A

دفترچه پاسخ تشریحی

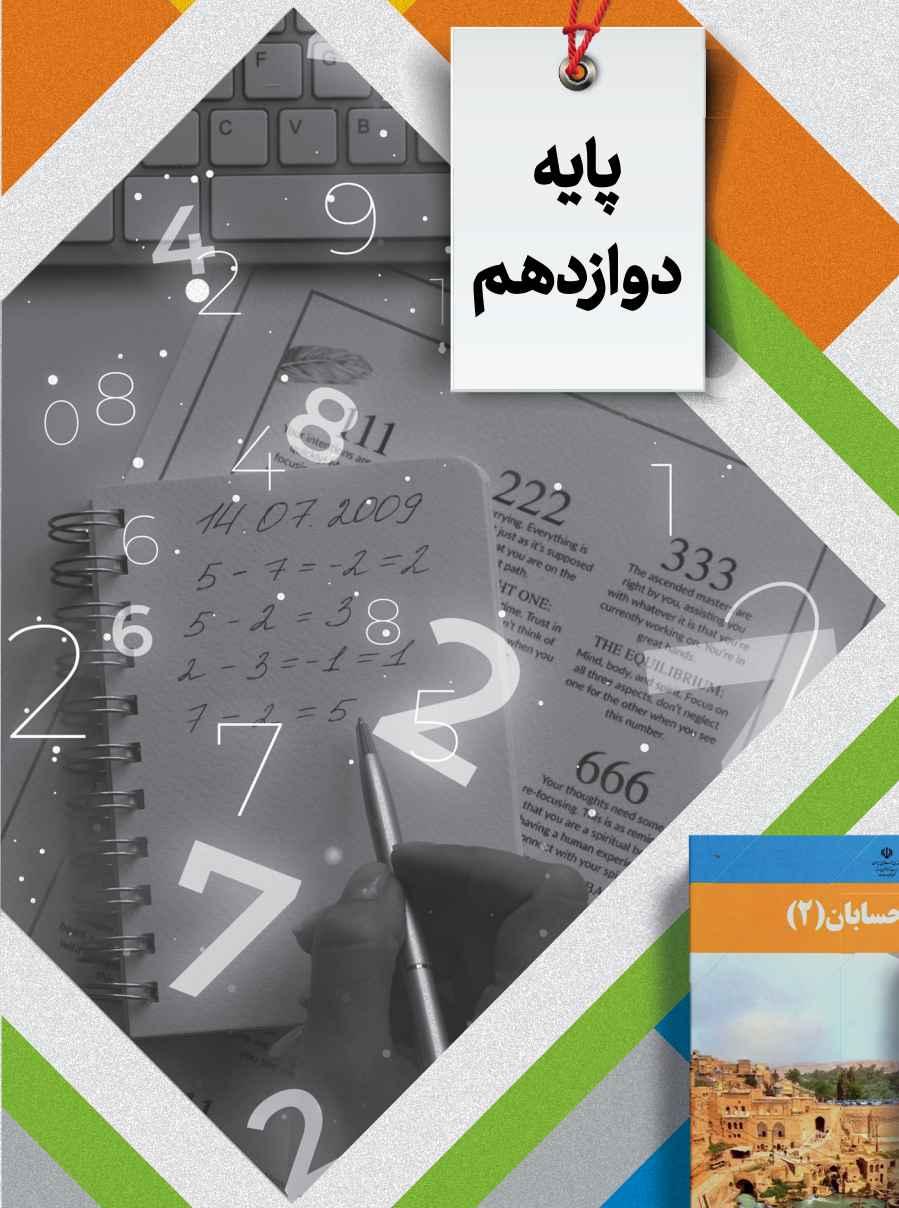
گروه آزمایشی علوم ریاضی

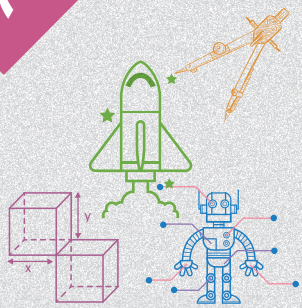
آزمون آزمایشی ۲۳ آذر ۱۴۰۳

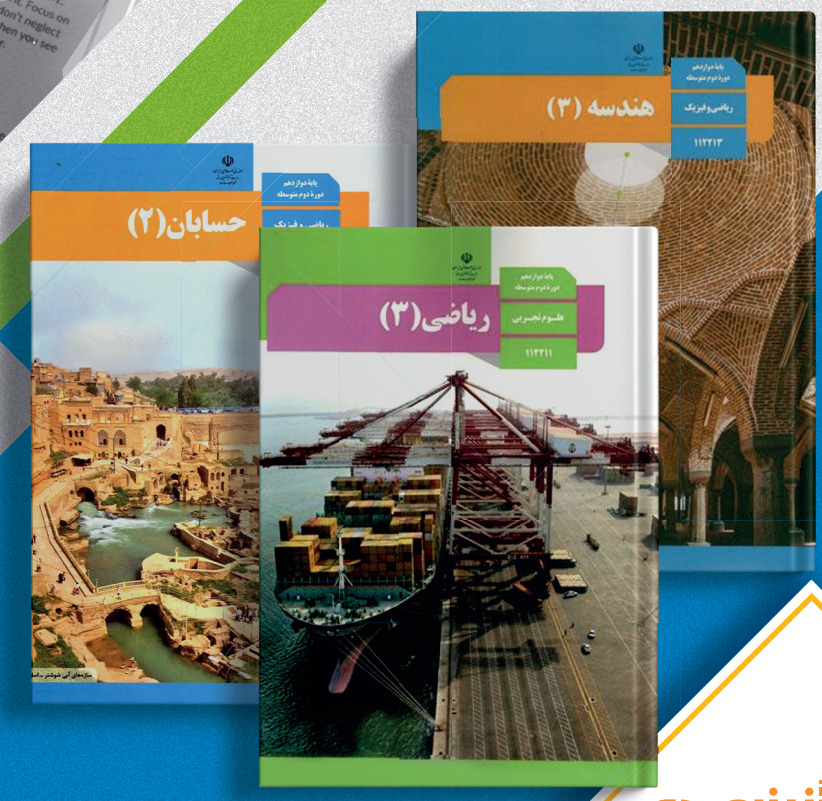
ویژه داوطلبان آزمون سراسری ۱۴۰۴

پایه دوازدهم

مرحله ۸







گزینه دو
مؤسسه آموزشی فرهنگی

۱۴۰۳-۱۴۰۴

پاسخ تشریحی آزمون مرحلهٔ ۸

تذکرهای مهم

- آزمون آزمایشی مرحلهٔ ۹ گزینه‌دو، در روز جمعه ۳۰ آذر ۱۴۰۳ برگزار می‌گردد.
- داوطلب گرامی، جهت استفاده از خدمات طلایی خود مانند کارنامه‌های هوشمند بعد از آزمون، آزمونک‌ها، بانک سؤال گزینه‌دو، رفع اشکال هوشمند، جزوه‌های کمک آموزشی، آرشیو آزمون‌های گزینه‌دو و... ، با استفاده از شمارهٔ داوطلبی (به‌عنوان نام کاربری) و کد ملی خود (به‌عنوان رمز عبور) وارد وب‌سایت گزینه‌دو به آدرس www.gozine2.ir شوید.
- **در صورتی که اینترنتی ثبت‌نام کرده‌اید، رمز عبور شما همان رمزی است که خودتان انتخاب نموده‌اید.**
- کارنامه‌های آزمون آزمایشی مرحلهٔ ۸ به‌صورت کامل، با فاصلهٔ زمانی کوتاهی پس از آزمون مطابق اطلاعیهٔ اعلام‌شده، بر روی پایگاه اینترنتی گزینه‌دو به آدرس www.gozine2.ir قرار می‌گیرد. در صورت بروز اشکال در دریافت کارنامه، موضوع را از طریق نمایندگی شهر خود پیگیری نمایید.

داوطلب گرامی، شما می‌توانید با اسکن تصویر بالا به‌وسیلهٔ گوشی هوشمند و یا تبلت خود، به صفحهٔ اینستاگرام مؤسسه گزینه‌دو وارد شوید.
gozine2.ir

gozine2.ir

گزینه دو
موسسه آموزشی فرهنگی

اسامی هیئت‌علمی آزمون‌های ادواری ویژه داوطلبان کنکور مؤسسه گزینه‌دو

در سال تحصیلی ۱۴۰۴_۱۴۰۳

معاون تولید محتوا: **علی الفتی**

مدیر واحد آموزش تخصصی: **محمدرضا محمدهاشمی**

گروه ریاضی

مدیر گروه: سید امیرمحمد سید شاکری

	مسئول درس و دستیاران	طراحان	کارشناسان
حسابان و ریاضی پایه	مسئول درس: علی افضل‌زاده دستیاران: عباس سعیدی - امین کبیری	حسین شفیع‌زاده ایمان اردستانی	علی صادقی نیکو دهقان
هندسه	مسئول درس: سعید اکبرزاده دستیار: هادی کاظم‌نژاد	سیدمحسن میراسلامی علی نعمت	محمدامین خدابنده امیر ورودی
ریاضیات گسسته	مسئول درس: سعید اکبرزاده دستیار: فرهاد فرزامی	علیرضا شریف‌خطیبی امیدرضا پورحسینی	محمدامین خدابنده امیر ورودی
ریاضی تجربی	مسئول درس: ایمان اردستانی دستیاران: وحید جعفری - مهدی پوررضایی	مهرداد کیوان علی افضل‌زاده	پوپک مقدم
ریاضی انسانی	مسئول درس: مهدی مجدآرا دستیاران: حسین اسدزاده - مهدی پوررضایی	علی شهرابی فراهانی وحید رباعی	

گروه علوم

مدیر گروه: محمدحسین کشانی

	مسئول درس و دستیار	طراحان	کارشناسان
زیست شناسی	مسئول درس: امیر کبیری راد دستیار: پرسا کامکار	محمد پازوکی علی پناهی شایق بهرام میرحبیبی منصور کهن دل امیر کبیری راد علیرضا اکبرپور مسعود حدادی فرزاد صادقیان	بتول خواجه پور حسین ایمانی پور مرتضی فرهمند
فیزیک	مسئول درس: منصور داودوندی دستیار: ساناز دریکوندی	علی نعیمی احمد رضوانی جمال خم‌خاجی بهمن شاهمرادی احمد مصلایی	سیدعلیرضا کشفیان نرگس سادات حسینی مریم گلی حسنلو
شیمی	مسئول درس: شهرام شاه‌پرویزی	ماشاءالله سلیمانی مهداد ملاصالحی محمدعلی توسلی‌فر بهنام ابراهیم‌پور شهرام شاه‌پرویزی محمد احمدی	محمد احمدی حسین ایمانی پور
زمین شناسی	مسئول درس: شکیبا کریمی	فرزانه رجایی فرزانه صاعدی حسن علیمحمدی	فرزانه صاعدی آنیتا هرطونیان سهیلا مرادی

گروه انسانی

مدیر گروه: علی اکبر آخوندی

	مسئول درس و دستیاران	طراحان	کارشناسان
علوم و فنون ادبی	مسئول درس: محمدرضا پیرو دستیار: حسنا محمدی	ابوالفضل قاضی علی عطری محمدرضا لمسه‌چی عماد فیض‌آبادی	سپهر سالار کیا سید محمد صادق حسام زاده محمدحسن مزروعی عرشیا شریفیان
جامعه شناسی	مسئول درس: الهام رضایی دستیار: فاطمه صفری	آزیتا بیدقی علیرضا مختاری فروغ تیموریان محمدزمان کبیر	هستی ناصح نیایش غریبی مهتاب شیرازی
روان شناسی	مسئول درس: سیده ضحی سکاکی دستیار: حسین اصفهانی	سیمین زاهدی مهدی جاهدی سیده ضحی سکاکی	ثنا کاشیان فاطمه انوری
زبان عربی	مسئول درس: پویا رضاداد	کاظم غلامی حمید جوهری مجد پویا رضاداد اسرافیل قربانپور پدرام علیمرادی عرفان جالیزی	سارا حمزه فاطمه نظری مهتاب شیرازی یکتا فضل اللهی صبا پهلوان
تاریخ	مسئول درس: مهسا اصغری دستیار: ثنا کاشیان	شهرام امامی نگار مروتی بهروز یحیی فاطمه نیتی	علی سلوکی مهتاب شیرازی
جغرافیا	مسئول درس: الناز گنج‌کار دستیار: الهه ریاحی نسب	بهروز یحیی نگار مروتی شهرام امامی	علی سلوکی مهتاب شیرازی
فلسفه و منطق	مسئول درس: سعید رحیمیان دستیاران: منصور کاظم بیگی - محمدحسین خدام	حمید سودیان‌طهرانی علی اکبر آخوندی مهدی لاجوردی احمد خداداد حسینی سعید رحیمیان	مهدی مشایخی مهتاب بیشه محمدعلی مهرآبادی فراز مختاری نژاد
اقتصاد	مسئول درس: امیر محمدبیگی دستیار: محمدرضا مبارکی	حسین خاکساری طاهره کریمی علی محسنی میترا چینی‌ساز محمدرضا مبارکی آرش بدری	کوثر رعدی

ریاضـــــــیات

۱- پاسخ: گزینهٔ ۲ ▲ مشخصات سؤال: ساده * ریاضی ۱ (درس ۴، فصل ۳)

خوبه اینو بدونی

- $(a-b)(a+b)=a^2-b^2$ (اتحاد مزدوج)

جوابش اینه

دو عبارت $a+b$ و ab را به‌طور جداگانه محاسبه می‌کنیم:

$$\begin{cases} a+b=2+\sqrt{4+\sqrt{3}}+2-\sqrt{4+\sqrt{3}}=4 \\ ab=(2+\sqrt{4+\sqrt{3}})(2-\sqrt{4+\sqrt{3}})=2^2-(\sqrt{4+\sqrt{3}})^2=4-(4+\sqrt{3})=-\sqrt{3} \end{cases}$$

بنابراین مقدار خواسته شده برابر است با:

$$(a+b+ab)(a+b-ab)=(4-\sqrt{3})(4+\sqrt{3})=16-3=13$$

۲- پاسخ: گزینهٔ ۲ ▲ مشخصات سؤال: ساده * ریاضی ۱ (درس ۳، فصل ۳)

خوبه اینو بدونی

- هرگاه $a>0$ برای هر دو عدد طبیعی m و n، توان کسری و غیرصحیح $\frac{m}{n}$ را برای a چنین تعریف می‌کنیم:

$$a^{\frac{m}{n}}=\sqrt[n]{a^m}$$

- اگر r و s دو عدد گویا باشند و $a,b>0$ باشند، قواعد توان برای اعداد گویا مانند اعداد صحیح برقرار بوده و داریم:

۱) $a^r\times a^s=a^{r+s}$

۲) $(a^r)^s=a^{rs}$

۳) $(ab)^r=a^r\times b^r$

جوابش اینه

دو طرف تساوی $2^{\alpha}\times\sqrt[3]{3\sqrt{18}}=\sqrt{6\sqrt[3]{24}}$ را به توان ۶ (ک.م.م فرجه‌ها) می‌رسانیم:

$$2^{6\alpha}(3\sqrt{18})^2=(6\sqrt[3]{24})^3\Rightarrow 2^{6\alpha}\times 3^2\times 18=6^3\times 24\Rightarrow 2^{6\alpha}\times 3^4\times 2=3^4\times 2^6\Rightarrow 2^{6\alpha+1}=2^6\Rightarrow 6\alpha+1=6\Rightarrow \alpha=\frac{5}{6}$$

۳- پاسخ: گزینهٔ ۴ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * ریاضی ۱ (درس ۴، فصل ۳)

خوبه اینو بدونی

- $(a+b)(a^2-ab+b^2)=a^3+b^3$

جوابش اینه

به جهت استفاده از اتحاد فوق در طرف راست تساوی، دو طرف تساوی را در $\sqrt[3]{2}+1$ ضرب می‌کنیم:

$$(\sqrt[3]{2}+1)(1+\sqrt[3]{4}-\sqrt[3]{2})=\frac{3(\sqrt[3]{2}+1)}{1-x}\Rightarrow(\sqrt[3]{2})^3+1^3=\frac{3(\sqrt[3]{2}+1)}{1-x}\Rightarrow 3=\frac{3(\sqrt[3]{2}+1)}{1-x}\Rightarrow 1-x=\sqrt[3]{2}+1$$

$$\Rightarrow x=-\sqrt[3]{2}\Rightarrow x^3=-2$$

بنابراین مقدار خواسته شده، برابر است با:

$$x^3+\frac{1}{x^3}=-2-\frac{1}{2}=-\frac{5}{2}$$

۴- پاسخ: گزینهٔ ۲ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * ریاضی ۱ (درس ۴، فصل ۳)

خوبه اینو بدونی

(اتحاد مکعب دوجمله‌ای):

- $(a\pm b)^۳ = a^۳ \pm ۳a^۲b + ۳ab^۲ \pm b^۳$

جوابش اینه

عبارت خواسته شده، برابر $A = \frac{a^۶ + a^۳ - ۱}{۳a^۳} = \frac{۱}{۳}(a^۳ + ۱ - \frac{۱}{a^۳})$ است. پس داده مسأله یعنی $a + ۱ = \frac{۱}{a}$ را به‌صورت $a - \frac{۱}{a} = -۱$ می‌نویسیم و دو طرف این تساوی را به توان ۳ می‌رسانیم:

$$a - \frac{۱}{a} = -۱ \Rightarrow (a - \frac{۱}{a})^۳ = (-۱)^۳ \Rightarrow a^۳ - ۳a^۲(\frac{۱}{a}) + ۳a(\frac{۱}{a})^۲ - (\frac{۱}{a})^۳ = -۱$$

$$\Rightarrow a^۳ - \frac{۱}{a^۳} - ۳a(\frac{۱}{a})(a - \frac{۱}{a}) = -۱ \Rightarrow a^۳ - \frac{۱}{a^۳} + ۳ = -۱ \Rightarrow a^۳ - \frac{۱}{a^۳} = -۴$$

بنابراین مقدار خواسته شده برابر است با:

$$A = \frac{a^۶ + a^۳ - ۱}{۳a^۳} = \frac{۱}{۳}(a^۳ + ۱ - \frac{۱}{a^۳}) = \frac{۱}{۳}(-۴ + ۱) = -۱$$

۵- پاسخ: گزینهٔ ۴ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * حسابان ۱ (درس ۴، فصل ۴)

خوبه اینو بدونی

- $۱ + \tan^۲\alpha = \frac{۱}{\cos^۲\alpha} \quad (\cos\alpha \neq ۰)$
- $۱ + \cot^۲\alpha = \frac{۱}{\sin^۲\alpha} \quad (\sin\alpha \neq ۰)$

(نسبت‌های مثلثاتی دو برابر کمان):

الف) $\sin ۲\alpha = ۲\sin\alpha\cos\alpha$

ب) $\cos ۲\alpha = ۱ - ۲\sin^۲\alpha$

جوابش اینه

ابتدا خواستهٔ سؤال را ساده می‌کنیم:

$$\frac{۱ - \cos ۴\alpha}{\sin ۲\alpha} = \frac{۱ - (۱ - ۲\sin^۲ ۲\alpha)}{\sin ۲\alpha} = ۲\sin ۲\alpha = ۲(۲\sin\alpha\cos\alpha) = ۴\sin\alpha\cos\alpha$$

پس می‌خواهیم حاصل $۴\sin\alpha\cos\alpha$ را به‌دست آوریم، برای این کار با توجه به داده سؤال، داریم:

$$\tan^۲\alpha + \cot^۲\alpha = \frac{۵}{۲} \xrightarrow{\text{دو واحد به طرفین اضافه می‌کنیم.}} ۱ + \tan^۲\alpha + ۱ + \cot^۲\alpha = \frac{۵}{۲} + ۲ \Rightarrow \frac{۱}{\cos^۲\alpha} + \frac{۱}{\sin^۲\alpha} = \frac{۹}{۲}$$

$$\Rightarrow \frac{\sin^۲\alpha + \cos^۲\alpha}{\cos^۲\alpha\sin^۲\alpha} = \frac{۹}{۲} \Rightarrow \frac{۱}{(\sin\alpha\cos\alpha)^۲} = \frac{۹}{۲} \Rightarrow (\sin\alpha\cos\alpha)^۲ = \frac{۲}{۹} \xrightarrow[\sin\alpha\cdot\cos\alpha > ۰]{\pi < \alpha < \frac{۳\pi}{۲}} \sin\alpha\cdot\cos\alpha = \frac{\sqrt{۲}}{۳}$$

$$\xrightarrow{\times ۴} ۴\sin\alpha\cos\alpha = \frac{۴\sqrt{۲}}{۳}$$

بنابراین:

$$\frac{۱ - \cos ۴\alpha}{\sin ۲\alpha} = \frac{۴\sqrt{۲}}{۳}$$

۶- پاسخ: گزینهٔ ۴ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * حسابان ۱ (درس ۴، فصل ۴)

خوبه اینو بدونی

- (نسبت‌های مثلثاتی مجموع و تفاضل زوایا):

$$\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta$$

- (نسبت‌های مثلثاتی دو برابر کمان):

$$\cos 2\alpha=1-2\sin^2\alpha$$

جوابش اینه

با توجه به عبارت داده‌شده، داریم:

$$\cos 2x=1-\sin x \Rightarrow 1-2\sin^2 x=1-\sin x \Rightarrow \sin x-2\sin^2 x=0 \Rightarrow \sin x(1-2\sin x)=0$$

$$\xrightarrow{\sin x\neq 0} 1-2\sin x=0 \Rightarrow \sin x=\frac{1}{2} \Rightarrow \cos x=\pm\frac{\sqrt{3}}{2}$$

بنابراین مقدار خواسته شده برابر است با:

$$\sin(x-\frac{\pi}{3})=\sin x\cos\frac{\pi}{3}-\cos x\sin\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}-(\pm\frac{\sqrt{3}}{2})(\frac{\sqrt{3}}{2})=\frac{1}{4}\pm\frac{3}{4}=-\frac{1}{2}\ \text{یا}\ 1$$

۷- پاسخ: گزینهٔ ۲ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * حسابان ۱ (درس ۴، فصل ۴)

خوبه اینو بدونی

- (نسبت‌های مثلثاتی دو برابر کمان):

$$\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha$$

جوابش اینه

دو طرف تساوی فرض را به توان ۲ می‌رسانیم:

$$\underbrace{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha}_{1}+\underbrace{2\sin\alpha\cos\alpha}_{\sin 2\alpha}=\frac{9}{5} \Rightarrow \sin 2\alpha=\frac{4}{5} \Rightarrow \cos 2\alpha=\pm\frac{3}{5}$$

از آنجا که $\pi<2\alpha<2\pi$، پس $\frac{\pi}{2}<2\alpha<\pi$ است، در نتیجه $\cos 2\alpha<0$ است؛ یعنی $\cos 2\alpha=-\frac{3}{5}$. حاصل عبارت خواسته شده برابر است با:

$$P=\frac{\cos 2\alpha}{\tan\alpha+\cot\alpha}=\frac{\cos 2\alpha}{\frac{1}{\sin\alpha\cos\alpha}}=\sin\alpha\cos\alpha\cos 2\alpha=\frac{1}{2}\sin 2\alpha\cos 2\alpha=\frac{1}{2}(\frac{4}{5})(-\frac{3}{5})=-\frac{6}{25}=-0/24$$

۸- پاسخ: گزینهٔ ۴ ▲ مشخصات سؤال: دشوار * حسابان ۱ (درس ۴، فصل ۴)

خوبه اینو بدونی

- (نسبت‌های مثلثاتی مجموع و تفاضل زوایا):

$$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$$
$$\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta$$

جوابش اینه

در صورت کسر عبارت P از عدد ۳ فاکتور می‌گیریم و به جای $\frac{1}{3}$ معادل آن، یعنی $\sin(a-\frac{\pi}{6})$ را جایگزین می‌کنیم:

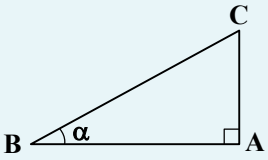
$$P=\frac{3(\sin(a+\frac{\pi}{6})+\frac{1}{3})}{\sin a}=\frac{3(\sin(a+\frac{\pi}{6})+\sin(a-\frac{\pi}{6}))}{\sin a}=\frac{3(\sin a\cos\frac{\pi}{6}+\cos a\sin\frac{\pi}{6}+\sin a\cos\frac{\pi}{6}-\cos a\sin\frac{\pi}{6})}{\sin a}$$

$$=\frac{6\sin a\cos\frac{\pi}{6}}{\sin a}=6(\frac{\sqrt{3}}{2})=3\sqrt{3}$$

۹- پاسخ: گزینهٔ ۲ ▲ **مشخصات سؤال: دشوار * حسابان ۱ (درس ۴، فصل ۴)**

خوبه اینو بدونی

- مثلث قائم‌الزاویه‌ای که یکی از زوایای حادّهٔ آن α باشد را در نظر بگیرید. سه نسبت مثلثاتی سینوس، کسینوس و تانژانت زاویهٔ α به‌صورت زیر تعریف می‌شود:



$$\text{سینوس} : \sin\alpha = \frac{AC}{BC} = \frac{\text{ضلع مقابل}}{\text{وتر}}$$

$$\text{کسینوس} : \cos\alpha = \frac{AB}{BC} = \frac{\text{ضلع مجاور}}{\text{وتر}}$$

$$\text{تانژانت} : \tan\alpha = \frac{AC}{AB} = \frac{\text{ضلع مقابل}}{\text{ضلع مجاور}}$$

- (نسبت‌های مثلثاتی متمم زاویه):

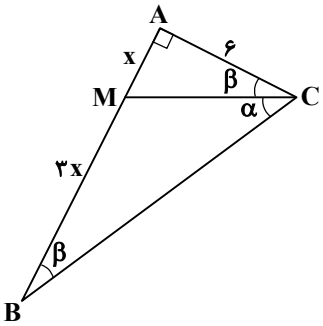
$$\cos(\frac{\pi}{2}-\theta) = \sin\theta$$

- (نسبت‌های مثلثاتی دو برابر کمان):

$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$$

جوابش اینه

فرض کنید $\hat{B}_1 = \hat{C}_1 = \beta$ و $AM = x$، پس $BM = 3x$:



در دو مثلث $\overset{\triangle}{ABC}$ و $\overset{\triangle}{AMC}$، با استفاده از تعریف، $\tan\beta$ را می‌نویسیم:

$$\left.\begin{array}{l} \overset{\triangle}{ABC} : \tan\hat{B} = \frac{AC}{AB} \Rightarrow \tan\beta = \frac{۶}{۳x+x} \\ \overset{\triangle}{AMC} : \tan\hat{C} = \frac{AM}{AC} \Rightarrow \tan\beta = \frac{x}{۶} \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{۶}{۴x} = \frac{x}{۶} \Rightarrow ۴x^۲ = ۳۶ \Rightarrow x = ۳$$

بنابراین طبق قضیهٔ فیثاغورس در مثلث $\overset{\triangle}{AMC}$ داریم:

$$AM^۲ + AC^۲ = MC^۲ \Rightarrow ۹ + ۳۶ = MC^۲ \Rightarrow MC = ۳\sqrt{۵}$$

بنابراین سینوس و کسینوس زاویهٔ β برابر است با:

$$\sin\beta = \frac{AM}{MC} = \frac{۳}{۳\sqrt{۵}} = \frac{۱}{\sqrt{۵}} \quad , \quad \cos\beta = \frac{AC}{MC} = \frac{۶}{۳\sqrt{۵}} = \frac{۲}{\sqrt{۵}}$$

در مثلث $\overset{\triangle}{ABC}$ مجموع زوایا برابر ۱۸۰° است، پس:

$$\hat{A}+\hat{B}+\hat{C} = \pi \Rightarrow \frac{\pi}{۲}+\beta+(\alpha+\beta) = \pi \Rightarrow ۲\beta+\alpha = \frac{\pi}{۲} \Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{۲}-۲\beta$$

بنابراین مقدار خواسته شده برابر است با:

$$\cos\alpha = \cos(\frac{\pi}{۲}-۲\beta) = \sin۲\beta = ۲\sin\beta\cos\beta = ۲\times\frac{۱}{\sqrt{۵}}\times\frac{۲}{\sqrt{۵}} = \frac{۴}{۵}$$

۱۰- پاسخ: گزینهٔ ۱ ▲ مشخصات سؤال: ساده * حسابان ۲ (درس ۱، فصل ۲)

خوبه اینو بدونی

- توابع $y=a\sin bx+c$ و $y=a\cos bx+c$ دارای دورهٔ تناوب $\frac{2\pi}{|b|}$ است.

جوابش اینه

دورهٔ تناوب تابع داده‌شده مطابق شکل، برابر $4-2=6$ است.

بنابراین در تابع $y=2\sin(\frac{\pi}{a}x)$، داریم:

$$T=\frac{2\pi}{|\frac{\pi}{a}|}\Rightarrow 4=\frac{2\pi}{|\frac{\pi}{a}|}\Rightarrow 2|a|=4\Rightarrow |a|=2\xrightarrow{a>0}a=2$$

همچنین با توجه به نمودار تابع، مقدار m برابر $\frac{3}{4}$ دورهٔ تناوب است.

$$m=\frac{3}{4}T=\frac{3}{4}\times 4=3$$

بنابراین مقدار خواسته شده برابر است با:

$$\frac{a}{m}=\frac{2}{3}$$

۱۱- پاسخ: گزینهٔ ۴ ▲ مشخصات سؤال: ساده * حسابان ۲ (درس ۲، فصل ۲)

خوبه اینو بدونی

- جواب‌های کلی معادلهٔ $\sin x=\sin\alpha$ به‌صورت $x=2k\pi+\alpha$ و $x=(2k+1)\pi-\alpha$ می‌باشد که $k\in\mathbb{Z}$.

جوابش اینه

جواب کلی معادله را به‌دست می‌آوریم:

$$\sin 5x+\sin 2x=0\Rightarrow \sin 5x=-\sin 2x\Rightarrow \sin 5x=\sin(-2x)\Rightarrow \begin{cases}5x=2k\pi+(-2x)\\5x=2k\pi+\pi-(-2x)\end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}7x=2k\pi\Rightarrow x=\frac{2k\pi}{7}\\3x=2k\pi+\pi\Rightarrow x=\frac{(2k+1)\pi}{3}\end{cases}$$

۱۲- پاسخ: گزینهٔ ۳ ▲ مشخصات سؤال: ساده * حسابان ۲ (درس ۲، فصل ۲)

خوبه اینو بدونی

- $\cos^2\alpha=1-\sin^2\alpha$
- جواب‌های کلی معادلهٔ $\sin x=\sin\alpha$ به‌صورت $x=2k\pi+\alpha$ و $x=(2k+1)\pi-\alpha$ می‌باشد که $k\in\mathbb{Z}$.

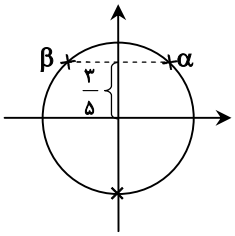
جوابش اینه

معادلهٔ مثلثاتی داده‌شده را به کمک تغییر متغیر حل می‌کنیم:

$$5\cos^2x=2+2\sin x\Rightarrow 5(1-\sin^2x)=2+2\sin x\xrightarrow{\sin x=t}5(1-t^2)=2+2t\Rightarrow 5t^2+2t-3=0$$

$$\Rightarrow (5t-3)(t+1)=0\Rightarrow t=-1\ \text{یا}\ \frac{3}{5}\Rightarrow \sin x=-1\ \text{یا}\ \frac{3}{5}$$

معادلهٔ $\sin x=-1$، یک جواب و معادلهٔ $\sin x=\frac{3}{5}$، دو جواب در بازهٔ $[0,2\pi]$ دارد، پس مجموعاً معادله، دارای سه جواب متمایز است.



$$\begin{cases}\sin\alpha=\sin\beta=\frac{3}{5}\\\sin\frac{3\pi}{2}=-1\end{cases}$$

۱۳- پاسخ: گزینهٔ ۱ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * حسابان ۲ (درس ۱، فصل ۲)

خوبه اینو بدونی

- جواب‌های کلی معادلهٔ $\sin x = \sin\alpha$ به‌صورت $x = 2k\pi + \alpha$ و $x = (2k+1)\pi - \alpha$ می‌باشد که $k \in \mathbb{Z}$.

جوابش اینه

در اطراف $x = 0$ نمودار اکیداً نزولی است، پس با توجه به منفی بودن ضریب سینوس، b عددی مثبت است. می‌خواهیم طول دو نقطهٔ A و B را پیدا کنیم. عرض این نقاط برابر ۲ است، پس:

$$y = 2 \Rightarrow 2 = 3 - 2\sin(b\pi x - \frac{\pi}{6}) \Rightarrow \sin(b\pi x - \frac{\pi}{6}) = \frac{1}{2} \Rightarrow b\pi x - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}, \frac{13\pi}{6}, \cdots \Rightarrow b\pi x = \frac{\pi}{3}, \pi, \frac{7\pi}{3}, \cdots$$

$$\Rightarrow x = \frac{1}{3b}, \frac{1}{b}, \frac{7}{3b}, \cdots$$

A و B به‌ترتیب دومین و سومین جواب این معادله‌اند، پس:

$$\begin{cases} x_A = \frac{1}{b} \\ x_B = \frac{7}{3b} \end{cases} \Rightarrow AB = \frac{8}{3} \Rightarrow \frac{7}{3b} - \frac{1}{b} = \frac{8}{3} \Rightarrow \frac{4}{3b} = \frac{8}{3} \Rightarrow b = \frac{1}{2}$$

۱۴- پاسخ: گزینهٔ ۴ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * حسابان ۲ (درس ۱، فصل ۲)

خوبه اینو بدونی

- توابع $y = a\sin bx + c$ و $y = a\cos bx + c$ دارای مقدار ماکزیمم $|a| + c$ و مقدار مینیمم $-|a| + c$ و دورهٔ تناوب $\frac{2\pi}{|b|}$ است.

- (نسبت‌های مثلثاتی دو برابر کمان):

$$\cos^2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1$$

جوابش اینه

از اتحاد $2\cos^2\alpha = 1 + \cos 2\alpha$ استفاده می‌کنیم.

$$f(x) = a + 2b\cos^2(bx + \frac{\pi}{4}) = a + b(1 + \cos(2bx + \frac{2\pi}{4})) = a + b(1 - \sin 2bx) = a + b - b\sin 2bx$$

مطابق نمودار تابع، مینیمم تابع برابر -1 است، پس:

$$\min = -1 \Rightarrow a + b - |b| = -1 \xrightarrow{b>0} a = -1$$

بنابراین ضابطهٔ تابع به‌صورت $f(x) = -1 + b - b\sin 2bx$ است. تابع f در $x = \frac{3\pi}{8}$ دارای ماکزیمم است، پس:

$$f(\frac{3\pi}{8}) = \max \Rightarrow -1 + b - b\sin 2bx = -1 + b + b \Rightarrow -b\sin 2bx = b$$

$$\Rightarrow \sin(2b \times \frac{3\pi}{8}) = -1 \Rightarrow \frac{3\pi b}{4} = \frac{3\pi}{2} \Rightarrow b = 2$$

بنابراین مقدار ab برابر -2 است.

۱۵- پاسخ: گزینهٔ ۱ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * حسابان ۲ (درس ۲، فصل ۲)

خوبه اینو بدونی

- (نسبت‌های مثلثاتی دو برابر کمان):

$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$$

- جواب‌های کلی معادلهٔ $\sin x = \sin\alpha$ به‌صورت $x = 2k\pi + \alpha$ و $x = (2k+1)\pi - \alpha$ می‌باشد که $k \in \mathbb{Z}$.
- جواب‌های کلی معادلهٔ $\cos x = \cos\alpha$ به‌صورت $x = 2k\pi \pm \alpha$ می‌باشند که $k \in \mathbb{Z}$.

جوابش اینه

$\frac{\sqrt{۳}}{۲}+k(\frac{\sqrt{۳}}{۲})(\frac{۱}{۴})=۰ \Rightarrow k=-۴$ — $x=\frac{\pi}{۳}$ را در معادله جایگزین می‌کنیم:

اکنون معادله را حل می‌کنیم:

$$\Rightarrow \sin ۲x-۴\sin x\cos^۲ x=۰ \Rightarrow ۲\sin x\cos x-۴\sin x\cos^۲ x=۰ \Rightarrow ۲\sin x\cos x(۱-۲\cos x)=۰$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \sin x=۰ \Rightarrow x=\pi \\ \cos x=۰ \Rightarrow x=\frac{\pi}{۲},\frac{۳\pi}{۲} \xrightarrow[\text{غیراز } \frac{\pi}{۳}]{\text{مجموع جواب‌ها}} \pi+\frac{\pi}{۲}+\frac{۳\pi}{۲}+\frac{۵\pi}{۳}=\frac{۱۴\pi}{۳} \\ \cos x=\frac{۱}{۲} \Rightarrow x=\frac{\pi}{۳},\frac{۵\pi}{۳} \end{cases}$$

مجموع جواب‌ها، به‌جز $\frac{\pi}{۳}$، برابر $\frac{۱۴\pi}{۳}$ است.

۱۶- پاسخ: گزینهٔ ۲ ▲ **مشخصات سؤال: دشوار * حسابان ۲ (درس ۲، فصل ۲)**

جوابش اینه

با توجه به اینکه می‌دانیم $\tan ۲\alpha=\frac{۲\tan\alpha}{۱-\tan^۲\alpha}$، سعی می‌کنیم معادله را مشابه فرمول $\tan ۲\alpha$ بازنویسی کنیم:

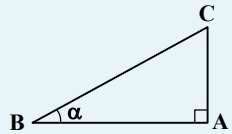
$$x^۲+mx-۱=۰ \Rightarrow mx=۱-x^۲ \Rightarrow m=\frac{۱-x^۲}{x} \Rightarrow \frac{۱}{m}=\frac{x}{۱-x^۲} \Rightarrow \frac{۲}{m}=\frac{۲x}{۱-x^۲}$$

$x=\tan\frac{\pi}{۸}$ در این رابطه صدق می‌کند، پس: $\frac{۲}{m}=\frac{۲\tan\frac{\pi}{۸}}{۱-\tan^۲\frac{\pi}{۸}} \Rightarrow \frac{۲}{m}=\tan(۲\times\frac{\pi}{۸}) \Rightarrow \frac{۲}{m}=\tan\frac{\pi}{۴} \Rightarrow \frac{۲}{m}=۱ \Rightarrow m=۲$

۱۷- پاسخ: گزینهٔ ۱ ▲ **مشخصات سؤال: دشوار * حسابان ۲ (درس ۲، فصل ۲)**

خوبه اینو بدونی

- مثلث قائم‌الزاویه‌ای که یکی از زوایای حادّهٔ آن α باشد را در نظر بگیرید. نسبت مثلثاتی تانژانت زاویهٔ α به‌صورت زیر تعریف می‌شود:



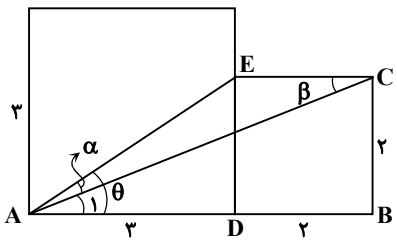
$$\text{تانژانت}: \tan\alpha=\frac{AC}{AB}=\frac{\text{ضلع مقابل}}{\text{ضلع مجاور}}$$

- رابطهٔ تانژانت مجموع (یا تفاضل) زوایا: $\tan(\alpha-\beta)=\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{۱+\tan\alpha\tan\beta}$

جوابش اینه

همان طور که در شکل مشخص است. بنابر قضیهٔ موازی مورب، زاویهٔ $\hat{A}_۱$ نیز برابر β است.

در دو مثلث قائم‌الزاویه $\overset{\triangle}{ADE}$ و $\overset{\triangle}{ABC}$ مطابق تعریف تانژانت، داریم:



$$\overset{\triangle}{ADE}: \tan\theta=\frac{DE}{AD}=\frac{۲}{۳} \qquad \overset{\triangle}{ABC}: \tan\beta=\frac{BC}{AB}=\frac{۲}{۵}$$

مشخص است که $\theta=\alpha+\beta$، پس زاویه $\alpha-\beta$ که در خواستهٔ سؤال وجود دارد برابر $\theta-\beta-\beta$، یعنی $\theta-۲\beta$ است. پس ابتدا با استفاده از فرمول تانژانت دو برابر زاویه، مقدار $\tan ۲\beta$ را پیدا می‌کنیم:

$$\tan ۲\beta=\frac{۲\tan\beta}{۱-\tan^۲\beta}=\frac{\frac{۴}{۵}}{۱-(\frac{۲}{۵})^۲}=\frac{\frac{۴}{۵}}{\frac{۲۱}{۲۵}}=\frac{۲۰}{۲۱}$$

بنابراین مقدار $\tan(\alpha-\beta)$ برابر است با:

$$\tan(\alpha-\beta)=\tan(\theta-\beta-\beta)=\tan(\theta-۲\beta)=\frac{\tan\theta-\tan ۲\beta}{۱+\tan\theta\tan ۲\beta}=\frac{\frac{۲}{۳}-\frac{۲۰}{۲۱}}{۱+\frac{۴۰}{۶۳}}=\frac{-۱۸}{۱۰۳}$$

بنابراین $۱۰۳\tan(\alpha-\beta)$ برابر -۱۸ است.

۱۸- پاسخ: گزینهٔ ۱ ▲ مشخصات سؤال: دشوار * حسابان ۲ (درس ۲، فصل ۲)

خوبه اینو بدونی

- رابطهٔ تانژانت مجموع (یا تفاضل) زوایا:

$$\tan(\alpha+\beta)=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}$$

جوابش اینه

دو طرف تساوی را در $\tan x$ ضرب می‌کنیم:

$$1+6\tan x=2\cot x \xrightarrow{\times\tan x} \tan x+6\tan^2 x=2 \xrightarrow{\tan x=t} 6t^2+t-2=0 \Rightarrow (3t+2)(2t-1)=0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} t=-\frac{2}{3} \Rightarrow \tan x=-\frac{2}{3} \\ t=\frac{1}{2} \Rightarrow \tan x=\frac{1}{2} \end{cases}$$

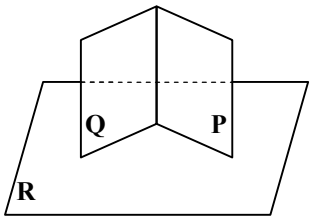
فرض کنید α تنها جواب معادلهٔ $\tan x=-\frac{2}{3}$ در بازهٔ $(0,\pi)$ و β تنها جواب معادلهٔ $\tan x=\frac{1}{2}$ در بازهٔ $(0,\pi)$ باشد؛ بنابراین $\tan\alpha=-\frac{2}{3}$ و $\tan\beta=\frac{1}{2}$، همچنین $\theta=\alpha+\beta$، پس مقدار خواسته شده برابر است با:

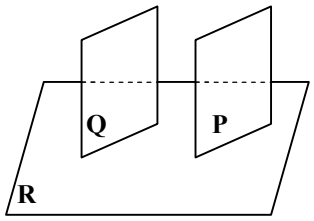
$$\tan\theta=\tan(\alpha+\beta)=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}=\frac{-\frac{2}{3}+\frac{1}{2}}{1+\frac{1}{3}}=\frac{-\frac{1}{6}}{\frac{4}{3}}=-\frac{1}{8}$$

۱۹- پاسخ: گزینهٔ ۴ ▲ مشخصات سؤال: ساده * هندسه ۱ (درس ۱، فصل ۴)

جوابش اینه

صفحهٔ R بر صفحهٔ Q عمود است. همچنین صفحهٔ P بر صفحهٔ R عمود است. طبق شکل‌های زیر، صفحات P و Q می‌توانند متقاطع، متقاطع عمود بر هم، موازی یا منطبق باشند.





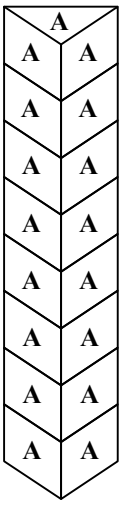
بنابراین P و Q هر وضعیتی می‌توانند داشته باشند.

۲۰- پاسخ: گزینهٔ ۳ ▲ مشخصات سؤال: ساده * هندسه ۱ (درس ۲، فصل ۴)

جوابش اینه

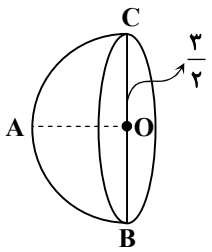
طبق شکل، تمام منشورها، سه وجه نمایان دارند و فقط منشور بالایی چهار وجه نمایان دارد، پس مجموع تمام حروف A دیده شده، از رابطهٔ زیر به‌دست می‌آید:

$$7\times3+4=25$$



۲۱- پاسخ: گزینهٔ ۳ ▲ مشخصات سؤال: ساده * هندسه ۱ (درس ۲، فصل ۴)

جوابش اینه



شکل حاصل از دوران یک نیم‌کره است.

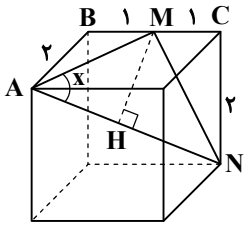
از آنجا که سؤال مساحت کل سطح شکل حاصل را می‌خواهد، باید مساحت سطح نیم‌کره را با مساحت قاعدهٔ دایره‌ای شکل جمع کنیم.

مساحت کل = مساحت نصف کره + مساحت دایرهٔ قاعده

$$= \frac{۱}{۲} \times ۴\pi r^۲ + \pi r^۲ = ۳\pi r^۲ = ۳\pi (\frac{۳}{۲})^۲ = \frac{۲۷}{۴}\pi$$

۲۲- پاسخ: گزینهٔ ۲ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * هندسه ۱ (درس ۲، فصل ۴)

جوابش اینه



طول یال مکعب را برابر ۲ فرض می‌کنیم، با توجه به شکل، اندازهٔ پاره‌خط‌های AM، AN و MN را محاسبه می‌کنیم.

$$\overset{\triangle}{ABM}: AM = \sqrt{۱^۲ + ۲^۲} = \sqrt{۵}$$

$$\overset{\triangle}{MCN}: MN = \sqrt{۱^۲ + ۲^۲} = \sqrt{۵}$$

$$\text{قطر مکعب}: AN = a\sqrt{۳} \xrightarrow{a=۲} AN = ۲\sqrt{۳}$$

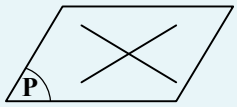
مثلث AMN در رأس M متساوی‌الساقین است، پس با رسم ارتفاع MH در این مثلث، داریم:

$$\begin{cases} AH = HN = \frac{۱}{۲}AN = \frac{۱}{۲} \times ۲\sqrt{۳} = \sqrt{۳} \\ \overset{\triangle}{AMH}: \cos x = \frac{AH}{AM} = \frac{\sqrt{۳}}{\sqrt{۵}} = \sqrt{\frac{۳}{۵}} \end{cases}$$

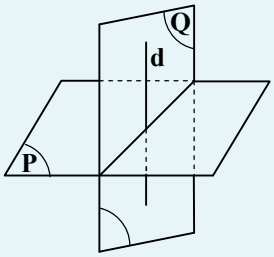
۲۳- پاسخ: گزینهٔ ۳ ▲ مشخصات سؤال: دشوار * هندسه ۱ (درس ۱، فصل ۴)

خوبه اینو بدونی

- از دو خط متقاطع فقط یک صفحه عبور می‌کند.



- دو صفحه بر هم عمودند، هرگاه هرکدام شامل خطی باشد که بر دیگری عمود است.



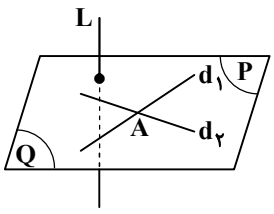
$$\left.\begin{matrix} d \subset Q \\ d \perp P \end{matrix}\right\} \Rightarrow Q \perp P$$

- اگر خطی بر صفحه‌ای عمود باشد، بر تمام خطوط آن صفحه عمود است.

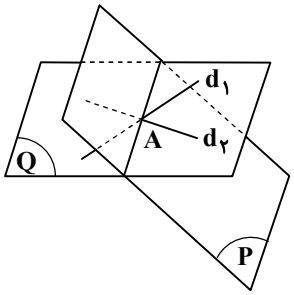
جوابش اینه

از دو خط متقاطع $d_۱$ و $d_۲$ یک صفحه می‌گذرد. اگر این صفحه را Q بنامیم، P و Q با هم در نقطهٔ A اشتراک دارند. پس نمی‌توانند موازی هم باشند.

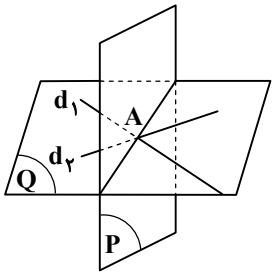
اگر P و Q بر هم منطبق باشند، هر خط عمود بر این صفحه بر $d_۱$ و $d_۲$ هم عمود است ولی در P قرار ندارد. پس در این حالت جواب صفر است.



اما اگر Q متقاطع با P باشد، باز هم بستگی به این دارد که Q بر P عمود است یا نه.
اگر Q بر P عمود نباشد یعنی خطی در P وجود ندارد که بر Q عمود باشد و در این صورت باز هم جواب صفر است.



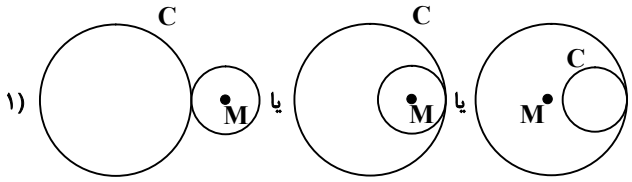
اگر Q بر P عمود باشد. در این حالت خطوط بی‌شماری در P می‌توان رسم کرد که بر Q عمود باشد و در نتیجه بر دو خط d_1 و d_2 نیز عمود باشد.



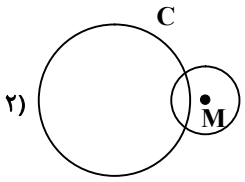
۲۴- پاسخ: گزینهٔ ۴ ▲ مشخصات سؤال: ساده * هندسه ۳ (درس ۱، فصل ۲)

جوابش اینه

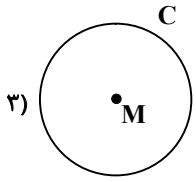
مکان هندسی نقاطی از صفحه که به فاصلهٔ معلوم L از نقطهٔ M باشند، دایره‌ای به مرکز M و شعاع L است. باید محل تلاقی این دایره با دایرهٔ C را بیابیم. این دو دایره نسبت به هم یکی از چهار حالت زیر را دارند.

۱) 

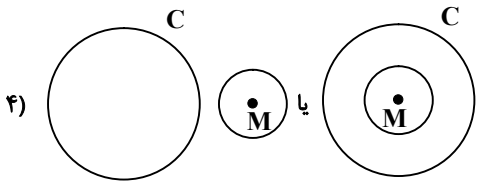
یک نقطه

۲) 

دو نقطه

۳) 

بی‌شمار نقطه

۴) 

صفر نقطه

۲۵- پاسخ: گزینهٔ ۱ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * هندسه ۳ (درس ۲، فصل ۱)

خوبه اینو بدونی

- اگر A ماتریسی مربعی از مرتبهٔ n باشد، $(3 \le n \le 1)$ در این صورت دترمینان ماتریس A را با نماد $\det(A) = |A|$ نمایش می‌دهیم و داریم:

$$I)\ A = [k]_{1\times 1} \Rightarrow |A| = k$$

$$II)\ A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \Rightarrow |A| = ad - bc$$

$$III)\ A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \Rightarrow |A| = a_{11}\times(-1)^{1+1}\times\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{12}\times(-1)^{1+2}\times\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\times(-1)^{1+3}\times\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

$$|A| = a_{11}\times\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\times\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\times\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} \quad \text{برحسب سطر اول}$$

(برای هر ماتریس ۳×۳ دلخواه می‌توان دترمینان A را برحسب هر سطر یا ستونی به‌دست آورد که حاصل در همهٔ حالت‌ها یکسان خواهد بود.)

جوابش اینه

ابتدا ماتریس $A^۲$ و سپس ماتریس $I-A^۲$ را محاسبه می‌کنیم:

$$A^۲=\begin{bmatrix}۲&-۱&۰\\۳&۲&۱\\۰&۱&-۱\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۲&-۱&۰\\۳&۲&۱\\۰&۱&-۱\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۱&-۴&-۱\\۱۲&۲&۱\\۳&۱&۲\end{bmatrix}\quad,\quad I-A^۲=\begin{bmatrix}۱&۰&۰\\۰&۱&۰\\۰&۰&۱\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}۱&-۴&-۱\\۱۲&۲&۱\\۳&۱&۲\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۰&۴&۱\\-۱۲&-۱&-۱\\-۳&-۱&-۱\end{bmatrix}$$

حال دترمینان ماتریس فوق را به‌دست می‌آوریم:

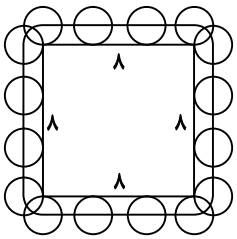
$$\begin{vmatrix}۰&۴&۱\\-۱۲&-۱&-۱\\-۳&-۱&-۱\end{vmatrix}=۰\times\begin{vmatrix}-۱&-۱\\-۱&-۱\end{vmatrix}-۴\times\begin{vmatrix}-۱۲&-۱\\-۳&-۱\end{vmatrix}+۱\times\begin{vmatrix}-۱۲&-۱\\-۳&-۱\end{vmatrix}=۰-۴\times۹+۱\times۹=-۲۷$$

۲۶- پاسخ: گزینهٔ ۲ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * هندسه ۳ (درس ۱، فصل ۲)

جوابش اینه

مطابق شکل، این مکان هندسی از ۴ پاره‌خط موازی اضلاع و ۴ ربع دایره در گوشه‌های مربع ABCD تشکیل شده است. مجموع این چهار ربع دایره، برابر با یک دایرهٔ کامل به‌شعاع ۱ خواهد بود، پس:

$$\text{محیط}=۸+۸+۸+۸+۲\pi\times۱=۳۲+۲\pi$$



۲۷- پاسخ: گزینهٔ ۴ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * هندسه ۳ (درس ۲، فصل ۱)

خوبه اینو بدونی

- اگر A ماتریس مربعی مرتبهٔ n و k عدد حقیقی باشد، رابطهٔ روبه‌رو برقرار است. $|kA|=k^n|A|$

جوابش اینه

با استفاده از نکتهٔ فوق، داریم:

$$\big||A|A\big|=|A|^n|A|=|A|^{n+۱}\quad,\quad\big|\big||A|A\big|A\big|=\big||A|^{n+۱}A\big|=(|A|^{n+۱})^n|A|=|A|^{n(n+۱)+۱}=|A|^{n^۲+n+۱}\Rightarrow m=n^۲+n+۱$$

۲۸- پاسخ: گزینهٔ ۴ ▲ مشخصات سؤال: دشوار * هندسه ۳ (درس ۲، فصل ۱)

خوبه اینو بدونی

- اگر A ماتریسی مربعی از مرتبهٔ n باشد، $(۱\le n\le ۳)$ در این صورت دترمینان ماتریس A را با نماد $\det(A)=|A|$ نمایش می‌دهیم و داریم:

$$I)\ A=[k]_{۱\times۱}\Rightarrow|A|=k$$

$$II)\ A=\begin{bmatrix}a&b\\c&d\end{bmatrix}\Rightarrow|A|=ad-bc$$

$$III)\ A=\begin{bmatrix}a_{۱۱}&a_{۱۲}&a_{۱۳}\\a_{۲۱}&a_{۲۲}&a_{۲۳}\\a_{۳۱}&a_{۳۲}&a_{۳۳}\end{bmatrix}\Rightarrow|A|=a_{۱۱}\times(-۱)^{۱+۱}\times\begin{vmatrix}a_{۲۲}&a_{۲۳}\\a_{۳۲}&a_{۳۳}\end{vmatrix}+a_{۱۲}\times(-۱)^{۱+۲}\times\begin{vmatrix}a_{۲۱}&a_{۲۳}\\a_{۳۱}&a_{۳۳}\end{vmatrix}+a_{۱۳}\times(-۱)^{۱+۳}\times\begin{vmatrix}a_{۲۱}&a_{۲۲}\\a_{۳۱}&a_{۳۲}\end{vmatrix}$$

برحسب سطر اول $|A|=a_{۱۱}\times\begin{vmatrix}a_{۲۲}&a_{۲۳}\\a_{۳۲}&a_{۳۳}\end{vmatrix}-a_{۱۲}\times\begin{vmatrix}a_{۲۱}&a_{۲۳}\\a_{۳۱}&a_{۳۳}\end{vmatrix}+a_{۱۳}\times\begin{vmatrix}a_{۲۱}&a_{۲۲}\\a_{۳۱}&a_{۳۲}\end{vmatrix}$

(برای هر ماتریس ۳×۳ دلخواه می‌توان دترمینان A را برحسب هر سطر یا ستونی به‌دست آورد که حاصل در همهٔ حالت‌ها یکسان خواهد بود.)

- اگر یک سطر یا یک ستون یک ماتریس مربعی k برابر شود، آن‌گاه دترمینان آن ماتریس k برابر می‌شود. به عبارت دیگر اگر از یک سطر یا یک ستون ماتریس عدد k را فاکتور بگیریم، k در دترمینان حاصل، ضرب می‌شود.

$$\begin{vmatrix}ka&kb&kc\\d&e&f\\g&h&i\end{vmatrix}=k\begin{vmatrix}a&b&c\\d&e&f\\g&h&i\end{vmatrix}\quad\text{یا}\quad\begin{vmatrix}ka&b&c\\kd&e&f\\kg&h&i\end{vmatrix}=k\begin{vmatrix}a&b&c\\d&e&f\\g&h&i\end{vmatrix}$$

جوابش اینه

با استفاده از نکات فوق، داریم:

$$۹\begin{vmatrix} x & x \\ y-۱ & y \end{vmatrix} = ۹x\begin{vmatrix} ۱ & ۱ \\ y-۱ & y \end{vmatrix} = ۹x(y-y+۱) = ۹x \quad (۱)$$

$$\begin{vmatrix} x^۲ & y-۹ & y-۶ \\ x^۲ & y & y+۱ \\ x^۲ & y & y \end{vmatrix} = x^۲\begin{vmatrix} ۱ & y-۹ & y-۶ \\ ۱ & y & y+۱ \\ ۱ & y & y \end{vmatrix} = x^۲\left(\begin{vmatrix} y & y+۱ \\ y & y \end{vmatrix} - (y-۹)\begin{vmatrix} ۱ & y+۱ \\ ۱ & y \end{vmatrix} + (y-۶)\begin{vmatrix} ۱ & y \\ ۱ & y \end{vmatrix}\right)$$

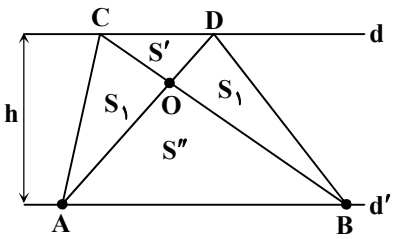
$$= x^۲\left[y^۲ - y^۲ - y - (y-۹)(y-y-۱) + (y-۶)(y-y)\right] = x^۲(-y+y-۹) = -۹x^۲ \quad (۲)$$

$$(۱) \text{ و } (۲) \Rightarrow ۹x = -۹x^۲ \Rightarrow x^۲ + x = ۰ \Rightarrow x(x+۱) = ۰ \Rightarrow \begin{cases} x = ۰ \\ x = -۱ \end{cases}$$

۲۹- پاسخ: گزینهٔ ۲ ▲ مشخصات سؤال: دشوار * هندسه ۳ (درس ۱، فصل ۲)

جوابش اینه

طبق شکل مقابل داریم:



$$S_{\triangle CAB} = S_{\triangle DAB} = \frac{h \times AB}{۲}$$
$$\Rightarrow S_{\triangle CAO} + S'' = S_{\triangle DOB} + S''$$
$$\Rightarrow S_{\triangle CAO} = S_{\triangle DOB} = S_۱$$

در مثلث‌های CAO و AOB ارتفاع رأس A مشترک است، همچنین در مثلث‌های OCD و ODB ارتفاع رأس D مشترک است. پس داریم:

$$\frac{S_{\triangle CAO}}{S''} = \frac{CO}{OB} = \frac{S'}{S_{\triangle DOB}} \Rightarrow S' \cdot S'' = S_{\triangle CAO} \times S_{\triangle DOB} = (S_۱)^۲ \Rightarrow S_۱^۲ = S' \cdot S''$$

حال طبق فرض $\sqrt{S'} + \sqrt{S''} = ۹$ داریم:

$$\sqrt{S'} + \sqrt{S''} = ۹ \Rightarrow (\sqrt{S'} + \sqrt{S''})^۲ = ۸۱ \Rightarrow S' + S'' + ۲\sqrt{S'S''} = ۸۱ \Rightarrow S' + S'' + ۲\sqrt{S_۱^۲} = S' + S'' + ۲S_۱ = ۸۱$$
$$\Rightarrow S_{CABD} = ۸۱$$

پس باید مساحت ذوزنقهٔ CABD مقدار ثابت باشد و چون قاعدهٔ AB و ارتفاع h ثابت است، پس باید طول قاعدهٔ CD ثابت باشد و چون نقطهٔ C نیز ثابت است، پس مکان هندسی نقطهٔ D، دایره‌ای به مرکز C می‌باشد که محل تلاقی این دایره با خط d، دو نقطه خواهد بود.

۳۰- پاسخ: گزینهٔ ۱ ▲ مشخصات سؤال: ساده * ریاضیات گسسته (فصل ۱، درس ۲)

جوابش اینه

دو عدد $a = ۷q + ۳$ و $b = ۷t + ۳$ را در نظر گرفته و داریم:

$$a.b = (۷q+۳)(۷t+۳) = ۴۹qt + ۲۱q + ۲۱t + ۹ = ۴۹qt + ۲۱q + ۲۱t + ۱۴ - ۵$$
$$\Rightarrow a.b = ۷\underbrace{(۷qt + ۳q + ۳t + ۲)}_{k} - ۵ = ۷k - ۵$$

۳۱- پاسخ: گزینهٔ ۲ ▲ مشخصات سؤال: ساده * ریاضیات گسسته (فصل ۱، درس ۲)

خوبه اینو بدونی

- قضیهٔ تقسیم: اگر a عددی صحیح و b عددی طبیعی باشد، در این صورت اعدادی صحیح و منحصربه‌فرد مانند q و r یافت می‌شوند به‌قسمی که $a = bq + r$ و $۰ \le r < b$.

جوابش اینه

طبق نکتهٔ فوق و مفروضات سؤال داریم:

$$۵۱ = bq + ۱۲ \ , \ ۱۲ < b \Rightarrow bq = ۵۱ - ۱۲ \Rightarrow bq = ۳۹ = ۳ \times ۱۳$$

حالات مختلف برای b و q به‌صورت زیر است:

b	۱	۳	۱۳	۳۹
q	۳۹	۱۳	۳	۱

چون باید $b > ۱۲$ باشد، پس فقط $b = ۱۳$ و $b = ۳۹$ قابل قبول است. بنابراین دو مقدار طبیعی برای b وجود دارد.

۳۲- پاسخ: گزینهٔ ۲ ▲ **مشخصات سؤال: متوسط * ریاضیات گسسته (فصل ۱، درس ۲)**

جوابش اینه

هر عدد فرد به‌صورت $a = ۲q + ۱$ است و داریم:

$$a^۲ = (۲q+۱)^۲ = ۴q^۲ + ۴q + ۱ = ۴\underbrace{(q^۲ + q)}_{k} + ۱ = ۴k + ۱$$

بنابراین مربع هر عدد فرد به‌صورت $۴k + ۱$ است، پس باید اعداد فردی را بیابیم که مربع آن‌ها دو رقمی است. اگر این اعداد را n در نظر بگیریم، داریم:

$$۱۰ \le n^۲ \le ۹۹ \Rightarrow ۴ \le n \le ۹ \xrightarrow{n \text{ فرد است}} n = ۵, ۷, ۹$$

بنابراین سه عدد با شرایط خواسته‌شده داریم.

۳۳- پاسخ: گزینهٔ ۱ ▲ **مشخصات سؤال: متوسط * ریاضیات گسسته (فصل ۱، درس ۳)**

جوابش اینه

ابتدا فاصلهٔ تعداد روزهای بیستم تیرماه تا چهارم دی‌ماه را محاسبه می‌کنیم:

$$\underset{\text{تیر}}{۱۱+} \quad \underbrace{۲\times۳۱}_{\text{مرداد و شهریور}} \quad + \quad \underbrace{۳\times۳۰}_{\text{مهر، آبان، آذر}} \quad + \quad \underbrace{۴}_{\text{دی}} = ۱۱ + ۶۲ + ۹۰ + ۴ = ۱۶۷$$

چون از تاریخ جلوتر می‌خواهیم به تاریخ عقب برگردیم، عدد فوق را در -۱ ضرب کرده و هم‌نهشت آن در پیمانهٔ ۷ را به‌دست می‌آوریم:

$$-۱۶۷ \overset{۷}{\equiv} -۱۶۷ + ۲۴ \times ۷ \overset{۷}{\equiv} -۱۶۷ + ۱۶۸ \overset{۷}{\equiv} ۱$$

از پنج‌شنبه یک روز جلوتر می‌رویم، پس بیستم تیرماه روز جمعه بوده است.

۳۴- پاسخ: گزینهٔ ۴ ▲ **مشخصات سؤال: متوسط * ریاضیات گسسته (فصل ۱، درس ۲)**

خوبه اینو بدونی

- مربع هر عدد فرد به‌صورت $۸k + ۱$ است، یعنی باقی‌ماندهٔ تقسیم مربع هر عدد فرد بر ۸ برابر یک است.

$$a \text{ فرد} \Rightarrow a^۲ = ۸k + ۱$$

- قضیهٔ تقسیم: اگر a عددی صحیح و b عددی طبیعی باشد در این صورت، اعدادی صحیح و منحصربه‌فرد مانند q و r یافت می‌شوند به‌قسمی که $a = bq + r$ و $۰ \le r < b$.

جوابش اینه

عدد $۱۰۱^{۱۰۱}$، عددی فرد است. چون $abc = ۱۰۱^{۱۰۱}$ و می‌دانیم ضرب چند عدد طبیعی زمانی فرد است که همگی فرد باشند، پس اعداد طبیعی a، b و c فرد هستند و طبق نکتهٔ فوق، داریم:

$$a \text{ فرد است} \Rightarrow a^۲ = ۸q + ۱$$

$$b \text{ فرد است} \Rightarrow b^۲ = ۸t + ۱$$

$$۲a^۲ + b^۲ + ۳ = ۲(۸q+۱) + ۸t + ۱ + ۳ = ۱۶q + ۲ + ۸t + ۴ = ۱۶q + ۸t + ۶ = ۸\underbrace{(۲q + t)}_{k} + ۶ = ۸k + ۶ \Rightarrow \text{باقی‌مانده} = ۶$$

۳۵- پاسخ: گزینهٔ ۳ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * ریاضیات گسسته (فصل ۱، درس ۳)

خوبه اینو بدونی

- هرگاه بخواهیم جواب‌های معادلهٔ $ax+by=c$ یعنی x و y را در اعداد صحیح بیابیم و $c\in\mathbb{Z}$ و b و a، در این صورت معادلهٔ مذکور را یک معادلهٔ سیالهٔ درجهٔ اول یا خطی می‌نامیم.
- تبدیل معادلهٔ سیاله به معادلهٔ هم‌نهشتی به‌صورت زیر است:

$$ax+by=c \Rightarrow \begin{cases} ax \overset{b}{\equiv} c \\ by \overset{a}{\equiv} c \end{cases}$$

- می‌توان به دو طرف یا یک طرفِ یک رابطهٔ هم‌نهشتی، هر مضربی از پیمانه را اضافه یا از آن کم کرد.

$$a \overset{m}{\equiv} b \Rightarrow \begin{cases} a+mt \overset{m}{\equiv} b+mk \\ a-mt \overset{m}{\equiv} b-mk \end{cases}$$

جوابش اینه

با توجه به نکات، پس از ساده‌کردن معادلهٔ سیاله، آن را برای y به معادلهٔ هم‌نهشتی تبدیل می‌کنیم و داریم:

$$۲۴x+۴۴y=۶۴ \xrightarrow{\div ۴} ۶x+۱۱y=۱۶$$

$$۱۱y \overset{۶}{\equiv} ۱۶ \Rightarrow ۱۱y-۱۲y \overset{۶}{\equiv} ۱۶-۲\times ۶ \Rightarrow -y \overset{۶}{\equiv} ۴ \Rightarrow y \overset{۶}{\equiv} -۴$$

$$\Rightarrow y=۶k-۴ \xrightarrow{k=۱۷} y=۶(۱۷)-۴=۹۸$$

مجموع ارقام ۹۸ برابر $۹+۸=۱۷$ است.

بنابراین گزینهٔ ۳ پاسخ است.

۳۶- پاسخ: گزینهٔ ۱ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * ریاضیات گسسته (فصل ۱، درس ۳)

خوبه اینو بدونی

- قضیه: معادلهٔ هم‌نهشتی $ax \overset{m}{\equiv} b$ دارای جواب است اگر و فقط اگر $(a,m)\mid b$.
- اگر بخواهیم دو طرف یک رابطهٔ هم‌نهشتی را بر عددی تقسیم کنیم، باید پیمانهٔ آن هم‌نهشتی را بر ب.م.م آن عدد و پیمانه تقسیم کنیم.

$$ac \overset{m}{\equiv} bc, (c,m)=d \Rightarrow a \overset{\frac{m}{d}}{\equiv} b$$

جوابش اینه

طبق نکات فوق، شرط آن‌که معادلهٔ هم‌نهشتی $۷۲x \overset{۱۸}{\equiv} ۷a+۱$ دارای جواب باشد، به‌صورت زیر است:

$$(۷۲,۱۸)\mid ۷a+۱ \ , \ ۱۸\mid ۷۲ \Rightarrow (۷۲,۱۸)=۱۸$$

$$\Rightarrow ۱۸\mid ۷a+۱ \Rightarrow ۷a+۱ \overset{۱۸}{\equiv} ۰ \Rightarrow ۷a \overset{۱۸}{\equiv} -۱ \Rightarrow ۷a \overset{۱۸}{\equiv} -۱+۲\times ۱۸$$

$$\Rightarrow ۷a \overset{۱۸}{\equiv} ۳۵ \xrightarrow[(۷,۱۸)=۱]{\div ۷} a \overset{۱۸}{\equiv} ۵ \Rightarrow a=۱۸k+۵$$

بزرگ‌ترین عدد سه رقمی a را می‌خواهیم، پس:

$$a\le ۹۹۹ \Rightarrow ۱۸k+۵\le ۹۹۹ \Rightarrow ۱۸k\le ۹۹۴ \Rightarrow k\le \frac{۹۹۴}{۱۸} \Rightarrow k\le ۵۵$$

به‌ازای $k=۵۵$، بزرگ‌ترین عدد سه رقمی a به‌دست می‌آید.

$$k=۵۵ \Rightarrow a=۱۸\times ۵۵+۵=۹۹۵ \Rightarrow \text{مجموع ارقام}=۹+۹+۵=۲۳$$

۳۷- پاسخ: گزینهٔ ۲ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * ریاضیات گسسته (فصل ۱، درس‌های ۲ و ۳)

خوبه اینو بدونی

- قضیهٔ تقسیم: اگر a عددی صحیح و b عددی طبیعی باشد در این صورت، اعدادی صحیح و منحصربه‌فرد مانند q و r یافت می‌شوند به‌قسمی که $a = bq + r$ و $0 \le r < b$.
- می‌توان به دو طرف یا یک طرفِ یک رابطهٔ هم‌نهشتی، هر مضربی از پیمانه را اضافه یا از آن کم کرد.

$$a \overset{m}{\equiv} b \Rightarrow \begin{cases} a+mt \overset{m}{\equiv} b+mk \\ a-mt \overset{m}{\equiv} b-mk \end{cases}$$

- اگر بخواهیم دو طرف یک رابطهٔ هم‌نهشتی را بر عددی تقسیم کنیم، باید پیمانهٔ آن هم‌نهشتی را بر ب.م.م آن عدد و پیمانه تقسیم کنیم.

$$ac \overset{m}{\equiv} bc, (c,m) = d \Rightarrow a \overset{\frac{m}{d}}{\equiv} b$$

جوابش اینه

طبق نکات فوق، داریم:

$$a = 19b + 29 \ , \ 29 < b$$

$$a \text{ مضرب } 7 \text{ است} \Rightarrow a \overset{7}{\equiv} 0 \Rightarrow 19b + 29 \overset{7}{\equiv} 0 \Rightarrow 19b \overset{7}{\equiv} -29$$

$$\Rightarrow 19b - 3\times 7b \overset{7}{\equiv} -29 + 5\times 7 \Rightarrow -2b \overset{7}{\equiv} 6 \Rightarrow 2b \overset{7}{\equiv} -6 \xrightarrow[(2,7)=1]{\div 2} b \overset{7}{\equiv} -3 \Rightarrow b = 7k - 3$$

چون $b > 29$، پس:

$$7k - 3 > 29 \Rightarrow 7k > 32 \Rightarrow k > \frac{32}{7} \Rightarrow k \ge 5$$

با جایگذاری $b = 7k - 3$ در رابطهٔ $a = 19b + 29$ داریم:

$$a = 19(7k - 3) + 29 = 133k - 57 + 29 \Rightarrow a = 133k - 28$$

a عددی سه رقمی است، بنابراین:

$$100 \le a \le 999 \Rightarrow 100 \le 133k - 28 \le 999 \Rightarrow 128 \le 133k \le 1027$$

$$\Rightarrow \frac{128}{133} \le k \le \frac{1027}{133} \Rightarrow 1 \le k \le 7 \xrightarrow{k \ge 5} 5 \le k \le 7 \Rightarrow k = 5, 6, 7$$

پس ۳ مقدار برای a وجود دارد.

۳۸- پاسخ: گزینهٔ ۲ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * ریاضیات گسسته (فصل ۱، درس ۳)

خوبه اینو بدونی

- به دو طرف یک رابطهٔ هم‌نهشتی می‌توان عددی صحیح را اضافه یا از آن کم کرد.

$$a \overset{m}{\equiv} b \Rightarrow \begin{cases} a+c \overset{m}{\equiv} b+c \\ a-c \overset{m}{\equiv} b-c \end{cases}$$

- دو طرف یک رابطهٔ هم‌نهشتی را می‌توان به توان n رساند. $(n \in \mathbb{N})$

$$a \overset{m}{\equiv} b \Rightarrow a^n \overset{m}{\equiv} b^n$$

- می‌توان به دو طرف یا یک طرفِ یک رابطهٔ هم‌نهشتی هر مضربی از پیمانه را اضافه یا از آن کم کرد.

$$a \overset{m}{\equiv} b \Rightarrow \begin{cases} a+mt \overset{m}{\equiv} b+mk \\ a-mt \overset{m}{\equiv} b-mk \end{cases}$$

- اگر بخواهیم دو طرف یک رابطهٔ هم‌نهشتی را بر عددی تقسیم کنیم، باید پیمانهٔ آن هم‌نهشتی را بر ب.م.م آن عدد و پیمانه تقسیم کنیم.

$$ac \overset{m}{\equiv} bc, (c,m) = d \Rightarrow a \overset{\frac{m}{d}}{\equiv} b$$

- اگر باقی‌ماندهٔ تقسیم عدد صحیح a بر عدد طبیعی b برابر r باشد، داریم:

$$0 \le r < b \ , \ a \overset{b}{\equiv} r$$

جوابش اینه

باید از رابطهٔ $a \overset{17}{\equiv} 0 + 3^{15}$ مقدار a را به‌دست آوریم.

با توجه به ویژگی‌های هم‌نهشتی با کوچک‌ترین توان‌های ۳ آغاز می‌کنیم و داریم:

$$3^4 = 81 \overset{17}{\equiv} 81 - 5\times 17 \overset{17}{\equiv} -4 \xrightarrow{\text{توان ۲}} 3^8 \overset{17}{\equiv} 16 \overset{17}{\equiv} 16 - 17 \overset{17}{\equiv} -1 \xrightarrow{\text{توان ۲}} 3^{16} \overset{17}{\equiv} 1 \Rightarrow 3^{16} \overset{17}{\equiv} 1 + 17$$

$$3^{16} \overset{17}{\equiv} 18 \xrightarrow[(3,17)=1]{\div 3} 3^{15} \overset{17}{\equiv} 6 \Rightarrow 3^{15} \overset{17}{\equiv} 6 - 17 \Rightarrow 3^{15} \overset{17}{\equiv} -11 \Rightarrow 3^{15} + 11 \overset{17}{\equiv} 0$$

کوچک‌ترین عدد طبیعی a برابر ۱۱ است و مجموع ارقام آن برابر ۲ است.

اینجوری هم میشه

نکته: اگر p عددی اول و ب.م.م a و p برابر یک باشد، داریم:

$$a^{p-1} \overset{p}{\equiv} 1$$

چون ۱۷ عددی اول و $(3,17) = 1$، طبق نکته داریم:

$$3^{16} \overset{17}{\equiv} 1 \Rightarrow 3^{16} \overset{17}{\equiv} 1 + 17 \overset{17}{\equiv} 18 \Rightarrow 3^{16} \overset{17}{\equiv} 18 \xrightarrow[(3,17)=1]{\div 3} 3^{15} \overset{17}{\equiv} 6$$

با جای‌گذاری رابطهٔ فوق در $a \overset{17}{\equiv} 0 + 3^{15}$ داریم:

$$6 + a \overset{17}{\equiv} 0 \Rightarrow a \overset{17}{\equiv} -6 \Rightarrow a \overset{17}{\equiv} -6 + 17 \overset{17}{\equiv} 11$$

کوچک‌ترین عدد طبیعی a برابر ۱۱ است و مجموع ارقام آن برابر ۲ است.

بنابراین گزینهٔ ۲ پاسخ است.

۳۹- پاسخ: گزینهٔ ۲ ▲ مشخصات سؤال: دشوار * ریاضیات گسسته (فصل ۱، درس ۳)

خوبه اینو بدونی

-

$$\left.\begin{matrix} a \overset{m}{\equiv} b \\ a \overset{n}{\equiv} b \end{matrix}\right\} \Rightarrow a \overset{[m,n]}{\equiv} b$$

$[m,n]$ ک.م.م دو عدد m و n است.

- اگر باقی‌ماندهٔ تقسیم عدد صحیح a بر عدد طبیعی b برابر r باشد، داریم:

$$0 \le r < b \ , \ a \overset{b}{\equiv} r$$

- اگر بخواهیم دو طرف یک رابطهٔ هم‌نهشتی را بر عددی تقسیم کنیم، باید پیمانهٔ آن هم‌نهشتی را بر ب.م.م آن عدد و پیمانه تقسیم کنیم.

$$ac \overset{m}{\equiv} bc, (c,m) = d \Rightarrow a \overset{\frac{m}{d}}{\equiv} b$$

- می‌توان به دو طرف یا یک طرفِ یک رابطهٔ هم‌نهشتی هر مضربی از پیمانه را اضافه یا از آن کم کرد.

$$a \overset{m}{\equiv} b \Rightarrow \begin{cases} a + mt \overset{m}{\equiv} b + mk \\ a - mt \overset{m}{\equiv} b - mk \end{cases}$$

جوابش اینه

طبق نکات فوق و مفروضات سؤال، داریم:

$$A \overset{13}{\equiv} 5$$

$$3A \overset{7}{\equiv} 2 \Rightarrow 3A \overset{7}{\equiv} 2+7 \overset{7}{\equiv} 9 \xrightarrow[(3,7)=1]{\div 3} A \overset{7}{\equiv} 3$$

حال سمت راست دو رابطهٔ هم‌نهشتی فوق را یکسان می‌کنیم:

$$\left.\begin{array}{l} A \overset{13}{\equiv} 5 \Rightarrow A \overset{13}{\equiv} 5+2\times 13 \overset{13}{\equiv} 31 \Rightarrow A \overset{13}{\equiv} 31 \\ A \overset{7}{\equiv} 3 \Rightarrow A \overset{7}{\equiv} 3+4\times 7 \overset{7}{\equiv} 31 \Rightarrow A \overset{7}{\equiv} 31 \end{array}\right\} \Rightarrow A \overset{[7,13]}{\equiv} 31$$

می‌دانیم $[7,13]=7\times 13=91$، پس داریم:

$$A \overset{91}{\equiv} 31 \Rightarrow A = 91k+31$$

کوچک‌ترین عدد سه رقمی A به‌ازای $k=1$ به‌دست می‌آید.

$$k=1 \Rightarrow A = 91+31 = 122 \Rightarrow \text{رقم‌دهگان} = 2$$

۴۰- پاسخ: گزینهٔ ۳ ▲ **مشخصات سؤال: دشوار * ریاضیات گسسته (فصل ۱، درس ۳)**

خوبه اینو بدونی

- باقی‌ماندهٔ تقسیم هر عدد بر ۳ یا ۹ برابر است با باقی‌ماندهٔ تقسیم مجموع ارقام آن عدد بر ۳ یا ۹؛ یعنی:

$$\overline{a_n a_{n-1}\cdots a_2 a_1 a_0} \overset{\text{۳ یا ۹}}{\equiv} a_n + a_{n-1} + \cdots + a_2 + a_1 + a_0$$

- برای پیداکردن باقی‌ماندهٔ تقسیم هر عدد بر ۱۱ کافی است ارقام آن عدد را از سمت راست یکی‌درمیان مثبت و منفی بنویسیم و با هم جمع کنیم، سپس باقی‌ماندهٔ عدد به‌دست‌آمده را در پیمانهٔ ۱۱ محاسبه کنیم.

$$\overline{a_n a_{n-1}\cdots a_2 a_1 a_0} \overset{11}{\equiv} a_0 - a_1 + a_2 - \cdots + (-1)^n a_n$$

جوابش اینه

عدد $N=\overline{a746b}$ بر ۳۶ بخش‌پذیر است، پس عدد N بر ۴ و ۹ بخش‌پذیر است.

$$N \overset{4}{\equiv} 0 \Rightarrow \overline{a746b} \overset{4}{\equiv} 0 \Rightarrow \overline{a74}\times 100 + \overline{6b} \overset{4}{\equiv} 0$$

$$\Rightarrow \overline{6b} \overset{4}{\equiv} 60+b \overset{4}{\equiv} 0 \Rightarrow b \overset{4}{\equiv} 0 \Rightarrow b = 4k \xrightarrow{b \text{ رقم است}} b = 0,4,8$$

حال طبق نکتهٔ فوق، چون N بر ۹ بخش‌پذیر است، داریم:

$$\overline{a746b} \overset{9}{\equiv} 0 \Rightarrow a+7+4+6+b \overset{9}{\equiv} 0 \Rightarrow a+b \overset{9}{\equiv} -17 \Rightarrow a+b \overset{9}{\equiv} -17+2\times 9 \overset{9}{\equiv} 1 \Rightarrow a+b \overset{9}{\equiv} 1$$

بر حسب مقادیر مختلف برای b، داریم:

$$b=0 \Rightarrow a \overset{9}{\equiv} 1 \Rightarrow a=1 \Rightarrow N = 17460$$

$$b=4 \Rightarrow a+4 \overset{9}{\equiv} 1 \Rightarrow a \overset{9}{\equiv} -3 \Rightarrow a \overset{9}{\equiv} -3+9 \overset{9}{\equiv} 6 \Rightarrow a=6 \Rightarrow N = 67464$$

$$b=8 \Rightarrow a+8 \overset{9}{\equiv} 1 \Rightarrow a \overset{9}{\equiv} -7 \Rightarrow a \overset{9}{\equiv} -7+9 \overset{9}{\equiv} 2 \Rightarrow a=2 \Rightarrow N = 27468$$

بزرگ‌ترین عدد N به‌ازای $a=6$ و $b=4$ به‌دست می‌آید. حال باقی ماندهٔ تقسیم عدد $M=6044$ بر ۱۱ را می‌یابیم:

$$6044 \overset{11}{\equiv} 4-4+0-6 \overset{11}{\equiv} -6+11 \overset{11}{\equiv} 5$$

فیـــزیک

۴۱- پاسخ: گزینهٔ ۱ ▲ مشخصات سؤال: ساده * فیزیک ۱ (فصل ۳)

جوابش اینه

در ۱۲۰۰ متری پایان ارتفاع صعود، انرژی پتانسیل گرانشی کوهنورد به مقدار زیر افزایش می‌یابد:

$$\Delta U_{mg} = mg\Delta h \Rightarrow \Delta U = ۷۵ \times ۱۰ \times ۱۲۰۰ = ۹۰۰ \times ۱۰^{۳} = ۹ \times ۱۰^{۵}\,J = ۹ \times ۱۰^{-۱} \times ۱۰^{۶}\,J = ۰/۹\,MJ$$

در نتیجه، کار نیروی وزن کوهنورد در این جابه‌جایی، برابر است با:

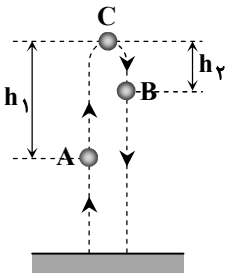
$$W_{mg} = -\Delta U_{mg} = -۰/۹\,MJ$$

۴۲- پاسخ: گزینهٔ ۱ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * فیزیک ۱ (فصل ۳)

جوابش اینه

با فرض اینکه C نقطهٔ اوج گلوله باشد، اصل پایستگی انرژی مکانیکی را یک بار برای دو نقطهٔ A و C و بار دیگر برای دو نقطهٔ C و B می‌نویسیم.

مرتبهٔ اول: با فرض اینکه سطح مبدأ انرژی پتانسیل گرانشی از نقطهٔ A عبور کند و با توجه به این مطلب که در نقطهٔ اوج، تندی گلولـه صـفر است، داریم:



$$E_A = E_C \Rightarrow U_A + K_A = U_C + K_C$$

$$\Rightarrow ۰ + \frac{۱}{۲}mv_A^{۲} = mgh_۱ + ۰$$

$$\Rightarrow \frac{۱}{۲}v_A^{۲} = gh_۱ \Rightarrow \frac{۱}{۲} \times (۵)^{۲} = ۱۰h_۱$$

$$\Rightarrow h_۱ = \frac{۲۵}{۲۰} = \frac{۵}{۴} = ۱/۲۵\,m$$

مرتبهٔ دوم: با فرض اینکه سطح مبدأ انرژی پتانسیل گرانشی از نقطهٔ B عبور کند، داریم:

$$E_C = E_B \Rightarrow K_C + U_C = K_B + U_B \Rightarrow ۰ + mgh_۲ = \frac{۱}{۲}mv_B^{۲} + ۰ \Rightarrow gh_۲ = \frac{۱}{۲}v_B^{۲} \Rightarrow ۱۰h_۲ = \frac{۱}{۲} \times (۳)^{۲}$$

$$\Rightarrow h_۲ = \frac{۹}{۲۰} = ۰/۴۵\,m$$

در نتیجه، کل مسافتی که گلوله بین دو نقطهٔ A و B می‌پیماید، برابر است با:

$$L = h_۱ + h_۲ = ۱/۲۵ + ۰/۴۵ = ۱/۷\,m$$

۴۳- پاسخ: گزینهٔ ۴ ▲ مشخصات سؤال: دشوار * فیزیک ۱ (فصل ۳)

جوابش اینه

$$|v_۲| = ۲|v_۱| \Rightarrow K_۲ = ۴K_۱$$

$$K_۲ - K_۱ = W_t \Rightarrow ۴K_۱ - K_۱ = ۲۴۰ \Rightarrow K_۱ = ۸۰\,J$$

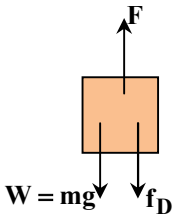
$$\frac{۱}{۲} \times ۲/۵v_۱^{۲} = ۸۰ \Rightarrow v_۱^{۲} = ۶۴ \Rightarrow |v_۱| = ۸\frac{m}{s} \Rightarrow v_۱ = \pm ۸\frac{m}{s}$$

$$\Rightarrow |v_۲| = ۱۶\frac{m}{s} \Rightarrow v_۲ = \pm ۱۶\frac{m}{s}$$

اندازهٔ تغییرات سرعت جسم می‌تواند $۸\frac{m}{s}$ یا $۲۴\frac{m}{s}$ باشد:

$$\begin{cases} |\Delta v| = |۱۶ - ۸| = ۸\frac{m}{s} \\ |\Delta v| = |-۱۶ - ۸| = ۲۴\frac{m}{s} \end{cases}$$

۴۴- پاسخ: گزینهٔ ۱ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * فیزیک ۱ (فصل ۳)



$$\Delta K = W_t \Rightarrow 0 = W_{mg} + W_{f_D} + W_F$$
$$\Rightarrow 0 = -mgd + (f_D \times d\,Cos\,180^\circ) + W_F \Rightarrow 0 = -5\times10\times4 - 15\times4 + W_F$$
$$\Rightarrow W_F = 260\,J$$

۴۵- پاسخ: گزینهٔ ۲ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * فیزیک ۱ (فصل ۳)

$v_2 - v_1 = 5\frac{m}{s}$ رابطهٔ (۱)

$$\Delta K = W_t \Rightarrow \frac{1}{2}m(v_2^2 - v_1^2) = 30 \Rightarrow \frac{1}{2}\times2\times(v_2^2 - v_1^2) = 30$$
$$\Rightarrow v_2^2 - v_1^2 = 30 \Rightarrow (v_2 - v_1)(v_2 + v_1) = 30$$
$$\xrightarrow{\text{رابطهٔ (۱)}} v_2 + v_1 = 6\frac{m}{s} \quad \text{رابطهٔ (۲)}$$

با استفاده از روابط (۱) و (۲) داریم:

$$\begin{cases} v_2 + v_1 = 6 \\ v_2 - v_1 = 5 \end{cases} \Rightarrow v_1 = 0/5\frac{m}{s}\ ,\ v_2 = 5/5\frac{m}{s}$$

۴۶- پاسخ: گزینهٔ ۲ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * فیزیک ۱ (فصل ۳)

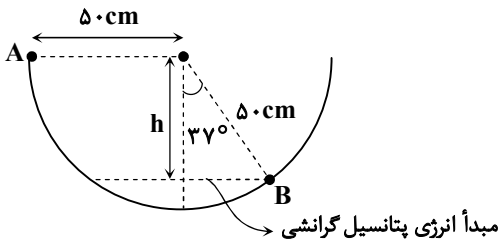
گزاره‌های «ب» و «ت» صحیح هستند.

بررسی گزاره‌های نادرست:

گزارهٔ «الف»: کار کل نیروهای وارد بر جسم با تغییرات انرژی جنبشی جسم برابر است: $W_t = \Delta K$.

گزاره‌های «پ» و «ث»: کار نیروی وزن برابر با قرینهٔ تغییرات انرژی پتانسیل گرانشی جسم است: $W_{mg} = -\Delta U$.

۴۷- پاسخ: گزینهٔ ۱ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * فیزیک ۱ (فصل ۳)



$$Cos\,37^\circ = \frac{8}{10} = \frac{h}{50} \Rightarrow h = 40\,cm$$
$$U_A + K_A = U_B + K_B \Rightarrow mgh + 0 = 0 + \frac{1}{2}mv_B^2$$
$$\Rightarrow 10\times0/4 = \frac{1}{2}v_B^2 \Rightarrow v_B^2 = 8 \Rightarrow v_B = 2\sqrt{2}\frac{m}{s}$$

۴۸- پاسخ: گزینهٔ ۱ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * فیزیک ۱ (فصل ۳)

$$\begin{cases} W_1 = F\times d = K_1 - 0 \\ W_2 = 2F\times d = K_2 - 0 \end{cases} \Rightarrow K_2 = 2K_1$$

$$K_2 = 2K_1 \Rightarrow \frac{1}{2}\times2mv_2^2 = 2\times\frac{1}{2}mv_1^2 \Rightarrow v_2^2 = v_1^2 \Rightarrow |v_2| = |v_1|$$

۴۹- پاسخ: گزینهٔ ۳ ▲ مشخصات سؤال: ساده * فیزیک ۱ (فصل ۳)

جوابش اینه

کار نیروی وزن به ارتفاع اولیه و نهایی بستگی دارد.

$$W_{mg} = mg(\cancel{h_۲} - \cancel{h_۱}) = ۰$$

نباید سراغ اینا بری

گزینهٔ ۱: $W_t = \Delta K \neq ۰$

گزینه‌های ۲ و ۴: کار نیروی مقاومت هوا همواره در خلاف جهت حرکت گلوله و منفی است.

۵۰- پاسخ: گزینهٔ ۲ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * فیزیک ۱ (فصل ۳)

جوابش اینه

$$W_{کل} = \Delta K \Rightarrow W_{mg} + W_{موتور\,F} = \frac{۱}{۲}m(v^۲ - \cancel{v_۰^۲}) \Rightarrow -mgh + W_{موتور\,F} = \frac{۱}{۲}mv^۲ \Rightarrow W_{موتور\,F} = mgh + \frac{۱}{۲}mv^۲$$

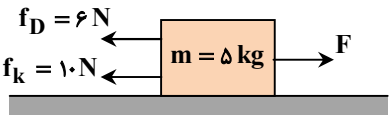
$$\Rightarrow W_{موتور\,F} = (۱۲۰)\times ۱۰ \times ۴ + \frac{۱}{۲}\times ۱۲۰ \times ۲۵ \Rightarrow W_{موتور\,F} = ۴۸۰۰ + ۱۵۰۰ = ۶۳۰۰\,J$$

$$P_{av} = \frac{W_{موتور\,F}}{\Delta t} = \frac{۶۳۰۰}{۳۰} = ۲۱۰\,W$$

۵۱- پاسخ: گزینهٔ ۴ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * فیزیک ۱ (فصل ۳)

جوابش اینه

جسم با سرعت ثابت روی سطح حرکت می‌کند، پس داریم:



$$W_F + W_{f_k} + W_{f_D} = \Delta K = ۰$$

$$\Rightarrow W_F - ۱۰d - ۶d = ۰ \Rightarrow W_F = ۱۶d$$

$$P_{مفید\,موتور} = \frac{W_F}{t} = ۱۶\frac{d}{t} = ۱۶v = ۱۶\times ۵ = ۸۰\,W$$

بازده موتور پیشران برابر است با:

$$Ra = \frac{P_{مفید}}{P_{مصرفی}} = \frac{۸۰}{۱۲۰} = \frac{۲}{۳}$$

۵۲- پاسخ: گزینهٔ ۱ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * فیزیک ۱ (فصل ۳)

جوابش اینه

$$Ra = \frac{P_{مفید}}{P_{مصرفی}} \Rightarrow \frac{۶۰}{۱۰۰} = \frac{P_{مفید}}{۲\times ۷۵۰} \Rightarrow P_{مفید} = ۹۰۰\,W$$

$$۹۰۰ = \frac{W}{t} = \frac{mgh}{t} \Rightarrow ۹۰۰ = \frac{m\times ۱۰\times ۱۰}{۶۰} \Rightarrow m = ۵۴۰\,kg$$

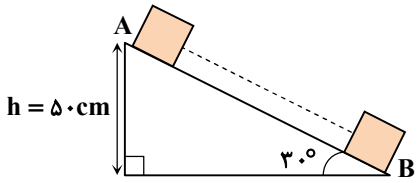
$$\rho = \frac{m}{V} \Rightarrow ۰/۸\frac{kg}{L} = \frac{۵۴۰\,kg}{V} \Rightarrow V = ۶۷۵\,L$$

۵۳- پاسخ: گزینهٔ ۳ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * فیزیک ۱ (فصل ۳)

جوابش اینه

$$\begin{cases} \frac{W_A}{W_B} = \frac{mgh}{۲mgh} = \frac{۱}{۲} \\ P = \frac{W}{t} \end{cases} \Rightarrow \frac{P_A}{P_B} = \frac{W_A}{W_B}\times\frac{t_B}{t_A} \xrightarrow{P_A = ۳P_B} ۳ = \frac{۱}{۲}\times\frac{t_B}{t_A} \Rightarrow \frac{t_B}{t_A} = ۶$$

۵۴- پاسخ: گزینهٔ ۲ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * فیزیک ۱ (فصل ۳)



به‌دلیل وجود نیروی اصطکاک بین جسم و سطح شیب‌دار، انرژی مکانیکی در پایین سطح شیب‌دار کمتر از انرژی مکانیکی در بالای سطح شیب‌دار است، بنابراین:

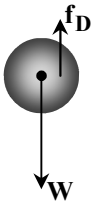
$$E_B - E_A = W_{f_k} \Rightarrow (U_B + K_B) - (U_A + K_A) = -f_k d_{AB}$$

$$\xrightarrow{(\sin ۳۰^\circ = \frac{h}{d_{AB}} \Rightarrow d_{AB} = ۲h)} (۰ + \frac{۱}{۲} m v_B^۲) - (mgh + ۰) = -f_k (۲h)$$

$$\Rightarrow \frac{۱}{۲} m v_B^۲ - mgh = -۲ f_k h \Rightarrow \frac{۱}{۲} \times ۱ \times (۲)^۲ - ۱ \times ۱۰ \times ۰/۵ = -۲ f_k \times ۰/۵$$

$$\Rightarrow ۲ - ۵ = -f_k \Rightarrow -۳ = -f_k \Rightarrow f_k = ۳\,N$$

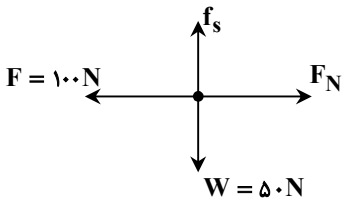
۵۵- پاسخ: گزینهٔ ۳ ▲ مشخصات سؤال: ساده * فیزیک ۳ (فصل ۲)



$$F_{net} = ma \Rightarrow W - f_D = ma$$

$$\frac{a_۲}{a_۱} = \frac{\frac{۲m_۱ g - \frac{۱}{۳} m_۱ g}{۲m_۱}}{\frac{m_۱ g - \frac{۱}{۳} m_۱ g}{m_۱}} = \frac{\frac{۲ - \frac{۱}{۳}}{۲}}{\frac{۱ - \frac{۱}{۳}}{۱}} = \frac{\frac{۵}{۶}}{\frac{۲}{۳}} = \frac{۵}{۴}$$

۵۶- پاسخ: گزینهٔ ۴ ▲ مشخصات سؤال: ساده * فیزیک ۳ (فصل ۲)



نیروهای وارد بر وزنه به‌صورت شکل مقابل هستند و نیروی خالص وارد بر آن صفر است.

$$\left.\begin{matrix} F_N = ۱۰۰\,N \\ f_s = ۵۰\,N \end{matrix}\right\} \Rightarrow R = \sqrt{f_s^۲ + F_N^۲} = \sqrt{۵۰^۲ + ۱۰۰^۲} = ۵۰\sqrt{۵}\,N$$

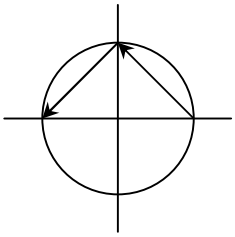
۵۷- پاسخ: گزینهٔ ۱ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * فیزیک ۳ (فصل ۲)

بزرگی شتاب مرکزگرای جسم برابر است با: $a_c = \frac{v^۲}{r}$. (درستی گزارهٔ «ب»)

بررسی نادرستی سایر گزاره‌ها:

گزارهٔ «الف»: در حرکت دایره‌ای یکنواخت، جهت شتاب جسم همیشه به‌طرف مرکز دایره است و جهت بردار سرعت مماس بر مسیر دایره‌ای است. پس بردارهای سرعت و شتاب جسم همیشه بر هم عمود هستند.

گزارهٔ «پ»: در هر دو بازهٔ زمانی هم‌اندازه، مقدار جابه‌جایی برابر است اما لزوماً هم‌جهت نیستند.



مطابق شکل، در دو بازهٔ زمانی $\frac{T}{۴}$ متوالی جهت جابه‌جایی‌ها متفاوت است.

گزارهٔ «ت»: در هر بازهٔ زمانی $\frac{T}{۲}$ سرعت جسم قرینه می‌شود؛ پس تغییر تکانهٔ جسم غیرصفر است.

۵۸- پاسخ: گزینهٔ ۱ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * فیزیک ۳ (فصل ۲)

جوابش اینه

تندی گردش ماهواره برابر است با:

$$v=\sqrt{\frac{GM}{r}}$$

بزرگی شتاب مرکزگرای ماهواره با شتاب گرانش در آن محل برابر است.

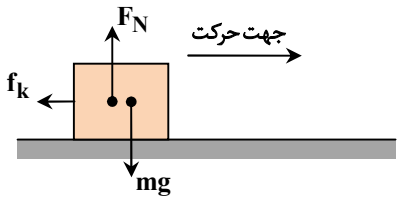
$$a_c=\frac{v^2}{r}=\frac{GM}{r^2}$$

$$v_A=3v_B \Rightarrow r_A=\frac{1}{9}r_B \Rightarrow a_A=9^2 a_B=81a_B$$

۵۹- پاسخ: گزینهٔ ۳ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * فیزیک ۳ (فصل ۲)

جوابش اینه

برای جسمی که تحت تأثیر نیروی اصطکاک روی زمین افقی می‌لغزد وضعیت نیروها مطابق شکل است.



$$F_{net,y}=0 \Rightarrow F_N=mg \quad \text{(۱) رابطهٔ}$$

$$f_k=\mu_k F_N \xrightarrow{\text{(۱) رابطهٔ}} f_k=\mu_k mg \quad \text{(۲) رابطهٔ}$$

$$F_{net,x}=0 \Rightarrow -f_k=ma \xrightarrow{\text{(۲) رابطهٔ}} -\mu_k mg=ma \Rightarrow a=-\mu_k g$$

این شتاب به جرم جسم بستگی ندارد.

$$v_2^2-v_1^2=2a\Delta x \Rightarrow 0-15^2=2\times a\times 30 \Rightarrow a=-\frac{15}{4}\frac{m}{s^2} \Rightarrow \mu_k g=\frac{15}{4} \Rightarrow \mu_k=\frac{3}{8}$$

۶۰- پاسخ: گزینهٔ ۲ ▲ مشخصات سؤال: ساده * فیزیک ۳ (فصل ۲)

جوابش اینه

در بازهٔ زمانی $t=10s$ تا $t=20s$ نمودار «$p-t$» خطی است، پس آهنگ تغییر تکانه (نیروی خالص وارد بر جسم) ثابت و برابر شیب این خط است.

$$F_{net}=\frac{\Delta p}{\Delta t}=\frac{100-400}{20-10}=-\frac{300}{10}=-30N$$

$$F_{net}=ma \Rightarrow -30=20a \Rightarrow a=-\frac{3}{2}\frac{m}{s^2} \Rightarrow |a|=\frac{3}{2}\frac{m}{s^2}$$

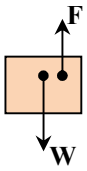
۶۱- پاسخ: گزینهٔ ۲ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * فیزیک ۳ (فصل ۲)

جوابش اینه

در حالت اول، وزنه ساکن است و نیروی خالص وارد بر آن صفر است، پس:

$$F=mg=100N$$

در حالت دوم وزنه از حال سکون به حرکت درمی‌آید و در مدت ۴ ثانیه حرکت با شتاب ثابت، ۱۶ متر پایین می‌آید.



$$\Delta y=\frac{1}{2}at^2+v_0 t \Rightarrow 16=\frac{1}{2}a\times 4^2 \Rightarrow a=2\frac{m}{s^2}$$

$$F_{net}=ma \Rightarrow W-F=ma \Rightarrow 100-F=10\times 2 \Rightarrow F=80N$$

پس مقدار F یعنی کشش طناب را ۲۰ نیوتون کم کرده‌ایم.

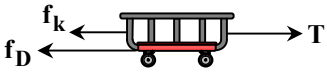
۶۲- پاسخ: گزینهٔ ۱ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * فیزیک ۳ (فصل ۲)

جوابش اینه

تندی واگن هم در مدت ۲۰ ثانیه و همگام با اتومبیل از صفر به $۷۲\frac{km}{h}$ می‌رسد.

$$۷۲\frac{km}{h}=\frac{۷۲}{۳/۶}=۲۰\frac{m}{s}$$
$$a=\frac{\Delta v}{\Delta t}=\frac{۲۰-۰}{۲۰}=۱\frac{m}{s^۲}$$

قانون دوم نیوتون را برای حرکت واگن می‌نویسیم:

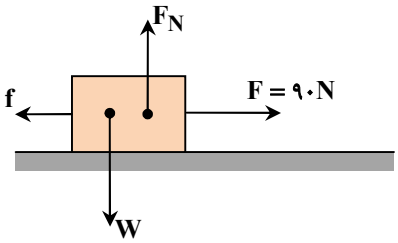


$$T-f_k-f_D=ma \Rightarrow T-۲۰۰=۸۰۰\times ۱ \Rightarrow T=۱۰۰۰N$$

با توجه به اینکه جرم طناب ناچیز است، نیروی کشش طناب در هر دو سر آن همین ۱۰۰۰ نیوتون است. یعنی طناب بر واگن ۱۰۰۰ نیوتون به‌طرف جلو و بر اتومبیل ۱۰۰۰ نیوتون به‌طرف عقب وارد می‌کند.

۶۳- پاسخ: گزینهٔ ۳ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * فیزیک ۳ (فصل ۲)

جوابش اینه



$$F_{net,y}=۰ \Rightarrow F_N-W=۰ \Rightarrow F_N=mg=۲۰۰N$$
$$f_{s,max}=\mu_s F_N=۰/۴\times ۲۰۰=۸۰N$$

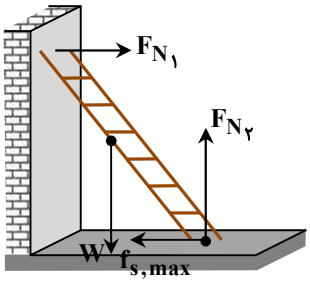
با توجه به اینکه اندازهٔ نیروی افقی از $f_{s,max}$ بزرگ‌تر است، جعبه حرکت می‌کند.

چون جعبه روی سطح می‌لغزد، اصطکاک از نوع جنبشی است.

$$f_k=\mu_k F_N=۰/۳\times ۲۰۰=۶۰N \Rightarrow F_{net}=F-f_k=۹۰-۶۰=۳۰N$$

۶۴- پاسخ: گزینهٔ ۴ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * فیزیک ۳ (فصل ۲)

جوابش اینه



$$F_{net,y}=۰ \Rightarrow F_{N_۲}=mg=۴۰۰N$$
$$F_{net,x}=۰ \Rightarrow f_{s,max}=F_{N_۱}=۲۰۰N$$

$f_{s,max}$ و $F_{N_۲}$ مؤلفه‌های قائم و افقی نیرویی است که کف اتاق بر نردبان وارد می‌کند.

$$R=\sqrt{f_{s,max}^۲+F_{N_۲}^۲}=\sqrt{۲۰۰^۲+۴۰۰^۲}=۲۰۰\sqrt{۵}\,N$$

آستانهٔ لغزیدن $\Rightarrow f_{s,max}=\mu_s F_{N_۲} \Rightarrow ۲۰۰=۴۰۰\mu_s \Rightarrow \mu_s=۰/۵$

۶۵- پاسخ: گزینهٔ ۳ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * فیزیک ۳ (فصل ۲)

جوابش اینه

جعبه در آستانهٔ لغزیدن به‌طرف راست است، بنابراین داریم:

$$F-f_{s,max}=۰ \Rightarrow f_{s,max}=۲۸N$$

در آستانهٔ لغزیدن: $f_{s,max}=\mu_s F_N \Rightarrow ۲۸=۰/۴F_N \Rightarrow F_N=۷۰N$

مقدار F_N کف آسانسور از وزن جسم کمتر است، پس نیروی خالص وارد بر جعبه به‌طرف پایین و شتاب حرکت هم به‌طرف پایین است.

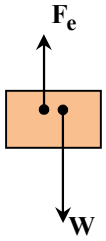
$$W-F_N=ma \Rightarrow ۱۰۰-۷۰=۱۰\times a \Rightarrow a=۳\frac{m}{s^۲}$$

این‌که جهت شتاب رو به پایین است، یعنی حرکت آسانسور به‌صورت تندشونده رو به پایین و یا کندشونده رو به بالا است.

۶۶- پاسخ: گزینهٔ ۱ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * فیزیک ۳ (فصل ۲)

جوابش اینه

حرکت آسانسور تندشونده با شتاب $۴\frac{m}{s^۲}$ به‌طرف بالا است:



$$F_{net} = F_{e,۱} - W \Rightarrow F_{e,۱} - mg = ma \Rightarrow F_{e,۱} = m(g+a)$$

در حرکت با سرعت ثابت داریم:

$$F_{net} = F_{e,۲} - W = ۰ \Rightarrow F_{e,۲} = mg$$

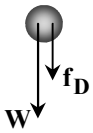
اختلاف نیروی فنر در دو حالت فوق می‌شود k ضرب‌در اختلاف طول فنر در دو حالت:

$$F_{e,۱} - F_{e,۲} = ma \Rightarrow kx_۱ - kx_۲ = ma \Rightarrow k(۰/۶ - ۰/۵۸) = ۵ \times ۴ \Rightarrow k = \frac{۲۰}{۰/۰۲} \Rightarrow k = ۱۰۰۰\frac{N}{m}$$

۶۷- پاسخ: گزینهٔ ۴ ▲ مشخصات سؤال: دشوار * فیزیک ۳ (فصل ۲)

جوابش اینه

نیروهای وارد بر گلوله را در مسیر بالارفتن می‌نویسیم:



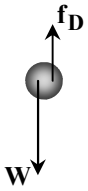
$$mg + f_D = ma_۱$$

$a_۱$ را بزرگی شتاب حالت اول در نظر گرفته‌ایم و چون در مسیر بالارفتن حرکت کندشونده است، شتاب را $-a_۱$ در نظر می‌گیریم:

$$۰ - v_۱^۲ = ۲(-a_۱)\cdot H \quad \text{(۱) رابطهٔ}$$

H: ارتفاع بالاترین نقطهٔ مسیر نسبت به محل پرتاب است.

نیروهای وارد بر گلوله را در مسیر پایین‌آمدن می‌نویسیم:



$$mg - f_D = ma_۲$$

$$v_۲^۲ - ۰ = ۲a_۲H \quad \text{(۲) رابطهٔ}$$

$$\xrightarrow{\text{از روابط (۱) و (۲)}} (\frac{v_۲}{v_۱})^۲ = \frac{a_۲}{a_۱} = \frac{mg - f_D}{mg + f_D}$$

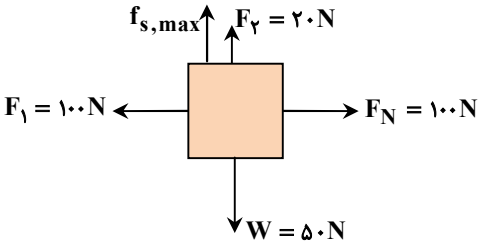
$$\Rightarrow (\frac{۴}{۵})^۲ = \frac{mg - f_D}{mg + f_D} \Rightarrow ۱۶(mg + f_D) = ۲۵(mg - f_D)$$

$$\Rightarrow ۹mg = ۴۱f_D \Rightarrow f_D = \frac{۹}{۴۱}mg$$

۶۸- پاسخ: گزینهٔ ۴ ▲ مشخصات سؤال: دشوار * فیزیک ۳ (فصل ۲)

جوابش اینه

وزن جسم ۵۰ نیوتون است و با توجه به اینکه بزرگی نیروی $F_۲$ برابر ۲۰ نیوتون است، جسم نمی‌تواند در آستانهٔ لغزیدن به‌طرف بالا باشد، پس در حالت اول جسم در آستانهٔ لغزیدن به‌طرف پایین است.

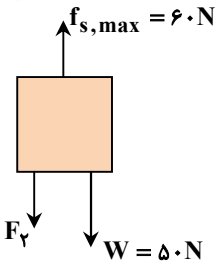


$$f_{s,max} = W - F_۲ \Rightarrow f_{s,max} = ۵۰ - ۲۰ = ۳۰N$$

وقتی $F_۱$ دو برابر شود F_N هم ۲ برابر می‌شود $(F_N = F_۱)$، پس مقدار $f_{s,max}$ هم دو برابر می‌شود $(f_{s,max} = \mu_s F_N)$.

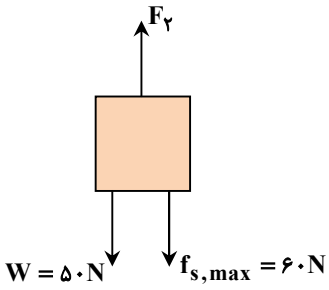
پس در حالت دوم $f_s = f_{s,max} = ۶۰N$ است، اما نکته اینجاست که در این حالت جسم ممکن است در آستانهٔ لغزیدن به‌طرف بالا یا پایین باشد، پس مسئله ۲ حالت دارد.

حالت اول: جسم در آستانهٔ لغزیدن به‌طرف پایین است.



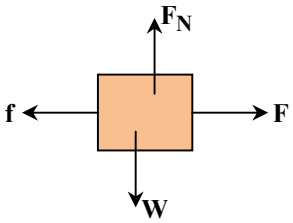
$$F_۲ = f_{s,max} - W$$
$$\Rightarrow F_۲ = ۶۰ - ۵۰ = ۱۰N \Rightarrow \vec{F}_۲ = (-۱۰N)\vec{j}$$

حالت دوم: جسم در آستانهٔ لغزیدن به‌طرف بالا است.



$$F_۲ = W + f_{s,max}$$
$$\Rightarrow F_۲ = ۵۰ + ۶۰ = ۱۰N \Rightarrow \vec{F}_۲ = (۱۱۰N)\vec{j}$$

۶۹- پاسخ: گزینهٔ ۲ ▲ مشخصات سؤال: دشوار * فیزیک ۳ (فصل ۲)



$$F_{net,y} = ۰ \Rightarrow F_N - mg = ۰ \Rightarrow F_N = ۱۰۰N$$
$$f_{s,max} = \mu_s F_N = ۰/۴ \times ۱۰۰ = ۴۰N$$
$$f_k = \mu_k F_N = ۰/۳ \times ۱۰۰ = ۳۰N$$

در بازهٔ $t = ۰$ تا $t = ۵s$ مقدار F کمتر از $f_{s,max}$ است؛ بنابراین جسم حرکت نمی‌کند $(F_{net} = ۰)$.

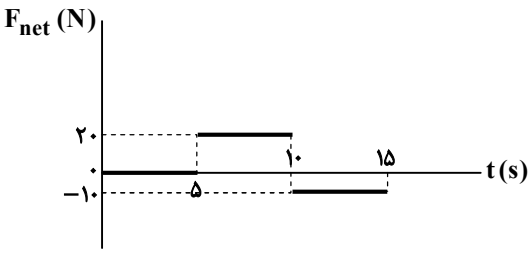
در بازهٔ $t = ۵s$ تا $t = ۱۰s$ مقدار F بیشتر از $f_{s,max}$ است، پس جسم حرکت می‌کند و مقدار اصطکاک وارد بر آن f_k است.

$$F_{net} = F - f_k = ۵۰ - ۳۰ = ۲۰N$$

در بازهٔ $t = ۱۰s$ تا $t = ۱۵s$ اگر چه مقدار F کمتر از f_k است، اما جسم هنوز در حال جلورفتن است.

$$F_{net} = F - f_k = ۲۰ - ۳۰ = -۱۰N$$

مساحت زیر نمودار نیروی خالص- زمان با تغییر تکانهٔ جسم برابر است.

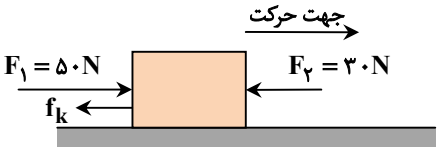


$$S = (۲۰ \times ۵) - (۱۰ \times ۵) = ۵۰$$
$$\Delta p = S \Rightarrow \Delta p = ۵۰ \frac{kg \cdot m}{s}$$
$$\Delta p = m\Delta v \Rightarrow ۵۰ = ۱۰ \times \Delta v$$
$$\Rightarrow \Delta v = ۵ \frac{m}{s} \Rightarrow v = ۵ \frac{m}{s}$$

۷۰- پاسخ: گزینهٔ ۲ ▲ مشخصات سؤال: دشوار * فیزیک ۳ (فصل ۲)

$$v = at + v_۰ \Rightarrow ۱۲ = ۶a + ۰ \Rightarrow a = ۲ \frac{m}{s^۲}$$

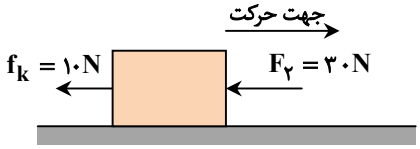
در حالت اول جسم با شتاب $۲ \frac{m}{s^۲}$ به‌طرف راست حرکت می‌کند.



$$F_۱ - F_۲ - f_k = ma \Rightarrow ۵۰ - ۳۰ - f_k = ۵ \times ۲ \Rightarrow f_k = ۱۰N$$

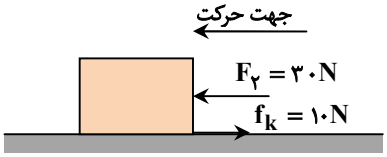
با حذف نیروی F_1، جسم همچنان به‌طرف راست حرکت می‌کند (به‌صورت کندشونده) و پس از یک توقف لحظه‌ای به‌طرف چپ برمی‌گردد (به‌صورت تندشونده).

در مدتی که جسم به‌طرف راست حرکت می‌کند نیروها به‌ترتیب زیر است.



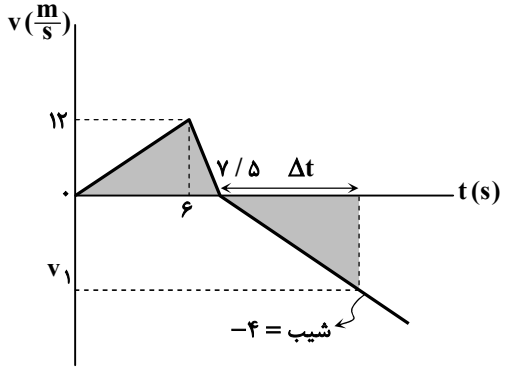
$$F_{net} = ma \Rightarrow -۳۰-۱۰ = ۵a \Rightarrow a = -۸\frac{m}{s^۲}$$

و پس از شروع به برگشتن وضعیت نیروها به‌ترتیب زیر است.



$$F_{net} = ma \Rightarrow ۳۰-۱۰ = ۵a \Rightarrow a = ۴\frac{m}{s^۲}$$

دقت کنید که جهت f_k مخالف جهت حرکت جسم است، پس وقتی جسم شروع به برگشتن می‌کند جهت f_k نیز عکس می‌شود. اکنون از نمودار سرعت- زمان استفاده می‌کنیم.



$$\Delta x = ۰ \Rightarrow \frac{۷/۵ \times ۱۲}{۲} + \frac{v_1 \Delta t}{۲} = ۰$$

$$۴۵ - \frac{v_1^۲}{۸} = ۰ \Rightarrow v_1^۲ = ۳۶۰ \Rightarrow |v_1| = ۶\sqrt{۱۰}\frac{m}{s}$$

۷۱- پاسخ: گزینهٔ ۴ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * فیزیک ۳ (فصل ۲)

جوابش اینه

شعاع دوران چرخ‌ها برابر است با:

$$r = \frac{۶۰}{۲} = ۳۰cm = ۰/۳\,m$$

تندی دوچرخه برابر تندی دوران لاستیک چرخ‌هاست. بنابراین:

$$v = \frac{۲\pi r}{T} \Rightarrow ۱۲/۵ = \frac{۲\times ۳/۱۴ \times ۰/۳}{T} \Rightarrow T = \frac{۶/۲۸ \times ۰/۳}{۱۲/۵} \simeq ۰/۱۵s$$

تعداد دوران‌های چرخ‌ها در مدت $t = ۱min = ۶۰s$ برابر است با:

$$n = \frac{t}{T} = \frac{۶۰}{۰/۱۵} = ۴۰۰$$

۷۲- پاسخ: گزینهٔ ۳ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * فیزیک ۳ (فصل ۲)

جوابش اینه

ذره فاصلهٔ A تا B را در مدت $\frac{۱}{۴}$ دوره طی می‌کند.

$$\frac{T}{۴} = ۰/۵ \Rightarrow T = ۲s$$

اندازهٔ شتاب مرکزگرای ذره برابر است با:

$$a_c = \frac{۴\pi^۲ r}{T^۲} = \frac{۴\times(\sqrt{۱۰})^۲ \times ۲}{۲^۲} = ۲۰\frac{m}{s^۲}$$

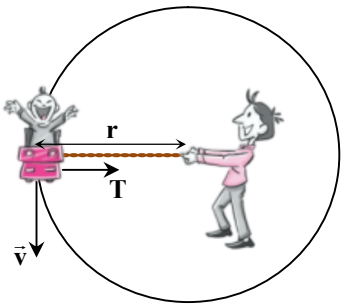
این شتاب به سمت نقطهٔ O (در جهت محور x) است.

$$\vec{a}_c = (۲۰\frac{m}{s^۲})\vec{i}$$

۷۳- پاسخ: گزینهٔ ۳ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * فیزیک ۳ (فصل ۲)

جوابش اینه

نیروی کشش طناب نیروی مرکزگرای لازم برای دوران بچه و چهارچرخه را فراهم می‌کند.



$$T = \frac{(m_{\text{بچه}} + m_{\text{چهارچرخه}})v^۲}{r} = \frac{۲۵\times ۲^۲}{۱} = ۱۰۰N$$

نیروی مرکزگرای وارد بر کودک برابر است با:

$$F = \frac{m_{\text{بچه}} v^۲}{r} = \frac{۲۰\times ۲^۲}{۱} = ۸۰N \qquad T - F = ۱۰۰ - ۸۰ = ۲۰N$$

۷۴- پاسخ: گزینهٔ ۳ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * فیزیک ۳ (فصل ۲)

جوابش اینه

حداکثر تندی خودرو برای آنکه بدون لغزش یک پیچ مسطح افقی به شعاع r را طی کند، از رابطهٔ مقابل به‌دست می‌آید:

$$v_{max} = \sqrt{\mu_s r g} \Rightarrow v_{max} = \sqrt{۰/۵ \times ۵۰ \times \pi^۲} = ۵\pi \frac{m}{s}$$

طول پیچ $\frac{۱}{۴}$ محیط دایره‌ای به‌شعاع $r = ۵۰m$ است؛ بنابراین:

$$L = \frac{۲\pi r}{۴} = \frac{۲\pi \times ۵۰}{۴} = ۲۵\pi m$$

$$L = vt \Rightarrow t_{min} = \frac{L}{v_{max}} = \frac{۲۵\pi}{۵\pi} = ۵s$$

۷۵- پاسخ: گزینهٔ ۱ ▲ مشخصات سؤال: دشوار * فیزیک ۳ (فصل ۲)

جوابش اینه

دورهٔ گردش ماهوارهٔ A با زمان یک دور چرخش زمین به دور خودش برابر است با:

$$T_A = ۲۴h$$

مربع دورهٔ گردش ماهواره به دور زمین متناسب با مکعب فاصلهٔ ماهواره از مرکز زمین است. بنابراین:

$$(\frac{T_B}{T_A})^۲ = (\frac{r_B}{r_A})^۳ \Rightarrow (\frac{T_B}{۲۴})^۲ = (\frac{۱}{۴})^۳ \Rightarrow T_B^۲ = \frac{۲۴^۲}{۶۴} \Rightarrow T_B = \frac{۲۴}{۸} = ۳h$$

تعداد دوران‌های ماهوارهٔ B در هر شبانه‌روز به دور زمین را با n_B نشان می‌دهیم.

$$n_B = \frac{t}{T_B} = \frac{۲۴}{۳} = ۸$$

اگر زمین ساکن بود، ماهوارهٔ B در هر شبانه‌روز، ۸ بار زمین را دور می‌زد؛ یعنی در هر شبانه‌روز ۸ بار از بالای یک مکان معین روی سطح زمین عبور می‌کرد. حالا که زمین در هر شبانه‌روز یک بار دور خود می‌چرخد، ماهوارهٔ B در هر شبانه‌روز، ۷ بار از بالای یک نقطهٔ معین عبور می‌کند.

شیـــــــــمی

۷۶- پاسخ: گزینهٔ ۲ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * شیمی ۱ (فصل ۳)

جوابش اینه

عبارت اصلی: نادرست؛ درصد جرمی ← ppm

عبارت «اول»: درست

عبارت «دوم»: درست

$$\frac{۰/۰۵ \times ۱۰^{-۳}}{۰/۲ \times ۱۰^{۳}} \times ۱۰^۶ = ۰/۲۵ ppm$$

عبارت «سوم»: نادرست

$$\frac{۱۶}{۱۰۰ + ۱۶} \times ۱۰۰ \neq ٪۱۶$$

عبارت «چهارم»: نادرست

$$ppm = \text{درصد جرمی} \times ۱۰^۴$$

$$\frac{۹۰۰۰}{۱۰^۴} = ٪۰/۹$$

۷۷- پاسخ: گزینهٔ ۴ ▲ مشخصات سؤال: دشوار * شیمی ۱ (فصل ۳)

جوابش اینه

قبل از حل مقدار یون‌ها را به mol تبدیل می‌کنیم: (تقسیم بر جرم مولی)

یون	K^+	Ca^{2+}	Mg^{2+}	SO_4^{2-}	Na^+	Cl^-
جرم (mg)	۳۹۰	۴۰۰	۱۲۰۰	۲۸۸۰	۱۱۵۰۰	۱۷۷۵۰
مول	۰/۰۱	۰/۰۱	۰/۰۵	۰/۰۳	۰/۵	۰/۵

گزینهٔ ۱) نادرست؛ Cl^- و Na^+ هر دو بیشترین غلظت مولی را خواهند داشت.

گزینهٔ ۲) نادرست

$$\frac{Mg^{2+}}{K^+} = ۵ > \frac{Na^+}{Cl^-} = ۱$$

گزینهٔ ۳) نادرست

$$۰/۵\,mol\,MgCl_۲ \times \frac{۱mol\,Mg^{2+}}{۱mol\,MgCl_۲} \times \frac{۲۴g\,Mg^{2+}}{۱mol\,Mg^{2+}} \times \frac{۱۰^۳\,mg\,Mg^{2+}}{۱g\,Mg^{2+}} = ۱۲۰۰۰ \neq ۱۲۰۰$$

گزینهٔ ۴) درست

$$BaCl_۲ \rightarrow Ba^{2+} + ۲Cl^-$$

$$Cl^- \text{ جرم} : ۱۷۷۵۰mg + (۶/۲۴g\,BaCl_۲ \times \frac{۱mol\,BaCl_۲}{۲۰۸g\,BaCl_۲} \times \frac{۲mol\,Cl^-}{۱mol\,BaCl_۲} \times \frac{۳۵/۵g\,Cl^-}{۱mol\,Cl^-} \times \frac{۱۰۰۰mgCl^-}{۱gCl^-}) = ۱۹۸۸۰mg\,Cl^-$$

$$Ba^{2+}(aq) + SO_4^{2-}(aq) \rightarrow BaSO_۴(s)$$

$$۶/۲۴g\,BaCl_۲ \times \frac{۱mol\,BaCl_۲}{۲۰۸g\,BaCl_۲} \times \frac{۱mol\,SO_4^{2-}}{۱mol\,BaCl_۲} \times \frac{۹۶g\,SO_4^{2-}}{۱mol\,SO_4^{2-}} \times \frac{۱۰^۳\,mg}{۱g} = ۲۸۸۰mg \text{ مصرف شده}$$

$$۲۸۸۰ - ۲۸۸۰ = ۰$$

۷۸- پاسخ: گزینهٔ ۲ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * شیمی ۱ (فصل ۳)

جوابش اینه

عبارت «اول»: درست

عبارت «دوم»: درست

عبارت «سوم»: نادرست؛ کمترین کاربرد مربوط به مصارف خانگی است.

عبارت «چهارم»: نادرست؛ سدیم کلرید به روش تبلور از آب دریا جداسازی و استخراج می‌شود.

۷۹- پاسخ: گزینهٔ ۱ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * شیمی ۱ (فصل ۳)

جوابش اینه

مورد الف) درست

مورد ب) نادرست؛ $Mg^{2+}(aq) \leftarrow Mg^{2+}(l)$

مورد پ) درست

مورد ت) درست

۸۰- پاسخ: گزینهٔ ۱ ▲ مشخصات سؤال: دشوار * شیمی ۱ (فصل ۳)

جوابش اینه

$$۱\,mol\,MgSO_۴ \sim ۱\,mol\,SO_۴^{۲-} \quad , \quad ۱\,mol\,K_۲SO_۴ \sim ۱\,mol\,SO_۴^{۲-}$$

$$۲۰۰\,g\,\text{محلول} \times \frac{۱۸۰\,g\,MgSO_۴}{۱۰^۶\,g\,\text{محلول}} \times \frac{۱\,mol\,MgSO_۴}{۱۲۰\,g\,MgSO_۴} \times \frac{۱\,mol\,SO_۴^{۲-}}{۱\,mol\,MgSO_۴} \times \frac{۹۶\,g\,SO_۴^{۲-}}{۱\,mol\,SO_۴^{۲-}} = ۲۸۸ \times ۱۰^{-۳}\,g\,SO_۴^{۲-}$$

$$۱۰۰\,g\,\text{محلول} \times \frac{۳۴۸۰\,g\,K_۲SO_۴}{۱۰^۶\,g\,\text{محلول}} \times \frac{۱\,mol\,K_۲SO_۴}{۱۷۴\,g\,K_۲SO_۴} \times \frac{۱\,mol\,SO_۴^{۲-}}{۱\,mol\,K_۲SO_۴} \times \frac{۹۶\,g\,SO_۴^{۲-}}{۱\,mol\,SO_۴^{۲-}} = ۱۹۲ \times ۱۰^{-۳}\,g\,SO_۴^{۲-}$$

$$ppm = \frac{(۲۸۸ + ۱۹۲) \times ۱۰^{-۳}}{۵۰۰} \times ۱۰^۶ = ۹۶۰$$

$$\left[۲۰۰\,g\,\text{محلول} \times \frac{۱۸۰\,g\,MgSO_۴}{۱۰^۶\,g\,\text{محلول}} \times \frac{۱\,mol\,MgSO_۴}{۱۲۰\,g\,MgSO_۴} \times \frac{۱\,mol\,Mg^{۲+}}{۱\,mol\,MgSO_۴} \right]$$

$$+ \left[۲۰۰\,g\,\text{محلول} \times \frac{۱۴۸۰\,g\,Mg(NO_۳)_۲}{۱۰^۶\,g\,\text{محلول}} \times \frac{۱\,mol\,Mg(NO_۳)_۲}{۱۴۸\,g\,Mg(NO_۳)_۲} \times \frac{۱\,mol\,Mg^{۲+}}{۱\,mol\,Mg(NO_۳)_۲} \right] = ۳ \times ۱۰^{-۳} + ۲ \times ۱۰^{-۳} = ۵ \times ۱۰^{-۳}\,mol\,Mg^{۲+}$$

$$\left[Mg^{۲+} \right] = \frac{۵ \times ۱۰^{-۳}\,mol}{۵۰۰\,g \times \frac{۱\,L}{۱۰۰۰\,g}} = ۱۰^{-۲}\,\frac{mol}{L}$$

۸۱- پاسخ: گزینهٔ ۲ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * شیمی ۱ (فصل ۳)

جوابش اینه

ابتدا موازنه:

$$I_۲ + ۲\,NaOH \rightarrow NaI + NaIO + H_۲O$$

$$۰/۴\,L \times \frac{۰/۱\,mol\,NaOH}{۱\,L} \times \frac{۱\,mol\,I_۲}{۲\,mol\,NaOH} \times \frac{۲۵۴\,g\,I_۲}{۱\,mol\,I_۲} = ۵/۰۸\,g\,I_۲$$

$$۰/۴\,L \times \frac{۰/۱\,mol\,NaOH}{۱\,L} \times \frac{۱\,mol\,NaI}{۲\,mol\,NaOH} = ۰/۰۲\,mol\,NaI \Rightarrow \frac{۰/۰۲\,mol}{۰/۴\,L} = ۰/۰۵\,mol.L^{-۱}\,NaI$$

۸۲- پاسخ: گزینهٔ ۳ ▲ مشخصات سؤال: دشوار * شیمی ۱ (فصل ۳)

جوابش اینه

عبارت «اول»: درست؛ $CaSO_۴$ کم محلول است.

عبارت «دوم»: درست

عبارت «چهارم»: درست

$$\theta = ۳۵ \Rightarrow S = (۰/۸ \times ۳۵) + ۷۲ = ۱۰۰\,g$$

$$\text{درصد جرمی} = \frac{۱۰۰\,g\,\text{نمک}}{۱۰۰\,g\,\text{آب} + ۱۰۰\,g\,\text{نمک}} \times ۱۰۰ = ۵۰$$

نباید سراغ اینا بری

عبارت «سوم»: نادرست؛ رابطه وارون انحلال‌پذیری با دما نشان‌دهنده گرماده بودن فرایند است.

۸۳- پاسخ: گزینهٔ ۴ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * شیمی ۱ (فصل ۱)

جوابش اینه

گزینهٔ ۱) CO_2 خطی است. $:\ddot{O}=C=\ddot{O}:$

گزینهٔ ۲) وجود الکترون ناپیوندی روی اتم مرکزی (A) می‌تواند باعث عدم تقارن و ایجاد قطبیت می‌شود. (وجود الکترون‌های ناپیوندی بر روی اتم‌های پیرامونی باعث تطبیق مولکول نمی‌شود.)

گزینهٔ ۳) جرم F_2 و HCl به هم نزدیک است. قطبیت HCl باعث می‌شود که نقطه جوش آن بالاتر از F_2 باشد.

گزینهٔ ۴) درست؛ $F_2(g)$، $Cl_2(g)$، $Br_2(l)$، $I_2(s)$

با افزایش جرم مولی جاذبه وان‌درووالسی و در نتیجه نیروهای بین مولکولی تقویت می‌یابد و حالت فیزیکی از گاز به مایع و از مایع به جامد تغییر می‌کند.

۸۴- پاسخ: گزینهٔ ۲ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * شیمی ۱ (فصل ۳)

جوابش اینه

به‌دلیل وجود جفت الکترون‌های ناپیوندی در اتم مرکزی مولکول دی متیل‌اتر، این ماده قطبی است ولی پروپان ناقطبی است. از این رو جاذبه‌های قوی‌تر قطبی در دی متیل اتر سبب می‌شود که آسان‌تر مایع شود.

نقطه جوش:	اتانول	<	استون	<	دی‌متیل‌اتر	<	پروپان
جرم مولی $(g\cdot mol^{-1})$:	۴۶		۵۸		۴۶		۴۴
قطبیت:	قطبی		قطبی		قطبی		ناقطبی
نیروی بین‌مولکولی:	هیدروژنی		واندروالسی		واندروالسی		واندروالسی

۸۵- پاسخ: گزینهٔ ۲ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * شیمی ۱ (فصل ۳)

جوابش اینه

عبارت «اول»: نادرست؛ مولکول‌های بخار جدا از هم هستند، گویی پیوند هیدروژنی میان آن‌ها وجود ندارد.

عبارت «دوم»: نادرست؛ شش‌ضلعی

عبارت «سوم»: درست

عبارت «چهارم»: نادرست؛ هیدروژن ← اکسیژن

عبارت «پنجم»: درست

۸۶- پاسخ: گزینهٔ ۲ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * شیمی ۱ (فصل ۳)

جوابش اینه

ساکاروز، اتانول و استون بدون تولید یون و به‌صورت مولکول در آب حل می‌شوند.

۸۷- پاسخ: گزینهٔ ۱ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * شیمی ۱ (فصل ۳)

جوابش اینه

مورد الف) نادرست؛ با توجه به انحلال اتانول در آب نیروی جاذبه میان مولکول‌های اتانول- آب بیشتر از آب- آب و اتانول- اتانول است.

مورد ب) درست؛ باریم سولفات در آب نامحلول است و مقدار ناچیزی از یون‌ها با آب پیوند یون- دوقطبی تشکیل می‌دهند.

مورد پ) درست

$$2NaOH(s) \xrightarrow{\text{در آب}} \underbrace{2Na^+(aq)+2OH^-(aq)}_{\text{۴ مول یون}}$$

$$Na_3PO_4(s) \xrightarrow{\text{در آب}} \underbrace{3Na^+(aq)+PO_4^{3-}(aq)}_{\text{۴ مول یون}}$$

۸۸- پاسخ: گزینهٔ ۴ ▲ مشخصات سؤال: ساده * شیمی ۱ (فصل ۳)

جوابش اینه

گازهایی مثل CO_2 یا NH_3 که به میزان اندکی با آب واکنش می‌دهند، انحلال‌پذیری بیشتری نسبت به گازهایی مانند NO، O_2 یا N_2 دارند که در انحلال با آب واکنش نداده، به‌صورت فیزیکی حل می‌شوند.

۸۹- پاسخ: گزینهٔ ۱ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * شیمی ۱ (فصل ۳)

جوابش اینه

مطابق پدیدهٔ اسمز آب از محیط رقیق یعنی لولهٔ شمارهٔ (۲) به محیط غلیظ یعنی لولهٔ شمارهٔ (۱) حرکت می‌کند و این باعث می‌شود ارتفاع آب در ظرف (۱) بیشتر از ظرف (۲) قرار گیرد.

این عمل تا جایی انجام می‌شود که غلظت محلول‌ها در دو ظرف یکسان شود.

۹۰- پاسخ: گزینهٔ ۴ ▲ مشخصات سؤال: ساده * شیمی ۱ (فصل ۳)

جوابش اینه

با توجه به نمودار به‌دلیل یکسان بودن جرم، تأثیر میزان قطبی بودن بر نقطه جوش سه ماده داده‌شده را می‌توان به‌صورت زیر مقایسه کرد:

$$A < B < C$$

قطبی بودن بیشتر مولکول نشانهٔ انحلال بیشتر در آب، قدرت بیشتر نیروهای بین مولکولی و جهت‌گیری بیشتر در میدان الکتریکی است.

هگزان یک مایع ناقطبی است و ترکیب‌های قطبی در آن انحلال‌پذیری بالایی ندارند.

۹۱- پاسخ: گزینهٔ ۴ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * شیمی ۳ (فصل ۱)

جوابش اینه

آنیون محلول اسیدی و کاتیون محلول بازی نقشی در واکنش خنثی شدن ندارند که در گزینهٔ ۴ برعکس بیان شده است.

۹۲- پاسخ: گزینهٔ ۳ ▲ مشخصات سؤال: ساده * شیمی ۳ (فصل ۱)

جوابش اینه

$Ba(OH)_2$ یک باز قوی و غیر خوراکی است.

۹۳- پاسخ: گزینهٔ ۳ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * شیمی ۳ (فصل ۱)

جوابش اینه

$$\left[H^+\right] = 4\times10^{-4} \Rightarrow pH = -\log 4\times10^{-4} = 3/4$$

$$\left[OH^-\right] = 7\times10^{-5} = \left[H^+\right] = \frac{10^{-14}}{7\times10^{-5}} = \frac{10^{-9}}{7} \Rightarrow pH = 9 + \log 7 = 9/85$$

$$\Delta pH = 9/85 - 3/4 = 6/45$$

۹۴- پاسخ: گزینهٔ ۲ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * شیمی ۳ (فصل ۱)

جوابش اینه

$$M\times0/3 = \frac{1}{60}\,mol \Rightarrow M = \frac{1}{18}\,mol\cdot L^{-1}$$

$$1/8\times10^{-5} = \frac{1}{18}\times\alpha^2 \Rightarrow \alpha^2 = 18\times1/8\times10^{-5} = (1/8)^2\times10^{-4} \Rightarrow \alpha = 1/8\times10^{-2}$$

$$\left[H^+\right] = M\cdot\alpha = 1/8\times10^{-2}\times\frac{1}{18} = 10^{-3} \Rightarrow pH = 3$$

۹۵- پاسخ: گزینهٔ ۳ ▲ مشخصات سؤال: دشوار * شیمی ۳ (فصل ۱)

جوابش اینه

$pH(HNO_3)=0/3 \Rightarrow [H^+]=0/5 \Rightarrow$ مول اولیه اسید $=0/5\times0/1=0/05$

مول $NaOH=\frac{0/4}{40}=0/01$

مول خنثی شده توسط $KOH=0/02 \Rightarrow$ مول اسید باقی‌مانده $=0/05-0/01=0/04$

$KOH: pH=14 \Rightarrow pOH=0 \Rightarrow M=1$

$0/02=1\times V \Rightarrow V_{KOH}=0/02L$ یا $20mL$

۹۶- پاسخ: گزینهٔ ۱ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * شیمی ۳ (فصل ۱)

جوابش اینه

در اسیدهای ضعیف $K_a=\frac{[H^+]^2}{M}$

$$\begin{cases} HA: K_a=\frac{[H^+]_1^2}{M} \\ HA': K_a'=\frac{[H^+]_2^2}{M} \end{cases} \Rightarrow \frac{[H^+]_1^2}{[H^+]_2^2}=100$$

$$\frac{[H^+]_1}{[H^+]_2}=10 \Rightarrow [H^+]_1=10[H^+]_2 \Rightarrow pH_1=pH_2-1$$

۹۷- پاسخ: گزینهٔ ۱ ▲ مشخصات سؤال: دشوار * شیمی ۳ (فصل ۱)

جوابش اینه

$$\begin{cases} pH(HCl)=0/3 \Rightarrow [H^+]=0/5 \\ pH(HNO_3)=1/3 \Rightarrow [H^+]=0/05 \end{cases} \Rightarrow [H^+]_{کل}=\frac{(0/5\times100)+(400\times0/05)}{500}$$

$$\Rightarrow [H^+]=\frac{7}{50} \Rightarrow pH=-\log\frac{7}{50}=1/7-0/85=0/85$$

۹۸- پاسخ: گزینهٔ ۲ ▲ مشخصات سؤال: ساده * شیمی ۳ (فصل ۲)

جوابش اینه

مورد «سوم» درست است.

نباید سراغ اینا بری

مورد «اول»: نادرست؛ باتری الکتریسیته را تولید می‌کند ولی مصرف نمی‌کند.

مورد «دوم»: نادرست؛ الکتروشیمی شاخه‌ای از دانش شیمی است که در بهبود خواص مواد و تأمین انرژی نقش بسزایی دارد.

مورد «چهارم»: نادرست؛ پرکاربردترین شکل انرژی در زندگی امروزی، همچنان انرژی سوخت‌های فسیلی است ولی انرژی الکتریکی پرکاربردترین شکل انرژی و به‌کارگیری فناورهایی هستند که افزایش سطح رفاه و آسایش را برای بشر امروز به‌دنبال داشته‌اند.

۹۹- پاسخ: گزینهٔ ۳ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * شیمی ۳ (فصل ۲)

جوابش اینه

گزینهٔ ۱) درست؛ برخی نافلزها همانند کربن و یا گازهای نجیب توانایی تشکیل آنیون تک اتمی را ندارند.

گزینهٔ ۲) درست

گزینهٔ ۴) درست

نباید سراغ اینا بری

گزینهٔ ۳) نادرست؛ کاتیون‌ها می‌توانند نقش کاهندگی نیز داشته باشند. برای مثال Fe^{2+} با از دست دادن یک الکترون، اکسایش یافته و به Fe^{3+} تبدیل می‌شود.

۱۰۰- پاسخ: گزینهٔ ۴ ▲ مشخصات سؤال: دشوار * شیمی ۳ (فصل ۲)

جوابش اینه

تنها نافلز مایع در دمای اتاق، عنصر برم، (Br_2) است؛ از این رو فلز قلیایی هم‌دوره با آن، عنصر پتاسیم (K) است.

گزینهٔ ۴) درست؛ هر مول KBr از مبادلهٔ یک مول الکترون میان اتم‌های K و Br تشکیل می‌شود.

نباید سراغ اینا بری

گزینهٔ ۱) نادرست؛ فرمول شیمیایی ترکیب یونی حاصل از دو عنصر پتاسیم و برم، KBr است که نسبت کاتیون به آنیون در آن برابر ۱ است.

گزینهٔ ۲) نادرست؛ در یون K^+ که به آرایش گاز نجیب $[Ar]$ می‌رسد فقط لایه‌های اول و دوم الکترونی به طور کامل پر شده‌اند. در یون Br^- که به آرایش گاز نجیب $[Kr]$ می‌رسد، لایهٔ چهارم به‌طور کامل پر نشده است.

گزینهٔ ۳) نادرست

$$Br_2(l) + 2e^- \rightarrow 2Br^-(s)$$

۱۰۱- پاسخ: گزینهٔ ۲ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * شیمی ۳ (فصل ۲)

جوابش اینه

عنصر مورد نظر، $_{16}S$ است.

$$_{16}S: 1s^2\,2s^2\,2p^6\,3s^2\,3p^4 \Rightarrow 2(1+0)+2(2+0)+6(2+1)+2(3+0)+4(3+1)=46$$

مورد الف) نادرست؛ گوگرد با گرفتن دو الکترون به آرایش پایدار گاز نجیب بعد از خود $[_{18}Ar]$ می‌رسد.

مورد ب) درست

مورد پ) نادرست؛ حالت فیزیکی گوگرد، جامد است. عنصر قبل از آن یعنی فسفر نیز جامد است ولی عنصر بعد از آن در جدول تناوبی یعنی کلر، گاز است.

مورد ت) درست؛ گوگرد با کاتیون مس (II) وارد رقابت نمی‌شود و نمی‌تواند الکترون از دست بدهد، پس تغییری در شدت رنگ آبی محلول رخ نمی‌دهد.

۱۰۲- پاسخ: گزینهٔ ۳ ▲ مشخصات سؤال: ساده * شیمی ۳ (فصل ۲)

جوابش اینه

۱) $Al(s) + Au^{3+}(aq) \rightarrow Al^{3+}(aq) + Au(s) \sim 3e^-$

۲) $3Ag(s) + Au^{3+}(aq) \rightarrow 3Ag^+(aq) + Au(s) \sim 3e^-$

۳) $3Zn(s) + 2Au^{3+}(aq) \rightarrow 3Zn^{2+}(aq) + 2Au(s) \sim 6e^-$

۴) $Sc(s) + Au^{3+}(aq) \rightarrow Sc^{3+}(aq) + Au(s) \sim 3e^-$

۱۰۳- پاسخ: گزینهٔ ۲ ▲ مشخصات سؤال: ساده * شیمی ۳ (فصل ۲)

جوابش اینه

$$I)\ Al(s)+3V^{3+}(aq) \rightarrow Al^{3+}(aq)+3V^{2+}(aq)$$
$$II)\ Mg(s)+2HCl(aq) \rightarrow MgCl_2(aq)+H_2(g)$$

گزینهٔ ۲) درست؛ مجموع ضرایب فراورده‌ها در واکنش (II) برابر ۲ و مجموع ضرایب واکنش‌دهنده‌ها در واکنش (I) برابر ۴ است که نسبت $\frac{4}{2}$ برابر ۲ است.

نباید سراغ اینا بری

گزینهٔ ۱) نادرست؛ ضریب گونه اکسنده در واکنش (I) یا $V^{3+}(aq)$ با ضریب گونه کاهنده در واکنش (II) یا $Mg(s)$ برابر نیست.
گزینهٔ ۳) نادرست؛ با توجه به واکنش (I) قدرت کاهندگی فلز Al بیشتر از فلز V است.
گزینهٔ ۴) نادرست؛ تغییر دمای مخلوط دو واکنش به تفاوت قدرت کاهندگی و اکسندگی دو گونه شرکت‌کننده در واکنش بستگی دارد که هرچه کاهنده و اکسنده قوی‌تر باشند، تغییر دما بیشتر است؛ بنابراین در واکنش‌های داده‌شده نمی‌توان قدرت کاهندگی یا اکسندگی گونه‌ها را مقایسه کرد.

۱۰۴- پاسخ: گزینهٔ ۲ ▲ مشخصات سؤال: دشوار * شیمی ۳ (فصل ۲)

جوابش اینه

معادلهٔ موازنه شده واکنش چنین است:

$$2Al(s)+3Cu^{2+}(aq) \rightarrow 2Al^{3+}(aq)+3Cu(s)$$

با توجه به معادله ۲ مول از اتم‌های Al از تیغه جدا شده و به‌ازای آن‌ها ۳ مول Cu بر سطح تیغه می‌نشینند، پس تغییر جرم تیغه به‌ازای ۳ مول مس برابر است با:

$$\text{تغییر جرم تیغه} = -(2\times27)+(3\times64)=138\,g$$

بنابراین جرم تیغه افزایش می‌یابد.

$$\frac{(0/500\,L\times2M\times\frac{80}{100})mol\,Cu}{3\,mol\,Cu}=\frac{?\,g}{\text{تغییر جرم}\,138\,g}\Rightarrow ?=36/8$$

$$\text{درصد تغییر جرم تیغه}=\frac{36/8}{40}\times100=\%92$$

۱۰۵- پاسخ: گزینهٔ ۴ ▲ مشخصات سؤال: دشوار * شیمی ۳ (فصل ۲)

جوابش اینه

معادلهٔ موازنه شده واکنش چنین است.

$$Zn(s)+2HF(aq) \rightarrow ZnF_2(aq)+H_2(g)\sim 2e^-$$

pH محلول HF تأثیری در حل سؤال ندارد؛ زیرا واکنش به شکل یک‌طرفه و برگشت‌ناپذیر انجام می‌شود و تمام غلظت اسید با فلز وارد واکنش می‌شود. از سویی با توجه به اینکه در مدت‌زمان معین ولی نامعلوم شمار الکترون‌های مبادله‌شده گزارش شده است محاسبات را براساس الکترون‌ها انجام می‌دهیم؛ زیرا مشخص نیست که تغییر غلظت $HF(aq)$ چند مولار بوده است.

$$H_2\sim 2e^-$$

$$\frac{?\,g}{2g}=\frac{9/632\times10^{22}}{2\times6/02\times10^{23}}\Rightarrow ?=0/16$$