

ریاضیات (۴۰ سؤال)

۱ - پاسخ: گزینه ۱

▲ مشخصات سؤال: ساده * حسابان (فصل ۱ ◀ درس ۴)

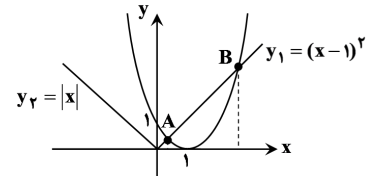


- اگر $f(x)$ و $g(x)$ دو تابع باشند، طول نقاط تلاقی نمودارهای این دو تابع جواب های معادله $f(x)=g(x)$ است و برعکس، هر جواب این معادله طول یکی از نقاط تلاقی این دو نمودار است.
- این روش حل معادله را، که از طریق آن تعداد جواب ها و مقدار تقریبی (و گاهی دقیق) جواب ها قابل تشخیص است، روش هندسی (نموداری) حل معادلات می نامیم.

$$|a| = \begin{cases} a & a \geq 0 \\ -a & a < 0 \end{cases}$$



با تغییر ظاهر معادله، با روش هندسی معادله را حل می کنیم:



$$x^2 = 2x + |x| - 1 \Rightarrow x^2 - 2x + 1 = |x| \Rightarrow \begin{cases} y_1 = (x-1)^2 \\ y_2 = |x| \end{cases}$$

با توجه به نمودار، دو تابع y_1 و y_2 در نقاط A به طول x_A و B به طول x_B متقاطع هستند، پس x_A و x_B جواب های معادله $y_1 = y_2$ هستند و x_A جواب کوچک تر معادله است و با توجه به شکل $x_A \in (0,1)$ است.
این جوری هم میشه:

معادله را در دو حالت $x \geq 0$ و $x < 0$ به صورت جبری حل می کنیم.

$$x \geq 0 \Rightarrow x^2 = 2x + x - 1 \Rightarrow x^2 - 3x + 1 = 0 \Rightarrow x = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}$$

$$x < 0 \Rightarrow x^2 = 2x - x - 1 \Rightarrow x^2 - x + 1 = 0 \Rightarrow \Delta = -3 < 0$$

هر دو جواب $\frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}$ مثبت بوده و قابل قبول هستند. جواب کوچک تر معادله $\frac{3 - \sqrt{5}}{2}$ است که با توجه به مقدار تقریبی $2 < \sqrt{5} < 3$ عددی بین صفر و یک است.

۲ - پاسخ: گزینه ۴

▲ مشخصات سؤال: ساده * حسابان (فصل ۱ - درس ۳)



- در مستطیل طلایی، نسبت مجموع طول و عرض به طول مستطیل برابر با نسبت طول به عرض مستطیل است.
- نسبت طول به عرض در مستطیل طلایی برابر $\frac{\sqrt{5}+1}{2}$ است.

$$2\sqrt{5} + \frac{1}{2}b$$



طول و عرض مستطیل اولیه را $2\sqrt{5}$ و b فرض کنید. پس مطابق مفروضات مسأله مستطیل روبه رو یک مستطیل طلایی است. می دانیم نسبت طول و عرض در مستطیل طلایی برابر $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ است، بنابراین:

$$\frac{2\sqrt{5} + \frac{1}{2}b}{b} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \Rightarrow \frac{2\sqrt{5}}{b} + \frac{1}{2} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \Rightarrow \frac{2\sqrt{5}}{b} = \frac{\sqrt{5}}{2} \Rightarrow b = 4$$

۳ - پاسخ: گزینه ۲

▲ مشخصات سؤال: متوسط * حسابان (فصل ۱ - درس ۴)

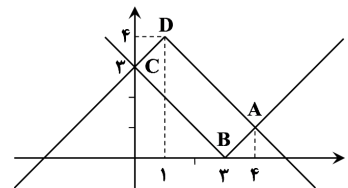


$$-|a| = \begin{cases} a & a \geq 0 \\ -a & a < 0 \end{cases}$$



نمودار دو تابع را رسم می کنیم:

ناحیه ای که مساحت آن خواسته شده، چهارضلعی ABCD است که با توجه به قائمه بودن دو زاویه \hat{B} و \hat{D} و موازی بودن اضلاع روبه رو، یک مستطیل است. می دانیم $B(3,0)$ ، $C(0,3)$ و $D(1,4)$. اکنون با به دست آوردن طول اضلاع مستطیل مساحت آن را پیدا می کنیم:



$$\begin{cases} CD = \sqrt{(4-3)^2 + (1-0)^2} = \sqrt{2} \\ BC = \sqrt{(3-0)^2 + (0-3)^2} = 3\sqrt{2} \end{cases} \Rightarrow S = CD \cdot BC = 6$$

۴ - پاسخ: گزینه ۳

▲ مشخصات سؤال: متوسط * حسابان (فصل ۱ ◀ درس ۳)



- برای حل معادلات شامل عبارات گویا، با ضرب طرفین معادله در کوچک ترین مضرب مشترک مخرج کسرها و ساده کردن عبارت جبری به دست آمده، معادله را حل می کنیم. جواب به دست آمده نباید مخرج هیچ یک از کسرها را صفر کند؛ زیرا کسر تعریف نشده می شود. همچنین ممکن است برخی از جواب ها با شرایط مسئله در محیط پیرامونی مطابقت نداشته باشند که این جواب ها نیز مورد قبول نیستند.



مخرج کسرها را تجزیه می کنیم و دو طرف معادله را در ک.م.م مخرج ها ضرب می کنیم:

$$\frac{a}{x^2-2x} = \frac{x-1}{x^2-4} - \frac{x+1}{x^2+2x} \Rightarrow \frac{a}{x(x-2)} = \frac{x-1}{(x-2)(x+2)} - \frac{x+1}{x(x+2)}$$

$$\frac{\times x(x-2)(x+2)}{\times x(x-2)(x+2)} \rightarrow a(x+2) = x(x-1) - (x-2)(x+1)$$

$$\Rightarrow ax+2a = x^2-x-x^2+x+2 \Rightarrow ax+2a-2=0$$

از آنجا که $a \neq 0$ ، پس معادله درجه اول به دست آمده همواره ریشه دارد و مقدار این ریشه برابر است با:

$$a \neq 0 \Rightarrow x = \frac{2-2a}{a} = \frac{2}{a} - 2$$

برای اینکه معادله گویای داده شده ریشه حقیقی نداشته باشد، باید $x = \frac{2}{a} - 2$ برابر با یکی از ریشه های ک.م.م مخرج ها باشد، پس داریم:

$$x(x-2)(x+2) = 0 \Rightarrow x = 0, 2, -2$$

$$\begin{cases} \frac{2}{a} - 2 = 0 \Rightarrow a = 1 \\ \frac{2}{a} - 2 = 2 \Rightarrow a = \frac{1}{2} \\ \frac{2}{a} - 2 = -2 \Rightarrow \frac{2}{a} = 0 \text{ غیرممکن} \end{cases}$$

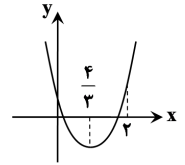
پس مجموع مقادیر ممکن برابر a برابر $\frac{3}{2} = 1 + \frac{1}{2}$ است.

۵ - پاسخ: گزینه ۳

▲ مشخصات سؤال: متوسط * ریاضی (فصل ۴ ◀ درس ۲)



ابتدا معادله را به صورت استاندارد در می آوریم: $x(3x-8) = m \Rightarrow 3x^2 - 8x - m = 0$



رأس سهمی $f(x) = 3x^2 - 8x - m$ به صورت $x = -\frac{b}{2a} = \frac{8}{6} = \frac{4}{3}$ است. نمودار فرضی این سهمی به صورت مقابل است:

دو شرط زیر باید برقرار باشد تا عدد ۲ بعد از هر دو صفر تابع باشد:

$$\text{شرط ۱: } f(2) > 0 \Rightarrow 12 - 16 - m > 0 \Rightarrow m < -4$$

$$\text{شرط ۲: } \Delta > 0 \Rightarrow 64 + 12m > 0 \Rightarrow m > -\frac{16}{3}$$

اشتراک دو شرط به دست آمده $-\frac{16}{3} < m < -4$ است. تنها عدد صحیح ۵- در این محدوده قرار دارد.



معادله $3x^2 - 8x - m = 0$ را حل می کنیم:

$$\Delta = (-8)^2 - 4 \times 3 \times (-m) = 64 + 12m \quad x = \frac{-(-8) \pm \sqrt{64 + 12m}}{2 \times 3} = \frac{8 \pm \sqrt{64 + 12m}}{6}$$

معادله باید دو ریشه متمایز داشته باشد و ریشه بزرگ تر این معادله باید کوچک تر از ۲ باشد، پس:

$$\begin{cases} 64 + 12m > 0 \Rightarrow 12m > -64 \Rightarrow m > -\frac{16}{3} \\ \frac{8 + \sqrt{64 + 12m}}{6} < 2 \Rightarrow \sqrt{64 + 12m} < 6 \times 2 - 8 \Rightarrow 64 + 12m < 4^2 \Rightarrow 12m < -48 \Rightarrow m < -4 \end{cases}$$

بنابراین $-\frac{16}{3} < m < -4$ و تنها عدد صحیح واقع در این محدوده $m = -5$ است.

۶ - پاسخ: گزینه ۱

▲ مشخصات سؤال: متوسط * حسابان (فصل ۱ ◀ درس ۳)



به طور کلی در هر معادله درجه دوم $ax^2 + bx + c = 0$ اگر جمع ریشه ها S و ضرب ریشه ها P باشد، این روابط برقرار است.

$$S = -\frac{b}{a}, P = \frac{c}{a}$$

به طور کلی اگر α و β دو عدد دلخواه و $S = \alpha + \beta$ و $P = \alpha\beta$ باشند، آنگاه α و β جواب های معادله $x^2 - Sx + P = 0$ هستند.



ابتدا دو طرف تساوی را در $x(x-2)(x+2)$ ضرب می کنیم:

$$\frac{2}{x} + \frac{1}{x^2 - 4} = \frac{3}{x^2 + 2x} \xrightarrow{\times x(x-2)(x+2)} 2(x-2)(x+2) + x = 3(x-2) \Rightarrow 2x^2 - 8 + x = 3x - 6 \Rightarrow x^2 - x - 1 = 0$$

α و β ریشه های این معادله هستند؛ بنابراین $\alpha + \beta = -\frac{b}{a} = 1$ و $\alpha\beta = \frac{c}{a} = -1$ است. اکنون، مجموع و حاصل ضرب ریشه ها را برای معادله جدید

محاسبه می کنیم:

$$\begin{cases} S = \frac{2}{\alpha} + \frac{2}{\beta} = \frac{2(\alpha + \beta)}{\alpha\beta} = \frac{2 \times 1}{-1} = -2 \\ P = \frac{2}{\alpha} \times \frac{2}{\beta} = \frac{4}{\alpha\beta} = \frac{4}{-1} = -4 \end{cases}$$

بنابراین معادله جدید به صورت روبه رو است: $x^2 - Sx + P = 0 \Rightarrow x^2 + 2x - 4 = 0$

۷ - پاسخ: گزینه ۱

▲ مشخصات سؤال: متوسط * حسابان (فصل ۱ - درس ۳)



- برخی از معادلات که دارای عبارت های رادیکالی از مجهول هستند را معادلات گنگ می نامند. برای حل آن ها با به توان رساندن طرفین معادله (و در صورت لزوم تکرار این عمل) و ساده کردن به معادله ای بدون رادیکال می رسیم که آن را حل می کنیم، جواب های به دست آمده باید در معادله اصلی آزمایش شوند، زیرا عملیات توان رسانی ممکن است جواب های اضافی تولید کند.



معادله را برحسب a حل می کنیم:

$$\sqrt{x+a} = a - \sqrt{x} \Rightarrow x+a = a^2 - 2a\sqrt{x} + x \Rightarrow a = a^2 - 2a\sqrt{x} \xrightarrow[\text{طرفین تقسیم بر } a]{a \neq 0} 1 = a - 2\sqrt{x}$$

$$\Rightarrow \sqrt{x} = \frac{a-1}{2} \Rightarrow x = \left(\frac{a-1}{2}\right)^2$$

با توجه به نوع بیان سؤال، گزینه ها را بررسی می کنیم. از بین گزینه ها، فقط $a = 21$ برای x جواب صحیح و زوج تولید می کند.

a	۲۱	۲۲	۲۳	۲۴
x	۱۰۰	$(10/5)^2$	۱۲۱	$(11/5)^2$

۸ - پاسخ: گزینه ۴

▲ مشخصات سؤال: متوسط * حسابان (فصل ۱ - درس ۲)



$$|a| = \begin{cases} a & a \geq 0 \\ -a & a < 0 \end{cases}$$



ابتدا معادله سهمی را به دست می آوریم. ۲- و ۳ صفرهای تابع هستند، پس:

$$f(x) = a(x+2)(x-3)$$

$$f(0) = -1 \Rightarrow a \times 2 \times (-3) = -1 \Rightarrow a = \frac{1}{6}$$

اکنون به حل نامعادله مورد نظر در دو حالت $x > 0$ و $x < 0$ می پردازیم:

$$۱) f(x) < \frac{x}{|x|} \xrightarrow{x > 0} f(x) < 1 \Rightarrow \frac{1}{6}(x+2)(x-3) < 1 \Rightarrow \frac{1}{6}(x^2 - x - 6) < 1 \Rightarrow x^2 - x - 6 < 6$$

$$\Rightarrow x^2 - x - 12 < 0 \Rightarrow (x-4)(x+3) < 0 \Rightarrow -3 < x < 4 \xrightarrow{\text{با شرط } x > 0} 0 < x < 4$$

$$۲) f(x) < \frac{x}{|x|} \xrightarrow{x < 0} f(x) < -1 \Rightarrow \frac{1}{6}(x+2)(x-3) < -1 \Rightarrow \frac{1}{6}(x^2 - x - 6) < -1 \Rightarrow x^2 - x - 6 < -6$$

$$\Rightarrow x^2 - x < 0 \Rightarrow x(x-1) < 0 \Rightarrow 0 < x < 1 \xrightarrow{\text{با شرط } x < 0} \text{این نامعادله جواب ندارد.}$$

پس مجموعه جواب نامعادله، همان بازه (۰,۴) است.

۹ - پاسخ: گزینه ۱

▲ مشخصات سؤال: دشوار * ریاضی (فصل ۴ ◀ درس ۳)



- اگر $a < b$ و a و b هم علامت باشند، آنگاه

$$\frac{1}{a} > \frac{1}{b}$$



ابتدا از دو طرف نامساوی ها، ۲ واحد کم می کنیم:
با توجه به مثبت بودن عبارت ها (همگی از یک بزرگ ترند)، می توانیم نامساوی ها را برعکس کنیم:

$$\frac{1}{1} > \frac{x+1}{-3} > \frac{1}{a-2} \Rightarrow -3 < x+1 < \frac{-3}{a-2} \Rightarrow -4 < x < \frac{-3}{a-2} - 1$$

مجموعه جواب نامعادله به صورت $(2b, b)$ است، پس $-4 = 2b$ و $\frac{-3}{a-2} - 1 = b$ است؛ بنابراین $b = -2$ و $a = 5$ است و در نتیجه $a - b = 7$ است.

۱۰ - پاسخ: گزینه ۴

▲ مشخصات سؤال: ساده * حسابان ۲ (فصل ۱ ◀ درس ۱)



با توجه به گزینه ها، تابع جدید را $g(x) = af(bx)$ فرض می کنیم:

$$\begin{cases} f(2) = 3 \\ g(2) = 2 \Rightarrow 2 = af(2b) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2b = 2 \Rightarrow b = \frac{2}{3} \\ \frac{2}{a} = 3 \Rightarrow a = \frac{2}{3} \end{cases}$$

پس گزینه ۴ درست است.

۱۱ - پاسخ: گزینه ۲

▲ مشخصات سؤال: ساده * حسابان ۲ (فصل ۱ ◀ درس ۲)



- سهمی $y = ax^2 + bx + c$ در دو طرف رأس خود $(-\frac{b}{2a})$ اکیداً یکنوا است.



ضابطه تابع g را تشکیل می دهیم:

$$g(x) = f(x+1) + f(x-1) = 2(x+1)^2 - (x+1) + 1 + 2(x-1)^2 - (x-1) + 1$$

$$= 2x^2 + 4x + 2 - x - 1 + 1 + 2x^2 - 4x + 2 - x + 1 + 1 = 4x^2 - 2x + 6$$

سهمی g در دو طرف رأس سهمی (یعنی $x_S = -\frac{b}{2a} = \frac{1}{4}$) یکنواست. در بین گزینه های داده شده، فقط گزینه ۲ یعنی $(-\frac{1}{4}, -2)$ در یک طرف رأس قرار دارد و در سایر گزینه ها رأس درون آن بازه قرار دارد.

۱۲ - پاسخ: گزینه ۴

▲ مشخصات سؤال: ساده * حسابان ۲ (فصل ۱ ◀ درس ۱)



- برای رسم نمودار $y = f(x) + k$ ، اگر $k > 0$ باشد، کافی است نمودار تابع $f(x)$ را k واحد در راستای قائم به سمت بالا انتقال دهیم و برای $k < 0$ این انتقال به سمت پایین انجام می شود.

- برای رسم نمودار $y = f(x+k)$ ، اگر $k > 0$ باشد، کافی است نمودار تابع $f(x)$ را k واحد در جهت افقی به سمت چپ انتقال دهیم و برای $k < 0$ ، این انتقال به اندازه $|k|$ واحد به سمت راست انجام می شود.



قرینه تابع f نسبت به محور عرض ها همان $f(-x)$ است:

$$y = f(-x) = 2 + \frac{1}{x}$$

از ۳ واحد انتقال به راست و k واحد پایین، به تابع زیر می رسیم:

$$y = f(x-3) - k = 2 + \frac{1}{x-3} - k$$

نقطه ای به طول یک، روی f به صورت $A(1,1)$ است (زیرا $f(1) = 1$). با توجه به اینکه نقطه A محل برخورد دو تابع است، این نقطه در تابع نهایی

به دست آمده نیز صدق می کند:

$$y = 2 + \frac{1}{x-3} - k \xrightarrow{(1,1)} 1 = 2 + \frac{1}{-2} - k \Rightarrow k = \frac{1}{4}$$

۱۳ - پاسخ: گزینه ۴

▲ مشخصات سؤال: متوسط * حسابان ۲ (فصل ۱ ◀ درس ۲)



- باقی مانده تقسیم چندجمله ای $f(x)$ بر $ax+b$ عبارت است از $r(x) = f\left(\frac{-b}{a}\right)$.



چندجمله ای f بر $x^2 - x - 2 = (x-2)(x+1)$ بخش پذیر است، پس باقی مانده تقسیم $f(x)$ بر $x+1$ برابر صفر و بر $x-2$ نیز برابر صفر است؛ یعنی $f(-1)$ و $f(2)$ ، هر دو برابر صفر هستند.

$$\begin{cases} f(-1) = 0 \\ f(2) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1 + a - b - 8 = 0 \\ 16 + 2a + 2b - 8 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a - b = 7 \\ 2a + b = -4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = -6 \end{cases}$$

هدف سؤال، محاسبه باقی مانده تقسیم $f(3x-6)$ بر $x-1$ است، پس به جای x ، عدد ۱ را جایگزین می کنیم تا باقی مانده به دست بیاید:

$$r = f(3(-6)) = f(-2) = 81 + 9a - 2b - 8 = 81 + 9 + 18 - 8 = 100$$

۱۴ - پاسخ: گزینه ۳

▲ مشخصات سؤال: متوسط * حسابان ۲ (فصل ۱ ◀ درس ۱)

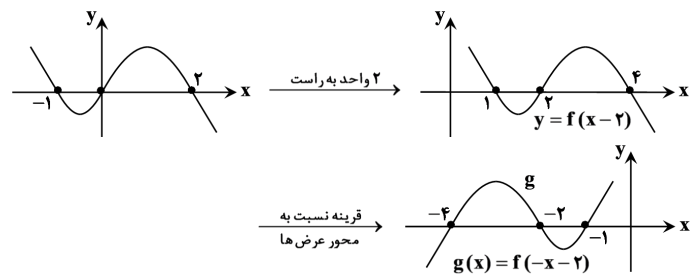


- برای رسم نمودار $y = f(x) + k$ ، اگر $k > 0$ باشد، کافی است نمودار تابع $f(x)$ را k واحد در راستای قائم به سمت بالا انتقال دهیم و برای $k < 0$ این انتقال به سمت پایین انجام می شود.

- اگر طول نقاط تابع $y = f(x)$ را قرینه کنیم، نقاط تابع $y = f(-x)$ به دست می آیند. بنابراین نمودار تابع $y = f(-x)$ قرینه نمودار تابع $y = f(x)$ نسبت به محور عرض ها است.



ابتدا نمودار تابع g را رسم می کنیم:



اکنون، عبارت زیر رادیکال را تعیین علامت می کنیم:

	-۴	-۲	-۱	۰	۲	
$f(x)$	+	+	+	-	+	-
$g(x)$	-	+	-	+	+	+
$\frac{f(x)}{g(x)}$	-	+	-	-	+	-
	تن		تن	تن		

بنابراین دامنه تابع که از حل نامعادله $\frac{f(x)}{g(x)} \geq 0$ به دست می آید، به صورت $(-۲, -۴] \cup [۰, ۲]$ است. این دامنه شامل ۴ عدد صحیح، ۱، ۲ و ۳- است.

۱۵ - پاسخ: گزینه ۲

▲ مشخصات سؤال: متوسط * حسابان ۲ (فصل ۱ - درس ۲)



- اگر f یک تابع یک به یک باشد، برای به دست آوردن نمودار تابع f^{-1} کافی است قرینه نمودار تابع f را نسبت به خط $y=x$ (نیمساز ربع اول و سوم) به دست آوریم.

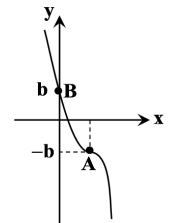
- باقی مانده تقسیم چندجمله ای $f(x)$ بر $ax+b$ عبارت است از:

$$r(x) = f\left(\frac{-b}{a}\right)$$



با قرینه کردن نمودار f^{-1} نسبت به نیمساز ربع اول و سوم، نمودار تابع f به صورت زیر به دست می آید:

از طرفی با توجه به ضابطه $f(x) = -(x-2)^3 + a$ ، طول نقطه A (که در آن خط مماس افقی است) برابر ۲ می باشد. پس تابع f از دو نقطه $A(2, -b)$ و $B(0, b)$ می گذرد.



$$\begin{cases} f(0) = b \\ f(2) = -b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a + a = b \\ a = -b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = -4 \\ b = 4 \end{cases}$$

باقی مانده تقسیم $f(x) = -(x-2)^3 - 4$ بر $x-4$ برابر $f(4)$ است:

$$f = f(4) = -(4-2)^3 - 4 = -8 - 4 = -12$$

۱۶ - پاسخ: گزینه ۱

▲ مشخصات سؤال: متوسط * حسابان ۲ (فصل ۱ - درس ۲)



- قضیه تقسیم برای چندجمله ای ها: اگر $f(x)$ و $p(x)$ چندجمله ای باشند و درجه $p(x)$ از صفر بزرگ تر باشد، آنگاه چندجمله ای های منحصر به فرد $q(x)$ و $r(x)$ وجود دارند به طوری که:

$$f(x) = p(x)q(x) + r(x)$$

که در آن $r(x) = 0$ یا درجه $r(x)$ از درجه $p(x)$ کمتر است.

- باقی مانده تقسیم چندجمله ای $f(x)$ بر $ax+b$ عبارت است از:

$$r(x) = f\left(\frac{-b}{a}\right)$$

- در چندجمله ای $f(x)$ ، مجموع ضرایب f برابر $f(1)$ است؛ زیرا:

$$f(x) = ax^n + bx^{n-1} + \dots + c \Rightarrow f(1) = a + b + \dots + c$$



ابتدا باقی مانده را به دست می آوریم:

$$x+1=0 \Rightarrow x=-1$$

$$r = f(-1) \Rightarrow r = (-1)^4 - (-1)^2 + 3(-1) - 10(-1) + 3 \\ \Rightarrow r = 1 - 1 + 3 + 10 + 3 \Rightarrow r = 16$$

اکنون رابطه تقسیم را برای تقسیم $f(x)$ بر $x+1$ می نویسیم:

$$x^4 - x^2 + 3x^4 - 10x + 3 = (x+1)q(x) + 16$$

برای به دست آوردن مجموع ضرایب چندجمله ای $q(x)$ کافی است $q(1)$ را به دست آوریم، پس $x=1$ را در اتحاد فوق جای گذاری می کنیم:

$$x=1 \Rightarrow 1 - 1 + 3 - 10 + 3 = 2q(1) + 16 \Rightarrow q(1) = -10$$

۱۷ - پاسخ: گزینه ۴

▲ مشخصات سؤال: دشوار * حسابان ۲ (فصل ۱۱ درس ۲)



- قضیه تقسیم برای چندجمله ای ها: اگر $f(x)$ و $p(x)$ چندجمله ای باشند و درجه $p(x)$ از صفر بزرگ تر باشد، آنگاه چندجمله ای های منحصربه فرد $q(x)$ و $r(x)$ وجود دارند به طوری که:

$$f(x) = p(x)q(x) + r(x)$$

که در آن $r(x) = 0$ یا درجه $r(x)$ از درجه $p(x)$ کمتر است.

- باقی مانده تقسیم چندجمله ای $f(x)$ بر $ax+b$ عبارت است از $r(x) = f\left(\frac{-b}{a}\right)$.



ابتدا مقسوم علیه را برابر صفر قرار می دهیم: $x^3 + 1 = 0 \Rightarrow x^3 = -1$

برای تعیین باقی مانده کافی است در عبارت مقسوم، به جای x^3 ، -1 را قرار دهیم:

$$x^{100} + x^{50} + 1 = (x^3)^{33} \cdot x + (x^3)^{16} \cdot x^2 + 1 \xrightarrow{x^3 = -1} r(x) = (-1)^{33}x + (-1)^{16}x^2 + 1 = x^2 - x + 1$$



عبارت مقسوم را به صورت $x^3 + 1$ تجزیه می کنیم. می دانیم

اگر n زوج باشد، $x^n - a^n$ بر $x+a$ بخش پذیر است و اگر n فرد

باشد، $x^n + a^n$ بر $x+a$ بخش پذیر است.

$$\begin{aligned} x^{100} + x^{50} + 1 &= x^{100} + x - x + x^{50} - x^2 + x^2 + 1 = x(x^{99} + 1) + x^2(x^{48} - 1) + x^2 - x + 1 \\ &= x((x^3)^{33} + 1) + x^2((x^3)^{16} - 1) + x^2 - x + 1 \end{aligned}$$

عبارت $x^{99} + 1$ بر $x^3 + 1$ و عبارت $x^{48} - 1$ بر $x^3 + 1$ بخش پذیر هستند، پس باقی مانده برابر $x^2 - x + 1$ است.

۱۸ - پاسخ: گزینه ۲

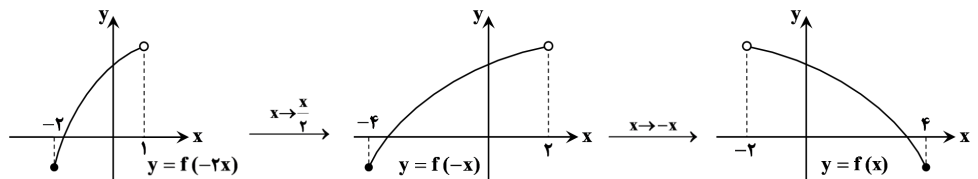
▲ مشخصات سؤال: دشوار * حسابان ۲ (فصل ۱۱ درس ۲)



- تابع f را در یک مجموعه، اکیداً نزولی می گوئیم، اگر برای هر دو مقدار a و b در این مجموعه که $a < b$ ، آنگاه $f(a) > f(b)$. در فاصله ای که یک تابع اکیداً نزولی است، با حرکت روی نمودار (از چپ به راست)، همواره روبه پایین خواهیم رفت.



ابتدا طول نقاط نمودار داده شده را دو برابر می کنیم و سپس نمودار را نسبت به محور عرض ها قرینه می کنیم تا نمودار $f(x)$ به دست آید:



با توجه به نمودار $y=f(x)$ ؛ واضح است که تابع f با دامنه $D = (-2, 4]$ اکیداً نزولی است. حال نامعادله را حل می کنیم:

$$f(2x-2) \leq f(2-x) \xrightarrow{\text{اکیداً نزولی}} 2x-2 \geq 2-x \Rightarrow x \geq 1 \quad (1)$$

از طرفی:

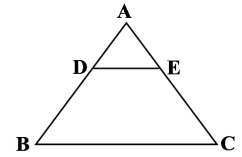
$$D_f = (-2, 4] \Rightarrow \begin{cases} -2 < 2x-2 \leq 4 \Rightarrow 0 < 2x \leq 6 \Rightarrow 0 < x \leq 3 \quad (2) \\ -2 < 2-x \leq 4 \Rightarrow -4 < -x \leq 2 \Rightarrow -2 \leq x < 4 \quad (3) \end{cases}$$

جواب نامعادله از اشتراک این ۳ شرط به دست می آید:

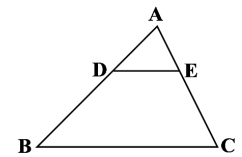
$$(1) \cap (2) \cap (3) \Rightarrow x \in [1, 2]$$

۱۹ - پاسخ: گزینه ۱

▲ مشخصات سؤال: ساده * هندسه (فصل ۲ ◀ درس ۲)



- (قضیه تالس): هرگاه در یک مثلث، خطی موازی یکی از اضلاع، دو ضلع دیگر مثلث را در دو نقطه قطع کند، روی آن دو ضلع، چهار پاره خط جدا می کند که اندازه های آن ها

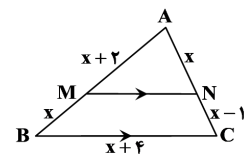


$$\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}$$

تشکیل یک تناسب را می دهند. به طور خلاصه هرگاه مانند شکل روبه رو داشته باشیم $DE \parallel BC$ ، آن گاه:

- (تعمیم قضیه تالس): اگر خطی دو ضلع مثلثی را در دو نقطه قطع کند و با ضلع سوم آن موازی باشد، مثلثی پدید می آید که اندازه ضلع های آن با اندازه ضلع های مثلث اصلی متناسب اند؛ مثلاً در شکل روبه رو داریم:

$$DE \parallel BC \Rightarrow \frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC} = \frac{DE}{BC}$$

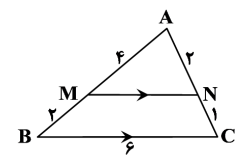


$MN \parallel BC$

در شکل مقابل، MNCB دوزنقه است، پس: بر طبق قضیه تالس در مثلث ABC، داریم:

$$\frac{AM}{MB} = \frac{AN}{NC} \Rightarrow \frac{x+2}{x} = \frac{x}{x-1}$$

$$(x+2)(x-1) = x^2 \Rightarrow x^2 + x - 2 = x^2 \Rightarrow x = 2$$



حال از تعمیم قضیه تالس استفاده می کنیم:

$$\frac{AN}{AC} = \frac{MN}{BC} \Rightarrow \frac{2}{6} = \frac{MN}{6} \Rightarrow MN = 4$$

خواسته سؤال برابر است با:

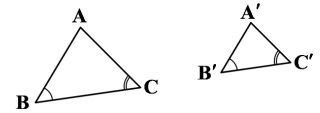
$$\frac{\text{محیط } \triangle ABC}{\text{محیط } \triangle MNCB} = \frac{3+6+6}{4+1+6+2} = \frac{15}{13}$$

۲۰ - پاسخ: گزینه ۲

▲ مشخصات سؤال: متوسط * هندسه (فصل ۲ - درس ۴)



- هرگاه دو زاویه از مثلثی، با دو زاویه از مثلث دیگر هم اندازه باشند، دو مثلث متشابه اند.



$$(\hat{B} = \hat{B}', \hat{C} = \hat{C}' \Rightarrow \triangle ABC \sim \triangle A'B'C')$$

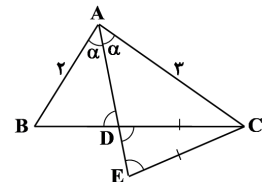
- اگر مثلث های $A'B'C'$ و ABC متشابه باشند و نسبت تشابه آن ها k باشد $(\frac{A'B'}{AB} = \frac{A'C'}{AC} = \frac{B'C'}{BC} = k)$ ، آن گاه:

نسبت مساحت های دو مثلث برابر توان دوم نسبت تشابه یعنی k^2 است.

$$\frac{S_{A'B'C'}}{S_{ABC}} = k^2$$



طبق شکل مقابل، در مثلث CDE داریم:



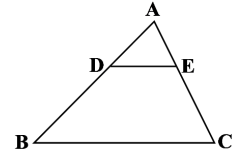
$$\left. \begin{array}{l} CD = CE \Rightarrow \hat{CDE} = \hat{CED} \\ \hat{CDE} = \hat{ADB} : \text{متقابل به رأس} \end{array} \right\} \Rightarrow \hat{CED} = \hat{ADB}$$

دو مثلث ABD و ACE به حالت تساوی دو زاویه متشابه اند. پس نسبت مساحت های آن ها، مجذور نسبت تشابه است:

$$\left. \begin{array}{l} \hat{BAD} = \hat{EAC} \\ \hat{CED} = \hat{ADB} \end{array} \right\} \Rightarrow \triangle ABD \sim \triangle ACE \Rightarrow \frac{S_{\triangle ACE}}{S_{\triangle ABD}} = \left(\frac{AC}{AB}\right)^2 = \left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{9}{4} = 2.25$$

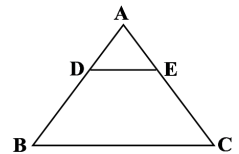
۲۱ - پاسخ: گزینه ۴

▲ مشخصات سؤال: متوسط * هندسه (فصل ۲ ◀ درس ۲)



- (تعمیم قضیه تالس): اگر خطی دو ضلع مثلثی را در دو نقطه قطع کند و با ضلع سوم آن موازی باشد، مثلثی پدید می آید که اندازه ضلع های آن با اندازه ضلع های مثلث اصلی متناسب اند؛ مثلاً در شکل روبه رو داریم:

$$DE \parallel BC \Rightarrow \frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC} = \frac{DE}{BC}$$



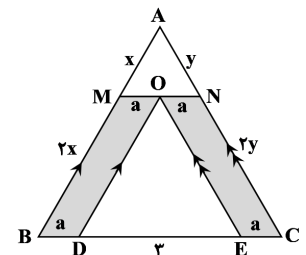
- (عکس قضیه تالس): اگر خطی دو ضلع مثلثی را قطع کند و روی آن ها، چهار پاره خط با اندازه های متناظراً متناسب جدا کند، آنگاه با ضلع سوم مثلث موازی است.

$$\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC} \Rightarrow DE \parallel BC$$



ابتدا با توجه به فرض سؤال، شکل زیر را رسم می کنیم.

طبق عکس قضیه تالس داریم:



$$\frac{AM}{MB} = \frac{AN}{NC} = \frac{1}{2} \Rightarrow MN \parallel BC$$

همچنین با توجه به فرض، چهارضلعی های سایه خورده متوازی الاضلاع هستند و اضلاع روبه روی آن ها برابرند، فرض می کنیم $OM = ON = a$ ، داریم:

$$BD = OM = a, EC = ON = a$$

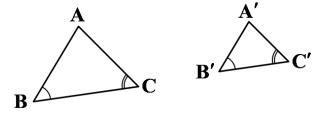
حال طبق تعمیم تالس، داریم:

$$MN \parallel BC \Rightarrow \frac{MN}{BC} = \frac{AM}{AB} \Rightarrow \frac{2a}{2a+2} = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow 6a = 2a + 2 \Rightarrow a = \frac{2}{4} \Rightarrow MN = 2a = \frac{2}{2} = 1/5$$

۲۲ - پاسخ: گزینه ۳

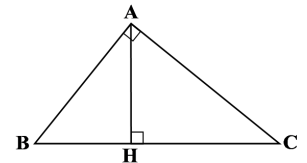
▲ مشخصات سؤال: متوسط * هندسه (فصل ۲ ◀ درس ۴)



- هرگاه دو زاویه از مثلثی، با دو زاویه از مثلث دیگر هم اندازه باشند، دو مثلث متشابه اند.

$$(\hat{B} = \hat{B}', \hat{C} = \hat{C}' \Rightarrow \triangle ABC \sim \triangle A'B'C')$$

- در مثلث قائم الزاویه ABC ($\hat{A} = 90^\circ$) روابط مهم زیر برقرارند. این رابطه ها را روابط طولی می نامیم؛ زیرا با اندازه های اضلاع سروکار دارند:



۱) $AB^2 = BC \cdot BH$

۲) $AC^2 = BC \cdot CH$

۳) $AB^2 + AC^2 = BC^2$

۴) $AH^2 = BH \cdot CH$

۵) $AH \times BC = AB \times AC$

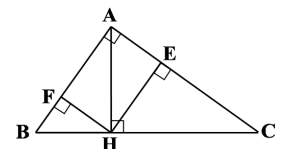
- اگر مثلث های $A'B'C'$ و ABC متشابه باشند و نسبت تشابه آن ها k باشد $(\frac{A'B'}{AB} = \frac{A'C'}{AC} = \frac{B'C'}{BC} = k)$ ، آن گاه:

نسبت مساحت های دو مثلث برابر توان دوم نسبت تشابه یعنی k^2 است.

$$\frac{S_{A'B'C'}}{S_{ABC}} = k^2$$



با توجه به شکل مقابل، داریم:



$$\hat{A} = \hat{E} = 90^\circ \Rightarrow EH \parallel AB \Rightarrow \hat{EHC} = \hat{B}$$

$$\hat{A} = \hat{F} = 90^\circ \Rightarrow FH \parallel AC \Rightarrow \hat{FHB} = \hat{C}$$

بنابراین دو مثلث HEC و HFB به حالت تساوی دو زاویه، متشابه اند و داریم:

$$\frac{S_{\triangle HEC}}{S_{\triangle HFB}} = \left(\frac{CH}{BH}\right)^2 \quad (I)$$

$$\triangle ABC: \begin{cases} AC^2 = CH \cdot BC \\ AB^2 = BH \cdot BC \end{cases} \Rightarrow \left(\frac{AC}{AB}\right)^2 = \frac{CH}{BH} \xrightarrow{(I)} \frac{S_{\triangle HEC}}{S_{\triangle HFB}} = \left(\frac{AC}{AB}\right)^4$$

$$\triangle AHC \sim \triangle AHB \Rightarrow \frac{S_{\triangle AHC}}{S_{\triangle AHB}} = \left(\frac{AC}{AB}\right)^2 = 3 \Rightarrow \frac{AC}{AB} = \sqrt{3}$$

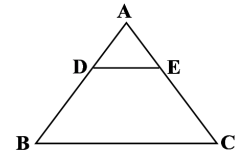
می دانیم دو مثلث AHC و AHB متشابه اند، پس:

$$\frac{S_{\triangle HEC}}{S_{\triangle HFB}} = \left(\frac{AC}{AB}\right)^4 = (\sqrt{3})^4 = 9$$

بنابراین خواسته سؤال برابر است با:

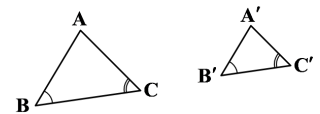
۲۳ - پاسخ: گزینه ۳

▲ مشخصات سؤال: دشوار * هندسه (فصل ۲ ◀ درس ۳)



- (قضیه تالس): هرگاه در یک مثلث، خطی موازی یکی از اضلاع، دو ضلع دیگر مثلث را در دو نقطه قطع کند، روی آن دو ضلع، چهار پاره خط جدا می کند که اندازه های آن ها تشکیل یک تناسب را می دهند. به طور خلاصه هرگاه مانند شکل روبه رو داشته باشیم $DE \parallel BC$ ، آن گاه:

$$\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}$$

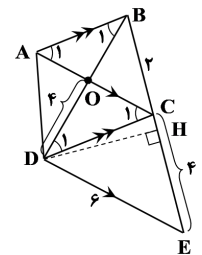


- هرگاه دو زاویه از مثلثی، با دو زاویه از مثلث دیگر هم اندازه باشند، دو مثلث متشابه اند.

$$(\hat{B} = \hat{B}', \hat{C} = \hat{C}') \Rightarrow \triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$$



با توجه به شکل مقابل، داریم:



$$\triangle BDE : \triangle OCB \parallel DE \Rightarrow \frac{BC}{CE} = \frac{OB}{OD} \Rightarrow \frac{2}{4} = \frac{OB}{4} \Rightarrow OB = 2 \Rightarrow BD = 2 + 4 = 6$$

$$BD = BE = DE = 6$$

پس مثلث BDE متساوی الاضلاع است و اندازه ارتفاع DH در این مثلث برابر است با:

$$DH = \frac{\sqrt{3}}{2} a = \frac{\sqrt{3}}{2} \times 6 = 3\sqrt{3}$$

$$BH = HE = \frac{6}{2} = 3 \Rightarrow CH = BH - BC = 3 - 2 = 1$$

$$\triangle CDH : CD = \sqrt{DH^2 + CH^2} = \sqrt{(3\sqrt{3})^2 + 1} = \sqrt{28} = 2\sqrt{7}$$

$$AB \parallel DC \Rightarrow \hat{B}_1 = \hat{D}_1, \hat{A}_1 = \hat{C}_1 \Rightarrow \triangle AOB \sim \triangle ODC \Rightarrow \frac{AB}{CD} = \frac{OB}{OD} \Rightarrow \frac{AB}{2\sqrt{7}} = \frac{2}{4} \Rightarrow AB = \sqrt{7}$$

۲۶ - پاسخ: گزینه ۳

▲ مشخصات سؤال: متوسط * هندسه ۳ (فصل ۱ ◀ درس ۲)



- در حالت کلی اگر $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ ماتریس ضرایب و $B = \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \end{bmatrix}$ ماتریس مقادیر معلوم و $X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ ماتریس مجهولات دستگاه دو معادله و دو مجهول

باشند، در این صورت دستگاه مذکور به شکل معادله ماتریسی $AX=B$ نوشته شده و در صورتی که ماتریس A وارون پذیر باشد یا

$|A| \neq 0$ با ضرب A^{-1} از چپ در معادله فوق می توان مجهولات را به صورت زیر به دست آورد:

$$AX=B \Rightarrow A^{-1}(AX) = A^{-1}B \Rightarrow (A^{-1}A)X = A^{-1}B \Rightarrow IX = A^{-1}B \Rightarrow X = A^{-1}B$$



طبق نکته فوق، داریم:

$$\begin{cases} ax+by=c \\ a'x+b'y=-1 \end{cases} \Rightarrow \underbrace{\begin{bmatrix} a & b \\ a' & b' \end{bmatrix}}_A \underbrace{\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}}_X = \underbrace{\begin{bmatrix} c \\ -1 \end{bmatrix}}_B, \quad A^{-1} = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$$

$$X = A^{-1} \cdot B = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4c-2 \\ 3c-1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4c-2 \\ 3c-1 \end{bmatrix} \Rightarrow x = 4c-2, y = 3c-1$$

از آنجا که $x+y=9$ ، داریم: $4c-2+3c-1=9 \Rightarrow 7c=12 \Rightarrow c = \frac{12}{7}$

۲۷ - پاسخ: گزینه ۳

▲ مشخصات سؤال: متوسط * هندسه ۳ (فصل ۱ ◀ درس ۲)



- اگر $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ ، در این صورت وارون ماتریس A یعنی A^{-1} از تساوی زیر به دست می آید:

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \times \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$



طبق نکته فوق، داریم:

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{|A|} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} = \frac{-1}{|A|} \begin{bmatrix} -d & b \\ c & -a \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} -d & b \\ c & -a \end{bmatrix} = -|A|A^{-1}$$

خواسته سؤال برابر است با:

$$\frac{1}{|A|} (A^2 - (a+d)A) = \frac{A}{|A|} (A - (a+d)I) = \frac{A}{|A|} \left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} a+d & 0 \\ 0 & a+d \end{bmatrix} \right) = \frac{A}{|A|} \begin{bmatrix} -d & b \\ c & -a \end{bmatrix} = \frac{A}{|A|} \times (-|A|)A^{-1} = -I$$

۲۸ - پاسخ: گزینه ۲

▲ مشخصات سؤال: دشوار * هندسه ۳ (فصل ۱ ◀ درس ۲)



- اگر $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ ، در این صورت وارون ماتریس A یعنی A^{-1} از تساوی زیر به دست می آید:

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \times \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

- عدد $(ad - bc)$ را دترمینان ماتریس $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ می نامیم و با نماد $|A|$ (می خوانیم، دترمینان A) نشان می دهیم بنابراین می توان گفت:

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \Rightarrow |A| = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$



اگر A^{-1} را وارون کنیم، ماتریس A به دست می آید:

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 6 & 2 \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -6 & 4 \end{bmatrix}$$

طبق فرض سؤال، داریم:

$$B = 2A + \alpha I + A^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -6 & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \alpha \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 6 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha+6 & 0 \\ 0 & \alpha+6 \end{bmatrix}$$

$$|B| = (\alpha+6)(\alpha+6) = 16 \Rightarrow (\alpha+6)^2 = 16 \Rightarrow \alpha+6 = \pm 4 \Rightarrow \alpha = -2, -10$$

۲۹ - پاسخ: گزینه ۳

▲ مشخصات سؤال: دشوار * هندسه ۳ (فصل ۱ ◀ درس ۲)



- اگر $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ ، در این صورت وارون ماتریس A یعنی A^{-1} از تساوی زیر به دست می آید:

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \times \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$



از فرض سؤال، داریم:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} A \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 6 & 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \\ \frac{3}{2} & 2 \end{bmatrix}$$

از دو طرف تساوی بالا وارون می گیریم:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} A \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 6 & 8 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} A \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -8 & 2 \\ 6 & -1 \end{bmatrix}$$

طرفین این تساوی را از سمت چپ در $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}^{-1}$ و از سمت راست در $\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}^{-1}$ ضرب می کنیم:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} -8 & 2 \\ 6 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -8 & 2 \\ 6 & -1 \end{bmatrix} \times \frac{1}{-1} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -8 & 2 \\ 6 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -8 & 2 \\ 3 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 8 \\ \frac{1}{2} & -3 \end{bmatrix}$$

درایه ۴ در این ماتریس وجود ندارد.

۳۰ - پاسخ: گزینه ۳

▲ مشخصات سؤال: ساده * ریاضیات گسسته (فصل ۱ ◀ درس ۲)



- تنها در صورتی $a \neq 0$ که $a = 0$ باشد.



طبق نکته فوق داریم:

$$|n^3 - 25n| = 0 \Rightarrow n^3 - 25n = 0 \Rightarrow n(n^2 - 25) = 0 \Rightarrow n = 0, n^2 - 25 = 0 \Rightarrow n^2 = 25 \Rightarrow n = \pm 5$$

بنابراین سه مقدار صحیح برای n وجود دارد.

$$n = 0, 5, -5$$

۳۱ - پاسخ: گزینه ۳

▲ مشخصات سؤال: ساده * ریاضیات گسسته (فصل ۱ ◀ درس ۲)



- عدد طبیعی d را ب.م.م دو عدد صحیح a و b می نامیم (a و b هر دو با هم صفر نیستند) و می نویسیم $(a, b) = d$ ، هرگاه دو شرط «الف» و «ب» برقرار باشد.

$$d | a, d | b$$

$$\forall m > 0; m | a, m | b \Rightarrow m \leq d$$



مقدار $(26, 2n-1)$ یعنی حاصل ب.م.م دو عدد $2n-1$ و $2n-1$ را پیدا کنیم و چون $2n-1$ عددی فرد است در نتیجه کافی است مقسوم علیه های فرد عدد 26 را محاسبه کنیم که عبارت اند از: $1, 2, 13, 26$ پس حاصل این ب.م.م، 13 عدد طبیعی متمایز خواهد شد.

۳۲ - پاسخ: گزینه ۲

▲ مشخصات سؤال: متوسط * ریاضیات گسسته (فصل ۱ ◀ درس ۱)



- (اثبات به روش برهان خلف): در روش برهان خلف فرض می کنیم که حکم نادرست باشد و سپس با استفاده از قوانین منطق گزاره ها و دنباله ای از استدلال های درست و مبتنی بر فرض، به یک نتیجه غیرممکن یا نتیجه متضاد با فرض می رسیم و از آنجا (با توجه به منطقی بودن همه مراحل) معلوم می شود که فرض نادرست بودن حکم باطل است و درستی حکم ثابت می گردد.



در ابتدا با فاکتورگیری از 3 و 5 واضح است که عبارت داده شده مضرب 15 است:

$$5(x_1 + x_2)(y_1 + y_2)z(z_1 + z_2) = 15(x_1 + x_2)(y_1 + y_2)(z_1 + z_2)$$

از طرفی به روش برهان خلف اثبات می شود که عدد $(x_1 + x_2)(y_1 + y_2)(z_1 + z_2)$ زوج است. زیرا اگر فرد باشد، پس $x_1 + x_2$ و $y_1 + y_2$ و $z_1 + z_2$ نیز فرد هستند و در نتیجه مجموع آن ها نیز باید فرد باشد، در حالی که مجموع آن ها زوج خواهد بود؛ زیرا:

$$(x_1 + x_2) + (y_1 + y_2) + (z_1 + z_2) = (x_1 + y_1 + z_1) + (x_2 + y_2 + z_2) = 2(x_1 + y_1 + z_1)$$

پس فرض خلف باطل و حکم صحیح است. یعنی عبارت $(x_1 + x_2)(y_1 + y_2)(z_1 + z_2)$ زوج است و در نتیجه 15 برابر این عبارت، مضرب 30 است. بنابراین گزینه ۲ پاسخ است.

۳۳ - پاسخ: گزینه ۱

▲ مشخصات سؤال: متوسط * ریاضیات گسسته (فصل ۱ ◀ درس ۱)



- اثبات مستقیم نوعی روش استدلال است که به کمک حقایقی که درستی آن ها را پذیرفته ایم انجام می شود.



می دانیم اگر k ، حاصل ضرب دو عدد متوالی باشد، $k+1$ مربع کامل است، پس عدد Z عددی مربع کامل است و داریم:
 $x = k, y = k+1$

$$z = 4xy + 1 = 4k(k+1) + 1 = 4k^2 + 4k + 1 = (2k+1)^2 \Rightarrow \sqrt{z} = \sqrt{(2k+1)^2} = 2k+1 = k + (k+1) = x + y$$

بنابراین گزینه ۱ پاسخ است.

۳۴ - پاسخ: گزینه ۲

▲ مشخصات سؤال: متوسط * ریاضیات گسسته (فصل ۱ ◀ درس ۲)



- عدد صحیح a ، که مخالف صفر است، شمارنده عدد b است- یا a ، b را می شمارد (a ، b را عادی می کند) یا $a|b$ یا b بر a بخش پذیر است، هرگاه عددی صحیح چون q وجود داشته باشد به طوری که:

$$a|b \Rightarrow b = aq$$

- اگر عدد b بر عدد a بخش پذیر نباشد یا عدد a عدد b را عادی نکند، می نویسیم:

$$a \nmid b$$



طبق نکته، از رابطه $3n+2|42$ نتیجه می شود که $3n+2$ مقسوم علیه عدد ۴۲ است.

$$A = \{\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6, \pm 7, \pm 14, \pm 21, \pm 42\}$$

همچنین از رابطه $3n+2|35$ نتیجه می شود که $3n+2$ مقسوم علیه عدد ۳۵ است.

$$B = \{\pm 1, \pm 5, \pm 7, \pm 35\}$$

بنابراین $3n+2$ مقسوم علیه مشترک ۴۲ و ۳۵ است، یعنی $3n+2$ عضو $A \cap B$ است، پس داریم:

$$A \cap B = \{\pm 1, \pm 7\} \Rightarrow 3n+2 \in \{\pm 1, \pm 7\}$$

$$3n+2=1 \Rightarrow n = -\frac{1}{3} \text{ غ ق } , \quad 3n+2=-1 \Rightarrow n = -1$$

$$3n+2=7 \Rightarrow n = \frac{5}{3} \text{ غ ق } , \quad 3n+2=-7 \Rightarrow n = -3$$

بنابراین دو مقدار صحیح برای n وجود دارد.

۳۵ - پاسخ: گزینه ۴

▲ مشخصات سؤال: متوسط * ریاضیات گسسته (فصل ۱ ◀ درس ۲)



- اگر عدد a عدد b را بشمارد، آنگاه هر مضرب صحیح عدد b را نیز می شمارد؛ یعنی:

$$a|b \Rightarrow a|mb$$

- هرگاه عددی دو عدد را بشمارد، آنگاه مجموع و تفاضل آن دو عدد را نیز می شمارد.

$$a|b \wedge a|c \Rightarrow a|b \pm c$$

$$a|b \Rightarrow a|b^n \quad (n \in \mathbb{N})$$

$$a|b \Leftrightarrow a^n|b^n, \quad (n \in \mathbb{N})$$

$$ab|c \Rightarrow a|c, b|c$$



با استفاده از نکات فوق، درستی گزینه های ۱، ۲ و ۳ اثبات می شود.

$$\left. \begin{array}{l} 2a|b-a \Rightarrow a|b-a \\ a|a \end{array} \right\} \Rightarrow a|b-a+a \Rightarrow a|b$$

$$a|b \Rightarrow a|b^2 \quad \checkmark \text{ گزینه ۱}$$

$$2 \text{ گزینه ۲: } a|b \Rightarrow a^2|b^2 \Rightarrow a^2|b^2 \times b \Rightarrow a^2|b^3$$

$$\left. \begin{array}{l} a|b-a \\ a|a \end{array} \right\} \Rightarrow a|b-a-a \Rightarrow a|b-2a \Rightarrow a^2|(b-2a)^2$$

برای رد گزینه ۴، مثال نقض $a=3$ و $b=9$ را در نظر بگیرید.

$$2a|b-a \Rightarrow 6|9-3 \Rightarrow 6|6 \quad \checkmark$$

$$2a|b+2a \Rightarrow 6|9+6 \Rightarrow 6|15 \quad \times$$

۳۶ - پاسخ: گزینه ۲

▲ مشخصات سؤال: متوسط * ریاضیات گسسته (فصل ۱ ◀ درس ۲)



- عدد صحیح a ، که مخالف صفر است، شمارنده عدد b است- یا a ، b را می شمارد (a ، b را عادی می کند) یا $a|b$ یا b بر a بخش پذیر است، هرگاه عددی صحیح چون q وجود داشته باشد به طوری که:

$$a|b \Rightarrow b=aq$$

- اگر عدد b بر عدد a بخش پذیر نباشد یا عدد a عدد b را عادی نکند، می نویسیم، $a \nmid b$

- اگر عدد a عدد b را بشمارد، آنگاه هر مضرب صحیح عدد b را نیز می شمارد؛ یعنی:

$$a|b \Rightarrow a|mb$$

- هرگاه عددی دو عدد را بشمارد، آنگاه مجموع و تفاضل آن دو عدد را نیز می شمارد.

$$a|b \wedge a|c \Rightarrow a|b \pm c$$



برای اینکه در تابع $y = \frac{x^3+24}{x+5}$ مقدار $y \in \mathbb{Z}$ باشد، بایستی x^3+24 بر $x+5$ بخش پذیر باشد. با توجه به نکات، داریم:

$$\left. \begin{array}{l} x+5|x^3+24 \\ x+5|x+5 \end{array} \right\} \xrightarrow{(-)} x+5|101 \Rightarrow x+5=\pm 1, \pm 101$$

$$x+5|x+5 \Rightarrow x+5|(x+5)(x^2-5x+25) \Rightarrow x+5|x^3+125$$

$$\Rightarrow x = -4, -6, 96, -106$$

مجموع این مقادیر، برابر است با:

$$-4 + (-6) + 96 + (-106) = -20$$

۳۷ - پاسخ: گزینه ۴

▲ مشخصات سؤال: متوسط * ریاضیات گسسته (فصل ۱ ◀ درس ۲)



- به ازای n های طبیعی زوج، رابطه $a^n - b^n \mid a + b$ برقرار است.



طبق نکته، داریم:

$$126 \mid 5^n - 1 \Rightarrow 5^3 + 1 \mid 5^n - 1 \Rightarrow 5^3 + 1 \mid (5^3)^k - 1^k$$

بنابراین باید $\frac{n}{3}$ عددی زوج باشد، یعنی:

$$\frac{n}{3} = 2k \Rightarrow n = 6k$$

چون n عددی طبیعی و کمتر از ۱۰۰ است، داریم:

$$1 \leq n \leq 99 \Rightarrow 1 \leq 6k \leq 99 \Rightarrow \frac{1}{6} \leq k \leq \frac{99}{6} \Rightarrow \frac{1}{6} \leq k \leq \frac{33}{2} \Rightarrow k = 1, 2, 3, \dots, 16$$

بنابراین، ۱۶ مقدار برای n وجود دارد.

۳۸ - پاسخ: گزینه ۲

▲ مشخصات سؤال: متوسط * ریاضیات گسسته (فصل ۱ ◀ درس ۲)



- اگر دو عدد صحیح نسبت به هم اول باشند، ک.م.م آن ها برابر با قدرمطلق حاصل ضرب دو عدد است و برعکس.

$$(a, b) = 1 \Leftrightarrow [a, b] = |ab|$$



طبق فرض سؤال داریم:

$$[23, n-5] = 23n - 115 = 23(n-5)$$

از آنجا که ک.م.م دو عدد $n-5$ و ۲۳ برابر با حاصل ضرب آن ها شده است، پس این دو عدد نسبت به هم اول هستند و این یعنی $n-5$ نباید عامل ۲۳ داشته باشد. یعنی: $(n-5, 23) = 1$ ، حال از روش متمم استفاده می کنیم. اگر $n-5$ مضرب ۲۳ باشد، داریم:

$$n-5 = 23k \Rightarrow n = 23k + 5 \xrightarrow{n \text{ دورقمی است}} 10 \leq 23k + 5 \leq 99 \Rightarrow 5 \leq 23k \leq 94 \Rightarrow \frac{5}{23} \leq k \leq \frac{94}{23} \Rightarrow k = 1, 2, 3, 4$$

پس به ازای ۴ مقدار دورقمی n ، دو عدد $n-5$ و ۲۳ نسبت به هم اول نیستند، بنابراین تعداد اعداد دورقمی n که به ازای آن ها دو عدد $n-5$ و ۲۳ نسبت به هم اول هستند، برابر است با:

$$90 - 4 = 86$$

۳۹ - پاسخ: گزینه ۴

▲ مشخصات سؤال: دشوار * ریاضیات گسسته (فصل ۱ درس ۱)



- اگر P و Q دو گزاره هم ارز (یعنی همواره هر دو درست یا هر دو نادرست) باشند، آنگاه گزاره های $P \Rightarrow Q$ و $Q \Rightarrow P$ هر دو درست هستند و در نتیجه $P \Leftrightarrow Q$ یک گزاره درست است.

- (اثبات بازگشتی): در اثبات برخی روابط ریاضی، ابتدا عبارت را تا حد امکان ساده می کنیم تا به یک عبارت همیشه درست برسیم. آنگاه با بازگشت از مسیر طی شده به رابطه اولیه می رسمیم و از آنجایی که همه عملیات مسیر رفت، بازگشت پذیرند به این نوع اثبات، اثبات بازگشتی می گوئیم.



ابتدا به روش بازگشتی با به توان ۳ رساندن طرفین عبارت، داریم:

$$\sqrt[m-n]{m-n} = \sqrt[m-n]{m} - \sqrt[m-n]{n} \xrightarrow{\text{توان } 3} m-n = m - 3\sqrt[m-n]{m^2n} + 3\sqrt[m-n]{mn^2} - n$$

$$\Rightarrow -3(\sqrt[m-n]{m^2n} - \sqrt[m-n]{mn^2}) = 0 \Rightarrow \sqrt[m-n]{m^2n} = \sqrt[m-n]{mn^2} \xrightarrow{\text{توان } 3} m^2n = mn^2 \Rightarrow m^2n - mn^2 = 0 \Rightarrow mn(m-n) = 0$$

$$\Rightarrow m = 0 \vee n = 0 \vee m = n$$

حال با توجه به سه شرط فوق، گزینه ها را بررسی می کنیم:

$$\text{گزینه ۱: } mn^2 + m^2n = mn(m+n)$$

اگر فقط شرط $m = n$ برقرار باشد، عبارت فوق لزوماً صفر نیست.

$$\text{گزینه ۲: } m^2 - n^2 = (m-n)(m+n)$$

اگر فقط شرط $m = 0$ یا فقط شرط $n = 0$ برقرار باشد، عبارت فوق، صفر نیست.

$$\text{گزینه ۳: } m^2n^2 - n^4 = n^2(m^2 - n^2) = n^2(m-n)(m+n)$$

اگر فقط شرط $m = 0$ برقرار باشد، عبارت فوق، صفر نیست.

$$\text{گزینه ۴: } m^2n^2 - m^3n = m^2n(n-m)$$

اگر هر کدام از سه شرط $m = 0$ یا $n = 0$ یا $m = n$ برقرار باشد، عبارت فوق برابر صفر است.

۴۰ - پاسخ: گزینه ۱

▲ مشخصات سؤال: دشوار * ریاضیات گسسته (فصل ۱ درس ۲)



- عدد طبیعی d را ب.م.م دو عدد صحیح a و b می نامیم (a و b هر دو با هم صفر نیستند) و می نویسیم $(a, b) = d$ ، هرگاه دو شرط «الف» و «ب» برقرار باشد.

$$\text{الف) } d | a, d | b$$

$$\text{ب) } \forall m > 0; m | a, m | b \Rightarrow m \leq d$$

- اگر داشته باشیم $(a, b) = 1$ یعنی ب.م.م a و b برابر یک باشد، در این صورت می گوئیم a و b نسبت به هم اول اند.



از آنجایی که $a = 13k + 1$ ، پس a مضرب ۱۳ نیست و $(a, 13) = 1$ از طرفی $750 | a^3$ و داریم:

$$2 \times 3 \times 5^3 | a^3 \Rightarrow a = 2 \times 3 \times 5 \times k$$

از رابطه فوق، واضح است که چون a و ۱۳ نسبت به هم اول اند، پس k و ۱۳ نیز نسبت به هم اول اند.

و اینک خواهیم داشت:

$$(750, a) = (2^2 \times 3 \times 5 \times 13, 2 \times 3 \times 5 \times k) \stackrel{(k, 13) = 1}{=} 2 \times 3 \times 5 = 30$$

نزدیک ترین مربع کامل به عدد ۳۰ برابر ۲۵ است، پس فاصله آن ها برابر ۵ است.

فیزیک (سؤال ۳۵)

۴۱ - پاسخ: گزینه ۲

▲ مشخصات سؤال: متوسط * حیطة: کاربرد * فیزیک ۱ (فصل ۴)



$$T - F = 225 \Rightarrow (\theta + 273) - (1/8\theta + 32) = 225 \Rightarrow 0/8\theta = 273 - 32 - 225 = 16 \Rightarrow \theta = \frac{16}{0/8} = 20^\circ\text{C}$$

۴۲ - پاسخ: گزینه ۳

▲ مشخصات سؤال: متوسط * حیطة: دانش * فیزیک ۱ (فصل ۴)



مورد «الف» نادرست است، چون ترموکوپل به علت دقت کم جزو دماسنج های معیار محسوب نمی شود.
مورد «ب» نادرست است، چون دماسنج های گازی، مقاومت پلاتینی و تف سنج نوری دماسنج معیار هستند.
مورد «پ» درست است.
مورد «ت» درست است.

مورد «ث» نادرست است، چون در شب وزش باد از ساحل به دریاست. چون شب ها آب گرم است، هوای بالای آن گرم شده و بالا می رود و هوای سرد از ساحل به سمت دریا حرکت کرده و جایگزین آن می شود.

۴۳ - پاسخ: گزینه ۴

▲ مشخصات سؤال: متوسط * حیطة: کاربرد * فیزیک ۱ (فصل ۴)



$$D_{2A} = D_{2B}^{\text{کره}} \Rightarrow 49/8(1 + \alpha_A \times 20) = 50(1 + \alpha_B \times 20)$$

$$\Rightarrow 49/8 + \frac{49/8}{12450} \times 200 = 50 + 10^4 \alpha_B$$

$$\Rightarrow 0/8 = 0/2 + 10^4 \alpha_B \Rightarrow 0/6 = 10^4 \alpha_B \Rightarrow \alpha_B = 6 \times 10^{-5} \frac{1}{K}$$

$$\beta_B = 3\alpha_B = 18 \times 10^{-5} \frac{1}{K}$$

۴۴ - پاسخ: گزینه ۱

▲ مشخصات سؤال: متوسط * حیطة: کاربرد * فیزیک ۱ (فصل ۴)



$$\Delta F = 1/88\theta \Rightarrow 90 = 1/88\theta \Rightarrow \Delta\theta = 50^\circ\text{C}$$

$$V_{\text{ظرف}} = V_1(1 + \alpha\Delta\theta) = 300(1 + 3 \times 2 \times 10^{-5} \times 50) = 300/9 \text{ cm}^3$$

$$V_{\text{مایع}} = V_1(1 + \beta\Delta\theta) = 290(1 + 10^{-3} \times 50) = 290 + 14/5 = 304/5 \text{ cm}^3$$

$$\Delta V_{\text{بیرون ریخته}} = 304/5 - 300/9 = 3/6 \text{ cm}^3$$

۴۵ - پاسخ: گزینه ۴

▲ مشخصات سؤال: متوسط * حیطة: کاربرد * فیزیک ۱ (فصل ۴)



$$\begin{cases} Q = P \times t = mc\Delta\theta = 3/5 \times 2000 \times 20 = 140000 \text{ J} \\ Q' = P \times t' = C \times \Delta\theta' = 100000 \times 28 = 280000 \text{ J} \end{cases} \Rightarrow P \times t' = 2P \times t \Rightarrow t' = 2t$$

۴۶ - پاسخ: گزینه ۱

▲ مشخصات سؤال: دشوار * حیطة: کاربرد * فیزیک (فصل ۴)



$$\Delta L = L_1 \alpha \Delta \theta \Rightarrow 6 \times 10^{-4} L_1 = L_1 \times 2 \times 10^{-5} \times \Delta \theta \Rightarrow \Delta \theta = 30 = \theta_e - 12 \Rightarrow \theta_e = 42^\circ \text{C}$$

$$m \text{ میله } c \text{ میله } (\theta_e - \theta_1) + C_{\text{مایع}} (\theta_e - \theta_2) = 0 \Rightarrow 0.25 \times 800 \times 30 + C_{\text{مایع}} (42 - 50) = 0$$

$$\Rightarrow 8C_{\text{مایع}} = 6000 \Rightarrow C_{\text{مایع}} = \frac{6000}{8} = 750 \frac{\text{J}}{\text{K}}$$

۴۷ - پاسخ: گزینه ۲

▲ مشخصات سؤال: ساده * حیطة: استدلال * فیزیک (فصل ۴)



آب در دمای ۴ درجه سلسیوس کمترین حجم و بیشترین چگالی را دارد. اگر دمای آن را تغییر دهیم (چه کاهش و چه افزایش) چگالی آن کم می شود؛ پس $\theta = 4^\circ \text{C}$ است.
اگر دمای آب با دمای $\theta = 8^\circ \text{C}$ را افزایش دهیم، حجم آن بیشتر شده و چگالی آن کمتر می شود.

۴۸ - پاسخ: گزینه ۳

▲ مشخصات سؤال: ساده * حیطة: استدلال * فیزیک (فصل ۴)



با افزایش دمای آب گرمای نهان تبخیر (L_v) کاهش می یابد و برای تبخیر سطحی جرم مشابه گرمای کمتری لازم است.

۴۹ - پاسخ: گزینه ۳

▲ مشخصات سؤال: متوسط * حیطة: کاربرد * فیزیک (فصل ۴)



ابتدا همه ۲ kg یخ به دمای صفر رسیده و سپس شروع به ذوب شدن می کند.

$$Q_1 = mc_{\text{یخ}} \Delta \theta = 2 \times 2100 \times (0 - (-20)) = 84000 \text{ J}$$

$$Q_2 = m' L_F = 0.4 \times 336000 = 134400 \text{ J}$$

$$Q = 134400 + 84000 = 218400 \text{ J} = 218.4 \text{ kJ}$$

۵۰ - پاسخ: گزینه ۴

▲ مشخصات سؤال: دشوار * حیطة: کاربرد * فیزیک (فصل ۴)



چون قسمتی از یخ ذوب شده یعنی دمای تعادل 0°C است، بنابراین همه یخ 10°C به صفر رسیده و ۵ گرم از آن ذوب شده است و گرمای لازم برای این منظور ۸۰ درصد گرمایی است که فلز از دست می دهد تا به 0°C برسد.

$$\frac{A}{10} \times 0.2 \times c_{\text{فلز}} \times 150 = 0.4 \times 2100 \times (0 - (-10)) + \frac{5}{1000} \times 336000 \Rightarrow 24c_{\text{فلز}} = 8400 + 1680 \Rightarrow 24c_{\text{فلز}} = 10080$$

$$\Rightarrow c_{\text{فلز}} = 420 \frac{\text{J}}{\text{kg} \cdot \text{K}}$$

۵۱ - پاسخ: گزینه ۳

▲ مشخصات سؤال: ساده * حیطة: دانش * فیزیک (فصل ۴)



انتقال گرما از مرکز خورشید به سطح آن بر اثر همرفت طبیعی رخ می دهد.

۵۲ - پاسخ: گزینه ۲

▲ مشخصات سؤال: متوسط * حیطة: کاربرد * فیزیک (فصل ۴)



$$\begin{cases} Q_1 = P \times t_1 = m L_F \\ Q_2 = P \times t_2 = m c_{\text{مایع}} \Delta \theta \end{cases} \Rightarrow \frac{P \times 1500}{P \times 2000} = \frac{m \times L_F}{m c_{\text{مایع}} \times 120} \Rightarrow \frac{3}{4} = \frac{L_F}{120 c_{\text{مایع}}} \Rightarrow \frac{L_F}{c_{\text{مایع}}} = \frac{360}{4} = 90$$

۵۳ - پاسخ: گزینه ۱

▲ مشخصات سؤال: دشوار * حیطة: کاربرد * فیزیک (فصل ۴)



$$R_2 = 1/1R_1 \Rightarrow \frac{V_2}{V_1} = \frac{\frac{4}{3} \pi R_2^3}{\frac{4}{3} \pi R_1^3} = (1/1)^3 = 1/3^3$$

$$T_1 = T_2 \Rightarrow P_1 V_1 = P_2 V_2 \Rightarrow (P_0 + \rho g h) V_1 = P_0 \times V_2$$

$$\Rightarrow \rho_{\text{آب}} g h = 0/3^3 P_0 \Rightarrow 1000 \times 9/8 \times 2/3^3 = 0/3^3 P_0 \Rightarrow P_0 = 98000 \text{ Pa} = 98 \text{ kPa}$$

۵۴ - پاسخ: گزینه ۲

▲ مشخصات سؤال: متوسط * حیطة: کاربرد * فیزیک (فصل ۴)



$$T = 273 + 27 = 300 \text{ K}$$

$$PV = nRT \Rightarrow 3 \times 10^5 \times 5 \times 10^{-3} = n \times \frac{25}{3} \times 300 \Rightarrow 1500 = 300n \Rightarrow n = 0/5$$

$$n = \frac{m}{M} \Rightarrow 0/5 = \frac{m}{32} \Rightarrow m = 16 \text{ g}$$

۵۵ - پاسخ: گزینه ۱

▲ مشخصات سؤال: ساده * حیطة: کاربرد * فیزیک (فصل ۱)



$$x = vt + x_0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_A = -15t + 50 \\ x_B = -20t + 200 \end{cases}$$

$$x_A = x_B \Rightarrow -20t + 200 = -15t + 50 \Rightarrow t = 30 \text{ s}$$

در این مدت متحرک A مسافت 15×30 یعنی ۴۵۰ متر را طی می کند.

۵۶ - پاسخ: گزینه ۲

▲ مشخصات سؤال: متوسط * حیطة: کاربرد * فیزیک (فصل ۱)



$$\Delta y = \frac{1}{2} g t^2 \Rightarrow \begin{cases} OA \Rightarrow L = \frac{1}{2} g t_A^2 \\ OB \Rightarrow 9L = \frac{1}{2} g t_B^2 \Rightarrow t_B = 3t_A \\ OC \Rightarrow 16L = \frac{1}{2} g t_C^2 \Rightarrow t_C = 4t_A \end{cases}$$

$$\left. \begin{aligned} \Delta t_{AB} &= t_B - t_A = 3t_A - t_A = 2t_A \\ \Delta t_{BC} &= t_C - t_B = 4t_A - 3t_A = t_A \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{\Delta t_{AB}}{\Delta t_{BC}} = 2$$

۵۷ - پاسخ: گزینه ۳

▲ مشخصات سؤال: ساده * حیطة: کاربرد * فیزیک ۳ (فصل ۱)



سرعت متوسط از رابطه $\frac{\Delta x}{\Delta t}$ به دست می آید. می دانیم Δt همواره مثبت است؛ پس سرعت متوسط هم جهت با $\Delta x = x_2 - x_1$ است. در لحظه t_2 مکان منفی ($x_2 < 0$) و در لحظه t_1 مکان مثبت است پس Δx منفی است. شتاب متوسط از رابطه $\frac{\Delta v}{\Delta t}$ به دست می آید و هم جهت با Δv است. در لحظه t_2 شیب خط مماس مثبت است؛ پس v_2 مثبت است و در لحظه t_1 شیب خط مماس منفی است و v_1 منفی است. از این رو Δv مثبت خواهد بود.

۵۸ - پاسخ: گزینه ۱

▲ مشخصات سؤال: متوسط * حیطة: کاربرد * فیزیک ۳ (فصل ۱)



$$\Delta x = \frac{1}{2}at^2 + v_0t, \quad v = at + v_0$$

$$x(10) - x(0) = \frac{1}{2} \times 4 \times 10^2 + (-10) \times 10 = 200 - 100 \Rightarrow x(10) = 180 \text{ m}$$

$$v(10) - v(0) = 4 \times 10 \Rightarrow v(10) - (-10) = 40 \Rightarrow v(10) = 30 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$x(20) - x(10) = \frac{1}{2} \times (-2) \times 10^2 + 30 \times 10 = -150 + 300 \Rightarrow x(20) = 230 \text{ m}$$

$$v(20) - v(10) = 10 \times (-2) \Rightarrow v(20) - 30 = -20 \Rightarrow v(20) = 0$$

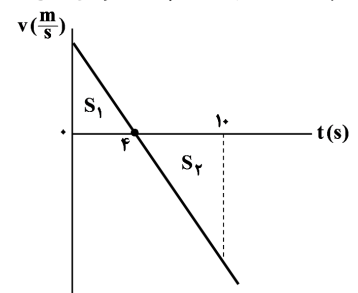
در $t = 20 \text{ s}$ سرعت به صفر می رسد و از آن به بعد، شتاب هم صفر است؛ پس دیگر حرکت نمی کند و $x(25)$ با $x(20)$ برابر است یعنی $x(25) = 230 \text{ m}$.

۵۹ - پاسخ: گزینه ۲

▲ مشخصات سؤال: دشوار * حیطة: کاربرد * فیزیک ۳ (فصل ۱)



در $t = 4 \text{ s}$ جهت حرکت عوض می شود.



$$\frac{S_2}{S_1} = \left(\frac{t_2}{t_1}\right)^2 = \frac{9}{4} \Rightarrow \text{تشابه دو مثلث}$$

$$S_1 + S_2 = 520 \Rightarrow S_1 + \frac{9}{4}S_1 = 520$$

$$\Rightarrow \frac{13}{4}S_1 = 520 \Rightarrow S_1 = 160, S_2 = 360$$

$$v_{av} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{S_1 - S_2}{10} = \frac{160 - 360}{10} = -20 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$\Rightarrow |v_{av}| = 20 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

۶۰ - پاسخ: گزینه ۲

▲ مشخصات سؤال: متوسط * حیطة: کاربرد * فیزیک ۳ (فصل ۱)



$$\Delta y = \frac{1}{2}gt^2 \Rightarrow \begin{cases} H = \frac{1}{2}gT^2 \\ 6H = \frac{1}{2}gT'^2 \end{cases} \Rightarrow T' = T\sqrt{6}$$

وقتی دو سنگ هم زمان به زمین می رسند یعنی سنگی که از ارتفاع ۶H رها شده به اندازه اختلاف T و T' زودتر رها شده است.

$$\Delta t = T' - T = (\sqrt{6} - 1)T$$

۶۱ - پاسخ: گزینه ۳

▲ مشخصات سؤال: ساده * حیطة: کاربرد * فیزیک ۳ (فصل ۱)



$$v_2^2 - v_1^2 = 2a\Delta x \Rightarrow \begin{cases} 50^2 - 30^2 = 2a \cdot BP \\ 30^2 - 20^2 = 2a \cdot AP \end{cases} \Rightarrow \frac{BP}{AP} = \frac{2500 - 900}{900 - 400} = \frac{16}{5}$$

۶۲ - پاسخ: گزینه ۴

▲ مشخصات سؤال: ساده * حیطة: کاربرد * فیزیک ۳ (فصل ۱)



$$\Delta x = 160 \text{ m} \quad \text{قسمت اول}$$

$$\Delta x = v \cdot \Delta t = 40 \times 5 = 200 \text{ m} \quad \text{قسمت دوم (سرعت ثابت)}$$

$$\Delta x = \frac{v_1 + v_2}{2} \Delta t = \frac{40 + 0}{2} \times 2 = 40 \text{ m} \quad \text{قسمت سوم (شتاب ثابت)}$$

$$\Delta x = 40 + 200 + 160 = 400 \text{ m}$$

۶۳ - پاسخ: گزینه ۱

▲ مشخصات سؤال: متوسط * حیطة: کاربرد * فیزیک ۳ (فصل ۱)



در حرکت با شتاب ثابت، سرعت متوسط در هر بازه زمانی با سرعت لحظه ای در وسط آن بازه برابر است.

$$t = 1s \rightarrow t = 5s : v_{av} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{-20 - (-28)}{5 - 1} = 2 \frac{m}{s} \Rightarrow v(3) = 2 \frac{m}{s}$$

$$t = 5s \rightarrow t = 10s : v_{av} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{80 - (-20)}{10 - 5} = 20 \frac{m}{s} \Rightarrow v(7.5) = 20 \frac{m}{s}$$

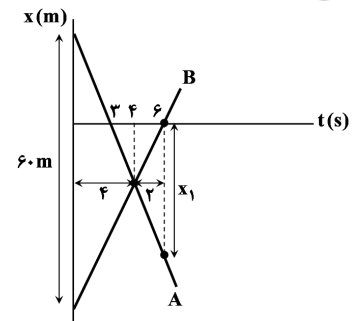
$$a = a_{av} = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{20 - 2}{7.5 - 3} = \frac{18}{4.5} = 4 \frac{m}{s^2}$$

$$v = at + v_0 \Rightarrow 2 = 4 \times 3 + v_0 \Rightarrow v_0 = -10 \frac{m}{s}$$

$$v = at + v_0 \Rightarrow v = 4t - 10$$

۶۴ - پاسخ: گزینه ۱

▲ مشخصات سؤال: متوسط * حیطة: کاربرد * فیزیک ۳ (فصل ۱)



به تشابه دو مثلث شکل روبه رو توجه کنید.

$$\frac{60}{x_1} = \frac{4}{2} \Rightarrow x_1 = 30 \text{ m}$$

متحرک A در مدت ۳ ثانیه (t=۳s تا t=۶s) جابه جایی $\Delta x = -30 \text{ m}$ انجام داده است.

$$v_A = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{-30}{3} = -10 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$\Rightarrow |v_A| = 10 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

۶۵ - پاسخ: گزینه ۲

▲ مشخصات سؤال: متوسط * حیطة: کاربرد * فیزیک ۳ (فصل ۱)



$$v_B^2 - v_A^2 = 2a\Delta x \Rightarrow v_B^2 - v_A^2 = 2a \cdot AB \Rightarrow 0 - 1600 = 2a \times 160 \Rightarrow a = -5 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

$$v_B^2 - v_M^2 = 2a \cdot MB \Rightarrow 0 - v_M^2 = 2 \times (-5) \times 40 \Rightarrow v_M = 20 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$\Delta v = a \cdot \Delta t \Rightarrow v_M - v_P = a \cdot \Delta t \Rightarrow 20 - v_P = -5 \times 2 \Rightarrow v_P = 30 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$\Delta x = \frac{v_1 + v_2}{2} \cdot \Delta t \Rightarrow \frac{v_M + v_P}{2} \cdot \Delta t = MP \Rightarrow \frac{20 + 30}{2} \times 2 = MP \Rightarrow MP = 50 \text{ m}$$

$$AP = 160 - 40 - 50 = 70 \text{ m}$$

۶۶ - پاسخ: گزینه ۱

▲ مشخصات سؤال: متوسط * حیطة: کاربرد * فیزیک ۳ (فصل ۱)



برای آنکه متحرک در جهت محور X حرکت کند، باید سرعت مثبت باشد یعنی بازه زمانی ۱s تا ۲s و ۳s تا ۴s. برای آنکه حرکت تندشونده باشد، باید تندی در حال افزایش باشد. یعنی بازه زمانی ۱s تا ۱/۴s و ۲s تا ۲/۶s و ۳s تا ۳/۶s. به این ترتیب در بازه زمانی ۱s تا ۱/۴s و ۳s تا ۳/۶s یعنی کلاً به مدت ۱s (۱/۴s + ۰/۶s) متحرک در جهت محور X و تندشونده در حرکت بوده است.

۶۷ - پاسخ: گزینه ۱

▲ مشخصات سؤال: متوسط * حیطة: کاربرد * فیزیک ۳ (فصل ۱)



چون جهت حرکت تغییر نمی کند، مسافت طی شده با اندازه جابه جایی برابر است. در حرکت با شتاب ثابت، سرعت متوسط در بازه زمانی t_1 تا t_2 با سرعت لحظه ای در وسط t_1 و t_2 برابر است.

$$(t_1 = 2s, t_2 = 6s): v_{av} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{24}{4} = 6 \Rightarrow v(4) = 6 \frac{m}{s}$$

$$(t_1 = 4s, t_2 = 10s): v_{av} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{45}{6} = 7.5 \Rightarrow v(7) = 7.5 \frac{m}{s}$$

$$(t_1 = 8s, t_2 = 16s): \frac{\Delta x}{\Delta t} = v_{av} = v(12) \Rightarrow \Delta x = v(12) \times 8 \quad (1) \text{ رابطه}$$

حالا باید $v(12)$ را حساب کنیم که با توجه به ثابت بودن شتاب می توان گفت:

$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t} \Rightarrow \frac{v(12) - v(4)}{12 - 4} = \frac{v(7) - v(4)}{7 - 4} \Rightarrow \frac{v(12) - 6}{8} = \frac{7.5 - 6}{3} \Rightarrow v(12) = 10 \frac{m}{s} \quad (2) \text{ رابطه}$$

$$\xrightarrow{\text{رابطه (۱) و (۲)}} \Delta x = 10 \times 8 = 80m$$

۶۸ - پاسخ: گزینه ۳

▲ مشخصات سؤال: دشوار * حیطة: کاربرد * فیزیک ۳ (فصل ۱)



فاصله دو متحرک از یکدیگر یعنی $|x_A - x_B|$:

$$x_A - x_B = (6t + 10) - (-6t^2 + 24t + 70) = 6t^2 - 18t - 60 = 6(t^2 - 3t - 10)$$

$$|x_A - x_B| \leq 36 \Rightarrow |t^2 - 3t - 10| \leq 6 \Rightarrow -6 \leq t^2 - 3t - 10 \leq 6$$

$$\begin{cases} t^2 - 3t - 10 \leq 6 \Rightarrow t^2 - 3t - 16 \leq 0 \Rightarrow \frac{3 - \sqrt{73}}{2} \leq t \leq \frac{3 + \sqrt{73}}{2} \\ -6 \leq t^2 - 3t - 10 \Rightarrow 0 \leq t^2 - 3t - 4 \Rightarrow t \leq -1 \text{ یا } 4 \leq t \Rightarrow 4 \leq t \end{cases}$$

$$4 \leq t \leq \frac{3 + \sqrt{73}}{2} \quad \text{اشتراک دو جواب فوق می شود:}$$

$\sqrt{73}$ تقریباً برابر 8.5 می شود پس $4 \leq t \leq \frac{11}{2}$ یعنی $4 \leq t \leq 5.5$ یعنی چیزی در حدود $1/75$ ثانیه.

۶۹ - پاسخ: گزینه ۲

▲ مشخصات سؤال: متوسط * حیطة: کاربرد * فیزیک ۳ (فصل ۱)



$$\Delta x = \frac{1}{2}at^2 + v_0t$$

$$\left. \begin{array}{l} OA: 28 = \frac{1}{2}at_1^2 \\ OB: 63 = \frac{1}{2}at_2^2 \end{array} \right\} \Rightarrow \left(\frac{t_2}{t_1}\right)^2 = \frac{63}{28} = \frac{9}{4} \Rightarrow \frac{t_2}{t_1} = \frac{3}{2}$$

$$t_2 - t_1 = 4 \Rightarrow \frac{3}{2}t_1 - t_1 = 4 \Rightarrow t_1 = 8s \Rightarrow t_2 = \frac{3}{2} \times 8 = 12s \quad \text{مدت حرکت از A تا B برابر } (t_2 - t_1) \text{ است:}$$

۷۰ - پاسخ: گزینه ۴

▲ مشخصات سؤال: ساده * حیطة: کاربرد * فیزیک ۳ (فصل ۱)



۵ ثانیه دوم حرکت بازه زمانی $t_1 = 5s$ تا $t_2 = 10s$ است.

$$t = 5s \Rightarrow \text{شیب خط مماس} = \frac{22-12}{10-5} = 4 \frac{m}{s} \Rightarrow v_1 = 4 \frac{m}{s}$$

$$t = 10s \Rightarrow \text{شیب خط مماس} = 0 \Rightarrow v_2 = 0$$

$$a_{av} = \frac{v_2 - v_1}{t_2 - t_1} \Rightarrow a_{av} = \frac{0 - 4}{10 - 5} = -0.8 \frac{m}{s^2}$$

۷۱ - پاسخ: گزینه ۳

▲ مشخصات سؤال: متوسط * حیطة: کاربرد * فیزیک ۳ (فصل ۱)



نمودار مکان-زمان به شکل سهمی است، پس شتاب حرکت ثابت است. می دانیم محور تقارن سهمی از رأس سهمی می گذرد یعنی رأس سهمی در $t = 4s$ است. پس در $t = 4s$ سرعت متحرک (شیب خط مماس بر نمودار مکان-زمان) صفر است.

$$v = at + v_0 \xrightarrow{v(t)=0} 0 = 4a + v_0 \Rightarrow v_0 = -4a$$

$$x = \frac{1}{2}at^2 + v_0t + x_0 \xrightarrow{\substack{x_0=40m \\ x(10)=0}} 50a + 10v_0 + 40 = 0 \Rightarrow 5a + v_0 = -4$$

$$\xrightarrow{v_0=-4a} \Delta a - 4a = -4 \Rightarrow a = -4 \frac{m}{s^2} \Rightarrow v_0 = 16 \frac{m}{s}$$

$$v(10) = -4 \times 10 + 16 = -24 \frac{m}{s} \Rightarrow |v(10)| = 24 \frac{m}{s} \quad \text{در } t = 10s \text{، متحرک از مبدأ } (x=0) \text{ عبور می کند:}$$

۷۲ - پاسخ: گزینه ۳

▲ مشخصات سؤال: ساده * حیطة: کاربرد * فیزیک ۳ (فصل ۱)



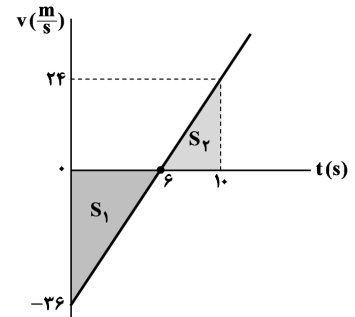
$$\Delta v = g \cdot \Delta t \Rightarrow 26 - v_1 = 10 \times 2 \Rightarrow v_1 = 16 \frac{m}{s}$$

$$\Delta y = \frac{v_1 + v_2}{2} \cdot \Delta t = \frac{16 + 26}{2} \times 2 = 52m$$

متحرک در ۲ ثانیه آخر ۵۲ متر طی می کند یعنی ۲ ثانیه قبل از رسیدن به زمین ۵۲ متر با زمین فاصله داشته است.

۷۳ - پاسخ: گزینه ۴

▲ مشخصات سؤال: متوسط * حیطة: کاربرد * فیزیک ۳ (فصل ۱)



جوابش اینه

$$x = \frac{1}{2}at^2 + v_0t + x_0 \Rightarrow \begin{cases} \frac{1}{2}a = 2 \Rightarrow a = 4 \frac{m}{s^2} \\ v_0 = -36 \frac{m}{s} \\ x_0 = 10m \end{cases}$$

$$v = at + v_0 = 4t - 36$$

$$L = S_1 + S_2 = \frac{6 \times 36}{2} + \frac{4 \times 24}{2} = 108 + 48 = 156m$$

۷۴ - پاسخ: گزینه ۲

▲ مشخصات سؤال: متوسط * حیطة: کاربرد * فیزیک ۳ (فصل ۱)

جوابش اینه

$$A \Rightarrow x_A = vt + x_0 \Rightarrow x_A = 10t + 40 \xrightarrow{t=20s} x_A = 240m$$

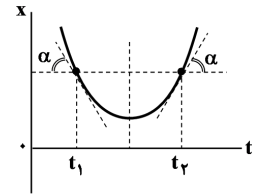
$$B \Rightarrow a = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{10 - (-10)}{8} = \frac{5}{2} \frac{m}{s^2}$$

$$x_B = \frac{1}{2}at^2 + v_0t + x_0 = \frac{5}{4}t^2 - 10t - 20 \xrightarrow{t=20s} x_B = 280m$$

$$\text{فاصله } A \text{ و } B \text{ از یکدیگر} = |x_A - x_B| = 40m$$

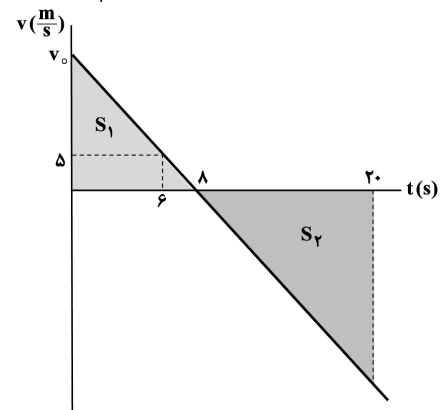
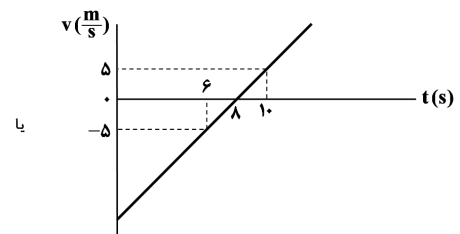
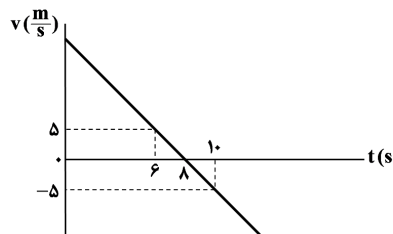
۷۵ - پاسخ: گزینه ۳

▲ مشخصات سؤال: دشوار * حیطة: کاربرد * فیزیک ۳ (فصل ۱)



در حرکت با شتاب ثابت بر خط راست، نمودار مکان- زمان سهمی است و با توجه به تقارن موجود در منحنی سهمی می توان گفت که اگر متحرک از یک محل دو مرتبه عبور کند، اولاً تندی متحرک در این دو زمان برابر است و ثانیاً زمان های این دو مرتبه عبور نسبت به رأس سهمی (یعنی زمانی که سرعت صفر است) متقارن هستند.

پس در این مسئله اولاً می دانیم که در وسط $t_1 = 6s$ و $t_2 = 10s$ سرعت صفر است یعنی $v(8) = 0$ و ثانیاً اینکه در t_1 و t_2 سرعت متحرک $+\frac{5}{s}m$ و $-\frac{5}{s}m$ است. (از نظر محاسبه مسافت طی شده فرقی نمی کند که کدام مثبت و کدام منفی باشد)؛ پس نمودار سرعت- زمان به شکل زیر است:



مسافت طی شده حاصل جمع مساحت های زیر نمودار $v-t$ است:

$$\text{قضیه تالس} \Rightarrow \frac{5}{v_0} = \frac{2}{8} \Rightarrow v_0 = 20 \frac{m}{s}$$

$$S_1 = \frac{20 \times 8}{2} = 80$$

$$\text{تشابه دو مثلث} \Rightarrow \frac{S_2}{S_1} = \left(\frac{12}{8}\right)^2 = \frac{9}{4} \Rightarrow S_2 = \frac{9}{4} \times 80 = 180$$

$$L = S_1 + S_2 = 80 + 180 = 260 m$$

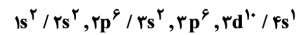
شیمی (سؤال ۳۵)

۷۶ - پاسخ: گزینه ۳

▲ مشخصات سؤال: دشوار * شیمی (فصل ۱)



در اتم عنصر مورد نظر ۷ الکترون در زیرلایه های s وجود دارد و آرایش الکترونی آن به صورت:



و مربوط به عنصر مس با عدد اتمی ۲۹ در گروه ۱۱ و دوره چهارم جدول است.

بررسی عبارت های نادرست:

عبارت «سوم»: مجموع عددهای کوانتومی اصلی و فرعی زیرلایه ظرفیت (۴s/۳d) این اتم برابر ۹ است:

$$(3+2) + (4+0) = 9$$

۷۷ - پاسخ: گزینه ۲

▲ مشخصات سؤال: متوسط * شیمی (فصل ۱)



آرایش الکترونی اتم عنصر مورد نظر $1s^2, 2p^1, 3d^{10} [Ar]$ است، عدد اتمی این عنصر ۳۱ است و در گروه ۱۳ و دوره ۴ قرار دارد.



گزینه ۲) در اتم این عنصر، ۵۰ درصد از زیرلایه های اشغال شده از الکترون، دارای ۲ الکترون هستند.

۷۸ - پاسخ: گزینه ۲

▲ مشخصات سؤال: متوسط * شیمی (فصل ۱)



بررسی عبارت های نادرست:

عبارت الف) اگر اتم عنصر A دارای ۷ و اتم عنصر B نیز دارای ۷ الکترون ظرفیتی باشند، عناصر A و B به شرط داشتن ساختار لایه ظرفیت مشابه (هم دسته بودن) رفتار شیمیایی مشابه دارند. عنصر A می تواند مربوط به دسته d (گروه ۷) و عنصر B مربوط به دسته p (گروه ۱۷) باشد.

عبارت ب) مطابق مدل کوانتومی، در ساختار اتم، ۲ زیرلایه وجود دارد که مجموع عدد کوانتومی اصلی و عدد کوانتومی فرعی آن ها یکسان و برابر ۴ است.



۷۹ - پاسخ: گزینه ۳

▲ مشخصات سؤال: متوسط * شیمی (فصل ۱)



آرایش الکترونی اتم آرسنیک به صورت: $1s^2, 2p^3, 3d^{10} [Ar]$

گزینه الف) ساختار الکترونی لایه ظرفیت اتم آرسنیک به صورت $3d^3, 4s^2, 4p^3$ است.

گزینه ب) ۳ الکترون ظرفیت در زیرلایه ۴p دارد که مجموع اعداد کوانتومی آن ها برابر ۱۵ و ۲ الکترون ظرفیتی در زیرلایه ۴s دارد که مجموع اعداد کوانتومی آن ها برابر ۸ است.

گزینه پ) آرسنیک دارای ۵ الکترون ظرفیتی و از دسته p است، پس در گروه ۱۵ جدول جای دارد.

۸۰ - پاسخ: گزینه ۱

▲ مشخصات سؤال: متوسط * شیمی (فصل ۱)



بررسی عبارت های نادرست:

عبارت «اول»: بیرونی ترین لایه الکترونی اتم گازهای نجیب (به جزء هلیم) دارای ۸ الکترون است و به این دلیل واکنش ناپذیر بوده یا واکنش پذیر کمی دارند.



عبارت «دوم»: اتم عنصرهای واکنش پذیر، با تبدیل شدن به یون، لزوماً به آرایش گاز نجیب نمی رسد، مثل Zn و Fe...

عبارت «سوم»: در آرایش الکترون- نقطه ای عناصر اکسیژن و بریلیم، ۲ تک الکترون (تک نقطه) وجود دارد، اما در آرایش الکترون- نقطه ای هلیم فقط یک جفت الکترون مشاهده می شود.

۸۱ - پاسخ: گزینه ۲

▲ مشخصات سؤال: ساده * شیمی (فصل ۱)



این اتم دارای ۶ الکترون ظرفیتی و ۳ لایه الکترونی است، پس به گروه ۱۶ و دوره سوم جدول تعلق دارد و عدد اتمی آن ۱۶ است. بیرونی ترین زیرلایه آن ۳p و دارای ۴ الکترون است.

۸۲ - پاسخ: گزینه ۲

▲ مشخصات سؤال: متوسط * شیمی (فصل ۱)



عنصر A به کاتیون $1+$ و عنصر B به آنیون $2-$ تبدیل شده اند که هم الکترون و دارای ۱۰ الکترون هستند، پس عدد اتمی عنصر A و B به ترتیب ۱۱ و ۸ است.



گزینه ۱) تفاوت عدد اتمی عنصرهای A و B (۳) با شماره گروه عنصر A (گروه ۱) متفاوت است.

گزینه ۳) از واکنش عنصر A با عنصر هم دوره خودش در گروه ۱۷ جدول دوره ای که آنیون $1-$ می تواند ایجاد کند، یک ترکیب یونی دوتایی حاصل می شود که در فرمول شیمیایی آن مجموع زیروندهای یون ها (۲) با شماره گروه عنصر B (گروه ۱۶) متفاوت است.

گزینه ۴) تفاوت شمار نقطه ها در آرایش الکترون- نقطه ای عنصرهای A و B برابر ۵ است.

۸۳ - پاسخ: گزینه ۲

▲ مشخصات سؤال: ساده * شیمی (فصل ۱)



در ترکیب سدیم سولفید، نسبت شمار کاتیون به شمار آنیون ۲ به ۱ و عکس آن، ۱ به ۲ است.

نسبت شمار کاتیون به شمار آنیون در ترکیب های داده شده:

- | | |
|-------------------------|----------------------------|
| ■ پتاسیم اکسید (۲ به ۱) | ■ منیزیم فلوئورید (۱ به ۲) |
| ■ کلسیم برمید (۱ به ۲) | ■ لیتیم فسفید (۳ به ۱) |
| ■ کلسیم اکسید (۱ به ۱) | ■ لیتیم نیترید (۳ به ۱) |
| ■ سدیم فسفید (۳ به ۱) | ■ پتاسیم کلرید (۱ به ۱) |

۸۴ - پاسخ: گزینه ۲

▲ مشخصات سؤال: متوسط * شیمی (فصل ۱)



عنصر B آنیونی -۱ دارد پس متعلق به گروه ۱۷ جدول است. عنصر A، کاتیون +۱ ایجاد کرده و فلز متعلق به گروه ۱ است.



گزینه ۱) ترکیب عنصرهای A و B از دسته مواد یونی است.

گزینه ۳) از واکنش عناصر A و B، ترکیبی با فرمول شیمیایی AB حاصل می شود.

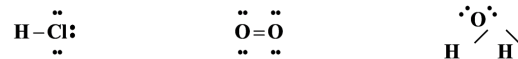
گزینه ۴) اگر عنصرهای A و B به یک دوره از جدول دوره ای تعلق داشته باشند، عدد اتمی B (از گروه ۱۷) حداقل به اندازه ۶ واحد بزرگ تر از عدد اتمی A (از گروه ۱) است.

۸۵ - پاسخ: گزینه ۲

▲ مشخصات سؤال: ساده * شیمی (فصل ۱)



ساختار لوویس مولکول های HCl، O₂ و H₂O به شکل روبه رو است:



گزینه ۱) مجموع شمار الکترون های نمایش داده شده در آرایش الکترون- نقطه ای این مولکول ها، متفاوت است.

گزینه ۳) شمار الکترون های به اشتراک گذاشته شده بین اتم ها در این مولکول ها را می توان به صورت: H₂O = O₂ > HCl مقایسه کرد.

گزینه ۴) در ساختار این مولکول ها تمام اتم ها با اشتراک گذاری الکترون به آرایش الکترونی مشابه گاز نجیب دست یافته اند و (به جزء هیدروژن که آرایش مشابه هلیم دارد) در لایه ظرفیت خود ۸ الکترون دارند.

۸۶ - پاسخ: گزینه ۴

▲ مشخصات سؤال: متوسط * شیمی (فصل ۲)



مورد پ) درست؛ هرچه از سطح زمین دورتر شویم، با کاهش تراکم هوا، تغییرات فشار ملایم تر می شود.

مورد ت) درست؛ بر طبق شکل کتاب درسی صفحه ۴۷، در هواکره چگالی ثابت نیست.



مورد الف) نادرست؛ فقط تغییر دما نشان دهنده لایه ای بودن هواکره است.

مورد ب) نادرست؛ میزان فشار هوا در جهات مختلف بر بدن یکسان است.

۸۷ - پاسخ: گزینه ۴

▲ مشخصات سؤال: دشوار * شیمی (فصل ۲)



$$\frac{\Delta P}{\Delta h} = \frac{0.3 - 0.7}{9 - 3} = \frac{0.4}{6} = \frac{2}{30} = \frac{1 \text{ atm}}{15 \text{ km}}$$

$$P - 0.7 = -\frac{1}{15}(h - 3) \Rightarrow P = -\frac{1}{15}h + 0.9 \Rightarrow P = 0.5 \Rightarrow 0.5 = -\frac{1}{15}h + 0.9 \Rightarrow \frac{1}{15}h = 0.4 \Rightarrow h = 6 \text{ km}$$

$$\theta = -6h + 14 = -6 \times 6 + 14 = -26 + 14 = -12^\circ\text{C}$$

$$T(\text{K}) = \theta(^{\circ}\text{C}) + 273 = -12 + 273 = 261 \text{ K}$$

۸۸ - پاسخ: گزینه ۳

▲ مشخصات سؤال: متوسط * شیمی ۱ (فصل ۲)



گزینه ۳) درست؛ -196°C - نقطه جوش N_2 است.



گزینه ۱) نادرست؛ A و D به ترتیب آرگون و اکسیژن هستند.

گزینه ۲) نادرست؛ یخ خشک ($\text{CO}_2(\text{s})$) در دمای -78°C جداسازی می شود.

گزینه ۴) نادرست؛ در این دما، He به حالت گاز است. نقطه جوش هلیوم -269°C یا $4\text{K}+$ است.

۸۹ - پاسخ: گزینه ۱

▲ مشخصات سؤال: متوسط * شیمی ۱ (فصل ۲)



ابتدا هر سه گاز را بشناسیم: A: آرگون, B: هلیوم, D: نیتروژن

عبارت «سوم»: درست؛ هر دو از کاربردهای نیتروژن هستند.



عبارت «اول»: نادرست؛ در پتروشیمی شیراز با خلوص بالا تهیه می شود.

عبارت «دوم»: نادرست؛ هلیوم ۷٪ حجمی (نه جرمی) گاز طبیعی است.

عبارت «چهارم»: نادرست؛ علاوه بر هوای مایع از تقطیر جزء به جزء گاز طبیعی به دست می آید.

۹۰ - پاسخ: گزینه ۴

▲ مشخصات سؤال: متوسط * شیمی ۱ (فصل ۲)

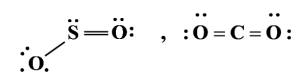


عبارت اصلی: درست

عبارت «اول»: درست (صفحه ۵۶ کتاب درسی شکل ۱۰)

عبارت «دوم»: نادرست؛ باید واکنش سریع باشد و بخشی از انرژی به صورت نور و گرما آزاد می شود.

عبارت «سوم»: درست



عبارت «چهارم»: درست؛ تمام عبارت توصیف گاز کربن مونوکسید است.

عبارت «پنجم»: درست

۹۱ - پاسخ: گزینه ۴

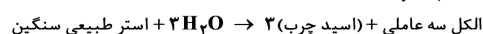
▲ مشخصات سؤال: دشوار * شیمی ۳ (فصل ۱)



فرمول مولکولی اتیلن گلیکول $C_2H_6O_2$ است. این مولکول از ۱۰ اتم و سه نوع عنصر ساخته شده است؛ بنابراین نسبت $\frac{1}{3}$ برابر ۳ نیست و عبارت داده شده نادرست است.
گزینه ۴) نادرست؛ هر اتم اکسیژن ۲ جفت الکترون ناپیوندی دارد، پس مجموع آن ها برابر ۱۲ جفت است. در ساختار روغن زیتون ۶ پیوند دوگانه شامل ۳ پیوند $C=O$ و ۳ پیوند $C=C$ وجود دارد، پس نسبت $\frac{12}{6}=2$ و مخالف یک است.



گزینه ۱) درست



گزینه ۲) درست؛ فرمول مولکولی اتیلن گلیکول و اتانول به ترتیب $C_2H_6O_2$ و C_2H_6O است که تفاوت فرمول آن ها برابر با جرم یک اتم اکسیژن و برابر ۱۶ گرم است.

عدد اتمی یکی از عنصرهای گروه ۱۶ نیز برابر ۱۶ گرم است. (عنصر S)

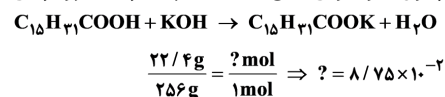
گزینه ۳) درست؛ بار الکتریکی بخش آنیونی در پاک کننده های غیرصابونی و صابونی، یکسان و برابر (-) است.

۹۲ - پاسخ: گزینه ۳

▲ مشخصات سؤال: دشوار * شیمی ۳ (فصل ۱)



شمار اتم های اکسیژن در اسیدهای چرب یک عاملی همواره برابر ۲ است، پس شمار پیوندهای $C-H$ در این اسید برابر $31 = 15/5 \times 2$ است. پس فرمول مولکولی این اسید با زنجیر هیدروکربنی سیرشده $C_{15}H_{31}COOH$ است.



۹۳ - پاسخ: گزینه ۴

▲ مشخصات سؤال: دشوار * شیمی ۳ (فصل ۱)



فرمول شیمیایی صابون های مایع نیتروژن دار با زنجیر هیدروکربنی سیرشده به صورت $C_nH_{2n+1}COONH_4$ و فرمول شیمیایی صابون های جامد با زنجیر هیدروکربنی سیرشده به صورت C_mH_{2m+1} است. با توجه به فرض سؤال شمار اتم های H در هر دو نوع صابون برابر است، پس:

$$2n+1+4=2m+1 \Rightarrow 2(m-n)=4 \Rightarrow m-n=2 \Rightarrow m=n+2$$

$$C_nH_{2n+1}COONH_4 \Rightarrow 14n+62$$

$$C_{n+2}H_{2n+5}COONa \Rightarrow 14n+96$$

پس تفاوت جرم مولی دو صابون برابر ۳۳ گرم است.

۹۴ - پاسخ: گزینه ۳

▲ مشخصات سؤال: متوسط * شیمی ۳ (فصل ۱)



فرمول شیمیایی بخش A، COO^- است.

گزینه ۳) درست؛ پارچه نخی از الیاف سلولزی تشکیل شده است که این الیاف از مونومر قطبی گلوکز ساخته شده اند، پس جاذبه لکه های چربی با این نوع الیاف کم است.



گزینه ۱) نادرست؛ جرم مولی این بخش برابر ۴۴ گرم است.

گزینه ۲) نادرست؛ A همان بخش آبیونی و آب دوست صابون است.

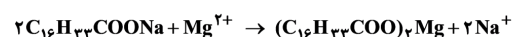
گزینه ۴) نادرست؛ بخش A به دلیل داشتن بار الکتریکی با مولکول های آب جاذبه یون-دوقطبی تشکیل می دهد.

۹۵ - پاسخ: گزینه ۳

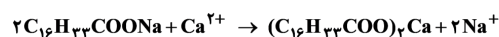
▲ مشخصات سؤال: دشوار * شیمی ۳ (فصل ۱)



با توجه به اینکه چگالی آب برابر $1 \text{ g} \cdot \text{mL}^{-1}$ است، پس می توان غلظت یون های کلسیم و منیزیم را به جای ppm به صورت mg در نظر گرفت.



$$\frac{2A \times 10^{-3} \text{ g}}{24 \text{ g}} = \frac{?}{562} \Rightarrow ? = 70 / 25 \times 10^{-3} \text{ A}$$



$$\frac{2A \times 10^{-3} \text{ g}}{40 \text{ g}} = \frac{?}{578} \Rightarrow ? = 28 / 9 \times 10^{-3} \text{ A}$$

$$\frac{70 / 25 \times 10^{-3} \text{ A}}{28 / 9 \times 10^{-3} \text{ A}} = 2 / 43$$

۹۶ - پاسخ: گزینه ۴

▲ مشخصات سؤال: متوسط * شیمی ۳ (فصل ۱)



مورد پ) درست

مورد ت) درست؛ گریس و وازلین که هر دو هیدروکربن هستند و به هگزان (C_6H_{14}) بسیار شبیه هستند. روغن زیتون نیز با وجود داشتن ۶ اتم اکسیژن و گروه عاملی استری به دلیل داشتن زنجیرهای هیدروکربنی بسیار بلند، ناقطبی است و در هگزان حل می شود.



مورد الف) نادرست؛ جوهرنمک با لکه های چربی واکنش نمی دهد.

مورد ب) نادرست؛ پودر لوله بازکن مخلوطی از یک ترکیب یونی (NaOH) و یک فلز (Al) است.

۹۷ - پاسخ: گزینه ۳

▲ مشخصات سؤال: دشوار * شیمی ۳ (فصل ۱)



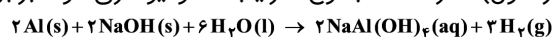
مورد سوم) درست

مورد چهارم) درست

$$\text{چگالی} = \frac{\text{جرم مولی}}{\text{حجم مولی}} = \frac{2g}{22/4L} = 0.09g \cdot L^{-1}$$



مورد اول) نادرست؛ مجموع ضرایب استوکیومتری مواد برابر ۱۵ است.



مورد دوم) نادرست؛ این واکنش گرماده است، پس محتوای انرژی فرآورده ها کمتر است.

۹۸ - پاسخ: گزینه ۱

▲ مشخصات سؤال: ساده * شیمی ۳ (فصل ۱)



استفاده از هر نوع بازی برای کاهش اسیدی بودن خاک مناسب نیست و عموماً از آهک استفاده می شود.

۹۹ - پاسخ: گزینه ۲

▲ مشخصات سؤال: متوسط * شیمی ۳ (فصل ۱)



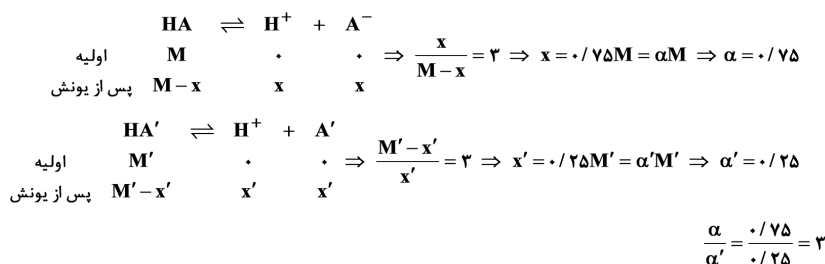
رسانایی الکتریکی محلول به مجموع غلظت یون ها در محلول وابسته است که: گزینه ۱) اتانول انحلال مولکولی دارد و رسانایی الکتریکی آب را افزایش نمی دهد.

$$\left. \begin{array}{l} \text{گزینه ۲) } \left. \begin{array}{l} \text{محلول ۰/۱ مولار HCl: } \alpha = 0.2 \\ \text{محلول ۰/۵ مولار HF با } \alpha = 0.08: \alpha = 0.08 \end{array} \right\} \\ \text{گزینه ۳) } \left. \begin{array}{l} \text{محلول ۰/۱ مولار Na}_3\text{PO}_4: \alpha = 0.4 \\ \text{محلول ۰/۱۵ مولار NaCl: } \alpha = 0.2 \end{array} \right\} \end{array} \right\}$$

گزینه ۴) قدرت اسیدی $CH_3COOH < HCOOH$ است؛ بنابراین با غلظت برابر در محلول $HCOOH$ یون بیشتری تولید می شود و رسانایی بیشتر است.

۱۰۰ - پاسخ: گزینه ۳

▲ مشخصات سؤال: متوسط * شیمی ۳ (فصل ۱)



۱۰۱ - پاسخ: گزینه ۲

▲ مشخصات سؤال: متوسط * شیمی ۳ (فصل ۱)



عبارت های «سوم» و «چهارم» نادرست هستند.



عبارت «سوم»: تشکیل یون آب پوشیده از ترکیبات یونی، تفکیک یونی نامیده می شود و یونش نیست.
عبارت «چهارم»: کربوکسیلیک اسیدها اسیدهای ضعیفی هستند و در بین آن ها اسید قوی مشاهده نمی شود.

۱۰۲ - پاسخ: گزینه ۴

▲ مشخصات سؤال: دشوار * شیمی ۳ (فصل ۱)



$$\text{HNO}_3 \text{ در محلول } 0.01 \text{ مولار } \Rightarrow [\text{H}^+]_{\text{HA}} = 0.03$$

$$\frac{[\text{H}^+]}{K_a} = \frac{0.03}{0.01} = 3 \Rightarrow \alpha = \frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{4} M = 0.03 \Rightarrow M = 0.12 \frac{\text{mol}}{\text{L}}$$

$$0.12 = \frac{n}{10} \Rightarrow n = 1.2 \text{ mol}$$

$$0.12 = \frac{n}{10} \Rightarrow n = 1.2 \text{ mol} \quad K_a = \frac{[\text{H}^+]^2}{M - [\text{H}^+]} \Rightarrow 0.01 = \frac{9 \times 10^{-4}}{M - 0.03} \Rightarrow M = 0.12 \frac{\text{mol}}{\text{L}} \quad \text{اینجوری هم میشه}$$

۱۰۳ - پاسخ: گزینه ۲

▲ مشخصات سؤال: متوسط * شیمی ۳ (فصل ۱)



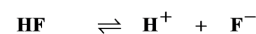
گزینه ۱) در اسیدهای قوی مقدار اسید یونیده نشده تقریباً صفر است و یافت نمی شود.
گزینه ۳) در واکنش های برگشت پذیر فقط با ایجاد تعادل سرعت رفت برابر برگشت می شود.
گزینه ۴) ثابت تعادل برای توصیف کمی تعادل به کار می رود.

۱۰۴ - پاسخ: گزینه ۳

▲ مشخصات سؤال: دشوار * شیمی ۳ (فصل ۱)



$$[\text{F}^-] = \frac{10 \times 760 \times 10^{-4} \times 1}{19} = 4 \times 10^{-2}$$



$$2 \quad \quad \quad 0 \quad \quad \quad 0$$

$$2-x \quad \quad \quad x \quad \quad \quad x$$

$$\downarrow \quad \quad \quad \downarrow \quad \quad \quad \downarrow$$

$$2 - 0.04 \approx 2 \quad \quad \quad 0.04 \quad \quad \quad 0.04$$

$$K_a = \frac{0.04 \times 0.04}{2} = 8 \times 10^{-4}$$

۱۰۵ - پاسخ: گزینه ۴

▲ مشخصات سؤال: متوسط * شیمی ۳ (فصل ۱)



هرگز در محلول یک اسید H^+ نمی تواند برابر محلولی از یک باز باشد؛ زیرا در بازها و در دمای اتاق $[OH^-] > 10^{-7}$ ، $[H^+] < 10^{-7}$ و در اسیدها $[H^+] > 10^{-7}$ ، $[OH^-] < 10^{-7}$ است.