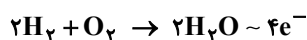
مورد ت: نادرست؛ وجود ناخالصی سبب کاهش نقطه ذوب می‌شود. گرماده بودن انحلال کلسیم کلرید در آب ارتباطی با کاربرد آن در برقکافت سدیم کلرید مذاب ندارد. از سویی در سلول الکترولیتی مورد نظر، آب نداریم.
مورد ث: نادرست؛ فلز قلع در حلی در هیچ‌یک از دو فرایند اکسایش و کاهش شرکت نمی‌کند.

▲ مشخصات سؤال: دشوار * شیمی ۳ (فصل ۲)

۸۱- پاسخ: گزینه ۳



معادله کلی موازنه شده در دو سلول سوختی « $\text{H}_2 - \text{O}_2$ » و « $\text{CH}_4 - \text{O}_2$ » به صورت زیر است:



با توجه به فرض سؤال، شمار الکترون‌های مبادله شده در دو سلول برابر است، پس معادله اول را در عدد ۲ ضرب می‌کنیم. بر این اساس ضریب گاز کاهنده در سلول سوختی هیدروژن یا همان H_2 برابر ۴ و مجموع ضرایب استوکیومتری مواد در معادله کلی سلول سوختی متان برابر ۶ است، پس:

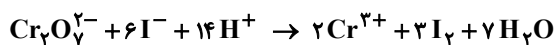
$$\frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

▲ مشخصات سؤال: دشوار * شیمی ۳ (فصل ۲)

۸۲- پاسخ: گزینه ۱

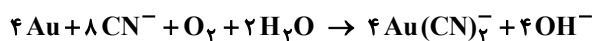


گزینه ۱:



نسبت ضریب گونه کاهنده یعنی I^- به ضریب گونه اکسنده یعنی $\text{Cr}_2\text{O}_7^{2-}$ برابر ۶ است.

گزینه ۲:



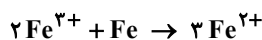
نسبت ضریب گونه کاهنده یعنی Au به ضریب گونه اکسنده یعنی O_2 برابر ۴ است.

گزینه ۳:



نسبت ضریب گونه کاهنده یعنی Cl^- در HCl که برابر ۴ است به ضریب گونه اکسنده یعنی MnO_2 برابر ۴ است.

گزینه ۴:



نسبت ضریب گونه کاهنده یعنی Fe به ضریب گونه اکسنده یعنی Fe^{3+} برابر ۱ است.

۸۳- پاسخ: گزینه ۴

▲ مشخصات سؤال: دشوار * شیمی ۳ (فصل ۲)



فرمول مولکولی ترکیب داده شده، $C_{23}H_{27}Cl_4N_3O_2$ است.
بنابراین مجموع عدد اکسایش ۲۳ اتم کربن در آن برابر است با:

$$(C_{23}) + (27 \times (+1)) + (4 \times (-1)) + (3 \times (-3)) + (2 \times (-2)) = 0 \Rightarrow C_{23} = -12$$

مجموع عدد اکسایش اتم‌های گوگرد در آنیون $S_4O_6^{2-}$ برابر است با:

$$S_4 + (6 \times (-2)) = -2 \Rightarrow S_4 = +10$$

$$\frac{-12}{+10} = -1/2$$

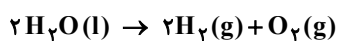
بنابراین:

۸۴- پاسخ: گزینه ۱

▲ مشخصات سؤال: دشوار * شیمی ۳ (فصل ۲)



واکنش برقکافت آب به صورت زیر است:



با انجام واکنش و مصرف شدن آب، غلظت محلول الکترولیت افزایش می‌یابد.
ابتدا جرم یون کلرید را در محلول اولیه در ابتدای آزمایش به دست می‌آوریم:

$$2L \times \frac{7.2 \text{ mg NaCl}}{1L} \times \frac{1g}{1000 \text{ mg}} \times \frac{35.5 \text{ g Cl}^-}{58.5 \text{ g NaCl}} = 8.52 \text{ g Cl}^-$$

اکنون جرم محلول را در زمانی که غلظت یون کلرید در محلول به ۵۳۲۵ ppm رسیده است، به دست می‌آوریم:

$$5325 = \frac{8.52 \text{ g Cl}^-}{\text{محلول g}} \times 10^6 \Rightarrow ? = 1600 \text{ g}$$

بنابراین در مدت زمان انجام آزمایش جرم محلول از ۲۰۰۰g به ۱۶۰۰g کاهش یافته است، پس ۴۰۰g آب تجزیه شده است.
با توجه به معادله برقکافت آب، به ازای تجزیه ۲ مول آب یا ۳۶g آب، تفاوت مول گازهای تولید شده در آند (اکسیژن) و کاتد (هیدروژن) برابر یک مول است، پس:

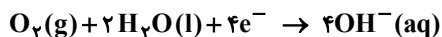
$$400 \text{ g H}_2\text{O} \times \frac{1 \text{ mol تفاوت گاز}}{36 \text{ g H}_2\text{O}} \times \frac{22.4 \text{ L}}{1 \text{ mol}} = 248.8 \text{ L}$$

۸۵- پاسخ: گزینه ۴

▲ مشخصات سؤال: دشوار * شیمی ۳ (فصل ۲)

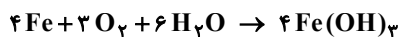


گزینه ۱: درست



گزینه ۲: درست؛ با اکسایش هر مول آهن در آند، ۲ مول الکترون تولید و به سمت کاتد فرستاده می‌شود که با توجه به معادله نیم‌واکنش کاهش، به ازای ۲ مول الکترون، ۲ مول یون OH^- تولید می‌شود.

گزینه ۳: درست



مجموع ضرایب استوکیومتری مواد در معادله کلی زنگ زدن آهن برابر ۱۷ است که عدد اتمی هالوژن دوره سوم جدول تناوبی یا همان Cl نیز برابر ۱۷ است.

گزینه ۴: نادرست؛ نسبت مولی آنیون به کاتیون در زنگ آهن با فرمول شیمیایی $Fe(OH)_3$ برابر $\frac{3}{1}$ و نسبت مولی کاتیون به آنیون در

Al_2O_3 برابر $\frac{2}{3}$ است که :

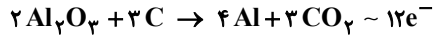
$$\frac{2}{1} \neq 2$$

▲ مشخصات سؤال: متوسط * شیمی ۳ (فصل ۲)

۸۶- پاسخ: گزینه ۲



معادله موازنه شده فرایند حال به صورت زیر است:



مورد الف: درست

مورد ب: نادرست؛ الکترولیت مذاب مخلوطی شامل Al_2O_3 مذاب است نه محلول در آب.

مورد پ: درست

مورد ت: درست

▲ مشخصات سؤال: دشوار * شیمی ۳ (فصل ۲)

۸۷- پاسخ: گزینه ۳



مورد «اول»: نادرست؛ قطعه باید به کاتد یا قطب منفی باتری بیرونی وصل شود ولی باتری از نوع منبع جریان مستقیم است نه جریان متناوب.

مورد «دوم»: درست

مورد «سوم»: نادرست؛ آهن نقشی در نیم واکنشها ندارد و نه اکسایش می یابد و نه کاهش، پس غلظت Fe^{2+} از ابتدا تا انتهای فرایند برابر صفر است.

مورد «چهارم»: درست

مورد «پنجم»: نادرست؛ حداقل ولتاژ مورد نیاز برای انجام این فرایند از تباطی با پتانسیل کاهش فلز آهن ندارد. اتمهای نقره در آند اکسید شده و در کاتد نیز کاهش می یابند.

▲ مشخصات سؤال: ساده * شیمی ۳ (فصل ۱)

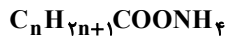
۸۸- پاسخ: گزینه ۴



گزینه ۱: واکنش خنثی شدن هر نوع اسید و بازی چه قوی و چه ضعیف، برگشتناپذیر است.
گزینه ۲: اگر زنجیر هیدروکربنی از حدی بزرگتر باشد، انحلال پذیری آن در آب کم می شود و خاصیت پاک کنندگی صابون کاهش می یابد.
گزینه ۳: در ساختار صابون سر مثبت (کاتیون) نقشی در پاک کنندگی ندارد و تنها آنیون در پاک کنندگی وارد می شود.

▲ مشخصات سؤال: متوسط * شیمی ۳ (فصل ۱)

۸۹- پاسخ: گزینه ۱



$$H \text{ جرم } = (2n+5)(g) \Rightarrow \text{شمار اتم } H = 2n+5$$

$$\text{جرم اتم های اکسیژن در یک مول صابون} = 2 \times 16 = 32 \text{ g}$$

$$\text{شمار اتم های کربن در صابون برابر ۲۰ است.} \Rightarrow 2n = 38 \Rightarrow n = 19$$

▲ مشخصات سؤال: دشوار * شیمی ۳ (فصل ۱)

۹۰- پاسخ: گزینه ۱



در بین اسیدهای حاصل از انحلال هالیدهای هیدروژن در آب HF ضعیف است.



$$K_a = \frac{M\alpha^2}{1-\alpha} = \frac{[H^+] \cdot \alpha}{1-\alpha} \Rightarrow [H^+] \cdot \alpha = K_a - K_a\alpha \Rightarrow \alpha([H^+] + K_a) = K_a \Rightarrow \alpha = \frac{K_a}{[H^+] + K_a} \Rightarrow \alpha = \frac{1}{\frac{[H^+]}{K_a} + 1}$$

۹۱- پاسخ: گزینه ۱

▲ مشخصات سؤال: متوسط * شیمی ۳ (فصل ۱)



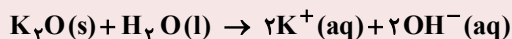
کلیه عبارت‌ها نادرست هستند.



عبارت «اول»: محلول ضدبخ مانند محلول شکر در آب غیرالکترولیت است.

عبارت «دوم»: رسانایی به مجموع غلظت یون‌ها وابسته است و بزرگ یا کامل بودن α کافی نیست.

عبارت «سوم»: با توجه به معادله زیر، انحلال هر مول K_2O در آب ۴ مول یون تولید می‌کند؛ بنابراین از انحلال ۰/۲ مول K_2O ، ۰/۸ مول یون آب پوشیده تولید می‌شود.



عبارت «چهارم»: با اضافه کردن آب مقطر درجه یونش افزایش می‌یابد اما رسانایی کم می‌شود؛ زیرا محلول رقیق می‌شود و غلظت کاهش می‌یابد.

۹۲- پاسخ: گزینه ۳

▲ مشخصات سؤال: متوسط * شیمی ۳ (فصل ۱)



گزینه ۱: چون HF اسید ضعیف است، پس شمار اندکی از یون‌های آب پوشیده با شمار زیادی مولکول HF یونش نیافته در تعادل هستند.

گزینه ۲: برای NaOH تفکیک تعریف می‌شود و یونش نادرست است.

گزینه ۴: درجه یونش هم به غلظت H^+ و هم غلظت مولی دو محلول وابسته است، پس لزوماً برابر بودن pH دو محلول اسیدی به معنای برابری درجه یونش آن‌ها نیست.

۹۳- پاسخ: گزینه ۴

▲ مشخصات سؤال: متوسط * شیمی ۳ (فصل ۱)



گزینه ۱: فرمول شیمیایی اسید چرب حاصل از چربی کوهان شتر $C_{17}H_{35}COOH$ است که سیرشده است.

گزینه ۲: جوش شیرین قدرت پاک‌کنندگی را افزایش می‌دهد اما ضدعفونی‌کننده نیست.

گزینه ۳: صابون با آلاینده‌ها واکنش شیمیایی نمی‌دهد؛ بنابراین قدرت پاک‌کنندگی صابون به انحلال‌پذیری آن بستگی دارد نه به توانایی انجام واکنش.



- فرمول چربی کوهان شتر $C_{57}H_{111}O_2$ و هر سه اسید چرب سازنده آن یکسان و سیرشده با فرمول $C_{18}H_{36}O_2$ یا $C_{17}H_{35}COOH$ است.

۹۴- پاسخ: گزینه ۳

▲ مشخصات سؤال: متوسط * شیمی ۳ (فصل ۱)



فقط عبارت «سوم» درست است؛ زیرا pH نشان‌دهنده غلظت H^+ در محلول است یعنی غلظت H^+ در محلول اسید ضعیف ولی با غلظت زیاد می‌تواند از غلظت H^+ در محلول بسیار رقیق‌تر یک اسید قوی بیشتر باشد.



عبارت «اول»: آرنیوس مدلی برای مقایسه قدرت اسیدها و بازها ندارد.

عبارت «دوم»: باریوم کلرید نمک است و با آب واکنش نمی‌دهد، پس تغییری در غلظت OH^- یا H^+ ایجاد نمی‌کند.

عبارت «چهارم»: از واکنش CO_2 با آب، H_2CO_3 حاصل می‌شود که اسیدی ضعیف است و نمی‌توان به‌ازای هر مول از آن در آب ۳ مول یون آب پوشیده ایجاد نمود.

خوبه اینو بدونی



pH نشان دهنده غلظت H^+ در محلول یا میزان خاصیت اسیدی محلول است ولی قدرت اسیدی با α یا K_{α} سنجیده می شود.

۹۵- پاسخ: گزینه ۲ **▲ مشخصات سؤال: متوسط * شیمی ۳ (فصل ۱)**

جوابش اینه



برای HNO_3 که اسید قوی است، $\alpha \approx 1$ در نظر می گیریم؛ بنابراین چنانچه غلظت H^+ در محلولی از HNO_3 برابر غلظت H^+ در محلولی از HF با $\alpha < 1$ باشد، لازم است غلظت محلول HF به مراتب بیشتر باشد.

نباید سراغ اینا بری



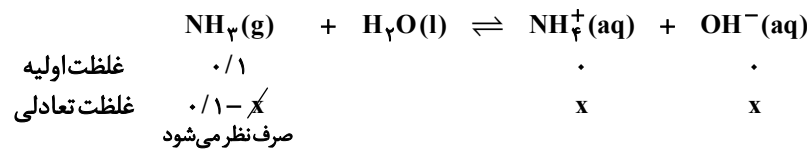
گزینه ۱: نادرست؛ H_2SO_4 یک اسید قوی دو پروتون دار است که در دو مرحله یونش یافته و مجموع غلظت یونها در محلول ۱M، آن بیشتر از ۲M است.
گزینه ۳: نادرست؛ از محلول بازی آمونیاک به عنوان شیشه پاک کن استفاده می شود.
گزینه ۴: نادرست؛ فقط اکسید فلزهای قلیایی و قلیایی خاکی (به جز Mg و Be) اکسید بازی به شمار می آیند.

۹۶- پاسخ: گزینه ۳ **▲ مشخصات سؤال: متوسط * شیمی ۳ (فصل ۱)**

جوابش اینه



$$M_{NH_3} = \frac{3/4g}{2L} \times \frac{1mol}{17g} = 0.1 mol \cdot L^{-1}$$



$$10^{-5} = \frac{x^2}{0.1} \Rightarrow x = [OH^-] = 10^{-3} \Rightarrow [H^+] = \frac{10^{-14}}{[OH^-]} \Rightarrow [H^+] = 10^{-11}$$

۹۷- پاسخ: گزینه ۴ **▲ مشخصات سؤال: متوسط * شیمی ۳ (فصل ۱)**

جوابش اینه



$$[CH_3COO^-] = [H^+] = 10^{-3/3} = 5 \times 10^{-4} mol \cdot L^{-1}$$

$$غلظت مولی یون اتانوات = \frac{1 \cdot a \cdot d}{M} \Rightarrow 5 \times 10^{-4} = \frac{1 \cdot a \times 1}{59} \Rightarrow a = 295 \times 10^{-5} \Rightarrow ppm = 10^4 a \Rightarrow ppm = 29/5$$

۹۸- پاسخ: گزینه ۲ **▲ مشخصات سؤال: دشوار * شیمی ۳ (فصل ۱)**

جوابش اینه



$$HNO_3 : \begin{cases} pH = 0.3 \Rightarrow [H^+] = 10^{-0.3} = 0.5 \Rightarrow M = 0.5 \\ \Rightarrow HNO_3 \text{ مول} = 0.5 \times 2 = 1 \\ \text{حجم} = 2L \end{cases}$$

مول HNO_3 لازم برای خنثی کردن $NaOH$ برابر مول $NaOH$ و مول HNO_3 لازم برای خنثی کردن $Ca(OH)_2$ ، دو برابر مول $Ca(OH)_2$ است؛ بنابراین:

$$\left(\frac{a}{40} \times 1 \right) + \left(\frac{0.5b}{74} \times 2 \right) = 1 \Rightarrow a + 40b = 40 \Rightarrow \begin{cases} \text{اگر } a = 20 \Rightarrow b = 0.5 \\ \text{اگر } a = 10 \Rightarrow b = 0.75 \end{cases}$$

۹۹- پاسخ: گزینه ۱

▲ مشخصات سؤال: متوسط * شیمی ۳ (فصل ۱)



$$\frac{0.1 M_{HA}}{0.2 \times M_{HB}} = 4 \Rightarrow M_{HA} = 8 M_{HB}$$

$$[H^+] = M\alpha \Rightarrow \alpha_{HA} \times M_{HA} = \alpha_{HB} \times M_{HB}$$

$$\alpha_{HA} \times 8 M_{HB} = \alpha_{HB} \times M_{HB}$$

$$\frac{\alpha_{HA}}{\alpha_{HB}} = \frac{1}{8} = 0.125$$

۱۰۰- پاسخ: گزینه ۴

▲ مشخصات سؤال: دشوار * شیمی ۳ (فصل ۱)



۱ مولار ۱: $pH = 4 \Rightarrow [H^+] = 10^{-4} \Rightarrow 10^{-8} = \frac{(10^{-4})^2}{M_1} \Rightarrow M_1 = 10^{-8}$

۲ مولار ۱/۵: $pH = 4/15 \Rightarrow [H^+] = 10^{-4/15} \Rightarrow 10^{-8} = \frac{10^{-8/3}}{M_2} \Rightarrow M_2 = 10^{-2/3} = 0.5$

مول خنثی شده = $\Delta M \times \text{حجم} = 0.1(1 - 0.5) = 0.05 \text{ mol}$

$$0.05 \text{ mol} = \frac{x \text{ g KOH}}{56 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}} \Rightarrow x = 2.8 \text{ g KOH}$$

۱۰۱- پاسخ: گزینه ۲

▲ مشخصات سؤال: دشوار * شیمی ۳ (فصل ۱)



اولیه $pH = 1 \Rightarrow [H^+] = M = 0.1 \Rightarrow \text{mol HCl} = 3L \times 0.1M = 0.3$

ثانویه $pH = 1/7 \Rightarrow [H^+] = 0.2 \Rightarrow \text{mol HCl} = 3L \times 0.2 = 0.6$

مول اسید خنثی شده = $0.3 - 0.6 = 0.24 \text{ mol Mg(OH)}_2$

با توجه به اینکه هر مول Mg(OH)_2 دو مول HCl (اسید معده) را خنثی می‌کند؛ بنابراین:

$$0.24 \text{ mol HCl} \times \frac{1 \text{ mol Mg(OH)}_2}{2 \text{ mol HCl}} \times \frac{58 \text{ g Mg(OH)}_2}{1 \text{ mol Mg(OH)}_2} \times \frac{100}{29} = 24 \text{ g Mg(OH)}_2$$

۱۰۲- پاسخ: گزینه ۲

▲ مشخصات سؤال: دشوار * شیمی ۳ (فصل ۱)



$\text{KOH} : pH = 14 \Rightarrow pOH = 0 \Rightarrow [OH^-] = M = 1 \Rightarrow \text{KOH مول} = 0.10L \times 1M = 0.1 \text{ mol(OH}^-)$

Ca(OH)_2 مول $\frac{37 \text{ g}}{74 \text{ g}} = 0.5 \Rightarrow \text{mol(OH}^-) = 1 \Rightarrow \text{OH}^-$ مجموع مول = $1/1 \Rightarrow [OH^-]_{\text{کل}} = \frac{1/1}{11} = 0.1 \Rightarrow pOH = 1$

$\Rightarrow pH = 13$

۱۰۳- پاسخ: گزینه ۱

▲ مشخصات سؤال: متوسط * شیمی ۳ (فصل ۱)



pH محلولی HNO_3 در ابتدا برابر ۲ است، پس نمودارهای (۲) و (۴) نادرست هستند. اکنون باید محاسبه کنیم که با افزودن ۵ mL محلول ۰/۱ مولار NaOH ، pH محلول HNO_3 به چه عددی می‌رسد.

$\text{mol NaOH} = 0.1 \times 0.005 = 5 \times 10^{-4} \Rightarrow$ مول اسید مصرفی = 5×10^{-4}

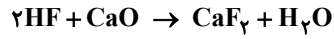
\Rightarrow مول اسید باقی‌مانده = $(0.100 \times 0.1) - 5 \times 10^{-4} = 5 \times 10^{-4} \Rightarrow [HNO_3] = \frac{5 \times 10^{-4} \text{ mol}}{1.05 \times 10^{-3} \text{ L}} \Rightarrow pH = 2/3$

▲ مشخصات سؤال: دشوار * شیمی ۳ (فصل ۱)

۱۰۴- پاسخ: گزینه ۲



$$\text{HF: } \begin{cases} \text{pH} = 2/7 \Rightarrow [\text{H}^+] = 2 \times 10^{-3} \\ K_a = 10^{-3} \end{cases} \Rightarrow 10^{-3} = \frac{(2 \times 10^{-3})^2}{M - 2 \times 10^{-3}} \Rightarrow M = 6 \times 10^{-3}$$



$$\frac{6 \times 10^{-3} \times 0.4 \text{ L}}{2 \text{ mol HF}} = \frac{x \times 10^{-3}}{56 \text{ g CaO}} \times \frac{70}{100} \Rightarrow x = 96 \text{ mg CaO}$$

▲ مشخصات سؤال: متوسط * شیمی ۳ (فصل ۱)

۱۰۵- پاسخ: گزینه ۲



$$\left. \begin{array}{l} \text{مول چربی کوهان شتر} = 0.2 \Rightarrow \text{مول آمونیاک لازم} = 3 \times 0.2 = 0.6 \\ \text{C}_{17}\text{H}_{35}\text{COOH} \text{ مول} = 0.2 \Rightarrow \text{مول آمونیاک لازم} = 1 \times 0.2 = 0.2 \end{array} \right\} \Rightarrow \text{کل مول آمونیاک} = 0.8$$

$$0.8 \text{ mol NH}_3 \times \frac{17 \text{ g NH}_3}{1 \text{ mol NH}_3} \times \frac{100 \text{ g محلول}}{34 \text{ g NH}_3} \times \frac{1 \text{ L محلول}}{0.8 \text{ g محلول}} = 50 \text{ L}$$