گروه آزمایشی علوم ریاضی و فنی

آزمون ماز | پایهٔ دوازدهم

PREMIUM



دفترچه پاسخ

جمعه ۸ آبان ماه ۱۴۰۵

آزمون پریمیوم ماز

جمع‌بندی و تسلط کامل بر نیم‌سال اول دوازدهم

ویژهٔ کنکوری‌های ۱۴۰۶

- پاسخنامه سریع؛ برای بررسی فوری بعد از آزمون
- تحلیل تمام گزینه‌های هر سؤال؛ برای بررسی سؤالاتی که پاسخ نادرست داده‌اید
- نکات و درسنامه‌های آموزشی؛ برای یادگیری کامل مباحث هر سؤال
- مشاورهٔ تستی؛ برای یادگیری انواع روش‌های حل تست
- استراتژی آزمون؛ برای یادگیری مدیریت زمان و مدیریت جلسهٔ آزمون

حق چاپ و تکثیر سؤالات به هر روش (الکترونیکی و...) پس از برگزاری آزمون برای تمامی اشخاص حقیقی و حقوقی تنها با مجوز «گروه ماز» مجاز می‌باشد و با متخلفین برابر مقررات رفتار می‌شود.

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

درس	مسئول درس	طراحان	ویراستاران
ریاضیات	حسین شفیع‌زاده مهرداد کیوان رسول حاجی‌زاده	حسین شفیع‌زاده ـ مهرداد کیوان محمد جمال‌صادقی ـ محمد خانگلدی	ندا فرهختی ـ مائده بادان‌فیروز حمیدرضا ولی‌پور ـ یزدان نیک‌قدم ارسلان حسنوند ـ علی اسدی محمدمهدی‌منتظری محمدمهدی سواری‌پور امیرحسین اذانی
فیزیک	سجاد صادقی‌زاده سعید احمدی محمدجواد سورچی	محمدجواد سورچی ـ مجید رجبی‌وندچالی حسین عبدوی‌نژاد ـ سارا قانع سام احمدی ـ محسن قندچلر	مروارید شاه‌حسینی حنا خلعتبری
شیمی	فرشاد هادیان‌فرد	فرشاد هادیان‌فرد ـ طاها حق‌بین فرهنگ امیری ـ فاطمه محمودی عالیه میرزایی ـ علی ترابی مهسا بایمانی‌نژاد ـ محمد کهنه‌پوشی علی‌رضا ستوده ـ یاشار فیض‌اللهی محمدحسین رضازاده ـ مجتبی محجوب	طاها حق‌بین ـ محمد دارابی‌جم محمدرضا جمشیدی ایلیا جمارانی ـ علی نیکوسیر محمدمهدی معظمی محمد داودآبادی‌فراهانی

یک تیم با بیش از ۵۰۰ نفر در حال کار هستن تا آزمون‌های ماز با حداکثر کیفیت حاضر بشن و به شما کمک کنن و مسیر موفقیت رو براتون ساده‌تر کنن. همیشه از نظرات و کامنت‌های خوب‌تون انرژی می‌گیریم. مرسی که همراهمون هستین.
راستی! حتماً در نظرسنجی آزمون شرکت کنین و نظرات و پیشنهادات‌تون رو برامون بنویسین.

پاسخنامه کلیدی

ریاضیات

۱	۱	۲	**۳**	۴	۱۱	۱	۲	۳	**۴**
۲	۱	**۲**	۳	۴	۱۲	**۱**	۲	۳	۴
۳	۱	**۲**	۳	۴	۱۳	۱	**۲**	۳	۴
۴	۱	**۲**	۳	۴	۱۴	**۱**	۲	۳	۴
۵	۱	۲	۳	**۴**	۱۵	۱	**۲**	۳	۴
۶	۱	۲	۳	**۴**	۱۶	۱	۲	۳	**۴**
۷	۱	۲	۳	**۴**	۱۷	۱	۲	**۳**	۴
۸	۱	۲	**۳**	۴	۱۸	۱	**۲**	۳	۴
۹	**۱**	۲	۳	۴	۱۹	۱	۲	۳	**۴**
۱۰	**۱**	۲	۳	۴	۲۰	۱	۲	۳	**۴**
۲۱	۱	۲	**۳**	۴	۳۱	۱	۲	**۳**	۴
۲۲	۱	۲	۳	**۴**	۳۲	۱	**۲**	۳	۴
۲۳	**۱**	۲	۳	۴	۳۳	۱	۲	**۳**	۴
۲۴	۱	**۲**	۳	۴	۳۴	۱	۲	**۳**	۴
۲۵	۱	۲	۳	**۴**	۳۵	**۱**	۲	۳	۴
۲۶	۱	۲	**۳**	۴	۳۶	۱	۲	**۳**	۴
۲۷	۱	۲	۳	**۴**	۳۷	۱	**۲**	۳	۴
۲۸	۱	**۲**	۳	۴	۳۸	۱	**۲**	۳	۴
۲۹	۱	۲	**۳**	۴	۳۹	۱	۲	**۳**	۴
۳۰	**۱**	۲	۳	۴	۴۰	**۱**	۲	۳	۴

فیزیک

۴۱	۱	۲	۳	**۴**	۵۱	۱	۲	**۳**	۴
۴۲	۱	۲	**۳**	۴	۵۲	**۱**	۲	۳	۴
۴۳	۱	**۲**	۳	۴	۵۳	۱	۲	**۳**	۴
۴۴	۱	**۲**	۳	۴	۵۴	۱	**۲**	۳	۴
۴۵	**۱**	۲	۳	۴	۵۵	۱	**۲**	۳	۴
۴۶	۱	۲	۳	**۴**	۵۶	**۱**	۲	۳	۴
۴۷	۱	۲	**۳**	۴	۵۷	**۱**	۲	۳	۴
۴۸	**۱**	۲	۳	۴	۵۸	۱	۲	**۳**	۴
۴۹	۱	۲	**۳**	۴	۵۹	۱	۲	**۳**	۴
۵۰	۱	۲	**۳**	۴	۶۰	۱	۲	۳	**۴**
۶۱	۱	**۲**	۳	۴	۷۱	۱	۲	۳	**۴**
۶۲	**۱**	۲	۳	۴	۷۲	۱	**۲**	۳	۴
۶۳	۱	۲	۳	**۴**	۷۳	۱	۲	۳	**۴**
۶۴	**۱**	۲	۳	۴	۷۴	۱	**۲**	۳	۴
۶۵	۱	۲	**۳**	۴	۷۵	۱	۲	**۳**	۴
۶۶	۱	۲	**۳**	۴					
۶۷	۱	۲	**۳**	۴					
۶۸	۱	**۲**	۳	۴					
۶۹	۱	۲	۳	**۴**					
۷۰	۱	**۲**	۳	۴					

پاسخنامه کلیدی

شیمی

۷۶	۱	**۲**	۳	۴	۸۶	۱	۲	۳	**۴**
۷۷	۱	۲	۳	**۴**	۸۷	۱	۲	**۳**	۴
۷۸	۱	۲	**۳**	۴	۸۸	**۱**	۲	۳	۴
۷۹	**۱**	۲	۳	۴	۸۹	۱	**۲**	۳	۴
۸۰	۱	**۲**	۳	۴	۹۰	**۱**	۲	۳	۴
۸۱	**۱**	۲	۳	۴	۹۱	۱	۲	**۳**	۴
۸۲	۱	۲	۳	**۴**	۹۲	۱	**۲**	۳	۴
۸۳	۱	۲	۳	**۴**	۹۳	**۱**	۲	۳	۴
۸۴	۱	۲	۳	**۴**	۹۴	۱	۲	۳	**۴**
۸۵	**۱**	۲	۳	۴	۹۵	۱	**۲**	۳	۴

۹۶	۱	**۲**	۳	۴					
۹۷	۱	۲	۳	**۴**					
۹۸	۱	**۲**	۳	۴					
۹۹	۱	۲	۳	**۴**					
۱۰۰	۱	۲	**۳**	۴					
۱۰۱	۱	**۲**	۳	۴					
۱۰۲	۱	۲	۳	**۴**					
۱۰۳	**۱**	۲	۳	۴					
۱۰۴	**۱**	۲	۳	۴					
۱۰۵	۱	۲	۳	**۴**					

راهنمای پاسخنامه آزمون ها

زمان پاسخگویی:
سریع (زیر ۱ دقیقه) | استاندارد (۱-۲ دقیقه) | زمان‌بر (بیشتر از ۲ دقیقه).

پاسخ: گزینهٔ ۳ (متوسط ـ خط به خط ـ سریع ـ صفحه ۱۶ ـ ۱۱۰۱)

سطح سؤال:
آسان (اعتمادبه‌نفس) | متوسط (محک جدی) دشوار (چالش رشد).

هشتگ سوال:
شماره درس + شماره پایه دسته‌بندی راحت‌تر سؤالات

سبک سؤال:
خط به خط (متن کتاب) | ترکیبی (چند مبحث) | محاسباتی (فرمول و دقت) | مفهومی (درک عمیق).

شماره صفحه:
منبع اصلی رو راحت پیدا کنید.

یادتون باشه:

- ✓ هر سؤال یک فرصت یادگیریه، نه یک مانع.
- ✓ پاسخ‌نامه فقط جواب نیست؛ یک کارگاه آموزشی کامله.
- ✓ با هر آزمون و مرور این پاسخ‌نامه، یک پله بالاتر می‌رید و یک قدم به رؤیاتون نزدیک‌تر می‌شید.
- ✓ موفقیت فقط برای کسایی‌یه که با برنامه و انگیزه حرکت می‌کنن. شما همون آدمید.

بودجه‌بندی این آزمون

حسابان: جامع مباحث تابع (فصل ۱ حسابان ۲ + فصل ۲ حسابان ۱ + فصل ۵ ریاضی ۱)
هندسه: هندسه ۳ (فصل ۱ تا ابتدای حل دستگاه)، صفحه‌های ۹ تا ۲۳ + هندسه ۱، صفحه‌های ۹ تا ۳۷
گسسته: آشنایی با نظریه اعداد (درس ۱ و ۲)، صفحه‌های ۱ تا ۱۷

سهم در کنکور

حسابان: این مبحث در مجموع ۱ تست کنکور را پوشش داده است.
هندسه: این مبحث در مجموع ۲ تست کنکور را پوشش داده است.
گسسته: این مبحث در مجموع ۱ تست کنکور را پوشش داده است.

۱- اگر $f(x)=\begin{cases} ax^2+3 & [x]\geq 2 \\ x^2+ax & |x|\leq 2 \end{cases}$ یک تابع باشد، مقدار $f(a)$ کدام است؟

۱) $\frac{3}{4}$ ۲) $\frac{1}{4}$ ۳) $\frac{1}{2}$ ۴) $\frac{3}{2}$

پاسخ: گزینهٔ ۳ (آسان ـ مفهومی ـ سریع ـ ریاضی ۱ صفحهٔ ۱۱۳ ـ ۱۰۰۵)

ابتدا ضابطه‌ها را مرتب می‌کنیم:

$$\begin{matrix} [x]\geq 2 \Rightarrow x\geq 2 \\ |x|\leq 2 \Rightarrow -2\leq x\leq 2 \end{matrix} \Rightarrow f(x)=\begin{cases} ax^2+3 & x\geq 2 \\ x^2+ax & -2\leq x\leq 2 \end{cases}$$

برای اینکه f تابع باشد، باید در $x=2$ مقادیر دو ضابطه برابر باشند:

$$\begin{cases} f(2)=4a+3 \\ f(2)=4+2a \end{cases} \Rightarrow 4a+3=4+2a \Rightarrow a=\frac{1}{2}$$

$$f(a)=f(\frac{1}{2})=\frac{1}{4}+\frac{a}{2}\overset{a=\frac{1}{2}}{=\!=}\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=\frac{1}{2}$$

تابع چندضابطه‌ای

در یک رابطهٔ چندضابطه‌ای، اگر دامنهٔ ضابطه‌ها دارای **نقطهٔ مشترک** باشند، شرط تابع بودن آن است که مقدار ضابطه‌ها در تمام نقاط مشترک **یکسان** باشند.

۲- دو تابع $f(x)=a-\sqrt{4x^2+24x+36}$ و $g(x)=2-b|x|$ در بازهٔ $(-3,0)$ برابرند. مقدار $a+b$ کدام است؟

۱) ۴ ۲) ۶ ۳) ۳ ۴) ۲

پاسخ: گزینهٔ ۲ (آسان ـ ترکیبی ـ سریع ـ حسابان ۱ صفحهٔ ۴۱ ـ ۱۱۰۲)

$$f(x)=a-\sqrt{(2x+6)^2}=a-|2x+6| \Rightarrow \begin{cases} f(x)=a-2|x+3| \\ g(x)=2-b|x| \end{cases}$$

$$\xrightarrow{-3<x<0} \begin{cases} f(x)=a-2x-6=-2x+(a-6) \\ g(x)=2+bx=bx+2 \end{cases}$$

$$\xrightarrow{f=g} \begin{cases} a-6=2 \Rightarrow a=8 \\ -2=b \Rightarrow b=-2 \end{cases} \Rightarrow a+b=6$$

۳- اگر $f(x)=۱+\frac{۲x}{a}$ و $f(۳)=f^{-۱}(۳)$ باشد، مجموع مقادیر ممکن برای a کدام است؟

۱) ۳ ۲) ۱ ۳) -۲ ۴) -۴

پاسخ: گزینهٔ ۲ (آسان ـ محاسباتی ـ استاندارد ـ حسابان ۱ صفحهٔ ۵۸ ـ ۱۱۰۲)

$$f(۳)=f^{-۱}(۳)\Rightarrow f(f(۳))=f(f^{-۱}(۳))=۳$$
$$\Rightarrow f(۱+\frac{۶}{a})=۳\Rightarrow ۱+\frac{۲}{a}(۱+\frac{۶}{a})=۳$$
$$\xrightarrow{\times a^۲} a^۲+۲a+۱۲=۳a^۲\Rightarrow ۲a^۲-۲a-۱۲=۰$$
$$\Rightarrow a^۲-a-۶=۰\Rightarrow (a+۲)(a-۳)=۰\Rightarrow \text{مجموع مقادیر } a=a_۱+a_۲=-۲+۳=۱$$

نکته!

$$f(f^{-۱}(x))=x \qquad x\in D_{f^{-۱}}=R_f$$
$$f^{-۱}(f(x))=x \qquad x\in D_f$$

۴- اگر $f(x)=[-x]+[x+۱]$ و $g(x)=۲x^۲-x$ باشد، معادلهٔ $g(x)=f(x-۱)$ چند جواب دارد؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

پاسخ: گزینهٔ ۲ (آسان ـ محاسباتی ـ استاندارد ـ حسابان ۱ صفحهٔ ۵۳ ـ ۱۱۰۲)

$$g(x)=f(x-۱)$$
$$\Rightarrow ۲x^۲-x=[x]+[-x+۱]\Rightarrow ۲x^۲-x=[x]+[-x]+۱$$
$$\begin{cases} x\in\mathbb{Z}\Rightarrow ۲x^۲-x=۱\Rightarrow ۲x^۲-x-۱=۰\Rightarrow x=۱ \text{ یا } x=\frac{-۱}{۲}\xrightarrow{x\in\mathbb{Z}} x=۱ \\ x\notin\mathbb{Z}\Rightarrow ۲x^۲-x=-۱+۱\Rightarrow ۲x^۲-x=۰\Rightarrow x=۰ \text{ یا } x=\frac{۱}{۲}\xrightarrow{x\notin\mathbb{Z}} x=\frac{۱}{۲} \end{cases}$$

پس معادله ۲ جواب دارد.

راهنمای زرنگ‌بازی!

$$[x]+[-x]=\begin{cases} ۰ & x\in\mathbb{Z} \\ -۱ & x\notin\mathbb{Z} \end{cases}$$

۵- چندجمله‌ای $f(x)=x^۳-۳x^۲+x-۲$ مفروض است. باقی‌ماندهٔ تقسیم چندجمله‌ای $xf(x)+۲f(-x)$ بر $x^۲-۱$ کدام است؟

۱) $۹x-۸$ ۲) $-۹x+۸$ ۳) $۹x+۸$ ۴) $-۹x-۸$

پاسخ: گزینهٔ ۴ (متوسط ـ محاسباتی ـ استاندارد ـ حسابان ۲ صفحهٔ ۱۹ ـ ۱۲۰۱)

قضیهٔ تقسیم را می‌نویسیم:

$$xf(x)+۲f(-x)=(x^۲-۱)q(x)+(ax+b)$$
$$\begin{cases} x=۱\Rightarrow f(۱)+۲f(-۱)=a+b \\ x=-۱\Rightarrow -f(-۱)+۲f(۱)=-a+b \end{cases}$$

از طرفی:

$$f(۱)=-۳\ ,\ f(-۱)=-۷$$

بنابراین به دستگاه معادلات زیر می‌رسیم:

$$\begin{cases} a+b=-17 \\ -a+b=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b=-8 \\ a=-9 \end{cases} \Rightarrow r(x)=-9x-8$$

قضیهٔ تقسیم

در تقسیم چندجمله‌ای $f(x)$ بر $p(x)$ اگر $q(x)$ خارج‌قسمت و $r(x)$ باقی‌مانده باشد، آن‌گاه داریم:

$$\begin{array}{l|l} f(x) & p(x) \\ \hline r(x) & q(x) \end{array}$$

$$\Rightarrow f(x)=p(x)\times q(x)+r(x)$$

به‌طوری‌که اگر $p(x)$ از درجهٔ n باشد، $r(x)$ حداکثر از درجهٔ $(n-1)$ است.

جایگذاری ریشه‌های مقسوم‌علیه

اگر a یک ریشه از مقسوم‌علیه باشد، با جایگذاری آن در معادله داریم:

$$f(a)=r(a)$$

ماز

۶- **فرض کنید $p(x)=3x^4+ax^2+bx-2$ باشد. اگر باقی‌ماندهٔ تقسیم $p(x+1)$ بر $x+2$ برابر ۲ و باقی‌ماندهٔ تقسیم $p(x-1)$ بر $x-3$ برابر ۲ باشد، مقدار $2a-b$ کدام است؟**

۱) ۶ ۲) ۲ ۳) -2 ۴) -6

پاسخ: گزینهٔ ۴ (متوسط ـ ترکیبی ـ استاندارد ـ حسابان ۲ صفحهٔ ۱۹ ـ ۱۲۰۱)

$$x+2=0 \Rightarrow x=-2$$
$$p(-2+1)=2 \Rightarrow p(-1)=2 \Rightarrow 3+a-b-2=2 \Rightarrow a-b=1 \quad (1)$$
$$x-3=0 \Rightarrow x=3$$
$$p(3-1)=2 \Rightarrow p(2)=2 \Rightarrow 48+4a+2b-2=2 \Rightarrow 2a+b=-22 \quad (2)$$
$$(1),(2) \Rightarrow \begin{cases} a-b=1 \\ 2a+b=-22 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=-7 \\ b=-8 \end{cases} \Rightarrow 2a-b=-6$$

قلقش رو یاد بگیر!

برای محاسبهٔ باقی‌ماندهٔ تقسیم $p(x)$ بر $(x-a)$ کافی است $p(a)$ را محاسبه کنیم.

ماز

۷- **تابع $f(x)=\frac{mx+n}{x+m-n}$ وارون خود را فقط در نقاطی به طول α و β قطع می‌کند. به‌ازای کدام مقدار n رابطهٔ $\alpha^2+\beta^2=15$ برقرار است؟**

۱) -2 یا ۴ ۲) ۲ یا -4 ۳) -3 یا ۵ ۴) ۳ یا -5

پاسخ: گزینهٔ ۴ (متوسط ـ محاسباتی/ترکیبی ـ استاندارد ـ حسابان ۱ صفحهٔ ۶۱ ـ ۱۱۰۲)

چون نمودار $f(x)$ و $f^{-1}(x)$ **تنها در دو نقطه** همدیگر را قطع می‌کنند برهم **منطبق نیستند**، در این حالت تابع **هموگرافیک** وارون خودش را فقط روی **نیمساز ناحیهٔ اول و سوم** قطع می‌کند:

$$f(x)=x \Rightarrow \frac{mx+n}{x+m-n}=x$$
$$\Rightarrow x^2+mx-nx=mx+n$$

$$\Rightarrow x^{۲}-nx-n=۰ \Rightarrow \begin{cases}\alpha+\beta=S=n\\ \alpha\beta=P=-n\end{cases}$$

$$\alpha^{۲}+\beta^{۲}=S^{۲}-۲P=۱۵ \Rightarrow n^{۲}+۲n=۱۵$$

$$\Rightarrow n^{۲}+۲n-۱۵=۰ \Rightarrow (n-۳)(n+۵)=۰ \Rightarrow n=-۵ \text{ یا } ۳$$

به‌ازای هر دو مقدار n، معادلهٔ $x^{۲}-nx-n=۰$ **جواب دارد.**

۸- نمودار سهمی $f(x)=x^{۲}-۴x+۳$ را ۲ واحد به راست انتقال داده و سپس نسبت به مبدأ قرینه می‌کنیم. نمودار حاصل را چند واحد به بالا انتقال دهیم تا بر نمودار f مماس شود؟

۱) ۸ ۲) ۱۲ ۳) ۱۶ ۴) ۱۰

پاسخ: گزینهٔ ۳ (متوسط ـ ترکیبی ـ استاندارد ـ حسابان۲ صفحهٔ ۱۲ ـ ۱۲۰۱)

$$f(x)=x^{۲}-۴x+۳$$

$$\xrightarrow[x\to x-۲]{\text{دو واحد راست}} y=(x-۲)^{۲}-۴(x-۲)+۳=x^{۲}-۸x+۱۵$$

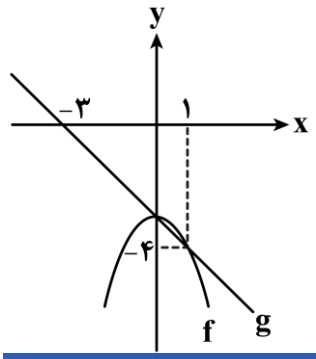
$$\xrightarrow[\times(-۱)]{\substack{\text{قرینه نسبت به مبدأ}\\ x\to -x}} y=-(x^{۲}+۸x+۱۵)=-x^{۲}-۸x-۱۵$$

$$\xrightarrow[+k]{k\text{ واحد بالا}} y=-x^{۲}-۸x-۱۵+k$$

$$\xrightarrow{\text{تقاطع با نمودار f}} x^{۲}-۴x+۳=-x^{۲}-۸x-۱۵+k \Rightarrow ۲x^{۲}+۴x+۱۸-k=۰$$

$$\Delta=۰ \text{(شرط مماس بودن)} \Rightarrow ۱۶-۸(۱۸-k)=۰ \xrightarrow{\div ۸} ۲-(۱۸-k)=۰ \Rightarrow k=۱۶$$

۹- در شکل مقابل نمودار سهمی f و خط g رسم شده است. ضابطهٔ وارون تابع f.g کدام است؟



۱) $y=\sqrt[۳]{x-۸}-۱$
۲) $y=\sqrt[۳]{x-۸}+۱$
۳) $y=\sqrt[۳]{x+۸}-۱$
۴) $y=\sqrt[۳]{x+۸}+۱$

پاسخ: گزینهٔ ۱ (متوسط ـ ترکیبی ـ استاندارد ـ حسابان ۲ صفحهٔ ۱۴ ـ ۱۲۰۱)

ضابطهٔ f و g را می‌نویسیم:

$$\begin{cases}f(x)=ax^{۲}+bx+c \xrightarrow{x_S=۰} f(x)=ax^{۲}+c\\ g(x)=mx+n \xrightarrow[(۱,-۴)]{(-۳,۰)} g(x)=-x-۳\end{cases}$$

$$\begin{cases}f(۰)=g(۰) \Rightarrow c=-۳\\ f(۱)=g(۱) \Rightarrow a+c=-۴\end{cases} \Rightarrow a=-۱$$

پس $f(x)=-x^{۲}-۳$ است.

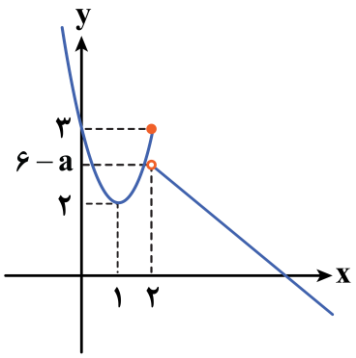
$$y=(f.g)(x)=(-x^{۲}-۳)(-x-۳)=x^{۳}+۳x^{۲}+۳x+۹=(x+۱)^{۳}+۸ \Rightarrow y=(x+۱)^{۳}+۸ \xrightarrow{\text{وارون}} y=\sqrt[۳]{x-۸}-۱$$

۱۰- برد تابع $f(x)=\begin{cases}x^2-2x+3 & x\le 2\\ a+6-ax & x>2\end{cases}$ برابر $\mathbb{R}$ است. اگر حدود a بازهٔ $[\alpha,\beta)$ باشد، مقدار $\beta-\alpha$ کدام است؟

۱) ۴ ۲) ۳ ۳) ۵ ۴) ۶

پاسخ: گزینهٔ ۱ (متوسط ـ ترکیبی ـ استاندارد ـ ریاضی ۱ صفحهٔ ۱۱۳ ـ ۱۰۰۵)

از آنجا که برد ضابطهٔ اول بازهٔ $[2,+\infty)$ است، برای اینکه برد تابع برابر با $\mathbb{R}$ باشد، برد ضابطهٔ دوم باید حداقل بازهٔ $(-\infty,2)$ را پوشش دهد.

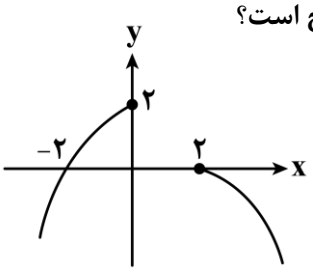


بنابراین در ضابطهٔ دوم باید **شیب منفی** باشد تا $\mathbb{R}$ را بپوشاند:

$$\begin{cases}-a<0\\ 6-a\ge 2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a>0\\ a\le 4\end{cases}\Rightarrow 0<a\le 4\Rightarrow a\in(0,4]$$

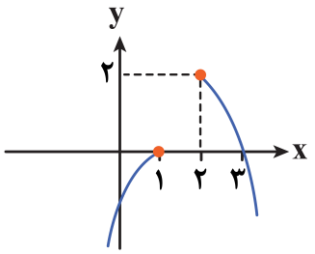
پس $\alpha=0$ و $\beta=4$ و درنتیجه $\beta-\alpha=4$ است.

۱۱- نمودار تابع $y=f(x)$ به‌صورت مقابل است. دامنهٔ تابع $g(x)=\sqrt{\frac{x^2-4}{f(4-2x)}}$ شامل چند عدد صحیح است؟



۱) ۱
۲) ۲
۳) ۳
۴) ۴

پاسخ: گزینهٔ ۴ (متوسط ـ محاسباتی ـ استاندارد ـ حسابان ۲ صفحهٔ ۹ ـ ۱۲۰۱)



$$f(4-2x)\le 0\Rightarrow\begin{cases}4-2x\le -2\Rightarrow x\ge 3\\ 4-2x\ge 2\Rightarrow x\le 1\end{cases}$$

$$f(4-2x)>0\Rightarrow -2<4-2x\le 0\Rightarrow 2\le x<3$$

عبارت زیر رادیکال را **تعیین علامت** می‌کنیم:

		-2		1		2		3	
x^2-4	+	0	−		−	0	+		+
$f(4-2x)$	−		−	0			+	0	−
زیر رادیکال	−	0	+	‖		0	+	‖	−

$$\Rightarrow D_g=[-2,1)\cup[2,3)$$

۴ عدد صحیح $-2,-1,0,2$ در دامنه قرار دارند.

۱۲- نقطهٔ $A(a,a+1)$ روی تابع $y=2f(\frac{x}{3})$ با نقطهٔ $A'(b+1,b)$ روی تابع $y=3+f(2-x)$ متناظر است. مقدار $\frac{a}{b}$ کدام است؟

۱) $-\frac{3}{2}$ ۲) $\frac{3}{2}$ ۳) $\frac{2}{3}$ ۴) $-\frac{2}{3}$

پاسخ: گزینهٔ ۱ (متوسط ـ محاسباتی ـ استاندارد ـ حسابان ۲ صفحهٔ ۱۰ ـ ۱۲۰۱)

مختصات نقاط را در ضابطه قرار می‌دهیم:

$$y=2f(\frac{x}{3}) \text{ روی } A(a,a+1) \Rightarrow a+1=2f(\frac{a}{3}) \Rightarrow f(\frac{a}{3})=\frac{a+1}{2} \quad (1)$$

$$y=3+f(2-x) \text{ روی } A'(b+1,b) \Rightarrow b=3+f(2-b-1) \Rightarrow f(1-b)=b-3 \quad (2)$$

$$(1),(2) \Rightarrow \begin{cases} 1-b=\frac{a}{3} \\ b-3=\frac{a+1}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a+3b=3 \\ a-2b=-7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=-3 \\ b=2 \end{cases} \Rightarrow \frac{a}{b}=-\frac{3}{2}$$

۱۳- اگر $f(x)=\begin{cases} 3x-1 & x\le 1 \\ 6-x & x>1 \end{cases}$ باشد، معادلهٔ $f(1-2x)=f(1+3x)$ چند جواب دارد؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

پاسخ: گزینهٔ ۲ (متوسط ـ محاسباتی ـ استاندارد ـ حسابان ۱ صفحهٔ ۶۸ ـ ۱۱۰۲)

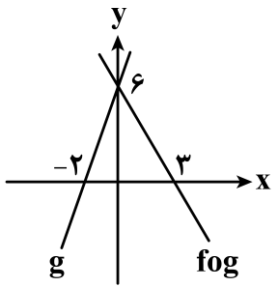
فرض می‌کنیم $1-2x=1+3x$ پس یکی از جواب‌ها، $x=0$ است. حال داریم:

$$x>0 \xrightarrow[1+3x>1]{1-2x<1} \begin{cases} f(1-2x)=3(1-2x)-1=-6x+2 \\ f(1+3x)=6-(1+3x)=-3x+5 \end{cases} \Rightarrow -6x+2=-3x+5 \Rightarrow x=-1 \quad \text{غ ق ق}$$

$$x<0 \xrightarrow[1+3x<1]{1-2x>1} \begin{cases} f(1-2x)=6-(1-2x)=2x+5 \\ f(1+3x)=3(1+3x)-1=9x+2 \end{cases} \Rightarrow 2x+5=9x+2 \Rightarrow x=\frac{3}{7} \quad \text{غ ق ق}$$

بنابراین معادله فقط یک جواب دارد.

۱۴- نمودار توابع g و fog به‌صورت مقابل است. اگر تابع $mf+ng$ به‌ازای اعداد حقیقی m و n همانی باشد، مقدار n کدام است؟



۱) $\frac{5}{17}$
۲) $\frac{5}{12}$
۳) $\frac{7}{17}$
۴) $\frac{7}{12}$

پاسخ: گزینهٔ ۱ (متوسط ـ ترکیبی ـ استاندارد ـ حسابان ۱ صفحهٔ ۷۰ و ۶۹ ـ ۱۱۰۲)

$$\begin{cases} g(x)=3x+6 \\ fog(x)=-2x+6 \end{cases} \Rightarrow f(3x+6)=-2x+6$$

$$\xrightarrow[x=\frac{t-6}{3}]{3x+6=t} f(t)=-2(\frac{t-6}{3})+6 \Rightarrow f(t)=-\frac{2}{3}t+10$$

حال داریم:

$$mf(x)+ng(x)=x \Rightarrow -\frac{۲}{۳}mx+۱۰m+۳nx+۶n=x$$

$$\xrightarrow{۱۵\times}\begin{cases}-\frac{۲}{۳}m+۳n=۱\\ ۱۰m+۶n=۰\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}-۱۰m+۴۵n=۱۵\\ ۱۰m+۶n=۰\end{cases}\Rightarrow n=\frac{۱۵}{۵۱}=\frac{۵}{۱۷}$$

قلقش رو یاد بگیر!

اگر ضابطهٔ $f(u(x))$ را داشته باشیم و ضابطهٔ f را بخواهیم از **تغییر متغیر** $u(x)=t$ کمک می‌گیریم و x را برحسب t می‌یابیم.

۱۵- اگر $f(۳)+f(۳x)=\sqrt{۳x+۱}$ باشد، ضابطهٔ تابع $y=f^{-۱}(x-۱)$ به کدام صورت است؟

۱) $x^۲+۱$ ۲) $x^۲-۱$ ۳) $x^۲-x$ ۴) $x^۲+x$

پاسخ: گزینهٔ ۲ (متوسط ـ محاسباتی ـ استاندارد ـ حسابان ۱ صفحهٔ ۶۱ ـ ۱۱۰۲)

$$x=۱\Rightarrow f(۳)+f(۳)=۲\Rightarrow f(۳)=۱\Rightarrow f(۳x)=\sqrt{۳x+۱}-۱\xrightarrow{۳x=t}f(t)=\sqrt{t+۱}-۱\Rightarrow y=\sqrt{x+۱}-۱$$

حال ضابطهٔ وارون تابع را می‌یابیم:

$$y=\sqrt{x+۱}-۱\Rightarrow y+۱=\sqrt{x+۱}\Rightarrow x+۱=(y+۱)^۲\Rightarrow x=(y+۱)^۲-۱$$

$$\Rightarrow f^{-۱}(x)=(x+۱)^۲-۱$$

$$\Rightarrow f^{-۱}(x-۱)=x^۲-۱$$

۱۶- تابع $f(x)=x^۲+۲x+\sqrt{x-۲}$ مفروض است. اگر مجموعه جواب نامعادلهٔ $۳\le f^{-۱}(x)\le ۶$ به‌صورت $[\alpha,\beta]$ باشد، حاصل $\beta-\alpha$ کدام است؟

۱) ۱۸ ۲) ۲۴ ۳) ۲۸ ۴) ۳۴

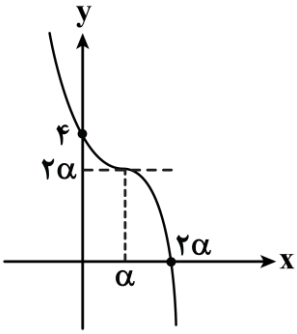
پاسخ: گزینهٔ ۴ (متوسط ـ ترکیبی ـ استاندارد ـ حسابان ۲ صفحهٔ ۱۸ ـ ۱۲۰۱)

دامنهٔ f بازهٔ $[۲,+\infty)$ است، پس با توجه به اینکه جمع توابع اکیداً صعودی، اکیداً صعودی می‌شود، f در دامنه‌اش **اکیداً صعودی** است:

$$۳\le f^{-۱}(x)\le ۶\Rightarrow f(۳)\le fof^{-۱}(x)\le f(۶)\Rightarrow ۱۶\le x\le ۵۰$$

پس $\beta-\alpha=۵۰-۱۶=۳۴$ است.

۱۷- نمودار مقابل فقط از قرینه‌یابی و انتقال تابع $y=kx^۳$ به‌دست آمده است. مقدار $f(-۲)$ کدام است؟



۱) ۳۱
۲) ۱۸
۳) ۵۶
۴) ۱۲

پاسخ: گزینهٔ ۳ (متوسط ـ محاسباتی ـ استاندارد ـ حسابان ۲ صفحهٔ ۱۴ ـ ۱۲۰۱)

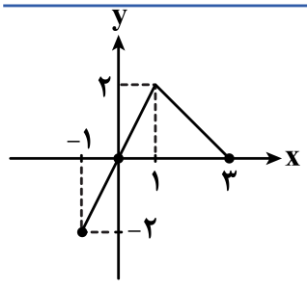
$$f(x)=k(x-\alpha)^۳+۲\alpha$$

$$f(۲\alpha)=۰\Rightarrow k\alpha^۳+۲\alpha=۰\xrightarrow[\alpha\neq ۰]{\div\alpha}k\alpha^۲=-۲\quad (*)$$

$$f(۰)=۴\Rightarrow -k\alpha^۳+۲\alpha=۴\Rightarrow (k\alpha^۲)(-\alpha)+۲\alpha=۴\xrightarrow{(*)}(-۲)(-\alpha)+۲\alpha=۴\Rightarrow \alpha=۱\Rightarrow k=-۲$$

$$\Rightarrow f(x)=-۲(x-۱)^۳+۲\Rightarrow f(-۲)=۵۶$$

۱۸- نمودار تابع f به‌صورت مقابل است. دامنهٔ تابع $g(x)=\frac{f(x)}{f(2x-1)}$ شامل چند عدد صحیح است؟

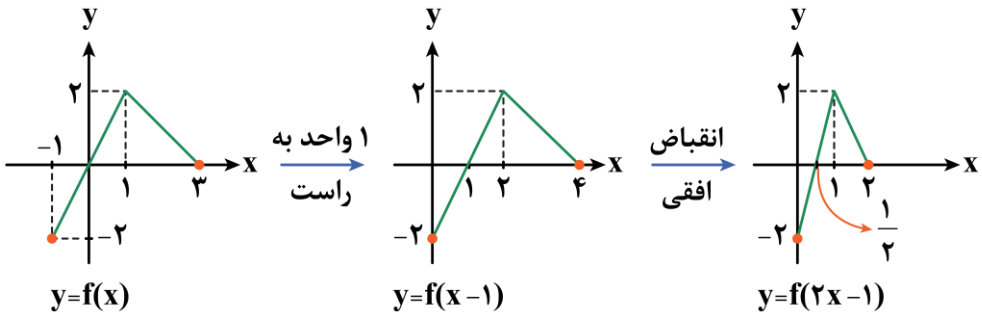


۱) ۱
۲) ۲
۳) ۳
۴) ۴

پاسخ: گزینهٔ ۲ (سخت ـ ترکیبی ـ زمان‌بر ـ حسابان ۲ صفحهٔ ۹ ـ ۱۲۰۱)

دامنهٔ f به‌صورت $D_f=[-1,3]$ است. حال دامنهٔ $f(2x-1)$ را پیدا می‌کنیم.

نمودار $f(2x-1)$ را رسم می‌کنیم:



$\Rightarrow D_{f(2x-1)}=[0,2]$

$$D_g=D_f\cap D_{f(2x-1)}-\{x|f(2x-1)=0\}=[-1,3]\cap[0,2]-\left\{\frac{1}{2},2\right\}=[0,2)-\left\{\frac{1}{2}\right\}$$

۲ عدد صحیح صفر و یک در دامنه قرار دارند.

۱۹- اگر $f(x)=2+\sqrt{6-x}$ باشد، برد تابع $y=fof(2x)$ کدام است؟

۱) $[4,+\infty)$ ۲) $(-\infty,4]$ ۳) $[2,+\infty)$ ۴) $[2,4]$

پاسخ: گزینهٔ ۴ (سخت ـ ترکیبی ـ زمان‌بر ـ حسابان ۱ صفحهٔ ۶۷ ـ ۱۱۰۲)

تابع f **اکیداً نزولی** است، پس $fof(2x)$ **اکیداً صعودی** است. پس ابتدا دامنهٔ آن را می‌یابیم:

$D_f=(-\infty,6]$

$D_{f(2x)}: 2x\le 6\Rightarrow x\le 3$

$D_{f(f(2x))}: x\le 3 \text{ و } f(2x)\le 6\Rightarrow 2+\sqrt{6-2x}\le 6\Rightarrow 6-2x\le 16\Rightarrow x\ge -5$

بنابراین دامنهٔ $f(f(2x))$ برابر $[-5,3]$ است.

$y=fof(2x)$ صعودی

$$\begin{cases} x=-5\Rightarrow y=fof(-10)=f(6)=2\\ x=3\Rightarrow y=fof(6)=f(2)=4\end{cases}\Rightarrow \text{برد } fof(2x)=[fof(-5),fof(3)]$$

پس برد بازهٔ $[2,4]$ است.

جمع‌بندی صعودی یا نزولی بودن قرینه، جمع یا ترکیب توابع

جدول پایین رو درباب که بهت قول می‌دم خیلی از جاها به دردت می‌خوره...

$f(x)$	$g(x)$	$-f(x)$	$f(x)+g(x)$	$(fog)(x)$	$(gof)(x)$
صعودی	صعودی	نزولی	صعودی	صعودی	صعودی
نزولی	نزولی	صعودی	نزولی	صعودی	صعودی

نکته!

اگر دامنهٔ تابع **پیوستهٔ** f برابر با $[a,b]$ باشد، آن‌گاه:

۱) اگر f **صعودی** باشد برد f برابر $[f(a),f(b)]$ است.

۲) اگر f **نزولی** باشد برد تابع f برابر با $[f(b),f(a)]$است.

ماز

۲۰- با فرض $f(x)=۶-\sqrt{x+۵}$ جواب معادلهٔ $fof(x)=f^{-۱}(۳)$ در کدام بازه قرار دارد؟

۱) $(۳۰,۳۴)$ ۲) $(۳۴,۳۸)$ ۳) $(۳۸,۴۲)$ ۴) $(۴۲,۴۶)$

پاسخ: گزینهٔ ۴ (سخت ـ ترکیبی ـ زمان‌بر ـ حسابان ۱ صفحهٔ ۶۸ ـ ۱۱۰۲)

$$f^{-۱}(۳)=k \Rightarrow f(k)=۳ \Rightarrow ۶-\sqrt{k+۵}=۳ \Rightarrow \sqrt{k+۵}=۳ \Rightarrow k=۴ \Rightarrow f^{-۱}(۳)=۴$$

بنابراین:

$$fof(x)=۴ \xrightarrow{f(-۱)=۴} f(f(x))=f(-۱)$$

f یک به یک است $\Rightarrow f(x)=-۱$

$$\Rightarrow ۶-\sqrt{x+۵}=-۱ \Rightarrow \sqrt{x+۵}=۷ \Rightarrow x+۵=۴۹ \Rightarrow x=۴۴ \in (۴۲,۴۶)$$

نقطه روی تابع یا وارونش

اگر $f^{-۱}(a)=b$ آن‌گاه $f(b)=a$ است و برعکس.

ماز

۲۱- ماتریس‌های $A=\begin{bmatrix} x+y & ۲x-y \\ x-y & ۳x+۱ \end{bmatrix}$ و $B=[b_{ij}]$ با ضابطهٔ $b_{ij}=i-j+۳$ مفروض‌اند. اگر $A-B$ ماتریسی قطری باشد، حاصل $x+y$ کدام است؟

۱) ۶ ۲) ۸ ۳) -۸ ۴) -۶

پاسخ: گزینهٔ ۳ (آسان ـ محاسباتی ـ سریع ـ هندسه ۳ صفحهٔ ۱۲ و ۱۳ ـ ۱۲۰۱)

چون ماتریس $A-B$ **موجود** است، بنابراین ماتریس B، ۲×۲ است. ابتدا ماتریس B را تشکیل می‌دهیم:

$$B=\begin{bmatrix} ۳ & ۲ \\ ۴ & ۳ \end{bmatrix}$$

حال ماتریس $A-B$ را می‌سازیم:

$$A-B=\begin{bmatrix} x+y & ۲x-y \\ x-y & ۳x+۱ \end{bmatrix}-\begin{bmatrix} ۳ & ۲ \\ ۴ & ۳ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \text{——} & ۲x-y-۲ \\ x-y-۴ & \text{——} \end{bmatrix}$$

ماتریس $A-B$ **قطری** است و درایه‌های غیر قطر اصلی **صفر** می‌باشند:

$$\begin{cases} ۲x-y-۲=۰ \\ x-y-۴=۰ \end{cases} \xrightarrow{-} x+۲=۰ \Rightarrow x=-۲ \Rightarrow y=-۶ \Rightarrow x+y=-۸$$

ماتریس قطری

ماتریس قطری ماتریسی مربعی است که درایه‌های غیر قطر اصلی همگی **صفر** هستند.

ماز

۲۲- اگر $A=\begin{bmatrix}\sqrt{۳} & ۱\\ -۱ & \sqrt{۳}\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}۳ & -۲\\ ۲ & ۳\end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix}۱ & \sqrt{۳}\\ -\sqrt{۳} & ۱\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}۳ & ۲\\ -۲ & ۳\end{bmatrix}$، مجموع درایه‌های ماتریس $(AB)^۲$ کدام است؟

۱) -۲۷۰۴ ۲) ۲۷۰۴ ۳) ۵۴۰۸ ۴) -۵۴۰۸

پاسخ: گزینهٔ ۴ (سخت ـ مفهومی ـ زمان‌بر ـ هندسه ۳ صفحهٔ ۲۰ ـ ۱۲۰۱)

روش اول

ماتریس‌های $\begin{bmatrix}۳ & -۲\\ ۲ & ۳\end{bmatrix}$ و $\begin{bmatrix}۱ & \sqrt{۳}\\ -\sqrt{۳} & ۱\end{bmatrix}$ **جابه‌جایی‌پذیر** هستند، بنابراین داریم:

$$AB=\begin{bmatrix}\sqrt{۳} & ۱\\ -۱ & \sqrt{۳}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۱ & \sqrt{۳}\\ -\sqrt{۳} & ۱\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۳ & -۲\\ ۲ & ۳\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۳ & ۲\\ -۲ & ۳\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۰ & ۴\\ -۴ & ۰\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۱۳ & ۰\\ ۰ & ۱۳\end{bmatrix}$$

$$AB=\begin{bmatrix}۰ & ۴\\ -۴ & ۰\end{bmatrix}\times ۱۳I=۱۳\begin{bmatrix}۰ & ۴\\ -۴ & ۰\end{bmatrix}\Rightarrow (AB)^۲=۱۶۹\begin{bmatrix}۰ & ۴\\ -۴ & ۰\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۰ & ۴\\ -۴ & ۰\end{bmatrix}$$

$$=۱۶۹\begin{bmatrix}-۱۶ & ۰\\ ۰ & -۱۶\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-۲۷۰۴ & ۰\\ ۰ & -۲۷۰۴\end{bmatrix}\Rightarrow -۲۷۰۴+(-۲۷۰۴)=-۵۴۰۸$$

روش دوم

$$A=\begin{bmatrix}\sqrt{۳} & ۱\\ -۱ & \sqrt{۳}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۳ & -۲\\ ۲ & ۳\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۳\sqrt{۳}+۲ & -۲\sqrt{۳}+۳\\ -۳+۲\sqrt{۳} & ۲+۳\sqrt{۳}\end{bmatrix}$$

$$B=\begin{bmatrix}۱ & \sqrt{۳}\\ -\sqrt{۳} & ۱\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۳ & ۲\\ -۲ & ۳\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۳-۲\sqrt{۳} & ۲+۳\sqrt{۳}\\ -۳\sqrt{۳}-۲ & -۲\sqrt{۳}+۳\end{bmatrix}$$

$$AB=\begin{bmatrix}۳\sqrt{۳}+۲ & -۲\sqrt{۳}+۳\\ -۳+۲\sqrt{۳} & ۲+۳\sqrt{۳}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۳-۲\sqrt{۳} & ۲+۳\sqrt{۳}\\ -۳\sqrt{۳}-۲ & -۲\sqrt{۳}+۳\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}(۲+۳\sqrt{۳})(۳-۲\sqrt{۳})-(۲+۳\sqrt{۳})(۳-۲\sqrt{۳}) & (۲+۳\sqrt{۳})^۲+(۳-۲\sqrt{۳})^۲\\ -(۳-۲\sqrt{۳})^۲-(۲+۳\sqrt{۳})^۲ & (۲+۳\sqrt{۳})(-۳+۲\sqrt{۳})-(۲+۳\sqrt{۳})(۲\sqrt{۳}-۳)\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}۰ & ۳۱+۱۲\sqrt{۳}+۲۱-۱۲\sqrt{۳}\\ -۲۱+۱۲\sqrt{۳}-۳۱-۱۲\sqrt{۳} & ۰\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۰ & ۵۲\\ -۵۲ & ۰\end{bmatrix}=۵۲\begin{bmatrix}۰ & ۱\\ -۱ & ۰\end{bmatrix}$$

$$(AB)^۲=۵۲^۲\begin{bmatrix}۰ & ۱\\ -۱ & ۰\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۰ & ۱\\ -۱ & ۰\end{bmatrix}=۵۲^۲\begin{bmatrix}-۱ & ۰\\ ۰ & -۱\end{bmatrix}\Rightarrow \text{مجموع درایه‌ها}=-۲\times ۵۲^۲=-۵۴۰۸$$

نکته!

ماتریس‌های به فرم $\begin{bmatrix}a & -b\\ b & a\end{bmatrix}$ با یکدیگر **جابه‌جایی‌پذیرند**.

۲۳- برای ماتریس‌های A و B داریم $\begin{cases} ۴A^۶+۳A^۲+۲A+B=\bar{O} \\ A^۲-A+I=\bar{O} \end{cases}$، ماتریس B کدام است؟

۱) $A^۲-۶A$ ۲) $-۵A+I$ ۳) $۵A+I$ ۴) $A^۲+۶A$

پاسخ: گزینهٔ ۱ (سخت ـ ترکیبی ـ استاندارد ـ هندسه ۳ صفحهٔ ۲۰ ـ ۱۲۰۱)

A و I **تعویض‌پذیرند**، پس:

$$A^۲-A+I=\bar{O} \xrightarrow{\times(A+I)} (A^۲-A+I)\times(A+I)=\bar{O} \Rightarrow A^۳+I^۳=\bar{O} \Rightarrow A^۳=-I \Rightarrow A^۶=I$$

$$۴A^۶+۳A^۲+۲A+B=\bar{O} \xrightarrow{A^۲=A-I} ۴I+۳(A-I)+۲A+B=\bar{O}$$

$$\Rightarrow ۴I+۳A-۳I+۲A+B=\bar{O} \xrightarrow{I=A-A^۲} B=-۵A+A^۲-A=A^۲-۶A$$

۲۴- فرض کنید $A=\begin{bmatrix} ۱ & ۲ & -۱ \\ ۰ & ۳ & ۲ \end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix} ۱ & -۲ \\ ۰ & ۴ \\ -۱ & ۱ \end{bmatrix}$ باشند، اگر $CAB=۷۶I$ باشد، مجموع درایه‌های ماتریس C کدام است؟

۱) ۱۳ ۲) ۲۶ ۳) ۳۸ ۴) ۵۲

پاسخ: گزینهٔ ۲ (متوسط ـ مفهومی ـ استاندارد ـ هندسه ۳ صفحهٔ ۲۲ و ۲۳ ـ ۱۲۰۱)

ابتدا AB را پیدا می‌کنیم:

$$AB=\begin{bmatrix} ۱ & ۲ & -۱ \\ ۰ & ۳ & ۲ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۱ & -۲ \\ ۰ & ۴ \\ -۱ & ۱ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۲ & ۵ \\ -۲ & ۱۴ \end{bmatrix}$$

فرض کنیم $AB=D$، با توجه به فرض سؤال داریم: $CD=۷۶I$

برای به‌دست آوردن C کافی است تساوی داده شده را **از سمت راست** در $D^{-۱}$ **ضرب** کنیم:

$$CDD^{-۱}=۷۶ID^{-۱} \Rightarrow C=۷۶D^{-۱}$$

پس باید $D^{-۱}$ را پیدا کنیم:

$$D=\begin{bmatrix} ۲ & ۵ \\ -۲ & ۱۴ \end{bmatrix} \Rightarrow D^{-۱}=\frac{۱}{۲۸+۱۰}\begin{bmatrix} ۱۴ & -۵ \\ ۲ & ۲ \end{bmatrix}=\frac{۱}{۳۸}\begin{bmatrix} ۱۴ & -۵ \\ ۲ & ۲ \end{bmatrix}$$

بنابراین داریم:

$$C=۷۶D^{-۱}=\frac{۷۶}{۳۸}\begin{bmatrix} ۱۴ & -۵ \\ ۲ & ۲ \end{bmatrix}=۲\begin{bmatrix} ۱۴ & -۵ \\ ۲ & ۲ \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow C=\begin{bmatrix} ۲۸ & -۱۰ \\ ۴ & ۴ \end{bmatrix} \Rightarrow \text{مجموع درایه‌های } C=۲۸-۱۰+۴+۴=۲۶$$

وارون ماتریس

به شرط **وارون‌پذیری** ($|A|\neq ۰$) وارون ماتریس ۲×۲، $A=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ برابر است با:

$$A^{-۱}=\frac{۱}{ad-bc}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

۲۵- اگر برای ماتریس A رابطه‌های ماتریسی $A\begin{bmatrix}۱\\۲\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۱\\۲\end{bmatrix}$ و $A\begin{bmatrix}۳\\۴\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۳\\۲\end{bmatrix}$ برقرار باشد، مجموع درایه‌های روی قطر اصلی $A^۴$ کدام است؟

۱) ۳۳ ۲) ۱۶ ۳) ۲ ۴) ۱۷

پاسخ: گزینهٔ ۴ (سخت ـ مفهومی ـ استاندارد ـ هندسه ۳ صفحهٔ ۲۲ و ۲۳ ـ ۱۲۰۱)

با توجه به ضرب ماتریس‌ها دو رابطه را به شکل یک تساوی ماتریسی می‌نویسیم:

$$A\begin{bmatrix}۳&۱\\۴&۲\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۳&۱\\۲&۲\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow A=\begin{bmatrix}۳&۱\\۲&۲\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}۳&۱\\۴&۲\end{bmatrix}^{-۱}=\begin{bmatrix}۳&۱\\۲&۲\end{bmatrix}\times\frac{۱}{۲}\begin{bmatrix}۲&-۱\\-۴&۳\end{bmatrix}=\frac{۱}{۲}\begin{bmatrix}۲&۰\\-۴&۴\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۱&۰\\-۲&۲\end{bmatrix}$$

روش اول

این ماتریس **پایین مثلثی** است و درایه‌های روی قطر اصلی $A^۴$، $۱^۴$ و $۲^۴$ هستند که مجموعشان ۱۷ است.

روش دوم

$$A=\begin{bmatrix}۱&۰\\-۲&۲\end{bmatrix}$$

$$A^۲=\begin{bmatrix}۱&۰\\-۲&۲\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۱&۰\\-۲&۲\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۱&۰\\-۶&۴\end{bmatrix}$$

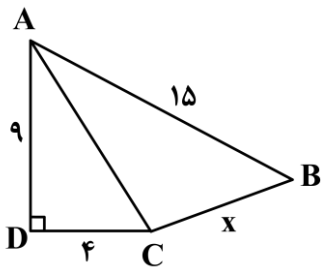
$$A^۴=\begin{bmatrix}۱&۰\\-۶&۴\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۱&۰\\-۶&۴\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۱&۰\\-۳۰&۱۶\end{bmatrix}$$

مجموع درایه‌های قطر اصلی $=۱+۱۶=۱۷$

ویژگی ماتریس‌های مثلثی

اگر A یک ماتریس **بالامثلثی** (یا **پایین‌مثلثی**) باشد، A^n هم یک ماتریس **بالامثلثی** (یا **پایین‌مثلثی**) است و درایه‌های قطر اصلی A^n توان nام درایه‌های قطر اصلی A است.

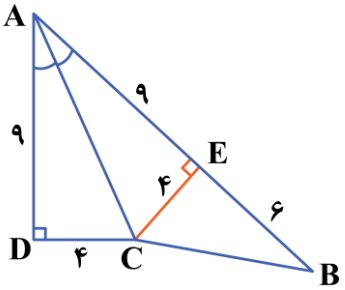
۲۶- اگر در شکل مقابل AC نیمساز زاویهٔ A باشد، مقدار x کدام است؟



۱) ۸
۲) $۵\sqrt{۲}$
۳) $۲\sqrt{۱۳}$
۴) $\frac{۲۰}{۳}$

پاسخ: گزینهٔ ۳ (آسان ـ مفهومی ـ سریع ـ هندسه ۱ صفحهٔ ۱۱ ـ ۱۰۰۱)

می‌دانیم هر نقطه روی **نیمساز** زاویه از دو ضلع زاویه **به یک فاصله** است، پس از C **عمود** CE را بر AB رسم می‌کنیم و داریم:



$$CE=DC=۴$$

و با توجه به **همنهشتی** مثلث‌های ACE و ACD داریم:

$$AE=AD=۹$$

$$\Rightarrow EB = ۱۵ - ۹ = ۶ \xrightarrow{\text{فیثاغورس در } \overset{\triangle}{BEC}} BC = \sqrt{۴^۲ + ۶^۲} = \sqrt{۵۲} = ۲\sqrt{۱۳} \Rightarrow x = ۲\sqrt{۱۳}$$

نقاط روی نیمساز

هر نقطه روی نیمساز از دو ضلع زاویه **به یک فاصله** است.

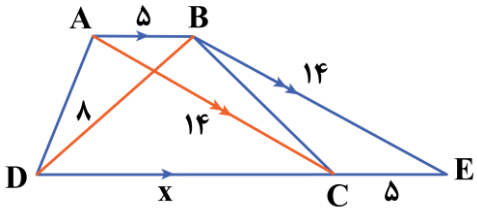
ماز

۲۷- در ذوزنقه‌ای با دو قاعدهٔ نابرابر، طول یکی از قاعده‌ها ۵ و طول دو قطر آن ۸ و ۱۴ است. اگر ذوزنقه قابل رسم باشد، مجموع مقادیر طبیعی قابل قبول برای قاعدهٔ دیگر کدام است؟

۱) ۱۳۳ ۲) ۱۳۲ ۳) ۱۳۱ ۴) ۱۳۰

پاسخ: گزینهٔ ۴ (سخت ـ ترکیبی ـ استاندارد ـ هندسه ۱ صفحهٔ ۲۷ ـ ۱۰۰۱)

از رأس B، BE را موازی قطر AC رسم می‌کنیم، از آن‌جایی که چهارضلعی ABEC **متوازی‌الاضلاع** است، داریم:



$$CE = AB = ۵ \ , \ BE = AC = ۱۴$$

فرض کنید $CD = x$ برای آن‌که بتوان ذوزنقه را رسم کرد باید بتوان مثلث BED را رسم کرد، پس اضلاع آن در **نامساوی مثلث** صدق می‌کنند.

$$۱۴ - ۸ < x + ۵ < ۱۴ + ۸ \xrightarrow{-۵} ۱ < x < ۱۷$$

از طرفی x نمی‌تواند ۵ باشد، زیرا ABCD **متوازی‌الاضلاع** می‌شود، پس:

$$x = ۲, ۳, ۴, ۶, ۷, \ldots, ۱۶$$

$$\text{مجموع مقادیر } x = (۲ + \cdots + ۱۶) - ۵ = \frac{(۲ + ۱۶) \times ۱۵}{۲} - ۵ = ۱۳۰$$

نامساوی مثلثی

مثلث با اضلاع a, b, c وقتی قابل رسم است که: $|a - b| < c < a + b$

ماز

۲۸- در مثلث ABC نقاط D و E به ترتیب روی AC و AB قرار دارند، به‌طوری‌که $A\hat{B}D = A\hat{C}E = ۱۰^\circ$، $D\hat{B}C = ۳۰^\circ$ و $E\hat{C}B = ۵۰^\circ$. اگر محل برخورد CE و BD را F بنامیم، $F\hat{A}D$ چند درجه است؟

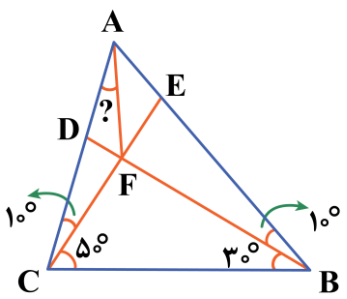
۱) ۲۰° ۲) ۳۰° ۳) ۴۰° ۴) ۵۰°

پاسخ: گزینهٔ ۲ (متوسط ـ ترکیبی ـ استاندارد ـ هندسه ۱ صفحهٔ ۱۹ ـ ۱۰۰۱)

$$B\hat{D}C = ۱۸۰^\circ - (۶۰^\circ + ۳۰^\circ) = ۹۰^\circ$$

$$C\hat{E}B = ۱۸۰^\circ - (۵۰^\circ + ۴۰^\circ) = ۹۰^\circ$$

در نتیجه BD و CE **ارتفاع** هستند.

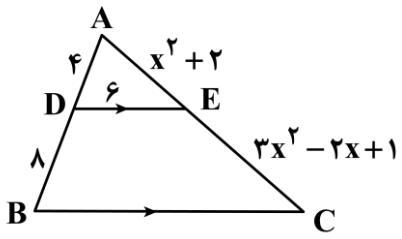


حال از آن‌جایی که ارتفاع‌ها **همرس‌اند**، F **محل تلاقی ارتفاع‌هاست** و امتداد AF بر BC **عمود** است و ارتفاع است و زاویهٔ $C\hat{A}F$ متمم $A\hat{C}B$ است:

$$\Rightarrow F\hat{A}D = ۹۰^\circ - ۶۰^\circ = ۳۰^\circ$$

ماز

۲۹- با توجه به شکل، محیط مثلث ABC کدام است؟



۱) ۶۳
۲) ۵۴
۳) ۳۹
۴) ۳۶

پاسخ: گزینهٔ ۳ (متوسط ـ ترکیبی ـ استاندارد ـ هندسه ۱ صفحهٔ ۳۴ و ۳۵ ـ ۱۰۰۲)

با استفاده از قضیهٔ تالس داریم:

$$DE \parallel BC \Rightarrow \frac{۴}{۸} = \frac{x^۲+۲}{۳x^۲-۲x+۱} \Rightarrow \frac{۱}{۲} = \frac{x^۲+۲}{۳x^۲-۲x+۱} \Rightarrow ۳x^۲-۲x+۱ = ۲x^۲+۴$$

$$\Rightarrow x^۲-۲x-۳=۰ \Rightarrow x=-۱ \text{ , } x=۳$$

$x=۳$ قابل قبول نیست، زیرا اگر $x=۳$ باشد، $AE=۱۱$ می‌شود و مثلث ADE تشکیل نمی‌شود $(۶+۴<۱۱)$. در نتیجه $x=-۱$ است و $AE=۳$ و $EC=۶$ می‌شود. همچنین با استفاده از **تعمیم قضیه تالس**، $BC=۱۸$ می‌شود:

$$\frac{۶}{BC} = \frac{۴}{۱۲} \Rightarrow BC = ۱۸$$

بنابراین:

$$\text{محیط مثلث } ABC = ۱۲+۹+۱۸ = ۳۹$$

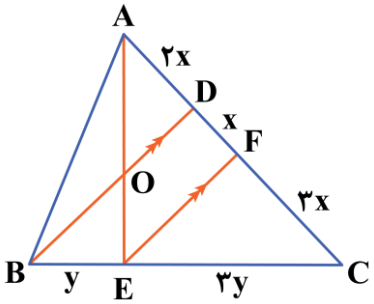
ماز

۳۰- در مثلث ABC به مساحت ۱۲۰، نقطهٔ D روی ضلع AC طوری قرار دارد که $\frac{AD}{DC}=\frac{۱}{۲}$ و نقطهٔ E روی ضلع BC طوری قرار دارد که $\frac{BE}{EC}=\frac{۱}{۳}$. اگر دو پاره‌خط AE و BD یکدیگر را در نقطهٔ O قطع کنند، مساحت مثلث DOE کدام است؟

۱) ۱۰
۲) ۱۲
۳) ۱۵
۴) ۲۰

پاسخ: گزینهٔ ۱ (سخت ـ ترکیبی ـ استاندارد ـ هندسه ۱ صفحهٔ ۳۱ و ۳۴ ـ ۱۰۰۲)

با توجه به فرض، اگر $BE=y$، آن‌گاه $EC=۳y$.



از E **موازی** BD رسم می‌کنیم تا AC را در F قطع کند، بنابر **قضیهٔ تالس** در مثلث BDC داریم:

$$\frac{CF}{FD} = \frac{۳y}{y} = ۳$$

فرض کنیم $CF=۳x$ و $DF=x$، پس $DC=۴x$. با توجه به فرض داریم: $AD=۲x$، پس بنابر **قضیهٔ تالس** در مثلث AEF داریم:

$$\frac{OE}{AE} = \frac{DF}{AF} = \frac{x}{۳x} = \frac{۱}{۳} \quad (*)$$

$$\Rightarrow \frac{S_{\triangle ACE}}{S_{\triangle ABC}} = \frac{EC}{BC} = \frac{۳y}{۴y} = \frac{۳}{۴} \Rightarrow S_{\triangle ACE} = \frac{۳}{۴} \times ۱۲۰ = ۹۰$$

$$\frac{S_{\triangle ADE}}{S_{\triangle ACE}} = \frac{AD}{AC} = \frac{۲x}{۶x} = \frac{۱}{۳} \Rightarrow S_{\triangle ADE} = \frac{۱}{۳} \times ۹۰ = ۳۰$$

$$\frac{S_{\triangle DOE}}{S_{\triangle ADE}} = \frac{OE}{AE} \overset{(*)}{=} \frac{۱}{۳} \Rightarrow S_{\triangle ODE} = \frac{۱}{۳} \times ۳۰ = ۱۰$$

۳۱- در تقسیم عدد a بر b، اگر ۱۶ واحد به مقسوم اضافه کنیم، مقسوم‌علیه و باقی‌مانده تغییر نکرده و خارج‌قسمت به اندازهٔ باقی‌مانده (r) افزایش می‌یابد. اگر $r \neq ۱$ باشد، b کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۴ ۳) ۸ ۴) ۱۶

پاسخ: گزینهٔ ۳ (متوسط ـ محاسباتی ـ سریع ـ گسسته صفحهٔ ۱۴ ـ ۱۲۰۱)

$$\begin{cases} a = bq + r \\ a + ۱۶ = b(q + r) + r \end{cases}$$

$$\Rightarrow bq + r + ۱۶ = bq + br + r \Rightarrow br = ۱۶ \xrightarrow[r \neq ۱]{r < b} r = ۲,\ b = ۸$$

کوچک‌تر بودن باقی‌مانده از مقسوم‌علیه

در رابطهٔ تقسیم a بر b، اگر q خارج‌قسمت و r باقی‌مانده باشد، داریم: $a = bq + r \ ; \ ۰ \leq r < b$

۳۲- اگر a عددی صحیح و $b = [(a, a+۱۲), ۸]$ باشد، b چند مقدار متمایز می‌تواند داشته باشد؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۶ ۴) ۸

پاسخ: گزینهٔ ۲ (متوسط ـ محاسباتی ـ سریع ـ گسسته صفحهٔ ۱۳ ـ ۱۲۰۱)

اگر $d = (a, a+۱۲)$ باشد، خواهیم داشت:

$$\left.\begin{matrix} d \mid a \\ d \mid a + ۱۲ \end{matrix}\right\} \Rightarrow d \mid ۱۲ \xrightarrow{d > ۰} d = ۱, ۲, ۳, ۴, ۶, ۱۲$$

بنابراین:

$$b = [۱, ۸] = ۸ \quad b = [۲, ۸] = ۸ \quad b = [۳, ۸] = ۲۴$$
$$b = [۴, ۸] = ۸ \quad b = [۶, ۸] = ۲۴ \quad b = [۱۲, ۸] = ۲۴$$

پس b، دو مقدار متمایز ۸ و ۲۴ می‌تواند داشته باشد.

ویژگی عاد کردن

$$\begin{cases} d \mid a \\ d \mid b \end{cases} \Rightarrow d \mid ma + nb \quad (m, n \in \mathbb{Z})$$

۳۳- چند نقطه با مختصات طبیعی روی منحنی $x^۲+(۱+y)x=۳y$ قرار دارند؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۴

پاسخ: گزینهٔ ۳ (متوسط ـ محاسباتی ـ استاندارد ـ گسسته صفحهٔ ۱۲ ـ ۱۲۰۱)

$$x^۲+x+xy-۳y=۰\Rightarrow y(x-۳)=-x^۲-x\Rightarrow y=-\frac{x^۲+x}{x-۳}$$

$$\xrightarrow{y\in\mathbb{N}}\begin{cases}x-۳\mid x^۲+x\\ x-۳\mid x^۲-۹\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x-۳\mid x+۹\\ x-۳\mid x-۳\end{cases}\Rightarrow x-۳\mid ۱۲\Rightarrow x-۳=\pm۱,\pm۲,\pm۳,\pm۴,\pm۶,\pm۱۲$$

$$\Rightarrow x\in\{-۹,-۳,-۱,۰,۱,۲,۴,۵,۶,۷,۹,۱۵\}$$

x و y اعداد **طبیعی** هستند، بنابراین $۰<x<۳$ و داریم:

$$x=۱\Rightarrow y=۱\checkmark\quad,\quad x=۲\Rightarrow y=۶\checkmark$$

در نتیجه دو نقطه با مختصات طبیعی وجود دارد.

قِلِقِش رو یاد بگیر!

اگر $P(x,y)$ یک رابطه بین x و y باشد، برای یافتن نقاطی با **مختصات صحیح** (یا **طبیعی**) که در رابطه صدق کنند y را برحسب x می‌نویسیم که معمولاً یک **کسر** است. پس در کسر به‌دست آمده باید **صورت مضربی از مخرج** باشد.

۳۴- اگر $d=(۶x+۲,۱۱x+۵)$ و d بیشترین مقدار ممکن باشد، کدام عدد **نمی‌تواند** مربع کامل باشد؟ $(k\in\mathbb{Z})$

۱) dk ۲) $dk+۱$ ۳) $dk+۲$ ۴) $dk+۴$

پاسخ: گزینهٔ ۳ (متوسط ـ ترکیبی ـ استاندارد ـ گسسته صفحهٔ ۱۳ ـ ۱۲۰۱)

$$\begin{cases}d\mid ۵x+۱۱\Rightarrow d\mid ۱۰x+۲۲\\ d\mid ۲x+۶\Rightarrow d\mid ۱۰x+۳۰\end{cases}\xrightarrow{-}d\mid ۳۰-۲۲\Rightarrow d\mid ۸\Rightarrow d=۸$$ بیشترین مقدار ممکن:

عدد $(۸k+۲)$ هیچ‌گاه مربع کامل نمی‌باشد، بنابراین پاسخ گزینهٔ ۳ است.

توجه کنید که $۸k$ به ازای $k=۲$ مربع کامل است.

$(۸k+۱)$ به ازای $k=۱$ مربع کامل است.

$(۸k+۴)$ به ازای $k=۴$ مربع کامل است.

رفع ابهام!

اثبات مربع کامل نبودن $(۸k+۲)$: می‌دانیم که $۸k+۲=۲(۴k+۱)$ و همواره $۴k+۱$ عددی **فرد** است. از طرفی در $۲(۴k+۱)$ تنها یک عامل ۲ داریم، پس $(۸k+۲)$ هیچ‌گاه نمی‌تواند مربع کامل باشد.

۳۵- α عددی گنگ و β و $\alpha\beta^۲+\beta^۳$ اعدادی گویا می‌باشند. اگر $\beta\mid \alpha^۳-۴$ باشد، مقدار $\alpha^۲\beta+\alpha^۳$ کدام است؟

۱) ۴ ۲) -۴ ۳) ۱۶ ۴) -۱۶

پاسخ: گزینهٔ ۱ (آسان ـ مفهومی ـ سریع ـ گسسته صفحهٔ ۹ ـ ۱۲۰۱)

$$\alpha\beta^۲+\beta^۳=\beta^۲(\alpha+\beta)=\text{گویا}\Rightarrow\beta^۲=۰\Rightarrow\beta=۰$$

($\beta^۲$: گویا، $(\alpha+\beta)$: گنگ)

بنابراین:

$$۰\mid \alpha^۳-۴\Rightarrow\alpha^۳-۴=۰\Rightarrow\alpha^۳=۴$$

درنتیجه:

$$\Rightarrow \alpha\beta^{۲}+\alpha^{۳}=\alpha^{۳}=۴$$

تنها حالت حاصل‌ضرب گویا در گنگ که گویا می‌شود...

حاصل‌ضرب عدد گنگ a در عدد گویای b تنها زمانی برابر با **عددی گویا** است که عدد گویا برابر با **صفر** باشد.

۳۶- در یک تقسیم، مقسوم مضرب ۲۸ و مقسوم‌علیه مضرب ۴۲ است. اگر باقی‌مانده مضرب ۲۲ باشد، مجموع ارقام کوچک‌ترین مقدار طبیعی باقی‌مانده کدام است؟

۱) ۵ ۲) ۷ ۳) ۱۰ ۴) ۱۱

پاسخ: گزینهٔ ۳ (متوسط ـ ترکیبی ـ استاندارد ـ گسسته صفحهٔ ۱۴ ـ ۱۲۰۱)

فرض می‌کنیم مقسوم a، مقسوم‌علیه b و باقی‌مانده r باشد، حال a و b **مضرب ۱۴** بوده و در نتیجه باقی‌مانده نیز **مضرب ۱۴** است:

$$۱۴|a\ ,\ ۱۴|b \Rightarrow ۱۴|a-bq \Rightarrow ۱۴|r$$

پس r مضرب ۱۴ و ۲۲ است، پس **کمترین** مقدار r برابر است با:

$$r=[۱۴,۲۲]=۷\times۲\times۱۱=۱۵۴$$

مجموع ارقام ۱۵۴ برابر ۱۰ می‌باشد.

ک.م.م

کوچک‌ترین عدد طبیعی که **بر a و b بخش‌پذیر** باشد، برابر با ک.م.م این دو عدد یعنی $[a,b]$ است.

۳۷- باقی‌ماندهٔ تقسیم عدد فرد a بر ۹، چهار برابر باقی‌ماندهٔ تقسیم a بر ۱۰ است. دهگان باقی‌ماندهٔ تقسیم a بر ۹۰ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۳ ۳) ۷ ۴) ۴

پاسخ: گزینهٔ ۲ (سخت ـ ترکیبی ـ استاندارد ـ گسسته صفحهٔ ۱۴ ـ ۱۲۰۱)

$$\begin{cases} a=۱۰q+r \xrightarrow{a\text{ فرد}} r \text{ فرد است} \\ a=۹q'+۴r \Rightarrow ۰\le ۴r<۹ \Rightarrow ۰\le r\le ۲ \end{cases} \Rightarrow r=۱$$

بنابراین:

$$\begin{cases} a=۱۰q+۱ \xrightarrow{\times ۹} ۹a=۹۰q+۹ \\ a=۹q'+۴ \xrightarrow{\times ۱۰} ۱۰a=۹۰q'+۴۰ \end{cases} \xrightarrow{-} a=۹۰(q'-q)+۳۱ \Rightarrow a=۹۰k+۳۱$$

باقی‌ماندهٔ تقسیم a بر ۹۰ برابر ۳۱ و دهگان آن برابر ۳ است.

۳۸- اگر k حاصل‌ضرب دو عدد طبیعی متوالی باشد، حاصل $(۴k+۱,۲۹۶)$ کدام نمی‌تواند باشد؟

۱) ۱ ۲) ۳ ۳) ۹ ۴) ۸۱

پاسخ: گزینهٔ ۲ (سخت ـ ترکیبی ـ سریع ـ گسسته صفحهٔ ۱۳ ـ ۱۲۰۱)

دو عدد طبیعی متوالی را t و $t+۱$ در نظر می‌گیریم:

$$k=t(t+۱) \Rightarrow k=t^{۲}+t \Rightarrow ۴k+۱=۴t^{۲}+۴t+۱=(۲t+۱)^{۲}$$

$$۱۲۹۶=۳۶^{۲}$$

بنابراین $۴k+۱$ **مربع کامل** است، ۱۲۹۶ نیز مربع کامل است.

ب.م.م دو عدد مربع کامل، یک عدد مربع کامل بوده و در نتیجه نمی‌تواند برابر ۳ باشد.

ب.م.م دو عدد مربع کامل

اگر $(m,n)=d$ باشد، $(m^۲,n^۲)=d^۲$ است، پس **ب.م.م دو عدد مربع کامل، عددی مربع کامل است.**

ماز

۳۹- اگر $(n^۳-n,۱۵۴)=۱۴$ باشد، $(n^۳-n,۶۶)$ کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۶ ۴) ۶۶

پاسخ: گزینهٔ ۳ (متوسط ـ ترکیبی ـ استاندارد ـ گسسته صفحهٔ ۱۴ ـ ۱۲۰۱)

$$۱۵۴=۲\times۷\times۱۱\Rightarrow(n^۳-n,۲\times۷\times۱۱)=۱۴\Rightarrow\begin{cases}۲\mid n^۳-n\\ ۷\mid n^۳-n\\ ۱۱\nmid n^۳-n\end{cases}$$

از طرفی می‌دانیم $n^۳-n=n(n-۱)(n+۱)$ حاصل‌ضرب **سه عدد متوالی** است و همواره بر **۳ بخش‌پذیر** است، بنابراین:

$$(n^۳-n,۶۶)=(n^۳-n,۲\times۳\times۱۱)=۲\times۳=۶$$

حاصل‌ضرب n عدد متوالی

حاصل‌ضرب هر k عدد صحیح متوالی بر **k بخش‌پذیر** است.

ماز

۴۰- چند جفت عدد حقیقی مانند (a,b) یافت می‌شود که در تساوی $\frac{۱}{a+۲}+\frac{۱}{b+۳}=\frac{۱}{a+b+۵}$ صدق کند؟

۱) کمتر از ۲ ۲) ۲ ۳) ۴ ۴) بی‌شمار

پاسخ: گزینهٔ ۱ (متوسط ـ خط‌به‌خط ـ سریع ـ گسسته صفحهٔ ۸ ـ ۱۲۰۱)

چون معادلهٔ $\frac{۱}{x}+\frac{۱}{y}=\frac{۱}{x+y}$ در $\mathbb{R}$ جواب ندارد، بنابراین با **جایگذاری** $x=a+۲$ و $y=b+۳$ معلوم می‌شود که معادلهٔ داده شده در $\mathbb{R}$ جواب ندارد.

یه نکتهٔ طلایی!

تساوی $\frac{۱}{x}+\frac{۱}{y}=\frac{۱}{x+y}$ به‌ازای هیچ x و yای برقرار نیست، زیرا:

$$\frac{۱}{x}+\frac{۱}{y}=\frac{۱}{x+y}\Rightarrow\frac{x+y}{xy}=\frac{۱}{x+y}\Rightarrow(x+y)^۲=xy\Rightarrow x^۲+y^۲+۲xy-xy=۰\Rightarrow x^۲+y^۲+xy=۰$$

$$\xrightarrow{x\neq y}\frac{x^۳-y^۳}{x-y}=۰\Rightarrow x=y\ (\text{غ‌ق‌ق})$$

ماز

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

بودجه‌بندی این آزمون

فیزیک ۱: فصل‌های ۱ و ۲
فیزیک ۳: فصل ۱

سهم در کنکور

پایهٔ دهم: درمجموع ۳ تست از ۳۵ تست کنکور را پوشش داده است.
پایهٔ دوازدهم: درمجموع ۴ تست از ۳۵ تست کنکور را پوشش داده است.

سلام به مازی‌های عزیز

خوشحالیم که توی آزمون‌های سالیانه اون‌قدر خفن بودین که مجبورمون کردین یه آزمون خفن در حد خودتون براتون آماده کنیم.

در این آزمون، قراره فصل «حرکت شناسی» رو در قد و قوارهٔ سؤالای سخت کنکور بررسی کنیم تا خیالتونو راحت کنیم که اگه سخت‌ترین سؤال‌ها هم در کنکورتون بیاد، براش آماده‌اید. از طرح سؤالات سخت بی‌جا پرهیز و تلاش کردیم سؤالایی رو در آزمون بیاریم که در عین سخت بودن، برای کنکورتون هم مفید باشن. در قسمت پایه، به دو فصل اول فیزیک دهم پرداختیم. در این قسمت دو سه تا سؤال آسون‌تر هم دادیم، چون در کنکورهای اخیر معمولاً از فیزیک دهم سؤالای سخت طرح نمی‌شه. چند تا سؤال ایده‌دار و خوشگل هم از لولهٔ لاشکل و بارومتر دادیم که فهم فیزیکی و محاسباتتون رو به چالش بکشیم.

امیدواریم آزمون براتون مفید باشه و خوشحال می‌شیم اگه نظرتون در مورد سؤالا رو باهامون به اشتراک بذارین. می‌دونین که نظرتون برامون خیلی مهمه.

موفق باشید.

سجاد صادقی‌زاده (رتبهٔ ۱ کنکور ۱۳۹۲)، سعید احمدی و محمدجواد سورچی - مسئولین درس فیزیک آزمون‌های پریمیوم ماز

۴۱- مورچه‌ای بر روی عقربهٔ ثانیه‌شمار یک ساعت دیواری به طول ۳۰cm از نوک عقربه به سمت مرکز ساعت با تندی ثابت $0/5\frac{cm}{s}$ حرکت می‌کند. در مدت‌زمان ۱۵s، اندازهٔ سرعت متوسط حرکت مورچه چند سانتی‌متر بر ثانیه است؟

۱) $2\sqrt{2}$ ۲) $4\sqrt{2}$ ۳) ۲ ۴) ۲/۵

پاسخ: گزینهٔ ۴ (متوسط ـ محاسباتی ـ استاندارد ـ صفحهٔ ۳ ـ ۱۲۰۱)

نکته

برای محاسبهٔ جابه‌جایی متحرک در دو بعد باید از رابطهٔ فیثاغورس استفاده کنیم:

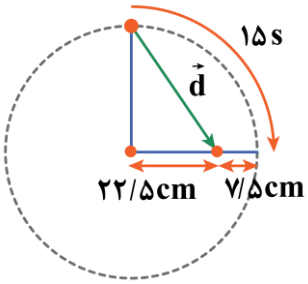
$$d=\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}$$

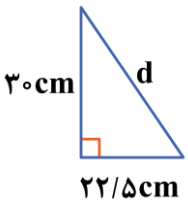
راه نجات سریع

به‌صورت جداگانه بررسی کن در مدت ۱۵s، هرکدام (مورچه و نوک عقربهٔ ثانیه‌شمار) چقدر جابه‌جا می‌شه. بعدش مکان اولیهٔ مورچه رو در موقعیت اولش (روی نوک عقربه) به مکان نهایی مورچه بعد از ۱۵s (با فاصله‌ای به‌اندازهٔ جابه‌جایی مورچه روی عقربه از نوک عقربه) وصل کن و جابه‌جایی رو حساب کن.

کام اول

در مدت‌زمان ۱۵s مورچه بر روی عقربهٔ ثانیه‌شمار به‌اندازهٔ $d_1 = v_1\Delta t = ۰/۵ \times ۱۵ = ۷/۵cm$ به سمت مرکز ثابت ساعت حرکت می‌کند. از طرفی عقربهٔ ثانیه‌شمار هم حرکت می‌کند. مطابق شکل زیر، اندازهٔ جابه‌جایی مورچه برابر است با:





$$d = \sqrt{۲۲/۵^۲ + ۳۰^۲} = ۷/۵\sqrt{۳^۲ + ۴^۲}$$
$$\Rightarrow d = ۷/۵\sqrt{۵^۲} = ۳۷/۵cm$$

کام آخر

اندازهٔ سرعت متوسط مورچه برابر است با:

$$v_{av} = \frac{d}{\Delta t} \xrightarrow[\Delta t = ۱۵s]{d = ۳۷/۵cm} v_{av} = \frac{۳۷/۵}{۱۵} = ۲/۵\frac{cm}{s}$$

ماز

۴۲- متحرکی که بر روی محور x حرکت می‌کند، در مبدأ زمان از مکان $\vec{x}_۰ = (۵m)\vec{i}$ در جهت محور x و در لحظهٔ $t = ۷s$ نیز از مکان $\vec{x} = (-۹m)\vec{i}$ در جهت محور x عبور می‌کند. چه تعداد از عبارت‌های زیر در مورد حرکت این متحرک در ۷ ثانیهٔ اول حرکت آن الزاماً صحیح است؟

الف: تندی متوسط متحرک بزرگ‌تر از $۲\frac{m}{s}$ است.

ب: طول بردار مکان متحرک در لحظهٔ $t = ۷s$، ۸۰ درصد بزرگ‌تر از طول بردار مکان متحرک در مبدأ زمان است.

ج: جهت حرکت متحرک، دو بار و جهت بردار مکان، یک بار تغییر می‌کند.

د: سرعت متوسط متحرک برابر با $\vec{v}_{av} = (-۲\frac{m}{s})\vec{i}$ است.

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

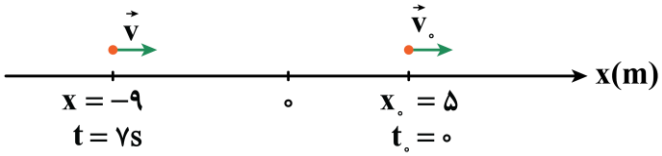
پاسخ: گزینهٔ ۳ (متوسط ـ محاسباتی ـ استاندارد ـ صفحهٔ ۵ ـ ۱۲۰۱)

نکات

۱ـ با داشتن مکان اولیه و نهایی نمی‌توانیم مسیر حرکت را به‌طور دقیق رسم کنیم.

۲ـ اگر متحرکی بر روی خط راست حرکت کند، به‌ازای متفاوت بودن جهت هرکدام از سرعت‌های اولیه و نهایی با جهت سرعت متوسط، متحرک، حداقل یک‌بار تغییر جهت می‌دهد.

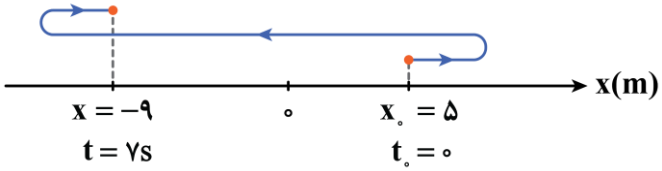
با توجه به اطلاعات سؤال داریم:



بررسی موارد:

الف

با توجه به این‌که در لحظه‌های $t = ۰$ و $t = ۷s$ سرعت متحرک، مثبت است، اگر مسیر حرکت متحرک را مطابق شکل زیر رسم کنیم، درمی‌یابیم این متحرک حداقل دو بار تغییر جهت داده است؛ بنابراین تندی متوسط متحرک از اندازهٔ سرعت متوسط آن بیش‌تر است.

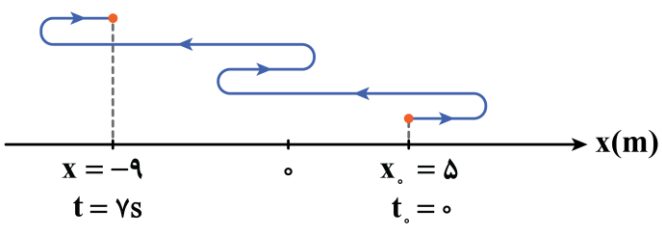


$$v_{av} = \frac{\Delta x}{\Delta t} \Rightarrow v_{av} = \frac{-۹-۵}{۷-۰} = -۲\frac{m}{s}$$
$$s_{av} > |v_{av}| \Rightarrow s_{av} > ۲\frac{m}{s} \quad (\checkmark)$$

ب) اندازهٔ بردار مکان متحرک در لحظهٔ $t=0$ برابر با $5m$ و اندازهٔ بردار مکان متحرک در لحظهٔ $t=7s$ برابر با $9m$ است؛ بنابراین:

$$\frac{|x|-|x_0|}{|x_0|}=\frac{9-5}{5}\times 100=80\% \quad (\checkmark)$$

ج)



با داشتن مکان و سرعت متحرک در دو لحظهٔ ابتدا و انتهای بازهٔ زمانی، نمی‌توانیم مسیر حرکت متحرک را رسم کنیم؛ بنابراین ممکن است متحرک بیش‌تر از دو بار تغییر جهت بدهد و بیش‌تر از یک‌بار بردار مکان متحرک تغییر جهت بدهد. به شکل زیر دقت کنید. در اینجا متحرک ۴ بار تغییر جهت می‌دهد و بردار مکان آن دو بار تغییر جهت می‌دهد. $(\times)$

د) برای به‌دست آوردن سرعت متحرک در یک بازهٔ زمانی، ابتدا باید جابه‌جایی متحرک در آن بازه را به‌دست آوریم. از طرفی می‌دانیم در محاسبهٔ جابه‌جایی، نقاط شروع و پایان حرکت مهم هستند و مسیر حرکت متحرک اهمیتی ندارد؛ بنابراین:

$$\vec{v}_{av}=\frac{\vec{x}-\vec{x}_0}{t-t_0}=\frac{-9\vec{i}-(+5\vec{i})}{7-0}=\frac{-14\vec{i}}{7}=(-2\frac{m}{s})\vec{i} \quad (\checkmark)$$

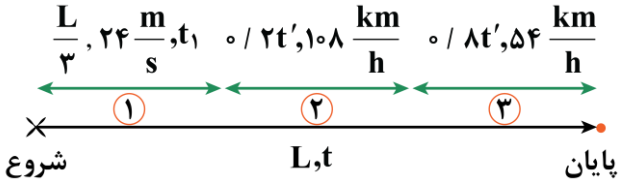
۴۳- خودرویی بر روی مسیر مستقیم درحال حرکت است. اگر این خودرو $\frac{1}{3}$ مسیر حرکت را با تندی ثابت $24\frac{m}{s}$، ۲۰ درصد زمان باقی‌مانده را با تندی ثابت $108\frac{km}{h}$ و ادامهٔ مسیر را با تندی ثابت $54\frac{km}{h}$ بپیماید، تندی متوسط خودرو در کل مسیر چند متر بر ثانیه است؟

۱) $\frac{206}{11}$ ۲) $\frac{216}{11}$ ۳) $\frac{226}{11}$ ۴) $\frac{236}{11}$

پاسخ: گزینهٔ ۲ (متوسط ـ محاسباتی ـ استاندارد ـ صفحهٔ ۱۳ ـ ۱۲۰۱)

کام اول

اگر طول مسیر L و مدت‌زمان کل حرکت t باشد، می‌توانیم بنویسیم:



مدت‌زمان بخش (۱): $t_1=\frac{\frac{L}{3}}{24}=\frac{L}{72}$

$$\begin{cases}\ell_2+\ell_3=L-\frac{L}{3}=\frac{2L}{3}\\ \text{مسافت بخش (۲)}: \ell_2=0/2t'\times(\frac{108}{3/6})=0/2t'\times 30=6t'\\ \text{مسافت بخش (۳)}: \ell_3=0/8t'\times(\frac{54}{3/6})=12t'\end{cases}$$

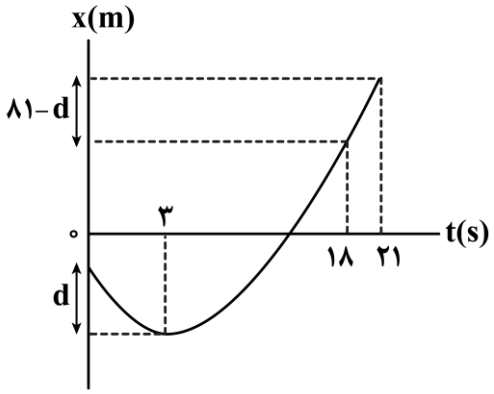
$$\Rightarrow \ell_2+\ell_3=\frac{2L}{3}\Rightarrow 6t'+12t'=\frac{2L}{3}\Rightarrow L=27t'$$

تندی متوسط متحرک در کل مسیر برابر است با:

$$s_{av}=\frac{\ell}{t}\Rightarrow s_{av}=\frac{L}{t_1+t'}\xrightarrow[t_1=\frac{\ell_1}{v_1}=\frac{\frac{L}{3}}{24}=\frac{L}{72}]{L=27t'}s_{av}=\frac{27t'}{\frac{27t'}{72}+t'}=\frac{27t'}{\frac{11}{8}t'}=\frac{216}{11}\frac{m}{s}$$

ماز

۴۴- نمودار مکان ـ زمان متحرکی که روی خط راست درحال حرکت است مطابق سهمی شکل زیر است. بزرگی شتاب متحرک چند متر بر مربع ثانیه است؟ $(d>0)$



۱) $\frac{2}{3}$

۲) $\frac{3}{2}$

۳) $\frac{4}{3}$

۴) ۴

پاسخ: گزینهٔ ۲ (متوسط ـ محاسباتی ـ استاندارد ـ صفحهٔ ۱۷ ـ ۱۲۰۱)

در حرکت شتاب ثابت در بازه‌های زمانی یکسان، جابه‌جایی‌ها تشکیل تصاعدهای با قدر نسبت aT^2 می‌دهند. در نمودار جابه‌جایی در سه ثانیهٔ هفتم (۱۸s تا ۲۱s) و سه ثانیهٔ اول (صفر تا ۳s) مشخص شده است.

$$\Delta x_n=\Delta x_1+(n-1)aT^2$$

$$\xrightarrow[n=7,\Delta x_1=-d]{T=3s,\Delta x_7=81-d}81-d=-d+6a\times 3^2\Rightarrow a=\frac{81}{54}=\frac{3}{2}\frac{m}{s^2}$$

ماز

۴۵- متحرکی با شتاب ثابت روی محور x درحال حرکت است. اگر بردار سرعت متوسط متحرک در بازهٔ زمانی t_1 تا t_2 $(t_2>t_1)$ در خلاف جهت بردار شتاب متحرک باشد، چند مورد از گزاره‌های زیر الزاماً صحیح است؟

الف: حرکت متحرک در لحظهٔ t_1 تندشونده است.

ب: حرکت متحرک در لحظهٔ t_2 تندشونده است.

ج: حرکت متحرک در لحظهٔ t_2 کندشونده است.

د: تندی متحرک در لحظهٔ t_1 بزرگ‌تر از تندی متحرک در لحظهٔ t_2 است.

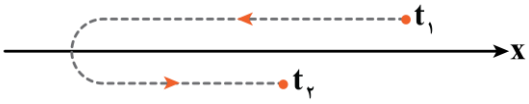
۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) صفر

پاسخ: گزینهٔ ۱ (متوسط ـ استدلالی ـ استاندارد ـ صفحهٔ ۱۷ ـ ۱۲۰۱)

در حرکت با شتاب ثابت یا حرکت پیوسته تندشونده است و یا در ابتدا کندشونده و پس از تغییر جهت تندشونده است. در بازهٔ زمانی که حرکت تندشونده است، بردارهای سرعت و شتاب هم‌جهت با یکدیگرند. در این سؤال چون بردار سرعت متوسط در خلاف جهت بردار شتاب است، لذا در ابتدا نوع حرکت متحرک کندشونده است و بردار سرعت و شتاب در لحظهٔ t_1 خلاف جهت یکدیگرند.

در لحظهٔ t_2 نوع حرکت می‌تواند کندشونده یا تندشونده باشد، اگر حرکت در این لحظه کندشونده باشد، الزاماً جابه‌جایی در این بازهٔ زمانی در خلاف جهت بردار شتاب است، اما اگر در لحظهٔ t_2 نوع حرکت تندشونده باشد، با توجه به این‌که در بازهٔ زمانی t_1 تا t_2 بردار جابه‌جایی و شتاب خلاف جهت یکدیگرند، باید تندی متحرک در لحظهٔ t_2 کوچک‌تر از تندی متحرک در لحظهٔ t_1 باشد.

بنابراین با توجه به گزاره‌ها فقط مورد «د» درست است.



۴۶- دو متحرک A و B به‌ترتیب از مکان‌های $x_A=-۴۰m$ و $x_B=۱۸۰m$ در مبدأ زمان به سمت یکدیگر با تندی ثابت حرکت می‌کنند. اگر دو متحرک با اختلاف زمانی ۵s از مکان $x_۱=۶۸m$ عبور کنند و در مکان $x_۲=۹۲m$ از کنار هم عبور کنند، اختلاف تندی دو متحرک چند متر بر ثانیه است؟

۱) ۸ ۲) ۲/۵ ۳) ۶ ۴) ۴

پاسخ: گزینهٔ ۴ (متوسط ـ محاسباتی ـ زمان‌بَر ـ صفحهٔ ۱۴ ـ ۱۲۰۱)

اگر فرض کنیم در لحظهٔ $t_۱$ متحرک A از مکان $x_۱=۶۸m$ عبور می‌کند، داریم:

$$v_A t_۱=\Delta x_A \xrightarrow{\Delta x_A=۶۸+۴۰=۱۰۸m} v_A t_۱=۱۰۸ \ (I)$$

$$(v_B)(t_۱+۵)=\Delta x_B$$

$$\xrightarrow{|\Delta x_B|=|۶۸-۱۸۰|=۱۱۲m} |v_B|(t_۱+۵)=۱۱۲ \ (II)$$

اکنون جابه‌جایی دو متحرک را از مبدأ زمان تا لحظهٔ عبور از کنار یکدیگر به‌دست می‌آوریم:

$$v_A t'=\Delta x'_A \xrightarrow{\Delta x'_A=۹۲+۴۰=۱۳۲m} v_A t'=۱۳۲$$

$$(v_B)t'=|\Delta x'_B| \xrightarrow{\Delta x'_B=۹۲-۱۸۰=-۸۸m} |v_B|t'=۸۸$$

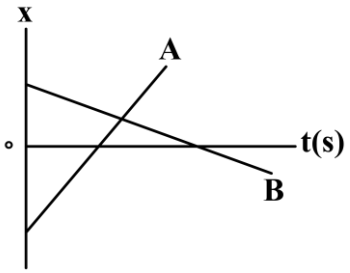
$$\Rightarrow \frac{v_A}{|v_B|}=\frac{۱۳۲}{۸۸}$$

$$\Rightarrow \frac{v_A}{|v_B|}=\frac{۳}{۲} \xrightarrow{I,II} \frac{v_A t_۱}{|v_B|(t_۱+۵)}=\frac{۱۰۸}{۱۱۲}$$

$$\Rightarrow \frac{۳}{۲}\frac{t_۱}{t_۱+۵}=\frac{۱۰۸}{۱۱۲} \Rightarrow \frac{۳}{۲}\frac{t_۱}{t_۱+۵}=\frac{۲۷}{۲۸} \Rightarrow ۹t_۱+۴۵=۱۴t_۱$$

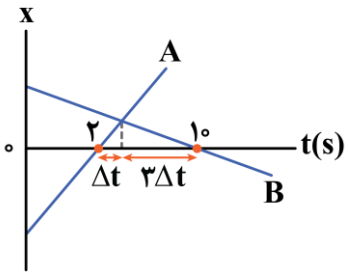
$$\Rightarrow t_۱=۹s \xrightarrow{(I),(II)} \begin{cases} v_A=۱۲\frac{m}{s} \\ |v_B|=۸\frac{m}{s} \end{cases} \Rightarrow v_A-|v_B|=۴\frac{m}{s}$$

۴۷- نمودار مکان ـ زمان دو اتومبیل A و B که روی محور x حرکت می‌کنند، مطابق شکل زیر است. در مدت‌زمان یکسان، مسافتی که متحرک A طی می‌کند، ۳ برابر مسافتی است که متحرک B طی می‌کند و در لحظه‌های $t_۱=۲s$ و $t_۲=۱۰s$ بردار مکان این دو اتومبیل تغییر جهت می‌دهند. در کدام لحظه برحسب ثانیه، دو اتومبیل به یکدیگر می‌رسند؟



۱) ۳
۲) ۳/۵
۳) ۴
۴) ۴/۵

پاسخ: گزینهٔ ۳ (آسان ـ محاسباتی ـ استاندارد ـ صفحهٔ ۱۳ ـ ۱۲۰۱)



نمودار $x-t$ برای هر دو متحرک، خطی با شیب ثابت است؛ بنابراین هر دو متحرک دارای حرکت با سرعت ثابت می‌باشند و چون در بازهٔ زمانی یکسان، مسافت طی‌شده توسط متحرک A، ۳ برابر مسافت طی‌شده توسط متحرک B است، درنتیجه اندازهٔ سرعت متحرک A، ۳ برابر اندازهٔ سرعت متحرک B است. از طرفی می‌دانیم که اندازهٔ شیب نمودار $x-t$ برابر با اندازهٔ سرعت متحرک است؛ بنابراین اندازهٔ شیب خط A، ۳ برابر اندازهٔ شیب خط B است.

با توجه به این‌که در لحظه‌های $t_۱ = ۲s$ و $t_۲ = ۱۰s$ علامت بردار مکان برای این دو متحرک تغییر جهت داده است و شیب A، ۳ برابر شیب B است، نمودار را مطابق شکل، کامل می‌کنیم.

$$۱۰ - ۲ = ۴\Delta t \Rightarrow \Delta t = ۲s$$

پس در لحظهٔ $t = ۴s$ دو متحرک به یکدیگر می‌رسند.

۴۸- متحرکی بر روی محور x با شتاب ثابت حرکت می‌کند. اگر سرعت متوسط این متحرک در ۵ ثانیهٔ اول حرکتش، قرینهٔ سرعت متوسط آن در ۵ ثانیهٔ سوم حرکتش باشد، معادلهٔ مکان ـ زمان این متحرک برحسب SI مطابق با کدام گزینه می‌تواند باشد؟

۱) $x = t^۲ - ۱۵t + ۱۵$

۲) $x = t^۲ + ۱۵t - ۱۵$

۳) $x = \frac{۱}{۲}t^۲ - ۱۵t + ۱۵$

۴) $x = \frac{۱}{۲}t^۲ + ۱۵t - ۱۵$

پاسخ: گزینهٔ ۱ (متوسط ـ محاسباتی ـ زمان‌بَر ـ صفحهٔ ۱۷ ـ ۱۲۰۱)

در حرکت با شتاب ثابت، سرعت متوسط متحرک در یک بازهٔ زمانی برابر است با:

$$v_{av} = \frac{v_۱ + v_۲}{۲}$$

بنابراین داریم:

(سرعت متوسط متحرک در بازهٔ زمانی ۱۰s تا ۱۵s) = −(سرعت متوسط متحرک در بازهٔ زمانی صفر تا ۵s)

$$\Rightarrow \frac{v_۰ + v_۵}{۲} = -\frac{v_{۱۰} + v_{۱۵}}{۲} \xrightarrow{v=at+v_۰} v_۰ + (v_۰ + ۵a) = -[(v_۰ + ۱۰a) + (v_۰ + ۱۵a)]$$

$$\Rightarrow ۲v_۰ + ۵a = -۲v_۰ - ۲۵a \Rightarrow ۴v_۰ = -۳۰a \Rightarrow \frac{v_۰}{a} = -\frac{۳۰}{۴} = -۷/۵$$

بررسی گزینه‌ها:

طبق معادلهٔ مکان ـ زمان در حرکت با شتاب ثابت $(x = \frac{۱}{۲}at^۲ + v_۰t + x_۰)$ داریم:

(۱)

$$\begin{cases} \frac{۱}{۲}a = ۱ \Rightarrow a = ۲\frac{m}{s^۲} \\ v_۰ = -۱۵\frac{m}{s} \end{cases} \Rightarrow \frac{v_۰}{a} = \frac{-۱۵}{۲} = -۷/۵ \quad (✓)$$

(۲)

$$\begin{cases} \frac{۱}{۲}a = ۱ \Rightarrow a = ۲\frac{m}{s^۲} \\ v_۰ = ۱۵\frac{m}{s} \end{cases} \Rightarrow \frac{v_۰}{a} = \frac{۱۵}{۲} = ۷/۵ \quad (✗)$$

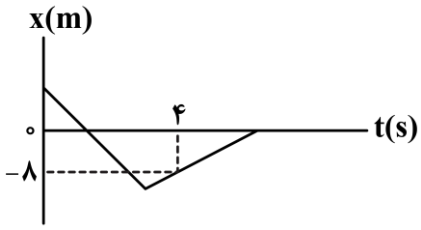
۳

$$\begin{cases} \frac{۱}{۲}a=\frac{۱}{۲}\Rightarrow a=۱\frac{m}{s^۲} \\ v_۰=-۱۵\frac{m}{s} \end{cases} \Rightarrow \frac{v_۰}{a}=\frac{-۱۵}{۱}=-۱۵$$ (✗)

۴

$$\begin{cases} \frac{۱}{۲}a=\frac{۱}{۲}\Rightarrow a=۱\frac{m}{s^۲} \\ v_۰=۱۵\frac{m}{s} \end{cases} \Rightarrow \frac{v_۰}{a}=\frac{۱۵}{۱}=۱۵$$ (✗)

۴۹- نمودار مکان ـ زمان متحرکی که روی خط راست حرکت می‌کند، مطابق شکل زیر است. اگر در انتهای ثانیهٔ اول، متحرک با تندی $۶\frac{m}{s}$ از مبدأ مکان عبور کند و شتاب متوسط آن در ۵ ثانیهٔ اول حرکتش برابر با $۲\frac{m}{s^۲}$ باشد، در کل بازهٔ زمانی نشان‌داده‌شده در نمودار زیر، چند ثانیه بردار سرعت و مکان متحرک در خلاف جهت یکدیگر هستند؟



۱) ۲

۲) ۳

۳) ۴

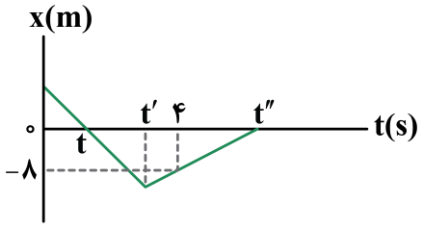
۴) ۵

پاسخ: گزینهٔ ۳ (سخت ـ محاسباتی ـ زمان‌بَر ـ صفحهٔ ۱۳ ـ ۱۲۰۱)

نکته

در نمودار مکان ـ زمان، هرگاه نمودار درحال نزدیک شدن به محور t باشد، طول بردار مکان درحال کاهش است و بردارهای سرعت و مکان متحرک در خلاف جهت هم هستند.

گام اول



با توجه به این‌که متحرک در پایان ثانیهٔ اول از مبدأ مکان ($x=۰$) عبور کرده است؛ بنابراین $t=۱s$ است. از طرفی نمودار $x-t$ در بازهٔ زمانی صفر تا t' خطی راست با شیب ثابت است، پس سرعت متحرک در این بازهٔ زمانی ثابت است. با توجه به این‌که تندی متحرک در لحظهٔ $t=۱s$ برابر با $۶\frac{m}{s}$ است و از طرفی شیب نمودار $x-t$ در بازهٔ زمانی صفر تا t'، منفی است، پس می‌توان گفت که در بازهٔ زمانی صفر تا t'، متحرک با سرعت ثابت $-۶\frac{m}{s}$ حرکت می‌کند؛ بنابراین می‌توانیم بنویسیم:

$$v_۰=-۶\frac{m}{s}$$

از طرفی با توجه به شتاب متوسط در ۵ ثانیهٔ اول حرکت داریم:

$$a_{av}=\frac{\Delta v}{\Delta t}\Rightarrow ۲=\frac{v_۵-(-۶)}{۵-۰}\Rightarrow v_۵=۴\frac{m}{s}$$

کام دوم

با توجه به این‌که متحرک در انتهای ثانیهٔ اول ($t=1s$) از مبدأ مکان ($x=0$) عبور می‌کند، درمی‌یابیم $x_{1s}=0$ است؛ بنابراین معادلهٔ $x-t$ متحرک در بازهٔ زمانی صفر تا t' که حرکت متحرک با سرعت ثابت است، به‌صورت زیر است:

$$x=vt+x_0 \xrightarrow[x_{1s}=0,\ t=1s]{v=-6\frac{m}{s}} 0=-6(1)+x_0 \Rightarrow x_0=6m \Rightarrow x_{(0-t')}=-6t+6$$

از طرفی در بازهٔ زمانی t' تا t'' هم سرعت متحرک ثابت است؛ بنابراین داریم:

$$\begin{cases} v=4\dfrac{m}{s} \\ x_{4s}=-8m \end{cases} \Rightarrow -8=4(4)+x'_0 \Rightarrow x'_0=-24m \Rightarrow x_{(t'-t'')}=4t-24$$

حالا با توجه به محل برخورد دو نمودار در لحظهٔ t' داریم:

$$x_{(0-t')}=x_{(t'-t'')} \Rightarrow -6t'+6=4t'-24 \Rightarrow 10t'=30 \Rightarrow t'=3s$$

از طرفی t'' برابر است با:

$$x_{(t-t'')}=4t-24 \xrightarrow{x_{t''}=0} 0=4t''-24 \Rightarrow t''=6s$$

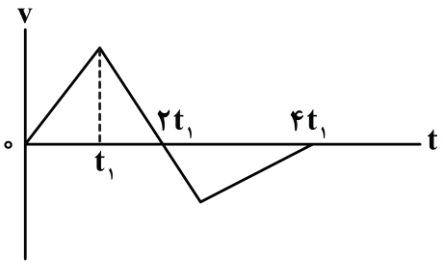
کام آخر

در بازهٔ زمانی صفر تا t'، بردار مکان متحرک، مثبت و در بازهٔ زمانی t تا t'' بردار مکان متحرک، منفی است. از طرفی در بازهٔ زمانی صفر تا t'، بردار سرعت متحرک، منفی و در بازهٔ زمانی t' تا t'' بردار سرعت متحرک، مثبت است؛ بنابراین در بازهٔ زمانی صفر تا t و بازهٔ زمانی t' تا t'' بردارهای سرعت و مکان متحرک در خلاف جهت هم هستند:

$$\Delta t=(t-0)+(t''-t')=1+(6-3)=1+3=4s$$

ماز

۵۰- نمودار سرعت ـ زمان متحرکی که بر روی محور x حرکت می‌کند، مطابق شکل زیر است. اگر تندی متوسط متحرک در بازهٔ زمانی صفر تا $2t_1$، دو برابر تندی متوسط متحرک در بازهٔ زمانی $2t_1$ تا $4t_1$ باشد، شتاب متوسط متحرک در بازهٔ زمانی صفر تا t_1 چند برابر شتاب متحرک در لحظهٔ $3t_1$ است؟



۱) ۱/۵

۲) ۲

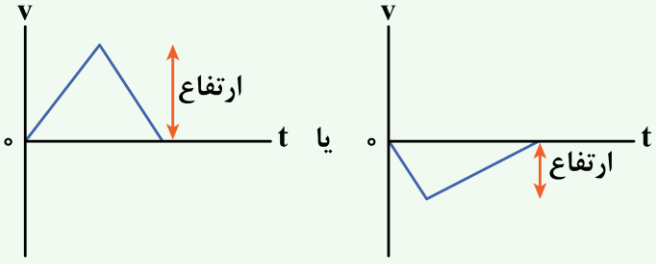
۳) ۳

۴) ۴

پاسخ: گزینهٔ ۳ (متوسط ـ محاسباتی ـ زمان‌بَر ـ صفحهٔ ۱۵ ـ ۱۲۰۱)

نکته

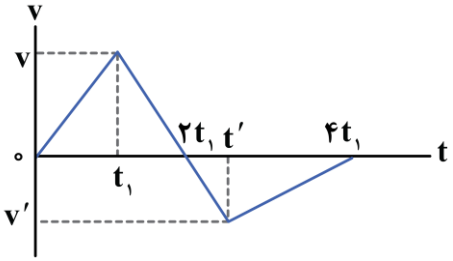
وقتی نمودار سرعت ـ زمان در یک بازهٔ زمانی، مثلثی محصور با محور t ایجاد کند، داریم:



$$s_{av}=|v_{av}|=\frac{1}{2}\ \text{ارتفاع}$$

کام اول

با توجه به این‌که تندی متوسط متحرک در بازهٔ زمانی صفر تا $۲t_۱$، دو برابر تندی متوسط متحرک در بازهٔ زمانی $۲t_۱$ تا $۴t_۱$ است، داریم:



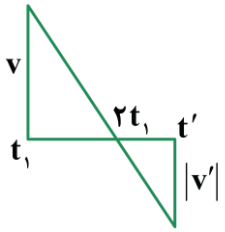
مثلث محصور $v-t$ با محور t:

$$\begin{cases} s_{av_{(۰-۲t_۱)}} = \frac{v}{۲} \\ s_{av_{(۲t_۱-۴t_۱)}} = \frac{-v'}{۲} \end{cases}$$

$$\Rightarrow s_{av_{(۰-۲t_۱)}} = ۲s_{av_{(۲t_۱-۴t_۱)}} \Rightarrow \frac{v}{۲} = ۲(-\frac{v'}{۲}) \Rightarrow v = -۲v'$$

کام دوم

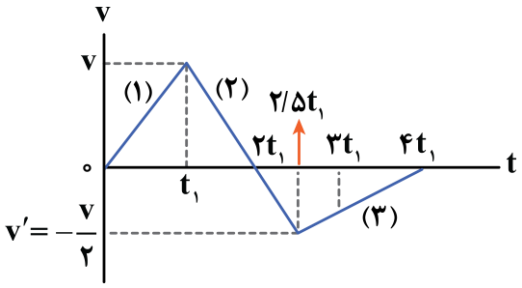
با توجه به تشابه دو مثلث، لحظهٔ t' را به‌دست می‌آوریم:



$$\frac{v}{|v'|} = \frac{۲t_۱ - t_۱}{t' - ۲t_۱} \xrightarrow{v=۲|v'|} ۲ = \frac{t_۱}{t' - ۲t_۱} \Rightarrow t' = ۲/۵t_۱$$

کام آخر

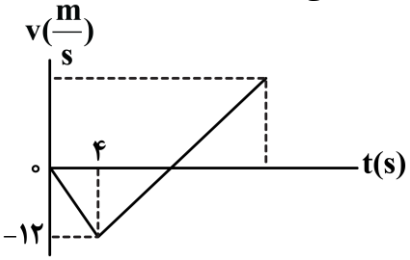
شتاب متوسط متحرک در بازهٔ زمانی صفر تا $t_۱$ (شیب خط (۱)) و شتاب متحرک در لحظهٔ $۳t_۱$ (شیب خط (۳)) را به‌دست می‌آوریم و نسبت آن‌ها را حساب می‌کنیم:



$$\begin{cases} a_{av_{(۰-t_۱)}} = \frac{v}{t_۱} \\ a_{(۳t_۱)} = \text{شیب}(۳) = \frac{۰-(-\frac{v}{۲})}{۴t_۱ - ۲/۵t_۱} = \frac{\frac{v}{۲}}{۱/۵t_۱} = \frac{v}{۳t_۱} \end{cases} \Rightarrow \frac{a_{av_{(۰-t_۱)}}}{a_{(۳t_۱)}} = \frac{\frac{v}{t_۱}}{\frac{v}{۳t_۱}} = ۳$$

ماز

۵۱- نمودار سرعت ـ زمان متحرکی که بر روی محور x حرکت می‌کند، مطابق شکل زیر است. اگر در ابتدا و انتهای ۴ ثانیهٔ سوم حرکتش، بردار مکان متحرک تغییر جهت بدهد، مکان اولیهٔ متحرک برحسب یکای SI در کدام گزینه به‌درستی آمده است؟



۱) ۴۶

۲) ۵۴

۳) ۵۶

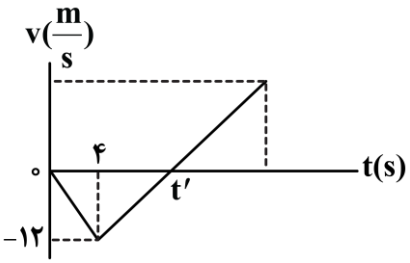
۴) ۶۴

پاسخ: گزینهٔ ۳ (سخت ـ محاسباتی ـ زمان‌بَر ـ صفحهٔ ۱۵ ـ ۱۲۰۱)

نکته

در حرکت با شتاب ثابت وقتی متحرکی در دو لحظهٔ متفاوت $t_۱$ و $t_۲$ در یک مکان باشد، در لحظهٔ وسط آن دو لحظه، یعنی $t' = \frac{t_۱ + t_۲}{۲}$ متحرک تغییر جهت می‌دهد.

گام اول



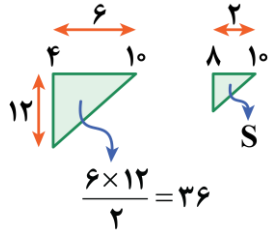
لحظهٔ تغییر جهت حرکت متحرک (t') را به‌دست می‌آوریم. با توجه به این‌که در لحظات $t_1 = 8s$ و $t_2 = 12s$ متحرک در مبدأ مکان قرار دارد و در این بازه حرکت با شتاب ثابت است، می‌توانیم بنویسیم:

$$t' = \frac{t_1 + t_2}{2} \Rightarrow t' = \frac{8+12}{2} = 10s$$

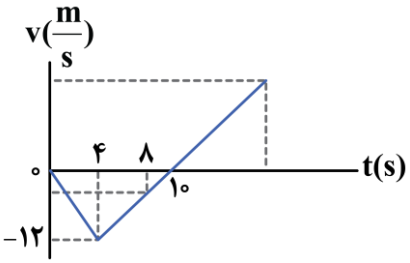
گام دوم

با توجه به نمودار سرعت ـ زمان، جابه‌جایی متحرک در بازهٔ زمانی صفر تا $8s$ را به‌دست می‌آوریم:

تشابه دو مثلث:



$$\Rightarrow \frac{S}{36} = (\frac{2}{6})^2 = \frac{1}{9} \Rightarrow S = 4$$



$$|\Delta\vec{x}_{(0-8s)}| = |\Delta\vec{x}_{(0-10s)}| - |\Delta\vec{x}_{(8s-10s)}| \Rightarrow |\Delta\vec{x}_{(0-8s)}| = (\frac{10\times12}{2}) - 4 = 56m$$

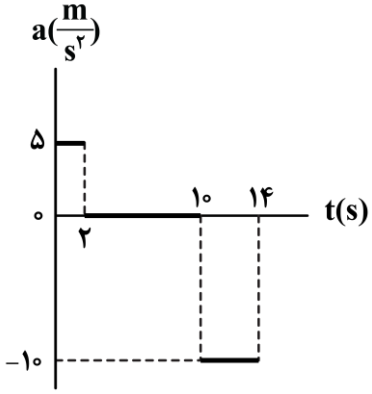
$$\xrightarrow{\Delta\vec{x}_{(0-8s)}<0} \Delta\vec{x}_{(0-8s)} = -56m$$

گام آخر

مکان اولیهٔ متحرک را به‌دست می‌آوریم:

$$\Delta x_{(0-8s)} = x_8 - x_0 \xrightarrow{x_8=0} -56 = 0 - x_0 \Rightarrow x_0 = 56m$$

۵۲- نمودار شتاب ـ زمان متحرکی که بر روی محور x حرکت می‌کند، مطابق شکل زیر است. اگر متحرک در لحظهٔ $t=0$، با سرعت $v=20\frac{m}{s}$ در جهت محور x از مکان $x=-25m$ عبور کند، در لحظهٔ تغییر جهت حرکت، در فاصلهٔ چندمتری از مبدأ مکان قرار دارد؟



۱) ۳۱۰

۲) ۳۰۰

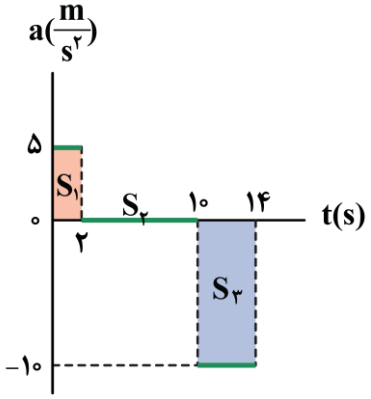
۳) ۲۷۵

۴) ۲۶۵

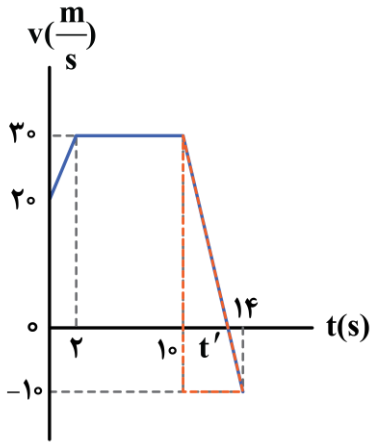
پاسخ: گزینهٔ ۱ (متوسط ـ محاسباتی ـ زمان‌بَر ـ صفحهٔ ۲۱ ـ ۱۲۰۱)

کام اول

می‌دانیم مساحت زیر نمودار شتاب ـ زمان بیانگر تغییرات سرعت است؛ بنابراین ابتدا نمودار سرعت ـ زمان متحرک را رسم می‌کنیم.

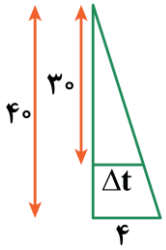


$$\begin{cases} S_1 = 2\times 5 = +10 \\ S_2 = 0 \\ S_3 = 4\times 10 = -40 \end{cases} \Rightarrow \text{تغییرات سرعت منفی است.}$$



کام دوم

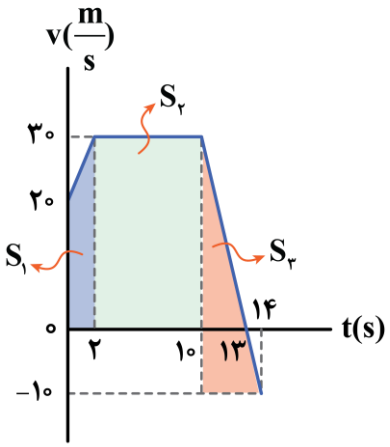
لحظهٔ t'، لحظهٔ تغییر جهت حرکت متحرک است. این نقطه را با استفاده از تشابه مثلث‌ها محاسبه می‌کنیم.



$$\frac{30}{40} = \frac{\Delta t}{4} \Rightarrow \Delta t = 3s \Rightarrow t' = 13s$$

کام آخر

می‌دانیم مساحت زیر نمودار سرعت ـ زمان، بیانگر جابه‌جایی متحرک است؛ بنابراین جابه‌جایی متحرک در بازهٔ زمانی $t=0$ تا $t=13s$ برابر است با:



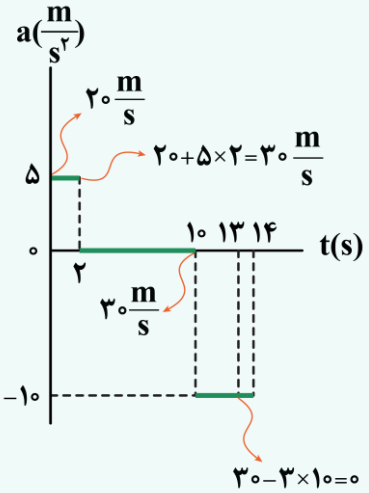
$$\begin{cases} S_1 = \dfrac{(20+30)\times 2}{2} = 50 \\ S_2 = 30\times 8 = 240 \\ S_3 = \dfrac{30\times 3}{2} = 45 \end{cases} \Rightarrow \Delta x = 50 + 240 + 45 = 335m$$

بنابراین:

$$\Delta x = x_{13} - x_0 \Rightarrow x_{13} = \Delta x + x_0 \xrightarrow[x_0 = -25m]{\Delta x = 335} x_{13} = 335 - 25 = 310m$$

جرقهٔ ذهنی

بدون کشیدن نمودار سرعت ـ زمان و روی نمودار شتاب ـ زمان با استفاده از سرعت متوسط داریم:



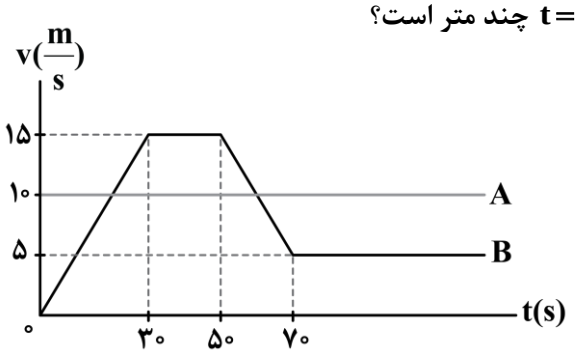
$$\Delta x_1+\Delta x_2+\Delta x_3=\frac{20+30}{2}\times 2+30\times(10-2)+\frac{30+0}{2}\times 3$$

$$=50+240+45=335\text{m}$$

$$\Rightarrow x_{13s}=335-25=310\text{m}$$

ماز

۵۳- نمودار سرعت ـ زمان دو متحرک که بر روی محور x حرکت می‌کنند، مطابق شکل زیر است. اگر فقط در یک لحظه دو متحرک به‌هم برسند و هیچ‌کدام از دیگری سبقت نگیرد، فاصلهٔ دو متحرک در لحظهٔ $t=15s$ چند متر است؟



۱) ۴۳/۷۵

۲) ۹۳/۷۵

۳) ۱۴۳/۷۵

۴) ۱۵۳/۷۵

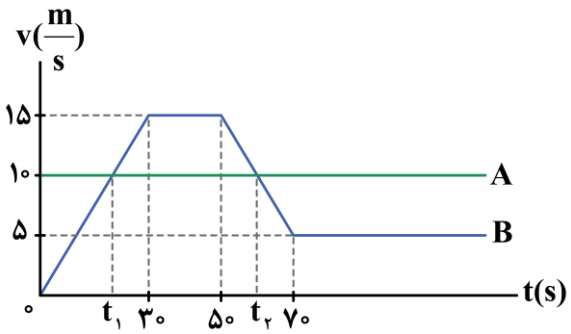
پاسخ: گزینهٔ ۳ (سخت ـ محاسباتی ـ زمان‌بَر ـ صفحهٔ ۱۵ ـ ۱۲۰۱)

نکته

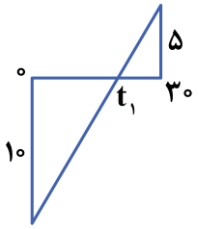
وقتی دو متحرک بدون این‌که از هم سبقت بگیرند، به‌هم برسند، یعنی در لحظهٔ رسیدن دو متحرک به‌هم سرعت‌ها یکسان است.

گام اول

با استفاده از تشابه مثلث‌ها، لحظه‌های برخورد نمودار سرعت ـ زمان دو متحرک را به‌دست می‌آوریم:

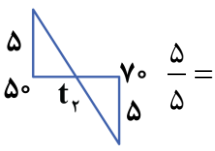


(۱) تشابه:



$$\frac{10}{5}=\frac{t_1-0}{30-t_1}\Rightarrow t_1=20\text{s}$$

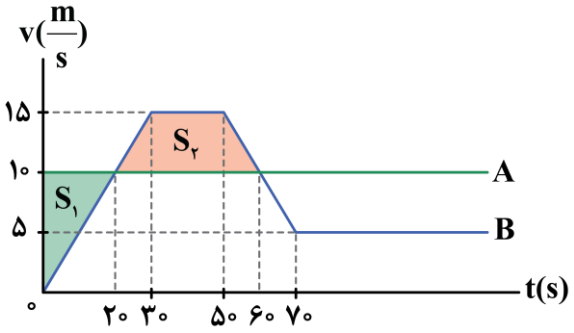
(۲) تشابه:



$$\frac{5}{5}=\frac{t_2-50}{70-t_2}\Rightarrow t_2=60\text{s}$$

گام دوم

مطابق شکل زیر، مساحت‌های S_1 و S_2 را به‌دست می‌آوریم:



$$S_1 = \frac{۲۰\times۱۰}{۲} = ۱۰۰$$

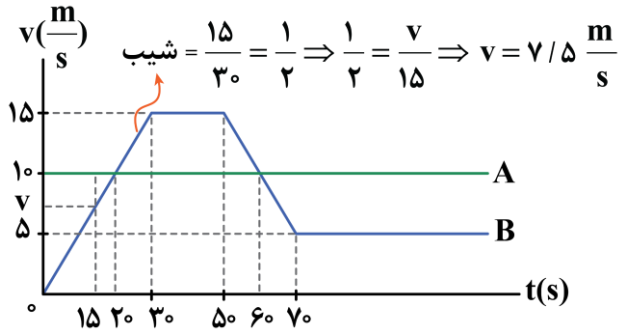
$$S_2 = \frac{((۶۰-۲۰)+(۵۰-۳۰))\times۵}{۲} = ۱۵۰$$

گام سوم

با توجه به S_1 و S_2 درمی‌یابیم که متحرک A در شروع حرکت، ۵۰m از متحرک B جلوتر بوده است. با توجه به این‌که فقط در یک لحظه دو متحرک به‌هم می‌رسند و هیچ‌کدام از دیگری سبقت نمی‌گیرد، درمی‌یابیم در لحظه‌ای که سرعت‌ها برابر است، دو متحرک به‌هم می‌رسند و پس از آن لحظه، متحرکی که جلوتر بوده با سرعت بیش‌تری به حرکت ادامه می‌دهد؛ بنابراین متحرک A در لحظهٔ شروع حرکت متحرک B از آن جلوتر بوده و در لحظهٔ رسیدن دو متحرک به‌هم سرعت آن‌ها باهم برابر می‌شود و پس از آن سرعت متحرک A بیش‌تر می‌شود؛ درنتیجه در لحظهٔ $t_2 = ۶۰s$ دو متحرک به‌هم می‌رسند.

گام آخر

فاصلهٔ دو متحرک را از هم در لحظهٔ $t = ۱۵s$ به‌دست می‌آوریم.



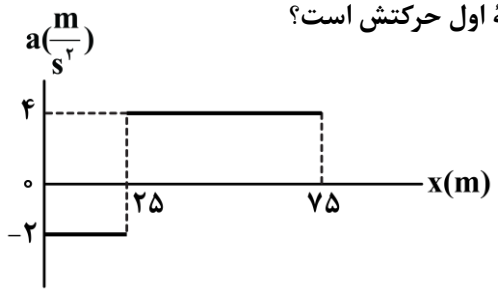
$$(۰-۱۵s):\begin{cases}\Delta x_A = ۱۰\times۱۵ = ۱۵۰m\\ \Delta x_B = \frac{۷/۵\times۱۵}{۲} = ۵۶/۲۵m\end{cases}$$

$$\Rightarrow \Delta x_A - \Delta x_B = ۱۵۰ - ۵۶/۲۵ = ۹۳/۷۵m$$

بنابراین در بازهٔ زمانی صفر تا ۱۵s جابه‌جایی متحرک A، به‌اندازهٔ ۹۳/۷۵m بیش‌تر از متحرک B است و چون متحرک A در لحظهٔ $t=۰$، ۵۰m جلوتر از متحرک B بوده است، فاصلهٔ آن‌ها از هم در لحظهٔ $t = ۱۵s$ برابر است با:

$$d = ۹۳/۷۵ + ۵۰ = ۱۴۳/۷۵m$$

۵۴- نمودار شتاب ـ مکان متحرکی که در مبدأ زمان از مبدأ مکان با سرعت $۱۰\frac{m}{s}$ عبور می‌کند، مطابق شکل زیر است. مسافتی که این متحرک در دو ثانیهٔ پنجم حرکتش می‌پیماید چند برابر مسافت طی‌شده در دو ثانیهٔ اول حرکتش است؟



۱) ۱
۲) ۲
۳) ۳
۴) ۴

پاسخ: گزینهٔ ۲ (متوسط ـ محاسباتی ـ زمان‌بَر ـ صفحهٔ ۱۸ ـ ۱۲۰۱)

راه نجات سریع

از روی نمودار شتاب ـ مکان به کمک معادلهٔ مستقل از زمان، سرعت متحرک رو در مکان‌های $x_1 = ۲۵m$, $x_2 = ۷۵m$ به‌دست بیار و نمودار سرعت ـ زمان متحرک رو رسم کن. بعدش به کمک مساحت محصور نمودار $v-t$ با محور t، نسبت خواسته‌شده رو به‌دست بیار.

گام اول

سرعت متحرک را در مکان‌های $x_1 = ۲۵m$ و $x_2 = ۷۵m$ به‌دست می‌آوریم. طبق معادلهٔ مستقل از زمان داریم:

$$x_1 = ۲۵m \text{ تا } x_0 = ۰ \text{ از: } v_1^۲ - v_0^۲ = ۲a_1\Delta x_1 \xrightarrow{v_0 = ۱۰\frac{m}{s}} v_1^۲ - ۱۰۰ = ۲(-۲)(۲۵-۰) \Rightarrow v_1 = ۰$$

$$x_2 = ۷۵m \text{ تا } x_1 = ۲۵m \text{ از: } v_2^۲ - v_1^۲ = ۲a_2\Delta x_2 \Rightarrow v_2^۲ - ۰ = ۲(۴)(۷۵-۲۵) \Rightarrow v_2^۲ = ۴۰۰ \Rightarrow v_2 = ۲۰\frac{m}{s}$$

گام دوم

حال لحظه‌ای که مکان متحرک برابر با $x_1 = ۲۵m$ و $v_1 = ۰$ می‌شود را به‌دست می‌آوریم:

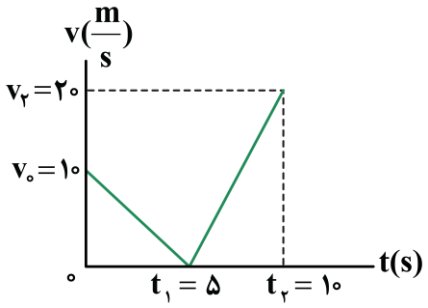
$$v_1 = a_1t + v_0 \Rightarrow ۰ = -۲ \times t_1 + ۱۰ \Rightarrow t_1 = ۵s$$

حال لحظه‌ای که مکان متحرک برابر با $x_2 = ۷۵m$ و $v_2 = ۲۰\frac{m}{s}$ می‌شود را به‌دست می‌آوریم:

$$v_2 = a_2t + v_0' \Rightarrow ۲۰ = ۴t' + ۰ \Rightarrow t' = ۵s$$

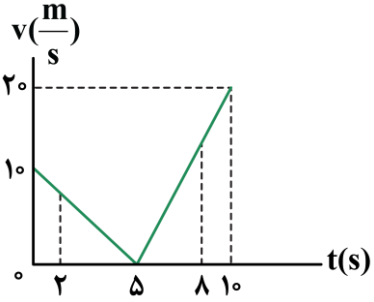
$$t_2 = t_1 + t' = ۵ + ۵ = ۱۰s$$

نمودار سرعت ـ زمان متحرک را رسم می‌کنیم:

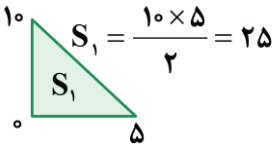


گام آخر

مسافت طی‌شده در دو ثانیهٔ اول و دو ثانیهٔ پنجم حرکت و نسبت آن‌ها را به‌دست می‌آوریم:



تشابه (۱):

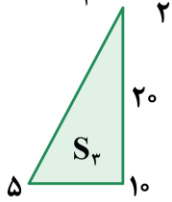


$$S_1 = \frac{۱۰ \times ۵}{۲} = ۲۵$$



$$\frac{S_2}{۲۵} = (\frac{۳}{۵})^۲ \Rightarrow S_2 = ۹$$

تشابه (۲):



$$S_3 = \frac{۵ \times ۲۰}{۲} = ۵۰$$



$$\frac{S_4}{۵۰} = (\frac{۳}{۵})^۲ \Rightarrow S_4 = ۱۸$$

$$\begin{cases} \ell_{(۰-۲s)} = S_1 - S_2 = ۲۵ - ۹ = ۱۶m \\ \ell_{(۸s-۱۰s)} = S_3 - S_4 = ۵۰ - ۱۸ = ۳۲m \end{cases} \Rightarrow \frac{\ell_{(۸s-۱۰s)}}{\ell_{(۰-۲s)}} = \frac{۳۲}{۱۶} = ۲$$

۵۵- محیط‌بان یک پارک حفاظت‌شده، هنگام گشت شبانه با تندی v در جاده‌ای مستقیم در حرکت است که ناگهان گوزن بدون حرکتی را در جلوی خود می‌بیند. اگر محیط‌بان با شتابی به بزرگی $۲\frac{m}{s^۲}$ ترمز کند، با تندی $۱۵\frac{km}{h}$ و اگر با شتابی به بزرگی $۳\frac{m}{s^۲}$ ترمز کند، با تندی $۵\frac{km}{h}$ به گوزن برخورد می‌کند. v چند کیلومتر بر ساعت است؟

۱) ۲۰ ۲) ۲۵ ۳) ۴۰ ۴) ۵۰

پاسخ: گزینهٔ ۲ (آسان ـ محاسباتی ـ استاندارد ـ صفحهٔ ۱۸ ـ ۱۲۰۱)

طبق رابطهٔ سرعت ـ جابه‌جایی (مستقل از زمان) در حرکت با شتاب ثابت داریم:

$$v_۲^۲ - v_۱^۲ = ۲a\Delta x \Rightarrow \begin{cases} ۱۵^۲ - v^۲ = ۲\times(-۲)\times\Delta x \\ ۵^۲ - v^۲ = ۲\times(-۳)\times\Delta x \end{cases}$$

با تقسیم دو رابطه بر هم داریم:

$$\frac{۱۵^۲ - v^۲}{۵^۲ - v^۲} = \frac{۲}{۳} \Rightarrow ۵۰ - ۲v^۲ = ۶۷۵ - ۳v^۲ \Rightarrow v^۲ = ۶۲۵ \Rightarrow v = ۲۵\frac{km}{h}$$

۵۶- موتورسواری در مبدأ زمان، با شتاب ثابت $۲\frac{m}{s^۲}$ و سرعت $۱۰\frac{m}{s}$ از مبدأ مکان در جهت محور x عبور می‌کند. در لحظهٔ $t=۲۰s$، موتورسوار حرکت خود را با شتاب ثابت $-۱\frac{m}{s^۲}$ کند کرده و بعد از مدتی متوقف می‌شود. در فاصلهٔ ۱۴۰۰ متری مبدأ مکان، سرعت موتورسوار چند واحد SI است؟

۱) ۳۰ ۲) ۴۰ ۳) ۵۰ ۴) ۶۰

پاسخ: گزینهٔ ۱ (متوسط ـ محاسباتی ـ استاندارد ـ صفحهٔ ۱۵ ـ ۱۲۰۱)

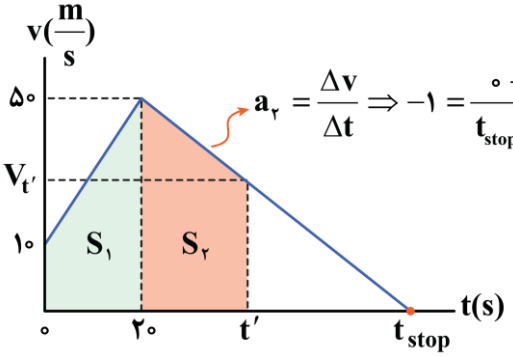
کلام اول

ابتدا به کمک معادلهٔ سرعت ـ زمان در حرکت با شتاب ثابت در بخش اول حرکت، سرعت موتورسوار را در لحظهٔ $t=۲۰s$ به‌دست می‌آوریم:

$$v = a_۱t + v_۰ = ۲(۲۰) + ۱۰ = ۵۰\frac{m}{s}$$

کلام آخر

نمودار سرعت ـ زمان موتورسوار را رسم می‌کنیم:



$$a_۲ = \frac{\Delta v}{\Delta t} \Rightarrow -۱ = \frac{۰ - ۵۰}{t_{stop} - ۲۰} \Rightarrow t_{stop} = ۷۰s$$

$$\xrightarrow{\text{تشابه مثلث‌ها}} \frac{۵۰}{v_{t'}} = \frac{۷۰ - ۲۰}{۷۰ - t'} \Rightarrow v_{t'} = ۷۰ - t'$$

$$S_۱ = \frac{(۵۰ + ۱۰)\times ۲۰}{۲} = ۶۰۰m \xrightarrow{\text{پس باید } S_۲ = ۸۰۰m \text{ باشد.}} S_۲ = \frac{(۵۰ + ۷۰ - t')(t' - ۲۰)}{۲} = ۸۰۰$$

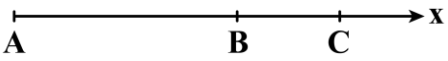
$$\Rightarrow (۱۲۰ - t')(t' - ۲۰) = ۱۶۰۰ \Rightarrow ۱۲۰t' - ۲۴۰۰ - t'^۲ + ۲۰t' = ۱۶۰۰ \Rightarrow t'^۲ - ۱۴۰t' + ۴۰۰۰ = ۰$$

$$\Rightarrow (t' - ۱۰۰)(t' - ۴۰) = ۰ \Rightarrow t' = ۴۰s \Rightarrow v_{۴۰s} = ۷۰ - t' = ۳۰\frac{m}{s}$$

توجه!

بچه‌ها حواستون باشه که چون $t_{stop} = ۷۰s$ است، پس لحظهٔ $t' = ۱۰۰s$ غیرقابل‌قبول می‌شود.

۵۷- هواپیمایی با تندی v در نقطهٔ A روی باند می‌نشیند و با شتاب ثابت a به حرکت خود ادامه داده تا در نقطهٔ C متوقف شود. اگر مدت‌زمانی که هواپیما فاصلهٔ BC را طی می‌کند، نصف مدت‌زمانی باشد که فاصلهٔ AB را می‌پیماید، نسبت فاصلهٔ AB به BC چقدر است؟



۱) ۸
۲) ۹
۳) $\frac{۵}{۴}$
۴) ۲

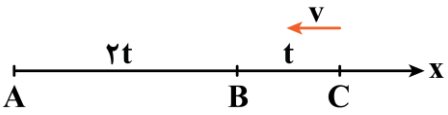
پاسخ: گزینهٔ ۱ (آسان ـ محاسباتی ـ استاندارد ـ صفحهٔ ۱۷ ـ ۱۲۰۱)

نکته

گاهی لازم است حرکت را برعکس کنیم. در این حالت سرعت نهایی به سرعت اولیه تبدیل می‌شود. در این حالت برای نوشتن معادلهٔ مکان ـ زمان کافی است علامت شتاب را قرینه کنیم و به علامت سرعت و جابه‌جایی دست نمی‌زنیم.

$$\Delta x = \frac{۱}{۲}(-a)t^۲ + v_۰t$$

متحرک در نقطهٔ C متوقف شده است، یعنی $v_C = ۰$.



می‌توانیم فرض کنیم نقطهٔ C، نقطهٔ شروع حرکت است، با این فرض مسافت‌ها، زمان‌ها و اندازهٔ شتاب تغییری نمی‌کند. فقط نوع حرکت که کندشونده بوده به تندشونده تبدیل می‌شود و در محاسبهٔ عددیِ $\frac{\Delta x_{AB}}{\Delta x_{BC}}$ بدون تأثیر خواهد بود.

گام اول

مسیر BC در مدت‌زمان t طی می‌شود:

$$\Delta x_{BC} = \frac{۱}{۲}at^۲ + \cancel{v_۰}^{۰}t = \frac{۱}{۲}at^۲$$

گام دوم

مسیر AC در مدت‌زمان ۳t طی می‌شود:

$$\Delta x_{CA} = \frac{۱}{۲}a(۳t)^۲ + \cancel{v_۰}^{۰}t = \frac{۹}{۲}at^۲$$

$$\Delta x_{CA} = \Delta x_{AB} + \Delta x_{BC} \Rightarrow \Delta x_{AB} = \Delta x_{AC} - \Delta x_{BC} = \frac{۹}{۲}at^۲ - \frac{۱}{۲}at^۲ = \frac{۸}{۲}at^۲$$

گام آخر

نسبت خواسته‌شده را محاسبه می‌کنیم:

$$\frac{\Delta x_{AB}}{\Delta x_{BC}} = \frac{\frac{۸}{۲}at^۲}{\frac{۱}{۲}at^۲} = ۸$$

۵۸- متحرکی در مبدأ زمان از مبدأ مکان و از حال سکون با شتاب ثابت $۲\frac{m}{s^۲}$ بر روی محور x شروع به حرکت می‌کند. متحرک دیگری که با شتاب ثابت حرکت می‌کند، در همان لحظه از مکان $x=۴m$ با تندی $۴\frac{m}{s}$ در خلاف جهت محور x عبور می‌کند. اگر دو متحرک با سرعت یکسان به‌هم برسند، چند ثانیه فاصلهٔ دو متحرک از یکدیگر کم‌تر یا مساوی ۱۶m است؟

۱) ۲
۲) ۴
۳) ۶
۴) ۸

پاسخ: گزینهٔ ۳ (سخت ـ محاسباتی ـ استاندارد ـ صفحهٔ ۱۷ ـ ۱۲۰۱)

نکته

وقتی دو متحرک که با شتاب ثابت حرکت می‌کنند، با سرعت یکسان به‌هم برسند، در معادلهٔ درجهٔ (۲) $x_۲ - x_۱$ ، $\Delta = ۰$ است و تنها ریشهٔ این معادله همان لحظهٔ به‌هم رسیدن دو متحرک است.

گام اول

هر دو متحرک با شتاب ثابت حرکت می‌کنند؛ بنابراین معادلهٔ مکان ـ زمان حرکت دو متحرک برابر است با:

$$x = \frac{۱}{۲}at^۲ + v_۰t + x_۰ \Rightarrow \begin{cases} x_۱ = \frac{۱}{۲}(۲)t^۲ + ۰(t) + ۰ \Rightarrow x_۱ = t^۲ \\ x_۲ = \frac{۱}{۲}at^۲ - ۴t + ۴ \end{cases}$$

گام دوم

معادلهٔ $x_۲ - x_۱$ را می‌نویسیم و با توجه به این‌که در لحظهٔ به‌هم رسیدن دو متحرک، سرعت آن‌ها یکسان است، Δ معادله را مساوی صفر قرار می‌دهیم:

$$x_۲ - x_۱ = (\frac{۱}{۲}at^۲ - ۴t + ۴) - t^۲ \Rightarrow x_۲ - x_۱ = (\frac{۱}{۲}a - ۱)t^۲ - ۴t + ۴$$

$$\Delta = ۰ \Rightarrow (-۴)^۲ - ۴(\frac{۱}{۲}a - ۱)(۴) = ۰ \Rightarrow ۱۶ = ۸a - ۱۶ \Rightarrow a = ۴\frac{m}{s^۲}$$

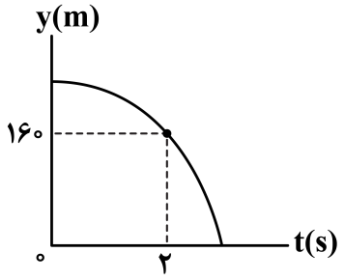
گام آخر

مدت‌زمانی که فاصلهٔ دو متحرک از هم کم‌تر یا مساوی $۱۶m$ است را به‌دست می‌آوریم:

$$|x_۲ - x_۱| \le ۱۶ \Rightarrow -۱۶ \le x_۲ - x_۱ \le ۱۶ \xrightarrow{x_۲ - x_۱ \ge ۰} x_۲ - x_۱ \le ۱۶$$

$$\Rightarrow t^۲ - ۴t + ۴ \le ۱۶ \Rightarrow (t-۲)^۲ \le ۱۶ \Rightarrow |t-۲| \le ۴ \Rightarrow t \le ۶ \Rightarrow \Delta t = ۶s$$

۵۹- نمودار مکان ـ زمان جسمی که در شرایط خلأ از ارتفاع h نسبت به سطح زمین رها می‌شود، مطابق شکل زیر است. نسبت مسافت طی‌شده در دو ثانیهٔ اول حرکت به مسافت طی‌شده در دو ثانیهٔ آخر حرکت چقدر است؟ ($g = ۱۰\frac{N}{kg}$ و سطح زمین را مبدأ مکان درنظر می‌گیریم.)



۱) $\frac{۱}{۲}$
۲) $\frac{۱}{۴}$
۳) $\frac{۱}{۵}$
۴) $\frac{۱}{۶}$

پاسخ: گزینهٔ ۳ (متوسط ـ محاسباتی ـ استاندارد ـ صفحهٔ ۲۲ ـ ۱۲۰۱)

گام اول

معادلهٔ مکان ـ زمان متحرک را به‌دست می‌آوریم. می‌دانیم در سقوط آزاد، اندازهٔ شتاب متحرک g و سرعت اولیه صفر است؛ بنابراین داریم:

$$y = -\frac{۱}{۲}gt^۲ + y_۰ \Rightarrow y = -۵t^۲ + y_۰ \xrightarrow[y=۱۶۰m]{t=۲s} ۱۶۰ = -۵(۲)^۲ + y_۰ \Rightarrow y_۰ = ۱۸۰m$$

بنابراین ارتفاعی که جسم از آن رها می‌شود، برابر با $۱۸۰m$ است.

گام دوم

لحظهٔ رسیدن جسم به سطح زمین را به‌دست می‌آوریم:

$$y=۰\Rightarrow -۵t^۲+۱۸۰=۰\Rightarrow ۵t^۲=۱۸۰\Rightarrow t^۲=۳۶\Rightarrow t=۶s$$

گام آخر

نسبت مسافت طی‌شده در دو ثانیهٔ اول حرکت به مسافت طی‌شده در دو ثانیهٔ آخر حرکت برابر است با:

۲ ثانیهٔ اول (صفر تا ۲s): $\Delta y_۱=-\frac{۱}{۲}gt^۲=-۵t^۲=-۵(۲)^۲=-۲۰m\Rightarrow \ell_۱=۲۰m$

۲ ثانیهٔ آخر (۴s تا ۶s):
$$\begin{cases} v=-gt\xrightarrow{t=۴s} v_۴=-۱۰\times ۴=-۴۰\frac{m}{s} \\ \Delta y_۲=-\frac{۱}{۲}gt^۲+v_۴t=-۵(۲)^۲-۴۰(۲)=-۱۰۰m\Rightarrow \ell_۲=۱۰۰m \end{cases}$$

بنابراین نسبت خواسته‌شده برابر است با:

$$\frac{\ell_۱}{\ell_۲}=\frac{۲۰}{۱۰۰}=\frac{۱}{۵}$$

۶۰- **گلوله‌ای از فاصلهٔ ۱۲۵ متری سطح زمین از یک نقطه رها می‌شود. t ثانیهٔ بعد، گلولهٔ دیگری از ۴۵ متر پایین‌تر از محل رها شدن گلولهٔ اول رها می‌شود. اگر از لحظهٔ رها شدن گلولهٔ دوم تا لحظه‌ای که اولین گلوله به زمین می‌رسد، فاصلهٔ دو گلوله از هم ابتدا کاهش و سپس افزایش یابد، کدام گزینه در ارتباط با t درست است؟ ($g=۱۰\frac{m}{s^۲}$ و مقاومت هوا ناچیز فرض شود.)**

۱) $۱s<t<۲s$ ۲) $t<۲s$ ۳) $t<۳s$ ۴) $۱s<t<۳s$

پاسخ: گزینهٔ ۴ (متوسط ـ محاسباتی ـ زمان‌بَر ـ صفحهٔ ۲۲ ـ ۱۲۰۱)

برای این‌که فاصلهٔ دو گلوله از هم ابتدا کاهش و سپس افزایش یابد، اولاً باید در لحظهٔ رها شدن گلولهٔ دوم، گلولهٔ اول بالاتر از آن باشد. ثانیاً باید گلولهٔ اول زودتر از گلولهٔ دوم به زمین برسد.

شرط (۱): در بازهٔ زمانی صفر تا t اندازهٔ جابه‌جایی گلولهٔ اول باید کم‌تر از ۴۵m باشد:

$$\Delta y=-\frac{۱}{۲}gt^۲\Rightarrow \Delta y=-۵t^۲\Rightarrow |\Delta y|=۵t^۲<۴۵\Rightarrow t^۲<۹\Rightarrow t<۳s$$

شرط (۲): گلولهٔ اول باید زودتر به زمین برسد:

$$\Delta y=-\frac{۱}{۲}gt^۲\Rightarrow \begin{cases} \text{گلولهٔ اول}: -۱۲۵=-۵t_۱^۲\Rightarrow t_۱=۵s \\ \text{گلولهٔ دوم}: -۸۰=-۵t_۲^۲\Rightarrow t_۲=۴s \end{cases}$$

$$t_۱<t_۲+t\Rightarrow ۵<۴+t\Rightarrow t>۱s$$

بنابراین بازهٔ زمانی $۱<t<۳$ برای t قابل‌قبول است.

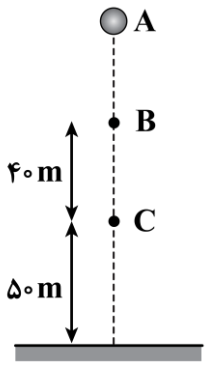
۶۱- گلوله‌ای در شرایط خلأ، از نقطهٔ A رها می‌شود. اگر مدت‌زمانی که طول می‌کشد تا گلوله فاصلهٔ بین دو نقطهٔ B و C را طی کند با مدت‌زمانی که گلوله از نقطهٔ C تا زمین را طی می‌کند، یکسان باشد، اندازهٔ سرعت متوسط گلوله از نقطهٔ A تا نقطهٔ C چند متر بر ثانیه است؟ $(g=۱۰\frac{m}{s^۲})$

۱) ۱۷/۵

۲) ۲۲/۵

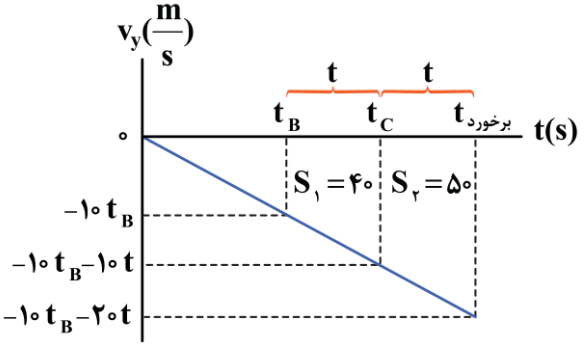
۳) ۲۵

۴) ۲۷/۵



پاسخ: گزینهٔ ۲ (سخت ـ محاسباتی ـ زمان‌بَر ـ صفحهٔ ۲۲ ـ ۱۲۰۱)

نمودار $v-t$ متحرک را رسم می‌کنیم:



$$t_C-t_B=t_{برخورد}-t_C=t$$

$$v=-gt=-۱۰t$$

$$\begin{cases} S_۱=۴۰=(\frac{(۱۰t_B)+(۱۰t_B+۱۰t)}{۲})t=(۱۰t_B+۵t)t \\ S_۲=۵۰=(\frac{(۱۰t_B+۱۰t)+(۱۰t_B+۲۰t)}{۲})t=(۱۰t_B+۱۵t)t \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{S_۱}{S_۲}=\frac{(۱۰t_B+۵t)t}{(۱۰t_B+۱۵t)t}=\frac{۲t_B+t}{۲t_B+۳t}=\frac{۴}{۵}\Rightarrow ۸t_B+۱۲t=۱۰t_B+۵t\Rightarrow t_B=۳/۵t$$

$$S_۱=۴۰\Rightarrow(۱۰(۳/۵t)+۵t)t=۴۰\Rightarrow ۴۰t^۲=۴۰\Rightarrow t=۱s$$

بنابراین:

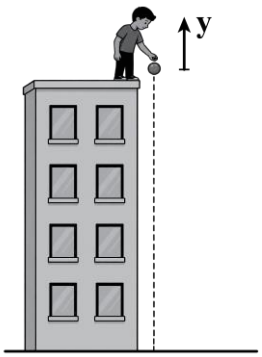
$$t_B=۳/۵t=۳/۵s\Rightarrow t_C=t_B+t=۳/۵+۱=۴/۵s$$

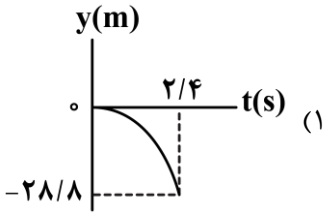
حالا اندازهٔ سرعت متوسط گلوله از نقطهٔ A تا نقطهٔ C را حساب می‌کنیم:

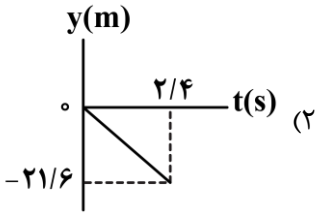
$$\Delta y=-\frac{۱}{۲}gt_C^۲=-۵(۴/۵)^۲$$

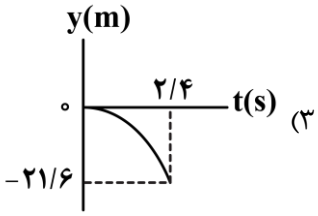
$$v_{av}=\frac{\Delta y}{\Delta t}=\frac{-۵(۴/۵)(۴/۵)}{۴/۵}=-۲۲/۵\frac{m}{s}\Rightarrow|v_{av}|=۲۲/۵\frac{m}{s}$$

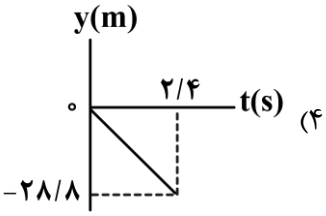
۶۲- مطابق شکل زیر، شخصی از لبهٔ پشت بام ساختمانی، سنگی را در شرایط خلأ رها می‌کند و سنگ با تندی $۲۴\frac{m}{s}$ به زمین برخورد می‌کند. نمودار مکان ـ زمان سنگ از لحظهٔ رها شدن تا لحظهٔ برخورد به زمین، مطابق با کدام گزینه است؟ $(g=۱۰\frac{m}{s^۲})$



۱)


۲)


۳)


۴)


پاسخ: گزینهٔ ۱ (آسان ـ استدلالی ـ استاندارد ـ صفحهٔ ۲۲ ـ ۱۲۰۱)

کام اول

طبق معادلهٔ سرعت ـ زمان در سقوط آزاد، کل مدت‌زمان سقوط سنگ برابر است با:

$$v=-gt+\cancel{v_۰} \Rightarrow -۲۴=-۱۰\times t \Rightarrow t=۲/۴s$$

کام دوم

طبق معادلهٔ مکان ـ زمان در سقوط آزاد داریم:

$$y=-\frac{۱}{۲}gt^۲+\cancel{v_۰}t+\cancel{y_۰} \Rightarrow y=-۵t^۲$$

بنابراین با توجه به این‌که معادلهٔ مکان ـ زمان به‌دست‌آمده درجهٔ ۲ است، پس نمودار $y-t$ برای سنگ، بخشی از یک سهمی است (رد گزینه‌های (۲) و (۴)).

کام آخر

با جایگذاری مدت‌زمان سقوط در معادلهٔ مکان ـ زمان داریم:

$$t=۲/۴s \Rightarrow y_{\text{زمین}}=-۵\times ۲/۴^۲=-۲۸/۸m$$

بنابراین گزینهٔ (۱) درست است.

ماز

۶۳- چه تعداد از تبدیل یکاهای زیر درست است؟ ($۱hp \simeq ۷۵۰W$ و $۱۸۰۰m=$ مایل ۱)

الف: $۱/۵\times ۱۰^{-۶}\frac{g}{mm^۳}=۱/۵\frac{kg}{m^۳}$

ب: $۲۵kWh=۹۰MJ$

ج: $۳۲۴\frac{km}{h}=۳\frac{\text{مایل}}{\text{دقیقه}}$

د: $۸۰hp=۶۰kW$

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

پاسخ: گزینهٔ ۴ (آسان ـ محاسباتی ـ زمان‌بَر ـ صفحهٔ ۱۲ ـ ۱۰۰۱)

بررسی موارد:

الف)

$$۱/۵\times۱۰^{-۶}\frac{g}{mm^۳}=x\frac{kg}{m^۳}\Rightarrow x=۱/۵\times۱۰^{-۶}\frac{g}{kg}.\frac{m^۳}{mm^۳}=۱/۵\times۱۰^{-۶}\times۱۰^{-۳}\times۱۰^{۹}=۱/۵\frac{kg}{m^۳}\quad(✓)$$

ب)

$$۲۵kWh\times\frac{۱۰^{۳}W}{۱kW}\times\frac{۳۶۰۰s}{۱h}\times\frac{۱J}{۱Ws}\times\frac{۱MJ}{۱۰^{۶}J}=۹۰MJ\quad(✓)$$

ج)

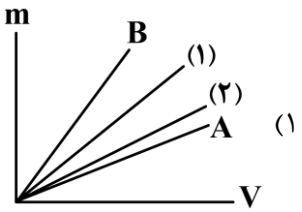
$$۳۲۴\frac{km}{h}\times\frac{۱۰۰۰m}{۱km}\times\frac{۱mile}{۱۸۰۰m}\times\frac{۱h}{۶۰min}=۳\frac{mile}{min}\quad(✓)$$

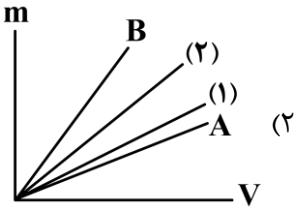
د)

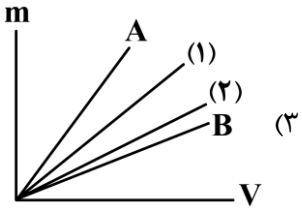
$$۸۰hp\times\frac{۷۵۰W}{۱hp}\times\frac{۱kW}{۱۰۰۰W}=۶۰kW\quad(✓)$$

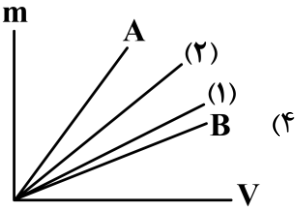
ماز

۶۴- **دو مایع با چگالی‌های ρ_A و $\rho_B>\rho_A$ را باهم مخلوط می‌کنیم. اگر در حالت (۱) حجم دو مایع و در حالت (۲) جرم دو مایع باهم برابر باشد، کدام‌یک از گزینه‌ها نمودار جرم برحسب حجم را برای دو مایع و محلول‌های حاصل به‌درستی نشان می‌دهد؟ (از تغییر حجم در حین مخلوط شدن صرف‌نظر می‌کنیم.)**

۱)


۲)


۳)


۴)


پاسخ: گزینهٔ ۱ (متوسط ـ مفهومی ـ استاندارد ـ صفحهٔ ۱۶ ـ ۱۰۰۱)

نکات

۱ـ در شرایطی که دراثر مخلوط شدن دو ماده، تغییر حجم نداشته باشیم، اگر حجم یکسانی از دو ماده را باهم مخلوط کنیم، چگالی مخلوط حاصل برابر است با:

$$\rho=\frac{\rho_۱+\rho_۲}{۲}$$

از طرفی اگر جرم یکسان از دو ماده را باهم مخلوط کنیم، درصورتی‌که تغییر حجم نداشته باشیم، چگالی مخلوط حاصل برابر است با:

$$\rho'=\frac{۲\rho_۱\rho_۲}{\rho_۱+\rho_۲}$$

دقت کنید اگر $\rho_۱\neq\rho_۲$ باشد، $\rho>\rho'$ است.

۲ـ شیب نمودار جرم برحسب حجم نشان‌دهندهٔ چگالی ماده است.

طبق نکتهٔ (۱)، $\rho_1 < \rho_2$ است؛ بنابراین گزینه‌های (۲) و (۴) حذف می‌شوند و طبق نکتهٔ (۲) نمودار مربوط به مایع B باید بالاتر از نمودار مربوط به مایع A قرار بگیرد. گزینهٔ (۳) حذف می‌شود.

ماز

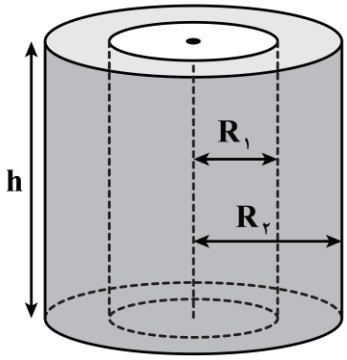
۶۵- استوانه‌ای توخالی به شعاع داخلی ۱cm، شعاع خارجی ۴cm و ارتفاع ۱۰cm که از فلزی به چگالی $۱۲\frac{g}{cm^3}$ ساخته شده است را مطابق شکل زیر درنظر بگیرید. چند درصد از حجم حفرهٔ این استوانه را با مایعی به چگالی $۲/۵\frac{g}{cm^3}$ پر کنیم تا مجموع جرم استوانه و مایع برابر با ۵۴۴۵g شود؟ ($\pi \simeq ۳$)

۱) ۴۰

۲) ۵۰

۳) ۶۰

۴) ۳۰



پاسخ: گزینهٔ ۳ (متوسط ـ استدلالی ـ زمان‌بَر ـ صفحهٔ ۱۶ ـ ۱۰۰۱)

گام اول

حجم استوانه برابر است با:

$$V_{\text{استوانه}} = \pi(R_۲^۲ - R_۱^۲)h = ۳ \times (۴^۲ - ۱^۲) \times ۱۰ = ۳ \times ۱۵ \times ۱۰ = ۴۵۰cm^۳$$

با توجه به رابطهٔ چگالی، جرم خود استوانه برابر است با:

$$m_{\text{استوانه}} = \rho_{\text{فلز}} \times V_{\text{استوانه}} = ۱۲ \times ۴۵۰ = ۵۴۰۰g$$

گام دوم

حالا باید جرم استوانه را از جرم کل مجموعه کم کنیم تا جرم مایع به‌دست آید:

$$m_{\text{مایع}} = m_{\text{کل}} - m_{\text{استوانه}} = ۵۴۴۵ - ۵۴۰۰ = ۴۵g$$

حجم مایع درون حفره برابر است با:

$$V = \frac{m}{\rho} \Rightarrow V_{\text{مایع}} = (\frac{m}{\rho})_{\text{مایع}} = \frac{۴۵}{۲/۵} = ۱۸cm^۳$$

گام آخر

کافی است حجم استوانهٔ داخلی را به‌دست آورده و با یک نسبت ساده به درصد حجم مایع برسیم:

$$V_{\text{حفره}} = \pi R_۱^۲ h = ۳ \times (۱)^۲ \times ۱۰ = ۳۰cm^۳$$

$$\frac{V_{\text{مایع}}}{V_{\text{حفره}}} = \frac{۱۸}{۳۰} = ۰/۶$$

پس باید ۶۰ درصد از حجم حفرهٔ استوانه را با این مایع پر کنیم.

ماز

۶۶- ۲۰۰g از هرکدام از سه مادهٔ A، B و C با چگالی‌های $\rho_A = ۴\frac{g}{cm^۳}$، $\rho_B = ۵\frac{g}{cm^۳}$ و $\rho_C = ۲۰\frac{g}{cm^۳}$ را باهم مخلوط می‌کنیم و با آلیاژ به‌دست‌آمده، مکعبی توخالی به ضلع ۵cm می‌سازیم. کدام‌یک از گزینه‌های زیر نادرست است؟ (از کاهش حجم در طی مخلوط شدن صرف‌نظر کنید.)

۱) اگر حفرهٔ داخل این مکعب را با روغن به چگالی $\rho = ۰/۸\frac{g}{cm^۳}$ پر کنیم، جرم مجموعه ۶۲۰g می‌شود.

۲) چگالی آلیاژ، ۲۰ درصد بیش‌تر از چگالی مادهٔ B است.

۳) حجم مادهٔ C در مکعب، $۱۰cm^۳$ کم‌تر از حجم حفره است.

۴) اگر این مکعب توپر باشد، جرم آن ۷۵۰g می‌شود.

پاسخ: گزینهٔ ۳ (متوسط ـ محاسباتی ـ زمان‌بَر ـ صفحهٔ ۱۶ ـ ۱۰۰۱)

گام اول

حجم هریک از مواد را به‌دست می‌آوریم:

$$\begin{cases} m_A = m_B = m_C = ۲۰۰g \\ V = \frac{m}{\rho} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} V_A = \frac{۲۰۰}{۴} = ۵۰cm^۳ \\ V_B = \frac{۲۰۰}{۵} = ۴۰cm^۳ \\ V_C = \frac{۲۰۰}{۲۰} = ۱۰cm^۳ \end{cases}$$

گام دوم

چگالی آلیاژ را حساب می‌کنیم:

$$\rho_{\text{آلیاژ}} = \frac{m_A + m_B + m_C}{V_A + V_B + V_C} = \frac{۲۰۰+۲۰۰+۲۰۰}{۵۰+۴۰+۱۰} = ۶\frac{g}{cm^۳}$$

گام سوم

حجم حفرهٔ داخل مکعب را حساب می‌کنیم:

$$\begin{cases} V_{\text{واقعی}} = \frac{m_{\text{کل}}}{\rho_{\text{آلیاژ}}} = \frac{۶۰۰}{۶} = ۱۰۰cm^۳ \\ V_{\text{ظاهری}} = ۵^۳ = ۱۲۵cm^۳ \end{cases} \Rightarrow V_{\text{حفره}} = ۱۲۵ - ۱۰۰ = ۲۵cm^۳$$

گام آخر

بررسی گزینه‌ها:

۱

$$m_{\text{روغن}} = \rho_{\text{روغن}} V_{\text{حفره}} = ۰/۸ \times ۲۵ = ۲۰g \Rightarrow m_t = ۶۰۰ + ۲۰ = ۶۲۰g \quad (\checkmark)$$

۲

$$\frac{\rho_{\text{آلیاژ}} - \rho_B}{\rho_B} \times ۱۰۰ = \frac{۶-۵}{۵} \times ۱۰۰ = ۲۰٪ \quad (\checkmark)$$

۳

$$\begin{cases} V_C = ۱۰cm^۳ \\ V_{حفره} = ۲۵cm^۳ \end{cases} \Rightarrow V_C - V_{حفره} = -۱۵cm^۳ \quad (✗)$$

۴

$$m = \rho_{آلیاژ} V_{ظاهری} = ۶ \times ۱۲۵ = ۷۵۰g \quad (✓)$$

۶۷- کدام گزینه صحیح است؟

۱) ذرات جسم جامد به سبب نیروهای مکانیکی که به یکدیگر وارد می‌کنند در کنار یکدیگر می‌مانند.

۲) ذرات سازندهٔ جامدهای بی‌شکل (آمورف) در طرح‌های منظمی کنار هم قرار دارند.

۳) اگر مایعی را به آرامی سرد کنیم، اغلب جامدهایی تشکیل می‌شوند که دارای الگوی سه‌بعدی تکرارشونده‌ای هستند.

۴) پخش ذرات نمک و جوهر در آب، درواقع به‌دلیل حرکت منظم و کاتوره‌ای مولکول‌های آب و برخورد آن با ذرات سازندهٔ نمک و جوهر است.

پاسخ: گزینهٔ ۳ (آسان ـ خط‌به‌خط ـ سریع ـ صفحهٔ ۲۶ ـ ۱۰۰۲)

بررسی سایر گزینه‌ها:

۱) ذرات جسم جامد به سبب **نیروهای الکتریکی** که به یکدیگر وارد می‌کنند در کنار یکدیگر می‌مانند.

۲) ذرات سازندهٔ جامدهای بی‌شکل (آمورف) در طرح‌های منظمی کنار هم قرار **ندارند**.

۴) پخش ذرات نمک و جوهر در آب، درواقع به‌دلیل حرکت **نامنظم** و کاتوره‌ای مولکول‌های آب و برخورد آن با ذرات سازندهٔ نمک و جوهر است.

۶۸- شناگری که مساحت پردهٔ هر دو گوش آن برابر با $۰/۷۸۱cm^۲$ است، درحال شنا کردن در عمق ۲ متری در دریا است. شناگر h متر پایین‌تر می‌رود و بزرگی نیرویی که به پردهٔ گوش او وارد می‌شود، ۱/۵ برابر حالتی است که در عمق ۲ متری در دریا درحال شنا کردن است. اکنون شناگر در عمق چندمتری درحال شنا کردن است؟ $(g = ۱۰\frac{N}{kg}, \rho_{آب} = ۱\frac{g}{cm^۳}, P_۰ = ۱۰^۵ Pa)$

۱) ۶ ۲) ۸ ۳) ۱۰ ۴) ۴

پاسخ: گزینهٔ ۲ (متوسط ـ محاسباتی ـ استاندارد ـ صفحهٔ ۳۴ ـ ۱۰۰۲)

گام اول

بزرگی نیروی وارد بر پردهٔ گوش در حالت دوم، ۱/۵ برابر حالت اول است؛ بنابراین:

$$F_۲ = ۱/۵F_۱ \xrightarrow[\text{ثابت: A}]{F=PA} P_۲ = ۱/۵P_۱$$

گام دوم

با توجه به رابطهٔ $P = \rho gh + P_۰$، فشار در دو حالت را به‌دست می‌آوریم:

$$\rho g(۲+h) + P_۰ = ۱/۵(\rho g(۲) + P_۰)$$

$$\xrightarrow{P_۰ = ۱۰^۵ Pa,\ g = ۱۰\frac{m}{s^۲},\ \rho = ۱\frac{g}{cm^۳}} ۱۰۰۰ \times ۱۰ \times (۲+h) + ۱۰^۵ = ۱/۵ \times (۱۰۰۰ \times ۱۰ \times ۲ + ۱۰^۵)$$

$$\Rightarrow ۲۰۰۰۰ + ۱۰۰۰۰h + ۱۰^۵ = ۱۸۰۰۰۰ \Rightarrow h = ۶m$$

گام آخر

شناگر در حالت اولیه در عمق ۲ متری است، پس ۶ متر دیگر پایین می‌رود، پس درنهایت **اکنون در عمق ۸ متری درحال شنا کردن است**.

سوتی‌های پرتکرار

اگر حواستان نباشد و اختلاف عمق را به‌اشتباه علامت بزنید در دام گزینهٔ (۱) می‌افتید!

ماز

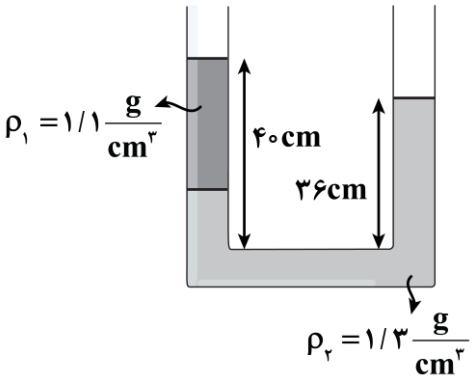
۶۹- در شکل زیر، سطح مقطع لوله در سرتاسر آن ثابت و برابر با $۲cm^۲$ است. در سمت راست لوله، چند گرم مایع مخلوط‌نشدنی به چگالی $\rho_۳ = ۰/۹ \frac{g}{cm^۳}$ بریزیم تا سطح آزاد مایع‌ها در دو طرف لوله در یک سطح باشد؟

۱) ۱۱/۷

۲) ۱۳

۳) ۲۶

۴) ۲۳/۴



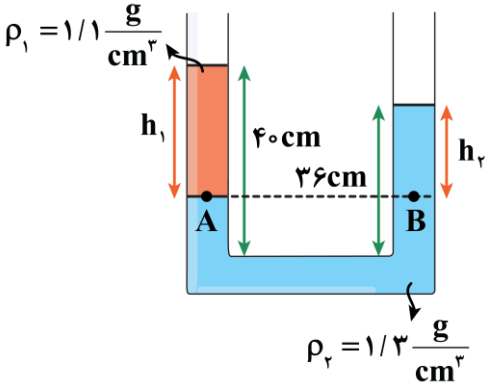
پاسخ: گزینهٔ ۴ (سخت ـ محاسباتی ـ زمان‌بَر ـ صفحهٔ ۳۵ ـ ۱۰۰۲)

راه نجات سریع

اول به کمک برابری فشار در نقطهٔ مرزی با نقطهٔ هم‌ترازش، ارتفاع مایع $\rho_۱$ رو به‌دست بیار. بعدش با ریختن مایع $\rho_۳$ و ایجاد تعادل جدید به کمک برابر بودن فشار در مرز بین مایع $\rho_۱$ و $\rho_۲$ با نقطهٔ هم‌ترازش و ارتفاع یکسان سطح آزاد دو شاخه، ارتفاع مایع $\rho_۳$ رو حساب کن. درنهایت با داشتن ارتفاع مایع $\rho_۳$ و سطح مقطع لوله، حجم مایع $\rho_۳$ و بعد از اون جرم مایع $\rho_۳$ رو حساب کن.

گام اول

با توجه به نقاط هم‌تراز A و B و برابری فشار در این نقاط، ارتفاع مایع با چگالی $\rho_۱$ را به‌دست می‌آوریم:



$$P_A = P_B \Rightarrow \rho_۱ h_۱ = \rho_۲ h_۲ \Rightarrow ۱/۱ \times h_۱ = ۱/۳ \times h_۲$$

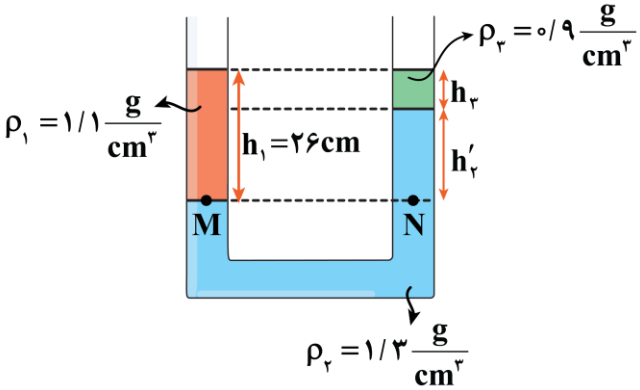
$$\Rightarrow h_۲ = \frac{۱۱}{۱۳} h_۱$$

$$h_۱ - h_۲ = h_۱ - \frac{۱۱}{۱۳} h_۱ = ۴۰ - ۳۶ = ۴$$

$$\Rightarrow \frac{۲}{۱۳} h_۱ = ۴ \Rightarrow h_۱ = ۲۶cm$$

گام دوم

پس از ریختن مایع با چگالی $\rho_۳$ و ایجاد تعادل جدید، ارتفاع مایع با چگالی $\rho_۳$ را حساب می‌کنیم:



$$P_M = P_N \Rightarrow \rho_۱ h_۱ = \rho_۲ h'_۲ + \rho_۳ h_۳$$

$$\Rightarrow ۱/۱ \times ۲۶ = ۱/۳ h'_۲ + ۰/۹ h_۳$$

$$\begin{cases} ۲۸/۶ = ۱/۳ h'_۲ + ۰/۹ h_۳ \\ h_۱ = h'_۲ + h_۳ \Rightarrow ۲۶ = h'_۲ + h_۳ \end{cases} \Rightarrow h'_۲ = h_۳ = ۱۳cm$$

کام آخر

جرم مایع با چگالی ρ_3 برابر است با:

$$m=\rho V \xrightarrow{V=Ah} m=\rho Ah=۰/۹\frac{g}{cm^۳}\times ۲cm^۲\times ۱۳cm=۲۳/۴g$$

۷۰- یک لولهٔ استوانه‌ای به حجم $۵۰cm^۳$ با جرم یکسان از سه مایع مخلوط‌نشدنی A، B و جیوه به‌طور کامل پر شده است. اگر فشار در ته لوله برابر با $۱۰۷۴۴۰Pa$ باشد، فشار هوای محیط چند سانتی‌متر جیوه است؟

($\rho_A=۰/۸۵\frac{g}{cm^۳}$، $\rho_B=۱/۷\frac{g}{cm^۳}$، $\rho_{جیوه}=۱۳/۶\frac{g}{cm^۳}$، $g=۱۰\frac{N}{kg}$ و مساحت سطح مقطع لوله برابر با $۲cm^۲$ است.)

۱) ۷۵ ۲) ۷۶ ۳) ۷۷ ۴) ۷۸

پاسخ: گزینهٔ ۲ (سخت ـ محاسباتی ـ استاندارد ـ صفحهٔ ۳۴ ـ ۱۰۰۲)

نکات

۱ـ در ظرف استوانه‌ای‌شکل، فشار ناشی از مایع‌های هم‌جرم باهم برابر است.

۲ـ وقتی $\rho_{جیوه}=۱۳/۶\frac{g}{cm^۳}$ و $g=۱۰\frac{N}{kg}$ است، برای تبدیل مقداری فشار برحسب پاسکال به سانتی‌متر جیوه باید مقدار موردنظر را بر ۱۳۶۰ تقسیم کنیم.

کام اول

ارتفاع جیوه را به‌دست می‌آوریم.

$$m=\rho V\Rightarrow m_A=m_B=m_{جیوه}\Rightarrow ۰/۸۵V_A=۱/۷V_B=۱۳/۶V_{جیوه}\Rightarrow\begin{cases}V_A=۱۶V_{جیوه}\\V_B=۸V_{جیوه}\end{cases}$$

لوله با سه مایع به‌طور کامل پرشده است؛ بنابراین:

$$V_A+V_B+V_{جیوه}=۵۰\Rightarrow ۱۶V_{جیوه}+۸V_{جیوه}+V_{جیوه}=۵۰$$

$$\Rightarrow ۲۵V_{جیوه}=۵۰\Rightarrow V_{جیوه}=۲cm^۳$$

$$V_{جیوه}=Ah_{جیوه}\Rightarrow ۲=۲\times h_{جیوه}\Rightarrow h_{جیوه}=۱cm$$

کام دوم

با توجه به این‌که ظرف، استوانه‌ای‌شکل است و جرم مایع‌ها یکسان است، طبق رابطهٔ $P_{مایع}=\frac{mg}{A}$ در ظرف استوانه‌ای‌شکل درمی‌یابیم که فشار حاصل از هرکدام از مایع‌های A و B با فشار حاصل از ارتفاع $۱cm$ از جیوه برابر است؛ درنتیجه داریم:

$$P_A=P_B=P_{جیوه}=۱cmHg$$

سپس فشار حاصل از سه مایع در ته لوله برابر است با:

$$P_A+P_B+P_{جیوه}=۱+۱+۱=۳cmHg$$

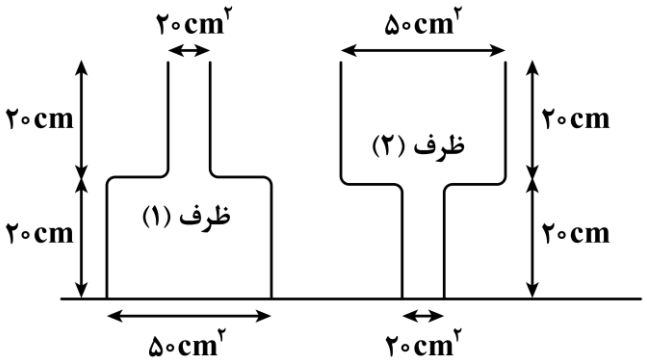
کام آخر

فشار کل در ته لوله برابر با $۱۰۷۴۴۰Pa$ است؛ بنابراین:

$$P=P_۰+P_A+P_B+P_C\Rightarrow\frac{۱۰۷۴۴۰}{۱۳۶۰}cmHg=P_۰+۳\Rightarrow ۷۹=P_۰+۳$$

$$\Rightarrow P_۰=۷۶cmHg$$

۷۱- مطابق شکل زیر، در هریک از ظرف‌های (۱) و (۲)، ۱/۲kg آب می‌ریزیم. اگر اختلاف اندازهٔ نیرویی که آب بر کف ظرف‌ها وارد می‌کند، برابر با ΔF و اختلاف اندازهٔ فشار در کف ظرف‌ها برابر با ΔP باشد، ΔF و ΔP به‌ترتیب از راست به چپ برحسب SI در کدام گزینه به‌درستی آمده‌اند؟ $(g=10\frac{N}{kg}\ ,\ \rho_{آب}=1\frac{g}{cm^3})$



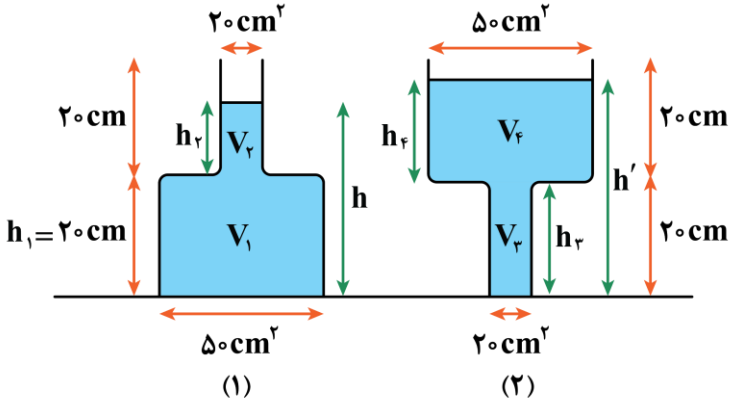
۱) ۳/۹ و ۵۰۰
۲) ۳/۹ و ۶۰۰
۳) ۷/۸ و ۵۰۰
۴) ۷/۸ و ۶۰۰

پاسخ: گزینهٔ ۴ (سخت ـ محاسباتی ـ زمان‌بَر ـ صفحهٔ ۳۴ ـ ۱۰۰۲)

گام اول

حجم کل آب ریخته‌شده در هر ظرف برابر است با:

$$\rho=\frac{m}{V}\Rightarrow 1=\frac{1200}{V}\Rightarrow V=1200cm^3$$



ارتفاع آب در هریک از ظرف‌ها را به‌دست می‌آوریم:

$$\text{ظرف (۱)}:\begin{cases}V_1=50\times20=1000cm^3\\ V_2=V-V_1=1200-1000=200cm^3\Rightarrow h_2=\frac{200}{20}=10cm\end{cases}\Rightarrow h=h_1+h_2=20+10=30cm$$

$$\text{ظرف (۲)}:\begin{cases}V_3=20\times20=400cm^3\\ V_4=V-V_3=1200-400=800cm^3\Rightarrow h_4=\frac{800}{50}=16cm\end{cases}\Rightarrow h'=h_3+h_4=20+16=36cm$$

گام دوم

فشار حاصل از آب در کف هر دو ظرف را حساب می‌کنیم:

$$P_1=\rho gh=1000\times10\times0/3=3000Pa$$
$$P_2=\rho gh'=1000\times10\times0/36=3600Pa$$

گام سوم

اندازهٔ نیروی ناشی از آب بر کف هر دو ظرف را به‌دست می‌آوریم:

$$F=PA\Rightarrow\begin{cases}F_1=3000\times50\times10^{-4}=15N\\ F_2=3600\times20\times10^{-4}=7/2N\end{cases}$$

گام آخر

ΔP و ΔF را به‌دست می‌آوریم:

$$\Delta P = ۳۶۰۰ - ۳۰۰۰ = ۶۰۰\text{Pa}$$

$$\Delta F = ۱۵ - ۷/۲ = ۷/۸\text{N}$$

ماز

۷۲- شکل زیر، دو بارومتر را نشان می‌دهد که برای اندازه‌گیری فشار هوا در یک محیط قرار گرفته‌اند. اگر فشار هوای محیط ۱۰۳۳۶۰Pa باشد، فشار گاز جمع‌شده در انتهای لولهٔ بارومتر (۱)، چند برابر فشار گاز جمع‌شده در انتهای لولهٔ بارومتر (۲) است؟

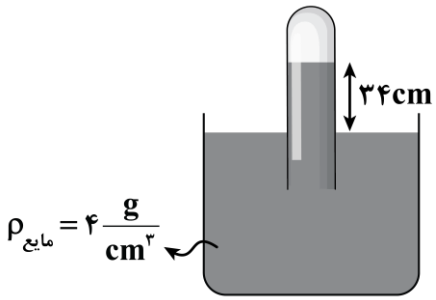
$$(g = ۱۰\frac{\text{N}}{\text{kg}}\ ,\ \rho_{\text{جیوه}} = ۱۳/۶\frac{\text{g}}{\text{cm}^۳})$$

۱) $\frac{۷}{۹}$

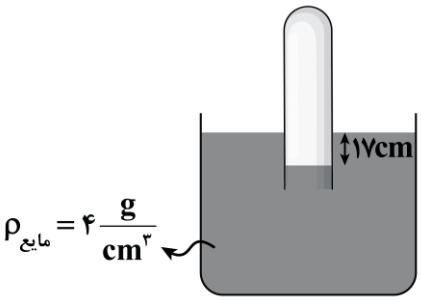
۲) $\frac{۲۲}{۲۷}$

۳) $\frac{۲۳}{۲۷}$

۴) $\frac{۸}{۹}$



(۱)



(۲)

پاسخ: گزینهٔ ۲ (متوسط ـ محاسباتی ـ استاندارد ـ صفحهٔ ۳۷ ـ ۱۰۰۲)

گام اول

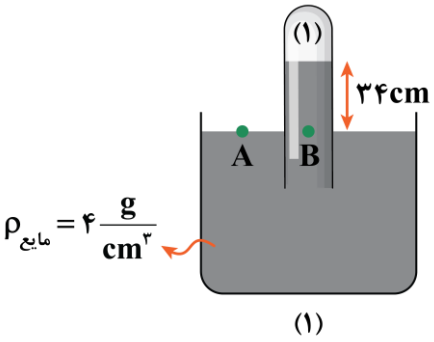
فشار هوای محیط را برحسب سانتی‌متر جیوه به‌دست می‌آوریم:

$$P_۰ = \rho_{\text{جیوه}} gh \Rightarrow ۱۰۳۳۶۰ = ۱۳۶۰۰ \times ۱۰ \times h \Rightarrow h = ۷۶\text{cm}$$

$$\Rightarrow P_۰ = ۷۶\text{cmHg}$$

گام دوم

فشار گاز محصور در بارومترها را برحسب سانتی‌متر جیوه به‌دست می‌آوریم:



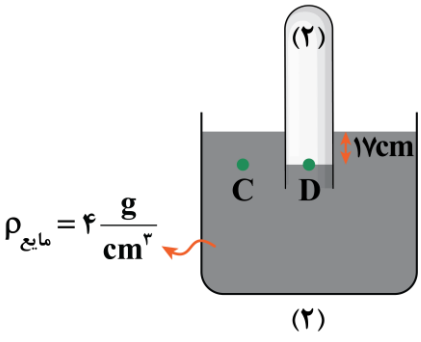
(۱)

$$\rho_{\text{مایع}} h_{\text{مایع}} = \rho_{\text{جیوه}} h_{\text{جیوه}} \Rightarrow ۴ \times ۳۴ = ۱۳/۶ \times h_{\text{جیوه}}$$

$$\Rightarrow h_{\text{جیوه}} = ۱۰\text{cm} \Rightarrow P_{\text{مایع}} = ۱۰\text{cmHg}$$

$$P_A = P_B \Rightarrow P_۰ = P_{\text{مایع}} + P_۱ \Rightarrow ۷۶ = ۱۰ + P_۱$$

$$\Rightarrow P_۱ = ۶۶\text{cmHg}$$



(۲)

$$\rho_{\text{مایع}} h'_{\text{مایع}} = \rho_{\text{جیوه}} h'_{\text{جیوه}} \Rightarrow ۴ \times ۱۷ = ۱۳/۶ \times h'_{\text{جیوه}}$$

$$\Rightarrow h'_{\text{جیوه}} = ۵\text{cm} \Rightarrow P'_{\text{مایع}} = ۵\text{cmHg}$$

$$P_C = P_D \Rightarrow P_۰ + P'_{\text{مایع}} = P_۲ \Rightarrow ۷۶ + ۵ = ۸۱\text{cmHg}$$

کام آخر

نسبت $\frac{P_1}{P_2}$ را به‌دست می‌آوریم:

$$\frac{P_1}{P_2}=\frac{۶۶}{۸۱}=\frac{۲۲}{۲۷}$$

ماز

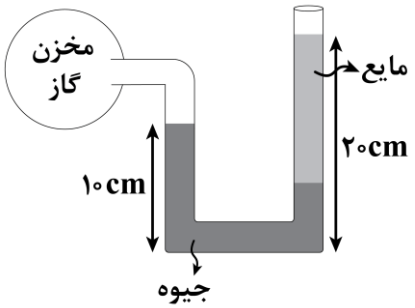
۷۳- در شکل زیر، جیوه و مایعی با چگالی $۱۸۰۰\frac{kg}{m^3}$ درحال تعادل هستند. اگر فشار پیمانه‌ای در سطح تماس مایع با جیوه برابر با $۲۷۰۰Pa$ باشد، فشار پیمانه‌ای گاز درون مخزن چند کیلوپاسکال است؟ $(g=۱۰\frac{N}{kg}\ ,\ \rho_{جیوه}=۱۳۶۰۰\frac{kg}{m^3})$

۱) $-۲/۰۵$

۲) $-۲/۱$

۳) $-۴/۲$

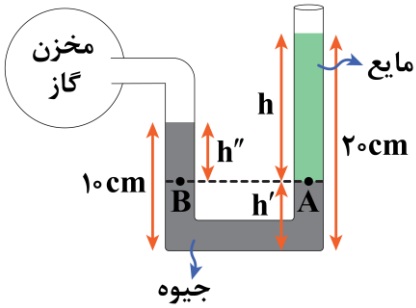
۴) $-۴/۱$



پاسخ: گزینهٔ ۴ (آسان ـ محاسباتی ـ استاندارد ـ صفحهٔ ۳۸ ـ ۱۰۰۲)

کام اول

با توجه به فشار پیمانه‌ای در مرز مایع و جیوه، h و h' را به‌دست می‌آوریم:



$$P_{g_A}=\rho_{مایع}gh\Rightarrow ۲۷۰۰=۱۸۰۰\times ۱۰\times h$$

$$\Rightarrow h=۰/۱۵m=۱۵cm$$

$$h+h'=۲۰\Rightarrow ۱۵+h'=۲۰\Rightarrow h'=۵cm$$

کام آخر

با توجه به برابری فشار در نقاط A و B داریم:

$$P_A=P_B\Rightarrow P_{g_A}=P_{g_B}\Rightarrow ۲۷۰۰=P_{g_{مخزن}}+\rho_{جیوه}gh''$$

$$\Rightarrow P_{g_{مخزن}}+(۱۳۶۰۰\times ۱۰\times ۰/۰۵)=۲۷۰۰\Rightarrow P_{g_{مخزن}}=-۴۱۰۰Pa=-۴/۱kPa$$

ماز

۷۴- درون ظرفی $۱۵L$ آب وجود دارد و جسمی توپر به جرم $۱۲۰g$ و حجم $۶۰cm^3$ در کف ظرف قرار دارد. حداقل چند لیتر از یک مایع مخلوط‌شدنی با آب، با چگالی $۴\frac{g}{cm^3}$ به ظرف اضافه کنیم تا جسم در آستانهٔ جدا شدن از کف ظرف قرار گیرد؟

$(\rho_{آب}=۱\frac{g}{cm^3}$ و از تغییر حجم دراثر مخلوط شدن صرف‌نظر می‌کنیم.)

۱) ۵

۲) ۷/۵

۳) ۱۰

۴) ۱۵

پاسخ: گزینهٔ ۲ (متوسط ـ محاسباتی ـ استاندارد ـ صفحهٔ ۴۲ ـ ۱۰۰۲)

نکته

حداقل مقدار مایع برای این‌که جسم رو به بالا شروع به حرکت کند، مربوط به حالتی است که چگالی مخلوط حاصل با چگالی جسم برابر شود.

گام اول

چگالی جسم را به‌دست می‌آوریم:

$$\rho_{جسم}=\frac{m_{جسم}}{V_{جسم}}\Rightarrow \rho_{جسم}=\frac{۱۲۰}{۶۰}=۲\frac{g}{cm^۳}$$

گام آخر

حجم مایع اضافه‌شده برای این‌که چگالی مخلوط با چگالی جسم یکسان شود برابر است با:

$$\rho_{مخلوط}=\rho_{جسم}=۲\frac{g}{cm^۳}$$

$$\rho_{مخلوط}=\frac{m_{مایع}+m_{آب}}{V_{مایع}+V_{آب}}\Rightarrow ۲=\frac{(۴\times V)+(۱۵۰۰۰)}{V+۱۵۰۰۰}$$

$$\Rightarrow ۲V+۳۰۰۰۰=۴V+۱۵۰۰۰\Rightarrow V=۷۵۰۰cm^۳=۷/۵L$$

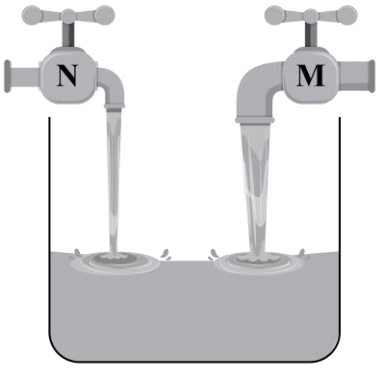
۷۵- در شکل زیر، قطر مقطع خروجی شیرهای M و N به‌صورت $D_M=۲D_N=۲cm$ و تندی جریان آب هنگام خروج از شیرها به‌صورت $v_M=\frac{۱}{۲}v_N=۴\frac{m}{s}$ است. اگر حجم مخزن برابر با ۵۴۰L باشد، پس از چند دقیقه پر می‌شود؟ ($\pi=۳$ و مخزن در ابتدا خالی از آب است.)

۱) ۱۰

۲) ۱۲

۳) ۵

۴) ۲۰



پاسخ: گزینهٔ ۳ (متوسط ـ محاسباتی ـ زمان‌بَر ـ صفحهٔ ۴۴ ـ ۱۰۰۲)

گام اول

آهنگ شارش حجمی آب از هرکدام از شیرها را حساب می‌کنیم:

$$A=\frac{\pi D^۲}{۴}=\frac{۳}{۴}D^۲\Rightarrow\begin{cases}A_M=\frac{۳}{۴}(۲^۲)=۳cm^۲=۳\times۱۰^{-۴}m^۲\\ A_N=\frac{۳}{۴}(۱^۲)=\frac{۳}{۴}cm^۲=\frac{۳}{۴}\times۱۰^{-۴}m^۲\end{cases}$$

$$\text{آهنگ شارش حجمی آب}=R=Av\Rightarrow\begin{cases}R_M=۳\times۱۰^{-۴}\times۴=۱۲\times۱۰^{-۴}\frac{m^۳}{s}\\ R_N=\frac{۳}{۴}\times۱۰^{-۴}\times۸=۶\times۱۰^{-۴}\frac{m^۳}{s}\end{cases}$$

گام دوم

آهنگ پر شدن مخزن را به‌دست می‌آوریم:

$$R_t=R_M+R_N=۱۲\times۱۰^{-۴}+۶\times۱۰^{-۴}=۱۸\times۱۰^{-۴}\frac{m^۳}{s}$$

مدت‌زمان پر شدن مخزن را به‌دست می‌آوریم:

$$R_t = \frac{V_{\text{مخزن}}}{\Delta t} \Rightarrow ۱۸ \times ۱۰^{-۴} \frac{m^۳}{s} = \frac{۵۴۰ \times ۱۰^{-۳} m^۳}{\Delta t} \Rightarrow \Delta t = ۳۰۰ s = ۵ \min$$

بودجه‌بندی این آزمون	فصل ۱ دهم (صفحهٔ ۱ تا ۴۶) + فصل ۱ دوازدهم (صفحهٔ ۱ تا ۲۶ / تا ابتدای با هم بیاندیشیم)
سهم در کنکور	این آزمون در مجموع ۵ الی ۶ تست از ۳۰ تستِ کنکور را پوشش داده است.

۷۶- کدام‌یک از مطالب زیر در رابطه با استر سنگین سه عاملی با فرمول $C_{۴۲}H_{۷۴}O_۶$ که زنجیره‌های هیدروکربنی آن مشابه هم هستند، درست است؟

۱) این ماده، نوعی ترکیب آلی سیرشده بوده و در ساختار آن، ۳ پیوند اشتراکی $C=O$ وجود دارد.

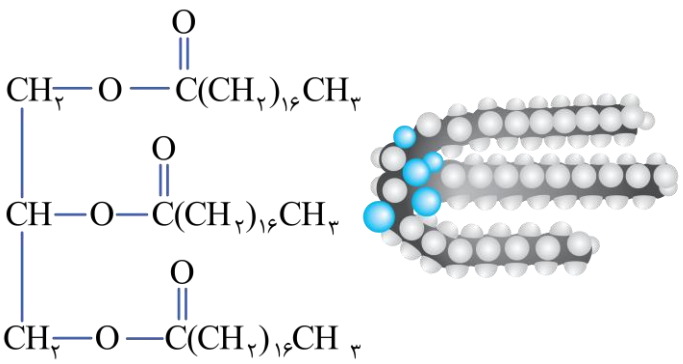
۲) در ساختار مولکولی این ماده، ۳۵ پیوند اشتراکی $C-C$ و ۷۴ پیوند اشتراکی $C-H$ یافت می‌شود.

۳) طی واکنش ۰/۵ مول از این ماده با مقدار کافی محلول سود، می‌توان ۰/۵ مول صابون جامد به‌دست آورد.

۴) نوع نیروی بین مولکولی غالب در این ماده، مشابه نوع نیروی بین مولکولی غالب میان ذرات سازنده اتانول است.

پاسخ: گزینهٔ ۲ (دشوار ـ مفهومی و محاسباتی ـ استاندارد ـ صفحهٔ ۶ ـ ۱۲۰۱)

تصویر زیر، ساختار استرهای سنگین را نشان می‌دهد:



استرهای **سنگین**، جزئی از **چربی‌ها** هستند که **جرم مولی بالایی** داشته و **۳ گروه عاملی استر** دارند. فرمول شیمیایی کلی این مواد به شرط سیرشده بودن زنجیرهای هیدروکربنی، به‌صورت $C_nH_{۲n-۴}O_۶$ است. استر مورد نظر، دارای ۴۲ اتم کربن بوده و فرمول شیمیایی آن در رابطه کلی $C_nH_{۲n-۴}O_۶$ صدق نمی‌کند، پس این ماده نوعی استر سیرنشده است. چون فرمول شیمیایی این ماده نسبت به فرمول کلی $C_nH_{۲n-۴}O_۶$، تعداد ۶ اتم هیدروژن کمتر دارد، پس می‌توان گفت در زنجیره‌های هیدروکربنی این ماده، ۳ پیوند $C=C$ وجود دارد. در قسمت قطبی این استر، ۲ پیوند $C-C$ یافت شده و در هر زنجیر هیدروکربنی آن نیز تعداد ۱۱ پیوند یگانه $C-C$ و یک پیوند $C=C$ وجود دارد. بر این اساس، می‌توان گفت در ساختار مولکولی این ماده، ۳۵ پیوند اشتراکی $C-C$ یافت می‌شود. از آنجا که همه اتم‌های هیدروژن این ماده به اتم کربن متصل شده‌اند، پس در این ماده، ۷۴ پیوند اشتراکی $C-H$ یافت می‌شود.

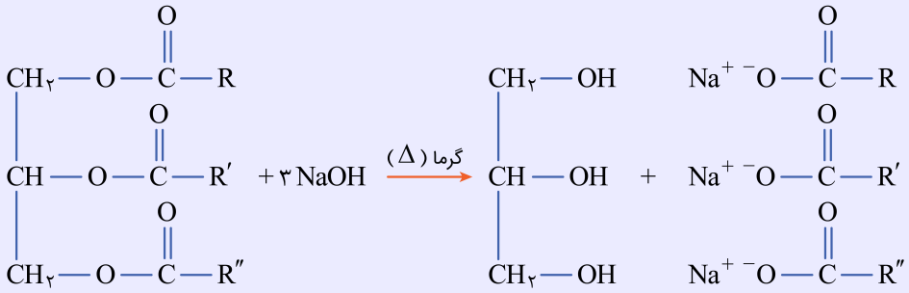
بررسی سایر گزینه‌ها:

۱) این ماده، دارای ۳ پیوند اشتراکی کربن-کربن دوگانه است و به همین خاطر، نوعی ترکیب آلی سیرنشده به‌شمار می‌رود. در ساختار این استر سنگین، ۳ پیوند اشتراکی $C=O$ وجود دارد.

۳) هر مولکول استر، ۳ واحد صابون ایجاد می‌کند. بر این اساس، طی واکنش ۰/۵ مول از این **استر سنگین** سه عاملی با مقدار کافی محلول سود، می‌توان ۱/۵ مول صابون **جامد** به‌دست آورد.

واکنش صابونی‌شدن

صابون‌های جامد را بر اثر گرمادادن روغن‌های گیاهی یا چربی‌های جانوری مانند روغن زیتون، روغن نارگیل، دنبه و پیه گوسفند در حضور سدیم هیدروکسید ($NaOH$) تهیه می‌کنند. به این فرایند، واکنش صابونی‌شدن گفته می‌شود. داریم:



۴) نوع نیروی بین‌مولکولی غالب در استرهای سنگین، از نوع وان‌درووالسی است و این نیرو، مشابه نوع نیروی بین مولکولی غالب میان ذرات سازنده اتانول نخواهد بود.

۷۷- کدام موارد از عبارت‌های زیر، درست است؟

الف ـ اوره یک ماده محلول در آب بوده و گشتاور دوقطبی ذرات سازنده آن، برخلاف متیل‌آمین، بزرگ‌تر از صفر است.

ب ـ وبا به دلیل آلوده شدن آب‌ها و نبود بهداشت شیوع پیدا کرده و هنوز هم امکان همه‌گیری آن در جهان وجود دارد.

ج ـ در ساختار ذرات سازنده عسل، برخلاف مولکول اسیدهای چرب، اتم هیدروژن متصل به اتم اکسیژن وجود دارد.

د ـ شاخص امید به زندگی به عوامل مختلف بستگی داشته و مقدار آن در مناطق برخوردار، بیشتر از میانگین جهان است.

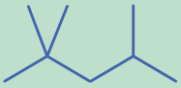
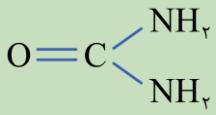
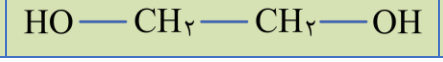
۱) «الف» و «ج» ۲) «الف» و «د» ۳) «ب» و «ج» ۴) «ب» و «د»

پاسخ: گزینهٔ ۴ (آسان ـ مفهومی و خط‌به‌خط ـ سریع ـ صفحهٔ ۵ ـ ۱۴۰۱)

عبارت‌های (ب) و (د) درست هستند.

بررسی موارد:

الف) جدول زیر، اطلاعات مربوط به اوره، بنزین و اتیلن‌گلیکول را نشان می‌دهد:

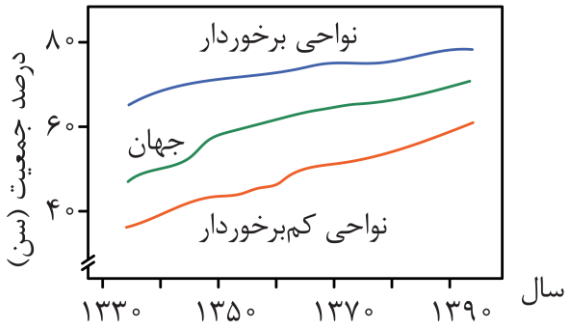
نام ماده	فرمول شیمیایی	ساختار	نوع ماده	حلال مناسب
بنزین	C_8H_{18}		مولکول ناقطبی	حلال ناقطبی (هگزان)
اوره	$CO(NH_2)_2$		مولکول قطبی	حلال قطبی (آب)
اتیلن گلیکول	$HOCH_2CH_2OH$		مولکول قطبی	حلال قطبی (آب)

متیل آمین، به خاطر داشتن یک جفت الکترون ناپیوندی بر روی اتم نیتروژن خود، ساختاری نامتقارن داشته و همانند اوره، یک ترکیب قطبی است. ترکیب‌های **قطبی**، در **حلال‌های قطبی** مثل **آب** حل می‌شوند.

ب) بیماری وبا یک بیماری **واگیردار** است و در طول تاریخ بارها در جهان **همه‌گیر** شده است و طی این فرایند جان **میلیون‌ها** انسان را گرفته است. این بیماری به دلیل **آلوده شدن آب** و **نبود بهداشت** شایع می‌شود. بیماری وبا، هنوز هم می‌تواند برای هر جامعه تهدیدکننده باشد.

ذرات سازنده عسل در ساختار خود شمار زیادی **گروه هیدروکسیل** داشته و **توانایی برقراری پیوند هیدروژنی** با مولکول‌های آب را دارند پس به همین خاطر، عسل در آب حل می‌شود. اسیدهای چرب نیز دارای گروه عاملی **کربوکسیل** بوده و در آن‌ها اتم **هیدروژن** متصل به اتم **اکسیژن** وجود دارد.

شاخص امید به زندگی به عوامل گوناگونی بستگی داشته و مقدار آن در مناطق کم‌برخوردار، همانند مناطق برخوردار جهان، رو به افزایش است. نمودار زیر، روند **تغییر شاخص امید به زندگی** را در مناطق مختلف جهان نشان می‌دهد:



۷۸- بر اثر واکنش مقدار کافی از یک اسید چرب سیرشده ۱۵ کربنه با ۴ لیتر محلول پتاسیم هیدروکسید با غلظت ۱۷۵۰ppm و چگالی $1/2\,g.mL^{-1}$، چند گرم صابون با خلوص ۸۰٪ به‌دست می‌آید؟ $(K=39, O=16, C=12, H=1: g.mol^{-1})$

۱) ۴۹/۵ ۲) ۹۹ ۳) ۵۲/۵ ۴) ۱۰۵

پاسخ: گزینهٔ ۳ (متوسط ـ محاسباتی ـ استاندارد ـ صفحهٔ ۶ ـ ۱۲۰۱)

اسیدهای چرب، در واکنش با محلول پتاسیم هیدروکسید یا همان محلول پتاس سوزآور، به صابون مایع تبدیل می‌شوند. معادلهٔ واکنش صابونی شدن به‌صورت زیر است:

$$C_{15}H_{30}O_2 + KOH \rightarrow C_{15}H_{29}O_2K + H_2O$$

ابتدا جرم مولی صابون را به‌دست می‌آوریم:

$$\text{جرم مولی صابون} = (15\times12)+(29\times1)+(2\times16)+39 = 280\,g.mol^{-1}$$

جرم محلول پتاسیم هیدروکسید برابر است با:

$$\text{جرم محلول پتاسیم هیدروکسید} = \text{حجم محلول} \times \text{چگالی محلول} = 1/2\,g.mL^{-1} \times 4000\,mL = 4800\,g$$

در قدم بعد، با استفاده از غلظت محلول پتاسیم هیدروکسید، جرم حل‌شونده را حساب می‌کنیم:

$$ppm = \frac{\text{جرم حل‌شونده}}{\text{جرم محلول}} \times 10^6 \Rightarrow \text{جرم حل‌شونده} = \frac{1750\times4800}{10^6} = 8/4\,g\,KOH$$

در نهایت جرم صابون ناخالص را محاسبه می‌کنیم:

$$?\,g\,\text{صابون ناخالص} = 8/4\,g\,KOH \times \frac{1\,mol\,KOH}{56\,g\,KOH} \times \frac{1\,mol\,\text{صابون}}{1\,mol\,KOH} \times \frac{280\,g\,\text{صابون}}{1\,mol\,\text{صابون}} \times \frac{100\,g\,\text{صابون ناخالص}}{80\,g\,\text{صابون}} = 52/5\,g\,\text{صابون ناخالص}$$

پس بر اثر انجام واکنش صابونی شدن، ۵۲/۵ گرم صابون با خلوص ۸۰٪ به‌دست می‌آید.

۷۹- اگر به ۵۰۰ میلی‌لیتر آب سخت با چگالی $1/2\,g.mL^{-1}$ که دارای یون‌های Ca^{2+} و Mg^{2+} با غلظت $4000\,ppm$ و $3600\,ppm$ است، مقدار ۳۷/۵ گرم از صابون $C_{13}H_{27}COONa$ را اضافه کنیم، چند درصد از کاتیون‌های اولیه موجود در این محلول به رسوب تبدیل می‌شوند؟ $(Ca=40, Mg=24, Na=23, O=16, C=12, H=1 : g.mol^{-1})$

۱) ۵۰ ۲) ۷۵ ۳) ۴۰ ۴) ۶۰

پاسخ: گزینهٔ ۱ (متوسط ـ محاسباتی ـ استاندارد ـ صفحهٔ ۹ ـ ۱۲۰۱)

ابتدا جرم آب سخت را به‌دست می‌آوریم:

$$\text{جرم آب سخت} = \text{حجم آب} \times \text{چگالی آب} = 1/2\,g.mL^{-1} \times 500\,mL = 600\,g$$

معادله‌های واکنش انجام شده با یون‌های منیزیم و کلسیم به‌صورت زیر هستند:

$$2C_{13}H_{27}COONa + Mg^{2+} \rightarrow (C_{13}H_{27}COO)_2Mg + 2Na^+$$

$$2C_{13}H_{27}COONa + Ca^{2+} \rightarrow (C_{13}H_{27}COO)_2Ca + 2Na^+$$

با توجه به معادله دو واکنش بالا، هر مول از یون‌های منیزیم و کلسیم موجود در آب سخت، با ۲ مول صابون واکنش داده و آن را به رسوب تبدیل می‌کنند. بر این اساس، مقدار کل یون‌های موجود در آب را محاسبه می‌کنیم:

$$?\,mol\,Mg^{2+} = 600\,g\,\text{آب سخت} \times \frac{3600\,g\,Mg^{2+}}{10^6\,g\,\text{آب سخت}} \times \frac{1\,mol\,Mg^{2+}}{24\,g\,Mg^{2+}} = 0/09\,mol$$

$$?\,mol\,Ca^{2+} = 600\,g\,\text{آب سخت} \times \frac{4000\,g\,Ca^{2+}}{10^6\,g\,\text{آب سخت}} \times \frac{1\,mol\,Ca^{2+}}{40\,g\,Ca^{2+}} = 0/06\,mol$$

$$\text{مقدار کل یون‌ها} = 0/09 + 0/06 = 0/15\,mol$$

در قدم بعد، مقداری از کاتیون‌های منیزیم و یا کلسیم که با ۳۷/۵ گرم صابون واکنش می‌دهند را محاسبه می‌کنیم. در این رابطه، داریم:

$$?\,mol\,\text{کاتیون} = 37/5\,g\,C_{13}H_{27}COONa \times \frac{1\,mol\,C_{13}H_{27}COONa}{250\,g\,C_{13}H_{27}COONa} \times \frac{1\,mol\,\text{کاتیون}}{2\,mol\,C_{13}H_{27}COONa} = 0/075\,mol$$

در محلول اولیه، مجموعاً ۰/۱۵ مول کاتیون وجود داشته که از این مقدار، ۰/۰۷۵ مول کاتیون با صابون واکنش داده است، پس می‌توان گفت ۵۰٪ از یون‌ها با صابون واکنش داده‌اند.

۸۰- محلولی از هیدروکلریک اسید با غلظت ۰/۱ مول بر لیتر در اختیار داریم. با انجام کدام تغییر زیر، مقدار pH محلول مورد نظر ثابت باقی می‌ماند؟

۱) انداختن یک قطعه فلز منیزیم در محلول
۲) افزودن محلول هیدروبرمیک اسید با $pH=1$ به محلول
۳) افزودن مقداری پاک‌کننده صابونی به محلول
۴) افزودن محلول ۰/۱ مولار هیدروسیانیک اسید به محلول

پاسخ: گزینهٔ ۲ (آسان ـ مفهومی ـ سریع ـ صفحهٔ ۲۶ ـ ۱۲۰۱)

هیدروکلریک اسید، یک اسید قوی بوده و غلظت یون هیدروژن در محلول ۰/۱ مولار آن، برابر با ۰/۱ مولار می‌شود. با افزودن محلولی از یک اسید قوی مثل هیدروبرمیک اسید با $pH=1$ که غلظت یون هیدروژن در این محلول هم برابر با ۰/۱ مولار است، به محلول مورد نظر، غلظت یون هیدروژن در محلول ثابت مانده و مقدار pH نیز تغییر نمی‌کند.

بررسی سایر گزینه‌ها:

۱) با انداختن یک قطعه فلز **منیزیم** در محلول اسیدی مورد نظر، مقداری از یون هیدروژن موجود در محلول مصرف شده و بر این اساس، مقدار pH این محلول نیز دچار تغییر می‌شود.

۳) صابون‌ها خاصیت **بازی** دارند. با افزودن مقداری پاک‌کننده صابونی به محلول مورد نظر، غلظت یون **هیدروژن** در این محلول تغییر کرده و مقدار pH این محلول نیز دچار تغییر می‌شود.

۴) چون هیدروسیانیک یک اسید ضعیف است، غلظت یون هیدروژن در محلول ۰/۱ مولار آن خیلی کمتر از ۰/۱ مولار می‌شود. بر این اساس، با افزودن محلول ۰/۱ مولار **هیدروسیانیک اسید** به محلول مورد نظر، غلظت یون هیدروژن در آن تغییر کرده و مقدار pH این محلول نیز دچار تغییر می‌شود.

ماز

۸۱- مقداری دی‌نیتروژن پنتاکسید را در آب حل کرده و حجم محلول مورد نظر را با اضافه کردن آب خالص به آن، به ۵ لیتر می‌رسانیم. اگر مجموع غلظت یون‌های تولید شده در این محلول برابر با ۰/۰۲ مول بر لیتر باشد، جرم دی‌نیتروژن پنتاکسید حل شده در محلول، چند برابر جرم ۰/۵ مول اوره می‌شود؟ $(O=16, N=14, C=12, H=1 : g.mol^{-1})$

۱) ۰/۰۹ ۲) ۰/۱۸ ۳) ۰/۱۵ ۴) ۰/۳

پاسخ: گزینهٔ ۱ (آسان ـ محاسباتی ـ استاندارد ـ صفحهٔ ۱۶ ـ ۱۲۰۱)

به‌طور کلی، اغلب اکسیدهای نافلزی را اکسیدهای اسیدی می‌نامند. این مواد طی واکنش با آب، سبب افزایش غلظت یون هیدروژن شده و pH محلول را کاهش می‌دهند. دی‌نیتروژن پنتاکسید، کربن دی‌اکسید، گوگرد دی‌اکسید و گوگرد تری‌اکسید، در دسته اکسیدهای اسیدی قرار دارند و براساس معادله‌های زیر با آب واکنش می‌دهند:

$$I)\ N_2O_5(s)+H_2O(l)\rightarrow 2HNO_3(aq)\rightarrow 2H^+(aq)+2NO_3^-(aq)$$

$$II)\ CO_2(g)+H_2O(l)\rightarrow H_2CO_3(aq)\rightleftharpoons H^+(aq)+HCO_3^-(aq)$$

$$III)\ SO_3(g)+H_2O(l)\rightarrow H_2SO_4(aq)\rightarrow 2H^+(aq)+SO_4^{2-}(aq)$$

با توجه به معادله واکنش انجام شده، به ازای انحلال هر مول دی‌نیتروژن پنتاکسید در آب، ۴ مول یون تولید می‌شود. بر این اساس، جرم دی‌نیتروژن پنتاکسید حل شده در آب را محاسبه می‌کنیم:

$$?g\,N_2O_5=5L\,\text{محلول}\times\frac{0/02\,\text{mol یون}}{1L\,\text{محلول}}\times\frac{1\,\text{mol}\,N_2O_5}{4\,\text{mol یون}}\times\frac{108\,g\,N_2O_5}{1\,\text{mol}\,N_2O_5}=2/7\,g$$

با توجه به محاسبات انجام شده، می‌توان گفت طی این فرایند ۲/۷ گرم دی‌نیتروژن پنتاکسید در محلول حل شده است. اوره، نوعی ترکیب با فرمول شیمیایی $CO(NH_2)_2$ است. جرم مولی این ماده برابر با ۶۰ گرم بر مول بوده و جرم نیم مول از آن نیز برابر با ۳۰ گرم می‌شود. بر این اساس، داریم:

$$\frac{\text{جرم}\,N_2O_5}{\text{جرم}\,CO(NH_2)_2}=\frac{2/7\,g}{30\,g}=0/09$$

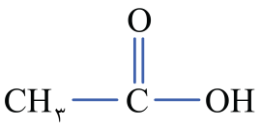
ماز

۸۲- کدام مطلب در رابطه با استیک اسید، درست است؟

۱) تنها راه برای تغییر مقدار درجه یونش این ماده در محلول آبی آن، تغییر دمای محلول مورد نظر است.
۲) شمار پیوندهای اشتراکی $C-H$ در هر مولکول پروپان، ۲ برابر شمار این پیوندها در استیک اسید است.
۳) در ساختار آنیون حاصل از یونش این ماده در آب، یک پیوند دوگانه و ۴ جفت الکترون ناپیوندی وجود دارد.
۴) در شرایط یکسان، محلول این ماده در مقایسه با محلول بوتانوئیک اسید، شدیدتر با فلز منیزیم واکنش می‌دهد.

پاسخ: گزینهٔ ۴ (متوسط ـ مفهومی ـ استاندارد ـ صفحهٔ ۲۴ ـ ۱۲۰۱)

اتانوئیک اسید (استیک اسید) با فرمول CH_3COOH، **دومین عضو خانواده کربوکسیلیک اسیدها** است. این ماده آشناترین عضو خانواده کربوکسیلیک اسیدها بوده و یکی از پرکاربردترین اسیدها در زندگی روزمره است. به‌عنوان مثال، اسید موجود در سرکه همان استیک اسید است. ساختار این ماده به‌صورت زیر است:



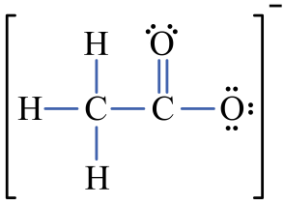
از آنجا که استیک اسید در مقایسه با فورمیک اسید قدرت اسیدی کمتری دارد، پس می‌توان گفت با افزایش تعداد اتم‌های کربن در کربوکسیلیک اسیدها، قدرت اسیدی این مواد **کاهش** پیدا می‌کند. بر این اساس، بوتانوئیک اسید در مقایسه با استیک اسید قدرت اسیدی کمتری دارد و در شرایط یکسان، محلول استیک اسید در مقایسه با محلول بوتانوئیک اسید، شدیدتر با فلز **منیزیم** واکنش می‌دهد.

بررسی سایر گزینه‌ها:

۱) برای تغییر مقدار درجه یونش اسیدهای ضعیف از جمله استیک اسید در محلول آبی آن‌ها، می‌توان از تغییر دمای محلول مورد نظر و یا تغییر غلظت اسید در آن محلول استفاده کرد.

۲) در هر مولکول پروپان به‌عنوان سومین عضو خانواده آلکان‌ها، ۸ پیوند اشتراکی کربن-هیدروژن وجود دارد. این در حالی است که در هر مولکول استیک اسید، ۳ پیوند اشتراکی کربن-هیدروژن وجود دارد.

۳) در ساختار آنیون حاصل از یونش استیک اسید در آب که به آن یون استات گفته می‌شود، یک پیوند دوگانه و ۵ جفت الکترون ناپیوندی وجود دارد. ساختار این یون چندتایی به‌صورت زیر است:



۸۳- درصد یونش مولکول‌های پروپانوئیک اسید در محلولی از این ماده با غلظت ۲۹/۶ گرم بر لیتر، برابر با ۲/۵% است. مقدار pH محلول مورد نظر، به اندازه چند واحد با pH محلول ۰/۰۷ مولار هیدرویدیک اسید تفاوت داشته و ثابت یونش این اسید در دمای مورد نظر، به‌تقریب برابر با چند مول بر لیتر است؟ $(O=16, C=12, H=1: g.mol^{-1})$

۱) 4×10^{-4} ـ ۰/۱۵

۲) 4×10^{-4} ـ ۰/۸۵

۳) $2/5\times10^{-4}$ ـ ۰/۱۵

۴) $2/5\times10^{-4}$ ـ ۰/۸۵

پاسخ: گزینهٔ ۴ (دشوار ـ محاسباتی ـ زمان‌بر ـ صفحهٔ ۲۵ ـ ۱۲۰۱)

معادله یونش پروپانوئیک اسید به‌صورت زیر است:

$$C_2H_5COOH(aq)+H_2O(l)\rightleftharpoons C_2H_5COO^-(aq)+H_3O^+(aq)$$

غلظت اسید بر مبنای گرم بر لیتر به ما داده شده است. در قدم اول، غلظت مولی اسید حل شده در محلول را محاسبه می‌کنیم:

$$\text{غلظت مولی}=\frac{\text{غلظت گرم بر لیتر}}{\text{جرم مولی حل‌شونده}}=\frac{29/6}{74}=0/4\,mol.L^{-1}$$

با توجه به درصد یونش این اسید، غلظت یون هیدرونیوم را محاسبه کرده و پس از آن، pH محلول را به‌دست می‌آوریم:

$$[H_3O^+]=\text{غلظت اسید}\times\frac{\text{درصد یونش}}{100}\Rightarrow[H_3O^+]=0/4\times\frac{2/5}{100}=0/01\,mol.L^{-1}$$

$$pH=-\log[H_3O^+]=-\log(0/01)=2$$

در محلول ۰/۰۷ مولار هیدرویدیک اسید، غلظت یون هیدروژن برابر با ۰/۰۷ مول بر لیتر است. بر این اساس، داریم:

$$pH=-\log[H_3O^+]=-\log(0/07)=1/15$$

همان‌طور که مشخص است، مقدار pH های این دو محلول به اندازه ۰/۸۵ واحد با هم تفاوت دارند. در مرحله بعد، باید مقدار ثابت یونش (K_a) اسید داده شده را به‌دست بیاوریم:

$$K_a=\frac{\alpha^2\times M}{1-\alpha}\xrightarrow{\alpha<0/05}K_a=\alpha^2\times M\Rightarrow K_a=\left(\frac{2/5}{100}\right)^2\times0/4=2/5\times10^{-4}\,mol.L^{-1}$$

۸۴- کدام‌یک از مطالب زیر نادرست است؟

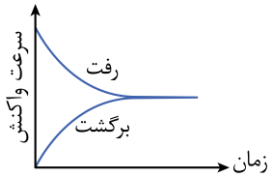
۱) پس از انحلال مقداری گاز هیدروژن فلوئورید در آب، سرعت تولید یون هیدرونیوم در محلول به‌تدریج کاهش می‌یابد.
۲) از بین مواد نیتروواسید، سولفوریک اسید، استون، پتاسیم هیدروکسید و گلوکز، فقط ۲ ماده الکترولیت قوی هستند.
۳) بازها مزه تلخ داشته و با توجه به یافته‌های تجربی، رسانایی الکتریکی محلول آبی حاصل از آن‌ها، یکسان نیست.
۴) مواد نامحلول در آب، از جمله ترکیب‌های غیرالکترولیت به شمار رفته و محلول آن‌ها رسانایی الکتریکی ندارد.

پاسخ: گزینهٔ ۴ (متوسط ـ مفهومی ـ استاندارد ـ صفحهٔ ۲۳ ـ ۱۲۰۱)

مواد نامحلول در آب، انحلال‌پذیری ناچیزی در آب دارند اما همان مقدار ناچیز حل شده از ماده مورد نظر، ممکن است مقداری یون در محلول تولید کرده و بر این اساس، یک محلول رسانا را ایجاد کند. بر این اساس، می‌توان گفت برخی از مواد نامحلول در آب از جمله منیزیم هیدروکسید، از جمله ترکیب‌های الکترولیت به شمار رفته و محلول آن‌ها رسانایی الکتریکی دارد.

بررسی سایر گزینه‌ها:

۱) فرایند یونش اسیدهای ضعیف از جمله هیدروفلوئوریک اسید در آب، از جمله واکنش‌های برگشت‌پذیر است. اگر در واکنش‌های برگشت‌پذیر، واکنش‌های رفت و برگشت به‌صورت هم‌زمان و با سرعت‌های برابر انجام شوند، مقدار فراورده‌ها و واکنش‌دهنده‌ها ثابت باقی می‌ماند و در سامانه موردنظر تعادل برقرار می‌شود. در این سامانه‌ها، قبل از برقراری تعادل، سرعت واکنش رفت در مقایسه با واکنش برگشت بیشتر است. نمودار زیر، روند تغییر سرعت واکنش‌های رفت و برگشت را در این واکنش‌ها نشان می‌دهد:



با توجه به نمودار بالا، پس از انحلال مقداری گاز هیدروژن فلوئورید در آب، سرعت واکنش رفت (واکنشی که منجر به تولید یون هیدرونیوم در محلول می‌شود) به‌تدریج **کاهش** می‌یابد.

۲) نیتروواسید الکترولیت ضعیف، سولفوریک اسید و پتاسیم هیدروکسید الکترولیت قوی و گلوکز و استون، از جمله مواد غیرالکترولیت هستند.

مواد الکترولیت

هر ماده‌ای که در آب به یون‌هایی با بار مخالف تبدیل شود، الکترولیت است. اگر این تفکیک به‌صورت کامل انجام شود (برای مثال در اسیدها و بازهای قوی و همچنین در ترکیب‌های یونی محلول در آب)، آن ماده الکترولیت قوی به شمار می‌رود و اگر تفکیک به‌صورت ناقص انجام شود، آن ماده یک الکترولیت ضعیف است. بدیهی است که موادی که به‌صورت مولکولی در آب حل می‌شوند (مانند استون و اتانول) غیرالکترولیت بوده و محلول آبی آن‌ها نارسانا است.

۳) به‌طور کلی، بازها مزه تلخ دارند. با توجه به یافته‌های تجربی، رسانایی الکتریکی محلول بازهای مختلف یکسان نیست. در واقع چون بازها دارای ثابت یونش متفاوتی هستند، به مقدار متفاوتی در آب یونش یافته و رسانایی الکتریکی متفاوتی نیز خواهند داشت. به‌عنوان مثال، در شرایط یکسان رسانایی الکتریکی محلول سدیم هیدروکسید **بیشتر** از رسانایی الکتریکی محلول آبی آمونیاک است.

۸۵- در یک نمونه از گاز هیدروژن کلرید، تفاوت جرم اتم‌های کلر و هیدروژن برابر با ۶۹ میلی‌گرم است. این نمونه گازی را در مقداری آب حل کرده و حجم محلول را به ۴۰۰ میلی‌لیتر می‌رسانیم. مقدار pH محلول حاصل از این فرایند چقدر شده و نسبت غلظت یون هیدرونیوم به یون هیدروکسید در این محلول، چقدر می‌شود؟ $(Cl=۳۵/۵, H=۱: g.mol^{-۱})$

۱) $۲/۳ - ۲/۵\times۱۰^{۹}$
۲) $۲/۷ - ۲/۵\times۱۰^{۹}$
۳) $۲/۳ - ۴\times۱۰^{۹}$
۴) $۲/۷ - ۴\times۱۰^{۹}$

پاسخ: گزینهٔ ۱ (متوسط ـ محاسباتی ـ استاندارد ـ صفحهٔ ۲۵ ـ ۱۲۰۱)

فرمول شیمیایی هیدروژن کلرید به‌صورت HCl بوده و در هر مول از این ماده، یک مول کلر (۳۵/۵ گرم کلر) و یک مول هیدروژن (۱ گرم هیدروژن) وجود دارد، پس تفاوت جرم کلر و هیدروژن در هر مول از این ماده برابر با ۳۴/۵ گرم می‌شود.

بر این اساس، مقدار مول هیدروژن کلرید را محاسبه می‌کنیم. در این رابطه، داریم:

$$?\,mol\,HCl = ۶۹\,mg\,\text{تفاوت جرم} \times \frac{۱\,g\,\text{تفاوت جرم}}{۱۰۰۰\,mg\,\text{تفاوت جرم}} \times \frac{۱\,mol\,HCl}{۳۶/۵\,g\,\text{تفاوت جرم}} = ۰/۰۰۲\,mol$$

$$[HCl] = \frac{\text{مول HCl}}{\text{لیتر محلول}} = \frac{۰/۰۰۲\,mol}{۰/۴\,L} = ۰/۰۰۵\,mol.L^{-۱}$$

چون هیدروکلریک اسید یک اسید قوی (اسیدی با درجه یونش ۱) است، غلظت یون هیدروژن موجود در این محلول با غلظت اسید اولیه برابر با ۰/۰۰۵ مول بر لیتر می‌شود. بر این اساس، pH محلول مورد نظر را محاسبه می‌کنیم:

$$pH = -\log[H^+] = -\log(۵\times۱۰^{-۳}) = -\log(۵) + \log(۱۰^{۳}) = -۰/۷ + ۳ = ۲/۳$$

غلظت یون هیدروژن در این محلول، برابر با ۰/۰۰۵ مول بر لیتر است، پس غلظت یون هیدروکسید در این محلول برابر با $\frac{۱۰^{-۱۴}}{۰/۰۰۵}$ مول بر لیتر می‌شود. بر این اساس، نسبت غلظت یون هیدرونیوم به یون هیدروکسید در این محلول برابر خواهد بود با:

$$\frac{\text{غلظت یون هیدرونیوم}}{\text{غلظت یون هیدروکسید}} = \frac{۰/۰۰۵\,mol.L^{-۱}}{\frac{۱۰^{-۱۴}}{۰/۰۰۵}\,mol.L^{-۱}} = ۲/۵\times۱۰^{۹}$$

۸۶- هر اتم نیکل، در واکنش با اسیدها به یونی تبدیل می‌شود که در ساختار خود ۸ الکترون با $l=۲$ دارد. یک نمونه ۳ لیتری از محلول هیدروکلریک اسید با $pH=۰/۷$، با چند گرم فلز نیکل به‌طور کامل واکنش داده و اگر گاز هیدروژن تولید شده را وارد یک بادکنک کروی کنیم، شعاع بادکنک برابر با چند سانتی‌متر می‌شود؟ (عدد π را برابر با ۳ در نظر گرفته و حجم مولی گازها را برابر با ۴۵ لیتر بر مول فرض کنید. $Ni=۵۹\,g.mol^{-۱}$)

۱) ۱۱/۸ ـ ۲۵ ۲) ۱۱/۸ ـ ۱۵ ۳) ۱۷/۷ ـ ۲۵ ۴) ۱۷/۷ ـ ۱۵

پاسخ: گزینهٔ ۴ (دشوار ـ محاسباتی ـ زمان‌بر ـ صفحهٔ ۲۵ ـ ۱۲۰۱)

نیکل، عنصری با عدد اتمی ۲۸ بوده و آرایش الکترونی آن به‌صورت زیر است:

$$_{۲۸}Ni : ۱s^{۲}۲s^{۲}۲p^{۶}۳s^{۲}۳p^{۶}۳d^{۸}۴s^{۲}$$

اگر از اتم نیکل ۲ الکترون بگیریم، یون $Ni^{۲+}$ تولید می‌شود که آرایش الکترونی آن به‌صورت زیر خواهد بود:

$$_{۲۸}Ni^{۲+} : ۱s^{۲}۲s^{۲}۲p^{۶}۳s^{۲}۳p^{۶}۳d^{۸}$$

با توجه به توضیحات داده شده، معادله واکنش هیدروکلریک اسید با فلز نیکل به‌صورت زیر خواهد بود:

$$Ni(s) + ۲HCl(aq) \rightarrow NiCl_{۲}(aq) + H_{۲}(g)$$

در رابطه با محلول هیدروکلریک اسید مصرف شده در این فرایند، داریم:

$$[H^+] = ۱۰^{-pH} = ۱۰^{-۰/۷} = ۰/۲\,mol.L^{-۱} \Rightarrow [HCl] = ۰/۲\,mol.L^{-۱}$$

بر این اساس، جرم فلز نیکل مصرف شده در این واکنش را محاسبه می‌کنیم:

$$?\,g\,Ni = ۳\,L\,\text{محلول} \times \frac{۰/۲\,mol\,HCl}{۱\,L\,\text{محلول}} \times \frac{۱\,mol\,Ni}{۲\,mol\,HCl} \times \frac{۵۹\,g\,Ni}{۱\,mol\,Ni} = ۱۷/۷\,g$$

در قدم بعد، حجم گاز هیدروژن تولید شده در این فرایند را محاسبه می‌کنیم:

$$?\,mL\,H_{۲} = ۳\,L\,\text{محلول} \times \frac{۰/۲\,mol\,HCl}{۱\,L\,\text{محلول}} \times \frac{۱\,mol\,H_{۲}}{۲\,mol\,HCl} \times \frac{۴۵\,L\,H_{۲}}{۱\,mol\,H_{۲}} \times \frac{۱۰۰۰\,mL\,H_{۲}}{۱\,L\,H_{۲}} = ۱۳۵۰۰\,mL$$

در قدم بعد، شعاع کره‌ای که حاوی ۱۳۵۰۰ میلی‌لیتر گاز است را محاسبه می‌کنیم. در این رابطه، داریم:

$$V = \frac{۴}{۳}\times\pi\times r^{۳} \Rightarrow ۱۳۵۰۰ = \frac{۴}{۳}\times۳\times r^{۳} \Rightarrow r = ۱۵\,cm$$

۸۷- کدام‌یک از مطالب زیر نادرست است؟

۱) یک نمونه از شربت معده، برخلاف رنگ‌های پوششی، به مرور زمان ته‌نشین می‌شود.
۲) توده‌های مولکولی موجود در کلوئیدها، اندازه مشابهی نداشته و سبب پخش شدن نور می‌شوند.
۳) با استفاده از انواع صافی‌ها، نمی‌توان ذرات سازنده کلوئیدها و یا سوسپانسیون‌ها را از یکدیگر جدا کرد.
۴) با افزودن پودر منیزیم کلرید به کلوئید پایدار آب، صابون و روغن، مواد سازنده این مخلوط از یکدیگر جدا می‌شوند.

پاسخ: گزینهٔ ۳ (متوسط ـ مفهومی و خط‌به‌خط ـ سریع ـ صفحهٔ ۹ ـ ۱۲۰۱)

چون ذرات موجود در کلوئیدها و یا سوسپانسیون‌ها بزرگ هستند، با استفاده از صافی می‌توان این ذرات را از حلال اصلی جدا کرد. در این حالت، ذرات و توده‌های مولکولی موجود در مخلوط، از منافذ صافی عبور نکرده و اجزا از هم جدا می‌شوند.

بررسی سایر گزینه‌ها:

۱) رنگ‌های پوششی، نوعی کلوئید هستند و به مرور زمان ته‌نشین نمی‌شوند اما انواع شربت معده از جمله **شیر منیزی**، نوعی **سوسپانسیون** هستند و به مرور زمان ته‌نشین می‌شوند.

۲) توده‌های مولکولی موجود در کلوئیدها، حاوی مقادیر متفاوتی از ذرات بوده و بر این اساس، اندازه مشابهی ندارند. چون اندازه این توده‌ها **عمدتاً بزرگ** است، این ذرات سبب پخش شدن نور می‌شوند.

۴) مخلوط آب و روغن، ناهمگن بوده و با توجه به چگالی کمتر روغن، نمونه روغن بر روی سطح آب قرار می‌گیرد. با افزودن صابون به این مخلوط و هم زدن آن، برهم‌کنش مولکول‌ها و ذرات موجود در این مخلوط موجب پدید آمدن یک کلوئید می‌شود. در این مخلوط، توده‌هایی از مولکول‌های روغن و صابون تشکیل می‌شوند که در آب پخش‌شده و یک مخلوط ناهمگن پایدار تشکیل می‌دهند که در اثر ساکن ماندن، ته‌نشین نمی‌شوند. به مخلوط **ناهمگن** تولید شده طی این فرایند، کلوئید گفته می‌شود. با افزودن پودر **منیزیم کلرید** به کلوئید پایدار آب، صابون و روغن، ذرات صابون به حالت رسوب درآمده و بر این اساس، مواد سازنده این مخلوط از یکدیگر جدا می‌شوند.

ماز

۸۸- **در مراحل تولید یک نمونه سدیم اکسید از عناصر سازنده آن، $1/204\times10^{23}$ الکترون بین گونه‌ها مبادله شده است. اگر این نمونه سدیم اکسید را در مقداری آب حل کرده و حجم محلول را به ۵ لیتر برسانیم، غلظت یون هیدروکسید در محلول مورد نظر برابر با چند مول بر لیتر می‌شود؟**

۱) ۰/۰۴ ۲) ۰/۰۲ ۳) ۰/۴ ۴) ۰/۲

پاسخ: گزینهٔ ۱ (متوسط ـ محاسباتی ـ سریع ـ صفحهٔ ۱۶ ـ ۱۲۰۱)

واکنش تولید سدیم اکسید از عناصر سازنده آن به‌صورت زیر است:

$$4Na(s)+O_2(g)\rightarrow 4Na^+(s)+2O^{2-}(s)\rightarrow 2Na_2O(s)$$

به ازای تولید ۲ مول سدیم اکسید در این واکنش شیمیایی، ۴ مول الکترون بین گونه‌ها مبادله می‌شود. طبق فرض سؤال، در مراحل تولید یک نمونه سدیم اکسید از عناصر سازنده آن، تعداد $1/204\times10^{23}$ الکترون (معادل با ۰/۲ مول الکترون) بین گونه‌ها مبادله شده است، پس در این فرایند ۰/۱ مول سدیم اکسید تولید شده است. به‌طور کلی، اکسیدهای فلزی را اکسیدهای بازی می‌نامند. این مواد طی واکنش با آب، سبب افزایش غلظت یون هیدروکسید شده و pH محلول را افزایش می‌دهند. باریم اکسید، لیتیم اکسید، سدیم اکسید و کلسیم اکسید (آهک)، در دسته اکسیدهای بازی قرار دارند و براساس معادله‌های زیر با آب واکنش می‌دهند:

I) $Li_2O(s)+H_2O(l)\rightarrow 2LiOH(aq)\rightarrow 2Li^+(aq)+2OH^-(aq)$

II) $Na_2O(s)+H_2O(l)\rightarrow 2NaOH(aq)\rightarrow 2Na^+(aq)+2OH^-(aq)$

III) $CaO(s)+H_2O(l)\rightarrow Ca(OH)_2(aq)\rightarrow Ca^{2+}(aq)+2OH^-(aq)$

IV) $BaO(s)+H_2O(l)\rightarrow Ba(OH)_2(aq)\rightarrow Ba^{2+}(aq)+2OH^-(aq)$

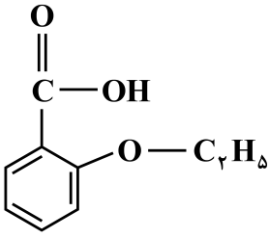
هر مول سدیم اکسید، در واکنش با آب منجر به تولید ۲ مول یون هیدروکسید می‌شود. بر این اساس، داریم:

$$?\,mol\,OH^- = ۰/۱\,mol\,Na_۲O \times \frac{۲\,mol\,OH^-}{۱\,mol\,Na_۲O} = ۰/۲\,mol$$

مقدار ۰/۲ مول یون هیدروکسید، در ۵ لیتر محلول آبی آزاد شده است، پس غلظت مولی یون هیدروکسید در محلول تولید شده برابر با ۰/۰۴ مول بر لیتر خواهد بود.

۸۹- یک نمونه ۱۶/۶ گرمی از ترکیب مقابل را در مقداری آب ریخته و حجم محلول را به ۵ لیتر می‌رسانیم. اگر ثابت یونش اسیدی این ماده برابر با $۱۰^{-۳}$ مول بر لیتر باشد، مقدار pH محلول تولید شده چقدر می‌شود؟ $(O=۱۶, C=۱۲, H=۱ : g.mol^{-۱})$

۱) ۲/۷
۲) ۲/۴
۳) ۳/۴
۴) ۳/۷



پاسخ: گزینهٔ ۲ (دشوار ـ محاسباتی ـ زمان‌بر ـ صفحهٔ ۲۵ ـ ۱۲۰۱)

ترکیب مورد نظر، دارای گروه عاملی اسیدی بوده و فرمول شیمیایی آن به‌صورت $C_۹H_{۱۰}O_۳$ است. جرم مولی این ماده برابر با ۱۶۶ گرم بر مول بوده و ۱۶/۶ گرم از این ماده، معادل با ۰/۱ مول از آن می‌شود. بر این اساس، غلظت ترکیب مورد نظر را محاسبه می‌کنیم:

$$[C_۹H_{۱۰}O_۳] = \frac{۰/۱\,mol\,C_۹H_{۱۰}O_۳}{۵\,L\,\text{محلول}} = ۰/۰۲\,mol.L^{-۱}$$

با توجه به غلظت اسید در محلول مورد نظر، غلظت یون هیدروژن تولید شده در محلول را محاسبه می‌کنیم:

$$K_a = \frac{[H^+]^۲}{M-[H^+]} \Rightarrow ۱۰^{-۳} = \frac{[H^+]^۲}{۰/۰۲-[H^+]} \Rightarrow [H^+] = ۰/۰۰۴\,mol.L^{-۱}$$

بر این اساس، pH محلول مورد نظر را محاسبه می‌کنیم:

$$pH = -\log[H^+] = -\log(۴\times۱۰^{-۳}) = -\log(۴) + \log(۱۰^۳) = -۰/۶ + ۳ = ۲/۴$$

۹۰- کدام‌یک از مطالب زیر درست است؟

۱) سحابی‌ها مجموعه‌هایی از گازها هستند که بر اثر متراکم شدن دو عنصر از تناوب اول جدول دوره‌ای ایجاد می‌شوند.
۲) فراوان‌ترین نافلز موجود در سیاره زمین، دارای ۶ الکترون ظرفیتی بوده و در ساختار سیاره مشتری یافت نمی‌شود.
۳) دو فضاپیمای وویجر مأموریت داشتند فقط از کنار سیاره‌های مریخ، مشتری، زحل و اورانوس عبور کنند.
۴) در ساختار ستاره‌ها، همه عناصر سبک تولید شده از عنصر هلیم، در دسته عناصر نافلزی قرار می‌گیرند.

پاسخ: گزینهٔ ۱ (آسان ـ مفهومی و خط‌به‌خط ـ سریع ـ صفحهٔ ۶ ـ ۱۰۰۱)

سحابی‌ها مجموعه‌هایی گازی هستند که بر اثر متراکم شدن عناصر هیدروژن و هلیم ایجاد می‌شوند. عناصر هیدروژن و هلیم، متعلق به تناوب اول جدول دوره‌ای هستند.

بررسی سایر گزینه‌ها:

۲) فراوان‌ترین نافلز موجود در سیاره زمین اکسیژن است که یکی از عناصر مشترک در بین هشت عنصر فراوان زمین و مشتری به حساب می‌آید. توجه داریم که اکسیژن و گوگرد، دو عنصر نافلزی مشترک فراوان بین زمین و مشتری هستند. هر اتم اکسیژن در ساختار خود دارای **۶ الکترون ظرفیتی** است.

۳) فضاپیماهای وویجر مأموریت داشتند از کنار سیاره‌های مشتری، زحل، اورانوس و نپتون عبور کنند. این فضاپیماها باید اطلاعات فیزیکی و شیمیایی سیاره‌های مورد نظر را تهیه کرده و برای زمین ارسال می‌کردند. این شناسنامه‌ها می‌توانند حاوی اطلاعاتی مانند نوع عنصرهای سازنده، ترکیب‌های شیمیایی در اتمسفر آن‌ها و ترکیب درصد این مواد باشد.

۴) تصویر زیر، روند تولید عناصر مختلف طی واکنش‌های هسته‌ای را نشان می‌دهد:

عناصر سنگین مثل آهن و طلا ← عناصر سبک مثل لیتیم و کربن ← هلیم ← هیدروژن

همان‌طور که مشخص است، عنصر لیتیم با استفاده از هلیم تولید شده و نوعی عنصر فلزی است.

ماز

۹۱- در اتم $M^{۶۴}$، تفاوت شمار نوترون‌ها و پروتون‌ها برابر با ۶ واحد است. شمار الکترون‌ها در لایه سوم الکترونی این عنصر، با کدام عنصر برابر بوده و شماره گروه عنصر مورد نظر در جدول دوره‌ای، چند برابر شماره گروه عنصری با عدد اتمی ۷۲ است؟

۱) کبالت ـ ۲/۷۵ ۲) کبالت ـ ۲/۲ ۳) ژرمانیم ـ ۲/۷۵ ۴) ژرمانیم ـ ۲/۲

پاسخ: گزینهٔ ۳ (متوسط ـ محاسباتی و مفهومی ـ استاندارد ـ صفحهٔ ۳۳ ـ ۱۰۰۱)

عدد جرمی هر عنصر، مجموع شمار پروتون‌ها و نوترون‌های موجود در هسته آن اتم را نشان می‌دهد. بر این اساس، داریم:

$$\text{عدد جرمی} = \text{شمار نوترون‌ها} + \text{شمار پروتون‌ها} \Rightarrow ۶۴ = n + p$$

با توجه به اطلاعات داده شده در رابطه با تفاوت شمار نوترون‌ها و پروتون‌ها، یک دستگاه دو معادله - دو مجهول تشکیل می‌دهیم. در این رابطه، داریم:

$$\begin{cases} n + p = ۶۴ \\ n - p = ۶ \end{cases} \Rightarrow n = ۳۵ \ , \ p = ۲۹$$

با توجه به محاسبات انجام شده، عدد اتمی (Z) عنصر M برابر با ۲۹ بوده و این عنصر در خانه شماره ۲۹ جدول تناوبی قرار گرفته است. عنصر مورد نظر، معادل با فلز مس است. شماره گروه این عنصر در جدول دوره‌ای، برابر با ۱۱ است. عنصری با عدد اتمی ۷۲ نیز متعلق به تناوب ششم بوده و در گروه شماره ۴ قرار گرفته است. بر این اساس، نسبت شماره گروه این دو عنصر برابر با **۲/۷۵** می‌شود. آرایش الکترونی فلز مس به‌صورت زیر است:

$$_{۲۹}Cu : ۱s^۲ ۲s^۲ ۲p^۶ ۳s^۲ ۳p^۶ ۳d^{۱۰} ۴s^۱$$

در ساختار اتم مس، همانند اتم ژرمانیم، لایه سوم الکترونی دارای **۱۸ الکترون** بوده و به‌صورت کامل پر شده است.

ماز

۹۲- در مخلوطی از ایزوتوپ‌های A و B، درصد جرمی هر ایزوتوپ برابر با ۵۰٪ است. اگر پس از گذشت نیم ساعت، جرم باقی‌مانده از ایزوتوپ A، دو برابر جرم باقی‌مانده از ایزوتوپ B باشد، نیم‌عمر ایزوتوپ B چند دقیقه است؟ (نیم‌عمر ایزوتوپ A، دو برابر نیم‌عمر ایزوتوپ B می‌باشد.)

۱) ۷/۵ ۲) ۱۵ ۳) ۶ ۴) ۱۲

پاسخ: گزینهٔ ۲ (متوسط ـ محاسباتی ـ استاندارد ـ صفحهٔ ۶ ـ ۱۰۰۱)

جرم ماده باقیمانده از یک عنصر رادیواکتیو را به کمک رابطه زیر تعیین می‌کنند:

$$\text{مقدار باقی‌مانده} = \text{مقدار اولیه} \times \left(\frac{۱}{۲}\right)^{\frac{\Delta t}{T}}$$

در این رابطه، Δt برابر با زمان سپری شده و T برابر با نیم‌عمر عنصر مورد نظر است. چون درصد جرمی هر ایزوتوپ برابر با ۵۰٪ است، پس جرم اولیه هریک از ایزوتوپ‌های داده شده را برابر با m گرم در نظر می‌گیریم. با توجه به رابطه گفته شده، جرم باقی‌مانده از هر ماده را پس از گذشت ۳۰ دقیقه از ابتدای کار، محاسبه می‌کنیم.

$$\text{مقدار باقی‌مانده A} = \text{مقدار اولیه} \times \left(\frac{۱}{۲}\right)^{\frac{\Delta t}{T}} \Rightarrow \text{مقدار باقی‌مانده A} = m \times \left(\frac{۱}{۲}\right)^{\frac{۳۰}{T_A}}$$

$$\text{مقدار باقی‌مانده B} = \text{مقدار اولیه} \times \left(\frac{۱}{۲}\right)^{\frac{\Delta t}{T}} \Rightarrow \text{مقدار باقی‌مانده B} = m \times \left(\frac{۱}{۲}\right)^{\frac{۳۰}{T_B}}$$

با توجه به داده‌های موجود در صورت سؤال، نیم‌عمر ایزوتوپ A، دو برابر نیم‌عمر ایزوتوپ B است، پس داریم:

$$\text{مقدار باقی‌مانده A} = ۲ \times \text{مقدار باقی‌مانده B} \Rightarrow m \times \left(\frac{۱}{۲}\right)^{\frac{۳۰}{T_A}} = ۲ \times m \times \left(\frac{۱}{۲}\right)^{\frac{۳۰}{T_B}} \xrightarrow{T_A = ۲ \times T_B} \left(\frac{۱}{۲}\right)^{\frac{۳۰}{۲ \times T_B}} = ۲ \times \left(\frac{۱}{۲}\right)^{\frac{۳۰}{T_B}}$$

$$\Rightarrow ۲^{-\frac{۳۰}{۲ \times T_B}} = ۲ \times ۲^{-\frac{۳۰}{T_B}} \Rightarrow ۲^{-\frac{۳۰}{۲ \times T_B}} = ۲^{-\frac{۳۰}{T_B}+۱} \Rightarrow -\frac{۳۰}{۲ \times T_B} = -\frac{۳۰}{T_B} + ۱ \Rightarrow T_B = ۱۵ \text{ min}$$

۹۳- اگر شمار الکترون‌های موجود در زیرلایه ۳d در اتم A، ۲ برابر شمار این الکترون‌ها در اتم B باشد، ..... . (عناصر A و B، هر دو متعلق به تناوب چهارم هستند.)

۱) حداکثر تفاوت عدد اتمی این دو عنصر، می‌تواند برابر با ۱۲ باشد.

۲) بیرونی‌ترین زیرلایه الکترونی در این دو عنصر، به‌یقین دارای $l=۰$ است.

۳) هیچ‌کدام از این دو عنصر، نمی‌توانند در واکنش‌ها الکترون به اشتراک بگذارند.

۴) رسم آرایش الکترونی یکی از این دو عنصر، به‌یقین از قاعده آفبا پیروی نمی‌کند.

پاسخ: گزینهٔ ۱ (متوسط ـ مفهومی ـ استاندارد ـ صفحهٔ ۲۰ ـ ۱۰۰۱)

اگر شمار الکترون‌های موجود در زیرلایه ۳d در اتم A، معادل با ۱۰ عدد باشد، حداکثر عدد اتمی ممکن برای این عنصر برابر با ۳۶ می‌شود. در این حالت، شمار این الکترون‌ها در اتم B برابر با ۵ می‌شود و حداقل عدد اتمی ممکن برای این عنصر نیز برابر با ۲۴ خواهد بود. در این حالت، تفاوت عدد اتمی دو عنصر برابر با ۱۲ واحد می‌شود.

بررسی سایر گزینه‌ها:

۲) اگر عناصر A و B، به‌ترتیب معادل با گالیم و کروم باشند، بیرونی‌ترین زیرلایه الکترونی در یکی از این دو عنصر، دارای $l=۰$ نخواهد بود.

۳) اگر عناصر A و B، به‌ترتیب معادل با سلنیم و کروم باشند، یکی از این دو عنصر، نافلز بوده و می‌تواند در واکنش‌ها الکترون به اشتراک بگذارد.

۴) اگر عناصر A و B، به‌ترتیب معادل با تیتانیم و اسکاندیم باشند و یا به‌ترتیب، معادل با آهن و وانادیم باشند، رسم آرایش الکترونی هر دو مورد از آن‌ها از قاعده آفبا پیروی می‌کند.

۹۴- در یک نمونه لیتیم که از ایزوتوپ‌های طبیعی این عنصر تشکیل شده است، درصد فراوانی ایزوتوپ سنگین‌تر به اندازه ۲۰٪ کمتر از ایزوتوپ دیگر است. در یک نمونه از لیتیم برمید که با استفاده از این نمونه لیتیم تهیه شده است، جرم اتم‌های لیتیم چند برابر جرم اتم‌های برم است؟ $(Br = ۸۰ g.mol^{-۱})$

۱) ۰/۴ ۲) ۰/۸ ۳) ۰/۰۴ ۴) ۰/۰۸

پاسخ: گزینهٔ ۴ (آسان ـ محاسباتی ـ سریع ـ صفحهٔ ۱۵ ـ ۱۰۰۱)

ایزوتوپ‌های $^{۷}_{۳}Li$ و $^{۶}_{۳}Li$، ایزوتوپ‌هایی از لیتیم هستند که در یک نمونه طبیعی از این ماده یافت می‌شوند. مجموع درصد فراوانی ایزوتوپ سبک‌تر (A) و ایزوتوپ سنگین‌تر (B) برابر با ۱۰۰٪ بوده و تفاوت درصد فراوانی این ایزوتوپ‌ها نیز برابر با ۲۰٪ است. بر این اساس، داریم:

$$\begin{cases} A + B = ۱۰۰ \\ A - B = ۲۰ \end{cases} \Rightarrow ۲A = ۱۲۰ \Rightarrow B = ۴۰ \text{ درصد} \quad , \quad A = ۶۰ \text{ درصد}$$

در قدم بعد، جرم اتمی میانگین این نمونه از لیتیم را محاسبه می‌کنیم:

$$\text{جرم اتمی میانگین} = \frac{\text{جرم اتمی ایزوتوپ اول} \times \text{فراوانی ایزوتوپ اول} + \text{جرم اتمی ایزوتوپ دوم} \times \text{فراوانی ایزوتوپ دوم}}{۱۰۰} = \frac{۶۰ \times ۶ + ۴۰ \times ۷}{۱۰۰} = ۶/۴$$

با توجه به محاسبات بالا، جرم اتمی میانگین لیتیم در نمونه مورد نظر برابر با ۶/۴amu است. لیتیم برمید، یک ترکیب یونی با فرمول شیمیایی LiBr است. در هر واحد فرمولی از این ماده، یک یون لیتیم و یک یون برمید وجود دارد. بر این اساس، نسبت جرم لیتیم به برم در این ماده را محاسبه می‌کنیم:

$$\frac{\text{جرم لیتیم}}{\text{جرم برم}} = \frac{۶/۴\,g}{۸۰\,g} = ۰/۰۸$$

۹۵- کدام موارد از عبارت‌های زیر، درست است؟

الف ـ بین عناصر فراوان سیاره مشتری، دو عنصر متوالی که بیشترین تفاوت درصد فراوانی را دارند، متعلق به دسته s هستند.

ب ـ تعداد نوترون‌ها در هر اتم تکنسیم، ۱۴ برابر تعداد آن‌ها در سبک‌ترین ایزوتوپ ساختگی هیدروژن است.

ج ـ هرچه طول مدت نیم‌عمر یک ایزوتوپ از یک عنصر خاص کوتاه‌تر باشد، آن ایزوتوپ پایدارتر است.

د ـ انرژی خورشید، طی واکنشی تولید می‌شود که در آن، عدد اتمی عناصر دچار تغییر می‌شود.

۱) «الف» و «ج» ۲) «الف» و «د» ۳) «ب» و «ج» ۴) «ب» و «د»

پاسخ: گزینهٔ ۲ (متوسط ـ مفهومی و خط‌به‌خط ـ استاندارد ـ صفحهٔ ۷ ـ ۱۰۰۱)

عبارت‌های (الف) و (د) درست هستند.

بررسی موارد:

الف عناصر هیدروژن و هلیم، دو عنصر فراوان متوالی از سیاره مشتری هستند که بیشترین تفاوت درصد فراوانی را دارند. این دو عنصر، متعلق به دسته s جدول دوره‌ای هستند.

ب جدول زیر، مشخصات ایزوتوپ‌های مختلف هیدروژن را نشان می‌دهد:

ایزوتوپ‌های هیدروژن

$^{1}_{1}H$	$^{2}_{1}H$	$^{3}_{1}H$	$^{4}_{1}H$	$^{5}_{1}H$	$^{6}_{1}H$	$^{7}_{1}H$
نیم‌عمر	نیم‌عمر	نیم‌عمر	نیم‌عمر	نیم‌عمر	نیم‌عمر	نیم‌عمر
پایدار	پایدار	۱۲/۳۲ سال	$۱/۴ \times ۱۰^{-۲۲}$ ثانیه	$۹/۱ \times ۱۰^{-۲۲}$ ثانیه	$۲/۹ \times ۱۰^{-۲۲}$ ثانیه	$۲/۳ \times ۱۰^{-۲۳}$ ثانیه
فراوانی در طبیعت	فراوانی در طبیعت	فراوانی در طبیعت	فراوانی در طبیعت	فراوانی در طبیعت	فراوانی در طبیعت	فراوانی در طبیعت
۹۹/۹۸۸۵ (طبیعی)	۰/۰۱۱۴ (طبیعی)	ناچیز (طبیعی)	۰ (ساختگی)	۰ (ساختگی)	۰ (ساختگی)	۰ (ساختگی)

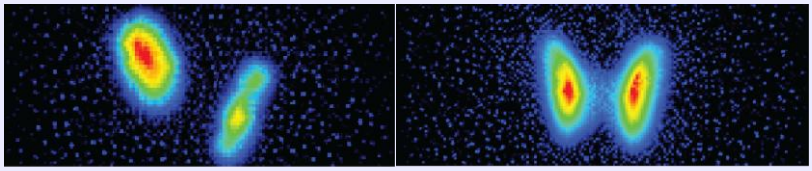
هر اتم تکنسیم ($^{99}_{43}Tc$)، دارای ۵۶ نوترون در ساختار خود است. سبک‌ترین ایزوتوپ ساختگی هیدروژن نیز معادل با $^{4}_{1}H$ است که در ساختار هر اتم خود ۳ نوترون دارد. نسبت تعداد نوترون‌های اتم تکنسیم به این تعداد در اتم $^{4}_{1}H$ تقریباً برابر با ۱۸/۶ بوده (نه ۱۴)!

ج هر چه نیم‌عمر یک رادیوایزوتوپ **کوتاه‌تر** باشد، آن رادیوایزوتوپ زودتر دچار واپاشی شده و در نتیجه **ناپایدارتر** است. به عبارت دیگر، می‌توان گفت پایداری هر ایزوتوپ با نیم‌عمر آن **رابطه مستقیم** دارد.

د انرژی خورشید، طی واکنش هسته‌ای تولید می‌شود که در آن، اتم‌های هیدروژن به اتم‌های **هلیم** تبدیل می‌شوند. طی این واکنش، عدد اتمی عناصر دچار تغییر می‌شود.

تکنسیم

غده تیروئید، در جلوی گردن قرار داشته و از دو قسمت تشکیل شده که توسط یک قسمت میانی به هم متصل شده‌اند. در صورت بیماری، این غده اغلب کم‌کار شده و گاهی مقدار جذب ید توسط آن کاهش می‌یابد. بر این اساس، اگر ماده رادیواکتیو حاوی تکنسیم را به بیمار مورد نظر تزریق کنیم، غده تیروئید بیمار ماده رادیواکتیو را نیز به مقدار کمتری جذب کرده و وجود بیماری در غده تیروئید تایید می‌شود. تصویر زیر نمایی از اسکن تیروئید را نشان می‌دهد:



تصویر غدهٔ تیروئید سالم　　تصویر غدهٔ تیروئید ناسالم

اولین عنصر ساخته‌شده در واکنشگاه هسته‌ای، تکنسیم ($^{99}_{43}Tc$) است. همه تکنسیم موجود در جهان باید به‌صورت مصنوعی و با استفاده از واکنش‌های هسته‌ای ساخته شود. واکنش‌های هسته‌ای، برخلاف واکنش‌های شیمیایی از قانون پایستگی جرم پیروی نمی‌کنند. در واقع در این واکنش‌ها، ماده و انرژی به یکدیگر تبدیل می‌شوند.

ماز

۹۶- کدام‌یک از مطالب زیر نادرست است؟

۱) اختلاف جرم سبک‌ترین و سنگین‌ترین ایزوتوپ طبیعی منیزیم، همانند هفتمین عنصر گازی جدول دوره‌ای، ۲amu است.
۲) شمار عناصر ساختگی موجود در جدول دوره‌ای امروزی، با شمار عناصر موجود در دسته f جدول دوره‌ای برابر است.
۳) سلول‌های طبیعی بدن انسان، همانند سلول‌های سرطانی، گلوکز نشان‌دار و گلوکز معمولی را جذب می‌کنند.
۴) در ایزوتوپی از اورانیم که به‌عنوان سوخت هسته‌ای کاربرد دارد، تفاوت شمار نوترون و پروتون برابر ۵۱ است.

پاسخ: گزینهٔ ۲ (متوسط ـ مفهومی ـ استاندارد ـ صفحهٔ ۱۵ ـ ۱۰۰۱)

شمار عناصر ساختگی موجود در جدول دوره‌ای امروزی، معادل با ۲۶ عدد است درحالی‌که شمار عناصر موجود در دسته f جدول دوره‌ای برابر با ۲۸ عدد است. عناصر موجود در دسته f، در قسمت پایین جدول دوره‌ای قرار گرفته‌اند.

بررسی سایر گزینه‌ها:

۱) عناصر گازی جدول دوره‌ای، به‌ترتیب معادل با هیدروژن، هلیم، نیتروژن، اکسیژن، فلوئور، نئون، کلر، آرگون و ... هستند. اختلاف جرم سبک‌ترین و سنگین‌ترین ایزوتوپ طبیعی منیزیم ($^{24}_{12}Mg$ و $^{26}_{12}Mg$)، همانند کلر ($^{35}_{17}Cl$ و $^{37}_{17}Cl$)، حدود ۲amu است. در جدول زیر انواع ایزوتوپ‌های عناصر و پایداری آن‌ها را می‌بینید:

نام عنصر	تعداد ایزوتوپ‌ها	پایداری
هیدروژن	۳ طبیعی و ۴ ساختگی	$^{7}_{1}H < {}^{4}_{1}H < {}^{6}_{1}H < {}^{5}_{1}H < {}^{3}_{1}H < {}^{2}_{1}H < {}^{1}_{1}H$
لیتیم	۲	$^{6}_{3}Li < {}^{7}_{3}Li$
کلر	۲	$^{37}_{17}Cl < {}^{35}_{17}Cl$
منیزیم	۳	$^{25}_{12}Mg < {}^{26}_{12}Mg < {}^{24}_{12}Mg$

۳) سلول‌های طبیعی بدن انسان، همانند سلول‌های سرطانی، گلوکز نشان‌دار و گلوکز معمولی را به‌صورت هم‌زمان جذب می‌کنند. توجه داریم که این سلول‌ها، در مقایسه با سلول‌های سرطانی، هر دو مدل گلوکز را به **مقدار کمتری** جذب می‌کنند.

۴) اورانیم، یک عنصر فلزی است که از میان همه فلزها، شناخته‌شده‌ترین فلز پرتوزا به شمار می‌رود. یکی از ایزوتوپ‌های اورانیوم که نماد آن به‌صورت $^{235}_{92}U$ است و به نام اورانیم-۲۳۵ نیز خوانده می‌شود را می‌توان به‌عنوان سوخت در راکتورهای اتمی به کار برد. در هر اتم از این ایزوتوپ، **۹۲ پروتون** و **۱۴۳ نوترون** وجود دارد. در این اتم، تفاوت شمار نوترون و پروتون برابر **۵۱** است.

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

گلوکز نشان‌دار

به گلوکز حاوی اتم‌های پرتوزا، گلوکز نشان‌دار می‌گویند. سلول‌های سرطانی، سلول‌هایی با رشد سریع هستند؛ درنتیجه میزان سوخت‌وساز و میزان مصرف گلوکز در ناحیه تقسیم آن‌ها زیاد است. با تزریق گلوکز نشان‌دار به بدن یک فرد، علاوه بر ذرات گلوکز معمولی، ذرات گلوکز نشان‌دار نیز به میزان بیشتری در ناحیه سلول‌های سرطانی تجمع می‌یابد؛ درنتیجه به وسیله آشکارساز می‌توان پرتوهای آزاد شده از اتم‌های پرتوزا را شناسایی کرد و محل ایجاد توده سرطانی در بدن را مشخص کرد.

۹۷- شمار یون‌های سدیم در یک نمونه ۷/۱ گرمی از سدیم سولفات، با شمار اتم‌های نیتروژن در یک نمونه از آمونیاک برابر است. در ساختار این نمونه از گاز آمونیاک، چند جفت الکترون پیوندی بین اتم‌ها قرار گرفته است؟ $(S=۳۲, Na=۲۳, O=۱۶ : g.mol^{-۱})$

۱) $۳/۶۱۲\times۱۰^{۲۲}$ ۲) $۳/۶۱۲\times۱۰^{۲۳}$ ۳) $۱/۸۰۶\times۱۰^{۲۲}$ ۴) $۱/۸۰۶\times۱۰^{۲۳}$

پاسخ: گزینهٔ ۴ (متوسط ـ محاسباتی ـ استاندارد ـ صفحهٔ ۱۹ ـ ۱۰۰۱)

سدیم سولفات، یک ترکیب یونی با فرمول شیمیایی $Na_۲SO_۴$ است. شمار مول یون‌های سدیم موجود در یک نمونه ۷/۱ گرمی از نمک سدیم سولفات را محاسبه می‌کنیم:

$$?\,mol\,Na = ۷/۱\,g\,Na_۲SO_۴ \times \frac{۱\,mol\,Na_۲SO_۴}{۱۴۲\,g\,Na_۲SO_۴} \times \frac{۲\,mol\,Na}{۱\,mol\,Na_۲SO_۴} = ۰/۱\,mol$$

طبق فرض سؤال، در ساختار نمونه آمونیاک نیز ۰/۱ مول اتم نیتروژن وجود دارد. فرمول شیمیایی آمونیاک، به‌صورت $NH_۳$ است، پس اگر در نمونه آمونیاک ۰/۱ مول اتم نیتروژن وجود داشته باشد، مقدار مول این ماده نیز برابر با ۰/۱ مول می‌شود. هر مولکول آمونیاک، در ساختار خود دارای ۳ جفت الکترون پیوندی است. بر این اساس، داریم:

$$?\,\text{جفت پیوندی} = ۰/۱\,mol\,NH_۳ \times \frac{۳\,mol\,\text{جفت‌الکترون پیوندی}}{۱\,mol\,NH_۳} \times \frac{۶/۰۲\times۱۰^{۲۳}\,\text{جفت‌الکترون پیوندی}}{۱\,mol\,\text{جفت‌الکترون پیوندی}} = ۱/۸۰۶\times۱۰^{۲۳}$$

۹۸- چه تعداد از عبارت‌های زیر، درست است؟

الف ـ اگر جرم اتم $^{۱}_{۱}H$ را به‌عنوان واحد جرم نسبی اتم در نظر بگیریم، جرم اتم ^{۱۲}C در این مقیاس کمتر از ۱۲ واحد می‌شود.

ب ـ ریزموج‌ها انواعی از پرتوهای الکترومغناطیسی بوده و در مقایسه با امواج رادیویی، مقدار طول موج بلندتری دارند.

ج ـ مجموع جرم ذرات زیراتمی موجود در ساختار هسته اتم $^{۱۶}_{۸}O$، تقریباً ۲/۶ برابر جرم اتم کربن-۱۲ است.

د ـ هر چه طول موج یک پرتو کم‌تر باشد، زاویهٔ انحراف آن پس از عبور از منشور، بیشتر خواهد بود.

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

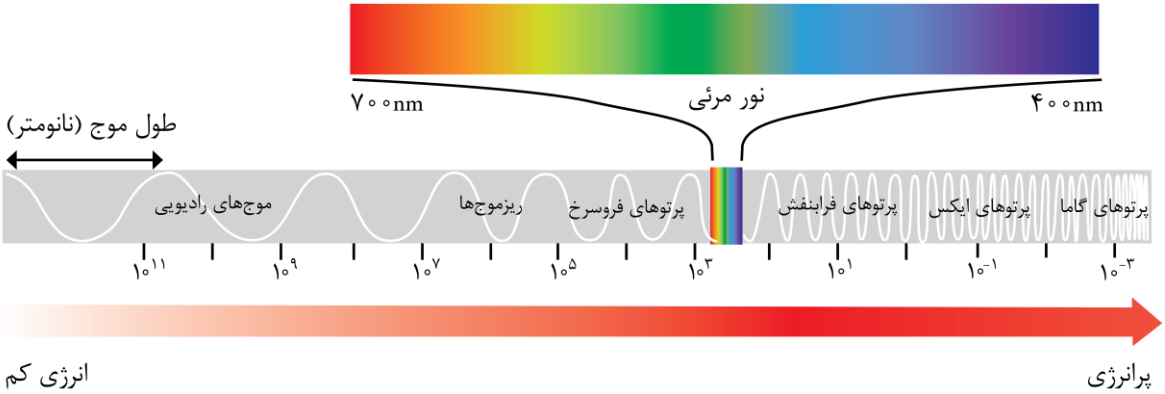
پاسخ: گزینهٔ ۲ (دشوار ـ مفهومی و خط‌به‌خط ـ استاندارد ـ صفحهٔ ۲۰ ـ ۱۰۰۱)

عبارت‌های (الف) و (د) درست هستند.

بررسی موارد:

الف) جرم هر اتم $^{۱}_{۱}H$ به‌تقریب برابر با ۱/۰۰۸amu است. اگر جرم این اتم که اندکی بیشتر از ۱amu است، به‌عنوان مقیاس جرم نسبی مورد استفاده قرار گیرد، جرم همه اتم‌ها اندکی کمتر از جرم آن‌ها برحسب amu خواهد شد. به عبارتی هر چه جرم اتمی که به‌عنوان مقیاس انتخاب می‌شود و جرم سایر اتم‌ها نسبت به آن سنجیده می‌شود را افزایش دهیم، جرم سایر عناصر کمتر از جرم آن‌ها برحسب مقیاس amu فعلی اندازه‌گیری خواهد شد.

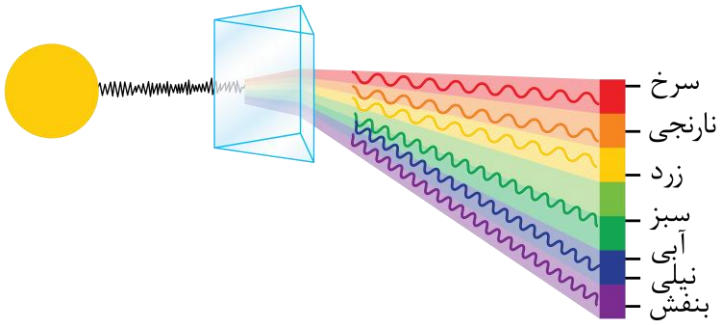
ب) تصویر زیر، طیف پرتوهای الکترومغناطیسی را نشان می‌دهد:



با توجه به طیف نشان داده شده، ریزموج‌ها در مقایسه با امواج رادیویی طول موج کوتاه‌تر و انرژی بیشتری دارند.

ج) در ساختار هسته اتم $^{16}_{8}O$، مجموعاً ۱۶ نوترون و پروتون وجود دارد، پس جرم هسته این اتم تقریباً برابر با ۱۶amu می‌شود. جرم اتم کربن-۱۲ نیز برابر با ۱۲amu است. بر این اساس، نسبت جرم هسته اتم اکسیژن به جرم اتم کربن-۱۲ تقریباً برابر با ۱/۳۳ می‌شود.

د) پرتوهای مرئی نور، در هنگام عبور از منشور دچار شکست می‌شوند. هرچه انرژی یک پرتو بیشتر باشد، میزان انحراف آن در منشور نیز **بیشتر** خواهد بود. به عبارت دیگر، میزان انحراف پرتوها در منشور، با انرژی آن‌ها **رابطه مستقیم** دارد. مطابق شکل زیر با **کاهش طول موج** (افزایش انرژی) پرتوها، زاویهٔ انحراف آن‌ها پس از عبور از منشور، **افزایش** پیدا می‌کند.



۹۹- در کاتیونی از عنصر ^{58}Co که آرایش الکترونی آن به $3d^7$ ختم می‌شود، جرم هسته چند برابر مجموع جرم الکترون‌های موجود در اطراف هسته است؟

۱) ۲۲۳۰ ۲) ۴۴۶۰ ۳) ۲۳۲۰ ۴) ۴۶۴۰

پاسخ: گزینهٔ ۴ (متوسط ـ محاسباتی ـ استاندارد ـ صفحهٔ ۱۳ ـ ۱۰۰۱)

کبالت، عنصری با عدد اتمی ۲۷ بوده و آرایش الکترونی آن به‌صورت زیر است:

$_{27}Co: 1s^2 2s^2 2p^6 3s^2 3p^6 3d^7 4s^2$

اگر از اتم کبالت ۲ الکترون بگیریم، یون Co^{2+} تولید می‌شود که آرایش الکترونی آن به‌صورت زیر خواهد بود:

$_{27}Co^{2+}: 1s^2 2s^2 2p^6 3s^2 3p^6 3d^7$

در ساختار این یون، مجموعاً ۲۵ الکترون وجود دارد. جدول زیر، جرم انواع ذرات زیراتمی را نشان می‌دهد:

نام ذره	جرم نسبی (amu)
الکترون	۰/۰۰۰۵
پروتون	۱/۰۰۷۳
نوترون	۱/۰۰۸۷

در ساختار هسته اتم مورد نظر، مجموعاً ۵۸ ذره زیراتمی وجود دارد که جرم آن‌ها تقریباً برابر با ۵۸amu می‌شود. مجموع جرم الکترون‌ها در این یون نیز تقریباً برابر با ۰/۰۱۲۵amu می‌شود. بر این اساس، داریم:

$$\frac{\text{جرم هسته}}{\text{جرم الکترون‌ها}} = \frac{۵۸\,\text{amu}}{۰/۰۱۲۵\,\text{amu}} = ۴۶۴۰$$

ماز

۱۰۰- مجموع شمار عناصر موجود در گروه‌های اول تا سوم جدول دوره‌ای امروزی، چند برابر حداکثر ظرفیت الکترونی لایه پنجم است؟

۱) ۰/۶ ۲) ۰/۳۴ ۳) ۰/۹ ۴) ۰/۸

پاسخ: گزینهٔ ۳ (آسان ـ مفهومی ـ سریع ـ صفحهٔ ۲۹ ـ ۱۰۰۱)

گروه‌های اول و هجدهم جدول دوره‌ای، شامل ۷ عنصر هستند. گروه‌های دوم و سیزدهم تا هفدهم جدول دوره‌ای، دارای ۶ عنصر هستند. گروه سوم، دارای ۳۲ عنصر بوده و گروه چهارم تا دوازدهم نیز هریک دارای ۴ عنصر هستند. شمار عناصر موجود در تناوب‌های مختلف جدول دوره‌ای نیز به شرح زیر است:

شماره تناوب	تعداد عناصر	دسته‌های عناصر	گاز نجیب موجود در انتهای تناوب	عدد اتمی گاز نجیب
۱	۲	s	هلیم	۲
۲	۸	s−p	نئون	۱۰
۳	۸	s−p	آرگون	۱۸
۴	۱۸	s−p−d	کریپتون	۳۶
۵	۱۸	s−p−d	زنون	۵۴
۶	۳۲	s−p−d−f	رادون	۸۶
۷	۳۲	s−p−d−f	اوگانسون	۱۱۸

با توجه به توضیحات داده شده، مجموع شمار عناصر موجود در گروه‌های اول تا سوم جدول دوره‌ای امروزی برابر با ۴۵=۶+۳۲+۷ عدد است. حداکثر ظرفیت الکترونی **لایه پنجم** نیز برابر با ۵۰ عدد است، پس مقدار نسبت خواسته‌شده برابر با ۰/۹ می‌شود.

ماز

۱۰۱- در آرایش الکترونی چه تعداد از عناصر موجود در جدول دوره‌ای امروزی، مجموعاً ۱۸ الکترون با $l=1$ یافت می‌شود؟

۱) ۱۲ ۲) ۱۳ ۳) ۱۴ ۴) ۱۵

پاسخ: گزینهٔ ۲ (آسان ـ مفهومی ـ سریع ـ صفحهٔ ۳۱ ـ ۱۰۰۱)

عدد کوانتومی فرعی $l=1$، زیرلایه الکترونی p را نشان می‌دهد. یک عنصر، در حالتی مجموعاً ۱۸ الکترون با $l=1$ دارد که در آن، زیرلایه‌های الکترونی 2p، 3p و 4p پر شده باشند و هیچ الکترونی وارد زیرلایه 5p نشده باشد. در عناصری با عدد اتمی ۳۶ تا ۴۸، چنین شرایطی برقرار بوده و زیرلایه 5p فاقد الکترون است. این بازه، شامل ۱۳ عنصر مختلف می‌شود.

ماز

۱۰۲- در ساختار اکسید N_xO_y، مجموع جرم اتم‌های نیتروژن و اکسیژن، ۳/۸ برابر تفاوت جرم اتم‌های این دو عنصر است. جرم ۰/۱ مول از این ماده، به اندازه چند گرم کمتر از جرم ۰/۱۵ مول اتیلن گلیکول است؟ (در ساختار اکسید N_xO_y، زیروند اتم اکسیژن بزرگ‌تر از اتم نیتروژن است. $O=16, N=14, C=12, H=1 : g.mol^{-1}$)

۱) ۶/۳ ۲) ۴/۹ ۳) ۳/۱ ۴) ۱/۷

پاسخ: گزینهٔ ۴ (دشوار ـ محاسباتی ـ زمان‌بر ـ صفحهٔ ۱۹ ـ ۱۰۰۱)

اتیلن گلیکول، نوعی الکل دوعاملی با فرمول شیمیایی $C_2H_6O_2$ است. در قدم اول، جرم ۰/۱۵ مول اتیلن گلیکول را محاسبه می‌کنیم:

$$?g\,C_2H_6O_2 = ۰/۱۵\,mol\,C_2H_6O_2 \times \frac{۶۲\,g\,C_2H_6O_2}{۱\,mol\,C_2H_6O_2} = ۹/۳\,g$$

طبق فرض سؤال، در ساختار اکسید N_xO_y، مجموع جرم اتم‌های نیتروژن و اکسیژن، ۳/۸ برابر تفاوت جرم اتم‌های این دو عنصر است. بر این اساس، داریم:

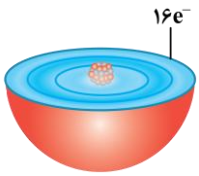
$$\frac{\text{مجموع جرم اتم‌های O و N}}{\text{تفاوت جرم اتم‌های O و N}} = \frac{16y+14x}{16y-14x} = 3/8 \Rightarrow y = 1/5x$$

بر این اساس، فرمول شیمیایی اکسید مورد نظر به‌صورت $N_xO_{1/5x}$ می‌شود که می‌تواند معادل با یکی از حالت‌های N_2O_3، N_4O_6 و ... باشد. چون جرم ۰/۱ مول از این اکسید، طبق فرض سؤال از جرم ۰/۱۵ مول اتیلن گلیکول کمتر است، پس فرمول شیمیایی این ماده به‌صورت N_2O_3 بوده و جرم ۰/۱ مول از آن برابر با ۷/۶ گرم می‌شود. بر این اساس، داریم:

$$\text{جرم اتیلن گلیکول} - \text{جرم } N_2O_3 = 9/3 - 7/6 = 1/7\,g$$

ماز

۱۰۳- کدام موارد از عبارت‌های زیر، در رابطه با یک ذره با ساختار مقابل درست است؟



الف ـ این ذره، به‌یقین دارای بار الکتریکی است.

ب ـ در آرایش الکترونی این ذره، ۶ زیرلایه پر از الکترون وجود دارد.

ج ـ نیمی از الکترون‌های لایه سوم در این ذره، متعلق به زیرلایه ۳d هستند.

د ـ این ذره، می‌تواند متعلق به ششمین فلز واسطه موجود در جدول دوره‌ای باشد.

۱) «الف» و «ج» ۲) «الف» و «د» ۳) «ب» و «ج» ۴) «ب» و «د»

پاسخ: گزینهٔ ۱ (متوسط ـ مفهومی ـ استاندارد ـ صفحهٔ ۴۳ ـ ۱۰۰۱)

ذره داده شده، در لایه سوم الکترونی خود مجموعاً دارای ۱۶ الکترون بوده و فاقد لایه چهارم الکترونی است. بر این اساس، آرایش الکترونی این ذره به‌صورت زیر می‌شود:

آرایش الکترونی ذره : $1s^2 2s^2 2p^6 3s^2 3p^6 3d^8$

چون در این ذره، زیرلایه ۳d دارای الکترون بوده و لایه چهارم فاقد الکترون است، پس می‌توان گفت این ذره معادل با نوعی کاتیون خواهد بود. در رابطه با این ذره، عبارت‌های (الف) و (ج) درست هستند.

بررسی موارد:

الف) تصویر نشان داده شده، به‌یقین متعلق به نوعی کاتیون است.

ب) در آرایش الکترونی ذره داده شده، فقط ۵ زیرلایه پر از الکترون هستند.

ج) در لایه سوم این ذره، مجموعاً ۱۶ الکترون وجود دارد که ۸ مورد از آن‌ها در زیرلایه ۳d قرار گرفته‌اند.

د) ششمین فلز واسطه موجود در جدول دوره‌ای، معادل با فلز آهن است. آرایش الکترونی هیچ‌کدام از کاتیون‌های حاصل از فلز آهن، مشابه آرایش الکترونی ذره داده شده نخواهد بود.

ماز

۱۰۴- در رابطه با عنصر مس، کدام‌یک از مطالب زیر نادرست است؟

۱) عدد اتمی عنصری که با مس، هم‌گروه بوده و با $_{105}Db$ در یک تناوب مشابه قرار دارد، برابر با ۱۰۹ است.

۲) شعله این فلز، سبز رنگ بوده و با تجزیه نور حاصل از شعله آن، طیف نشری-خطی این عنصر ایجاد می‌شود.

۳) مجموع مقدار $n+l$ الکترون‌های ظرفیتی در هر اتم این عنصر، ۳ برابر این مقدار در ساختار اتم فسفر است.

۴) اگر عدد جرمی اتم آن برابر با ۶۵ باشد، تفاوت شمار الکترون‌ها و نوترون‌ها در یون Cu^+ برابر با ۸ عدد می‌شود.

پاسخ: گزینهٔ ۱ (متوسط ـ مفهومی ـ زمان‌بر ـ صفحهٔ ۳۳ ـ ۱۰۰۱)

مس، متعلق به گروه شماره ۱۱ جدول دوره‌ای است. عنصر $_{105}Db$ نیز متعلق به تناوب هفتم جدول دوره‌ای است. عدد اتمی عنصری که متعلق به تناوب **هفتم** و گروه شماره ۱۱ جدول دوره‌ای باشد، برابر با **۱۱۱** است.

بررسی سایر گزینه‌ها:

۲) اگر مقداری از محلول یک نمک حاوی کاتیون فلزی را با افشانه روی شعله بپاشیم، اتم‌های سازنده فلز مورد نظر دچار برانگیختگی شده و طی این فرایند رنگ شعله مورد نظر را تغییر می‌دهند. با تغییر رنگ شعله، دمای شعله نیز تغییر می‌کند. جدول زیر، رنگ شعله حاصل از برخی از عناصر فلزی و ترکیب‌های حاصل از آن‌ها را نشان می‌دهد:

سبز	زرد	سرخ
مس (II) نیترات	سدیم نیترات	لیتیم نیترات
مس (II) سولفات	سدیم سولفات	لیتیم سولفات
فلز مس	فلز سدیم	فلز لیتیم

با تجزیه نور حاصل از شعله فلز مس، طیف نشری-خطی عنصر مورد نظر به‌دست می‌آید.

۳) در اتم مس با آرایش الکترونی $_{29}Cu: 1s^2 2s^2 2p^6 3s^2 3p^6 3d^{10} 4s^1$، آرایش الکترونی لایه ظرفیت به‌صورت $3d^{10} 4s^1$ است. مجموع مقدار $n+l$ الکترون‌های ظرفیتی در هر اتم مس برابر با ۵۴ است. در اتم فسفر با آرایش الکترونی $_{15}P: 1s^2 2s^2 2p^6 3s^2 3p^3$، آرایش الکترونی لایه ظرفیت به‌صورت $3s^2 3p^3$ است. مجموع مقدار $n+l$ الکترون‌های ظرفیتی در هر اتم فسفر **برابر با ۱۸** است.

۴) اگر عدد جرمی اتم مس برابر با ۶۵ باشد، در هر اتم مس ۳۶ نوترون وجود خواهد داشت. از طرفی، در یون Cu^+ نیز ۲۸ الکترون وجود دارد. بر این اساس، تفاوت شمار الکترون‌ها و نوترون‌ها در یون مورد نظر برابر با **۸ عدد** می‌شود.

ماز

۱۰۵- کدام‌یک از مطالب زیر درست است؟

۱) سطح انرژی لایه‌های الکترونی در اتم سدیم و کاتیون سدیم، متفاوت از یکدیگر است.
۲) با استفاده از شعله آتش، می‌توان طیف نشری-خطی از عناصر اکسیژن، گوگرد و مس را تهیه کرد.
۳) با انتقال الکترون از لایه $n=4$ به لایه $n=3$ در اتم هیدروژن، یک پرتو فرابنفش گسیل می‌شود.
۴) در طیف نشری-خطی لیتیم، همانند طیف نشری-خطی هیدروژن، پرتوهای قرمز و آبی‌رنگ یافت می‌شود.

پاسخ: گزینهٔ ۴ (متوسط ـ مفهومی و خط‌به‌خط ـ سریع ـ صفحهٔ ۲۷ ـ ۱۰۰۱)

در طیف نشری-خطی لیتیم، همانند طیف نشری-خطی هیدروژن، پرتوهای قرمز و آبی کم‌رنگ و آبی پررنگ یافت می‌شود. علاوه بر این خطوط، طیف نشری-خطی هیدروژن دارای یک نوار بنفش و طیف نشری-خطی لیتیم نیز دارای یک نوار زرد رنگ است.

بررسی سایر گزینه‌ها:

۱) سطح انرژی لایه‌های الکترونی در اتم سدیم و کاتیون سدیم، مشابه همدیگر است و به همین خاطر است که اتم **سدیم** و **کاتیون سدیم**، هر دو طیف نشری-خطی و رنگ شعله یکسانی دارند.

۲) با استفاده از شعله آتش، می‌توان طیف نشری-خطی از عنصر مس را تهیه کرد، اما این شعله توانایی برانگیخته کردن اتم‌های نافلزی از جمله اتم **گوگرد** و **اکسیژن** را ندارد.

۳) چون اختلاف سطح انرژی لایه $n=4$ تا لایه $n=3$ کمتر از اختلاف سطح انرژی لایه $n=3$ تا لایه $n=2$ است و طی انتقال الکترون از لایه سوم به لایه دوم، پرتو مرئی گسیل می‌شود، پس می‌توان گفت با انتقال الکترون از لایه $n=4$ به لایه $n=3$ در اتم هیدروژن، یک پرتو **فروسرخ** گسیل می‌شود.

ماز

رشتهٔ ریاضی

برنامه آزمون‌های PREMIUM ماز

اگر شما یک دانش‌آموز پرتلاش و تراز بالا در آزمون‌های آزمایشی هستید و نیاز دارید در یک لیگ بالاتر برای به دست‌آوردن رتبه‌های تک و دو رقمی کنکور سراسری فقط با دانش‌آموزان تراز بالا در سراسر کشور رقابت کنید، **آزمون پریمیوم ماز** مناسب شماست.

- ۱۰ مرحله آزمون پریمیوم ویژهٔ دانش‌آموزان کنکوری
- جمع‌بندی های مبحثی، نیم سالی، پایه به پایه و جامع شبیه‌ساز کنکور سراسری
- پیش‌بینی طراحان و اساتید ماز از نکات کنکور و شرایط مختلف دشواری کنکور سراسری

شروع از جمعه ۸ آبان:

برنامه همسو با برنامهٔ کلاس‌ها و آزمون اصلی ماز

شرایط شرکت در آزمون‌های پریمیوم ماز:

- ورود به **لیگ افسانه‌ای** در کارنامهٔ آزمون اصلی ماز
- شرکت مستمر در آزمون‌های اصلی ماز (از آزمون ۱۷ مهرماه، حداکثر سه غیبت مجاز است)



امکان شرکت در آزمون

جمعه از ساعت ۸ صبح

تا ساعت ۱۲ ظهر

به صورت

دانلود و پرینت سؤالات و

پاسخگویی در بستر آنلاین

امکان پذیر است.

BIOMAZE.IR

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

رشته ریاضی

برنامه آزمون‌های PREMIUM ماز

آزمون	تاریخ	حسابان (۲۰ سؤال)	هندسه (۱۰ سؤال)	ریاضیات گسسته / آمار و احتمال (۱۰ سؤال)	فیزیک (۳۵ سؤال)	شیمی (۳۰ سؤال)
آزمون ۱	جمعه ۸ آبان	جامع مباحث تابع (فصل ۱ دوازدهم + فصل ۲ یازدهم + فصل ۵ دهم)	هندسهٔ ۳: فصل ۱ (تا ابتدای حل دستگاه) ۹ تا ۲۳ + هندسهٔ ۱: ۹ تا ۳۷	گسسته: فصل ۱ درس ۱ و ۲	فصل ۱ دوازدهم + فصل‌های ۱ و ۲ دهم	فصل ۱ دهم (صفحهٔ ۱ تا ۴۶) + فصل ۱ دوازدهم (صفحهٔ ۱ تا ۲۶/ تا ابتدای با هم بیاندیشیم)
آزمون ۲	جمعه ۶ آذر	جامع مباحث مثلثات (فصل ۲ دوازدهم + فصل ۴ یازدهم + فصل ۲ دهم)	هندسهٔ ۳: فصل ۱ درس ۲ + هندسهٔ ۱: ۳۸ تا ۷۳	گسسته: فصل ۱ درس ۳	فصل‌های ۱ و ۲ دوازدهم (صفحهٔ ۱۵ تا ۴۶ (تا ابتدای تکانه و قانون دوم نیوتون)) + فصل‌های ۳ و ۴ دهم	فصل ۲ دهم (صفحهٔ ۴۷ تا ۸۴) + فصل‌های ۱ و ۲ دوازدهم (صفحهٔ ۱۳ تا ۴۹/ تا ابتدای پیوند با زندگی)
آزمون ۳	جمعه ۲۰ آذر	مباحث پایه (معادله‌ها و نامعادله‌ها+ مجموعه، الگو و دنباله + معادلات درجه دوم) / فصل‌های ۱، ۴ دهم + فصل ۱ یازدهم (درس ۱ و ۲)	هندسهٔ ۳: فصل ۲ درس ۱ + هندسهٔ ۱: فصل ۴	گسسته: کل فصل ۱	جمع‌بندی پایهٔ دهم (کل کتاب)	جمع‌بندی پایهٔ دهم (کل کتاب)
آزمون ۴	جمعه ۴ دی	جمع‌بندی نیم‌سال اول دوازدهم (تابع + مثلثات + حد و پیوستگی) فصل‌های ۱ تا ۳ دوازدهم + مباحث ترکیبی پایه	هندسهٔ ۳: فصل ۱ و ۲ (درس ۱ و ۲)	گسسته: فصل ۱ و ۲ (تا پایان درس ۱)	فصل‌های ۱ تا ۳ (تا ابتدای موج و انواع آن) صفحه‌های ۱ تا ۶۹	مولکول‌ها در خدمت تندرستی: کل فصل آسایش و رفاه در سایه شیمی: کل فصل صفحه‌های ۱ تا ۶۶
آزمون ۵	جمعه ۳۰ بهمن	جامع مباحث پایه (معادله‌ها و نامعادله‌ها+ جبر و معادله + توابع نمایی و لگاریتمی + مجموعه، الگو و دنباله + توان‌های گویا و عبارت‌های جبری) / فصل‌های ۱، ۳ و ۴ دهم + فصل‌های ۱ و ۳ یازدهم	هندسهٔ ۳: کل فصل ۲ + هندسهٔ ۲: فصل ۱	گسسته: فصل ۲ ـ درس ۲ + آمار و احتمال: فصل ۱	فصل‌های ۳ و ۴ دوازدهم + فصل‌های ۱ و ۲ یازدهم	فصل‌های ۱ و ۲ یازدهم (صفحهٔ ۱ تا ۷۷/ تا ابتدای غذای سالم) + فصل ۳ دوازدهم (صفحهٔ ۶۷ تا ۹۰)
آزمون ۶	جمعه ۲۸ اسفند	جامع مباحث مشتق و کاربردهای مشتق (فصل‌های ۴ و ۵ دوازدهم)	هندسهٔ ۳: فصل ۳ درس ۱ + هندسهٔ ۲: فصل ۲	گسسته: فصل ۳ + ریاضی ۱: فصل ۶	جمع‌بندی پایهٔ یازدهم (کل کتاب)	جمع‌بندی پایهٔ یازدهم (کل کتاب)
آزمون ۷	پنج‌شنبه ۱۲ فروردین	جمع‌بندی حد و پیوستگی + مشتق + کاربردهای مشتق فصل‌های ۳ تا ۵ دوازدهم + مباحث ترکیبی پایه	هندسهٔ ۳: فصل ۳ درس ۲ + هندسهٔ ۲: فصل ۳	آمار و احتمال: فصل‌های ۲ تا ۴ + ریاضی ۱: فصل ۷	فصل‌های ۳، ۴، ۵ و ۶ (از ابتدای موج و انواع آن تا پایان کتاب) صفحه‌های ۶۹ تا ۱۵۶	شیمی، جلوه‌ای از هنر زیبایی و ماندگاری: کل فصل شیمی، راهی به سوی آینده‌ای روشن‌تر: کل فصل صفحه‌های ۶۷ تا ۱۲۳
آزمون ۸	جمعه ۲۷ فروردین	جامع شبیه‌ساز کنکور سراسری (۱)	جامع شبیه‌ساز کنکور سراسری (۱)	جامع شبیه‌ساز کنکور سراسری (۱)	جامع شبیه‌ساز کنکور سراسری (۱)	جامع شیمی آلی و مسائل شیمی
آزمون ۹	پنج‌شنبه ۹ اردیبهشت	جامع شبیه‌ساز کنکور سراسری (۲)	جامع شبیه‌ساز کنکور سراسری (۲)	جامع شبیه‌ساز کنکور سراسری (۲)	جامع شبیه‌ساز کنکور سراسری (۲)	جامع شبیه‌ساز کنکور سراسری (۱)
آزمون ۱۰	دوشنبه ۷ تیر	جامع شبیه‌ساز کنکور سراسری (۳)	جامع شبیه‌ساز کنکور سراسری (۳)	جامع شبیه‌ساز کنکور سراسری (۳)	جامع شبیه‌ساز کنکور سراسری (۳)	جامع شبیه‌ساز کنکور سراسری (۲)

فایل سؤالات و پاسخنامه آزمون پریمیوم در اختیار تمام دانش آموزان مازی قرار می گیرد. اما شرکت در آزمون فقط برای دانش آموزانی توصیه می شود و امکان پذیر است که توانسته اند به لیگ افسانه ای در کارنامهٔ لیگ بندی ماز وارد شوند.

BIOMAZE.IR
ماز
SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

سلام! به آزمون پریمیوم ماز خوش اومدی؛

اینجا نقطهٔ شروع یه تجربهٔ خاصه: آزمونی برای دانش‌آموزایی که در آزمون‌های اصلی ماز خودشون رو به **لیگ افسانه‌ای، بالاترین سطح رقابت ماز** رسوندن و حالا می‌خوان خودشون رو در جمعی از برترین دانش‌آموزان محک بزنن و یک قدم جدی‌تر برای رسیدن به اهدافشون بردارن.

چرا آزمون پریمیوم!؟

رقابت‌های عمومی، برای رشد و پیشرفت همهٔ دانش‌آموزها طراحی شدن؛ اما وقتی به سطح بالاتری می‌رسی، مقایسه با هر دانش‌آموزی دیگه نمی‌تونه تصویر دقیقی از جایگاهت بهت بده.

اینجاست که رقابت واقعی شکل می‌گیره؛

وقتی خودت رو در جمع دانش‌آموزانی قرار می‌دی که مثل تو، در آزمون‌های اصلی ماز به بالاترین سطح رقابت رسیدن.

تو با شرکت در آزمون پریمیوم، وارد جمعی می‌شی که هر شرکت‌کننده می‌تونه یک معیار جدید برای سنجش عملکردت باشه؛ جمعی از دانش‌آموزانی که حالا فرصت دارن خودشون رو در سطحی بالاتر و در رقابتی فشرده‌تر محک بزنن.

آزمون پریمیوم دقیقاً برای همینه:

رقابت بین دانش‌آموزان برتر ماز، جایی که هر درصد معنا داره و هر اشتباه، می‌تونه فرصتی برای جهش بعدی باشه.



BIOMAZE.IR
ماز
SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

در آزمون پریمیوم رشد فقط از مطالعه نمیاد؛ بلکه از مقایسه با بهترین‌ها در یک آزمون با سطح بالاتر شکل می‌گیره.

این رویکرد بر پایهٔ نظریهٔ SOCIAL COMPARISON THEORY طراحی شده؛ نظریه‌ای که میگه انسان برای درک جایگاه واقعی خودش، نیاز داره عملکردش رو با افرادی که در سطح مشابهی قرار دارن مقایسه کنه.

در آزمون پریمیوم ماز، این نظریه در قالب یک چرخهٔ یادگیری واقعی پیاده شده:

۱. **مشاهده و سنجش:** بررسی جایگاه خودت در بین دانش‌آموزان برتر و تحلیل نقاط ضعف و قوت.

۲. **الگوبرداری هدفمند:** یادگیری از روش‌ها، نظم و الگوهای فکری دانش‌آموزان برتر.

۳. **اصلاح و تمرین:** تنظیم مجدد مسیر مطالعه و تلاش برای عملکرد بهتر در آزمون بعدی.

۴. **ارزیابی دوباره:** شرکت در آزمون بعدی و سنجش پیشرفت نسبت به خودت.

در این روند، مقایسه تهدید نیست، بلکه ابزار رشده ...

چطور وارد آزمون پریمیوم می‌شی؟

ورود به آزمون پریمیوم امسال، از مسیر آزمون‌های اصلی ماز انجام می‌شه.

اگر در آزمون‌های اصلی، **جزو لیگ افسانه‌ای** قرار بگیری، آزمون پریمیوم به‌صورت **خودکار در پنل کاربری‌ات فعال می‌شه** و می‌تونی در این مرحلهٔ ویژه از رقابت شرکت کنی.

پس لیگ افسانه‌ای فقط بالاترین لیگ تراز ماز نیست؛

دروازهٔ ورود به مرحله‌ی بعدی رقابته.



BIOMAZE.IR
ماز
SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir