گروه آزمایشی علوم ریاضی و فنی

آزمون ماز | پایهٔ دوازدهم

Maze Educational Group

دفترچه پاسخ

پنجشنبه ۲۸ خردادماه ۱۴۰۵

جامع شبیه‌ساز کنکور سراسری (۲)

(تعداد سؤالات مطابق کنکور سراسری)

ویژهٔ کنکـــوری‌های ۱۴۰۵

- پاسخنامه سریع؛ برای بررسی فوری بعد از آزمون
- تحلیل تمام گزینه‌های هر سؤال؛ برای بررسی سؤالاتی که پاسخ نادرست داده‌اید
- نکات و درسنامه‌های آموزشی؛ برای یادگیری کامل مباحث هر سؤال
- مشاورهٔ تستی؛ برای یادگیری انواع روش‌های حل تست
- استراتژی آزمون؛ برای یادگیری مدیریت زمان و مدیریت جلسهٔ آزمون

حق چاپ و تکثیر سؤالات به هر روش (الکترونیکی و...) پس از برگزاری آزمون برای تمامی اشخاص حقیقی و حقوقی تنها با مجوز «گروه ماز» مجاز می‌باشد و با متخلفین برابر مقررات رفتار می‌شود.

SanjeshCloud www.SanjeshCloud.ir

درس	مسئول درس	طراحان	ویراستاران
ریاضیات	مهرداد کیوان حسین شفیع‌زاده سیدجواد نظری	حسین شفیع‌زاده ـ مهرداد کیوان علی منصف‌شکری ـ رسول حاجی‌زاده سید جوادنظری	ندا فرهختی ـ مائده بادان فیروز حمیدرضا ولی‌پور ـ مهرداد اسپیدکار یزدان نیک‌قدم ـ فؤاد خیرآبادی علی اسدی
فیزیک	سجاد صادقی‌زاده سعید احمدی	سعید احمدی ـ سجاد صادقی‌زاده ـ مجید رجبی وندچالی حسین عبدوی‌نژاد ـ محمدجواد سورچی ـ مهدی پارسا زهره آقامحمدی ـ امیررضا خوینی‌ها ـ سارا قانع هادی حمزه‌پور ـ محمد نظری ـ مهران تاکی امیرحسین اکبری	محمدجواد سورچی حنا خلعتبری
شیمی	فرشاد هادیان‌فرد	فرشاد هادیان‌فرد ـ فرهنگ امیری عالیه میرزایی ـ طاها حق‌بین ـ علی ترابی مهسا بایمانی‌نژاد	طاها حق‌بین ـ محمد دارابی‌جم امیرعلی حسینی‌فرد محمدمهدی معظمی

تیم اجرایی و تولید آزمون

مجتبی آدمیان — نازنین امیری

مائده بادان‌فیروز — زهره جعفری

مدیر تولید آزمون: محدثه شیخعلی

یک تیم با بیش از ۵۰۰ نفر در حال کار هستن تا آزمون‌های ماز با حداکثر کیفیت حاضر بشن و به شما کمک کنن و مسیر موفقیت رو براتون ساده‌تر کنن. همیشه از نظرات و کامنت‌های خوب‌تون انرژی می‌گیریم. مرسی که همراهمون هستین.

راستی! حتماً در نظرسنجی آزمون شرکت کنین و نظرات و پیشنهادات‌تون رو برامون بنویسین.

دکتر رسول خنجری

آموزش استراتژی آزمون و مدیریت جلسه کنکور - قسمت +

این روزها چطور آروم‌تر باشم؟

راستش این روزها خیلی از بچه‌ها یه جور نگرانی توی دلشون دارن. یکی به امتحان فکر می‌کنه، یکی به درس‌هایی که هنوز کامل نخونده، یکی هم به آزمون‌هایی که جلوشه. بعضی وقت‌ها هم آدم دقیق نمی‌دونه چرا نگران شده؛ فقط حس می‌کنه ذهنش شلوغه و مدام از یه فکر می‌ره سراغ یه فکر دیگه. توی این حالت حتی ممکنه جلوی کتاب بشینی، ولی حواست درست جمع نشه.

توی یکی از آزمون‌های اخیر، قبل از اعلام کارنامه از دانش‌آموزهای متوسطه دوم پرسیدیم:

«برای افزایش آرامش درونی خودت در این روزها چه کارهایی می‌کنی؟»

جواب‌ها یه نکته جالب داشت؛ آرامش معمولاً از کارهای ساده و قابل انجام به دست میاد.

در ادامه چند مورد از پرتکرارترین پیشنهادهای دانش‌آموزهای مازی رو می‌خونی:

۱ از چیزهایی که استرس می‌ده کمی فاصله بگیر

خیلی از بچه‌ها گفته بودن سعی می‌کنن از چیزهایی که استرسشون رو زیاد می‌کنه فاصله بگیرن. مثلاً مدام دنبال خبرهای ناراحت‌کننده نمی‌رن یا هر حرف و شایعه‌ای رو جدی نمی‌گیرن.

بعضی وقت‌ها آدم هنوز خودش نگران نشده، اما با شنیدن نگرانی‌های دیگران استرس می‌گیره. برای همین بهتره حواسمون باشه چه چیزهایی رو وارد ذهنمون می‌کنیم.

۲ برنامه داشتن، مغز رو آروم‌تر می‌کنه

خیلی از دانش‌آموزها می‌گفتن وقتی روی درس و برنامه تمرکز می‌کنن، آرامش بیشتری دارن. وقتی بدونی امروز دقیقاً چه کاری قراره انجام بدی، ذهنت کمتر درگیر نگرانی می‌شه.

مثلاً مشخص باشه که قراره یه مبحث رو بخونی، چند تا سؤال حل کنی و بعدش استراحت داشته باشی. همین برنامه ساده باعث می‌شه احساس کنی اوضاع دست خودته و قدم‌به‌قدم جلو می‌ری.

۳ فقط درس خواندن کافی نیست؛ باید بدنت هم آروم بشه

خیلی‌ها گفته بودن برای آروم شدن فقط درس خوندن کافی نیست. بدن هم باید از حالت فشار خارج بشه.

بعضی‌ها با موسیقی، بعضی‌ها با دعا و عبادت، بعضی‌ها با پیاده‌روی، ورزش سبک یا چند حرکت کششی آروم می‌شن. حتی یه استراحت کوتاه هم می‌تونه به مغز کمک کنه با انرژی بیشتری به درس برگرده.

٤ همه‌چیز رو تنهایی تحمل نکن

بعضی از دانش‌آموزها می‌گفتن وقتی با دوست‌هاشون حرف می‌زنن یا با هم درس می‌خونن، استرسشون کمتر می‌شه. چون متوجه می‌شن فقط خودشون نیستن که این روزها نگرانی دارن.
حرف زدن با یه آدم مطمئن، مثل دوست، پدر و مادر، معلم یا مشاور، خیلی وقت‌ها باعث می‌شه نگرانی‌ها قابل‌مدیریت‌تر به نظر برسن.

۵ با خودت خوب حرف بزن

یه نکته جالب دیگه هم این بود که خیلی‌ها سعی می‌کنن با خودشون امیدوارانه‌تر حرف بزنن. مثلاً به خودشون یادآوری می‌کنن که دارن تلاش می‌کنن، یا به موفقیت آینده فکر می‌کنن. بعضی‌ها هم با دعا و توکل آروم‌تر می‌شن. این جور فکرها کمک می‌کنه آدم وسط سختی‌ها امیدش رو از دست نده.

٦ کارهای بزرگ را خرد کن

یکی از کاربردی‌ترین پیشنهادها این بود که کارهای بزرگ رو به بخش‌های کوچک‌تر تقسیم کنیم.
مثلاً به جای اینکه بگی «باید کل این درس رو بخونم»، بگو «فعلاً چند صفحه می‌خونم» یا «چند تا سؤال حل می‌کنم». وقتی کارها کوچک‌تر می‌شن، شروع کردنشون راحت‌تر می‌شه و نگرانی هم کمتر می‌شه.
خیلی وقت‌ها فقط کافیه قدم اول رو برداری؛ ادامه مسیر از چیزی که فکر می‌کنی ساده‌تره.

خلاصه اینکه...

در نهایت، چیزی که از حرف‌های این دانش‌آموزها می‌شه فهمید اینه که آرامش یه چیز جادویی نیست که یه دفعه از آسمون بیفته. بیشتر وقت‌ها با همین کارهای ساده به دست میاد: کمتر درگیر چیزهای استرس‌زا شدن، داشتن یه برنامه ساده، کمی استراحت و حرکت، حرف زدن با آدم‌های مطمئن و قدم‌به‌قدم جلو رفتن.
و شاید مهم‌ترین نکته این باشه که بدونیم اگر این روزها گاهی نگران می‌شیم، کاملاً طبیعیه. خیلی‌ها همین حس رو دارن. مهم اینه که بلد باشیم کم‌کم حال ذهنمون رو بهتر کنیم و بدونیم با چند قدم ساده می‌شه دوباره آروم‌تر شد.

راهنمای پاسخنامه آزمون ها

زمان پاسخگویی:
سریع (زیر ۱ دقیقه) | استاندارد (۱-۲ دقیقه) | زمان‌بر (بیشتر از ۲ دقیقه).

پاسخ: گزینهٔ ۳ (متوسط ـ خط به خط ـ سریع ـ صفحه ۱۶ ـ ۱۱۰۱)

سطح سؤال:
آسان (اعتمادبه‌نفس) | متوسط (محک جدی) دشوار (چالش رشد).

هشتگ سوال:
شماره درس + شماره پایه
دسته‌بندی راحت‌تر سؤالات

سبک سؤال:
خط به خط (متن کتاب) | ترکیبی (چند مبحث) | محاسباتی (فرمول ودقت) | مفهومی (درک عمیق).

شماره صفحه:
منبع اصلی رو راحت پیدا کنید.

یادتون باشه:

- ✓ هر سؤال یک فرصت یادگیریه، نه یک مانع.
- ✓ پاسخ‌نامه فقط جواب نیست؛ یک کارگاه آموزشی کامله.
- ✓ با هر آزمون و مرور این پاسخ‌نامه، یک پله بالاتر می‌رید و یک قدم به رؤیاتون نزدیک‌تر می‌شید.
- ✓ موفقیت فقط برای کسایی‌ه که با برنامه و انگیزه حرکت می‌کنن. شما همون آدمید.

بودجه‌بندی این آزمون

ریاضی ۱ + حسابان ۱ + حسابان ۲: کل کتاب
هندسه ۱ + هندسه ۲ + هندسه ۳: کل کتاب
آمار و احتمال: کل کتاب
گسسته: کل کتاب

سهم در کنکور

حسابان ۲: این مبحث در مجموع ۶ تست از ۴۰ تستِ کنکور را پوشش داده است.
حسابان ۱: این مبحث در مجموع ۱۰ تست از ۴۰ تستِ کنکور را پوشش داده است.
ریاضی ۱: این مبحث در مجموع ۴ تست از ۴۰ تستِ کنکور را پوشش داده است.
هندسه ۳: این مبحث در مجموع ۴ تست از ۴۰ تستِ کنکور را پوشش داده است.
هندسه ۲: این مبحث در مجموع ۴ تست از ۴۰ تستِ کنکور را پوشش داده است.
هندسه ۱: این مبحث در مجموع ۴ تست از ۴۰ تستِ کنکور را پوشش داده است.
گسسته: این مبحث در مجموع ۴ تست از ۴۰ تستِ کنکور را پوشش داده است.
آمار و احتمال: این مبحث در مجموع ۴ تست از ۴۰ تستِ کنکور را پوشش داده است.

برای دیدن پاسخنامهٔ ویدئویی آزمون QRcode بالا را اسکن کنید!
یا بر روی لینک زیر کلیک کنید!
پاسخنامهٔ ویدئویی

۱- a_n جملهٔ عمومی یک دنبالهٔ حسابی و $b_n = ۲\times ۳^{n-۱}$ است. اگر دو جملهٔ ابتدایی دنباله‌ها باهم برابر باشند، مجموع ده جملهٔ ابتدایی دنبالهٔ حسابی کدام است؟

۱) ۲۲۰ ۲) ۲۴۰ ۳) ۲۰۰ ۴) ۱۶۰

پاسخ: گزینهٔ ۳ (آسان ـ محاسباتی ـ سریع ـ حسابان ۱ صفحهٔ ۳ ـ ۱۱۰۱)

ابتدا جملهٔ اول و دوم دنبالهٔ b_n را به‌دست می‌آوریم:

$$b_n = ۲\times ۳^{n-۱} \Rightarrow b_۱ = ۲, b_۲ = ۶$$

پس جملات ابتدایی دنبالهٔ حسابی $a_۱ = ۲$ و $a_۲ = ۶$ است. در دنبالهٔ حسابی **اختلاف هر دو جملهٔ متوالی** برابر با **قدرنسبت** است:

$$d = ۶ - ۲ = ۴$$

پس جملهٔ عمومی آن به‌صورت $a_n = ۴n - ۲$ است. بنابراین طبق فرمول مجموع جملات دنبالهٔ حسابی داریم:

$$S_n = \frac{n}{۲}((۲a_۱ + (n-۱)d)$$

$$S_{۱۰} = ۵(۲\times ۲ + ۹\times ۴) = ۲۰۰$$

دنبالهٔ حسابی

دنبالهٔ حسابی دنباله‌ای است که در آن، هر جمله (به جز جملهٔ اول) از اضافه شدن یک **عدد ثابت** به نام **قدرنسبت** (d) به جملهٔ قبل از خود به‌دست می‌آید. جملهٔ عمومی دنباله به‌صورت زیر می‌باشد:

$$\underset{\text{جملهٔ عمومی}}{a_n} = \underset{\text{جملهٔ اول}}{a_۱} + \underset{\text{شمارهٔ جمله}}{(n-۱)}\underset{\text{قدر نسبت}}{d}$$

اگر هر جمله را از جملهٔ قبلی کم کنیم قدرنسبت به‌دست می‌آید:

$$d = a_{m+۱} - a_m$$

دنبالهٔ هندسی

به دنباله‌ای که در آن هر جمله (به جز جملهٔ اول) از ضرب عددی ثابت و غیرصفر در جملهٔ قبلی‌اش به‌دست می‌آید، **دنبالهٔ هندسی** می‌گوییم.
به این مقدار ثابت، **قدرنسبت** دنباله می‌گوییم و آن را با r (یا q) نمایش می‌دهیم. **جملهٔ اول دنبالهٔ هندسی هیچ‌گاه صفر نیست**.

$$r=\frac{a_۲}{a_۱}=\frac{a_۳}{a_۲}=\frac{a_۴}{a_۳}=\dots$$

جملهٔ عمومی دنبالهٔ هندسی به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\underbrace{a_n}_{\text{جملهٔ عمومی}}=\underbrace{a_۱}_{\text{جملهٔ اول}}\times \overset{\text{قدرنسبت}}{r}{}^{\overset{\text{شمارهٔ جمله}}{n-۱}}$$

مجموع جملات دنبالهٔ حسابی

اگر $a_۱$ جملهٔ اول و d قدرنسبت دنبالهٔ حسابی باشد، مجموع n جملهٔ اول دنباله برابر است با:

$$S_n=a_۱+a_۲+\dots+a_n=\frac{n}{۲}\left(۲a_۱+(n-۱)d\right)=\frac{n}{۲}(a_۱+a_n)$$

مجموع جملات دنبالهٔ هندسی

اگر $a_۱$ جملهٔ اول و $r\neq ۱$ قدرنسبت دنبالهٔ هندسی باشد، مجموع n جملهٔ اول دنباله برابر است با:

$$S_n=a_۱+a_۲+\dots+a_n=\frac{a_۱(r^n-۱)}{r-۱}$$

ماز

۲- اگر $\frac{a}{\sqrt{۲}}=\sqrt{۳+\sqrt{۵}}+\frac{\sqrt{۲}}{۲}$ باشد مقدار $a-۲$ کدام است؟

۱) $\frac{\sqrt{۵}}{۲}$ ۲) $\sqrt{۵}$ ۳) $\frac{۲\sqrt{۱۰}}{۵}$ ۴) $\frac{۲\sqrt{۵}}{۳}$

پاسخ: گزینهٔ ۲ (آسان ـ خط‌به‌خط ـ سریع ـ ریاضی ۱ صفحهٔ ۶۲ ـ ۱۰۰۳)

ابتدا دو طرف را در $\sqrt{۲}$ ضرب می‌کنیم:

$$a=\sqrt{۲}\left(\sqrt{۳+\sqrt{۵}}+\frac{\sqrt{۲}}{۲}\right)=\sqrt{۶+۲\sqrt{۵}}+۱=\sqrt{(\sqrt{۵}+۱)^۲}+۱=\sqrt{۵}+۱+۱=\sqrt{۵}+۲$$

$$\Rightarrow a-۲=\sqrt{۵}$$

رادیکال مرکب

در مورد رادیکال مرکب دو قانون زیر را بلد باشید:

۱) رادیکال مرکب به فرم $\sqrt{A \pm ۲\sqrt{B}}$

برای ساده کردن عبارت‌های رادیکالی به این فرم باید عبارت زیر رادیکال را به کمک اتحاد مربع دوجمله‌ای به صورت مربع کامل نوشته و آن را از زیر رادیکال خارج کنیم:

$$\sqrt{A \pm ۲\sqrt{B}} = \left|\sqrt{X} \pm \sqrt{Y}\right| \qquad (X+Y=A, XY=B)$$

یه نمونهٔ باحال ببین!

$$\sqrt{۷+۲\sqrt{۶}}$$

$$x+y=۷\ ,\ x\times y=۶ \Rightarrow x=۶\ ,\ y=۱ \Rightarrow \sqrt{۷+۲\sqrt{۶}} = \left|\sqrt{۶}+\sqrt{۱}\right| = \sqrt{۶}+۱$$

در واقع زیر رادیکال را به صورت $۷+۲\sqrt{۶} = ۶+۲\sqrt{۶}+۱ = (\sqrt{۶}+۱)^۲$ نوشتیم!

$$\sqrt{۸-۲\sqrt{۱۵}} \xrightarrow[۱۵=۵\times۳]{۸=۵+۳} \sqrt{۸-۲\sqrt{۱۵}} = \sqrt{(\sqrt{۵})^۲+(\sqrt{۳})^۲-۲(\sqrt{۵}\times\sqrt{۳})} = \sqrt{(\sqrt{۵}-\sqrt{۳})^۲} = \left|\sqrt{۵}-\sqrt{۳}\right| = \sqrt{۵}-\sqrt{۳}$$

۲) رادیکال مرکب به فرم $\sqrt{a \pm \sqrt{b}}$

$$\sqrt{a \pm \sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a+c}{۲}} \pm \sqrt{\frac{a-c}{۲}} \quad , \quad c=\sqrt{a^۲-b}$$

ساده کردن فرجه و توان

برای ساده کردن توان و فرجه به شرط آن‌که m، n و k طبیعی باشند، داریم:

$$\begin{cases} \sqrt[nk]{a^{mk}} = \sqrt[n]{a^m} & (\text{فرد } k) \\ \sqrt[nk]{a^{mk}} = \sqrt[n]{|a|^m} & (\text{زوج } k) \end{cases}$$

ماز

۳- به‌ازای چند مقدار صحیح k، نمودار تابع $y=\frac{x+k}{x^۲+x+۳}$ همواره بین دو خط $y=۱$ و $y=-۱$ است؟

۱) ۵ ۲) ۴ ۳) ۳ ۴) ۲

پاسخ: گزینهٔ ۲ (متوسط ـ خط‌به‌خط ـ استاندارد ـ ریاضی ۱ صفحهٔ ۹۳ ـ ۱۰۰۴)

برای این‌که نمودار بین دو خط مذکور باشد، باید نامعادلهٔ $-۱<y<۱$ برای هر x برقرار باشد. پس:

$$-۱<\frac{x+k}{x^۲+x+۳}<۱$$

$x^۲+x+۳$ **همواره مثبت** است، پس هر ۳ طرف نامساوی را می‌توان **بدون تغییر جهت نامساوی** در آن ضرب کرد:

$$\Rightarrow \underbrace{-x^۲-x-۳<x+k}_{(۲)}\overbrace{<x^۲+x+۳}^{(۱)}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} (1): x^2+3-k>0 \Rightarrow \Delta<0 \xrightarrow{\Delta=0-4(3-k)} k-3<0 \\ (2): x^2+2x+k+3>0 \Rightarrow \Delta<0 \xrightarrow{\Delta=4-4(k+3)} 4-4k-12<0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k<3 \\ k>-2 \end{cases} \Rightarrow -2<k<3$$

پس k برابر ۱− یا ۰ یا ۱ یا ۲ است. یعنی ۴ مقدار k با ویژگی مطلوب وجود دارد.

یادآوری!

شرط آن‌که عبارت درجه دوم $P(x)=ax^2+bx+c$ همواره **مثبت** باشد آن است که $\Delta<0$ و $a>0$ باشد و شرط آن‌که این عبارت همواره **منفی** باشد آن است که $\Delta<0$ و $a<0$ باشد، زیرا:

$\Delta>0$: دو ریشهٔ x_1 و x_2 ⇒

x		x_1		x_2	
ax^2+bx+c	موافق علامت a	0	مخالف علامت a	0	موافق علامت a

$\Delta=0$: یک ریشهٔ مضاعف x_0 ⇒

x		x_0	
ax^2+bx+c	موافق علامت a	0	موافق علامت a

$\Delta<0$: ریشه ندارد ⇒

x	
ax^2+bx+c	موافق علامت a

۴- اگر هم‌ارزی $q\vee(p\Rightarrow\sim q)\equiv p\Rightarrow(q\wedge\sim p)$ برقرار باشد، آن‌گاه گزارهٔ $\sim p\Rightarrow(\sim q\vee p)$ با کدام‌یک از گزاره‌های زیر هم‌ارز خواهد بود؟

۱) q ۲) $\sim q$ ۳) p ۴) $\sim p$

پاسخ: گزینهٔ ۲ (متوسط ـ محاسباتی ـ استاندارد ـ آمار و احتمال صفحهٔ ۹ ـ ۱۱۰۱)

ابتدا هم‌ارزی داده‌شده را ساده می‌کنیم تا به عبارتی معادل و درست برسیم:

$q\vee(p\Rightarrow\sim q)\equiv p\Rightarrow(q\wedge\sim p)$

$q\vee(\sim p\vee\sim q)\equiv\sim p\vee(q\wedge\sim p)$ (تبدیل گزارهٔ شرطی به فصلی)

$\underbrace{(q\vee\sim q)}_{T}\vee\sim p\equiv\sim p$ (قانون جذب در سمت راست)

$T\equiv\sim p$

$F\equiv p$ (نقیض طرفین)

پس p گزاره‌ای همواره نادرست و $\sim p$ گزاره‌ای همواره درست است. پس:

$\sim p\Rightarrow(\sim q\vee p)$
$\equiv T\Rightarrow(\sim q\vee F)$
$\equiv T\Rightarrow\sim q\equiv F\vee\sim q\equiv\sim q$

قوانین مربوط به ترکیب گزاره‌ها

توزیع‌پذیری: $\begin{cases} p\vee(q\wedge r)\equiv(p\vee q)\wedge(p\vee r) \\ p\wedge(q\vee r)\equiv(p\wedge q)\vee(p\wedge r) \end{cases}$

جابه‌جایی: $\begin{cases} p\vee q\equiv q\vee p \\ p\wedge q\equiv q\wedge p \end{cases}$

$\begin{cases} p\vee p\equiv p \\ p\wedge p\equiv p \end{cases}$

شرکت‌پذیری
$$\begin{cases} p \vee (q \vee r) \equiv (p \vee q) \vee r \\ p \wedge (q \wedge r) \equiv (p \wedge q) \wedge r \end{cases}$$

قانون جذب
$$\begin{cases} p \vee (p \wedge q) \equiv p \\ p \wedge (p \vee q) \equiv p \end{cases}$$

قوانین دمورگان
$$\begin{cases} \sim (p \vee q) \equiv \sim p \wedge \sim q \\ \sim (p \wedge q) \equiv \sim p \vee \sim q \end{cases}$$

تبدیل ترکیب شرطی به ترکیب فصلی $p \Rightarrow q \equiv \sim p \vee q$

گزارهٔ شرطی هم‌ارز با عکس و نقیض آن است. $p \Rightarrow q \equiv \sim q \Rightarrow \sim p$

$$\begin{cases} F \vee p \equiv p \\ F \wedge p \equiv F \end{cases} \qquad \begin{cases} T \vee p \equiv T \\ T \wedge p \equiv p \end{cases}$$

$$\begin{cases} p \Leftrightarrow q \equiv (p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p) \\ p \Leftrightarrow q \equiv \sim p \Leftrightarrow \sim q \\ p \Leftrightarrow q \equiv (p \vee q) \Rightarrow (p \wedge q) \\ \sim (p \Leftrightarrow q) \equiv (\sim p \Leftrightarrow q) \equiv (p \Leftrightarrow \sim q) \end{cases}$$

ماز

۵- اگر اختلاف دو ریشهٔ حقیقی و متمایز معادلهٔ $ax^2 - 2ax - 5 = 0$ برابر ۳ باشد، مجموع معکوس‌های ریشه‌ها کدام است؟

۱) $1/8$ ۲) $1/4$ ۳) $-1/2$ ۴) $-1/6$

پاسخ: گزینهٔ ۴ (آسان ـ خط‌به‌خط ـ سریع ـ حسابان ۱ صفحهٔ ۸ ـ ۱۱۰۱)

می‌دانیم اختلاف ریشه‌های معادلهٔ درجه دوم برابر است با:

$$|\alpha - \beta| = \frac{\sqrt{\Delta}}{|a|} = \frac{\sqrt{4a^2 + 20a}}{|a|} = 3 \Rightarrow 4a^2 + 20a = 9a^2 \Rightarrow 5a^2 = 20a \xrightarrow{a \neq 0} a = 4$$

حال برای محاسبهٔ مجموع معکوس ریشه‌ها داریم:

$$\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = \frac{\alpha + \beta}{\alpha\beta} = \frac{\frac{2a}{a}}{\frac{-5}{a}} = -\frac{2a}{5} = \frac{-8}{5} = -1/6$$

روابط بین جواب‌های معادلهٔ درجهٔ دوم

اگر α و β جواب‌های معادلهٔ $ax^2 + bx + c = 0$ باشند $(\Delta > 0)$، آن‌گاه:

۱) $S = \alpha + \beta = -\frac{b}{a}$ ۲) $P = \alpha \times \beta = \frac{c}{a}$ ۳) $|\alpha - \beta| = \frac{\sqrt{\Delta}}{|a|}$

۴) $\alpha^2 + \beta^2 = S^2 - 2P$ ۵) $\alpha^3 + \beta^3 = S^3 - 3PS$ ۶) $\sqrt{\alpha} \pm \sqrt{\beta} = \sqrt{S \pm 2\sqrt{P}} \quad (\alpha, \beta > 0)$

راهنمای زرنگ‌بازی!

سعی نکن روابط بالا رو حفظ کنی! همیشه یادت باشه که با **اتحادها** و یکم **عملیات جبری** می‌تونی هر عبارتی رو که **برحسب ریشه‌ها** دادن، **بر حسب S و P** بنویسی. مثلاً:

به کمک اتحاد مربع دوجمله‌ای داریم:

$$\alpha^{۲}+\beta^{۲}=(\alpha+\beta)^{۲}-۲\alpha\beta=S^{۲}-۲P$$

به کمک اتحاد مکعب دوجمله‌ای داریم:

$$\alpha^{۳}+\beta^{۳}=(\alpha+\beta)^{۳}-۳\alpha\beta(\alpha+\beta)=S^{۳}-۳PS$$

ماز

۶- هرگاه $x=۴$ جواب معادلهٔ $\sqrt{x}-\sqrt{x-a}=۱$ باشد، جواب معادلهٔ $\sqrt{x+۳a}-\sqrt{x}=۱$ چه عددی است؟

۱) ۹ ۲) ۲۵ ۳) ۱۶ ۴) ۴

پاسخ: گزینهٔ ۳ (متوسط ـ محاسباتی ـ استاندارد ـ حسابان ۱ صفحهٔ ۲۱ ـ ۱۱۰۱)

$x=۴$ جواب معادله است پس در آن صدق می‌کند، به عبارتی:

$$\sqrt{۴}-\sqrt{۴-a}=۱\Rightarrow\sqrt{۴-a}=۱\Rightarrow a=۳$$

به این ترتیب:

$$\sqrt{x+۹}-\sqrt{x}=۱\Rightarrow\sqrt{x+۹}=۱+\sqrt{x}$$

طرفین را به **توان ۲** می‌رسانیم:

$$x+۹=x+۱+۲\sqrt{x}\Rightarrow ۲\sqrt{x}=۸\Rightarrow\sqrt{x}=۴\Rightarrow x=۱۶$$

حل معادلات رادیکالی (گنگ)

برای حل معادلهٔ رادیکالی، **رادیکال را در یک طرف تساوی** نگه می‌داریم و **بقیهٔ عبارت‌ها را در طرف دیگر** نگه می‌داریم. سپس طرفین تساوی را **به توان ۲** می‌رسانیم.

با حل معادلهٔ حاصل در نهایت چک می‌کنیم که **جواب‌ها در معادلهٔ اولیه صدق کنند**.

حل معادلات گویا

برای حل معادلات گویا، دو طرف تساوی را در ک.م.م مخرج‌ها یعنی **مخرج‌مشترک** کسرها ضرب می‌کنیم تا مخرج از بین برود. با حل معادلهٔ حاصل، جواب‌ها را می‌یابیم.

اما توجه کنید که در نهایت جواب‌هایی قابل قبول هستند که **هیچ‌یک از مخرج‌ها را صفر نکنند**.

ماز

۷- تابع خطی f محورهای مختصات را در نقاط $A(a,۰)$ و $B(۰,-۲a)$ قطع کرده است. طول نقطهٔ تلاقی آن با نیمساز ناحیهٔ دوم کدام است؟

۱) $\frac{۲a}{۳}$ ۲) $\frac{a}{۳}$ ۳) $\frac{۳a}{۲}$ ۴) $\frac{a}{۲}$

پاسخ: گزینهٔ ۱ (آسان ـ ترکیبی ـ سریع ـ ریاضی ۱ صفحهٔ ۱۰۳ و حسابان ۱ صفحهٔ ۳۱ ـ ۱۰۰۵ و ۱۱۰۱)

شیب خط و عرض از مبدأ آن به‌صورت زیر به‌دست می‌آید:

$$\text{شیب خط}=\frac{y_A-y_B}{x_A-x_B}=\frac{۰+۲a}{a-۰}=۲ \quad \text{و} \quad \text{عرض از مبدأ}=y_B=-۲a$$

پس ضابطهٔ تابع خطی f به‌صورت $f(x)=۲x-۲a$ است.

از طرفی قرار است نیمساز ناحیهٔ دوم یعنی $y=-x$ را قطع کند، پس:

$$\begin{cases} f(x)=۲x-۲a \\ y=-x \end{cases} \Rightarrow -x=۲x-۲a \Rightarrow x=\frac{۲a}{۳}$$

معادلهٔ خط

اگر $A(x_۱,y_۱)$ و $B(x_۲,y_۲)$ دو نقطه در دستگاه مختصات باشند:

$$\text{شیب پاره‌خط } AB: m=\frac{y_۲-y_۱}{x_۲-x_۱}$$

$$\text{معادله پاره‌خط } AB: y-y_۱=m(x-x_۱)$$

عرض از مبدأ

در معادلهٔ خط $y=ax+b$، b **عرض از مبدأ** و **محل تلاقی خط با محور yها** یعنی $(۰,b)$ است.

۸- تابع $f(x)=۳-\sqrt{۴-x}$ را نسبت به مبدأ مختصات بازتاب کرده و سپس a واحد به سمت چپ انتقال می‌دهیم، تابع به‌دست‌آمده را g می‌نامیم. هرگاه $gof(۳)=۱$ باشد، مقدار a کدام است؟

۱) ۶ ۲) ۱۲ ۳) ۸ ۴) ۱۰

پاسخ: گزینهٔ ۴ (متوسط ـ محاسباتی ـ استاندارد ـ حسابان ۲ صفحهٔ ۱۲ ـ ۱۲۰۱)

وقتی نموداری نسبت به **مبدأ مختصات** بازتاب می‌شود، همزمان x به $-x$ و y به $-y$ تبدیل می‌گردد. پس:

$$y=-(۳-\sqrt{۴-(-x)}) \Rightarrow y=-۳+\sqrt{۴+x}$$

اما باید نمودار را a واحد به **چپ انتقال** دهیم، پس:

$$\xrightarrow{x\to x+a} g(x)=-۳+\sqrt{x+a+۴}$$

با توجه به آن‌که:

$$gof(۳)=۱ \Rightarrow g(f(۳))=۱$$

$$\xrightarrow{f(۳)=۲} g(۲)=۱ \Rightarrow -۳+\sqrt{۶+a}=۱$$

$$\Rightarrow \sqrt{۶+a}=۴ \Rightarrow ۶+a=۱۶ \Rightarrow a=۱۰$$

انتقال و قرینهٔ توابع

نمودار جدید $(a>۰)$	توضیحات و نحوهٔ رسم
$f(x+a)$	نمودار تابع f را به اندازهٔ a واحد در راستای محور xها به سمت چپ منتقل می‌کنیم.
$f(x-a)$	نمودار تابع f را به اندازهٔ a واحد در راستای محور xها به سمت راست منتقل می‌کنیم.
$f(x)+a$	نمودار تابع f را به اندازهٔ a واحد در راستای محور yها به سمت بالا منتقل می‌کنیم.
$f(x)-a$	نمودار تابع f را به اندازهٔ a واحد در راستای محور yها به سمت پایین منتقل می‌کنیم.
$f(-x)$	نمودار تابع f را نسبت به محور yها قرینه می‌کنیم.
$-f(x)$	نمودار تابع f را نسبت به محور xها قرینه می‌کنیم.

۹- اگر $f(x)=\frac{a}{x-۲}$ و $f(۳)=۲f^{-۱}(۱)-۱$ باشد، مقدار a کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲- ۳) ۳- ۴) ۴

پاسخ: گزینهٔ ۳ (متوسط ـ خط‌به‌خط ـ استاندارد ـ حسابان ۱ صفحهٔ ۶۱ ـ ۱۱۰۲)

ابتدا $f^{-۱}(۱)$ را به‌دست می‌آوریم.

$$۱=\frac{a}{x-۲}\Rightarrow x-۲=a\Rightarrow x=۲+a\Rightarrow f^{-۱}(۱)=۲+a$$

$$f(۳)=۲f^{-۱}(۱)-۱\Rightarrow \frac{a}{۱}=۲(۲+a)-۱\Rightarrow a=-۳$$

وارون تابع

در تابع یک‌به‌یک f، اگر جای x و yها را عوض کنیم وارون تابع f یعنی $f^{-۱}$ به‌دست می‌آید. نمودار $f^{-۱}$ قرینهٔ نمودار f نسبت به خط $y=x$ است.

یه نکتهٔ طلایی!

اگر $f^{-۱}(a)=b$ باشد، آن‌گاه: $f(b)=a$

ماز

۱۰- اگر $\log_۲ a=b$ و $\log_۲(a+۲)=b+۲$ باشد، مقدار $۲^{۱-b}$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

پاسخ: گزینهٔ ۳ (متوسط ـ محاسباتی ـ استاندارد ـ حسابان ۱ صفحهٔ ۸۶ ـ ۱۱۰۳)

دو رابطه را **از هم کم** می‌کنیم:

$$\log_۲(a+۲)-\log_۲ a=b+۲-b=۲$$

$$\Rightarrow \log_۲(a+۲)-\log_۲ a=۲$$

$$\Rightarrow \log_۲\frac{a+۲}{a}=۲\Rightarrow \frac{a+۲}{a}=۴\Rightarrow ۴a=a+۲\Rightarrow a=\frac{۲}{۳}$$

حال با داشتن a مقدار $۲^{۱-b}$ را می‌توان ساخت:

$$\log_۲ a=b\Rightarrow ۲^b=a=\frac{۲}{۳}$$

$$\xrightarrow{\text{معکوس}} ۲^{-b}=\frac{۳}{۲}\xrightarrow{\times ۲} ۲\times ۲^{-b}=۳$$

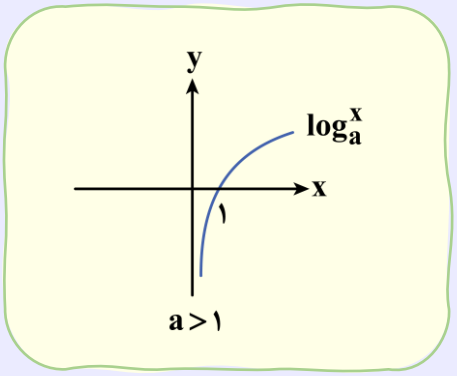
$$\Rightarrow ۲^{۱-b}=۳$$

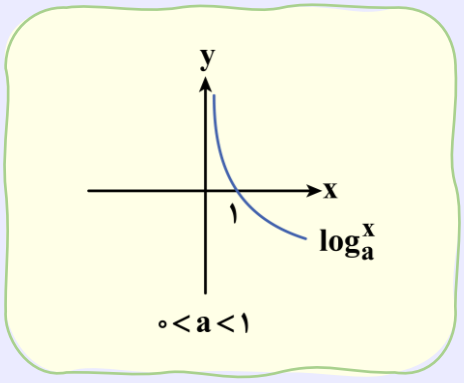
تابع لگاریتمی و نمودار آن

با شرط $a>۰$ و $a\neq ۱$، $y=\log_a x$ تابع لگاریتمی با دامنهٔ $x>۰$ است، به‌طوری‌که:

$$\log_a x=b\Leftrightarrow x=a^b$$

نمودار تابع لگاریتمی به یکی از دو حالت زیر است:





ارتباط لگاریتم و نمایی

تابع $y=\log_a^x$ وارون تابع نمایی $y=a^x$ است.

خواص لگاریتم

با شرط $a>۰$ و $a\neq ۱$ داریم:

۱) $\log_a^b = c \Leftrightarrow b=a^c$

۲) $\log_a^a = ۱,\ \log_a^۱ = ۰$

۳) $\log_a^{(bc)} = \log_a^b + \log_a^c$

۴) $\log_a^{(\frac{b}{c})} = \log_a^b - \log_a^c$

۵) $\log_a^{b^n} = n\log_a^b$

۶) $\log_{a^n}^b = \frac{۱}{n}\log_a^b$

۷) $\log_a^b = \frac{۱}{\log_b^a} \qquad (b\neq ۱)$

۱۱- اگر α حاده و $۲-۶\cos^۲\alpha = \sin ۲\alpha$ باشد، مقدار $\tan\alpha$ کدام است؟

۱) ۳ ۲) ۲ ۳) $\frac{۱}{۲}$ ۴) $\frac{۱}{۳}$

پاسخ: گزینهٔ ۲ (متوسط ـ محاسباتی ـ استاندارد ـ حسابان ۱ صفحهٔ ۱۱۲ ـ ۱۱۰۴)

دو طرف تساوی را بر $\cos^۲\alpha$ **تقسیم** می‌کنیم.

$$۲-۶\cos^۲\alpha = ۲\sin\alpha\cos\alpha$$

$$\Rightarrow \frac{۲}{\cos^۲\alpha} - ۶ = \frac{۲\sin\alpha\cos\alpha}{\cos^۲\alpha}$$

$$\Rightarrow ۲(۱+\tan^۲\alpha) - ۶ = ۲\tan\alpha$$

$$\Rightarrow \tan^۲\alpha - \tan\alpha - ۲ = ۰ \xrightarrow{a+c=b} \begin{cases}\tan\alpha = -۱\\ \tan\alpha = ۲\end{cases}$$

اما از آن‌جا که α **حاده** است، تانژانت آن **مثبت** است.

$$\Rightarrow \tan\alpha = ۲$$

روابط مثلثاتی کمان ۲α

$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha.\cos\alpha$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha \qquad \cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1 \qquad \cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha$$

$$\tan 2\alpha = \frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha} \qquad \sin 2\alpha = \frac{2\tan\alpha}{1+\tan^2\alpha} \qquad \cos 2\alpha = \frac{1-\tan^2\alpha}{1+\tan^2\alpha}$$

اتحادهای مثلثاتی

۱) $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ ۲) $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$ ۳) $\cot x = \frac{\cos x}{\sin x}$

۴) $\tan x \times \cot x = 1$ ۵) $1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$ ۶) $1 + \cot^2 x = \frac{1}{\sin^2 x}$

۱۲- اگر انتهای کمان α در ناحیهٔ سوم دایرهٔ مثلثاتی باشد، ساده شدهٔ عبارت $\sqrt{1+\tan^2\alpha} - \sqrt{\frac{1+\sin\alpha}{1-\sin\alpha}}$ کدام است؟

۱) $-\cos 2\alpha$ ۲) $\sin\alpha$ ۳) $-\tan\alpha$ ۴) $\tan\alpha$

پاسخ: گزینهٔ ۴ (متوسط ـ محاسباتی ـ استاندارد ـ حسابان ۱ صفحهٔ ۱۱۲ ـ ۱۱۰۴)

روش اول

صورت و مخرج را در **مزدوج مخرج** ضرب کرده و از **اتحاد** $1+\tan^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha}$ استفاده می‌کنیم:

$$\sqrt{1+\tan^2\alpha} - \sqrt{\frac{1+\sin\alpha}{1-\sin\alpha}} = \sqrt{\frac{1}{\cos^2\alpha}} - \sqrt{\frac{(1+\sin\alpha)(1+\sin\alpha)}{(1-\sin\alpha)(1+\sin\alpha)}} = \left|\frac{1}{\cos\alpha}\right| - \sqrt{\frac{(1+\sin\alpha)^2}{\cos^2\alpha}} = \left|\frac{1}{\cos\alpha}\right| - \left|\frac{1+\sin\alpha}{\cos\alpha}\right|$$

برای **برداشتن قدرمطلق** از آن‌جا که α در **ناحیهٔ سوم** مثلثاتی است، داریم:

$$\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2} \Rightarrow \begin{cases} -1 < \cos\alpha < 0 \\ -1 < \sin\alpha < 0 \Rightarrow 0 < 1+\sin\alpha < 1 \end{cases}$$

پس:

$$= -\frac{1}{\cos\alpha} + \frac{1+\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \tan\alpha$$

روش دوم

از **اتحادهای** $1 \pm \sin\alpha = (\sin\frac{\alpha}{2} \pm \cos\frac{\alpha}{2})^2$ و $1+\tan^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha}$ استفاده می‌کنیم. پس:

$$\sqrt{1+\tan^2\alpha} - \sqrt{\frac{1+\sin\alpha}{1-\sin\alpha}} = \left|\frac{1}{\cos\alpha}\right| - \sqrt{\left(\frac{\sin\frac{\alpha}{2}+\cos\frac{\alpha}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}-\cos\frac{\alpha}{2}}\right)^2} = -\frac{1}{\cos\alpha} - \left|\frac{\sin\frac{\alpha}{2}+\cos\frac{\alpha}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}-\cos\frac{\alpha}{2}}\right|$$

حال برای **برداشتن قدرمطلق** عبارت دوم باید مشخص کنیم که **علامت صورت و مخرج** به‌ازای $\frac{\alpha}{۲}$ چگونه است؟

$$\pi<\alpha<\frac{۳\pi}{۲}\Rightarrow\frac{\pi}{۲}<\frac{\alpha}{۲}<\frac{۳\pi}{۴}\Rightarrow\begin{cases}\sin\frac{\alpha}{۲}>۰\\ \cos\frac{\alpha}{۲}<۰\\ \left|\cos\frac{\alpha}{۲}\right|<\left|\sin\frac{\alpha}{۲}\right|\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\sin\frac{\alpha}{۲}+\cos\frac{\alpha}{۲}>۰\\ \sin\frac{\alpha}{۲}-\cos\frac{\alpha}{۲}>۰\end{cases}$$

$$\Rightarrow \text{حاصل عبارت}=-\frac{۱}{\cos\alpha}-\left|\frac{\sin\frac{\alpha}{۲}+\cos\frac{\alpha}{۲}}{\sin\frac{\alpha}{۲}-\cos\frac{\alpha}{۲}}\right|=-\frac{۱}{\cos^۲\frac{\alpha}{۲}-\sin^۲\frac{\alpha}{۲}}-\frac{\sin\frac{\alpha}{۲}+\cos\frac{\alpha}{۲}}{\sin\frac{\alpha}{۲}-\cos\frac{\alpha}{۲}}$$

$$=-\frac{۱}{(\cos\frac{\alpha}{۲}-\sin\frac{\alpha}{۲})(\cos\frac{\alpha}{۲}+\sin\frac{\alpha}{۲})}-\frac{\sin\frac{\alpha}{۲}+\cos\frac{\alpha}{۲}}{\sin\frac{\alpha}{۲}-\cos\frac{\alpha}{۲}}=\frac{۱}{(\sin\frac{\alpha}{۲}-\cos\frac{\alpha}{۲})(\cos\frac{\alpha}{۲}+\sin\frac{\alpha}{۲})}-\frac{\sin\frac{\alpha}{۲}+\cos\frac{\alpha}{۲}}{\sin\frac{\alpha}{۲}-\cos\frac{\alpha}{۲}}$$

$$=\frac{۱-(\sin\frac{\alpha}{۲}+\cos\frac{\alpha}{۲})^۲}{(\sin\frac{\alpha}{۲}-\cos\frac{\alpha}{۲})(\cos\frac{\alpha}{۲}+\sin\frac{\alpha}{۲})}=\frac{۱-۱-\sin\alpha}{-\cos\alpha}=\tan\alpha$$

یه نکتهٔ طلایی!

$$۱\pm\sin۲\alpha=(\sin\alpha\pm\cos\alpha)^۲$$

۱۳- اگر دورهٔ تناوب تابع $y=۲-۳\sin(\frac{\pi}{a}x)$ برابر ۴ باشد، دورهٔ تناوب $y=۳+۲\cos(a\pi x)$ چه عددی است؟

۱) $۲a$ ۲) $\frac{a}{۲}$ ۳) $۴a$ ۴) $\frac{a}{۴}$

پاسخ: گزینهٔ ۲ (متوسط ـ محاسباتی ـ سریع ـ حسابان ۲ صفحهٔ ۲۷ ـ ۱۲۰۲)

در ابتدا داریم:

$$y=۲-۳\sin(\frac{\pi}{a}x)\Rightarrow T_۱=\frac{۲\pi}{\frac{\pi}{a}}=۲a=۴\Rightarrow a=۲$$

به این ترتیب:

$$y=۳+۲\cos(۲\pi x)\Rightarrow T_۲=\frac{۲\pi}{۲\pi}=۱$$

با توجه به مقدار a عدد ۱ برابر با مقدار $\frac{a}{۲}$ است.

دورهٔ تناوب

دورهٔ تناوب توابع زیر را به خاطر بسپارید. $(n\in\mathbb{N})$

$$\begin{cases}y=\sin^{۲n-۱}(bx)\\ y=\cos^{۲n-۱}(bx)\end{cases}\Rightarrow T=\frac{۲\pi}{|b|}$$

$$\begin{cases}y=\sin^{۲n}(bx)\\ y=\cos^{۲n}(bx)\end{cases}\Rightarrow T=\frac{\pi}{|b|}$$

$$\begin{cases}y=|\sin(bx)|\\ y=|\cos(bx)|\end{cases}\Rightarrow T=\frac{\pi}{|b|}$$

کدوم ضریب‌ها روی دورهٔ تناوب تأثیر می‌ذارن؟ فقط ضریب x

اگر T دورهٔ تناوب $f(x)$ باشد، آن‌گاه دورهٔ تناوب $y=kf(x+a)+c$ نیز برابر T است. یعنی مقادیر c، a و k تاثیری بر دورهٔ تناوب ندارند و تنها ضریب x اهمیت دارد. $(k\neq 0)$

ماز

۱۴- تعداد جواب‌های $2\cos^2 x+\sin 2x=\sin x+\cos x$ در بازهٔ $(0,2\pi)$ چه عددی است؟

۱) ۲ ۲) ۴ ۳) ۵ ۴) ۶

پاسخ: گزینهٔ ۲ (متوسط ـ محاسباتی ـ استاندارد ـ حسابان ۲ صفحهٔ ۴۰ ـ ۱۲۰۲)

ابتدا از $2\cos x$ در سمت چپ تساوی **فاکتور** می‌گیریم:

$$2\cos^2 x+2\sin x\cos x=\sin x+\cos x$$

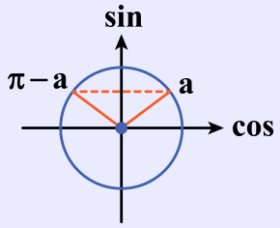
$$2\cos x(\sin x+\cos x)=\sin x+\cos x\Rightarrow\begin{cases}\sin x+\cos x=0\Rightarrow\tan x=-1\Rightarrow x=\frac{3\pi}{4},\frac{7\pi}{4}\\ 2\cos x=1\Rightarrow\cos x=\frac{1}{2}\Rightarrow x=\frac{\pi}{3},\frac{5\pi}{3}\end{cases}$$

پس در این بازهٔ ۴ جواب دارد.

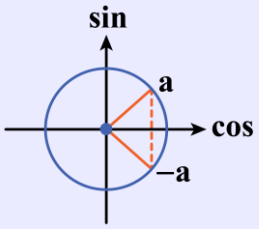
معادلهٔ مثلثاتی

برای حل معادله‌های مثلثاتی، آن‌ها را به کمک اتحادها و روابط مثلثاتی به یکی از سه شکل زیر تبدیل می‌کنیم:

۱) $\sin x=\sin a\Rightarrow x=\begin{cases}2k\pi+a\\ 2k\pi+\pi-a\end{cases}$



۲) $\cos x=\cos a\Rightarrow x=\begin{cases}2k\pi+a\\ 2k\pi-a\end{cases}$



۳) $\tan x=\tan a\Rightarrow x=k\pi+a$

چند نکته دربارهٔ معادله‌های مثلثاتی

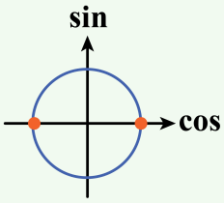
۱) برای به‌دست آوردن جواب‌های معادلهٔ مثلثاتی روی یک بازه باید به جواب‌های بالا **مقدارهای مناسب** $(k\in\mathbb{Z})$ را بدهیم تا جواب‌های متعلق به آن بازه به‌دست آید.

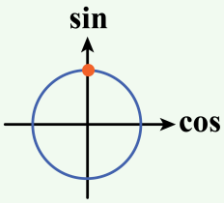
۲) در جریان ساده کردن معادله، اگر به تساوی $AB=A$ رسیدیم و خواستیم A را از طرفین معادله **ساده** کنیم خود $A=0$ یکی از جواب‌های معادله است.

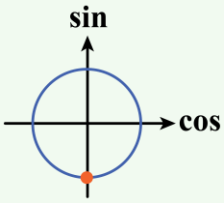
۳) در جریان ساده کردن معادله، اگر مجبور شدیم طرفین معادله را به توان ۲ برسانیم حتماً جواب‌های معادله را در معادلهٔ اصلی **امتحان** می‌کنیم چون توان رساندن ممکن است جواب‌های اضافی ایجاد کند.

۴) حالت‌های خاص برای معادلات مثلثاتی عبارتند از:

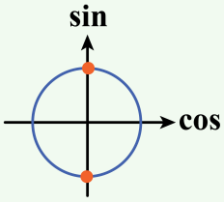
۱)
$$\begin{cases} \sin x = ۰ \Rightarrow x = k\pi \\ \sin x = ۱ \Rightarrow x = ۲k\pi + \frac{\pi}{۲} \\ \sin x = -۱ \Rightarrow x = ۲k\pi - \frac{\pi}{۲} \end{cases}$$

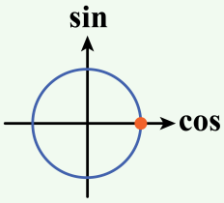


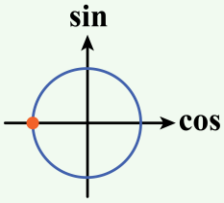




۲)
$$\begin{cases} \cos x = ۰ \Rightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{۲} \\ \cos x = ۱ \Rightarrow ۲k\pi \\ \cos x = -۱ \Rightarrow x = (۲k+۱)\pi \end{cases}$$







۱۵- هرگاه $\lim\limits_{x\to ۱} \frac{۲x - ۷\sqrt{x} + ۵}{۲x - \sqrt{ax+b}} = -\frac{۶}{۵}$ باشد، مقدار ab کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۶ ۳) ۴ ۴) ۳

پاسخ: گزینهٔ ۴ (متوسط ـ محاسباتی ـ استاندارد ـ حسابان ۱ صفحهٔ ۱۴۴ ـ ۱۱۰۵)

صورت کسر به‌ازای $x = ۱$ برابر صفر و **حد عبارت** عددی **غیرصفر** شده پس مخرج کسر هم به‌ازای $x = ۱$ برابر **صفر** خواهد شد. پس:

$$۲x - \sqrt{ax+b} = ۰ \xrightarrow{x=۱} a + b = ۴ \quad (I)$$

روش اول

بنابر **قاعدهٔ هوپیتال** داریم:

$$\lim_{x\to 1}\frac{2-\frac{7}{2\sqrt{x}}}{2-\frac{a}{2\sqrt{ax+b}}}=-\frac{6}{5}\xrightarrow{(I)}\frac{2-\frac{7}{2}}{2-\frac{a}{4}}=-\frac{6}{5}$$

$$\Rightarrow\frac{-\frac{3}{2}}{\frac{8-a}{4}}=-\frac{6}{5}\Rightarrow\frac{12}{16-2a}=\frac{6}{5}\Rightarrow 96-12a=60\Rightarrow a=3\Rightarrow b=1$$

درنتیجه:

$ab=3$

روش دوم

در صورت کسر از تجزیه به کمک **اتحاد جملهٔ مشترک** استفاده می‌کنیم و برای **رفع ابهام** نیز صورت و مخرج را در **مزدوج مخرج** ضرب می‌کنیم:

$$\lim_{x\to 1}\frac{2x-7\sqrt{x}+5}{2x-\sqrt{ax+b}}=\lim_{x\to 1}\left(\frac{(\sqrt{x}-1)(2\sqrt{x}-5)}{2x-\sqrt{ax+b}}\times\frac{2x+\sqrt{ax+b}}{2x+\sqrt{ax+b}}\right)$$

$$\overset{(I)}{=}\lim_{x\to 1}\frac{(\sqrt{x}-1)(2\sqrt{x}-5)(2x+\sqrt{ax+b})}{4x^2-(ax+4-a)}\overset{\text{مجموع ضرایب مخرج}=0}{=\!=\!=}\lim_{x\to 1}\frac{(\sqrt{x}-1)(2\sqrt{x}-5)(2x+\sqrt{ax+b})}{(x-1)(4x+4-a)}$$

با استفاده از **تجزیه** به کمک **اتحاد مزدوج** داریم:

$$=\lim_{x\to 1}\frac{\cancel{(\sqrt{x}-1)}(2\sqrt{x}-5)(2x+\sqrt{ax+b})}{\cancel{(\sqrt{x}-1)}(\sqrt{x}+1)(4x+4-a)}=\frac{-3(4)}{2(8-a)}=\frac{-12}{16-2a}$$

حال مقدار به‌دست آمده را برابر مقدار حد داده شده در صورت سؤال قرار می‌دهیم:

$$\frac{-12}{16-2a}=-\frac{6}{5}\Rightarrow 96-12a=60\Rightarrow a=3\Rightarrow b=1$$

درنتیجه:

$ab=3$

رفع ابهام

برای رفع ابهام $\frac{0}{0}$ از کسرها باید **عامل صفرکننده** را از صورت و مخرج **حذف** کنیم.

برای این کار استفاده از اتحادها بسیار سودمند است.

رفع ابهام رادیکالی

اگر کسر شامل عبارات رادیکالی باشد باید به کمک اتحاد **مزدوج** یا **اتحاد چاق و لاغر** رادیکال را از بین برد و در نهایت به کمک روابط و اتحادها عامل صفرکننده را در صورت و مخرج ساده کرد.

قضیهٔ هوپیتال (HOP)

اگر $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{0}{0}$ و توابع $f(x)$ و $g(x)$ در $x=a$ مشتق‌پذیر باشند، برای **محاسبهٔ این حد مبهم**، می‌توانیم از قضیهٔ هوپیتال استفاده کنیم و اگر مجدداً حد مبهم $(\frac{0}{0})$ شود باز هم قضیهٔ هوپیتال را تکرار می‌کنیم.

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}\overset{\frac{0}{0}}{\underset{HOP}{=\!=\!=}}\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

حالت‌های خاص جواب معادلهٔ درجه دوم

در معادلهٔ درجه دوم $ax^2+bx+c=0$، اگر $a+b+c=0$ باشد، یکی از جواب‌ها ۱ و دیگری $\frac{c}{a}$ است.

در معادلهٔ درجه دوم $ax^2+bx+c=0$، اگر $a+c=b$ باشد، یکی از جواب‌ها (-1) و دیگری $-\frac{c}{a}$ است.

ماز

۱۶- به‌ازای چند مقدار صحیح a، تساوی $\lim\limits_{x\to 1^+}\frac{ax+6}{ax^2+bx-3a}=-\infty$ برقرار است؟

۱) ۴ ۲) ۶ ۳) ۵ ۴) ۷

پاسخ: گزینهٔ ۳ (متوسط ـ مفهومی ـ استاندارد ـ حسابان ۲ صفحهٔ ۵۵ ـ ۱۲۰۳)

چون **حاصل حد بی‌نهایت** شده، پس $x=1$ **ریشهٔ مخرج** است.

$$a+b-3a=0\Rightarrow b=2a$$

$$\lim_{x\to 1^+}\frac{ax+6}{ax^2+2ax-3a}=\lim_{x\to 1^+}\frac{ax+6}{a(x^2+2x-3)}=\lim_{x\to 1^+}\frac{ax+6}{a(x-1)(x+3)}=\frac{a+6}{4a\times 0^+}=-\infty$$

پس $\frac{a+6}{4a}<0$ است و در نتیجه با **تعیین علامت** به‌دست می‌آید:

$$-6<a<0$$

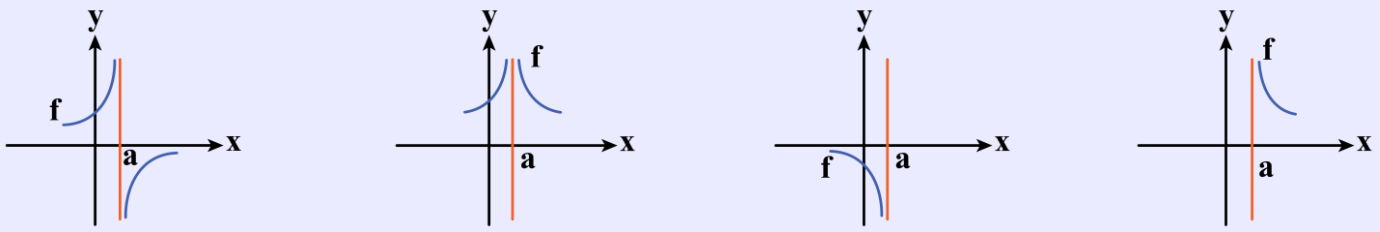
یعنی a دارای ۵ جواب صحیح است.

حد بی‌نهایت

در مسائل حد، اگر x به سمت عددی میل کند که در توابع کسری، مخرج کسر صفر شود (صفر حدی) ولی صورت کسر صفر نشود، در این صورت حاصل حد بی‌نهایت خواهد شد.

به این دسته از مسائل (حد بی‌نهایت) می‌گوییم.

$$\frac{\text{عدد}}{0\ \text{حدی}}=\infty$$



$\lim\limits_{x\to a^-} f(x) = \text{وجود ندارد}$ $\quad \lim\limits_{x\to a^+} f(x) = +\infty$

$\lim\limits_{x\to a^-} f(x) = -\infty$ $\quad \lim\limits_{x\to a^+} f(x) = \text{وجود ندارد}$

$\lim\limits_{x\to a^-} f(x) = +\infty$ $\quad \lim\limits_{x\to a^+} f(x) = +\infty$

$\lim\limits_{x\to a^-} f(x) = +\infty$ $\quad \lim\limits_{x\to a^+} f(x) = -\infty$

در مسائل حد بی‌نهایت که جواب حد، عدد مشخصی نمی‌باشد، تابع **حد ندارد**.

حالت‌های ممکن حد بی‌نهایت

$\frac{\text{عدد منفی}}{0^+} = -\infty$ $\quad \frac{\text{عدد منفی}}{0^-} = +\infty$ $\quad \frac{\text{عدد مثبت}}{0^-} = -\infty$ $\quad \frac{\text{عدد مثبت}}{0^+} = +\infty$

ماز

۱۷- تابع $f(x)=\begin{cases} ax^2+bx & [-x]=2 \\ 3a+2x & [-x]\neq 2 \end{cases}$ روی $\mathbb{R}$ پیوسته است، مقدار a^2+b^2 کدام است؟

۱) ۵ ۲) ۱۰ ۳) ۹ ۴) ۴

پاسخ: گزینهٔ ۴ (سخت ـ محاسباتی ـ زمان‌بر ـ حسابان ۱ صفحهٔ ۱۵۱ ـ ۱۱۰۵)

ابتدا ضابطهٔ f را به‌صورت زیر می‌نویسیم. می‌دانیم: $[-x]=2 \Rightarrow 2\le -x<3 \Rightarrow -3<x\le -2$

$$f(x)=\begin{cases} ax^2+bx & -3<x\le -2 \\ 3a+2x & x\le -3\ ,\ x>-2 \end{cases}$$

کافی است **پیوستگی** در **دو نقطهٔ** $x=-2$ و $x=-3$ را بررسی کنیم.

$$\lim_{x\to(-2)^-} f(x)=f(-2)=\lim_{x\to(-2)^+} f(x) \Rightarrow 4a-2b=3a-4 \Rightarrow a-2b=-4$$

$$\lim_{x\to(-3)^-} f(x)=f(-3)=\lim_{x\to(-3)^+} f(x) \Rightarrow 3a-6=9a-3b \Rightarrow 6a-3b=-6 \Rightarrow 2a-b=-2$$

از حل دستگاه $\begin{cases} a-2b=-4 \\ 2a-b=-2 \end{cases}$ به جواب $a=0$ و $b=2$ می‌رسیم. پس $a^2+b^2=4$ است.

توابع پیوسته

۱) توابع **چندجمله‌ای** روی $\mathbb{R}$ پیوسته اند.

۲) توابع **رادیکالی با فرجهٔ زوج** در دامنهٔ خود پیوسته‌اند. (**داخل رادیکال نامنفی** باشد.)

توابع **رادیکالی با فرجهٔ فرد** در $\mathbb{R}$ پیوسته‌اند.

۳) توابع **گویا** روی دامنهٔ خود پیوسته‌اند. (دامنه توابع گویا = $\mathbb{R}$ − {ریشه‌های مخرج})

۴) توابع **چندضابطه‌ای** در صورتی پیوسته‌اند که هم در **نقاط مرزی** و هم در **هر ضابطه** پیوسته باشند.

ماز

۱۸- هرگاه $f(x)=\frac{x^{۲}-۳}{x+۱}$ و $f(x)=xg(x)+۴x-۳$ باشد، مقدار $\lim\limits_{x\to ۰} g(x)$ چه عددی است؟

۱) ۱ ۲) ۱- ۳) ۲- ۴) ۴

پاسخ: گزینهٔ ۲ (متوسط ـ محاسباتی ـ استاندارد ـ حسابان ۲ صفحهٔ ۸۷ ـ ۱۲۰۴)

در ابتدا داریم:

$$f(x)=xg(x)+۴x-۳ \Rightarrow \frac{f(x)+۳}{x}=g(x)+۴ \Rightarrow g(x)=\frac{f(x)+۳}{x}-۴$$

روش اول

با توجه به آن‌که $f(۰)=-۳$ است، پس:

$$\lim_{x\to ۰} g(x)=\lim_{x\to ۰}\frac{f(x)-f(۰)}{x}-۴ \Rightarrow \lim_{x\to ۰} g(x)=f'(۰)-۴$$

پس ابتدا باید مشتق تابع f را در نقطهٔ $x=۰$ بیابیم:

$$f'(x)=\frac{۲x(x+۱)-(x^{۲}-۳)}{(x+۱)^{۲}} \xrightarrow{x=۰} f'(۰)=۳$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to ۰} g(x)=f'(۰)-۴=۳-۴=-۱$$

روش دوم

$$\lim_{x\to ۰} g(x)=\lim_{x\to ۰}\frac{\frac{x^{۲}-۳}{x+۱}+۳}{x}-۴=\lim_{x\to ۰}\frac{x^{۲}+۳x}{x(x+۱)}-۴=\lim_{x\to ۰}\frac{x+۳}{x+۱}-۴=۳-۴=-۱$$

تعریف مشتق

تعریف: فرض کنید f یک تابع باشد، حد زیر را (در صورت وجود) مشتق تابع f در نقطهٔ a می‌نامیم و با $f'(a)$ نمایش می‌دهیم.

$$f'(a)=\lim_{h\to ۰}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

همچنین حاصل این حد را شیب خط مماس بر نمودار تابع f در نقطهٔ a (و یا شیب منحنی f در a) می‌نامیم.

تعریف دیگر مشتق: اگر در تعریف مشتق، قرار دهیم $x=a+h$ و $x\to a$، آن‌گاه تعریف معادل زیر برای مشتق به‌دست می‌آید:

$$f'(a)=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

توجه!

چشمتان را به تشخیص تعریف حدی مشتق عادت دهید!

۱۹- اگر $x=۳$ طول عطف تابع $f(x)=(x-۲)^{۲}(x-\alpha)$ باشد، طول مینیمم نسبی تابع کدام است؟

۱) ۱- ۲) ۲- ۳) ۶ ۴) ۴

پاسخ: گزینهٔ ۴ (متوسط ـ محاسباتی ـ استاندارد ـ حسابان ۲ صفحهٔ ۱۳۳ ـ ۱۲۰۵)

چون $x=۳$ طول نقطهٔ عطف تابع **چندجمله‌ای** $f(x)$ است، پس: $f''(۳)=۰$

پس ابتدا مشتق دوم تابع را محاسبه می‌کنیم:

$$f'(x)=۲(x-۲)(x-\alpha)+(x-۲)^{۲}=(x-۲)(۳x-۲\alpha-۲)$$

$$f''(x)=(3x-2\alpha-2)+3x-6=6x-2\alpha-2-6=6x-2\alpha-8$$

$$\xrightarrow{f''(3)=0} 18-2\alpha-8=0 \Rightarrow 10=2\alpha \Rightarrow \alpha=5$$

حال برای یافتن اکسترمم نسبی تابع مشتق آن را برابر **صفر** قرار می‌دهیم:

$$f'(x)=0 \Rightarrow \begin{cases} x=2 \\ x=\dfrac{2\alpha+2}{3} \xrightarrow{\alpha=5} x=4 \end{cases}$$: طول Min نسبی

زیرا:

x		۲		۴	
y′	+	0	-	0	+
y	↗		↘		↗

Min

اکسترمم‌های نسبی تابع

تابع f در $x=a$ دارای اکسترمم نسبی است اگر $f'(a)=0$ یا $f'(a)$ موجود نباشد و به علاوه f' در $x=a$ تغییرعلامت دهد:

a		
f′	−	+
	↘ min نسبی	↗

a		
f′	+	−
	↗ max نسبی	↘

قوانین مشتق

۱) $(x^n)'=nx^{n-1} \xrightarrow{\text{نتیجه}} \begin{cases} \left(\sqrt{x}\right)'=\dfrac{1}{2\sqrt{x}} \\ \left((u(x))^n\right)'=nu'(x)(u(x))^{n-1} \end{cases}$

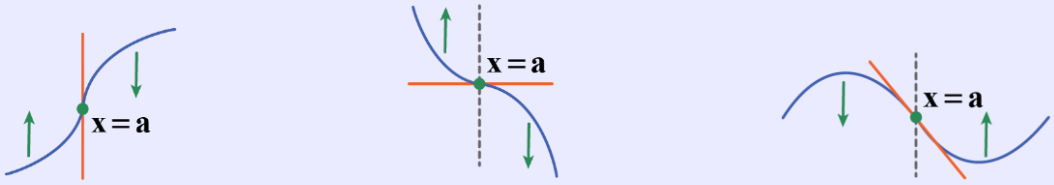
۲) $(f\pm g)'=f'(x)\pm g'(x)$

۳) $(f.g)'=f'(x)\times g(x)+f(x)\times g'(x)$

۴) $\left(\dfrac{f}{g}\right)'=\dfrac{f'(x)\times g(x)-g'(x)\times f(x)}{g^2(x)}$

نقاط عطف

$x=a$ را طول نقطهٔ عطف تابع f می‌گویند، اگر f در $x=a$ پیوسته و دارای خط مماس (حتی قائم) باشد و جهت تقعر (گودی/ انحنا) منحنی در این نقطه عوض می‌شود.



چگونه نقطهٔ عطف را بیابیم؟

اگر $x=a$ طول نقطهٔ عطف تابع f باشد، مشتق دوم f(x) یعنی $f''(x)$ در $x=a$ برابر صفر یا تعریف نشده است. به عبارتی $f''(a)=0$ یا $f''(a)$ موجود نیست.

اگر $f''(a)=0$ و $f''(x)$ در $x=a$ تغییرعلامت دهد یعنی $x=a$ ریشهٔ سادهٔ $f''(x)=0$ است.

توجه!

توجه داشته باشید که اگر در $x=a$ مشتق دوم f تعریف نشده باشد و مشتق چپ و راست آن هر دو $+\infty$ یا $-\infty$ باشند، حالت مماس قائم اتفاق می‌افتد.

ماز

۲۰- اگر خط مماس بر نمودار تابع $f(x)=\frac{4x+b}{\sqrt{x}}$ در $x=1$، عرض از مبدأ ۸ داشته باشد، مقدار b کدام است؟

۱) $\frac{12}{5}$ ۲) ۵ ۳) ۴ ۴) ۲

پاسخ: گزینهٔ ۳ (سخت ـ محاسباتی ـ زمان‌بر ـ حسابان ۲ صفحهٔ ۹۴ ـ ۱۲۰۴)

قرار است در نقطه‌ای به طول $x=1$ واقع بر نمودار، **مماس** رسم کنیم و **عرض از مبدأ** خط مماس برابر ۸ شود، پس:

نقطهٔ تماس $A(1,4+b)$

$$f'(x)=\frac{4\sqrt{x}-\frac{1}{2\sqrt{x}}(4x+b)}{x}\Rightarrow f'(1)=4-\frac{4+b}{2}\Rightarrow f'(1)=2-\frac{b}{2}$$

می‌دانیم که **شیب خط مماس** در یک نقطه برابر است با **مشتق تابع** در آن نقطه. پس:

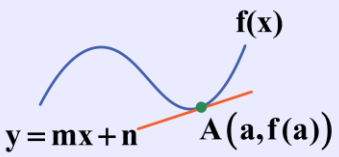
خط مماس: $y-4-b=(2-\frac{b}{2})(x-1)$

اگر $x=0$ قرار دهیم، آن‌گاه **عرض از مبدأ** یافت می‌شود.

$$y=\frac{b}{2}-2+b+4=\frac{3}{2}b+2=8\Rightarrow\frac{3}{2}b=6\Rightarrow b=4$$

خط مماس

اگر خط $y=mx+n$ در نقطهٔ به طول a واقع بر منحنی $f(x)$، بر آن مماس شود، شیب خط مماس، همان مشتق تابع در نقطهٔ به طول a است.



شیب خط $=f'(a)=m$

معادلهٔ خط مماس: $y-y_A=m(x-x_A)\Rightarrow y-f(a)=f'(a)(x-a)$

ماز

۲۱- نقطهٔ ماکزیمم مطلق تابع $f(x)=x+\sqrt{8-x^2}$ روی خط $y=2x+a$ واقع شده است، مقدار a کدام است؟

۱) -4 ۲) ۱ ۳) -2 ۴) صفر

پاسخ: گزینهٔ ۴ (متوسط ـ محاسباتی ـ زمان‌بر ـ حسابان ۲ صفحهٔ ۱۱۷ ـ ۱۲۰۵)

در اولین قدم **دامنهٔ تابع** را می‌یابیم:

$$8-x^2\ge 0\Rightarrow x^2\le 8\Rightarrow |x|\le 2\sqrt{2}\Rightarrow -2\sqrt{2}\le x\le 2\sqrt{2}$$

$$f(x)=x+\sqrt{8-x^2}\quad;\quad D_f=[-2\sqrt{2},2\sqrt{2}]$$

$$f'(x)=1+\frac{-2x}{2\sqrt{8-x^2}}=1+\frac{-x}{\sqrt{8-x^2}}=0\Rightarrow\sqrt{8-x^2}=x\quad;\quad x\ge 0$$

$$\Rightarrow 8-x^2=x^2\Rightarrow x^2=4\Rightarrow\begin{cases}x=2\\ x=-2\quad \text{غ ق ق}\end{cases}$$

حال مقدار تابع را در **نقاط بحرانی** و **ابتدا و انتهای دامنه** حساب می‌کنیم:

$$f(۲)=۴\ ,\ f(-۲\sqrt{۲})=-۲\sqrt{۲}\ ,\ f(۲\sqrt{۲})=۲\sqrt{۲}$$

پس نقطهٔ $A(۲,۴)$ **نقطهٔ ماکزیمم مطلق** تابع است و داریم:

$$y=۲x+a \xrightarrow{A(۲,۴)} ۴=۴+a \Rightarrow a=۰$$

ماکزیمم و مینیمم مطلق تابع

$x=a$ را طول نقطهٔ ماکزیمم مطلق f می‌گویند، اگر به‌ازای هر x از دامنهٔ f، $f(x)\le f(a)$ باشد.

$x=a$ را طول نقطه مینیمم مطلق f می‌گویند، اگر به‌ازای هر x از دامنهٔ f، $f(x)\ge f(a)$ باشد.

نکته!

هر تابع **پیوسته** روی بازهٔ $[a,b]$ مقادیر **ماکزیمم و مینیمم مطلق** خود را اختیار می‌کند.

چگونه ماکزیمم و مینیمم مطلق توابع را بیابیم؟!

کافی است **مقدار تابع** f را در **نقاط بحرانی** و **دو سر بازهٔ بسته** مورد نظر (یا دامنهٔ تابع) محاسبه کنید و با هم مقایسه کنید.

۲۲- فضای نمونه‌ای S با پنج عضو به شکل $S=\{a_۱,a_۲,a_۳,a_۴,a_۵\}$ چنان است که احتمال‌های وقوع اعضای آن تشکیل دنباله‌ای حسابی با قدرنسبت $\frac{۳}{۴۰}$ می‌دهند. در بین این احتمالات، بزرگ‌ترین احتمال چند برابر کوچک‌ترین احتمال است؟

۱) ۳ ۲) ۵ ۳) ۶ ۴) ۷

پاسخ: گزینهٔ ۴ (متوسط ـ محاسباتی ـ استاندارد ـ آمار و احتمال صفحهٔ ۴۷ ـ ۱۱۰۲)

با توجه به این‌که $P(a_۱),P(a_۲),P(a_۳),P(a_۴),P(a_۵)$ تشکیل دنبالهٔ حسابی می‌دهند، داریم:

$$P(a_۱)=x,\ P(a_۲)=x+d\ ,\ P(a_۳)=x+۲d,\ P(a_۴)=x+۳d,\ P(a_۵)=x+۴d$$

$$\left.\begin{array}{r}\sum_{i=۱}^{۵}P(a_i)=۱\Rightarrow ۵x+۱۰d=۱\\ d=\frac{۳}{۴۰}\end{array}\right\}\Rightarrow x=\frac{۱}{۲۰}$$

بنابراین جواب برابر است با:

$$\frac{P(a_۵)}{P(a_۱)}=\frac{\frac{۱}{۲۰}+\frac{۱۲}{۴۰}}{\frac{۱}{۲۰}}=\frac{\frac{۱۴}{۴۰}}{\frac{۲}{۴۰}}=۷$$

احتمال غیرهم‌شانس

هرگاه حداقل دو پیشامد ساده از فضای نمونه‌ای $S=\{S_۱,S_۲,...,S_n\}$ احتمال نابرابر داشته باشند، S را فضای نمونه‌ای با احتمال غیرهم‌شانس می‌گوییم.

ویژگی‌های احتمال غیرهم‌شانس

۱) در فضای نمونه‌ای غیرهم‌شانس $S=\{S_۱,S_۲,...,S_n\}$ داریم:

$$P(S)=P(S_۱)+P(S_۲)+...+P(S_n)=۱$$

۲) اگر $A=\{a_۱,a_۲,...,a_k\}$ یک پیشامد k عضوی از فضای نمونه‌ای S باشد:

الف) $۰\le P(A)\le ۱$ ب) $P(A)=P(a_۱)+P(a_۲)+...+P(a_k)$

۲۳- در داده‌های آماری ۵-,۱۲,۳-,۱,۱۰-,۳,۱-,۷,۰ داده‌های کمتر از چارک اول و بیشتر از چارک سوم را حذف می‌کنیم. اگر به هر کدام از داده‌های باقی‌مانده، ۷ واحد اضافه کنیم، انحراف معیار داده‌های جدید کدام است؟

۱) ۴ ۲) ۳ ۳) ۲ ۴) ۱

پاسخ: گزینهٔ ۳ (متوسط ـ محاسباتی ـ استاندارد ـ آمار و احتمال صفحهٔ ۸۹ ـ ۱۱۰۳)

ابتدا داده‌ها را از کوچک به بزرگ **مرتب** کرده و سپس چارک اول (Q_1) و چارک سوم (Q_3) را پیدا می‌کنیم:

$$-10,\underbrace{-5,-3}_{Q_1=\frac{-5-3}{2}=-4},-1,\overset{Q_2}{0},1,\underbrace{3,7}_{Q_3=\frac{3+7}{2}=5},12$$

حال، اگر داده‌های کمتر از چارک اول و بیشتر از چارک سوم را حذف کنیم، داده‌های باقی‌مانده به‌صورت $\{-3,-1,0,1,3\}$ است. از طرفی می‌دانیم که اگر به تک‌تک این داده‌ها عدد ثابتی را اضافه کنیم، **انحراف معیار** تغییری **نمی‌کند**، بنابراین انحراف معیار همین داده‌ها را محاسبه می‌کنیم:

$$\bar{x}=\frac{(-3)+(-1)+0+1+3}{5}=0$$

$$\sigma^2=\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2}{n}\Rightarrow\sigma^2=\frac{(-3)^2+(-1)^2+(0)^2+(1)^2+(3)^2}{5}=\frac{20}{5}=4$$

$$\Rightarrow\sigma=\sqrt{4}=2$$

معیارهای گرایش به مرکز

اگر $x_1,x_2,x_3,\dots,x_n$ داده‌های آماری باشند، آن‌گاه:

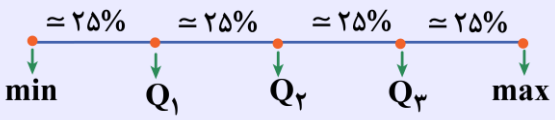
۱) میانگین:

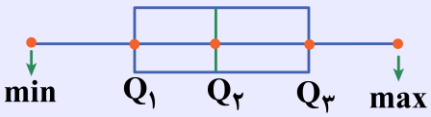
$$\bar{x}=\frac{x_1+x_2+\dots+x_n}{n}$$

۲) میانه و چارک‌ها:

اگر داده‌ها را از کوچک به بزرگ مرتب کنیم در صورتی‌که تعداد داده‌ها **فرد** باشد، **عدد وسط** و اگر تعداد داده‌ها **زوج** باشد، **میانگین دو عدد وسط**، همان میانه یا چارک دوم را نشان می‌دهد که برای نمایش آن از Q_2 استفاده می‌کنیم.

نیمی از داده‌ها قبل از میانه و نیم دیگری از داده‌ها بعد از میانه هستند. **میانهٔ نیمهٔ اول داده‌ها** همان چارک اول (Q_1) و **میانهٔ نیمهٔ دوم داده‌ها** همان چارک سوم (Q_3) را نشان می‌دهد. با مشخص کردن چارک اول، دوم (میانه) و سوم داده‌ها، تقریباً ٪۲۵ داده‌ها در هر یک از چهار محدودهٔ زیر قرار می‌گیرند.





معیارهای پراکندگی

۱) واریانس:

$$\sigma^2=\frac{(x_1-\bar{x})^2+(x_2-\bar{x})^2+\dots+(x_n-\bar{x})^2}{n}\quad\text{یا}\quad\sigma^2=\frac{x_1^2+x_2^2+\dots+x_n^2}{n}-\bar{x}^2$$

۲) انحراف معیار:

$$\sigma=\sqrt{\text{واریانس}}$$

۳) دامنهٔ تغییرات: $R = x_{max} - x_{min}$

۴) ضریب تغییرات: $CV = \frac{\sigma}{\bar{x}}$

وقتی همهٔ داده‌ها با هم برابرند...

اگر داده‌ها با هم برابر باشند، **معیارهای گرایش به مرکز** یعنی میانه و میانگین با داده‌ها برابر بوده و **معیارهای پراکندگی** یعنی واریانس، انحراف معیار، ضریب تغییرات و دامنهٔ تغییرات برابر صفر است.

$$x_1 = x_2 = ... = x_n \longleftrightarrow \sigma^2 = \sigma = R = CV = 0$$

اگر داده‌ها در a ضرب و با b جمع شوند...

۱) میانگین در a ضرب و با b جمع می‌شود.

۲) واریانس در a^2 ضرب می‌شود.

۳) انحراف معیار در $|a|$ ضرب می‌شود.

۵) ضریب تغییرات، بعد از محاسبهٔ تغییر میانگین و انحراف معیار محاسبه شده و تغییر می‌کند.

۲۴- در نمونه‌گیری تصادفی ساده به اندازهٔ ۳، اگر جامعهٔ آماری شامل اعداد طبیعی کوچک‌تر از ۶ باشد، احتمال این‌که میانگین نمونهٔ انتخاب‌شده دقیقاً با میانگین جامعه برابر باشد، کدام است؟

۱) ۰/۱ ۲) ۰/۲ ۳) ۰/۳ ۴) ۰/۴

پاسخ: گزینهٔ ۲ (متوسط ـ محاسباتی ـ استاندارد ـ آمار و احتمال صفحهٔ ۱۱۳ ـ ۱۱۰۴)

ابتدا میانگین اعداد جامعه را محاسبه می‌کنیم:

$$\bar{x} = \frac{1+2+3+4+5}{5} = \frac{15}{5} = 3$$

بنابراین باید نمونه‌ای را انتخاب کنیم که میانگین آن برابر ۳ باشد و می‌دانیم برای این‌که میانگین یک نمونهٔ ۳ عضوی برابر با ۳ باشد باید مجموع آن ۳ عدد برابر $3 \times 3 = 9$ باشد که برای این کار، باید **ترکیب‌هایی ۳ تایی** از اعداد $\{1,2,3,4,5\}$ را پیدا کنیم که **مجموع** آن‌ها برابر **۹** شود:

حالت اول: $\{1,3,5\}$
حالت دوم: $\{2,3,4\}$
$\Rightarrow$ تعداد حالت‌های مطلوب: $n(A) = 2$

از طرفی **تعداد کل حالت‌های انتخاب ۳ عدد** از بین ۵ عدد برابر است با:

$$n(S) = \binom{5}{3} = \frac{5 \times 4 \times 3}{3 \times 2 \times 1} = 10$$

در نتیجه احتمال موردنظر برابر است با:

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{2}{10} = 0/2$$

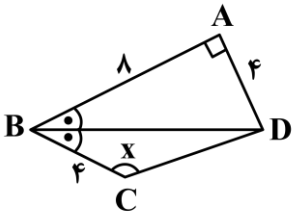
نمونه‌گیری تصادفی ساده

در این روش از الگوی خاصی استفاده نمی‌شود و هر کدام از اعضای جامعه، با **احتمال برابر** ممکن است در نمونه انتخاب شوند.

یه نمونهٔ باحال ببین!

قرعه‌کشی بین افراد شرکت‌کننده در یک مسابقه

۲۵- در شکل مقابل، اندازهٔ زاویهٔ $\hat{C}$ کدام است؟

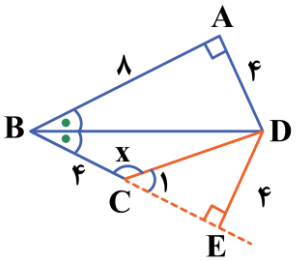


۱) ۹۰°
۲) ۱۲۰°
۳) ۱۳۵°
۴) ۱۵۰°

پاسخ: گزینهٔ ۳ (متوسط ـ مفهومی ـ استاندارد ـ هندسه ۱ صفحهٔ ۱۲ ـ ۱۰۰۱)

با توجه به این‌که BD نیمساز زاویهٔ $\hat{B}$ است و می‌دانیم که هر نقطه روی **نیمساز** از **دو ضلع زاویه به یک فاصله** است، بنابراین از D **عمودی** بر امتداد BC رسم می‌کنیم تا آن را در E قطع کند، در نتیجه:

$AD = DE = ۴$



همچنین دو مثلث ABD و BDE به حالت **وتر و یک ضلع قائمه**، همنهشت هستند، پس $BE = ۸$ و در نتیجه:

$CE = BE - BC = ۸ - ۴ = ۴$

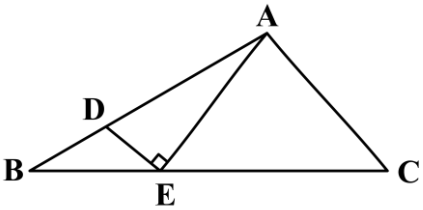
بنابراین مثلث ECD **قائم‌الزاویهٔ متساوی‌الساقین** است، در نتیجه:

$\hat{C}_۱ = ۴۵^\circ \Rightarrow x = ۱۸۰^\circ - ۴۵^\circ = ۱۳۵^\circ$

نیمساز

مکان هندسی نقاطی از صفحه که از **دو ضلع زاویه به یک فاصله** باشند، **نیمساز** زاویه است **و برعکس**، هر نقطه‌ای که روی نیمساز باشد از دو ضلع زاویه به یک فاصله است.

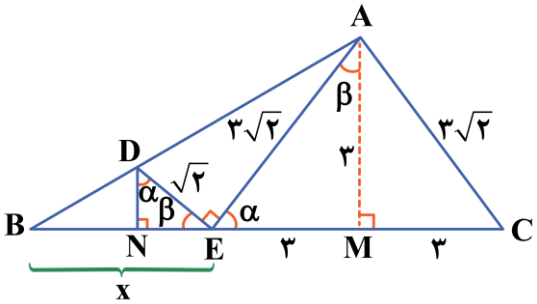
۲۶- در مثلث ABC شکل مقابل، $AE = AC = ۳\sqrt{۲}$ ، $EC = ۶$ و $DE = \sqrt{۲}$ است. اندازهٔ پاره‌خط BE کدام است؟



۱) ۲
۲) ۲/۵
۳) ۳
۴) ۳/۵

پاسخ: گزینهٔ ۳ (سخت ـ مفهومی/ترکیبی ـ زمان‌بر ـ هندسه ۱ صفحهٔ ۳۹ ـ ۱۰۰۲)

ارتفاع AM را رسم می‌کنیم، چون مثلث AEC **متساوی‌الساقین** است، **ارتفاع، میانه و نیمساز** بر هم منطبق‌اند و طبق فیثاغورس:



$\overset{\triangle}{AME} : AM = \sqrt{(۳\sqrt{۲})^۲ - ۳^۲} = ۳$

حال ارتفاع مثلث BDE را هم رسم می‌کنیم. با توجه به زوایای مشخص شده در شکل، دو مثلث AEM و DEN به حالت دو زاویهٔ برابر **متشابه**اند، بنابراین:

$$\frac{DE}{AE}=\frac{DN}{EM}\Rightarrow\frac{\sqrt{۲}}{۳\sqrt{۲}}=\frac{DN}{۳}\Rightarrow DN=۱$$

حال در مثلث DEN طبق فیثاغورس داریم:

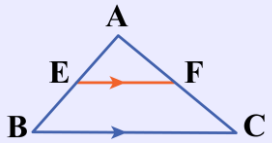
$$NE^{۲}=DE^{۲}-DN^{۲}=(\sqrt{۲})^{۲}-۱^{۲}=۱\Rightarrow NE=۱\Rightarrow BN=x-۱$$

حال در مثلث ABM، چون $DN \parallel AM$ است، طبق **تالس** داریم:

$$\frac{DN}{AM}=\frac{BN}{BM}\Rightarrow\frac{۱}{۳}=\frac{x-۱}{x+۳}\Rightarrow x+۳=۳x-۳\Rightarrow x=۳$$

تالس

در مثلث ABC، اگر پاره‌خط $EF \parallel BC$ باشد، روی دو ضلع دیگر پاره‌خط‌های متناسب ایجاد می‌کند.



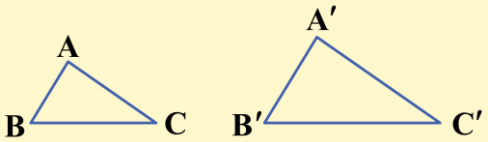
$$EF \parallel BC \Rightarrow \frac{AE}{EB}=\frac{AF}{FC}$$

تعمیم تالس: این قضیه را به‌صورت زیر می‌توان تعمیم داد:

$$EF \parallel BC \Rightarrow \frac{AE}{AB}=\frac{AF}{AC}=\frac{EF}{BC}$$

تشابه مثلث‌ها

دو مثلث را متشابه می‌گوییم اگر همهٔ **زوایا**، **نظیر به نظیر** با هم **برابر** باشند و **اضلاع** متناظر **دوبه‌دو متناسب** باشند.



$$\begin{cases}\hat{A}=\hat{A}'\\ \hat{B}=\hat{B}'\\ \hat{C}=\hat{C}'\end{cases},\ \frac{AB}{A'B'}=\frac{AC}{A'C'}=\frac{BC}{B'C'}$$

حالت‌های تشابه دو مثلث:

۱) دو زاویهٔ مساوی:

$$\hat{A}=\hat{A}',\ \hat{B}=\hat{B}'\Rightarrow \overset{\triangle}{ABC}\sim \overset{\triangle}{A'B'C'}\xrightarrow{\text{نتیجه}}\hat{C}=\hat{C}',\ \frac{AB}{A'B'}=\frac{AC}{A'C'}=\frac{BC}{B'C'}$$

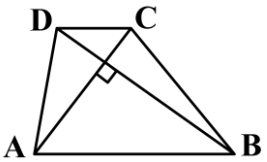
۲) سه ضلع متناسب:

$$\frac{AB}{A'B'}=\frac{AC}{A'C'}=\frac{BC}{B'C'}\Rightarrow \overset{\triangle}{ABC}\sim \overset{\triangle}{A'B'C'}\xrightarrow{\text{نتیجه}}\hat{A}=\hat{A}',\ \hat{B}=\hat{B}',\hat{C}=\hat{C}'$$

۳) دو ضلع متناسب و زاویهٔ بین برابر:

$$\frac{AB}{A'B'}=\frac{AC}{A'C'}=k,\ \hat{A}=\hat{A}'\Rightarrow \overset{\triangle}{ABC}\sim \overset{\triangle}{A'B'C'}\xrightarrow{\text{نتیجه}}\frac{BC}{B'C'}=k,\hat{B}=\hat{B}',\hat{C}=\hat{C}'$$

۲۷- در ذوزنقهٔ ABCD مطابق شکل قطرها بر هم عمودند و $AC=۱۲$ است. اگر مجموع طول دو قاعده ۲۰ باشد، مساحت ذوزنقه کدام است؟

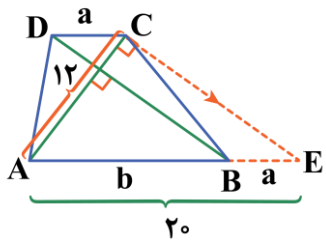


۱) ۷۲
۲) ۸۴
۳) ۹۶
۴) ۱۰۸

پاسخ: گزینهٔ ۳ (متوسط ـ مفهومی ـ استاندارد ـ هندسه ۱ صفحهٔ ۵۷ ـ ۱۰۰۳)

از رأس C خطی به موازات قطر BD رسم می‌کنیم تا امتداد قاعدهٔ AB را در E قطع کند، در این صورت چهارضلعی BECD **متوازی‌الاضلاع** بوده و $CE=BD$ و $CE\perp AC$ است، همچنین $BE=DC=a$ بوده و چون $AB+DC=۲۰$ می‌باشد.

پس:



$$a+b=۲۰\Rightarrow AE=۲۰$$

حال طبق فیثاغورس در مثلث ACE داریم:

$$CE^۲+۱۲^۲=۲۰^۲\Rightarrow CE=۱۶\Rightarrow BD=۱۶$$

حال مساحت ذوزنقهٔ ABCD با دو قطر عمود بر هم برابر است با:

$$S_{ABCD}=\frac{۱}{۲}(\text{حاصل‌ضرب دو قطر})=\frac{۱}{۲}\times ۱۲\times ۱۶=۹۶$$

مساحت چهارضلعی با دو قطر عمود برهم

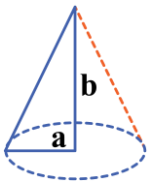
مساحت هر چهارضلعی که **قطرهای** آن بر هم **عمودند**، برابر است با **نصف حاصل‌ضرب قطرها**.

۲۸- از دوران مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC حول کوچک‌ترین ضلع، یک مخروط با حجم ۲۴۰π و از دوران آن حول ضلع متوسط یک مخروط با حجم ۱۰۰π به وجود آمده است. اندازهٔ کوچک‌ترین میانهٔ این مثلث کدام است؟

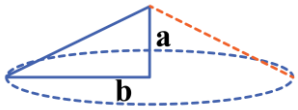
۱) ۵
۲) ۵/۵
۳) ۶
۴) ۶/۵

پاسخ: گزینهٔ ۴ (آسان ـ خط‌به‌خط ـ استاندارد ـ هندسه ۱ صفحهٔ ۹۶ ـ ۱۰۰۴)

با فرض $a<b$ خواهیم داشت:



$$V_۱=\frac{۱}{۳}\pi a^۲b=۱۰۰\pi\Rightarrow a^۲b=۳۰۰$$



$$V_۲=\frac{۱}{۳}\pi b^۲a=۲۴۰\pi\Rightarrow ab^۲=۷۲۰$$

با تقسیم دو رابطه بر هم داریم:

$$\frac{a}{b}=\frac{۳۰۰}{۷۲۰}=\frac{۵}{۱۲}\Rightarrow b=\frac{۱۲}{۵}a\xrightarrow{a^۲b=۳۰۰}a^۲\times\frac{۱۲}{۵}a=۳۰۰$$

$$\Rightarrow a^۳=۱۲۵\Rightarrow a=۵\Rightarrow b=\frac{۱۲}{۵}\times ۵=۱۲$$

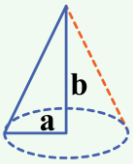
بنابراین مثلث قائم‌الزاویه به اضلاع ۱۳,۱۲,۵ است و **کوچک‌ترین میانه** همان **میانهٔ وارد بر وتر** است که **نصف وتر** است:

$$m=\frac{۱}{۲}\times ۱۳=۶/۵$$

دوران مثلث قائم الزاویه

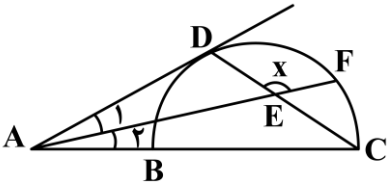
از دوران یک مثلث قائم‌الزاویه به اضلاع قائمهٔ a و b حول ضلع b مخروطی به وجود می‌آید که شعاع قاعدهٔ آن a و ارتفاع آن b است.

حجم مخروط به شعاع قاعدهٔ r و ارتفاع h برابر است با:



$$V=\frac{۱}{۳}\pi r^{۲}h$$

۲۹- در نیم‌دایرهٔ شکل مقابل، $\hat{A}_۱=\hat{A}_۲$ است. زاویهٔ x کدام است؟



۱) ۱۰۵°

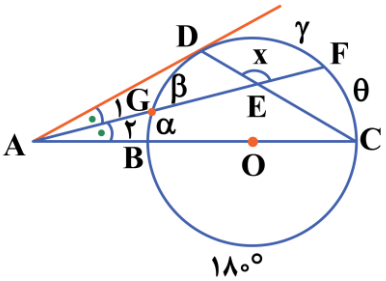
۲) ۱۱۵°

۳) ۱۲۵°

۴) ۱۳۵°

پاسخ: گزینهٔ ۴ (متوسط ـ مفهومی ـ استاندارد ـ هندسه ۲ صفحهٔ ۱۶ ـ ۱۱۰۱)

با فرض $\overset{\frown}{BG}=\alpha$، $\overset{\frown}{GD}=\beta$، $\overset{\frown}{DF}=\gamma$ و $\overset{\frown}{FC}=\theta$ داریم:



$$\begin{cases}\hat{A}_۱=\dfrac{\gamma-\beta}{۲}\\ \hat{A}_۲=\dfrac{\theta-\alpha}{۲}\end{cases}\xrightarrow{\hat{A}_۱=\hat{A}_۲}\frac{\gamma-\beta}{۲}=\frac{\theta-\alpha}{۲}\Rightarrow\gamma-\beta=\theta-\alpha\Rightarrow\gamma+\alpha=\theta+\beta$$

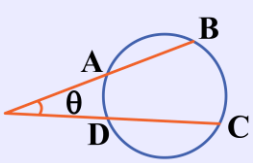
از طرف دیگر **مجموع کمان‌های هر نیم‌دایره** برابر ۱۸۰° است:

$$\alpha+\beta+\gamma+\theta=۱۸۰^\circ\xrightarrow{\gamma+\alpha=\theta+\beta}۲(\alpha+\gamma)=۱۸۰^\circ\Rightarrow\alpha+\gamma=۹۰^\circ$$

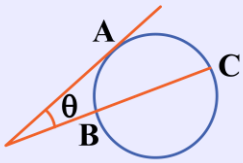
حال زاویهٔ x **زاویهٔ بین دو وتر** است، بنابراین:

$$\hat{x}=\frac{\gamma+\alpha+۱۸۰^\circ}{۲}=\frac{۹۰^\circ+۱۸۰^\circ}{۲}=\frac{۲۷۰^\circ}{۲}=۱۳۵^\circ$$

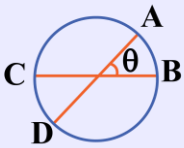
زوایا و وترهای دایره



$$\theta=\frac{\overset{\frown}{BC}-\overset{\frown}{AD}}{۲}$$

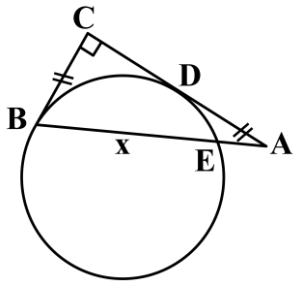


$$\theta=\frac{\overset{\frown}{AC}-\overset{\frown}{AB}}{۲}$$



$$\theta=\frac{\overset{\frown}{AB}+\overset{\frown}{CD}}{۲}$$

۳۰- مطابق شکل خطوط CB و CA بر دایره مماس هستند و $AD = BC$ ، اگر $AE = ۳$ باشد، اندازهٔ وتر BE کدام است؟



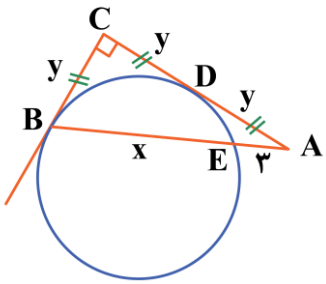
۱) ۱۲
۲) ۱۱
۳) ۱۰
۴) ۹

پاسخ: گزینهٔ ۱ (متوسط ـ مفهومی ـ استاندارد ـ هندسه ۲ صفحهٔ ۱۹ ـ ۱۱۰۱)

می‌دانیم طول دو مماس که از نقطهٔ C خارج دایره بر آن رسم می‌شود با هم برابر است، بنابراین:

$BC = CD$

از طرفی، $BC = AD$ ، پس $BC = CD = AD$ می‌باشد:



حال از نقطهٔ A **یک مماس** و **یک قاطع** بر دایره رسم شده است، بنابراین داریم:

$AD^۲ = AE.AB \Rightarrow y^۲ = ۳(۳ + x)$ (۱)

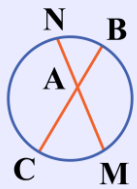
از طرف دیگر طبق فیثاغورس در مثلث ABC داریم:

$(۲y)^۲ + y^۲ = (x + ۳)^۲ \Rightarrow ۵y^۲ = (x + ۳)^۲$ (۲)

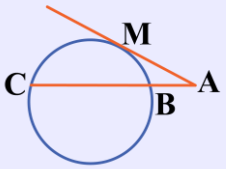
با جایگذاری رابطهٔ (۱) در رابطهٔ (۲) داریم:

$۵\big(۳(۳ + x)\big) = (x + ۳)^۲ \Rightarrow x + ۳ = ۱۵ \Rightarrow x = ۱۲$

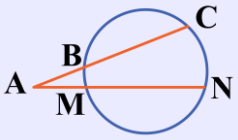
روابط طولی در دایره



$AM \times AN = AB \times AC$



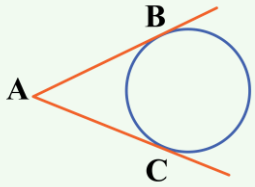
$AM^۲ = AB \times AC$



$AB \times AC = AM \times AN$

طول مماس بر دایره

طول **دو مماس** که از نقطه‌ای خارج از دایره بر آن رسم می‌شود با هم **برابر** است.



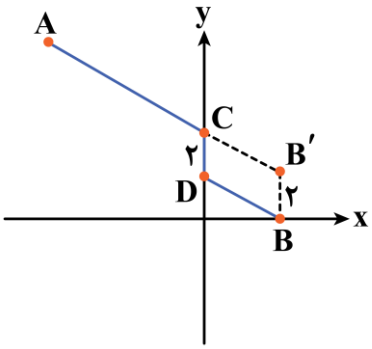
$$AB = AC$$

۳۱- نقاط $A(-۶,۸)$ و $B(۲,۰)$ در طرفین محور عرض‌ها و دو نقطهٔ C و D به فاصلهٔ دو واحد از هم روی محور yها قرار دارند. حداقل طول خط شکستهٔ ACDB کدام است؟

۱) ۹ ۲) ۱۰ ۳) ۱۱ ۴) ۱۲

پاسخ: گزینهٔ ۴ (آسان ـ مفهومی ـ سریع ـ هندسه ۲ صفحهٔ ۵۳ ـ ۱۱۰۲)

ابتدا نقطهٔ B را به اندازهٔ طول پاره‌خط CD و به **موازات محور yها** به سمت **بالا** انتقال می‌دهیم تا به نقطهٔ $B'(۲,۲)$ برسیم و سپس فاصلهٔ نقطهٔ $A(-۶,۸)$ را از نقطهٔ B' به‌دست می‌آوریم:



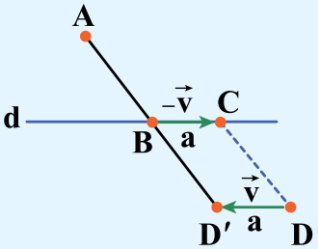
$$|AB'| = \sqrt{(-۶-۲)^۲ + (۸-۲)^۲} = \sqrt{۶۴+۳۶} = \sqrt{۱۰۰} = ۱۰$$

در نتیجه حداقل طول خط شکستهٔ ACDB برابر است با:

$$\min(ACDB) = |AB'| + |CD| = ۱۰ + ۲ = ۱۲$$

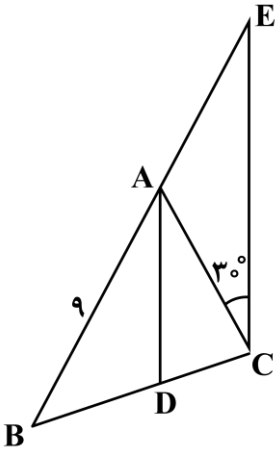
کاربردی از انتقال

اگر نقاط B و C به فاصلهٔ a روی خط d باشند، و نقاط A و D در طرفین خط d باشند، کم‌ترین طول خط شکستهٔ ABCD برابر با $AD' + a$ است. به‌طوری که D' انتقال‌یافتهٔ D به اندازهٔ a واحد **در راستای خط d و به سمت نقطهٔ A** است. همچنین B محل تلاقی AD' و خط d و C انتقال‌یافتهٔ B روی خط d است:



$$ABCD = AB + \underbrace{BC}_{a} + \underbrace{CD}_{BD'} = AD' + a$$

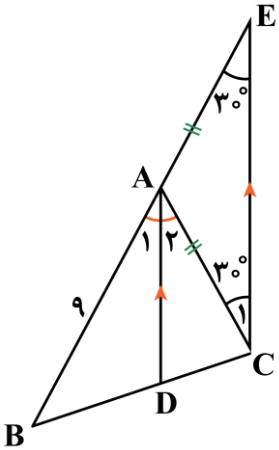
۳۲- در شکل زیر $AD \parallel EC$ و AD نیمساز زاویهٔ $B\hat{A}C$ است. اگر مساحت مثلث ACE برابر $۹\sqrt{۳}$ باشد، اندازهٔ BC کدام است؟



۱) ۸
۲) ۹
۳) $۳\sqrt{۷}$
۴) $۳\sqrt{۶}$

پاسخ: گزینهٔ ۳ (متوسط ـ مفهومی ـ استاندارد ـ هندسه ۲ صفحهٔ ۶۵ و ۶۸ ـ ۱۱۰۳)

با توجه به شکل مقابل، داریم:



$$\left.\begin{array}{l}\left.\begin{array}{l}AD \parallel EC\\ \text{مورب } AC\end{array}\right\} \Rightarrow \hat{A}_۲ = \hat{C}_۱\\ \left.\begin{array}{l}AD \parallel EC\\ \text{مورب } BE\end{array}\right\} \Rightarrow \hat{A}_۱ = \hat{E}\end{array}\right\} \xrightarrow[\hat{A}_۱=\hat{A}_۲]{\text{نیمساز } AD} \hat{C}_۱ = \hat{E} = ۳۰^\circ$$

چون $\hat{C}_۱ = \hat{E} = ۳۰^\circ$ است، بنابراین مثلث AEC **متساوی‌الساقین** بوده $(AE = AC)$ و زاویهٔ $E\hat{A}C$ برابر ۱۲۰° است. از طرفی می‌دانیم که مساحت مثلث ACE برابر $۹\sqrt{۳}$ است، پس:

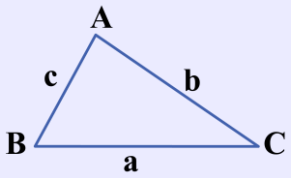
$$\begin{cases} S_{\overset{\Delta}{ACE}} = ۹\sqrt{۳} \Rightarrow \frac{۱}{۲} \times AC \times AE \times \underbrace{\sin ۱۲۰^\circ}_{\frac{\sqrt{۳}}{۲}} = ۹\sqrt{۳} \Rightarrow \frac{\sqrt{۳}}{۴} AC^۲ = ۹\sqrt{۳} \Rightarrow AC = ۶ \\ B\hat{A}C = ۶۰^\circ \end{cases}$$

حال به کمک **قضیهٔ کسینوس‌ها** در مثلث ABC داریم:

$$BC^۲ = AB^۲ + AC^۲ - ۲AB \times AC \times \cos(B\hat{A}C) \Rightarrow BC^۲ = ۸۱ + ۳۶ - (۲ \times ۹ \times ۶ \times \frac{۱}{۲})$$

$$\Rightarrow BC^۲ = ۸۱ + ۳۶ - ۵۴ = ۶۳ \Rightarrow BC = \sqrt{۶۳} = ۳\sqrt{۷}$$

قضیهٔ کسینوس‌ها



$$c^۲ = a^۲ + b^۲ - ۲ab\cos\hat{C}$$
$$b^۲ = a^۲ + c^۲ - ۲ac\cos\hat{B}$$
$$a^۲ = b^۲ + c^۲ - ۲bc\cos\hat{A}$$

۳۳- ماتریس $A=\begin{bmatrix}1&1\\0&1\end{bmatrix}$ مفروض است. مجموع درایه‌های قطر اصلی ماتریس $(A^{20}+I)^{-1}$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) -1 ۳) $\frac{1}{2}$ ۴) $-\frac{1}{2}$

پاسخ: گزینهٔ ۱ (متوسط ـ مفهومی/محاسباتی ـ استاندارد ـ هندسه ۳ صفحهٔ ۲۳ ـ ۱۲۰۱)

ابتدا ماتریس A^{20} را تشکیل می‌دهیم:

$$A^2=\begin{bmatrix}1&1\\0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&1\\0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&2\\0&1\end{bmatrix}$$

$$A^4=\begin{bmatrix}1&2\\0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&2\\0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&4\\0&1\end{bmatrix}$$

$$\vdots$$

با ادامهٔ همین روند داریم:

$$\Rightarrow A^{20}=\begin{bmatrix}1&20\\0&1\end{bmatrix}$$

$$(A^{20}+I)=\begin{bmatrix}1&20\\0&1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2&20\\0&2\end{bmatrix}$$

$$(A^{20}+I)^{-1}=\frac{1}{(2\times2)-(20\times0)}\begin{bmatrix}2&-20\\0&2\end{bmatrix}=\frac{1}{4}\begin{bmatrix}2&-20\\0&2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{1}{2}&-5\\0&\frac{1}{2}\end{bmatrix}$$

مجموع درایه‌های قطر اصلی: $\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1$

ضرب دو ماتریس

۱) ضرب ماتریس سطری در ماتریس ستونی:

$$\begin{bmatrix}a_1&a_2&\dots&a_n\end{bmatrix}\begin{bmatrix}b_1\\b_2\\\vdots\\b_n\end{bmatrix}=a_1b_1+a_2b_2+\dots+a_nb_n$$

۲) ضرب دو ماتریس: ضرب دو ماتریس A و B یعنی $A\times B$ به شرطی قابل انجام است که تعداد ستون A با تعداد سطر B برابر باشد. در این صورت، اگر $A_{m\times n}$ و $B_{n\times p}$ باشد، $C_{m\times p}=A_{m\times n}\times B_{n\times p}$ ماتریسی $m\times p$ است و هر درایه C_{ij} از آن از ضرب سطر i ام A در ستون j ام B به‌دست می‌آید.

ویژگی‌های ضرب ماتریس‌ها

۱) $A\times B\neq B\times A$

۲) $A\times I=I\times A=A$

۳) $A^2=A\times A$

۴) $(kA)^n=k^n\times A^n\ ;\ (k\in\mathbb{R})$

دترمینان و وارون ماتریس ۲×۲

اگر $A=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ یک ماتریس ۲×۲ باشد، آن‌گاه:

$$|A| = ad - bc$$

اگر $|A| \neq ۰$ باشد، A **وارون‌پذیر** است و داریم:

$$A^{-۱} = \frac{۱}{|A|}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

یک ماتریس معروف

در ماتریس معروف $A=\begin{bmatrix} ۱ & ۱ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix}$، داریم:

$$A^{n} = \begin{bmatrix} ۱ & n \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix}$$

۳۴- اگر $A=\begin{bmatrix} ۱ & x-۱ & -۱ \\ x+۱ & ۰ & ۱ \end{bmatrix}$، $B=\begin{bmatrix} ۳ & x \\ ۴ & ۰ \\ x & -x \end{bmatrix}$ و درایهٔ سطر دوم و ستون اول از ماتریس AB برابر ۷ باشد، حاصل $|BA+I|$ کدام است؟

۱) -۴ ۲) ۸ ۳) ۴ ۴) -۸

پاسخ: گزینهٔ ۴ (متوسط ـ مفهومی/ترکیبی ـ استاندارد ـ هندسه ۳ صفحهٔ ۲۸ ـ ۱۲۰۱)

اگر $C=AB$ باشد، آن‌گاه:

$$C_{۲۱} = [\text{سطردوم}\ A]\begin{bmatrix} \text{ستون} \\ \text{اول} \\ B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x+۱ & ۰ & ۱ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۳ \\ ۴ \\ x \end{bmatrix} = ۷$$

$$\Rightarrow ۳x+۳+۰+x=۷ \Rightarrow x=۱$$

حال ماتریس BA و سپس $BA+I$ را تشکیل می‌دهیم:

$$BA = \begin{bmatrix} ۳ & ۱ \\ ۴ & ۰ \\ ۱ & -۱ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۱ & ۰ & -۱ \\ ۲ & ۰ & ۱ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۵ & ۰ & -۲ \\ ۴ & ۰ & -۴ \\ -۱ & ۰ & -۲ \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow BA+I = \begin{bmatrix} ۶ & ۰ & -۲ \\ ۴ & ۱ & -۴ \\ -۱ & ۰ & -۱ \end{bmatrix} \Rightarrow |BA+I| = ۶(-۱)-۰-۲(+۱) = -۸$$

دترمینان ماتریس ۳×۳

برای یافتن دترمینان ماتریس ۳×۳ حول سطر یا ستونی از آن، درایهٔ هر سطر را در $(-1)^{i+j}$ که i شمارهٔ سطر و j شمارهٔ ستون آن درایه است ضرب می‌کنیم، سپس عدد حاصل را در دترمینان ماتریس ۲×۲ ای که از حذف سطر i ام و ستون j ام ماتریس به‌دست آمده است ضرب می‌کنیم. در نهایت سه عدد به‌دست آمده را با هم جمع می‌کنیم.

یه نمونهٔ باحال ببین!

دترمینان زیر را حول سطر اول می‌یابیم:

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = a\times(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} e & f \\ h & i \end{vmatrix} + b(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} d & f \\ g & i \end{vmatrix} + c(-1)^{1+3}\begin{vmatrix} d & e \\ g & h \end{vmatrix}$$

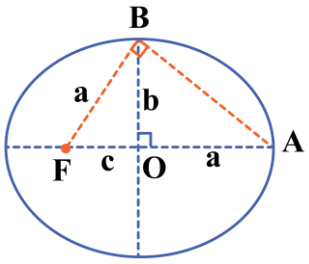
ماز

۳۵- در یک بیضی پاره‌خط‌هایی که از یک سر قطر کوچک بیضی، به یکی از کانون‌ها و یک سر قطر بزرگ وصل شده‌اند، بر هم عمودند. خروج از مرکز این بیضی کدام است؟

۱) $\frac{\sqrt{5}-1}{4}$ ۲) $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ ۳) $\frac{\sqrt{5}+1}{4}$ ۴) $\frac{\sqrt{5}}{4}$

پاسخ: گزینهٔ ۲ (متوسط ـ مفهومی ـ استاندارد ـ هندسه ۳ صفحهٔ ۴۹ ـ ۱۲۰۲)

مثلث AFB قائم‌الزاویه است و OB ارتفاع وارد بر وتر است و می‌دانیم **ارتفاع وارد بر وتر واسطهٔ هندسی** بین **دو قطعهٔ ایجاد شده روی وتر** است.



$$b^2 = ac \xrightarrow{b^2=a^2-c^2} a^2 - c^2 = ac \xrightarrow{\div a^2} 1-(\frac{c}{a})^2 = (\frac{c}{a})$$

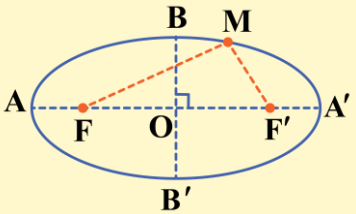
حال چون خروج از مرکز بیضی برابر $e=\frac{c}{a}$ است، داریم:

$$1-e^2 = e \Rightarrow e^2+e-1=0 \xrightarrow{\Delta=5} e=\frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$$

چون $e>0$ است، بنابراین: $e=\frac{\sqrt{5}-1}{2}$

بیضی

در هر بیضی، **مجموع فواصل** هر نقطه روی بیضی **از دو نقطهٔ ثابت** F و F′ (کانون‌های بیضی) برابر با **مقدار ثابت** 2a است.



$$MF + MF' = 2a$$

سه پارامتر مهم بیضی به‌صورت زیر هستند:

طول قطر بزرگ $= AA' = 2a$

طول قطر کوچک $= BB' = 2b$

فاصلهٔ کانونی $= FF' = 2c$

در این صورت:

$$\text{مرکز بیضی} = O = \frac{A+A'}{۲} = \frac{B+B'}{۲} = \frac{F+F'}{۲}$$

$$\text{رابطهٔ طلایی بیضی}: a^۲ = b^۲ + c^۲$$

خروج از مرکز بیضی

در هر بیضی با طول قطر بزرگ $۲a$ و فاصله کانونی $۲c$، خروج از مرکز بیضی برابر است با:

$$e = \frac{c}{a}$$

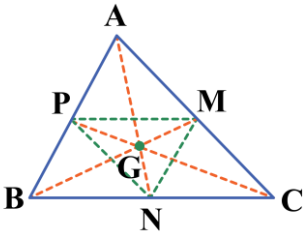
e عددی بین صفر و یک است و هر چه **به صفر نزدیک‌تر** باشد بیضی **به دایره شبیه‌تر** است، همچنین هر چه **به یک نزدیک‌تر** باشد بیضی **به پاره‌خط شبیه‌تر** است.

۳۶- در مثلث ABC نقطهٔ $G(۰,۱,۱)$ محل همرسی میانه‌ها و نقاط $M(-۱,۰,۱)$ و $N(۱,۱,۰)$ به‌ترتیب وسط اضلاع AC و BC هستند، مساحت مثلث ABC کدام است؟

۱) $۲۴\sqrt{۳}$ ۲) $۱۲\sqrt{۳}$ ۳) $۶\sqrt{۳}$ ۴) $۳\sqrt{۳}$

پاسخ: گزینهٔ ۳ (متوسط ـ مفهومی ـ استاندارد ـ هندسه ۳ صفحهٔ ۸۱ ـ ۱۲۰۳)

می‌دانیم مساحت مثلث MNP، $\frac{۱}{۴}$ مساحت مثلث ABC و مساحت مثلث GMN نیز $\frac{۱}{۳}$ مساحت مثلث MNP است، بنابراین:



$$S_{\overset{\triangle}{GMN}} = \frac{۱}{۳} \times \frac{۱}{۴} S_{\overset{\triangle}{ABC}} = \frac{۱}{۱۲} S_{\overset{\triangle}{ABC}}$$

پس کافی است مساحت مثلث GMN را پیدا کرده و سپس آن را در ۱۲ ضرب کنیم:

$$\begin{cases} \overrightarrow{GM} = M - G = (-۱,۰,۱) - (۰,۱,۱) = (-۱,-۱,۰) \\ \overrightarrow{GN} = N - G = (۱,۱,۰) - (۰,۱,۱) = (۱,۰,-۱) \end{cases}$$

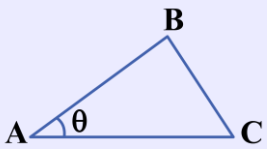
$$\overrightarrow{GM} \times \overrightarrow{GN} = (۱,-۱,۱) \Rightarrow S_{\overset{\triangle}{GMN}} = \frac{۱}{۲}\left|\overrightarrow{GM} \times \overrightarrow{GN}\right| = \frac{\sqrt{۳}}{۲}$$

بنابراین مساحت مثلث ABC برابر است با:

$$S_{\overset{\triangle}{ABC}} = ۱۲\left(\frac{\sqrt{۳}}{۲}\right) = ۶\sqrt{۳}$$

مساحت مثلث و بردارها!

مساحت هر مثلث مانند ABC برابر است با:



$$S = \frac{۱}{۲} AB \times AC \times \sin\theta = \frac{۱}{۲}\left|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\right|$$

ضرب داخلی و خارجی

اگر $\vec{a}$ و $\vec{b}$ دو بردار با زاویهٔ بین θ باشند، حاصل‌ضرب داخلی و خارجی آن‌ها برابر است با:

۱) حاصل‌ضرب داخلی:

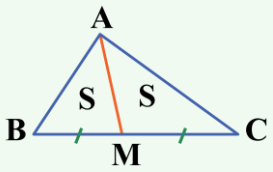
$$\vec{a}.\vec{b}=(a_1,a_2,a_3).(b_1,b_2,b_3)=a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta$$

۲) حاصل‌ضرب خارجی:

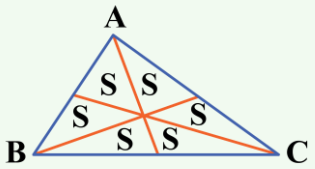
$$\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix} i & j & k \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}\Rightarrow|\vec{a}\times\vec{b}|=|\vec{a}||\vec{b}|\sin\theta$$

مساحت مثلث‌های ایجادشده در مثلث با رسم میانه

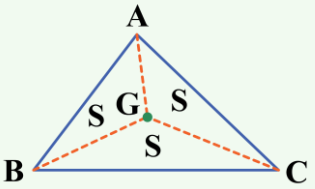
۱) هر میانهٔ مثلث، آن را به **دو مثلث هم‌مساحت** تقسیم می‌کند.



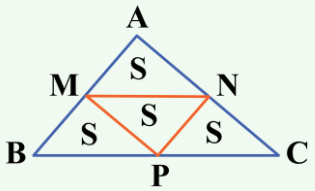
۲) سه میانه مثلث را به **شش مثلث هم‌مساحت** تقسیم می‌کنند.



۳) اگر G **محل تلاقی میانه‌ها** باشد، پاره‌خط‌های GA، GB و GC، مثلث را به **سه مثلث هم‌مساحت** تقسیم می‌کنند.



۴) اگر **وسط اضلاع مثلث** را به هم وصل کنیم **چهار مثلث هم‌مساحت** به وجود می‌آید.



توجه!

اگر G محل تلاقی میانه‌های $\overset{\triangle}{ABC}$ باشد، محل تلاقی میانه‌های $\overset{\triangle}{MNP}$ نیز هست.

۳۷- در یک عمل تقسیم، خارج قسمت برابر با ۷ و باقی‌مانده برابر با ۱۵ است. اگر مقسوم بر ۵ بخش‌پذیر باشد، مجموع ارقام کوچک‌ترین مقدار ممکن برای مقسوم کدام است؟

۱) ۹ ۲) ۱۰ ۳) ۱۱ ۴) ۱۲

پاسخ: گزینهٔ ۳ (متوسط ـ مفهومی ـ استاندارد ـ گسسته صفحهٔ ۲۲ ـ ۱۲۰۱)

روش اول

روش مفهومی:

اگر **a مقسوم** و **b مقسوم‌علیه** باشد، ابتدا **رابطهٔ تقسیم** را تشکیل می‌دهیم:

$$a = ۷b + ۱۵$$

از طرفی **باقی‌مانده** باید همواره **کوچک‌تر** از **مقسوم‌علیه** باشد، پس:

$$b > ۱۵ \Rightarrow b \geq ۱۶$$

می‌دانیم که مقسوم یعنی a بر ۵ بخش‌پذیر است و چون عدد ۱۵ خودش بر ۵ بخش‌پذیر است، پس برای این‌که کل عبارت $(۷b+۱۵)$ بر ۵ بخش‌پذیر باشد، عبارت $۷b$ هم حتماً باید **بر ۵ بخش‌پذیر** باشد به عبارت دیگر $۷b \overset{۵}{\equiv} ۰$؛ از طرفی چون ۷ و ۵ **نسبت به هم اول** هستند، پس نتیجه می‌گیریم که b باید مضرب ۵ باشد و می‌دانیم که $b \geq ۱۶$ است. بنابراین **کوچک‌ترین عدد بعد از ۱۶** که **مضرب ۵** باشد، عدد ۲۰ است. پس: $b_{min} = ۲۰$

در نتیجه **حداقل** مقدار ممکن برای **مقسوم** برابر است با:

$$a_{min} = ۷(۲۰) + ۱۵ = ۱۵۵ \xrightarrow{\text{مجموع ارقام}} ۱ + ۵ + ۵ = ۱۱$$

روش دوم

روش محاسباتی:

فرض کنیم $a = ۷b + ۱۵$ باشد:

$$۵ | a \Rightarrow a \overset{۵}{\equiv} ۰ \Rightarrow ۷b + ۱۵ \overset{۵}{\equiv} ۰ \Rightarrow ۷b \overset{۵}{\equiv} -۱۵ \Rightarrow ۷b \overset{۵}{\equiv} ۰$$

$$\xrightarrow{(۷,۵)=۱} b \overset{۵}{\equiv} ۰ \Rightarrow b = ۵k \xrightarrow{b \geq ۱۶} b_{min} = ۲۰$$

$$\Rightarrow a_{min} = ۷(۲۰) + ۱۵ = ۱۵۵ \xrightarrow{\text{مجموع ارقام}} ۱ + ۵ + ۵ = ۱۱$$

۳۸- رقم یکان بزرگ‌ترین عدد طبیعی دو رقمی a که در معادلهٔ همنهشتی $۷۳a \overset{۲۹}{\equiv} ۱۱$ صدق می‌کند، کدام است؟

۱) ۳ ۲) ۴ ۳) ۷ ۴) صفر

پاسخ: گزینهٔ ۴ (متوسط ـ محاسباتی ـ استاندارد ـ گسسته صفحهٔ ۲۵ ـ ۱۲۰۱)

با توجه به خواص همنهشتی داریم:

$$۷۳a \overset{۲۹}{\equiv} ۱۱ \xrightarrow{۷۳a = ۲ \times ۲۹a + ۱۵a} ۱۵a \overset{۲۹}{\equiv} ۱۱ \xrightarrow{-۲۹} ۱۵a \overset{۲۹}{\equiv} -۱۸$$

$$\xrightarrow[(۲۹,۳)=۱]{\div ۳} ۵a \overset{۲۹}{\equiv} -۶ \xrightarrow{-۲۹} ۵a \overset{۲۹}{\equiv} -۳۵$$

$$\xrightarrow[(۲۹,۵)=۱]{\div ۵} a \overset{۲۹}{\equiv} -۷ \Rightarrow a = ۲۹k - ۷$$

به‌ازای $k = ۳$ مقدار a برابر ۸۰ به‌دست می‌آید که بزرگ‌ترین مقدار دو رقمی ممکن برای a است.

به عبارت دیگر می‌توان گفت:

$$۲۹k - ۷ < ۱۰۰ \Rightarrow k < \frac{۱۰۷}{۲۹} \Rightarrow k < ۳/...$$

$$\Rightarrow k \leq ۳ \Rightarrow a = ۲۹(۳) - ۷ = ۸۰$$

همنهشتی

اگر باقی‌ماندهٔ تقسیم a بر m برابر با r باشد، آن‌گاه می‌گوییم a و r در پیمانهٔ m همنهشت‌اند و می‌نویسیم:

$$a \overset{m}{\equiv} r \Leftrightarrow a = mq + r \Leftrightarrow m \mid a - r$$

نتیجه: اگر باقی‌ماندهٔ تقسیم a و b بر m یکسان باشد، می‌گوییم a و b در پیمانهٔ m همنهشت‌اند:

$$a \overset{m}{\equiv} b \Leftrightarrow m \mid a - b$$

ویژگی‌های همنهشتی

۱) $a \overset{m}{\equiv} b \Rightarrow \begin{cases} a + mq \overset{m}{\equiv} b \ \ (q \in \mathbb{Z}) \\ a \overset{m}{\equiv} b + mq' \ \ (q' \in \mathbb{Z}) \end{cases}$

۲) $a \overset{m}{\equiv} b \Rightarrow \begin{cases} a + c \overset{m}{\equiv} b + c \\ a - c \overset{m}{\equiv} b - c \\ ac \overset{m}{\equiv} bc \end{cases}$

۳) **تقسیم** : $ac \overset{m}{\equiv} bc \xrightarrow{(c,m)=d} a \overset{\frac{m}{d}}{\equiv} b$

نتیجه : $ac \overset{m}{\equiv} bc \xrightarrow[\div c]{(c,m)=1} a \overset{m}{\equiv} b$

۴) $a \overset{m}{\equiv} b \ , \ b \overset{m}{\equiv} c \Rightarrow a \overset{m}{\equiv} c$

۵) $a \overset{m}{\equiv} b \Rightarrow a^n \overset{m}{\equiv} b^n$

معادلهٔ همنهشتی

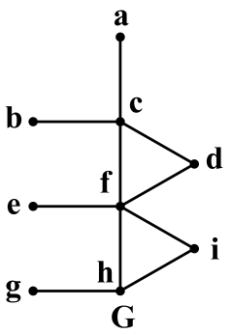
معادله به شکل $ax \overset{m}{\equiv} b$ را یک معادلهٔ همنهشتی می‌گویند.

شرط لازم و کافی وجود جواب برای چنین معادله‌ای به‌صورت زیر است:

$$(a,m) \mid b$$

برای حل معادله باید xهایی را بیابیم که رابطهٔ همنهشتی به‌ازای آن‌ها برقرار باشد. برای این منظور، ابتدا به کمک ویژگی‌های همنهشتی معادله را به شکل $x \overset{m}{\equiv} c$ درمی‌آوریم، در نتیجه داریم: $x = mq + c \ (q \in \mathbb{Z})$

۳۹- در گراف شکل مقابل، احتمال این‌که یک $\gamma-$مجموعه، شامل رأسی با درجهٔ ۱ باشد، چقدر است؟



۱) $\frac{۱}{۴}$

۲) $\frac{۱}{۳}$

۳) $\frac{۱}{۲}$

۴) $\frac{۲}{۳}$

پاسخ: گزینهٔ ۴ (آسان ـ مفهومی/ترکیبی ـ سریع ـ گسسته صفحهٔ ۴۷ ـ ۱۲۰۲)

در گراف شکل داده‌شده، $\gamma(G)=۳$ است و این گراف دارای ۳ **مجموعهٔ احاطه‌گر مینیمم** است که عبارتند از:

$\{c,f,g\},\{e,c,h\},\{c,f,h\}$

از طرفی در بین این سه مجموعه، مجموعه‌های $\{c,f,g\},\{e,c,h\}$، هر کدام شامل یک رأس درجهٔ ۱ هستند. بنابراین احتمال موردنظر برابر است با:

$$P=\frac{۲}{۳}$$

مجموعهٔ احاطه‌گر

اگر زیرمجموعه‌ای از رأس‌های گراف را درنظر بگیریم، به گونه‌ای که **هر رأس** گراف **یا در این مجموعه** باشد **یا با حداقل یک رأس آن مجاور** باشد، این مجموعه **مجموعهٔ احاطه‌گر** نامیده می‌شود.

مجموعهٔ احاطه‌گر مینیمم

به مجموعهٔ احاطه‌گری که **کمترین تعداد رأس‌ها** را داشته باشد، مجموعهٔ **احاطه‌گر مینیمم** یا اصطلاحاً **$\gamma-$مجموعه** گفته می‌شود.

مجموعهٔ احاطه‌گر مینیمال

به مجموعهٔ احاطه‌گری که با **حذف** هر یک از رأس‌هایش دیگر **احاطه‌گر نباشد**، مجموعهٔ **احاطه‌گر مینیمال** گفته می‌شود.

مینیمم یا مینیمال، مسئله این است!

دقت کنید که یک مجموعهٔ احاطه‌گر مینیمم همیشه مینیمال است **اما** یک مجموعهٔ احاطه‌گر مینیمال لزوما احاطه‌گر مینیمم نیست و کمترین تعداد اعضا را ندارد.

عدد احاطه‌گری

به **تعداد رأس‌های مجموعهٔ احاطه‌گر مینیمم** گراف G **عدد احاطه‌گری** گراف می‌گوییم و آن را با $\gamma(G)$ نشان می‌دهیم.

۴۰- در یک اجتماع، ۱۹۱ نفر حضور دارند که در بین آن‌ها ۱۳ جعبه وجود دارد. هر یک از آنان به تصادف سه تا از جعبه‌ها را انتخاب کرده و در درون هر کدام یک مهره می‌اندازد. جعبه‌ای که در بین همهٔ جعبه‌ها بیش‌ترین مهره را داشته باشد، حداقل شامل چند مهره است؟

۱) ۴۷ ۲) ۴۸ ۳) ۴۴ ۴) ۴۵

پاسخ: گزینهٔ ۴ (متوسط ـ محاسباتی ـ استاندارد ـ گسسته صفحهٔ ۸۰ ـ ۱۲۰۳)

روش اول

تعداد کل مهره‌ها ۳×۱۹۱ یعنی ۵۷۳ مهره است که اگر آن‌ها را به‌طور **مساوی** بین ۱۳ جعبه تقسیم کنیم به هر یک از آن‌ها ۴۴ مهره می‌رسد و **۱ مهره اضافه** می‌ماند که اگر آن را در یکی از جعبه‌ها قرار دهیم درستی گزارهٔ زیر حاصل می‌شود:

«در هر شرایطی جعبه‌ای وجود دارد که تعداد مهره‌های درونش ۴۵ یا بیشتر باشد.»

روش دوم

در بدترین شرایط، **جعبه‌ها** به‌طور **مساوی** انتخاب می‌شوند، یعنی هر جعبه به تعداد مساوی و بیشترین تعداد دفعهٔ ممکن توسط افراد انتخاب می‌شود. با توجه به این‌که در کل ۱۳ جعبه داریم، اگر هر جعبه را ۱۴ نفر انتخاب کرده باشند:

$۱۳ \times ۱۴ = ۱۸۲$

یعنی ۱۸۲ نفر جعبه‌هایشان را انتخاب کرده‌اند و تنها $۱۹۱ - ۱۸۲ = ۹$ نفر باقی‌مانده‌اند که هنوز جعبه انتخاب نکرده‌اند.

با انتخاب این ۹ نفر جعبه‌ای وجود دارد که حداقل ۱۵ نفر آن را انتخاب کرده‌اند، پس در این جعبه حداقل $۳ \times ۱۵ = ۴۵$ مهره وجود دارد.

اصل لانه‌کبوتری و بدترین حالت ممکن

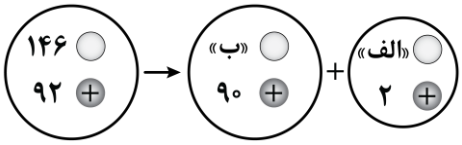
نوعی از سؤالات مربوط به اصل لانه‌کبوتری هستند که با در نظر گرفتن بدترین حالت ممکن به جواب می‌رسند. به این صورت که به بدترین شکلی که می‌توانیم کبوترها را در لانه‌ها جای می‌دهیم تا شرط مطلوب برآورده نشود، تا به جایی می‌رسیم که اگر تنها **یک کبوتر دیگر** را **در هر لانه‌ای** جای بدهیم شرط مطلوب برآورده می‌شود.

بودجه‌بندی این آزمون

جامع شبیه‌ساز کنکور سراسری

برای دیدن پاسخ‌نامهٔ ویدئویی آزمون QR Code بالا را اسکن یا روی آن کلیک کنید!

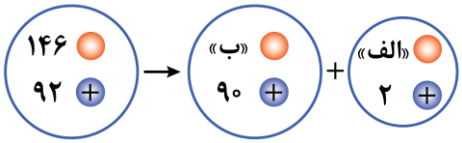
۴۱- شکل زیر، واپاشی آلفا برای اورانیم ۲۳۸ را نشان می‌دهد. در شکل زیر به‌جای «الف» و «ب» به‌ترتیب از راست به چپ، چه اعدادی باید قرار گیرند؟



۱) ۲، ۱۴۴
۲) ۴، ۱۴۴
۳) ۲، ۱۴۲
۴) ۴، ۱۴۲

پاسخ: گزینهٔ ۱ (آسان ـ مفهومی ـ سریع ـ صفحهٔ ۱۴۳ ـ ۱۲۰۶)

با توجه به معادلهٔ واپاشی داده‌شده، مشخص است که ذرهٔ گسیل‌شده آلفا $({}^{۴}_{۲}\alpha)$ است؛ بنابراین ذرهٔ گسیل‌شده شامل ۲ نوترون بوده و عدد مربوط به «الف» برابر ۲ است. حال معادلهٔ واپاشی را می‌توان به‌صورت زیر نوشت:



$${}^{۲۳۸}_{۹۲}X \rightarrow {}^{A}_{۹۰}Y + {}^{۴}_{۲}\alpha:\ A = ۲۳۸ - ۴ = ۲۳۴$$

تعداد نوترون‌های هستهٔ دختر: $N = A - Z = ۲۳۴ - ۹۰ = ۱۴۴$

بنابراین اعداد مربوط به «الف» و «ب» به‌ترتیب برابر ۲ و ۱۴۴ خواهد بود.

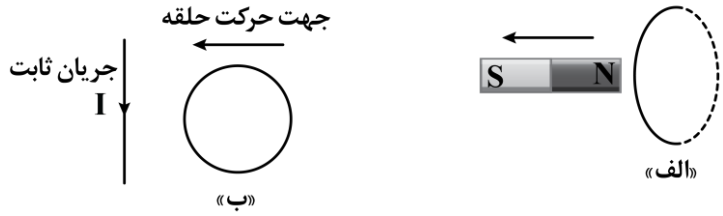
۴۲- اساس کار کدام وسیله، با بقیه متفاوت است؟

۱) دمانگار ۲) دماپا ۳) تف‌سنج ۴) پرتوسنج

پاسخ: گزینهٔ ۲ (آسان ـ خط‌به‌خط ـ سریع ـ صفحهٔ ۱۱۶ ـ ۱۰۰۴)

اساس کار دمانگار، تف‌سنج و پرتوسنج (رادیومتر)، تابش گرمایی است اما دماپا (ترموستات) براساس انبساط گرمایی یک نوار دوفلزه کار می‌کند.

۴۳- در شکل‌های «الف» و «ب»، جهت جریان الکتریکی القاشده در حلقه‌ها به‌ترتیب کدام است؟

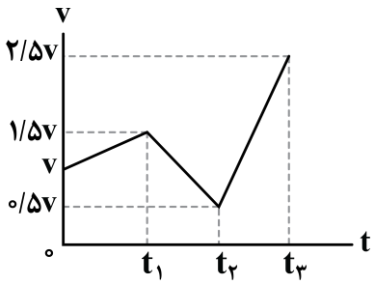


۱)
۲)
۳)
۴)

پاسخ: گزینهٔ ۳ (آسان ـ مفهومی ـ سریع ـ صفحهٔ ۱۱۷ ـ ۱۱۰۴)

جهت جریان القایی در حلقه‌ها را باید به کمک قانون لنز به‌دست بیاوریم. در شکل «الف»، آهنربا درحال دور شدن است، پس جهت جریان القایی باید در بخش جلویی حلقه رو به پایین باشد و در شکل «ب»، حلقه درحال نزدیک شدن است و شار مغناطیسی درحال افزایش است، پس جهت جریان القایی باید در آن ساعتگرد باشد.

۴۴- نمودار سرعت ـ زمان متحرکی که بر روی خط راست حرکت می‌کند، مطابق شکل زیر است. در کدام بازهٔ زمانی متحرک بیش‌ترین تندی متوسط را دارد؟



۱) $(0-t_1)$
۲) (t_1-t_2)
۳) (t_2-t_3)
۴) (t_1-t_3)

پاسخ: گزینهٔ ۳ (متوسط ـ محاسباتی ـ استاندارد ـ صفحهٔ ۱۹ ـ ۱۲۰۱)

با توجه به این‌که نمودار سرعت ـ زمان متحرک بالای محور t است، درمی‌یابیم متحرک تغییر جهت نداده و همواره در جهت محور x حرکت می‌کند؛ بنابراین تندی متوسط و اندازهٔ سرعت متوسط متحرک در تمام بازه‌ها یکسان است.

از طرفی می‌دانیم وقتی نمودار سرعت ـ زمان در یک بازهٔ زمانی به‌صورت خطی است، سرعت متوسط در آن بازه برابر است با میانگین سرعت ابتدا و انتهای بازه؛ بنابراین می‌توانیم بنویسیم:

$$s_{av}=|v_{av}|\xrightarrow{v_{av}>0}s_{av}=v_{av}=\frac{v_1+v_2}{2}$$

$$s_{av(0-t_1)}=\frac{v+1/5v}{2}=1/25v$$

$$s_{av(t_1-t_2)}=\frac{1/5v+0/5v}{2}=v$$

$$s_{av(t_2-t_3)}=\frac{0/5v+2/5v}{2}=1/5v$$

$$s_{av(t_1-t_2)}<s_{av(t_1-t_3)}<s_{av(t_2-t_3)}\Rightarrow v<s_{av(t_1-t_3)}<1/5v$$

بنابراین بیش‌ترین تندی متوسط در بازهٔ زمانی t_2 تا t_3 است.

نکته

در نمودار سرعت ـ زمان حرکت بر روی خط راست، وقتی نمودار محور t را قطع نکند و به‌صورت خطی باشد، تندی متوسط در یک بازهٔ زمانی برابر است با اندازهٔ میانگین سرعت ابتدا و انتهای آن بازهٔ زمانی؛ یعنی:

$$s_{av}=\left|\frac{v_1+v_2}{2}\right|$$

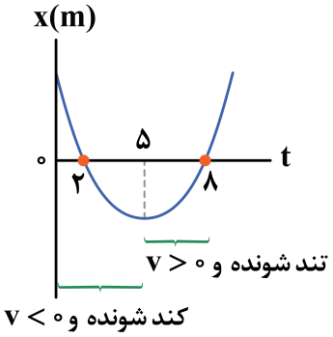
۴۵- معادلهٔ حرکت متحرکی در SI به‌صورت $x=t^2-10t+16$ است. در ۸ ثانیهٔ اول حرکت، نسبت مدت‌زمانی که این متحرک کندشونده حرکت کرده است، به مدت‌زمانی که در خلاف جهت محور x حرکت کرده است، کدام است؟

۱) ۱
۲) $\frac{3}{5}$
۳) $\frac{5}{3}$
۴) $\frac{1}{2}$

پاسخ: گزینهٔ ۱ (متوسط ـ محاسباتی ـ استاندارد ـ صفحهٔ ۱۷ ـ ۱۲۰۱)

روش اول

نمودار مکان ـ زمان متحرک را رسم می‌کنیم:



$x = t^{۲} - ۱۰t + ۱۶ = (t-۲)(t-۸)$

ریشه‌های $x-t$: $x = ۰ \Rightarrow t = ۲s\ ,\ t = ۸s$

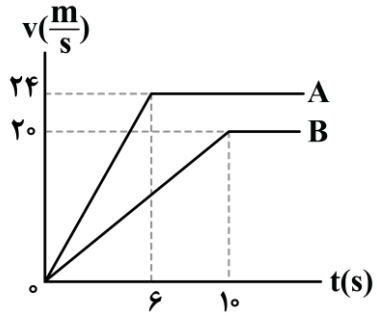
رأس سهمی: $t' = \frac{-B}{۲A} = \frac{-(-۱۰)}{۲} = ۵s$

با توجه به نمودار مکان ـ زمان متحرک درمی‌یابیم که در بازهٔ زمانی صفر تا $t = ۵s$ حرکت کندشونده بوده و در همین بازهٔ زمانی متحرک در خلاف جهت محور x حرکت کرده است؛ بنابراین نسبت مدت‌زمانی که حرکت متحرک کندشونده بوده به مدت‌زمانی که متحرک در خلاف جهت محور x حرکت می‌کند، برابر با یک است.

روش دوم

با توجه به معادلهٔ مکان ـ زمان درجهٔ دو، درمی‌یابیم حرکت با شتاب ثابت است و طبق معادلهٔ $x = \frac{۱}{۲}at^{۲} + v_{۰}t + x_{۰}$ درمی‌یابیم شتاب متحرک $۲\frac{m}{s^{۲}}$ و سرعت اولیهٔ متحرک $-۱۰\frac{m}{s}$ است؛ بنابراین متحرک در لحظهٔ $t = \frac{-v_{۰}}{a}$ تغییر جهت می‌دهد و تا قبل از این لحظه با توجه به این‌که شتاب و سرعت متحرک در خلاف جهت هم هستند، حرکت کندشونده بوده و سرعت منفی است؛ درنتیجه در این حرکت، کندشونده بودن و حرکت در خلاف جهت محور x یک معنی دارند و نسبت آن‌ها یک است.

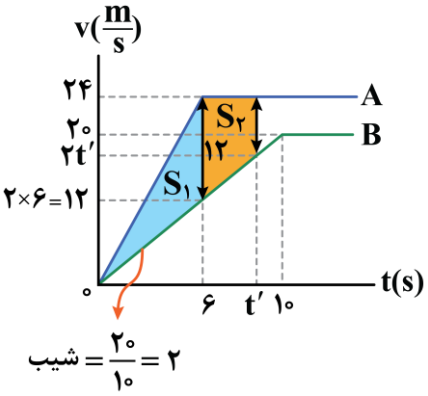
۴۶- شکل زیر، نمودار سرعت ـ زمان دو متحرک است که روی محور x از حال سکون به راه می‌افتند و متحرک B در مبدأ زمان ۶۳m جلوتر از متحرک A است. در لحظه‌ای که دو متحرک به‌هم می‌رسند، اختلاف تندی آن‌ها چند متر بر ثانیه است؟



۱) ۴
۲) ۵
۳) ۶
۴) ۸

پاسخ: گزینهٔ ۳ (سخت ـ محاسباتی ـ زمان‌بَر ـ صفحهٔ ۲۱ ـ ۱۲۰۱)

چون متحرک B در شروع حرکت به‌اندازهٔ ۶۳m جلوتر از متحرک A است، دو متحرک در لحظه‌ای به‌هم می‌رسند که متحرک A مسافتی به‌اندازهٔ ۶۳m بیش‌تر از متحرک B بپیماید؛ به عبارت دیگر باید لحظه‌ای را بیابیم که مساحت بین دو نمودار A و B برابر ۶۳m شود.



$S_{۱} = \frac{۶ \times (۲۴ - ۱۲)}{۲} = ۳۶$

$S_{۱} + S_{۲} = ۶۳ \xrightarrow{S_{۱}=۳۶} S_{۲} = ۲۷$

$S_{۲} = ۲۷ \Rightarrow \frac{۱۲ + (۲۴ - ۲t')}{۲} \times (t' - ۶) = ۲۷$

$\Rightarrow (-t' + ۱۸)(t' - ۶) = ۲۷ \Rightarrow -t'^{۲} + ۲۴t' - ۱۰۸ - ۲۷ = ۰ \Rightarrow t'^{۲} - ۲۴t' + ۱۳۵ = ۰$

$\Rightarrow (t' - ۹)(t' - ۱۵) = ۰ \Rightarrow \begin{cases} t' = ۹s\ (✓) \\ t' = ۱۵s\ (✗) \end{cases}$

بنابراین دو متحرک در لحظهٔ $t' = ۹s$ به‌هم می‌رسند. اختلاف سرعت دو متحرک در این لحظه برابر $۲۴ - ۲t' = ۲۴ - ۲\times۹ = ۶\frac{m}{s}$ است.

نکته

در نمودار سرعت ـ زمان برای دو متحرک، تغییرات فاصلهٔ بین دو متحرک در یک بازهٔ زمانی برابر است با مساحت محصور بین دو نمودار در آن بازهٔ زمانی.

۴۷- در شرایط خلأ، دو گلوله را به فاصلهٔ زمانی ۰/۵s از یک نقطه از ارتفاع زیاد رها می‌کنیم. بعد از رها شدن گلولهٔ دوم تا رسیدن گلولهٔ اول به زمین، به‌ترتیب از راست به چپ، فاصلهٔ دو گلوله و اختلاف سرعت دو گلوله چگونه تغییر می‌کند؟ $(g = ۱۰\frac{N}{kg})$

۱) ثابت، کاهش ۲) افزایش، افزایش ۳) کاهش، ثابت ۴) افزایش، ثابت

پاسخ: گزینهٔ ۴ (آسان ـ مفهومی ـ سریع ـ صفحهٔ ۲۴ ـ ۱۲۰۱)

دو گلوله با اختلاف زمانی $۰/۵s$ رها شده‌اند؛ بنابراین اختلاف سرعت آن‌ها ثابت و برابر $۰/۵\times۱۰ = ۵\frac{m}{s}$ است $(\Delta v = g\Delta t)$.

از طرفی چون همواره سرعت متحرک اول بیش‌تر است؛ بنابراین فاصلهٔ دو متحرک همواره درحال افزایش است.

نکته

وقتی دو متحرک درحال سقوط آزاد هستند، سرعت نسبی آن‌ها ثابت است.

۴۸- اتومبیلی به جرم ۲ تُن در یک مسیر دایره‌ای‌شکل، بر روی یک سطح افقی به شعاع ۴۰m با تندی ثابت دور می‌زند. اگر نیرویی که از طرف سطح زمین بر اتومبیل وارد می‌شود برابر $۲\sqrt{۲}\times۱۰^{۴}N$ باشد، تندی حرکت اتومبیل چند متر بر ثانیه است؟ $(g = ۱۰\frac{N}{kg})$

۱) ۱۰ ۲) ۲۰ ۳) $۲۰\sqrt{۲}$ ۴) ۴۰

پاسخ: گزینهٔ ۲ (متوسط ـ محاسباتی ـ استاندارد ـ صفحهٔ ۵۲ ـ ۱۲۰۲)

نیرویی که از طرف سطح زمین به اتومبیل وارد می‌شود (R)، برایند نیروهای عمودی سطح و اصطکاک است؛ بنابراین می‌توان نوشت:

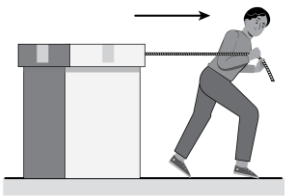
$$F_N = mg = ۲\times۱۰^{۳}\times۱۰ = ۲\times۱۰^{۴}N$$

$$R = \sqrt{F_N^{۲} + f_s^{۲}} \Rightarrow ۲\sqrt{۲}\times۱۰^{۴} = \sqrt{(۲\times۱۰^{۴})^{۲} + f_s^{۲}} \Rightarrow f_s = ۲\times۱۰^{۴}N$$

در این سؤال، نیروی اصطکاک نقش نیروی مرکزگرا را دارد؛ بنابراین می‌توان نوشت:

$$F_C = \frac{mv^{۲}}{r} \xrightarrow{F_C = f_s = ۲\times۱۰^{۴}N} ۲\times۱۰^{۴} = \frac{۲\times۱۰^{۳}v^{۲}}{۴۰} \Rightarrow v^{۲} = ۴۰۰ \Rightarrow v = ۲۰\frac{m}{s}$$

۴۹- شکل زیر، شخصی را نشان می‌دهد که درحال کشیدن یک جعبهٔ ۷۵ کیلوگرمی با نیروی ۴۰۰N روی سطح افقی است. نیرویی که شخص به جعبه وارد می‌کند افقی و جعبه درحال حرکت است. اگر ضریب اصطکاک جنبشی بین سطح و جعبه ۰/۴ باشد، شتاب جعبه چند متر بر مربع ثانیه است؟ $(g = ۱۰\frac{N}{kg})$



۱) $\frac{۴}{۳}$ ۲) $\frac{۳}{۴}$

۳) $\frac{۲}{۳}$ ۴) $\frac{۳}{۲}$

پاسخ: گزینهٔ ۱ (آسان ـ محاسباتی ـ استاندارد ـ صفحهٔ ۴۲ ـ ۱۲۰۲)

گام اول

نیروی اصطکاک جنبشی برابر است با:

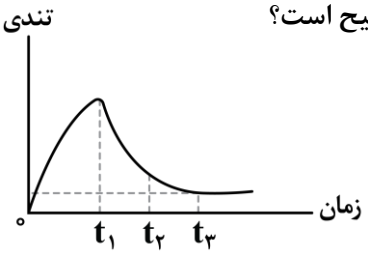
$$f_k = \mu_k F_N = \mu_k mg = ۰/۴ \times ۷۵ \times ۱۰ = ۳۰۰N$$

گام آخر

شتاب حرکت جعبه برابر است با:

$$F_{net} = ma \Rightarrow ۴۰۰ - ۳۰۰ = ۷۵a$$
$$\Rightarrow a = \frac{۴}{۳}\frac{m}{s^۲}$$

۵۰- نمودار تغییرات تندی برحسب زمان سقوط یک چترباز در هوا به‌صورت شکل زیر است. در لحظهٔ $t=۰$ چترباز به بیرون می‌پرد و در لحظهٔ $t_۱$ چتر خود را باز می‌کند. چه تعداد از گزاره‌های زیر در مورد حرکت این چترباز صحیح است؟



الف ـ در بازهٔ زمانی صفر تا $t_۱$، بزرگی نیروی خالص وارد بر چترباز درحال کاهش است.

ب ـ در بازهٔ زمانی $t_۱$ تا $t_۳$، جهت نیروی خالص وارد بر چترباز به طرف پایین است.

ج ـ در بازهٔ زمانی $t_۱$ تا $t_۳$، نیروی خالص وارد بر چترباز درحال کاهش است.

د ـ نیروی مقاومت هوا در لحظهٔ $t_۲$ بیش‌تر از لحظهٔ $t_۳$ است.

۱) ۴ ۲) ۳ ۳) ۲ ۴) ۱

پاسخ: گزینهٔ ۲ (متوسط ـ مفهومی ـ استاندارد ـ صفحهٔ ۳۶ ـ ۱۲۰۲)

بررسی موارد:

الف

در بازهٔ زمانی صفر تا $t_۱$، تندی درحال افزایش است؛ بنابراین نیروی مقاومت هوا در خلاف جهت حرکت درحال افزایش است؛ بنابراین نیروی خالص وارد بر چترباز درحال کاهش است. درواقع می‌توان گفت که در این بازهٔ زمانی، اندازهٔ شیب خط مماس بر نمودار (بزرگی شتاب) درحال کاهش است؛ بنابراین بزرگی نیروی خالص نیز درحال کاهش است. (✓)

ب

پس از باز شدن چتر در لحظهٔ $t_۱$، نیروی مقاومت هوا ناگهان افزایش می‌یابد و حرکت چترباز تا رسیدن به تندی حدی، کندشونده است؛ بنابراین جهت شتاب و نیروی خالص خلاف جهت حرکت و به سمت بالا است. (✗)

ج

در بازهٔ زمانی $t_۱$ تا $t_۳$، نیروی خالص وارد بر چترباز کاهش می‌یابد تا درنهایت به صفر برسد و چترباز به تندی حدی برسد. توجه کنید که در این بازهٔ زمانی نیز اندازهٔ شیب خط مماس بر نمودار یعنی بزرگی شتاب درحال کاهش است. (✓)

د

در بازهٔ $t_۱$ تا $t_۳$ که لحظهٔ $t_۲$ در آن قرار دارد، حرکت کندشونده است و نیروی مقاومت هوا بیش‌تر از وزن است. از لحظهٔ $t_۳$ به بعد، نیروی مقاومت هوا با وزن برابر است. (✓)

نکته

در حرکت سقوط چترباز در هیچ بازهٔ زمانی مشخصی اندازهٔ نیروی خالص و شتاب حرکت درحال افزایش نیست. (یا کاهش می‌یابد یا ثابت است) و جهت حرکت چترباز را همیشه رو به پایین درنظر بگیرید.

۵۱- وزنه‌ای به جرم ۴kg را به انتهای فنری به طول عادی ۱۲cm که ثابت آن $۲۰\frac{N}{cm}$ است، می‌بندیم و فنر را از سقف یک آسانسور آویزان می‌کنیم. اگر آسانسور با شتاب ثابت $۲/۵\frac{m}{s^۲}$ از حال سکون رو به بالا شروع به حرکت کند، طول فنر به چند سانتی‌متر می‌رسد؟ $(g=۱۰\frac{N}{kg})$

۱) ۹/۵ ۲) ۱۴/۵ ۳) ۱۰ ۴) ۱۴

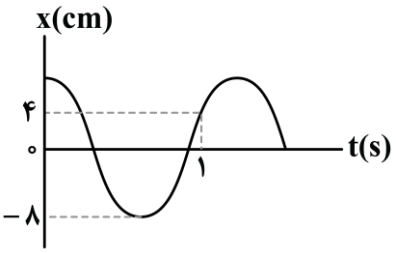
پاسخ: گزینهٔ ۲ (آسان ـ محاسباتی ـ استاندارد ـ صفحهٔ ۴۳ ـ ۱۲۰۲)

با توجه به آن‌که جهت شتاب آسانسور رو به بالاست، نیروی فنر برابر $F_e=m(g+a)$ است؛ بنابراین:

$$F_e=m(g+a)\Rightarrow kx=m(g+a)$$
$$\Rightarrow ۲۰x=۴(۱۰+۲/۵)\Rightarrow x=۲/۵cm$$

بنابراین فنر ۲/۵cm کش می‌آید و طول آن از ۱۲cm به ۱۴/۵cm می‌رسد.

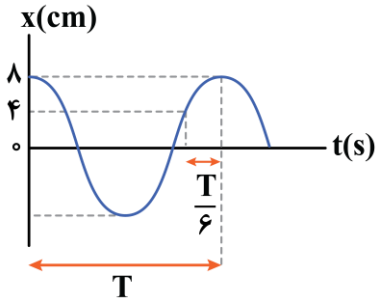
۵۲- نمودار مکان ـ زمان یک نوسانگر هماهنگ ساده به شکل زیر است. در یک بازهٔ زمانی دلخواه ۰/۳ ثانیه‌ای، حداکثر تندی متوسط نوسانگر چند سانتی‌متر بر ثانیه است؟



۱) $\frac{۸۰}{۳}$ ۲) $\frac{۴۰}{۳}$ ۳) $\frac{۸۰\sqrt{۲}}{۳}$ ۴) $\frac{۴۰\sqrt{۲}}{۳}$

پاسخ: گزینهٔ ۳ (متوسط ـ محاسباتی ـ استاندارد ـ صفحهٔ ۶۳ ـ ۱۲۰۳)

با استفاده از نمودار داده‌شده باید دورهٔ تناوب نوسانگر را به‌دست بیاوریم:



$$T-\frac{T}{۶}=۱\Rightarrow\frac{۵T}{۶}=۱\Rightarrow T=۱/۲s$$

برای محاسبهٔ بیش‌ترین تندی متوسط باید بیش‌ترین مسافت طی‌شده در بازهٔ زمانی دلخواه ۰/۳ ثانیه‌ای را به‌دست بیاوریم. حداکثر مسافت نوسانگر در حوالی مبدأ نمودار است. ۰/۳ ثانیه برابر $\frac{T}{۴}$ است؛ پس باید بازهٔ زمانی $\frac{T}{۸}$ قبل از $x=۰$ تا $\frac{T}{۸}$ بعد از $x=۰$ باشد؛ درنتیجه بیش‌ترین مسافت هنگامی است که نوسانگر از نقطهٔ $x=-\frac{\sqrt{۲}}{۲}A$ به نقطهٔ $x=\frac{\sqrt{۲}}{۲}A$ حرکت کند.

$$\ell_{max}=\frac{\sqrt{۲}}{۲}A+\frac{\sqrt{۲}}{۲}A=\sqrt{۲}A=\sqrt{۲}\times۸=۸\sqrt{۲}cm$$

درنتیجه حداکثر تندی متوسط برابر است با:

$$s_{av_{max}}=\frac{\ell_{max}}{\Delta t}=\frac{۸\sqrt{۲}}{۰/۳}=\frac{۸۰\sqrt{۲}}{۳}\frac{cm}{s}$$

نکته

حداکثر تندی متوسط نوسانگر هماهنگ ساده در یک بازهٔ زمانی کم‌تر از $\frac{T}{۲}$ به‌گونه‌ای است که نوسانگر در ابتدا و انتهای آن مسیر، فاصلهٔ یکسانی از وسط پاره‌خط نوسان داشته باشد و وسط پاره‌خط نوسان، دقیقاً وسط مسیر باشد.

۵۳- در یک سامانهٔ جرم ـ فنر افقی بدون اصطکاک، در لحظه‌ای که بزرگی سرعت نوسانگر $\frac{۱}{۳}$ بزرگی سرعت آن در مرکز نوسان است، انرژی پتانسیل نوسانگر $۱/۶J$ می‌باشد. اگر ثابت فنر $۳۶۰\frac{N}{m}$ و طول عادی فنر $۵۰cm$ باشد، حداکثر طول فنر در حین نوسان چند سانتی‌متر است؟

۱) ۴۰ ۲) ۵۵ ۳) ۶۰ ۴) ۷۰

پاسخ: گزینهٔ ۳ (متوسط ـ محاسباتی ـ استاندارد ـ صفحهٔ ۶۶ ـ ۱۲۰۳)

بزرگی سرعت در مرکز نوسان بیشینه است؛ پس:

$$v=\frac{۱}{۳}v_m$$

$$\frac{U}{E}=۱-(\frac{v}{v_m})^۲\Rightarrow\frac{۱/۶}{E}=۱-(\frac{۱}{۳})^۲\Rightarrow\frac{۱/۶}{E}=\frac{۸}{۹}$$

$$\Rightarrow E=۱/۸J$$

حالا طبق رابطهٔ انرژی مکانیکی نوسانگر جرم ـ فنر، دامنهٔ نوسان را به‌دست می‌آوریم:

$$E=\frac{۱}{۲}kA^۲\Rightarrow ۱/۸=\frac{۱}{۲}\times ۳۶۰A^۲$$

$$\Rightarrow A^۲=۰/۰۱\Rightarrow A=۰/۱m=۱۰cm$$

درنهایت حداکثر طول فنر برابر است با:

$$L_{max}=L_۰+A=۵۰+۱۰=۶۰cm$$

نکته

حداکثر طول فنر در حرکت نوسان هماهنگ ساده برابر است با طول تعادلی فنر به‌علاوهٔ دامنهٔ نوسان:

$$L_{max}=L_۰+A$$

۵۴- یک دستگاه صوتی، صدایی با تراز شدت $\beta_۱=۷۵dB$ و دستگاه صوتی دیگر، صدایی با تراز شدت $\beta_۲=۹۵dB$ ایجاد می‌کند. شدت صوت بلندتر، چند برابر شدت صوت دیگر است؟ $(\log ۲=۰/۳)$

۱) ۱۰ ۲) ۲۰ ۳) ۱۰۰ ۴) ۲۰۰

پاسخ: گزینهٔ ۳ (آسان ـ محاسباتی ـ سریع ـ صفحهٔ ۸۰ ـ ۱۲۰۳)

با توجه به رابطهٔ $\beta_۲-\beta_۱=۱۰\log\frac{I_۲}{I_۱}$ می‌توان نوشت:

$$\beta_۲-\beta_۱=۱۰\log\frac{I_۲}{I_۱}\Rightarrow ۹۵-۷۵=۱۰\log\frac{I_۲}{I_۱}$$

$$\Rightarrow\log\frac{I_۲}{I_۱}=۲\Rightarrow\frac{I_۲}{I_۱}=۱۰^۲=۱۰۰$$

۵۵- تندی انتشار موج عرضی در یک تار، $۳۰\frac{m}{s}$ است. اگر نیروی کشش تار را ۴۴ درصد افزایش دهیم، مسافتی که این موج در مدت دو ثانیه طی می‌کند، چند متر می‌شود؟

۱) ۳۶ ۲) ۷۲ ۳) ۱۴۴ ۴) ۶۰

پاسخ: گزینهٔ ۲ (آسان ـ محاسباتی ـ استاندارد ـ صفحهٔ ۷۳ ـ ۱۲۰۳)

ابتدا باید تندی انتشار موج را در حالت جدید به‌دست بیاوریم. طبق رابطهٔ $v=\sqrt{\frac{F}{\mu}}$ داریم:

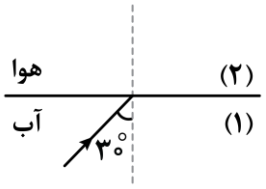
$$F_۲=F_۱+\frac{۴۴}{۱۰۰}F_۱ \Rightarrow F_۲=\frac{۱۴۴}{۱۰۰}F_۱$$

$$\frac{v_۲}{v_۱}=\sqrt{\frac{F_۲}{F_۱}} \Rightarrow \frac{v_۲}{۳۰}=\sqrt{\frac{۱۴۴}{۱۰۰}} \Rightarrow v_۲=۳۶\frac{m}{s}$$

سپس مسافت طی‌شده در ۲s را به‌دست می‌آوریم:

$$\ell=v.\Delta t \xrightarrow[\Delta t=۲s]{v=۳۶\frac{m}{s}} \ell=۳۶\times ۲=۷۲m$$

۵۶- مطابق شکل زیر، پرتوی نوری از آب وارد هوا می‌شود. اگر در ورود به محیط (۲)، ۱۵° از راستای اولیه منحرف شود و در این محیط، ۲μm به طول موج اولیه‌اش اضافه شود، بسامد نور چند هرتز است؟ ($\sqrt{۲}=۱/۴$ و تندی نور در هوا $=۳\times ۱۰^{۸}\frac{m}{s}$)



۱) $\frac{۳}{۴}\times ۱۰^{۱۴}$ ۲) $\frac{۲}{۷}\times ۱۰^{۱۴}$

۳) $\frac{۳}{۷}\times ۱۰^{۱۴}$ ۴) $\frac{۷}{۴}\times ۱۰^{۱۴}$

پاسخ: گزینهٔ ۳ (متوسط ـ محاسباتی ـ استاندارد ـ صفحهٔ ۹۶ ـ ۱۲۰۴)

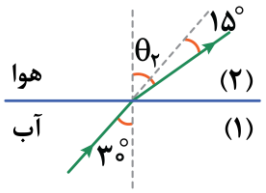
گام اول

چون نور از محیط غلیظ به رقیق وارد شده، از خط عمود دورتر می‌شود:

$$\theta_۲=۳۰°+۱۵°=۴۵°$$

گام دوم

طول‌موج را در هر دو محیط محاسبه می‌کنیم:



$$\frac{\sin\theta_۲}{\sin\theta_۱}=\frac{v_۲}{v_۱}=\frac{\lambda_۲}{\lambda_۱} \Rightarrow \frac{\sin ۴۵°}{\sin ۳۰°}=\frac{\lambda+۲}{\lambda} \Rightarrow \frac{\frac{۱/۴}{۲}}{\frac{۱}{۲}}=\frac{\lambda+۲}{\lambda}$$

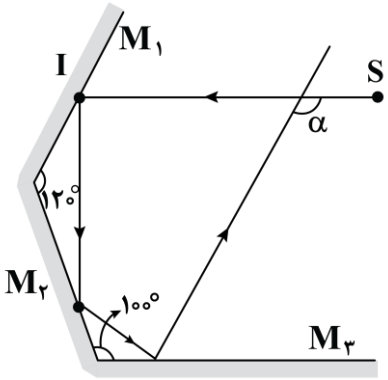
$$\Rightarrow \lambda_۱=۵\mu m=۵\times ۱۰^{-۶}m \ , \ \lambda_۲=۷\mu m=۷\times ۱۰^{-۶}m$$

گام آخر

بسامد نور را از $f=\frac{v}{\lambda}$ محاسبه می‌کنیم:

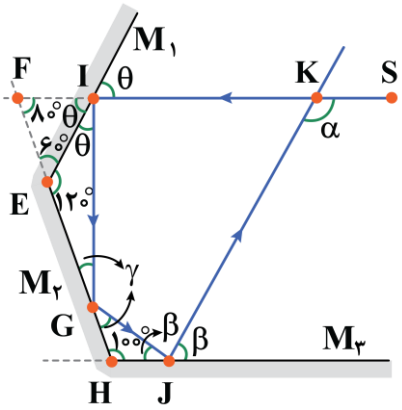
$$f=\frac{v_۲}{\lambda_۲}=\frac{۳\times ۱۰^{۸}}{۷\times ۱۰^{-۶}}=\frac{۳}{۷}\times ۱۰^{۱۴}Hz$$

۵۷- در شکل زیر، پرتوی SI موازی با سطح آینهٔ M_3 به آینهٔ M_1 می‌تابد و مسیری که در شکل مشخص است را طی می‌کند. α چند درجه است؟



۱) ۱۰۰°
۲) ۱۱۰°
۳) ۱۲۰°
۴) ۱۳۰°

پاسخ: گزینهٔ ۳ (متوسط ـ محاسباتی ـ استاندارد ـ صفحهٔ ۹۱ ـ ۱۲۰۴)



مسیر پرتوی نور مطابق شکل است. در مثلث $\overset{\Delta}{IEF}$ می‌توان نوشت:

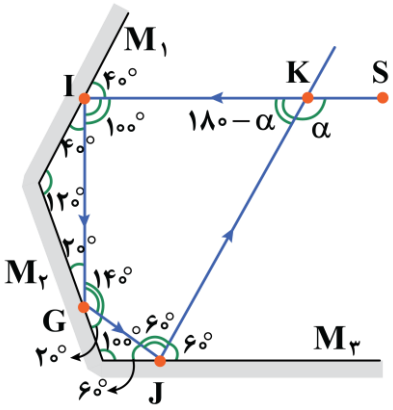
$$\theta+۸۰^\circ+۶۰^\circ=۱۸۰^\circ \Rightarrow \theta=۴۰^\circ$$

به همین صورت در مثلث $\overset{\Delta}{IEG}$ نیز می‌توان نوشت:

$$\theta+۱۲۰^\circ+\gamma=۱۸۰^\circ \xrightarrow{\theta=۴۰^\circ} \gamma=۲۰^\circ$$

در مثلث $\overset{\Delta}{GHJ}$ می‌توان نوشت:

$$\gamma+۱۰۰^\circ+\beta=۱۸۰^\circ \xrightarrow{\gamma=۲۰^\circ} \beta=۶۰^\circ$$



در چهارضلعی IGJK باید جمع زوایا ۳۶۰° شود. به این ترتیب می‌توان نوشت:

$$۱۰۰^\circ+۱۴۰^\circ+۶۰^\circ+(۱۸۰^\circ-\alpha)=۳۶۰^\circ$$
$$\alpha=۱۲۰^\circ$$

۵۸- طول یک تار برابر ۴۰cm و جرم آن برابر ۲۰g است. نیروی کشش این تار چند نیوتون باشد تا اختلاف بسامد هماهنگ‌های اول و چهارم این تار برابر ۳۷۵Hz باشد؟

۱) ۲۰۰ ۲) ۲۵۰ ۳) ۴۰۰ ۴) ۵۰۰

پاسخ: گزینهٔ ۴ (متوسط ـ محاسباتی ـ استاندارد ـ صفحهٔ ۱۰۷ ـ ۱۲۰۴)

با توجه به اختلاف بسامدهای اول و چهارم تار، بسامد هماهنگ اصلی را به‌دست می‌آوریم:

$$f_۴-f_۱=۳۷۵ \xrightarrow{f_۴=۴f_۱} ۴f_۱-f_۱=۳۷۵ \Rightarrow f_۱=۱۲۵Hz$$

$$f_n=\frac{nv}{۲L} \Rightarrow ۱۲۵=\frac{۱\times v}{۲\times ۰/۴} \Rightarrow v=۱۰۰\frac{m}{s}$$

حال برای محاسبهٔ نیروی کشش تار می‌توان نوشت:

$$v=\sqrt{\frac{F}{\mu}}=\sqrt{\frac{F.L}{m}}\Rightarrow ۱۰۰=\sqrt{\frac{F\times ۰/۴}{۲۰\times ۱۰^{-۳}}}\Rightarrow F=۵۰۰N$$

نکته

بسامد هماهنگ n اُم تار برابر است با n برابر بسامد هماهنگ اول یعنی $f_n=nf_۱$.

۵۹- یک لامپ ۱۰۰W فوتون‌هایی با طول موج ۶۰۰nm گسیل می‌کند. اگر بازدهٔ لامپ ۲۰ درصد باشد، در هر دقیقه چند فوتون از این لامپ گسیل می‌شود؟ $(h=۶\times ۱۰^{-۳۴}J.s\ ,\ c=۳\times ۱۰^{۸}\frac{m}{s})$

۱) ۴×۱۰^{۲۱} ۲) ۴×۱۰^{۱۹} ۳) $۱/۶\times ۱۰^{۲۲}$ ۴) $۱/۶\times ۱۰^{۱۹}$

پاسخ: گزینهٔ ۱ (متوسط ـ محاسباتی ـ استاندارد ـ صفحهٔ ۱۱۷ ـ ۱۲۰۵)

ابتدا توان مفید این لامپ را به‌دست می‌آوریم و سپس تعداد فوتون‌های گسیلی از این لامپ در هر دقیقه را محاسبه می‌کنیم:

$$Ra=\frac{P_۲}{P_۱}\times ۱۰۰\Rightarrow ۲۰=\frac{P_۲}{۱۰۰}\times ۱۰۰\Rightarrow P_۲=۲۰W$$

$$P=\frac{E}{t}=\frac{nhf}{t}\Rightarrow P=\frac{nhc}{t\lambda}$$

$$n=\frac{Pt\lambda}{hc}=\frac{۲۰\times ۶۰\times ۶۰۰\times ۱۰^{-۹}}{۶\times ۱۰^{-۳۴}\times ۳\times ۱۰^{۸}}=۴\times ۱۰^{۲۱}$$

۶۰- کدام‌یک از گزینه‌های زیر در مورد مدل اتمی بور نادرست است؟

۱) در اتم هیدروژن و در دمای اتاق، الکترون اغلب در تراز $n=\infty$ قرار دارد.

۲) وقتی الکترون در یک مدار مانای مشخص قرار دارد، هیچ نوع تابش الکترومغناطیسی گسیل نمی‌شود.

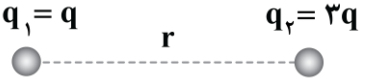
۳) هنگام گذار الکترون از یک حالت مانا با انرژی بیش‌تر به یک حالت مانا با انرژی کم‌تر، یک فوتون تابش می‌شود.

۴) این مدل، طیف گسیلی و جذبی گاز هیدروژن اتمی را با موفقیت توجیه کرد.

پاسخ: گزینهٔ ۱ (آسان ـ خط‌به‌خط ـ سریع ـ صفحهٔ ۱۳۱ ـ ۱۲۰۵)

در دمای اتاق، الکترون اغلب در حالت پایه، یعنی $n=۱$ قرار دارد. سایر عبارت‌ها با توجه به متن کتاب درسی صحیح هستند.

۶۱- دو ذرهٔ باردار، مطابق شکل زیر در فاصلهٔ معینی از هم ثابت شده و نیروی الکتریکی به بزرگی F به یکدیگر وارد می‌کنند. اگر به تعداد $۱/۲۵\times ۱۰^{۱۳}$ الکترون از ذرهٔ (۲) به ذرهٔ (۱) منتقل کنیم تا اندازهٔ بار الکتریکی دو ذره یکسان شود، آن‌گاه فاصلهٔ بین دو ذره را چند درصد و چگونه تغییر دهیم تا بزرگی نیروی الکتریکی بین دو ذره، برابر با $\frac{۱۶}{۳}F$ شود؟ $(e=۱/۶\times ۱۰^{-۱۹}C)$



۱) ۲۵، افزایش ۲) ۲۵، کاهش

۳) ۵۰، کاهش ۴) ۵۰، افزایش

پاسخ: گزینهٔ ۳ (سخت ـ محاسباتی ـ استاندارد ـ صفحهٔ ۶ ـ ۱۱۰۱)

گام اول

ابتدا اندازهٔ بار منتقل‌شده (q') را به‌دست می‌آوریم:

$$q'=-ne=-۱/۲۵\times ۱۰^{۱۳}\times ۱/۶\times ۱۰^{-۱۹}=-\frac{۵}{۴}\times\frac{۸}{۵}\times ۱۰^{-۶}=-۲\times ۱۰^{-۶}C\Rightarrow q'=-۲\mu C$$

گام دوم

با انتقال بار q' بین دو ذره، اندازهٔ بار دو ذره یکسان می‌شود؛ بنابراین داریم:

$$|q'_1|=|q'_2| \Rightarrow |q-2|=|3q+2| \Rightarrow \begin{cases} q-2=3q+2 \Rightarrow 2q=-4 \Rightarrow q=-2\mu C \\ q-2=-3q-2 \Rightarrow 4q=0 \Rightarrow q=0 \ (\text{غ ق ق}) \end{cases}$$

$$\xrightarrow{q=-2\mu C} \begin{cases} q'_1=q-2=-4\mu C \\ q'_2=3q+2=-4\mu C \end{cases}$$

گام آخر

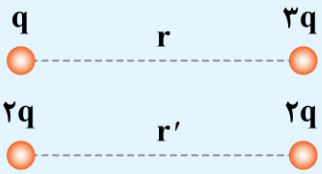
با تغییر یافتن بار ذرات، می‌خواهیم فاصلهٔ بین دو ذره را طوری تغییر دهیم تا بزرگی نیروی الکتریکی بین دو ذره، $\frac{16}{3}$ برابر شود:

$$\frac{F'}{F}=\frac{|q'_1|}{|q_1|}\times\frac{|q'_2|}{|q_2|}\times(\frac{r}{r'})^2 \Rightarrow \frac{16}{3}=\frac{4}{2}\times\frac{4}{6}\times(\frac{r}{r'})^2 \Rightarrow 4=(\frac{r}{r'})^2 \Rightarrow 2=\frac{r}{r'} \Rightarrow \frac{r'}{r}=\frac{1}{2}$$

پس فاصلهٔ دو ذره را باید ۵۰ درصد کاهش دهیم.

راهنمای زرنگ‌بازی

بچه‌ها تعداد الکترون‌ها و مقدار بار اولیه در این سؤال اهمیتی ندارد. درواقع می‌خواهیم نیروی بین بارها را در دو حالت زیر مقایسه کنیم:



$$F=k\frac{q\times 3q}{r^2}$$

$$F'=k\frac{2q\times 2q}{r'^2}$$

$$\frac{F'}{F}=\frac{\frac{4kq^2}{r'^2}}{\frac{3kq^2}{r^2}}=\frac{4}{3}\times(\frac{r}{r'})^2 \xrightarrow{\frac{F'}{F}=\frac{16}{3}} \frac{16}{3}=\frac{4}{3}\times(\frac{r}{r'})^2$$

$\Rightarrow r'=\frac{1}{2}r \Rightarrow$ فاصله ۵۰ درصد کاهش می‌یابد.

۶۲- روی سطح بادکنکی به جرم ۱۰g بار الکتریکی $-200nC$ ایجاد می‌کنیم و آن را در یک میدان الکتریکی قرار می‌دهیم. بزرگی و جهت این میدان الکتریکی درصورتی‌که بادکنک معلق بماند، در SI کدام است؟ ($g=10\frac{m}{s^2}$ و اندازهٔ نیروی شناوری وارد بر بادکنک را ۰/۰۵N فرض کنید.)

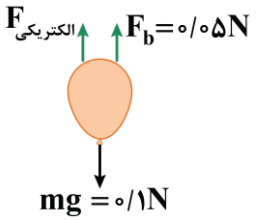
۱) $2/5\times10^5$، به سمت پایین
۲) 5×10^5، به سمت بالا
۳) $2/5\times10^5$، به سمت بالا
۴) 5×10^5، به سمت پایین

پاسخ: گزینهٔ ۱ (متوسط ـ محاسباتی ـ استاندارد ـ صفحهٔ ۱۹ ـ ۱۱۰۱)

ابتدا نیروهای وارد بر بادکنک را به‌دست می‌آوریم:

نیروی وزن: $mg=10\times10^{-3}\times10=0/1N$ (به سمت پایین)

نیروی شناوری: $F_b=0/05N$ (به سمت بالا)



بنابراین برای این‌که بادکنک معلق بماند، باید نیروی الکتریکی وارد بر بادکنک به سمت بالا باشد.

$$F_{\text{برایند}} = ۰ \Rightarrow F_{\text{الکتریکی}} + F_b = mg \Rightarrow F_{\text{الکتریکی}} + ۰/۰۵ = ۰/۱$$

$$\Rightarrow F_{\text{الکتریکی}} = ۰/۰۵N$$

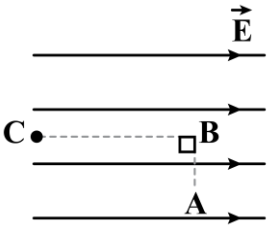
$$F_{\text{الکتریکی}} = E|q| \Rightarrow ۰/۰۵ = E \times ۲۰۰ \times ۱۰^{-۹} \Rightarrow E = ۲/۵ \times ۱۰^{۵} \frac{N}{C}$$

با توجه به این‌که بار بادکنک منفی بوده و نیروی الکتریکی به سمت بالا بر آن وارد می‌شود؛ بنابراین جهت میدان الکتریکی باید به سمت پایین باشد.

نکته

جهت نیروی الکتریکی وارد بر بار منفی در خلاف جهت خطوط میدان است.

۶۳- بار الکتریکی q، مطابق شکل زیر، از نقطهٔ A تا نقطهٔ B سپس تا نقطهٔ C در میدان الکتریکی یکنواخت به بزرگی $۴\times۱۰^{۴}\frac{N}{C}$ جابه‌جا می‌شود و کار نیروی الکتریکی در این جابه‌جایی برابر ۴/۸mJ است. بار q چند نانوکولن است؟ $(AB = ۵cm\ ,\ BC = ۱۵cm)$



۱) $-۲۴۰\sqrt{۱۰}$
۲) $۲۴۰\sqrt{۱۰}$
۳) -۸۰۰
۴) ۸۰۰

پاسخ: گزینهٔ ۳ (آسان ـ محاسباتی ـ استاندارد ـ صفحهٔ ۲۲ ـ ۱۱۰۱)

می‌دانیم که بر ذرهٔ باردار، نیروی الکتریکی در راستای میدان الکتریکی وارد می‌شود. چون در جابه‌جایی AB، جابه‌جایی بر راستای نیرو عمود است؛ بنابراین کار میدان الکتریکی در این جابه‌جایی برابر صفر است. از طرفی کار نیروی الکتریکی مثبت است، پس نیرو و جابه‌جایی در مسیر BC هم‌جهت‌اند و بنابراین بار ذره، منفی است:

$$W_E = W_{BC} = E|q|d\cos\theta$$

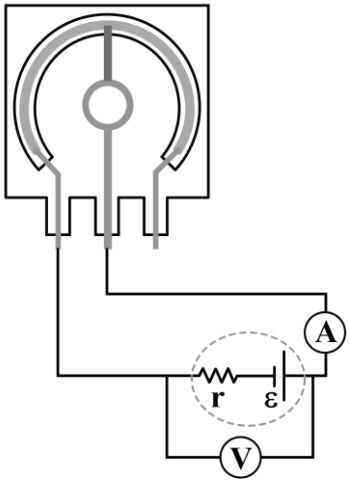
$$\xrightarrow[E=۴\times۱۰^{۴}\frac{N}{C}\ ,\ d=۱۵\times۱۰^{-۲}m]{W_E=۴/۸\times۱۰^{-۳}J\ ,\ \cos\theta=۱} ۴/۸\times۱۰^{-۳} = ۴\times۱۰^{۴}\times|q|\times۱۵\times۱۰^{-۲} \Rightarrow |q| = ۸\times۱۰^{-۷}C = ۸۰۰nC$$

$$\Rightarrow q = -۸۰۰nC$$

نکته

هرگاه ذره‌ای عمود بر خطوط میدان الکتریکی جابه‌جا شود، کاری روی آن انجام نمی‌شود.

۶۴- در مدار زیر، عقربهٔ پتانسیومتر دقیقاً در وسط قرار دارد و توان خروجی مولد بیشینه است. اگر عقربهٔ پتانسیومتر را کاملاً در جهت ساعتگرد بچرخانیم تا کل مقاومت پتانسیومتر در مدار قرار بگیرد، اعداد نشان‌داده‌شده توسط آمپرسنج ایده‌آل و ولت‌سنج ایده‌آل، به‌ترتیب از راست به چپ، چند برابر می‌شود؟



۱) $\frac{۲}{۳}$ ، $\frac{۴}{۳}$

۲) $\frac{۴}{۳}$ ، $\frac{۲}{۳}$

۳) $\frac{۲}{۳}$ ، $\frac{۲}{۳}$

۴) $\frac{۴}{۳}$ ، $\frac{۴}{۳}$

پاسخ: گزینهٔ ۱ (متوسط ـ محاسباتی ـ استاندارد ـ صفحهٔ ۶۴ ـ ۱۱۰۲)

گام اول

فرض کنید مقاومت کل پتانسیومتر برابر با R باشد؛ بنابراین در حالت اول که عقربهٔ پتانسیومتر دقیقاً در وسط قرار دارد، فقط نصف مقاومت پتانسیومتر در مدار قرار می‌گیرد و داریم:

$$R_{eq_۱}=\frac{R}{۲}\xrightarrow{\text{توان خروجی مولد بیشینه است.}}r=R_{eq_۱}\Rightarrow r=\frac{R}{۲}$$

$$\Rightarrow I_۱=\frac{\varepsilon}{R_{eq_۱}+r}=\frac{\varepsilon}{\frac{R}{۲}+\frac{R}{۲}}=\frac{\varepsilon}{R}$$

$$V_۱=R_{eq_۱}.I_۱=\frac{R}{۲}\times\frac{\varepsilon}{R}=\frac{\varepsilon}{۲}$$

گام آخر

وقتی عقربهٔ پتانسیومتر کاملاً در جهت ساعتگرد می‌چرخد، کل مقاومت پتانسیومتر در مدار قرار می‌گیرد و داریم:

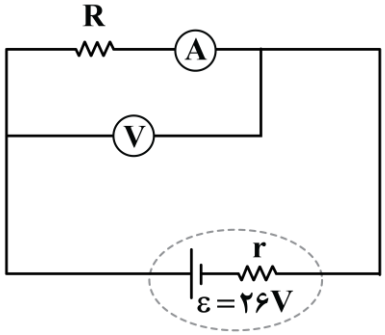
$$R_{eq_۲}=R\Rightarrow I_۲=\frac{\varepsilon}{R_{eq_۲}+r}=\frac{\varepsilon}{R+\frac{R}{۲}}=\frac{۲}{۳}\frac{\varepsilon}{R}=\frac{۲}{۳}I_۱\Rightarrow\frac{I_۲}{I_۱}=\frac{۲}{۳}$$

$$V_۲=R_{eq_۲}.I_۲=R\times\frac{۲\varepsilon}{۳R}=\frac{۲}{۳}\varepsilon\Rightarrow\frac{V_۲}{V_۱}=\frac{\frac{۲}{۳}\varepsilon}{\frac{\varepsilon}{۲}}=\frac{۴}{۳}$$

نکته

وقتی مقاومت خارجی مدار با مقاومت درونی باتری برابر باشد $(R_{eq}=r)$ توان خروجی مولد بیشینه است.

۶۵- در مدار نشان‌داده‌شده، مقاومت آمپرسنج و ولت‌سنج به‌ترتیب، ۶Ω و ۶۳۰Ω است. اگر آمپرسنج $۰/۳۶A$ و ولت‌سنج $۲۵/۲V$ را نشان دهد، نسبت $\frac{R}{r}$ کدام است؟



۱) ۱۶

۲) ۳۲

۳) $\frac{۶۴}{۳}$

۴) $\frac{۱۲۸}{۳}$

پاسخ: گزینهٔ ۲ (سخت ـ محاسباتی ـ استاندارد ـ صفحهٔ ۷۱ ـ ۱۱۰۲)

گام اول

ولت‌سنج به شاخهٔ مقاومت و آمپرسنج به‌صورت موازی متصل شده است؛ بنابراین:

$$V_{\text{ولت‌سنج}} = (R + R_{\text{آمپرسنج}}).I_{\text{آمپرسنج}} \Rightarrow ۲۵/۲ = (R+۶)\times ۰/۳۶ \Rightarrow R = ۶۴\Omega$$

گام دوم

جریان گذرنده از ولت‌سنج برابر است با:

$$V_{\text{ولت‌سنج}} = R_{\text{ولت‌سنج}}.I_{\text{ولت‌سنج}} \Rightarrow ۲۵/۲ = ۶۳۰\times I_{\text{ولت‌سنج}} \Rightarrow I_{\text{ولت‌سنج}} = ۰/۰۴A$$

بنابراین جریان کل مدار برابر است با:

$$I = I_{\text{ولت‌سنج}} + I_{\text{آمپرسنج}} = ۰/۰۴ + ۰/۳۶ = ۰/۴A$$

گام آخر

ولت‌سنج به مولد نیز به‌طور موازی وصل است؛ بنابراین:

$$V_{\text{ولت‌سنج}} = \varepsilon - rI \Rightarrow ۲۵/۲ = ۲۶ - ۰/۴r \Rightarrow r = ۲\Omega$$

$$\Rightarrow \frac{R}{r} = \frac{۶۴}{۲} = ۳۲$$

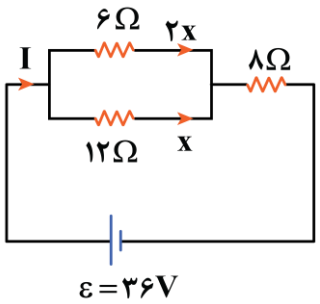
۶۶- دو مقاومت موازی ۶ اُهمی و ۱۲ اُهمی به‌طور متوالی به یک مقاومت ۸ اُهمی وصل شده است. اکنون، مجموعهٔ مقاومت‌ها را به دو سر یک باتری آرمانی ۳۶ ولتی می‌بندیم. توان مصرفی در مقاومت ۶ اُهمی چند وات است؟

۱) ۶ ۲) ۱۲ ۳) ۲۴ ۴) ۴۸

پاسخ: گزینهٔ ۳ (متوسط ـ محاسباتی ـ استاندارد ـ صفحهٔ ۷۳ ـ ۱۱۰۲)

گام اول

شکل مدار را رسم می‌کنیم و مقاومت معادل و جریان را به‌دست می‌آوریم:



$$R_{eq} = \frac{۶\times ۱۲}{۶+۱۲} + ۸ = ۴ + ۸ = ۱۲\Omega$$

$$I = \frac{\varepsilon}{r + R_{eq}} = \frac{۳۶}{۰+۱۲} = ۳A$$

$$x + ۲x = I \Rightarrow ۳x = ۳A \Rightarrow x = ۱A$$

گام آخر

بنابراین جریان عبوری از مقاومت ۶Ω برابر $I_{۶\Omega} = ۲x = ۲A$ است و توان مصرفی آن برابر است با:

$$P_{۶\Omega} = RI^{۲}_{۶\Omega} = ۶\times ۲^{۲} = ۲۴W$$

۶۷- سیمی به طول ۲m عمود بر یک میدان مغناطیسی یکنواخت به بزرگی ۵mT قرار دارد و از آن جریان ۴A عبور می‌کند. اگر بزرگی نیرویی که بر این سیم وارد می‌شود، ۳۰mN باشد، چند درصد طول این سیم در میدان قرار گرفته است؟

۱) ۲۵ ۲) ۴۰ ۳) ۶۰ ۴) ۷۵

پاسخ: گزینهٔ ۴ (متوسط ـ محاسباتی ـ استاندارد ـ صفحهٔ ۹۳ ـ ۱۱۰۳)

طبق رابطهٔ نیروی مغناطیسی وارد بر سیم حامل جریان داریم:

$$F = BI\ell\sin\theta \xrightarrow[B=5mT=5\times10^{-3}T\ ,\ I=4A\ ,\ \theta=90^\circ]{F=30mN=3\times10^{-2}N} 3\times10^{-2} = 5\times10^{-3}\times4\times\ell\times1$$

$$\Rightarrow \ell = 1/5m$$

بنابراین ۱/۵m از سیم در داخل میدان مغناطیسی قرار دارد؛ درنتیجه داریم:

$$\frac{\ell}{L}\times100 = \frac{1/5}{2}\times100 = 75\%$$

پس ۷۵ درصد سیم داخل میدان مغناطیسی قرار دارد.

نکته

نیروی مغناطیسی همیشه بر تمام طول سیم وارد نمی‌شود، بلکه بر بخشی از سیم وارد می‌شود که در داخل میدان مغناطیسی قرار گرفته است.

۶۸- از پیچهٔ مسطحی به شعاع ۱۲/۵۶cm که از ۲۰۰۰ دور سیم نازک ساخته شده، جریان الکتریکی ۱mA عبور می‌کند. اندازهٔ میدان مغناطیسی در مرکز پیچه چند گاوس است؟ $(\pi \simeq 3/14\ ,\ \mu_0 = 4\pi\times10^{-7}\frac{T.m}{A})$

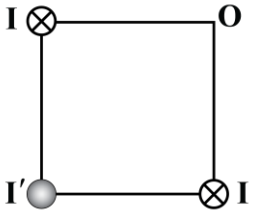
۱) ۰/۱ ۲) ۱ ۳) ۱۰ ۴) ۱۰۰

پاسخ: گزینهٔ ۱ (آسان ـ محاسباتی ـ استاندارد ـ صفحهٔ ۹۸ ـ ۱۱۰۳)

میدان مغناطیسی در مرکز پیچه به‌صورت زیر قابل‌محاسبه است:

$$B = \mu_0\frac{NI}{2r} = 4\times3/14\times10^{-7}\times\frac{2000\times10^{-3}}{2\times12/56\times10^{-2}} = 10^{-5}T = 0/1G$$

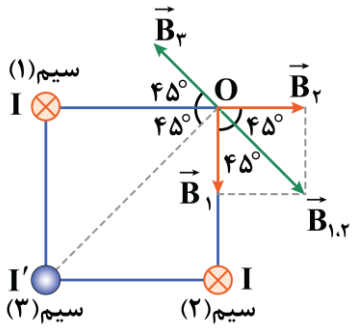
۶۹- مطابق شکل، سه سیم راستِ موازی و بسیار بلند، در سه رأس یک مربع قرار دارند و حامل جریان الکتریکی هستند. اگر میدان مغناطیسی خالص در رأس چهارم (نقطهٔ O) صفر باشد، کدام گزینه در مورد اندازه و جهت جریان I' درست است؟



۱) $I' > I$ و درون‌سو
۲) $I' < I$ و برون‌سو
۳) $I' < I$ و درون‌سو
۴) $I' > I$ و برون‌سو

پاسخ: گزینهٔ ۴ (آسان ـ مفهومی ـ سریع ـ صفحهٔ ۹۵ ـ ۱۱۰۳)

طبق قاعدهٔ دست راست، جهت میدان مغناطیسی در یک نقطه از اطراف سیم حامل جریان بدین صورت است که انگشت شست در جهت جریان قرار می‌گیرد و جهت چرخش چهار انگشت، جهت میدان را نشان می‌دهد؛ بنابراین مطابق شکل زیر، جهت میدان‌های مغناطیسی در نقطهٔ O به‌صورت زیر است:



با توجه به جریان‌های یکسان سیم‌های (۱) و (۲) و نیز فاصلهٔ یکسان با نقطهٔ O، اندازهٔ میدان‌های $\vec{B}_1$ و $\vec{B}_2$ باهم برابر است و برایند آن‌ها عمود بر قطر مربع (خط‌چین) است؛ بنابراین میدان $\vec{B}_3$ باید در خلاف جهت آن باشد تا میدان خالص در نقطهٔ O صفر شود. درنتیجه، طبق قاعدهٔ دست راست، جریان در سیم (۳)، برون‌سو است. از طرفی، میدان مغناطیسی در فاصله‌های دورتر، ضعیف‌تر است؛ بنابراین جریان I' باید از I بیش‌تر باشد تا بتواند اثر فاصله را خنثی نماید.

۷۰- آهنگ تغییر سرعت متحرکی $۲۵۹۲۰\frac{km}{h^2}$ است. شتاب این متحرک چند واحد SI است؟

۱) ۱/۵ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

پاسخ: گزینهٔ ۲ (آسان ـ محاسباتی ـ استاندارد ـ صفحهٔ ۱۰ ـ ۱۰۰۱)

با استفاده از تبدیل یکا به روش زنجیره‌ای می‌توانیم بنویسیم:

$$a = ۲۵۹۲۰\frac{km}{h^2}\times\frac{۱۰^3 m}{۱km}\times\left(\frac{۱h}{۳۶۰۰s}\right)^2 = \frac{۲۵۹۲۰\times۱۰^3}{۳۶۰۰^2}\frac{m}{s^2}$$

$$\Rightarrow a = ۲\frac{m}{s^2}$$

۷۱- چگالی آب یک دریاچه $۱۰۲۵\frac{kg}{m^3}$ است. اگر از عمق ۱۵ متری این دریاچه به عمق ۲۵ متری برویم، فشار ۴۰ درصد افزایش می‌یابد. فشار در عمق ۱۰ متری این دریاچه چند پاسکال است؟ $(g = ۹/۸\frac{m}{s^2})$

۱) ۲۰۰۴۵۰ ۲) ۲۰۰۹۰۰ ۳) ۲۰۲۵۰۰ ۴) ۲۰۵۰۰

پاسخ: گزینهٔ ۲ (متوسط ـ محاسباتی ـ استاندارد ـ صفحهٔ ۳۴ ـ ۱۰۰۲)

گام اول

عمق‌های ۱۵ متری و ۲۵ متری را به‌ترتیب با اندیس‌های ۱ و ۲ نشان می‌دهیم؛ بنابراین داریم:

$$P_2 = ۱/۴P_1 \Rightarrow P_0 + \rho g h_2 = ۱/۴(P_0 + \rho g h_1) \Rightarrow ۰/۴P_0 = \rho g(h_2 - ۱/۴h_1)$$

$$\Rightarrow ۰/۴P_0 = ۱۰۲۵\times۹/۸\times(۲۵ - ۱/۴\times۱۵) = ۱۰۲۵\times۹/۸\times۴$$

$$\Rightarrow P_0 = \frac{۱۰۲۵\times۹/۸\times۴}{۰/۴} = ۱۰۲۵\times۹۸Pa$$

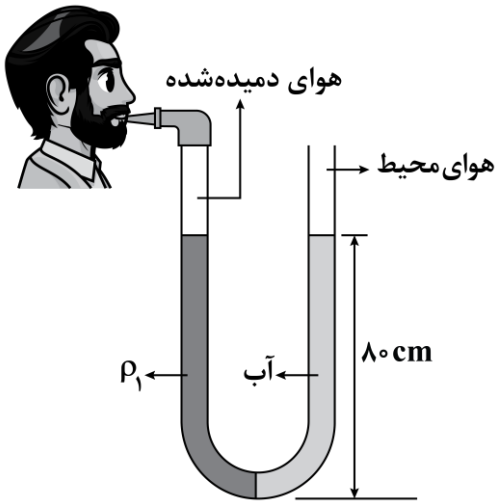
گام آخر

فشار در عمق ۱۰ متری برابر است با:

$$P = P_0 + \rho g h = ۱۰۲۵\times۹۸ + ۱۰۲۵\times۹/۸\times۱۰ = ۲۰۰۹۰۰Pa$$

۷۲- مطابق شکل زیر، لولهٔ Uشکلی را درنظر بگیرید که محتوی حجم مساوی از آب و مایعی با چگالی ρ_1 است. اگر فشار پیمانه‌ای هوای درون ریهٔ شخص برابر $1kPa$ باشد، چگالی ρ_1 چند گرم بر لیتر است؟ $(g=10\frac{N}{kg}, \rho_{آب}=1000\frac{kg}{m^3})$

۱) ۸۷۵
۲) ۰/۸۷۵
۳) ۱۱۲۵
۴) ۱/۱۲۵



پاسخ: گزینهٔ ۱ (متوسط ـ محاسباتی ـ استاندارد ـ صفحهٔ ۳۸ ـ ۱۰۰۲)

مجموع فشار ریهٔ شخص و مایع ρ_1 برابر مجموع فشار آب‌وهوای محیط است؛ بنابراین:

$$P_{ریه}+P_{مایع}=P_{آب}+P_0$$

$$\Rightarrow P_{ریه}-P_0=\rho_{آب}gh_{آب}-\rho_{مایع}gh_{مایع}\Rightarrow 1000=1000\times10\times0/8-\rho_1\times10\times0/8$$

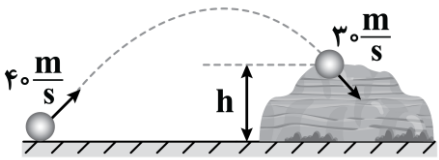
$$\Rightarrow 1000=8000-8\rho_1\Rightarrow \rho_1=875\frac{kg}{m^3}=875\frac{g}{L}$$

تذکر!

دقت کنید یکاهای $\frac{g}{L}$ و $\frac{kg}{m^3}$ معادل هستند.

۷۳- مطابق شکل زیر، توپی از سطح زمین با تندی $40\frac{m}{s}$ به طرف صخره‌ای پرتاب می‌شود و با تندی $30\frac{m}{s}$ به بالای صخره برخورد می‌کند. اگر همان توپ با تندی $30\frac{m}{s}$ به طرف صخره پرتاب شود، با چه تندی برحسب متر بر ثانیه به بالای صخره برخورد می‌کند؟ (فرض کنید مقاومت هوا ناچیز است و فاصلهٔ توپ تا صخره برای رسیدن آن به بالای صخره کافی است.)

۱) $10\sqrt{2}$
۲) ۲۰
۳) $15\sqrt{2}$
۴) ۲۲/۵



پاسخ: گزینهٔ ۱ (متوسط ـ محاسباتی ـ استاندارد ـ صفحهٔ ۶۹ ـ ۱۰۰۳)

مقاومت هوا ناچیز است؛ بنابراین انرژی مکانیکی توپ در هر دو حالت، پایسته است. سطح زمین را به‌عنوان مبدأ پتانسیل گرانشی درنظر می‌گیریم. داریم:

$$E_2=E_1\Rightarrow U_2+K_2=\underbrace{\cancel{U_1}}_{0}+K_1\Rightarrow \cancel{m}gh+\frac{1}{2}\cancel{m}v_2^2=\frac{1}{2}\cancel{m}v_1^2$$

$$\xrightarrow{\times ۲} v_۱^۲ - v_۲^۲ = ۲gh \Rightarrow \begin{cases} \text{حالت اول}: ۴۰^۲ - ۳۰^۲ = ۲gh \\ \text{حالت دوم}: ۳۰^۲ - v_۲^۲ = ۲gh \end{cases}$$

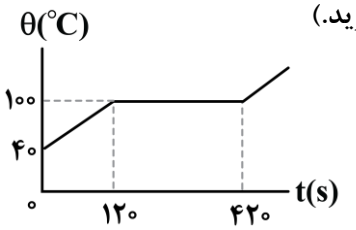
$$\Rightarrow ۴۰^۲ - ۳۰^۲ = ۳۰^۲ - v_۲^۲ \Rightarrow v_۲^۲ = ۲۰۰ \Rightarrow v_۲ = ۱۰\sqrt{۲}\,\frac{m}{s}$$

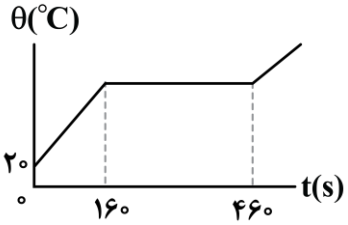
نکته

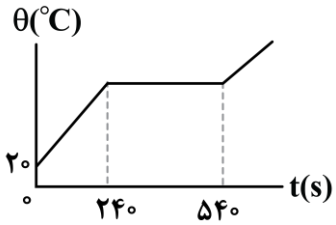
وقتی فقط نیروی وزن بر روی جسمی کار انجام می‌دهد، دراثر تغییر ارتفاع h داریم:

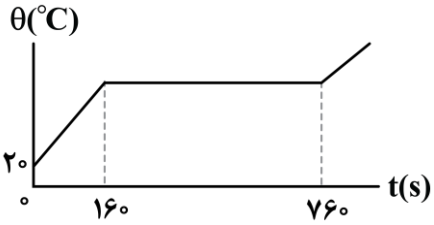
$$v_{\text{پایین}}^۲ - v_{\text{بالا}}^۲ = ۲gh$$

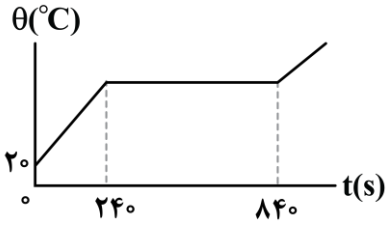
۷۴- درون یک کتری برقی با ظرفیت گرمایی ناچیز، مقداری آب با دمای $۴۰^\circ C$ می‌ریزیم و کتری را روشن می‌کنیم. نمودار دمای آب برحسب زمان مطابق شکل زیر است. اگر در همان کتری، همان مقدار آب ولی با دمای $۲۰^\circ C$ بریزیم، نمودار دمای آب برحسب زمان مطابق با کدام گزینه است؟ (در هر دو حالت، لحظهٔ روشن شدن کتری را $t=۰$ درنظر بگیرید.)



۱)


۲)


۳)


۴)


پاسخ: گزینهٔ ۱ (متوسط ـ استدلالی ـ استاندارد ـ صفحهٔ ۱۰۸ ـ ۱۰۰۴)

گام اول

زمان لازم برای رسیدن آب به نقطهٔ جوش را محاسبه می‌کنیم. در فرایند تغییر دمای آب داریم:

$$Q = mc\Delta\theta = P.\Delta t \Rightarrow \begin{cases} \text{حالت اول}: mc(۱۰۰-۴۰) = P\times ۱۲۰ \quad (I) \\ \text{حالت دوم}: mc(۱۰۰-۲۰) = P\times \Delta t \quad (II) \end{cases}$$

از تقسیم رابطهٔ (I) بر (II) داریم:

$$\frac{۱۰۰-۴۰}{۱۰۰-۲۰} = \frac{۱۲۰}{\Delta t} \Rightarrow \Delta t = ۱۶۰s$$

گام آخر

زمان لازم برای تبخیر آب را به‌دست می‌آوریم. گرمای لازم برای تبخیر آب از رابطهٔ $Q = mL_V$ به‌دست می‌آید. با توجه به این‌که جرم آب و گرمای نهان تبخیر آب در هر دو حالت یکسان است؛ بنابراین مقدار گرمای لازم و درنتیجه، زمان لازم برای تبخیر آب در هر دو حالت، یکسان و برابر ۳۰۰ ثانیه است؛ بنابراین آب در لحظهٔ $t=۱۶۰s$ به جوش می‌آید و در لحظهٔ $t=۴۶۰s$ به‌طور کامل بخار می‌شود و گزینهٔ (۱) درست است.

نکته

برای یک گرمکن با توان ثابت، گرمای منتقل‌شده با زمان انتقال گرما متناسب است.

۷۵- به یک قطعهٔ آلومینیمی در فشار متعارف جو (۱۰۰kPa)، ۸۱۰kJ گرما می‌دهیم. کار انجام‌شده توسط قطعهٔ آلومینیمی چند ژول است؟ (چگالی، ضریب انبساط طولی و گرمای ویژهٔ آلومینیم را به‌ترتیب، $۲/۷\frac{g}{cm^۳}$، $۲۳\times۱۰^{-۶}\frac{۱}{°C}$ و $۹۰۰\frac{J}{kg.°C}$ درنظر بگیرید.)

۱) ۲/۳ ۲) ۲۳۰۰ ۳) −۲۳۰۰ ۴) −۲/۳

پاسخ: گزینهٔ ۱ (متوسط ـ محاسباتی ـ استاندارد ـ صفحهٔ ۱۳۳ ـ ۱۰۰۵)

گام اول

تغییر دمای قطعهٔ آلومینیمی برابر است با:

$$Q = mc\Delta\theta \Rightarrow \Delta\theta = \frac{Q}{mc} \qquad (I)$$

گام دوم

تغییر حجم قطعهٔ آلومینیمی برابر است با:

$$\Delta V = V_۱(۳\alpha).\Delta\theta \xrightarrow{(I)} \Delta V = V_۱ \times ۳\alpha \times \frac{Q}{mc}$$

$$\xrightarrow{m=\rho V_۱} \Delta V = \cancel{V_۱} \times ۳\alpha \times \frac{Q}{\rho \cancel{V_۱} \times c} \Rightarrow \Delta V = \frac{۳\alpha Q}{\rho c} \ (II)$$

گام آخر

قطعهٔ آلومینیمی را به‌عنوان یک دستگاه ترمودینامیکی درنظر می‌گیریم. از آنجا که فرایند در فشار ثابت $P_۰$ انجام می‌شود، کار محیط بر روی دستگاه برابر است با:

$$W = -P.\Delta V \xrightarrow{(II)} W = -P_۰ \times \frac{۳\alpha Q}{\rho c}$$

$$\Rightarrow W = \frac{-۱۰۰\times۱۰^۳ \times \cancel{۳} \times ۲۳\times۱۰^{-۶} \times \cancel{۸۱۰} \times \cancel{۱۰^۳}}{\cancel{۲۷۰۰} \times \cancel{۹۰۰}} = -۲/۳J$$

بنابراین کار دستگاه (قطعهٔ آلومینیمی) بر روی محیط (W') برابر است با:

$$W' = -W = +۲/۳J$$

نکته

کاری که سامانه بر روی محیط انجام می‌دهد قرینهٔ کاری است که محیط روی سامانه انجام می‌دهد:

$$W' = -W$$

سوتی‌های پرتکرار

حواست باشه، کاری که قطعهٔ آلومینیم روی محیط انجام می‌ده رو خواسته. اگر کار محیط روی سامانه رو درنظر بگیری، توی دام گزینهٔ (۴) می‌افتی!

بودجه‌بندی این آزمون: جامع شبیه‌ساز کنکور سراسری

سهم در کنکور: مباحث این آزمون در مجموع ۳۰ تست کنکور را پوشش داده است.

برای دیدن پاسخنامهٔ ویدئویی آزمون QRcode بالا را اسکن کنید! یا بر روی لینک زیر کلیک کنید!
پاسخنامهٔ ویدئویی آزمون

۷۶- در آرایش الکترونی کاتیون پایدار حاصل از عناصر موجود در کدام گزینه، تعداد الکترون موجود در زیرلایه‌ها با $l = ۰$ در یک عنصر با تعداد الکترون‌ها در زیرلایه با $l = ۲$ در عنصر دیگر می‌تواند برابر باشد؟

۱) منیزیم و وانادیم ۲) سدیم و روی ۳) پتاسیم و آهن ۴) کلسیم و مس

پاسخ: گزینهٔ ۳ (متوسط ـ مفهومی ـ استاندارد ـ صفحهٔ ۳۹ ـ ۱۰۰۱)

برای نشان‌دادن موقعیت یک زیرلایه از اعداد کوانتومی اصلی (n) و فرعی (l) استفاده می‌کنیم. برای مثال نخستین زیرلایه‌ای که الکترون وارد آن می‌شود، $۱s$ با عدد کوانتومی **اصلی ۱** و عدد کوانتومی **فرعی صفر** است.

توجه داریم که زیرلایه‌های d با عدد کوانتومی فرعی ۲، از عنصر اسکاندیم با عدد اتمی ۲۱ شروع به پر شدن می‌کنند؛ بنابراین در عناصر منیزیم، سدیم، پتاسیم و کلسیم، الکترونی در این زیرلایه‌ها حضور ندارد. آرایش الکترونی کاتیون حاصل از فلزهای مطرح شده در سؤال به‌صورت زیر است:

$_{۱۲}Mg^{۲+}: ۱s^۲۲s^۲۲p^۶$

$_{۱۱}Na^{+}: ۱s^۲۲s^۲۲p^۶$

$_{۱۹}K^{+}: ۱s^۲۲s^۲۲p^۶۳s^۲۳p^۶$

$_{۲۰}Ca^{۲+}: ۱s^۲۲s^۲۲p^۶۳s^۲۳p^۶$

$_{۲۳}V^{۲+}: ۱s^۲۲s^۲۲p^۶۳s^۲۳p^۶۳d^۳$
$_{۲۳}V^{۳+}: ۱s^۲۲s^۲۲p^۶۳s^۲۳p^۶۳d^۲$

$_{۳۰}Zn^{۲+}: ۱s^۲۲s^۲۲p^۶۳s^۲۳p^۶۳d^{۱۰}$

$_{۲۶}Fe^{۲+}: ۱s^۲۲s^۲۲p^۶۳s^۲۳p^۶۳d^۶$
$_{۲۶}Fe^{۳+}: ۱s^۲۲s^۲۲p^۶۳s^۲۳p^۶۳d^۵$

$_{۲۹}Cu^{+}: ۱s^۲۲s^۲۲p^۶۳s^۲۳p^۶۳d^{۱۰}$
$_{۲۹}Cu^{۲+}: ۱s^۲۲s^۲۲p^۶۳s^۲۳p^۶۳d^۹$

همان‌طور که مشخص است، شمار الکترون‌های موجود در زیرلایه‌هایی با $l = ۰$ در آرایش الکترونی یون پتاسیم همانند شمار الکترون‌ها در زیرلایه $۳d$ یون آهن (II) برابر ۶ است.

آفبا

پرشدن زیرلایه‌ها تنها به عدد کوانتومی اصلی وابسته نیست؛ بلکه از یک قاعده کلی به نام قاعده آفبا پیروی می‌کند. قاعده آفبا ترتیب پرشدن زیرلایه‌ها را در اتم‌های گوناگون نشان می‌دهد. مطابق این قاعده، هنگام افزودن الکترون به زیرلایه‌ها، نخست زیرلایه‌های نزدیک‌تر به هسته پر می‌شوند که دارای انرژی کمتر هستند و سپس زیرلایه‌های بالاتر پر خواهند شد. براساس قاعده آفبا، هر چه انرژی یک زیرلایه کمتر باشد، آن زیرلایه زودتر از الکترون پر می‌شود. هر چه یک زیرلایه $n + l$ پایین‌تری داشته باشد، انرژی آن زیرلایه نیز کمتر است. برای مثال زیرلایه $۴s$ زودتر از زیرلایه $۳d$ شروع به گرفتن الکترون می‌کند. هنگامی‌که مقدار $n + l$ برای دو زیرلایه برابر باشد، زیرلایه با عدد کوانتومی اصلی کوچک‌تر، انرژی کمتری داشته و زودتر از الکترون پر می‌شود. برای مثال، زیرلایه $۳p$ نسبت به زیرلایه $۴s$ زودتر الکترون می‌گیرد.

۷۷- کدام‌یک از گزینه‌های زیر نادرست است؟

۱) الکترون‌های اشتراکی موجود در ساختار مولکول‌ها، در فضایی بین هسته دو اتم قرار می‌گیرند.
۲) آرایش الکترونی هر عنصر موجود در جدول دوره‌ای، موقعیت مکانی آن عنصر را تعیین می‌کند.
۳) اتم‌های نافلزی با مبادله الکترون و رسیدن به آرایش گاز نجیب، در ساختار مولکول‌ها شرکت می‌کنند.
۴) در دوره سوم، برخلاف دوره چهارم، تمام عناصر با لایه ظرفیت هشت‌تایی، میل به انجام واکنش شیمیایی ندارند.

پاسخ: گزینهٔ ۳ (آسان ـ خط به خط و مفهومی ـ سریع ـ صفحهٔ ۴۱ ـ ۱۰۰۱)

یکی از راه‌های رسیدن به آرایش الکترونی گازهای نجیب برای عناصر نافلزی، به **اشتراک گذاشتن الکترون‌ها** و **حضور در ساختار مولکول** است. توجه داریم که اتم‌های نافلزی برای شرکت در ساختار مولکول، برخی یا همه الکترون‌های ظرفیتی خود را به اشتراک می‌گذارند. در این فرایند، نمی‌توان از اصطلاح (مبادله الکترون) استفاده کرد.

بررسی سایر گزینه‌ها:

۱) نافلزها با به اشتراک گذاشتن برخی یا همه الکترون‌های ظرفیتی خود به آرایش گاز نجیب هم‌دوره خود می‌رسند. توجه داریم که این الکترون‌ها در فضایی بین هسته دو اتم قرار می‌گیرند. البته الکترون‌های اشتراکی بیشتر زمان خود را نزدیک‌تر به هسته عنصری که خاصیت نافلزی بیشتری دارد، سپری می‌کنند. برای مثال در ساختار مولکول کربن‌دی‌اکسید، الکترون‌های اشتراکی به هسته اتم‌های اکسیژن نزدیک‌تر هستند.

۲) رفتار و ویژگی‌های هر اتم را می‌توان از روی آرایش الکترونی آن توضیح داد؛ بنابراین یافتن آرایش درست الکترون‌ها در هر اتم، از اهمیت بسیاری برخوردار است. مطابق مدل کوانتومی، برای به‌دست آوردن آرایش الکترونی اتم‌ها باید الکترون‌های اتم هر عنصر در زیرلایه‌ها با نظم و ترتیب معینی توزیع شود. از آرایش الکترونی یک عنصر می‌توان برای تعیین موقعیت آن عنصر نیز استفاده کرد. برای مثال، همه عناصری که ۱۰ الکترون ظرفیتی دارند، مشابه نیکل بوده و در گروه شماره ۱۰ جدول تناوبی قرار می‌گیرند.

۴) در دوره سوم، آرایش الکترونی گاز نجیب آرگون هشت‌تایی است. در دوره چهارم نیز، در لایه ظرفیت عناصر آهن و کریپتون، تعداد ۸ الکترون حضور دارند. کریپتون نیز همانند آرگون از گازهای نجیب بوده و تمایلی به شرکت در واکنش‌های شیمیایی ندارد. از طرفی فلز آهن در واکنش‌های بسیاری از جمله خوردگی شرکت می‌کند.

الکترون‌های ظرفیتی

الکترون‌های ظرفیتی، الکترون‌هایی هستند که در سطحی‌ترین قسمت یک اتم قرار داشته و در واکنش‌های شیمیایی شرکت می‌کنند. این الکترون‌ها، در تعیین خواص شیمیایی یک عنصر نقش داشته و موجب تشکیل پیوندهای کووالانسی یا ایجاد یون تک‌اتمی می‌شوند. با توجه به اینکه یک عنصر در کدام دسته قرار می‌گیرد، می‌توان الکترون‌های ظرفیتی آن را پیدا کرد. در این رابطه داریم:

- در عناصر دسته s، الکترون‌های ظرفیتی معادل با الکترون یا الکترون‌های آخرین زیرلایهٔ ns است.
- در عناصر دسته p، الکترون‌های ظرفیتی معادل با الکترون‌های آخرین زیرلایه‌های ns و np است.
- در عناصر دسته d، الکترون‌های ظرفیتی معادل با الکترون‌های آخرین زیرلایه‌های ns و $(n-1)d$ است.

ماز

۷۸- کدام موارد از عبارت‌های زیر درست است؟

الف ـ در بین امواج مرئی، انرژی پرتو زرد بیشتر از انرژی پرتو سبز رنگ است.

ب ـ چشم انسان، به یقین نمی‌تواند پرتویی که طول موج آن از پرتو بنفش رنگ بزرگ‌تر باشد را ببیند.

ج ـ با توجه به نور نشر شده، دمای شعلهٔ سوختن کامل و ناقص متان می‌تواند به‌ترتیب برابر ۲۵۵۰°C و ۲۰۰۰°C باشد.

د ـ بین امواج الکترومغناطیسی، فاصله یک قله تا قله بعدی، در امواج رادیویی بیشتر از پرتوهای فروسرخ است.

۱) «الف» و «ب» ۲) «الف» و «ج» ۳) «ب» و «د» ۴) «ج» و «د»

پاسخ: گزینهٔ ۴ (متوسط ـ خط به خط و مفهومی ـ سریع ـ صفحهٔ ۲۱ ـ ۱۰۰۲)

عبارت‌های (ج) و (د) درست هستند.

بررسی موارد:

الف) نور خورشید، اگرچه سفید به نظر می‌رسد اما با عبور از قطره‌های آب موجود در هوا که پس از بارش هنوز در هوا پراکنده است، تجزیه می‌شود و گستره‌ای پیوسته از رنگ‌ها را ایجاد می‌کند. این گستره رنگی، شامل بی‌نهایت طول موج از رنگ‌های گوناگون است. مقایسه سطح انرژی پرتوهای مرئی موجود در نور خورشید به‌صورت زیر است:

انرژی کمتر ← قرمز ← نارنجی ← زرد ← سبز ← آبی ← نیلی ← بنفش ← انرژی بیشتر

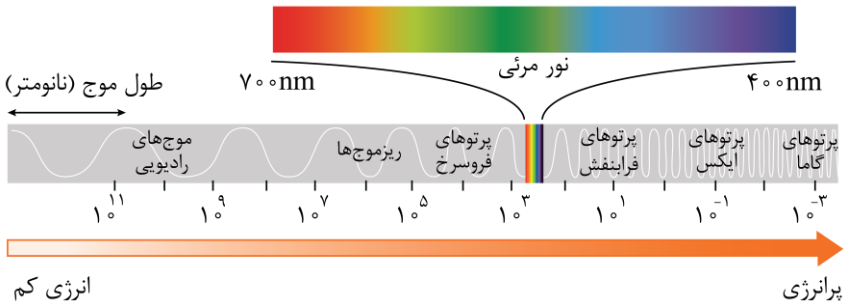
مقایسه طول موج پرتوهای مرئی موجود در نور خورشید به‌صورت زیر است:

طول موج بلندتر ← قرمز ← نارنجی ← زرد ← سبز ← آبی ← نیلی ← بنفش ← طول موج کوتاه‌تر

ب) چشم انسان می‌تواند پرتوهای مرئی که شامل رنگ‌های قرمز تا بنفش می‌شود را ببیند. در بین پرتوهای مرئی، پرتو بنفش بیشترین انرژی و کوتاه‌ترین طول موج را دارد؛ بنابراین می‌توان گفت ممکن است چشم انسان بتواند پرتویی با طول موج بلندتر از پرتو بنفش را نیز ببیند.

ج) نور نشر شده در واکنش سوختن ناقص و کامل سوخت‌های فسیلی از جمله متان، به‌ترتیب به رنگ‌های زرد و آبی است. همان‌طور که می‌دانیم، انرژی پرتو آبی رنگ بیشتر از انرژی پرتو زرد رنگ است؛ بنابراین می‌توان گفت سوختن کامل متان در مقایسه با سوختن ناقص آن، انرژی بیشتری آزاد کرده و دمای شعله آن نیز بالاتر است.

د) یکی از ویژگی‌های امواج الکترومغناطیسی، طول موج است. طول موج به‌صورت فاصله دو قله یا دو دره متوالی تعریف می‌شود. با افزایش طول موج یک پرتو، انرژی حمل‌شده توسط آن پرتو کاهش پیدا می‌کند. همان‌طور که می‌دانیم، امواج رادیویی در مقایسه با امواج فروسرخ، انرژی کمتر و طول موج بلندتری دارند. مقایسه انرژی و طول موج امواج مختلف به‌صورت زیر است:



نور و امواج الکترومغناطیس

نور یکی از بنیادی‌ترین اجزای موجود در جهان هستی است که با کمک آن می‌توان به یافته‌های جدید دست پیدا کرد. نور خورشید اگرچه سفید به نظر می‌رسد، اما با عبور دادن آن از منشور یا قطرهٔ آب، گستره‌ای پیوسته از رنگ‌ها ایجاد می‌شود که شامل بی‌نهایت طول موج از رنگ‌های گوناگون است. چشم ما تنها می‌تواند گسترهٔ محدودی از نور را ببیند. به این گستره که رنگ‌های قرمز تا بنفش را شامل می‌شود، گستره مرئی می‌گویند. نور خورشید شامل گسترهٔ بسیار بزرگ‌تری از این پرتوهاست که با خود انرژی حمل می‌کنند. به این پرتوها، پرتوهای الکترومغناطیسی می‌گویند. پرتوهای الکترومغناطیسی دارای طول موج مشخص هستند که آن را با λ نشان داده و هر چه این طول موج کوتاه‌تر باشد، انرژی حمل‌شده توسط آن‌ها بیشتر خواهد بود.

۷۹- عنصر فرضی A دارای دو ایزوتوپ است. اگر تفاوت عدد جرمی این دو ایزوتوپ برابر با ۲ واحد بوده و درصد فراوانی ایزوتوپ سنگین‌تر، ۴۰٪ بیشتر از درصد فراوانی ایزوتوپ سبک‌تر باشد، تفاوت جرم اتمی میانگین این عنصر با جرم اتمی ایزوتوپ فراوان‌تر برابر چند amu است؟

۱) ۰/۶ ۲) ۱/۴ ۳) ۰/۸ ۴) ۱/۲

پاسخ: گزینهٔ ۱ (آسان ـ محاسباتی ـ سریع ـ صفحهٔ ۱۵ ـ ۱۰۰۱)

به اتم‌هایی که در هسته خود تعداد پروتون برابر و شمار نوترون متفاوتی دارند، ایزوتوپ یا هم‌مکان گفته می‌شود. برای محاسبه جرم اتمی میانگین از فرمول زیر استفاده می‌کنیم:

$$\text{جرم اتمی میانگین} = \frac{(\text{جرم اتمی ایزوتوپ اول} \times \text{درصد فراوانی ایزوتوپ اول}) + (\text{جرم اتمی ایزوتوپ دوم} \times \text{درصد فراوانی ایزوتوپ دوم}) + \dots}{۱۰۰}$$

برای به‌دست آوردن جرم اتمی میانگین، ابتدا باید درصد جرمی ایزوتوپ‌ها را محاسبه کنیم. توجه داریم که مجموع فراوانی ایزوتوپ‌های یک عنصر برابر ۱۰۰ است. طبق فرض سؤال نیز درصد فراوانی ایزوتوپ سنگین‌تر، ۴۰٪ بیشتر از درصد فراوانی ایزوتوپ سبک‌تر است. حال اگر درصد فراوانی ایزوتوپ سبک‌تر (^{x}A) و ایزوتوپ سنگین‌تر (^{x+۲}A) را به‌ترتیب برابر a و b فرض کنیم، داریم:

$$\begin{cases} a + b = ۱۰۰ \\ b - a = ۴۰ \end{cases} \Longrightarrow a = ۳۰ , b = ۷۰$$

در مرحله بعد، جرم اتمی میانگین این عنصر را محاسبه می‌کنیم:

$$\text{جرم اتمی میانگین}(\overline{M}) = \frac{(۳۰ \times x) + (۷۰ \times (x + ۲))}{۱۰۰} = x + ۱/۴$$

با توجه به محاسبات انجام شده، جرم اتمی ایزوتوپ فراوان‌تر و جرم اتمی میانگین این عنصر به‌ترتیب برابر با $x + ۲$ و $x + ۱/۴$ است. بنابراین تفاوت مقدار خواسته شده برابر $۰/۶amu$ خواهد بود.

ایزوتوپ‌ها

اتم‌های یک عنصر که عدد اتمی برابر و شمار نوترون‌های متفاوتی دارند را ایزوتوپ می‌گویند. در ایزوتوپ‌ها، عدد اتمی که نشان‌دهنده نوع عنصر است، یکسان بوده ولی عدد جرمی تفاوت دارد. چون خواص شیمیایی به عدد اتمی وابسته است، ایزوتوپ‌های یک عنصر در خواص شیمیایی یکسان هستند ولی در خواص فیزیکی که به جرم وابسته هستند، تفاوت دارند. مثلاً ایزوتوپ‌ها چگالی متفاوتی دارند. به ایزوتوپ‌های ناپایدار و پرتوزا، رادیوایزوتوپ می‌گویند. هسته این ایزوتوپ‌ها ناپایدار بوده و با گذشت زمان متلاشی می‌شود. طی این فرایند، ذره‌های پرانرژی همراه با مقدار زیادی انرژی تولید می‌شود. در این میان، اغلب هسته‌هایی که نسبت شمار نوترون‌ها به پروتون‌های آن‌ها برابر یا بیشتر از ۱/۵ باشد، پرتوزا هستند. از مفهوم نیم‌عمر برای مقایسه پایداری و پرتوزایی ایزوتوپ‌ها استفاده می‌شود. نیم‌عمر، مدت زمانی است که طول می‌کشد تا نصف یک ماده پرتوزا متلاشی شود. هرچه نیم‌عمر یک ماده کوتاه‌تر باشد، پایداری آن ماده کم‌تر و پرتوزایی آن بیشتر است.

۸۰- کدام‌یک از عبارت‌های زیر درست است؟

الف ـ درصد جرمی هلیم در یک نمونه هواکره، بیشتر از درصد جرمی آن در هوای مایع است.

ب ـ گازی که در هواکره بیشترین درصد حجمی را دارد، راحت‌تر از گاز آرگون مایع می‌شود.

ج ـ ناخالصی اندک موجود در گاز آرگون تهیه‌شده در پتروشیمی شیراز، با اغلب فلزها واکنش می‌دهد.

د ـ از گازی که حدود ۲۰ درصد حجم هواکره را تشکیل می‌دهد، به‌عنوان محیط بی‌اثر در جوشکاری استفاده می‌شود.

۱) «الف» و «ج» ۲) «ب» و «ج» ۳) «الف» و «د» ۴) «ب» و «د»

پاسخ: گزینهٔ ۱ (متوسط ـ خط به خط و مفهومی ـ سریع ـ صفحهٔ ۵۵ ـ ۱۰۰۲)

عبارت‌های (الف) و (ج) درست هستند.

بررسی موارد:

الف) هلیم نخستین گاز نجیب موجود در جدول تناوبی بوده و درصد حجمی آن در هواکره حدوداً ۰/۰۰۰۵ درصد است. از طرفی نقطه جوش این گاز نجیب برابر $-۲۶۹^{\circ}C$ است. همان‌طور که می‌دانیم، برای تهیه هوای مایع، دما را تا $-۲۰۰^{\circ}C$ کاهش می‌دهند. نقطه جوش گاز هلیم کمتر از $-۲۰۰^{\circ}C$ بوده و بنابراین در این دما، هلیم به حالت گاز باقی مانده و وارد مخلوط هوای مایع نمی‌شود. درنتیجه درصد جرمی آن در هوای مایع برابر صفر است. جدول زیر ویژگی‌های هلیم را جمع‌بندی می‌کند:

هلیم
- به‌عنوان سبک‌ترین گاز نجیب، بی‌رنگ و بی‌بو است.
- برای پرکردن بالن‌های هواشناسی، تبلیغاتی و تفریحی و همچنین در جوشکاری کاربرد دارد.
- در کپسول غواصی و خنک کردن دستگاه‌های تصویربرداری مانند MRI کاربرد دارد.
- مقدار آن در منابع زیرزمینی بیشتر از مقدار آن در هواکره است.
- حدود ۷ درصد حجمی گاز طبیعی را شامل می‌شود.
- بعد از آرگون و نئون، سومین گاز نجیب فراوان در هواکره است.

ب) نیتروژن بیشترین درصد حجمی را در بین گازهای هواکره دارد. نقطه جوش این گاز پایین‌تر از آرگون بوده و بنابراین نسبت به آن سخت‌تر مایع می‌شود. جدول زیر نقطه جوش برخی از گازهای موجود در هواکره را نمایش می‌دهد:

گاز	نقطهٔ جوش ($^{\circ}C$)
نیتروژن	−۱۹۶
اکسیژن	−۱۸۳
آرگون	−۱۸۶
هلیم	−۲۶۹

ج) به‌دلیل نزدیک بودن نقطه جوش گازهای اکسیژن و آرگون، تهیه این گازها به‌صورت خالص دشوار است؛ بنابراین می‌توان گفت ناخالصی موجود در آرگون تهیه شده در پتروشیمی، گاز اکسیژن است. همان‌طور که می‌دانیم، گاز اکسیژن از جمله نافلزهای واکنش‌پذیر جدول تناوبی بوده و با اغلب فلزها واکنش می‌دهد.

د) گاز اکسیژن حدود ۲۰ درصد حجمی هواکره را شامل می‌شود. این گاز از جمله گازهای واکنش‌پذیر بوده و برخلاف گازهای نجیبی مانند هلیم و آرگون، نمی‌توان از آن به‌عنوان محیط بی‌اثر در جوشکاری استفاده کرد.

تقطیر جزءبه‌جزء هوای مایع

هوا منبعی غنی از گازهای نیتروژن، اکسیژن و آرگون است که هرکدام کاربرد زیادی در صنعت دارند. این گازها را از تقطیر جزءبه‌جزء هوای مایع به‌دست می‌آورند. این فرایند طبق مراحل زیر انجام می‌شود:

۱) نخست هوا از صافی‌هایی عبور داده می‌شود تا گرد و غبار آن گرفته شود. طی این فرایند، یک نمونه از هوای پاک به‌دست می‌آید.

۲) با استفاده از تغییر فشار، دمای هوا را پیوسته کاهش می‌دهند. در این مرحله، رطوبت هوا در دمای $۰^{\circ}C$ به‌صورت یخ جدا شده و در دمای $-۷۸^{\circ}C$ کربن دی‌اکسید به‌صورت یخ خشک جدا می‌شود.

۳) با کاهش بیشتر دما تا $-۲۰۰^{\circ}C$، در دمای $-۱۸۳^{\circ}C$، گاز اکسیژن و در دمای $-۱۸۶^{\circ}C$، گاز آرگون و در دمای $-۱۹۶^{\circ}C$ نیز گاز نیتروژن به‌صورت مایع در می‌آید و در نهایت هوای مایع که شامل نیتروژن، اکسیژن و آرگون مایع است، پدید می‌آید.

۴) در مرحله آخر، هوای مایع را از ستون تقطیر عبور می‌دهند و دما افزایش می‌یابد. ترتیب جدا شدن گازها در ستون تقطیر به نقطه جوش آن‌ها بستگی دارد. هر چه دمای جوش یک گاز پایین‌تر باشد، زودتر تبخیر شده و جدا می‌شود. با توجه به نقطه جوش این گازها، نخست نیتروژن، سپس آرگون و در نهایت اکسیژن از ستون تقطیر خارج خواهد شد.

توجه داریم که در فرایند تقطیر جزءبه‌جزء هوای مایع، تهیه گاز اکسیژن با خلوص ۱۰۰ درصد دشوار است؛ زیرا نقطه جوش دو گاز اکسیژن و آرگون به یکدیگر نزدیک است و هنگام خارج شدن گاز اکسیژن از ستون تقطیر، مقداری گاز آرگون نیز جدا می‌شود. این در حالی است که گاز آرگون با خلوص بسیار زیاد در پتروشیمی شیراز تولید می‌شود.

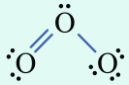
۸۱- کدام‌یک از عبارت‌های زیر درست است؟

۱) گاز اوزون در مقایسه با گاز اکسیژن نقطه جوش بالاتری داشته و آسان‌تر مایع می‌شود.
۲) اکسید ناپایدارتر عنصر کربن، در مقایسه با هوا چگالی بالاتری داشته و به راحتی در آن پخش می‌شود.
۳) آلوتروپ سبک‌تر عنصر اکسیژن، واکنش‌پذیری بالایی داشته و از آن برای گندزدایی میوه‌ها استفاده می‌شود.
۴) کربن مونوکسید ناپایدار بوده و رنگ زرد حاصل از سوختن ناقص سوخت‌های فسیلی، به‌دلیل وجود این گاز است.

پاسخ: گزینهٔ ۱ (آسان ـ خط به خط و مفهومی ـ سریع ـ صفحهٔ ۷۴ ـ ۱۰۰۲)

گاز اوزون و گاز اکسیژن، از جمله **آلوتروپ‌های اکسیژن** محسوب می‌شوند. اوزون در مقایسه با گاز اکسیژن جرم مولی **بالاتری** داشته و یک نمونه از آن برخلاف گاز اکسیژن قطبی است. بر این اساس، نقطه جوش اوزون **بالاتر** از گاز اکسیژن است. با افزایش نقطه جوش مواد گازی، میعان آن‌ها **راحت‌تر** انجام می‌شود.

جدول زیر مقایسه ویژگی‌های این دو آلوتروپ اکسیژن را نمایش می‌دهد:

فرمول شیمیایی	ساختار لوویس	جرم مولی	نقطه جوش	رنگ در حالت گازی	رنگ در حالت مایع	مدل فضاپرکن
O_2	$:\ddot{O}=\ddot{O}:$	۳۲	−۱۸۳	بی‌رنگ	آبی روشن	
O_3		۴۸	−۱۱۲	آبی روشن	آبی تیره	

بررسی سایر گزینه‌ها:

۲) اکسید ناپایدارتر کربن معادل با گاز کربن **مونوکسید** است. گاز کربن مونوکسید، از مولکول‌های **دواتمی** ساخته شده و در مقایسه با هوا، چگالی **پایین‌تری** دارد و به راحتی در آن پخش می‌شود.

۳) اوزون آلوتروپ **سنگین‌تر** اکسیژن است. از **اوزون** به‌خاطر **واکنش‌پذیری بالای** آن، برای گندزدایی میوه‌ها و سبزیجات استفاده می‌شود. این گاز، می‌تواند باکتری‌ها را از بین ببرد.

۴) گاز کربن مونوکسید گازی بی‌بو، بی‌رنگ و بسیار سمی است، بنابراین **رنگ زرد شعله** نمی‌تواند به‌دلیل وجود این گاز در میان فراورده‌های سوختن باشد. ساختار لوویس این مولکول به‌صورت زیر است:

$$:C\equiv O:$$

کربن مونوکسید

اگر در هنگام سوختن سوخت‌های فسیلی، مقدار اکسیژن کم باشد، گاز کربن مونوکسید به همراه دیگر فراورده‌ها تولید می‌شود. به این حالت از سوختن، سوختن ناقص می‌گویند. گاز کربن مونوکسید گازی بی‌بو، بی‌رنگ و بسیار سمی است. چگالی این گاز کمتر از هوا است و درنتیجه به راحتی می‌تواند به بالای اتاق صعود کند. قابلیت انتشار این گاز در محیط نیز بالا است و به سرعت در همهٔ فضای اتاق پخش می‌شود. همچنین میل ترکیبی آن با هموگلوبین خون بسیار بالا و بیش از ۲۰۰ برابر اکسیژن است. مولکول‌های کربن مونوکسید پس از اتصال به هموگلوبین، از رسیدن اکسیژن به بافت‌های بدن جلوگیری می‌کنند. این ویژگی باعث گازگرفتگی شده و سیستم عصبی فرد را فلج می‌کند و باعث مرگ می‌شود. رنگ زرد شعله‌ها، نشان‌دهنده سوختن ناقص سوخت و تولید کربن مونوکسید است.

۸۲- مقدار ۶۰۰ میلی‌لیتر محلول ۰/۵ مولار سدیم هیدروکسید را با ۳ لیتر محلول ۲ مولار آن مخلوط می‌کنیم. در ۲ لیتر از محلول حاصل، چند گرم یون سدیم حضور دارد؟ $(Na = ۲۳ , O = ۱۶ , H = ۱ : g.mol^{-۱})$

۱) ۱۶۱ ۲) ۸۰/۵ ۳) ۹۱ ۴) ۴۵/۵

پاسخ: گزینهٔ ۲ (آسان ـ محاسباتی ـ سریع ـ صفحهٔ ۱۰۰ ـ ۱۰۰۳)

برای حل سؤال ابتدا مول سدیم هیدروکسید حل شده در هر یک از محلول‌های اولیه را محاسبه می‌کنیم:

$$\text{غلظت : محلول (۱)} = \frac{\text{مول}}{\text{حجم}} \Longrightarrow \text{مول} = \text{غلظت} \times \text{حجم} = ۰/۵ \times ۰/۶ = ۰/۳\ mol$$

$$\text{غلظت : محلول (۲)} = \frac{\text{مول}}{\text{حجم}} \Longrightarrow \text{مول} = \text{غلظت} \times \text{حجم} = ۲ \times ۳ = ۶\ mol$$

در مرحله بعد، غلظت محلول حاصل از مخلوط شدن دو محلول اولیه را به‌دست می‌آوریم:

$$\text{غلظت} = \frac{\text{مول } NaOH}{\text{حجم}} = \frac{۶ + ۰/۳}{۰/۶ + ۳} = ۱/۷۵\ mol.L^{-۱}$$

سپس مول سدیم هیدروکسید حل شده در ۲ لیتر از این محلول را محاسبه می‌کنیم:

$$\text{مول} = \text{غلظت} \times \text{حجم} = ۱/۷۵ \times ۲ = ۳/۵\ mol$$

هر واحد از سدیم هیدروکسید با فرمول شیمیایی $NaOH$، در ساختار خود یک یون سدیم دارد؛ بنابراین ۳/۵ مول از آن، ۳/۵ مول یون سدیم در ساختار خود دارد. در پایان جرم یون سدیم موجود در این محلول را به‌دست می‌آوریم:

$$\text{مول} = \frac{\text{جرم}}{\text{جرم مولی}} \Longrightarrow \text{جرم} = \text{مول} \times \text{جرم مولی} = ۳/۵ \times ۲۳ = ۸۰/۵\ g$$

غلظت مولار

تجربه نشان می‌دهد که اندازه‌گیری حجم یک مایع به ویژه در آزمایشگاه آسان‌تر از جرم آن است. از سوی دیگر شیمی‌دان‌ها مقدار ماده را برحسب مول بیان می‌کنند. بر این اساس، به نظر می‌رسد که بیان غلظتی از محلول پرکاربردتر خواهد بود که با مول‌های ماده حل‌شونده و حجم محلول ارتباط داشته باشد. چنین غلظتی را غلظت مولی (مولار) می‌نامند. غلظت مولی (M) یک محلول، با استفاده از رابطه زیر محاسبه می‌شود:

$$\text{غلظت مولی} = \frac{\text{مول حل‌شونده}}{\text{لیتر محلول}}$$

برای محاسبه مقدار حل‌شونده موجود در یک محلول، می‌توان از کسر تبدیل زیر استفاده کرد:

$$\text{حجم محلول} \underset{\div M}{\overset{\times M}{\rightleftarrows}} \text{مول حل‌شونده}$$

نوعی دیگری از غلظت وجود دارد که گرم حل‌شونده در هر لیتر از محلول را نشان می‌دهد. داریم:

$$\text{غلظت گرم بر لیتر} = \frac{\text{جرم حل‌شونده}}{\text{لیتر محلول}}$$

۸۳- کدام‌یک از عبارت‌های زیر درست است؟

۱) فراوان‌ترین یون موجود در دریاها، با یون نقره واکنش داده و رسوب سفیدرنگ تولید می‌کند.
۲) آب‌های زیرزمینی و آب موجود در دریاچه‌ها، در مجموع بیشتر از ۱ درصد آب‌کره را شامل می‌شوند.
۳) فراوان‌ترین یون چنداتمی موجود در آب دریاها در واکنش با یون سدیم، ترکیب NaX را تشکیل می‌دهد.
۴) کاتیون موجود در نمک خوراکی، برخلاف آنیون آن، از یون‌های مشترک موجود در آب دریا و آب آشامیدنی است.

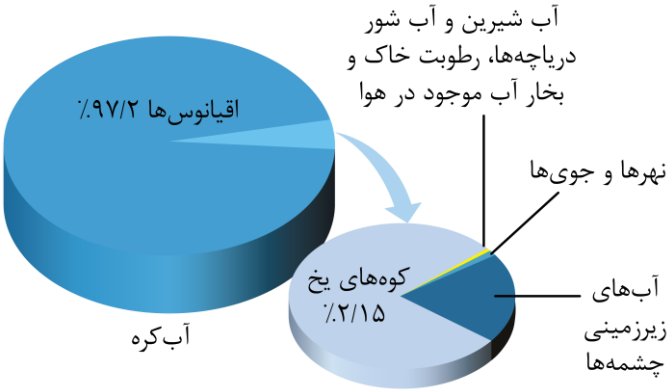
پاسخ: گزینهٔ ۱ (متوسط ـ خط به خط و مفهومی ـ سریع ـ صفحهٔ ۹۱ ـ ۱۰۰۳)

فراوان‌ترین یون موجود در دریا، یون کلرید است. از واکنش یون کلرید و یون نقره، رسوب سفیدرنگ نقره کلرید تشکیل می‌شود؛ بنابراین می‌توان گفت از یون کلرید می‌توان برای شناسایی یون نقره موجود در محلول‌ها استفاده کرد. معادله واکنش انجام شده به‌صورت زیر است:

$$Ag^{+}(aq) + Cl^{-}(aq) \rightarrow AgCl(s)$$

بررسی سایر گزینه‌ها:

۲) اجزای تشکیل‌دهنده آب‌کره به‌صورت زیر است:



همان‌طور که مشخص است، کوه‌های یخ و آب موجود در اقیانوس‌ها مجموعاً ۹۹/۳۵ درصد آب‌کره را تشکیل می‌دهند؛ بنابراین سایر قسمت‌های آب‌کره از جمله آب‌های موجود در دریاچه‌ها و آب‌های زیرزمینی کمتر از ۱ درصد آب‌کره را تشکیل می‌دهند.

۳) فراوان‌ترین یون چند اتمی موجود در آب دریا، یون سولفات با فرمول شیمیایی SO_4^{2-} است. از ترکیب این یون و یون سدیم، ترکیب یونی سدیم سولفات با فرمول شیمیایی Na_2SO_4 حاصل می‌شود.

۴) ترکیب یونی تشکیل‌دهنده نمک خوراکی، سدیم کلرید است. کاتیون و آنیون این ترکیب یونی به‌ترتیب یون‌های سدیم و کلرید هستند. توجه داریم که هر دو یون موجود در سدیم کلرید، در آب آشامیدنی و آب دریاها حضور دارند.

یون‌های موجود در آب دریا

آب اقیانوس‌ها و دریاها مخلوطی همگن است که اغلب مزه‌ای شور دارد، زیرا مقدار قابل توجهی از نمک‌های گوناگون در آن حل شده است. برآوردها نشان می‌دهند که 5×10^{16} تن نمک در آب اقیانوس‌ها و دریاها وجود دارد. در رابطه با یون‌های موجود در آب دریا داریم:

- کاتیون عنصرهای گروه اول و دوم جدول دوره‌ای در آب دریا وجود دارند.
- در آب دریا، یون‌های تک‌اتمی و چنداتمی متنوعی پیدا می‌شود.
- مقدار یون کلرید از بقیه آنیون‌های موجود در آب دریا بیشتر است. در این رابطه داریم:

مقدار آنیون‌ها: $Cl^- > SO_4^{2-} > CO_3^{2-} > Br^-$

- مقدار یون سدیم از بقیه کاتیون‌های موجود در آب دریا بیشتر است. در این رابطه داریم:

مقدار کاتیون‌ها: $Na^+ > Mg^{2+} > Ca^{2+} > K^+$

۸۴- ۶۴۰ گرم محلول سیرشده نمک A در دمای $40^\circ C$ در اختیار داریم. اگر با نصف کردن دما و عبور مخلوط حاصل از صافی، ۴۰ گرم رسوب بر روی صافی باقی بماند، انحلال‌پذیری نمک A در دمای $60^\circ C$ برابر با چند گرم در ۱۰۰ گرم آب است؟ (انحلال‌پذیری نمک برحسب دما، خطی بوده و درصد جرمی محلول سیر شده در دمای $40^\circ C$ برابر ٪۳۷/۵ است.)

۱) ۴۵ ۲) ۶۵ ۳) ۷۰ ۴) ۴۰

پاسخ: گزینهٔ ۳ (متوسط ـ محاسباتی ـ استاندارد ـ صفحهٔ ۱۰۲ ـ ۱۰۰۳)

انحلال‌پذیری یک نمک، معادل حداکثر جرمی از آن است که می‌تواند بدون تشکیل رسوب در ۱۰۰ گرم آب حل شود. برای تبدیل انحلال‌پذیری یک نمک (S) و درصد جرمی محلول سیرشده آن (W/W)، از رابطه زیر استفاده می‌کنیم:

$$\text{درصد جرمی محلول سیرشده} = \frac{S}{S+۱۰۰} \times ۱۰۰$$

در قدم اول، انحلال‌پذیری نمک مورد نظر را در دمای $۴۰^\circ C$ محاسبه می‌کنیم:

$$۳۷/۵ = \frac{S}{S+۱۰۰} \times ۱۰۰ \Longrightarrow S = ۶۰$$

با توجه به محاسبات انجام شده، انحلال‌پذیری این نمک در دمای $۴۰^\circ C$ برابر ۶۰ گرم در ۱۰۰ گرم آب است؛ بنابراین می‌توان گفت در ۱۶۰ گرم از محلول سیرشده، ۶۰ گرم نمک و ۱۰۰ گرم آب حضور دارد. درنتیجه ۶۴۰ گرم از محلول اولیه حاوی ۲۴۰ گرم نمک و ۴۰۰ گرم آب بوده است. برای محاسبه جرم نمک حل‌شده در محلول اولیه، می‌توانیم از درصد جرمی نیز استفاده کنیم:

$$\text{درصد جرمی} = \frac{\text{جرم نمک}}{\text{جرم محلول}} \times ۱۰۰ \Longrightarrow ۳۷/۵ = \frac{\text{جرم نمک}}{۶۴۰} \times ۱۰۰ \Longrightarrow \text{جرم نمک} = ۲۴۰\ g$$

پس از کاهش دما، ۴۰ گرم از نمک رسوب پیدا کرده و در محلول پایانی ۲۰۰ گرم نمک و ۴۰۰ گرم آب حضور دارد. حال انحلال‌پذیری نمک در این دما ($۲۰^\circ C$) را محاسبه می‌کنیم:

$$\text{انحلال‌پذیری} = \frac{\text{جرم نمک حل‌شده}}{\text{جرم حلال (آب)}} \times ۱۰۰ = \frac{۲۰۰}{۴۰۰} \times ۱۰۰ = ۵۰\ g/۱۰۰\ g\ H_۲O$$

معادله انحلال‌پذیری نمک‌هایی که تغییرات انحلال‌پذیری آن‌ها برحسب دما خطی است، به‌صورت $S = a\theta + b$ نمایش داده می‌شود. حال با جایگذاری مقادیر به‌دست آمده، معادله انحلال‌پذیری این نمک را مشخص می‌کنیم:

$$S = a\theta + b \Longrightarrow \begin{cases} ۴۰^\circ C : ۴۰a + b = ۶۰ \\ ۲۰^\circ C : ۲۰a + b = ۵۰ \end{cases} \Longrightarrow a = ۰/۵\ ,\ b = ۴۰$$

در این حالت، معادله انحلال‌پذیری به‌صورت $S = ۰/۵\theta + ۴۰$ به‌دست می‌آید. در پایان با جایگذاری در معادله به‌دست آمده، انحلال‌پذیری نمک در دمای $۶۰^\circ C$ را به‌دست می‌آوریم:

$$S = ۰/۵\theta + ۴۰ = ۷۰\ g/۱۰۰\ g\ H_۲O$$

انواع محلول‌ها

محلول‌ها بر اساس مقدار حل‌شونده موجود در آن‌ها، در سه دسته قرار می‌گیرند:

۱) محلول سیرشده: در این حالت، بیشترین میزان حل‌شونده‌ای که در حلال حل می‌شود، در محلول وجود دارد و مقدار حل‌شونده برابر مقدار انحلال‌پذیری آن ماده است. در این حالت مقدار حل‌شونده دقیقاً بر روی نمودار انحلال‌پذیری ـ دما قرار دارد.

۲) محلول سیرنشده: در این حالت، مقدار حل‌شونده موجود در محلول از مقدار انحلال‌پذیری کمتر بوده و این محلول همچنان می‌تواند مقدار بیشتری حل‌شونده را در خود حل نماید. این محلول در نمودار انحلال‌پذیری ـ دما، زیر خط نمودار قرار می‌گیرد.

۳) محلول فراسیرشده: در این حالت مقدار حل‌شونده موجود در محلول، از مقدار انحلال‌پذیری بیشتر بوده و در این حالت محلول ناپایدار است و با کوچک‌ترین تنشی مانند ضربه، مقدار اضافی حل‌شونده خود را رسوب می‌دهد و به محلول سیرشده تبدیل می‌شود. محلول در این حالت، بالای خط مربوط به نمودار انحلال‌پذیری ـ دما قرار می‌گیرد.

۸۵- اگر تفاوت عدد اتمی عناصر A و B از دوره سوم برابر ۳ بوده و بین این دو عنصر، یک عنصر فلزی و یک عنصر شبه‌فلزی حضور داشته باشد، کدام‌یک از عبارت‌های زیر درست است؟ (عدد اتمی عنصر B بزرگ‌تر از عدد اتمی عنصر A است.)

۱) بیشترین تفاوت شعاع دو عنصر متوالی در این دوره، بین A و عنصر پس از آن است.

۲) عنصر B در بین نافلزهای دوره سوم، بیشترین شعاع اتمی و کم‌ترین واکنش‌پذیری را دارد.

۳) فرمول شیمیایی ترکیب حاصل از یون پایدار عنصر A و یون سیلیکات به‌صورت $A_۲SiO_۴$ است.

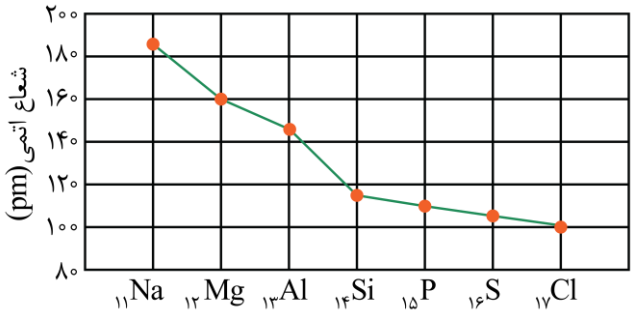
۴) یکی از عناصر قرار گرفته بین A و B، می‌تواند در واکنش‌های شیمیایی الکترون گرفته یا به اشتراک بگذارد.

پاسخ: گزینهٔ ۳ (متوسط ـ مفهومی ـ استاندارد ـ صفحهٔ ۱۳ ـ ۱۱۰۱)

برای حل این سؤال، ابتدا باید عناصر A و B را پیدا کنیم. تنها عنصر شبه‌فلزی دوره سوم جدول تناوبی، سیلیسیم است. از طرفی طبق گفته سؤال، یک عنصر شبه‌فلزی و یک عنصر فلزی بین عناصر A و B قرار گرفته‌اند. عنصر قبل از سیلیسیم، آلومینیم بوده که نوعی فلز است. از طرفی عنصر بعد از سیلیسیم، فسفر بوده که نوعی نافلز است. تا به اینجای کار متوجه شدیم که عناصر آلومینیم و سیلیسیم بین دو عنصر A و B قرار گرفته‌اند. از طرفی طبق صورت سؤال، عدد اتمی B از A بزرگ‌تر است؛ بنابراین می‌توان گفت عنصر A معادل با عنصر قبل از آلومینیم، یعنی منیزیم بوده و عنصر B نیز معادل عنصر بعد از سیلیسیم یعنی فسفر است. منیزیم در ترکیب‌های شیمیایی خود به‌صورت یون $Mg^{۲+}$ حضور دارد. فرمول شیمیایی یون سیلیکات نیز به‌صورت $SiO_۴^{۴-}$ است. بنابراین فرمول شیمیایی ترکیب یونی منیزیم سیلیکات به‌صورت $Mg_۲SiO_۴$ نمایش داده می‌شود.

بررسی سایر گزینه‌ها:

۱) به‌طور کلی با طی کردن یک دوره از چپ به راست، شعاع اتمی کاهش پیدا می‌کند. شیب کاهش شعاع اتمی در بین فلزها بیشتر از نافلزها بوده و بیشترین تفاوت شعاع اتمی دو عنصر متوالی مربوط به عناصر موجود در گروه‌های ۱۳ و ۱۴ جدول تناوبی است؛ بنابراین بیشترین تفاوت شعاع اتمی عناصر در دوره سوم مربوط به عناصر آلومینیم و سیلیسیم است. نمودار زیر شعاع اتمی عناصر موجود در دوره سوم را نمایش می‌دهد:



۲) با طی کردن یک دوره از چپ به راست، شعاع اتمی کاهش پیدا می‌کند؛ بنابراین فسفر در بین نافلزهای دوره سوم، بیشترین شعاع اتمی را دارد. از طرفی کمترین واکنش‌پذیری در بین عناصر یک دوره، مربوط به گاز نجیب آن دوره است. آرگون با عدد اتمی ۱۸، گاز نجیب موجود در دوره سوم است. پس از آرگون، فسفر معادل با نافلزی از تناوب سوم است که کمترین واکنش‌پذیری را دارد.

۴) عناصر فلزی در واکنش‌های شیمیایی تنها می‌توانند الکترون از دست بدهند. شبه‌فلزها نیز تنها با به اشتراک گذاشتن الکترون در واکنش‌های شیمیایی شرکت می‌کنند. نافلزها نیز می‌توانند با گرفتن یا به اشتراک گذاشتن الکترون‌های ظرفیتی خود، در واکنش‌های شیمیایی شرکت کنند. توجه داریم که بین این دو عنصر، هیچ نافلزی حضور ندارد.

روند تغییر شعاع اتمی

در یک دوره با حرکت از چپ به راست، تعداد لایه‌های الکترونی ثابت بوده ولی تعداد پروتون‌های هسته افزایش پیدا می‌کند. با افزایش تعداد پروتون‌های موجود در هسته، جاذبه روی لایه‌های الکترونی افزایش پیدا کرده و شعاع اتمی کاهش پیدا می‌کند. در یک گروه نیز با حرکت از سمت بالا به پایین، تعداد لایه‌های الکترونی افزایش پیدا کرده و شعاع افزایش پیدا می‌کند. با افزایش شعاع اتمی و درنتیجه افزایش فاصله هسته از لایه آخر الکترونی، اتم راحت‌تر می‌تواند الکترون‌های ظرفیتی خود را از دست بدهد. پس می‌توان گفت در یک گروه از بالا به پایین خاصیت فلزی افزایش و خاصیت نافلزی کاهش پیدا می‌کند.

۸۶- مقدار ۱۰ گرم FeO ناخالص به مخلوطی از سدیم و مس به جرم ۱۵ گرم اضافه می‌کنیم. اگر با انجام کامل واکنش و مصرف کل FeO، جرم جامدهای فلزی موجود در این مخلوط به ۱۶ گرم برسد، درصد خلوص نمونه اولیه FeO چند درصد بوده است؟ (ناخالصی، نوعی نافلز بوده و در واکنش شرکت نمی‌کند. $g.mol^{-1}$: $Cu = ۶۴, Fe = ۵۶, Na = ۲۳, O = ۱۶$)

۱) ۶۸ ۲) ۳۶ ۳) ۷۲ ۴) ۵۴

پاسخ: گزینهٔ ۳ (متوسط ـ محاسباتی ـ استاندارد ـ صفحهٔ ۲۳ ـ ۱۱۰۱)

به‌طور طبیعی فلزی با واکنش‌پذیری بیشتر، می‌تواند با ترکیب فلزی با واکنش‌پذیری کمتر واکنش داده و آن فلز را از ترکیبش جدا کند. مقایسه واکنش‌پذیری فلزهای آهن، مس و سدیم به‌صورت زیر است:

واکنش‌پذیری : سدیم > آهن > مس

بنابراین می‌توان گفت فلز سدیم موجود در مخلوط برخلاف مس موجود در آن با نمونه FeO واکنش می‌دهد. معادله موازنه‌شده واکنش سدیم و FeO به‌صورت زیر است:

$$FeO + ۲Na \longrightarrow Na_۲O + Fe$$

با هر بار انجام واکنش، ۲ مول سدیم (معادل ۴۶ گرم سدیم) از مخلوط فلزی جدا شده و ۱ مول فلز آهن (معادل ۵۶ گرم آهن) به این مخلوط افزوده می‌شود؛ بنابراین به‌ازای مصرف هر مول FeO و تولید یک مول آهن در این واکنش، جرم مخلوط عناصر فلزی به اندازه ۱۰ گرم افزایش پیدا می‌کند. در مرحله بعد مقدار FeO مصرف شده را محاسبه می‌کنیم. توجه داریم که با انجام این واکنش، جرم عناصر فلزی به اندازه ۱ گرم افزایش پیدا کرده است. بر این اساس داریم:

$$? g\ FeO = ۱\ g \text{ افزایش جرم عناصر فلزی} \times \frac{۱\ mol\ FeO}{۱۰\ g \text{ افزایش جرم عناصر فلزی}} \times \frac{۷۲\ g\ FeO}{۱\ mol\ FeO} = ۷/۲\ g$$

در پایان درصد خلوص FeO را محاسبه می‌کنیم:

$$\text{درصد خلوص} = \frac{\text{جرم خالص}}{\text{جرم ناخالص}} \times ۱۰۰ = \frac{۷/۲}{۱۰} \times ۱۰۰ = ۷۲ \text{ درصد}$$

واکنش‌پذیری فلزها

به‌طور کلی، در هر واکنش شیمیایی که به‌صورت طبیعی و خودبه‌خودی انجام می‌شود، واکنش‌پذیری فراورده‌ها از واکنش‌پذیری واکنش‌دهنده‌ها کمتر است. بر اساس این قاعده، با استفاده از عناصر فلزی واکنش‌پذیرتر می‌توانیم سایر عناصر فلزی را از ترکیبات حاوی آن‌ها خارج کنیم. به‌عنوان مثال، چون واکنش‌پذیری فلز سدیم در مقایسه با واکنش‌پذیری فلز آهن بیشتر است، با استفاده از فلز سدیم می‌توانیم فلز آهن را بر اساس واکنش خودبه‌خودی زیر از آهن (III) اکسید خارج کنیم. معادله این واکنش به‌صورت زیر است:

$$۶Na + Fe_۲O_۳ \longrightarrow ۳Na_۲O + ۲Fe$$

۸۷- کدام‌یک از موارد زیر درست است؟ ($H = ۱\ g.mol^{-1}$)

الف ـ میزان گران‌روی آلکان‌های راست‌زنجیر، با قدرت نیروی بین مولکولی آن‌ها رابطه مستقیم دارد.

ب ـ هر مول از ترکیب با فرمول $C_۸H_{۱۴}$، برای سیرشدن به‌یقین با ۴ گرم گاز هیدروژن واکنش می‌دهد.

ج ـ با استفاده از مقایسه ویژگی‌های فیزیکی پنتان و ۲-پنتن، می‌توان این دو ماده را از یکدیگر تشخیص داد.

د ـ با افزایش جرم مولی اجزای نفت خام در حین پالایش، ارتفاع خروج آن‌ها در برج تقطیر جزءبه‌جزء کاهش می‌یابد.

۱) «الف» و «ج» ۲) «الف» و «د» ۳) «ب» و «ج» ۴) «ب» و «د»

پاسخ: گزینهٔ ۲ (متوسط ـ مفهومی ـ استاندارد ـ صفحهٔ ۴۵ ـ ۱۱۰۱)

عبارت‌های (الف) و (د) درست هستند.

بررسی موارد:

الف) با افزایش شمار اتم‌های کربن در آلکان‌های راست‌زنجیر، جرم مولی آن‌ها افزایش پیدا می‌کند. با افزایش جرم مولی این ترکیب‌های مولکولی، نیروی بین مولکولی آن‌ها قوی‌تر شده و گران‌روی و نقطه جوش آن‌ها افزایش پیدا می‌کند.

ب) برای سیر شدن یک مولکول هیدروکربن، به‌ازای هر پیوند دوگانه و سه‌گانه به‌ترتیب ۱ و ۲ مولکول گاز هیدروژن مصرف می‌شود. اگر ترکیبی با فرمول شیمیایی $C_۸H_{۱۴}$ دارای ۲ پیوند دوگانه و یا یک پیوند سه‌گانه باشد، هر مول از آن در واکنش با ۲ مول گاز هیدروژن که معادل ۴ گرم از آن است، به ترکیبی سیرشده با فرمول شیمیایی $C_۸H_{۱۸}$ تبدیل می‌شود. معادله واکنش انجام شده به‌صورت زیر است:

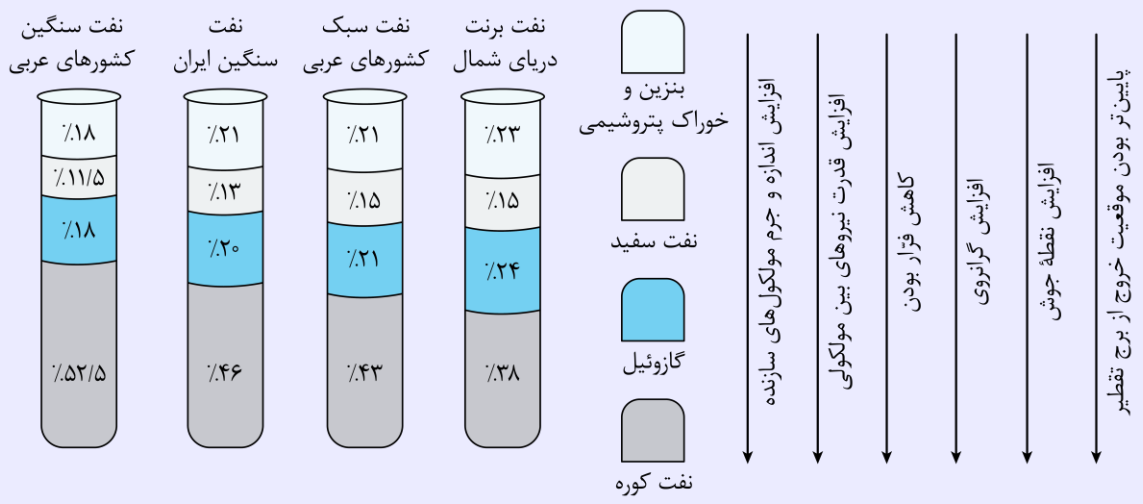
$$C_۸H_{۱۴} + ۲H_۲ \longrightarrow C_۸H_{۱۸}$$

توجه داریم که اگر هیدروکربن مورد نظر در ساختار خود دارای یک حلقه و یک پیوند دوگانه باشد، برای سیر شدن تنها به واکنش با ۱ مولکول گاز هیدروژن نیاز دارد. همچنین اگر این هیدروکربن در ساختار خود ۲ حلقه داشته باشد، سیر شده بوده و نمی‌تواند با گاز هیدروژن وارد واکنش شود.

ج) پنتان و ۲-پنتن، هر دو مایع هستند و از نظر ظاهری نیز تفاوتی ندارد، بنابراین نمی‌توان با استفاده از ویژگی‌های فیزیکی این دو ماده، آن‌ها را از یکدیگر تشخیص داد. توجه داریم که ۲-پنتن برخلاف پنتان، نوعی هیدروکربن سیرنشده بوده و می‌تواند با گاز هیدروژن یا بخار برم واکنش دهد؛ بنابراین برای تشخیص این دو ماده از یکدیگر باید ویژگی‌های شیمیایی آن‌ها را مقایسه کنیم.

د) با افزایش جرم مولی اجزای نفت خام پالایش شده، نقطه جوش آن‌ها افزایش پیدا کرده و ارتفاع خروج آن‌ها در حین تقطیر جزءبه‌جزء کاهش پیدا می‌کند.

مقایسه اجزای تشکیل‌دهنده نفت خام



آلکان‌ها

هیدروکربن‌ها دسته‌ای از ترکیب‌های آلی هستند که در ساختار خود فقط هیدروژن و کربن دارند. این هیدروکربن‌ها به دو دسته حلقوی و زنجیری طبقه‌بندی می‌شوند. یک دسته از هیدروکربن‌های زنجیری، آلکان‌ها هستند. آلکان‌ها، هیدروکربن‌های سیرشده با فرمول عمومی $C_nH_{۲n+۲}$ هستند. این هیدروکربن‌ها به دلیل سیرشده بودن، تمایلی به انجام واکنش شیمیایی ندارند اما در صورت تنفس بیش از حد بخارهای آن‌ها، درصد اکسیژن ورودی به ریه‌ها کاهش می‌یابد. از این رو، باعث تنگی نفس و حتی مرگ می‌شود. توجه داریم که آلکان‌ها ناقطبی بوده و در حلال‌هایی مانند آب حل نمی‌شوند؛ بنابراین می‌توان از آلکان‌های مایع به‌عنوان پوشش برای فلزات در معرض خوردگی استفاده کرد. آلکان‌ها در زندگی روزانه کاربردهای ویژه‌ای دارند. برای مثال، تینر همان هگزان ($C_۶H_{۱۴}$) است که نوعی آلکان بوده و به‌عنوان رقیق‌کننده رنگ‌ها از آن استفاده می‌شود.

۸۸- مخلوطی از دو گاز بوتان و ۱-بوتن به جرم ۱۰۰ گرم در اختیار داریم. اگر این مخلوط را با مقدار کافی گاز هیدروژن وارد واکنش کنیم، جرم بوتان موجود در مخلوط نهایی به ۷۱/۶ گرم می‌رسد. اگر بازده واکنش برابر ۲۸ درصد باشد، چند درصد جرمی مخلوط اولیه را ۱-بوتن تشکیل داده است؟ ($C = ۱۲ , H = ۱ : g.mol^{-۱}$)

۱) ۴۰ ۲) ۶۰ ۳) ۷۵ ۴) ۲۵

پاسخ: گزینهٔ ۱ (متوسط ـ محاسباتی ـ استاندارد ـ صفحهٔ ۵۰ ـ ۱۱۰۱)

آلکان‌ها از جمله هیدروکربن‌های سیرشده بوده و با گاز هیدروژن واکنش نمی‌دهند. از طرفی آلکن‌ها از جمله هیدروکربن‌های سیرنشده بوده و هر مولکول آن‌ها برای سیرشدن با یک مولکول گاز هیدروژن واکنش می‌دهد. معادله واکنش گاز ۱-بوتن با مولکول هیدروژن به‌صورت زیر است:

$$C_4H_8(g) + H_2(g) \longrightarrow C_4H_{10}(g)$$

فرض می‌کنیم در مخلوط اولیه x گرم ۱-بوتن حضور دارد. در این صورت جرم بوتان موجود در این مخلوط برابر با $100 - x$ گرم خواهد بود. در قدم اول، مقدار نظری بوتان تولید شده در این واکنش را محاسبه می‌کنیم:

$$?\,g\ C_4H_{10} = x\,g\ C_4H_8 \times \frac{1\ mol\ C_4H_8}{56\ g\ C_4H_8} \times \frac{1\ mol\ C_4H_{10}}{1\ mol\ C_4H_8} \times \frac{58\ g\ C_4H_{10}}{1\ mol\ C_4H_{10}} = \frac{58}{56}x\ g$$

در مرحله بعد، مقدار عملی بوتان تولید شده را به‌دست می‌آوریم:

$$\text{بازده} = \frac{\text{مقدار عملی}}{\text{مقدار نظری}} \times 100 \Longrightarrow \text{مقدار عملی} = \frac{\text{بازده} \times \text{مقدار نظری}}{100} = \frac{\frac{58}{56}x \times 28}{100} = 0/29x\ g$$

در ادامه با استفاده از جرم کل بوتان موجود در مخلوط نهایی، مقدار مجهول را پیدا می‌کنیم:

$$\text{جرم اولیه بوتان} + \text{جرم بوتان تولید شده} = (100 - x) + 0/29x = 100 - 0/71x = 71/6 \Longrightarrow x = 40\ g$$

بر این اساس، می‌توان گفت در مخلوط اولیه ۶۰ گرم بوتان وجود داشته و طی این فرایند نیز ۱۱/۶ گرم بوتان تولید شده است. در پایان درصد جرمی ۱-بوتن در مخلوط اولیه را محاسبه می‌کنیم:

$$\text{درصد جرمی} = \frac{40}{100} \times 100 = 40\ \text{درصد}$$

بازده شیمیایی

واکنش‌های شیمیایی همیشه مطابق آنچه انتظار می‌رود پیش نمی‌روند، زیرا ممکن است واکنش‌دهنده‌ها ناخالص باشند یا ممکن است واکنش به‌طور کامل انجام نشود، حتی گاهی نیز هم‌زمان با آن واکنش‌های ناخواسته دیگری انجام می‌شود. با این توصیف، مقدار واقعی فراورده از مقدار مورد انتظار کمتر است. در واقع بازده درصدی واکنش‌های شیمیایی از ۱۰۰ کمتر است. در مسائل مختلف از طریق فرمول زیر می‌توانیم بازده درصدی واکنش را محاسبه کنیم:

$$\text{بازده واکنش} = \frac{\text{مقدار عملی}}{\text{مقدار نظری}} \times 100$$

توجه داریم برای تبدیل مول یک فراورده به فراورده دیگر و همچنین یک واکنش‌دهنده به واکنش‌دهنده دیگر، بازده تأثیری نخواهد داشت!

۸۹- کدام‌یک از گزینه‌های زیر درست است؟

۱) با داشتن ظرفیت گرمایی دو نمونه، می‌توان مجموع انرژی ذرات موجود در آن‌ها را مقایسه کرد.
۲) اگر انرژی گرمایی دو نمونه از گاز کلر برابر باشد، میانگین انرژی جنبشی ذرات آن‌ها نیز قطعاً برابر است.
۳) با مخلوط کردن دو نمونه مختلف، دمای مخلوط پایانی، به مخلوطی با ظرفیت گرمایی بالاتر نزدیک‌تر خواهد بود.
۴) با انتقال انرژی برابر به دو نمونه آب و روغن با جرم برابر، میانگین انرژی جنبشی ذرات آب بیشتر افزایش پیدا می‌کند.

پاسخ: گزینهٔ ۳ (متوسط ـ مفهومی ـ استاندارد ـ صفحهٔ ۶۰ ـ ۱۱۰۲)

دمای یک نمونه، نشان‌دهنده میانگین انرژی جنبشی یا میانگین تندی ذرات سازنده آن نمونه است. برای محاسبه دمای تعادلی نمونه حاصل از مخلوط کردن دو ماده مختلف با یکدیگر، از رابطه زیر استفاده می‌کنیم:

$$\overbrace{\theta}^{\text{دمای تعادل}} = \frac{m_1c_1\theta_1 + m_2c_2\theta_2}{m_1c_1 + m_2c_2} = \frac{C_1\theta_1 + C_2\theta_2}{C_1 + C_2}$$

با توجه به قواعد میانگین‌گیری، دمای مخلوط نهایی یا همان دمای تعادل، به دمای اولیه مخلوطی با ظرفیت گرمایی (C) بزرگ‌تر، نزدیک‌تر خواهد بود.

بررسی سایر گزینه‌ها:

۱) برای مقایسه مجموع انرژی ذرات سازنده (انرژی کل یا همان آنتالپی) دو نمونه مختلف، باید نوع ذرات، شمار ذرات و دمای نمونه‌ها را با یکدیگر مقایسه کنیم. توجه داریم که ظرفیت گرمایی یک نمونه، مقدار انرژی لازم برای تغییر دمای آن نمونه را مشخص می‌کند و نمی‌توان با استفاده از آن، به مقدار انرژی کل آن نمونه پی برد.

۲) برای مقایسه انرژی گرمایی دو نمونه، نیاز به دانستن نوع ذرات، شمار ذرات و دمای نمونه داریم؛ بنابراین دو نمونه مشخص شده، می‌توانند شمار ذرات و دمای متفاوت داشته باشند اما انرژی گرمایی آن‌ها با یکدیگر برابر باشد.

۴) برای محاسبه انرژی مبادله شده در اثر تغییر دما، از رابطه زیر استفاده می‌کنیم:

$$Q = mc\Delta\theta = C\Delta\theta \Longrightarrow \Delta\theta = \frac{Q}{C}$$

همان‌طور که می‌دانیم، ظرفیت گرمایی ویژه آب از روغن بیشتر است. با توجه به برابر بودن جرم دو نمونه، می‌توان گفت ظرفیت گرمایی نمونه آب نیز بیشتر از نمونه روغن است. با توجه به رابطه ذکر شده، مقدار تغییر دمای نمونه، با ظرفیت گرمایی آن نمونه رابطه عکس دارد؛ بنابراین می‌توان گفت، با دادن انرژی برابر به نمونه‌هایی از آب و روغن با جرم برابر، تغییر دمای نمونه آب، کم‌تر از تغییر دمای نمونه روغن خواهد بود.

ظرفیت گرمایی (C) و ظرفیت گرمایی ویژه (c)

ظرفیت گرمایی (C)، مقدار گرمای لازم برای افزایش دمای یک ماده به اندازه ۱°C یا ۱K است. این کمیت به جرم و جنس جسم بستگی دارد. یکای این کمیت، معادل با $J.°C^{-1}$ یا $J.K^{-1}$ است. ظرفیت گرمایی از رابطه $C = m \times c$ محاسبه می‌شود. ظرفیت گرمایی ویژه (c)، مقدار گرمای لازم برای افزایش دمای یک گرم از ماده به اندازه ۱°C یا ۱K است. این کمیت فقط به جنس ماده وابسته است. همچنین یکای این کمیت، معادل با $J.g^{-1}.°C^{-1}$ یا $J.g^{-1}.K^{-1}$ است. با توجه به توضیحات داده شده، برای افزایش دمای یکسان دو نمونه ماده با ظرفیت گرمایی (C) برابر، انرژی یکسانی لازم است؛ اما برای افزایش دمای یکسان دو نمونه با جرم برابر، نمونه‌ای با گرمای ویژه (c) بالاتر، انرژی بیشتری نیز نیاز دارد.

۹۰- با توجه به معادله واکنش‌های زیر، انرژی لازم برای تولید ۳۶۰ گرم فلز جیوه مذاب، از تجزیه کامل چند گرم پتاسیم کلرات ($KClO_3$) به‌دست می‌آید؟ ($Hg = 200, K = 39, Cl = 35/5, O = 16 : g.mol^{-1}$)

$$2KClO_3(s) \longrightarrow 2KCl(s) + 3O_2(g) + 90kJ$$

$$2HgO(s) + 180kJ \longrightarrow 2Hg(l) + O_2(g)$$

۱) ۳۶۷/۵ ۲) ۱۲۲/۵ ۳) ۲۴۵ ۴) ۴۴۱

پاسخ: گزینهٔ ۴ (آسان ـ محاسباتی ـ سریع ـ صفحهٔ ۶۴ ـ ۱۱۰۲)

معادله‌های گرماشیمی واکنش‌های انجام شده به‌صورت زیر است:

$$2KClO_3(s) \longrightarrow 2KCl(s) + 3O_2(g) \qquad \Delta H = -90kJ$$
$$2HgO(s) \longrightarrow 2Hg(l) + O_2(g) \qquad \Delta H = 180kJ$$

در قدم اول، مقدار انرژی لازم برای تولید ۳۶۰ گرم جیوه را محاسبه می‌کنیم:

$$?\,kJ = 360\ g\ Hg \times \frac{1\ mol\ Hg}{200\ g\ Hg} \times \frac{180\ kJ\ \text{انرژی}}{2\ mol\ Hg} = 162\ kJ$$

در ادامه با برابر قرار دادن انرژی مبادله‌شده در دو واکنش، مقدار پتاسیم کلرات مصرف شده را به‌دست می‌آوریم:

$$?\,g\ KClO_3 = 162\ kJ\ \text{انرژی} \times \frac{2\ mol\ KClO_3}{90\ kJ\ \text{انرژی}} \times \frac{122/5\ g\ KClO_3}{1\ mol\ KClO_3} = 441\ g$$

همان‌طور که مشخص است، واکنش تجزیه پتاسیم کلرات و جیوه (II) اکسید، به‌ترتیب از جمله واکنش‌های گرماده و گرماگیر هستند.

واکنش‌های گرماگیر و گرماده

مقایسه واکنش‌های گرماگیر و گرماده به‌صورت زیر است:

انواع واکنش

گرماگیر
- انرژی فراورده‌ها از واکنش‌دهنده‌ها بالاتر است.
- فراورده‌ها نسبت به واکنش‌دهنده‌ها ناپایدارتر هستند.
- از این واکنش‌ها در بسته‌های سرمازا استفاده می‌شود.
- اندازه انرژی فعال‌سازی بزرگ‌تر از اندازه آنتالپی واکنش است.
- ثابت تعادل آن‌ها با افزایش دما افزایش و با کاهش دما کاهش پیدا می‌کند.

گرماده
- انرژی فراورده‌ها از واکنش‌دهنده‌ها پایین‌تر است.
- فراورده‌ها نسبت به واکنش‌دهنده‌ها پایدارتر هستند.
- از این واکنش‌ها در بسته‌های گرمازا استفاده می‌شود.
- اندازه انرژی فعال‌سازی بزرگ‌تر، مساوی یا کوچک‌تر از اندازه آنتالپی واکنش است.
- ثابت تعادل آن‌ها با افزایش دما کاهش و با کاهش دما افزایش پیدا می‌کند.

گرماشیمی (ترموشیمی)

هر واکنش شیمیایی می‌تواند با تغییر رنگ، تولید رسوب، آزاد شدن گاز و حتی ایجاد جرقه و گرما همراه باشد، اما یک ویژگی بنیادی و مشترک همه واکنش‌های شیمیایی دادوستد و تبادل انرژی با محیط اطراف است. بررسی و مطالعه گرمای مبادله شده در واکنش‌ها موجب پیدایش شاخه ترموشیمی (گرماشیمی) از علم شیمی شد. این شاخه از علم شیمی گرمای واکنش‌های شیمیایی از لحاظ کمی و کیفی، تغییر این گرما و تأثیر آن بر حالت فیزیکی مواد را بررسی می‌کند. همچنین به خاطر داشته باشید که اگر یک واکنش را با آنتالپی آن واکنش بیان کنند، به آن واکنش ترموشیمیایی گفته می‌شود.

۹۱- کدام‌یک از گزینه‌های زیر نادرست است؟

۱) با قوی‌تر شدن نیروی بین مولکولی آلکان‌ها، ارزش سوختی آن‌ها کاهش پیدا می‌کند.

۲) گرمای حاصل از سوختن یک گرم H، بیشتر از گرمای حاصل از سوختن یک گرم H_2 است.

۳) در واکنش سوختن دو نمونه اتانول و اتن با جرم برابر، مقدار انرژی آزاد شده از ماده سیرنشده، کمتر است.

۴) اگر سوختن متان را به‌جای دمای $150^\circ C$، در شرایط استاندارد انجام دهیم، مقدار انرژی مبادله شده تغییر پیدا می‌کند.

پاسخ: گزینهٔ ۳ (متوسط ـ خط به خط و مفهومی ـ استاندارد ـ صفحهٔ ۷۳ ـ ۱۱۰۲)

برای محاسبه مقدار انرژی حاصل از واکنش سوختن، می‌توان ارزش سوختی را در جرم ماده سوختنی ضرب کرد. در این رابطه داریم:

$$\text{ارزش سوختی} = \frac{\text{انرژی آزادشده}}{\text{جرم سوخت}} \Longrightarrow \text{انرژی آزادشده} = \text{ارزش سوختی} \times \text{جرم سوخت}$$

ارزش سوختی یک ماده از رابطه زیر نیز محاسبه می‌شود:

$$\text{ارزش سوختی} = \frac{|\text{آنتالپی سوختن}|}{\text{جرم مولی}}$$

همان‌طور که مشخص است، ارزش سوختی با اندازه آنتالپی سوختن رابطه مستقیم و با جرم مولی نمونه رابطه عکس دارد. مقایسه بین اندازه آنتالپی سوختن مواد آلی مختلف (هم‌کربن) به‌صورت زیر است:

$$|\Delta H_{\text{سوختن}}| : \text{آلکان} > \text{آلکن} > \text{الکل} > \text{آلکین}$$

اندازه آنتالپی سوختن اتن در مقایسه با اتانول بزرگ‌تر بوده و جرم مولی آن نیز کمتر از اتانول است؛ بنابراین می‌توان گفت ارزش سوختی اتن بیشتر از اتانول است. با توجه به بیشتر بودن ارزش سوختی اتن در مقایسه با اتانول، می‌توان گفت در اثر سوختن جرم برابری از این دو ماده آلی، انرژی آزاد شده از سوختن اتن بیشتر خواهد بود.

بررسی سایر گزینه‌ها:

۱) با افزایش جرم مولی آلکان‌ها، نیروی بین مولکولی آن‌ها افزایش پیدا کرده و ارزش سوختی آن‌ها کاهش پیدا می‌کند؛ بنابراین می‌توان گفت در بین آلکان‌ها، متان بیشترین ارزش سوختی را دارد.

۲) سوختن هیدروژن نوعی واکنش گرماده بوده و با از دست دادن انرژی همراه است. در واکنش‌های گرماده، با افزایش انرژی واکنش‌دهنده‌ها یا کاهش انرژی فراورده‌ها، مقدار انرژی آزاد شده افزایش پیدا می‌کند. توجه داریم که انرژی ۱ گرم H در مقایسه با ۱ گرم گاز هیدروژن بیشتر است.

انواع واکنش‌های شیمیایی

در رابطه با انواع واکنش‌های شیمیایی داریم:

- انواع واکنش‌ها
  - گرماگیر
    - با افزایش انرژی واکنش‌دهنده‌ها یا کاهش انرژی فراورده‌ها، اندازه آنتالپی آن کاهش پیدا می‌کند.
    - با کاهش انرژی واکنش‌دهنده‌ها یا افزایش انرژی فراورده‌ها، اندازه آنتالپی آن افزایش پیدا می‌کند.
  - گرماده
    - با کاهش انرژی واکنش‌دهنده‌ها یا افزایش انرژی فراورده‌ها، اندازه آنتالپی آن کاهش پیدا می‌کند.
    - با افزایش انرژی واکنش‌دهنده‌ها یا کاهش انرژی فراورده‌ها، اندازه آنتالپی آن افزایش پیدا می‌کند.

۴) سوختن متان نوعی واکنش گرماده بوده و با آزاد شدن انرژی همراه است. اگر این واکنش را به‌جای دمای بالا، در شرایط استاندارد انجام دهیم، انرژی مواد فراورده کاهش پیدا می‌کند و حتی حالت فیزیکی آن‌ها نیز دچار تغییر می‌شود. با کاهش سطح انرژی مواد فراورده در واکنش‌های گرماده، مقدار انرژی تولید شده افزایش پیدا می‌کند.

۹۲- سرعت متوسط فرایند اکسایش گلوکز برابر با $۲\ mol.L^{-۱}.h^{-۱}$ و بازده این واکنش برابر با ۷۵٪ است. اگر با گذشت ۹۰ دقیقه از شروع واکنش، ۱۱۸۸ گرم $CO_۲$ در این واکنش تولید شود، حجم ظرف برابر چند لیتر بوده است؟

$(O = ۱۶ , C = ۱۲ : g.mol^{-۱})$

۱) ۵ ۲) ۲ ۳) ۴ ۴) ۳

پاسخ: گزینهٔ ۲ (متوسط ـ محاسباتی ـ استاندارد ـ صفحهٔ ۸۸ ـ ۱۱۰۲)

معادله موازنه شده واکنش اکسایش گلوکز به‌صورت زیر است:

$$C_۶H_{۱۲}O_۶(s) + ۶O_۲(g) \longrightarrow ۶CO_۲(g) + ۶H_۲O(l)$$

ابتدا با توجه به بازده، مقدار نظری گاز کربن‌دی‌اکسید را محاسبه می‌کنیم:

$$\text{بازده} = \frac{\text{مقدار عملی}}{\text{مقدار نظری}} \times ۱۰۰ \Longrightarrow \text{مقدار نظری} = \frac{\text{مقدار عملی} \times ۱۰۰}{\text{بازده}} = \frac{۱۱۸۸ \times ۱۰۰}{۷۵} = ۱۵۸۴\ g$$

در ادامه با استفاده از سرعت متوسط واکنش، سرعت تولید گاز کربن‌دی‌اکسید را به‌دست می‌آوریم:

$$\bar{R}_{\text{واکنش}} = \frac{R_{CO_۲}}{\text{ضریب استوکیومتری } CO_۲} \Longrightarrow R_{CO_۲} = \bar{R}_{\text{واکنش}} \times \text{ضریب استوکیومتری } CO_۲ = ۲ \times ۶ = ۱۲\ mol.L^{-۱}.h^{-۱}$$

در پایان با استفاده از سرعت تولید گاز کربن‌دی‌اکسید، حجم ظرف را محاسبه می‌کنیم:

$$\bar{R}_{CO_۲} = \frac{\overbrace{|\Delta[CO_۲]|}^{\text{تغییرات غلظت مولار}}}{\underbrace{\Delta t}_{\text{زمان سپری شده}}} \Rightarrow ۱۲ = \frac{\frac{\frac{۱۵۸۴\ g}{۴۴\ g.mol^{-۱}}}{V}}{۹۰\ min \times \frac{۱\ h}{۶۰\ min}} = \frac{\frac{۳۶\ mol}{V}}{۱/۵\ h} \Rightarrow V = ۲\ L$$

همانطور که مشخص است، حجم ظرف استفاده شده برای این واکنش، ۲ لیتر بوده است.

سرعت متوسط واکنش

برای محاسبه سرعت متوسط مصرف یا تولید مواد شرکت‌کننده در یک واکنش شیمیایی، باید از کمیت‌های قابل اندازه‌گیری مواد شرکت‌کننده در آن واکنش مانند جرم، فشار، غلظت و یا حجم استفاده کنیم. رابطه سرعت متوسط مصرف یا تولید یک ماده در یک واکنش شیمیایی به‌صورت زیر است:

$$\bar{R} = \frac{|n_۲ - n_۱|}{\Delta t} = \frac{|\Delta n|}{\Delta t}$$

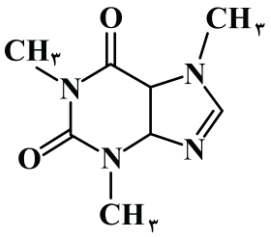
در این رابطه، R معادل با سرعت متوسط مصرف یا تولید یک ماده، Δt بیانگر طول یک بازه زمانی و Δn معادل تغییر مقدار کمیت موردنظر در طول آن بازه زمانی است. به‌علاوه می‌دانیم که سرعت متوسط مصرف یا تولید مواد شرکت‌کننده در یک واکنش، متناسب با ضرایب استوکیومتری آن‌ها خواهد بود؛ به عبارت دیگر، اگر ضرایب استوکیومتری مواد شرکت‌کننده در واکنش یکسان نباشد، سرعت متوسط مصرف یا تولید آن‌ها نیز متفاوت از یکدیگر خواهد بود. از این رو، شیمی‌دان‌ها برای درک آسان‌تر روند پیشرفت واکنش‌ها در واحد زمان، از یک مفهوم کاربردی به نام سرعت واکنش استفاده می‌کنند. سرعت واکنش، از تقسیم سرعت متوسط مصرف یا تولید هر یک از مواد شرکت‌کننده در واکنش بر ضریب استوکیومتری آن ماده در معادله واکنش به‌دست می‌آید. برای مثال معادله زیر را در نظر بگیرید:

$$۲A + B \longrightarrow ۳C + ۲D$$

برای محاسبه سرعت متوسط واکنش در بازه زمانی Δt به‌صورت زیر عمل می‌کنیم:

$$\bar{R}_{\text{واکنش}} = \frac{|\Delta n_A|}{۲\times\Delta t} = \frac{|\Delta n_B|}{۱\times\Delta t} = \frac{|\Delta n_C|}{۳\times\Delta t} = \frac{|\Delta n_D|}{۲\times\Delta t} \Rightarrow \bar{R}_{\text{واکنش}} = \frac{\bar{R}_A}{۲} = \frac{\bar{R}_B}{۱} = \frac{\bar{R}_C}{۳} = \frac{\bar{R}_D}{۲}$$

۹۳- کدام‌یک از عبارت‌های زیر درباره ترکیب داده‌شده درست است؟



$(C = ۱۲ , H = ۱ : g.mol^{-۱})$

الف ـ این مولکول با مولکول‌های خود و مولکول‌های آب پیوند هیدروژنی برقرار می‌کند.

ب ـ در واکنش این ترکیب و مقدار کافی از یک دی‌اسید، نوعی پلی‌آمید تشکیل خواهد شد.

ج ـ هر اتم کربن موجود در آن، یک، دو و یا سه پیوند اشتراکی با اتم‌های N تشکیل داده است.

د ـ درصد جرمی اتم‌های کربن در این ترکیب آلی، ۸ برابر درصد جرمی اتم‌های هیدروژن آن است.

۱) «الف» و «ب»　　۲) «الف» و «ج»　　۳) «ب» و «د»　　۴) «ج» و «د»

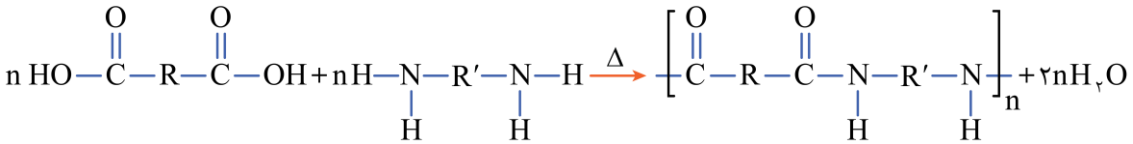
پاسخ: گزینهٔ ۴　　**(متوسط ـ مفهومی و محاسباتی ـ استاندارد ـ صفحهٔ ۱۱۷ ـ ۱۱۰۳)**

عبارت‌های (ج) و (د) درست هستند.

بررسی موارد:

الف) اگر یک مولکول، اتم هیدروژن متصل به اتم‌های نیتروژن، اکسیژن یا فلوئور داشته باشد، می‌تواند با مولکول‌های خود و مولکول‌های آب پیوند هیدروژنی تشکیل دهد. در ساختار ترکیب آلی نمایش داده‌شده، اتم هیدروژن متصل به FON حضور نداشته و به همین دلیل، ذرات این ماده نمی‌توانند با مولکول‌های خود پیوند هیدروژنی تشکیل دهند. توجه داریم که برای ایجاد پیوند هیدروژنی میان ترکیب‌های آلی با مولکول‌های آب، وجود اتم اکسیژن در ساختار ترکیب آلی کافی است. برای مثال، استون می‌تواند با مولکول‌های آب برخلاف مولکول‌های خود پیوند هیدروژنی تشکیل دهد. به همین دلیل این ترکیب آلی در آب بسیار محلول است.

ب) معادله کلی تولید پلی‌آمیدها به‌صورت زیر است:



از واکنش نوعی ترکیب آلی از دسته دی‌اسیدها با نوعی ترکیب آلی از دسته دی‌آمین‌ها، پلی‌آمیدها تشکیل می‌شوند. توجه داریم که اتم‌های نیتروژن موجود در ساختار مولکول دی‌آمین، باید حداقل به یک اتم هیدروژن متصل باشند. این در حالی است که در ترکیب آلی ذکر شده، اتم‌های نیتروژن موجود در گروه‌های عاملی آمینی، تنها با اتم‌های کربن پیوند اشتراکی برقرار کرده‌اند.

ج) همان‌طور که در ساختار ترکیب آلی مشخص است، هر کدام از اتم‌های کربن موجود در ساختار این ترکیب آلی، با یک، دو یا سه پیوند اشتراکی به اتم‌های نیتروژن اطراف خود متصل شده‌اند. توجه داریم که هر پیوند دوگانه، دو پیوند شمرده می‌شود.

د) فرمول شیمیایی این ترکیب آلی به‌صورت $C_۸H_{۱۲}N_۴O_۲$ است. برای محاسبه شمار اتم‌های هیدروژن یک ترکیب آلی می‌توانیم از رابطه زیر استفاده کنیم:

$$\text{شمار } H = (\text{تعداد } C \times ۲) + ۲ - (\text{تعداد پیوند دوگانه}) \times ۲ - (\text{تعداد حلقه} + \text{تعداد پیوند سه‌گانه}) \times ۴ + \text{تعداد } N - \text{تعداد } \underbrace{X}_{\text{هالوژن}}$$

$$= (۸ \times ۲) + ۲ - (\underbrace{۵}_{\text{سه پیوند دوگانه و دو حلقه}} \times ۲) + \underbrace{۴}_{\text{شمار اتم‌های نیتروژن}} = ۱۲$$

حال نسبت درصد جرمی اتم‌های کربن به اتم‌های هیدروژن را محاسبه می‌کنیم:

$$\text{نسبت درصد جرمی کربن به هیدروژن} = \frac{\text{درصد جرمی کربن}}{\text{درصد جرمی هیدروژن}} = \frac{\frac{\text{جرم اتم‌های کربن}}{\text{جرم مولی مولکول}} \times ۱۰۰}{\frac{\text{جرم اتم‌های هیدروژن}}{\text{جرم مولی مولکول}} \times ۱۰۰} = \frac{\text{جرم اتم‌های کربن}}{\text{جرم اتم‌های هیدروژن}} = \frac{۸ \times ۱۲}{۱۲ \times ۱} = ۸$$

۹۴- مقدار ۱۸۴ گرم اتانول در واکنش با مقدار کافی از یک اسید، نوعی استر با فرمول شیمیایی $C_۷H_{۱۴}O_۲$ تولید می‌کند. فرمول شیمیایی اسید مصرف شده در این واکنش و جرم آب تولید شده کدام است؟ $(O = ۱۶ , C = ۱۲ , H = ۱ : g.mol^{-۱})$

۱) $C_۵H_{۱۰}O_۲$ ـ ۷۲ ۲) $C_۴H_۸O_۲$ ـ ۱۴۴ ۳) $C_۵H_{۱۰}O_۲$ ـ ۱۴۴ ۴) $C_۴H_۸O_۲$ ـ ۷۲

پاسخ: گزینهٔ ۱ (آسان ـ مفهومی و محاسباتی ـ سریع ـ صفحهٔ ۱۱۵ ـ ۱۱۰۳)

استرها گروهی از مواد آلی هستند که از واکنش الکل‌ها و کربوکسیلیک اسیدها حاصل می‌شوند. معادله واکنش تولید این دسته از مواد آلی به‌صورت زیر است:

$$\underbrace{C_nH_mO}_{\text{الکل}} + \underbrace{C_xH_wO_۲}_{\text{کربوکسیلیک اسید}} \longrightarrow \underbrace{C_{n+x}H_{m+w-۲}O_۲}_{\text{استر}} + H_۲O$$

معادله ساختار این فرایند را به‌صورت زیر نیز می‌توان نشان داد:

همان‌طور که مشخص است، مجموع شمار اتم‌های کربن موجود در الکل و کربوکسیلیک اسید، با شمار اتم‌های کربن موجود در استر برابر است. الکل سازنده این استر، معادل با اتانول است، بنابراین شمار اتم‌های کربن موجود در کربوکسیلیک اسید سازنده این استر برابر ۵ است. پس می‌توان گفت معادله واکنش انجام شده به‌صورت زیر است:

$$C_۲H_۶O + C_۵H_{۱۰}O_۲ \longrightarrow C_۷H_{۱۴}O_۲ + H_۲O$$

در مرحله بعد جرم آب تولید شده را محاسبه می‌کنیم:

$$? g\ H_۲O = ۱۸۴\ g\ C_۲H_۶O \times \frac{۱\ mol\ C_۲H_۶O}{۴۶\ g\ C_۲H_۶O} \times \frac{۱\ mol\ H_۲O}{۱\ mol\ C_۲H_۶O} \times \frac{۱۸\ g\ H_۲O}{۱\ mol\ H_۲O} = ۷۲\ g$$

استرها

استرها دسته‌ای از ترکیب‌های آلی هستند که در ساختار خود یک یا چند گروه استری ($-COO-$) دارند. استرها را اغلب به‌عنوان عامل طعم و بوی میوه‌ها، گل‌ها، شکوفه‌ها و عطرها می‌شناسند. این مواد آلی از واکنش اسیدهای آلی (کربوکسیلیک اسیدها) و الکل‌ها حاصل می‌شوند. برای تهیه استرها نیاز به محیط اسیدی قوی (معمولاً سولفوریک اسید) است. معادله این واکنش به‌صورت زیر است:

$$\text{اسید آلی} + \text{الکل} \xrightarrow{H_2SO_4(aq)} \text{استر} + \text{آب}$$

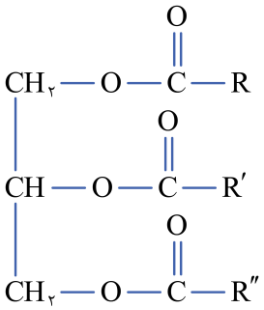
از استرهای معروف می‌توان به اتیل بوتانوات (عامل طعم و بوی آناناس)، اتیل اتانوات (حلال چسب)، متیل بوتانوات (عامل طعم و بوی سیب)، پنتیل اتانوات (عامل طعم و بوی موز) و اتیل هپتانوات (عامل طعم و بوی انگور) اشاره کرد. نام همه استرها به قالب کلی «آلکیل آلکانوات» است. بخش «آلکیل»، مربوط به تعداد کربن‌های الکل سازنده و بخش «آلکانوات» نیز مربوط به تعداد کربن‌های اسید آلی سازنده است. استرهای تک عاملی سیر شده بدون حلقه با اسیدهای آلی با همین ویژگی‌ها ایزومر هستند. دقت کنید که نقطه جوش و انحلال‌پذیری اسید آلی در آب از استر ایزومر خود به دلیل برقراری پیوند هیدروژنی بیشتر است.

۹۵- از سوختن مقداری از یک استر سه عاملی با زنجیرهای هیدروکربنی سیرشده یکسان، ۱۳۲۰ گرم کربن‌دی‌اکسید و ۵۲۲ گرم بخار آب تولید شده است. فرمول شیمیایی اسید چرب سازنده این استر کدام است؟ ($O = ۱۶, C = ۱۲, H = ۱ : g.mol^{-۱}$)

۱) $C_{۱۸}H_{۳۶}O_۲$ ۲) $C_{۱۹}H_{۳۸}O_۲$ ۳) $C_{۱۸}H_{۳۴}O_۲$ ۴) $C_{۱۹}H_{۳۶}O_۲$

پاسخ: گزینهٔ ۲ (متوسط ـ مفهومی و محاسباتی ـ استاندارد ـ صفحهٔ ۵ ـ ۱۲۰۱)

استرهای سه عاملی از جمله ترکیب‌های آلی بوده و فرمول شیمیایی آن‌ها به‌صورت $C_nH_mO_۶$ است. ساختار کلی این مواد به‌صورت زیر است:



اگر زنجیرهای هیدروکربنی این مولکول‌ها سیرشده باشند، فرمول شیمیایی آن‌ها به‌صورت $C_nH_{۲n-۴}O_۶$ خواهد بود؛ بنابراین معادله موازنه شده سوختن این ترکیب آلی به‌صورت زیر است:

$$C_nH_{۲n-۴}O_۶ + (\frac{۳n-۸}{۲})O_۲ \longrightarrow nCO_۲ + (n-۲)H_۲O$$

در مرحله بعد، مول کربن‌دی‌اکسید و بخار آب تولید شده را محاسبه می‌کنیم:

$$CO_۲ : \text{مول} = \frac{\text{جرم}}{\text{جرم مولی}} = \frac{۱۳۲۰}{۴۴} = ۳۰\ mol \qquad H_۲O : \text{مول} = \frac{\text{جرم}}{\text{جرم مولی}} = \frac{۵۲۲}{۱۸} = ۲۹\ mol$$

با توجه به ضرایب مواد در معادله موازنه شده واکنش سوختن ترکیب استری، نسبت مول بخار آب تولید شده به مول کربن دی‌اکسید تولید شده برابر $\frac{n-۲}{n}$ است. از طرفی طبق محاسبات انجام شده، نسبت مورد نظر در واکنش سوختن استر داده شده برابر $\frac{۲۹}{۳۰}$ است. حال با برابر قرار دادن این دو مقدار، n را پیدا می‌کنیم. داریم:

$$\frac{n-۲}{n} = \frac{۲۹}{۳۰} \Longrightarrow ۳۰n - ۶۰ = ۲۹n \Longrightarrow n = ۶۰$$

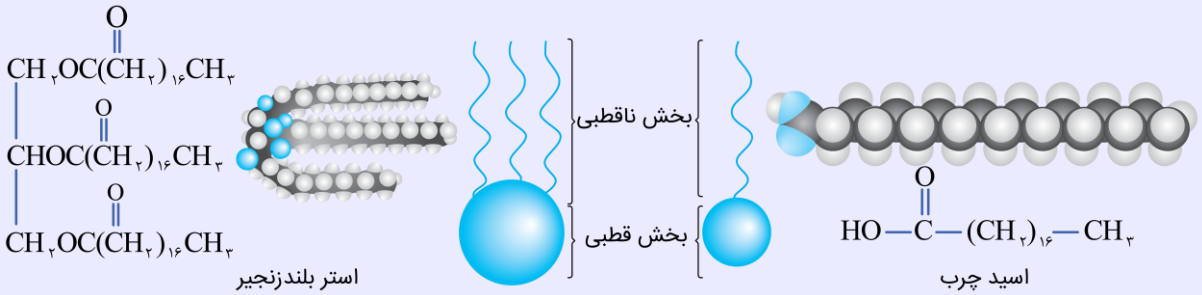
با توجه به محاسبات انجام شده، فرمول شیمیایی استر سه عاملی، به‌صورت $C_{۶۰}H_{۱۱۶}O_۶$ است. حال معادله واکنش آن با مقدار کافی آب و تولید الکل و اسید چرب سازنده را می‌نویسیم. داریم:

$$C_{۶۰}H_{۱۱۶}O_۶ + ۳H_۲O \longrightarrow ۳C_{۱۹}H_{۳۸}O_۲ + C_۳H_۸O_۳$$

فرمول شیمیایی اسید چرب سازنده این ماده، به‌صورت $C_{۱۹}H_{۳۸}O_۲$ است.

تبدیل فرمول شیمیایی استر سه عاملی، اسید چرب و صابون به یکدیگر

چربی‌ها مخلوطی از اسیدهای چرب و استرهای بلند زنجیر هستند که بخش ناقطبی آن‌ها بر بخش قطبی‌شان غلبه دارد و در نتیجه نیروی بین مولکولی غالب در آن‌ها از نوع واندروالسی است. ساختار ذرات موجود در چربی‌ها را می‌توان به‌صورت زیر نشان داد:



برای یافتن فرمول شیمیایی اسید چرب حاصل از آبکافت استر سه عاملی، به‌صورت زیر عمل کنید:

۱) برای محاسبه شمار اتم‌های کربن اسید چرب، شمار اتم‌های کربن استر را منهای ۳ کرده و حاصل را تقسیم بر ۳ کنید. برای مثال اگر استر ۵۷ اتم کربن داشته باشد، اسید چرب حاصل، ۱۸ $(\frac{57-3}{3})$ اتم کربن خواهد داشت.

۲) برای محاسبه شمار اتم‌های هیدروژن اسید چرب، شمار اتم‌های هیدروژن استر را منهای ۲ کرده و حاصل را تقسیم بر ۳ کنید. برای مثال اگر استر ۱۱۰ اتم هیدروژن داشته باشد، اسید چرب حاصل، ۳۶ $(\frac{110-2}{3})$ اتم هیدروژن خواهد داشت.

۳) شمار اتم‌های اکسیژن اسید چرب برابر ۲ است.

توجه داشته باشید برای یافتن فرمول صابون حاصل از اسید چرب، باید یکی از اتم‌های هیدروژن آن را کم کرده و در انتهای فرمول، نماد کاتیون را قرار دهید. برای مثال فرمول شیمیایی صابون جامد حاصل از واکنش $C_{17}H_{34}O_2$ با سدیم هیدروکسید، $C_{17}H_{33}O_2Na$ است.

ماز

۹۶- کدام‌یک از عبارت‌های زیر درست است؟

الف ـ کاغذ pH در یک مخلوط حاوی آب و صابون، آبی رنگ می‌شود.

ب ـ افزودن آنزیم به صابون، سرعت پاک کردن رسوب ایجاد شده در کتری را افزایش می‌دهد.

ج ـ با حل‌شدن یک نمونه صابون در آب، اتم‌های اکسیژن صابون در مجاورت اتم‌های اکسیژن آب قرار می‌گیرند.

د ـ با افزودن نمک‌های فسفات به صابون، قدرت پاک‌کنندگی آن در آب دریا به پاک‌کننده‌های غیرصابونی نزدیک می‌شود.

۱) «الف» و «ج» ۲) «الف» و «د» ۳) «ب» و «ج» ۴) «ب» و «د»

پاسخ: گزینهٔ ۲ (آسان ـ خط به خط و مفهومی ـ سریع ـ صفحهٔ ۱۲ ـ ۱۲۰۱)

عبارت‌های (الف) و (د) درست هستند.

بررسی موارد:

الف) صابون خاصیت بازی داشته و با حل شدن در یک نمونه آب، غلظت یون هیدروکسید را افزایش می‌دهد. با افزایش غلظت یون هیدروکسید در یک محلول آبی، مقدار pH محلول افزایش پیدا کرده و رنگ کاغذ pH در این محلول، آبی خواهد بود.

ب) افزودن آنزیم به صابون، قدرت پاک‌کنندگی آن را افزایش می‌دهد، اما توجه داریم که صابون‌ها و پاک‌کننده‌های غیرصابونی، توانایی از بین بردن رسوب ایجاد شده بر روی کتری را ندارند. این مواد، به سختی به دیواره ظرف چسبیده و بر این اساس، برای زدودن این رسوب‌ها، به پاک‌کننده‌های خورنده نیاز داریم.

ج) فرمول ساختاری صابون به‌صورت زیر است:

با حل شدن یک نمونه صابون در آب، آنیون و کاتیون سازنده آن از یکدیگر جدا شده و در آب پخش می‌شوند. اتم‌های اکسیژن موجود در آنیون، بار منفی داشته و توسط سر مثبت مولکول آب یعنی اتم‌های هیدروژن، آب‌پوشیده می‌شوند.

د) صابون‌ها در مجاورت با آب سخت، با دو یون کلسیم و منیزیم موجود در این نمونه از آب، رسوب سفیدرنگی ایجاد می‌کنند که بر روی لباس دیده می‌شود. با افزودن ترکیب‌های حاوی فسفات به صابون‌ها، یون‌های فسفات با کاتیون‌های موجود در آب سخت واکنش داده و رسوب ایجاد می‌کنند؛ بنابراین صابون می‌تواند خاصیت پاک‌کنندگی خود را حفظ کند. این در حالی است که پاک‌کننده‌های غیرصابونی با یون‌های موجود در آب واکنش نمی‌دهند؛ بنابراین می‌توان گفت با افزودن یون فسفات به صابون‌ها، قدرت پاک‌کنندگی آن‌ها به پاک‌کننده‌های غیرصابونی نزدیک‌تر می‌شود.

عوامل مؤثر بر قدرت پاک‌کنندگی صابون

صابون‌های مختلف، همه لکه‌های موجود بر روی پارچه‌ها را به یک اندازه از بین نمی‌برند. در واقع، هر چقدر که یک پاک‌کننده صابونی بتواند مقدار بیشتری از آلاینده‌ها و چربی‌های روی لباس را بزداید، قدرت پاک‌کنندگی بیشتری دارد. عوامل مؤثر بر قدرت پاک‌کنندگی صابون، به شرح زیر هستند:

۱) میزان سختی آب: صابون‌ها در مجاورت با آب سخت، با دو یون کلسیم و منیزیم موجود در این نمونه از آب، رسوب سفیدرنگی ایجاد می‌کنند که بر روی لباس دیده می‌شود. در این حالت، قدرت پاک‌کنندگی صابون به شدت کاهش می‌یابد. واکنش صابون‌های جامد با یون‌های Ca^{2+} و Mg^{2+} به‌صورت زیر است:

$$2RCOONa + MgCl_2 \longrightarrow (RCOO)_2Mg + 2NaCl \qquad 2RCOONa + CaCl_2 \longrightarrow (RCOO)_2Ca + 2NaCl$$

۲) جنس پارچه: چسبندگی لکه‌های چربی بر روی لباس‌های نخی یا همان پنبه‌ای، کمتر از پارچه‌های پلی‌استری است. بر این اساس، می‌توان گفت صابون بر روی لکه‌های ایجاد شده بر سطح پارچه‌های نخی اثر بیشتری دارد.

۳) آنزیم: آنزیم نوعی کاتالیزگر است که فرایندهای تجزیه مواد موجود در لکه‌ها را تسریع می‌بخشد و این مواد را به مواد ساده‌تر تبدیل می‌کند. اضافه کردن آنزیم به صابون، قدرت پاک‌کنندگی صابون را افزایش می‌دهد.

۴) دما: علاوه بر این که در دماهای بالاتر، ساختار چربی‌های موجود بر روی سطح لباس سست می‌شود، افزایش دما سرعت انجام هر واکنش شیمیایی را نیز افزایش می‌دهد. پس افزایش دما نیز قدرت پاک‌کنندگی صابون را افزایش می‌دهد.

۵) افزودنی‌های شیمیایی: اضافه کردن جوش شیرین به صابون، موجب ایجاد خاصیت بازی و افزایش قدرت پاک‌کنندگی آن می‌شود. افزودن نمک‌های فسفات به صابون نیز قدرت پاک‌کنندگی آن را در مواجهه با آب سخت افزایش می‌دهد.

ماز

۹۷- کدام‌یک از گزینه‌های زیر درست است؟ ($g.mol^{-1}$: $H = 1$, $C = 12$, $O = 16$, $Cl = 35/5$)

۱) تنها با داشتن ثابت یونش دو اسید می‌توان خاصیت اسیدی محلول‌های حاوی این دو اسید را مقایسه کرد.

۲) در غلظت برابر بازها، $[H^+]$ در محلول حاوی آمونیاک در مقایسه با محلول حاوی سدیم هیدروکسید کمتر است.

۳) اگر pH دو محلول اسیدی هم‌حجم، برابر باشد، اسید قوی‌تر برای خنثی شدن به جرم بیشتری از $NaOH$ نیاز دارد.

۴) با حل کردن جرم برابر CH_3COOH و HCl در حجم یکسان از آب، pH محلول حاوی HCl پایین‌تر خواهد بود.

پاسخ: گزینهٔ ۴ (متوسط ـ مفهومی ـ استاندارد ـ صفحهٔ ۳۰ ـ ۱۲۰۱)

اتانوئیک اسید از دسته کربوکسیلیک اسیدها بوده و نوعی اسید ضعیف به شمار می‌رود. درجه یونش اسیدهای ضعیف کمتر از ۱ است. از طرفی هیدروکلریک اسید، از جمله اسیدهای قوی بوده و درجه یونش آن برابر یک است. جرم مولی اتانوئیک اسید، بزرگ‌تر از هیدروکلریک اسید است؛ بنابراین در جرم برابر، مول حل‌شده هیدروکلریک اسید بیشتر از اتانوئیک اسید خواهد بود. در این رابطه داریم:

$$\text{مول} = \frac{\text{جرم}}{\text{جرم مولی}}$$

از طرفی با توجه به مقایسه درجه یونش این دو اسید، با حل شدن این دو ترکیب مولکولی در آب، درصد بیشتری از مولکول‌های هیدروکلریک اسید یونش پیدا کرده و در آب یون هیدرونیوم تولید می‌کنند. پس می‌توان گفت غلظت یون هیدرونیوم در محلول حاوی هیدروکلریک اسید بیشتر خواهد بود. در این رابطه داریم:

$$\underbrace{[H^+]}_{\text{غلظت یون هیدرونیوم}} = \underbrace{M}_{\text{غلظت اولیه اسید}} \times \underbrace{a}_{\text{درجه یونش اسید}}$$

از طرفی با افزایش غلظت یون هیدرونیوم در محلول‌های اسیدی، pH آن‌ها کاهش پیدا می‌کند؛ بنابراین pH محلول حاوی هیدروکلریک اسید در مقایسه با محلول حاوی اتانوئیک اسید قطعاً کمتر خواهد بود. در رابطه با فرایند یونش داریم:

یونش
- به فرایندی که در آن یک ترکیب مولکولی در آب به یون‌های مثبت و منفی تبدیل می‌شود، یونش می‌گویند.
- برای بیان میزان یونش اسیدها، از کمیتی به نام درجه یونش استفاده می‌شود.
- اسیدهایی قوی هستند که می‌توان یونش آن‌ها را در آب کامل در نظر گرفت.
- اسیدهای ضعیف به میزان جزئی در آب یونیده می‌شوند.

بررسی سایر گزینه‌ها:

۱) خاصیت اسیدی محلول‌ها با غلظت یون هیدرونیوم آن‌ها رابطه مستقیم دارد. برای مقایسه غلظت یون هیدرونیوم دو محلول، علاوه بر ثابت یونش، به غلظت اولیه اسید حل شده نیز نیاز داریم.

۲) آمونیاک نوعی باز ضعیف و سدیم هیدروکسید نوعی باز قوی است؛ بنابراین غلظت یون هیدروکسید در محلول حاوی سدیم هیدروکسید بیشتر خواهد بود. با توجه به رابطه $۱۰^{-۱۴}=[H^+]\times[OH^-]$، غلظت یون هیدروکسید در محلول، با غلظت یون هیدرونیوم آن رابطه عکس دارد؛ بنابراین می‌توان گفت غلظت یون هیدرونیوم در محلول حاوی آمونیاک بیشتر است.

۳) برابر بودن pH دو محلول، به معنای برابر بودن غلظت یون هیدرونیوم محلول‌ها است. از طرفی همان‌طور که می‌دانیم، درجه یونش اسید ضعیف کمتر از ۱ بوده و درجه یونش اسید قوی برابر ۱ است؛ بنابراین برای داشتن محلول‌هایی هم‌حجم با غلظت یون هیدرونیوم برابر، مول اسید ضعیف حل شده باید بیشتر از مول اسید قوی باشد. از طرفی برای مقایسه جرم باز مورد نیاز برای خنثی کردن دو محلول اسیدی، باید مول اسید اولیه حل شده در آن‌ها را مقایسه کنیم. مول اسید ضعیف حل شده بیشتر از اسید قوی بوده و بنابراین جرم باز مورد نیاز آن برای خنثی شدن نیز بیشتر خواهد بود. باید مقایسه قدرت اسیدهای ضعیف مطرح شده در کتاب درسی را حفظ کنید:

اسید ضعیف‌تر ← هیدرو سیانیک اسید ← اتانوئیک اسید ← متانوئیک اسید ← نیترو اسید ← هیدرو فلوئوریک اسید ← اسید قوی‌تر

۹۸- کلمات داده شده در کدام گزینه، جمله زیر را به‌درستی تکمیل می‌کند؟

در سلول گالوانی روی-مس، جهت حرکت الکترون‌ها با جهت حرکت یون‌های ..... یکسان بوده و با جایگزین کردن تیغه آند آن با فلز لیتیم، مقدار نیروی الکتروموتوری سلول ..... پیدا می‌کند.

۱) $Zn^{۲+}$ ـ کاهش ۲) $Zn^{۲+}$ ـ افزایش ۳) $Cu^{۲+}$ ـ کاهش ۴) $Cu^{۲+}$ ـ افزایش

پاسخ: گزینهٔ ۲ (آسان ـ مفهومی ـ سریع ـ صفحهٔ ۴۹ ـ ۱۲۰۲)

با استفاده از دو نیم‌سلول و یک دیواره متخلخل می‌توان نوعی سلول گالوانی ساخت. از سلول گالوانی می‌توان برای تبدیل انرژی شیمیایی موجود در عناصر به انرژی الکتریکی استفاده کرد. قدرت کاهندگی فلز روی در مقایسه با مس بیشتر بوده و بنابراین در این سلول، نیم‌سلول‌های روی و مس به‌ترتیب معادل با نیم‌سلول آند و کاتد هستند. در سلول‌های گالوانی جهت حرکت الکترون همانند جهت حرکت کاتیون‌های موجود در نیم‌سلول آند، از آند به کاتد است؛ بنابراین پاسخ قسمت اول سؤال، یون $Zn^{۲+}$ است. از طرفی می‌دانیم که لیتیم در مقایسه با روی قدرت کاهندگی بیشتری داشته و پتانسیل کاهشی استاندارد آن کمتر است. با کاهش پتانسیل استاندارد آند یا افزایش پتانسیل استاندارد کاتد، اختلاف پتانسیل استاندارد دو نیم‌سلول افزایش پیدا کرده و درنتیجه نیروی الکتروموتوری سلول نیز افزایش پیدا می‌کند.

سلول گالوانی

از سلول‌های گالوانی برای تبدیل انرژی شیمیایی ذخیره‌شده در فلزهای مختلف به انرژی الکتریکی استفاده می‌شود. هر سلول گالوانی از کنار هم قرار گرفتن اجزای مختلفی تشکیل شده است که باید نام و وظیفه هر قسمت را در ذهن داشته باشیم. این اجزا به شرح زیر هستند:

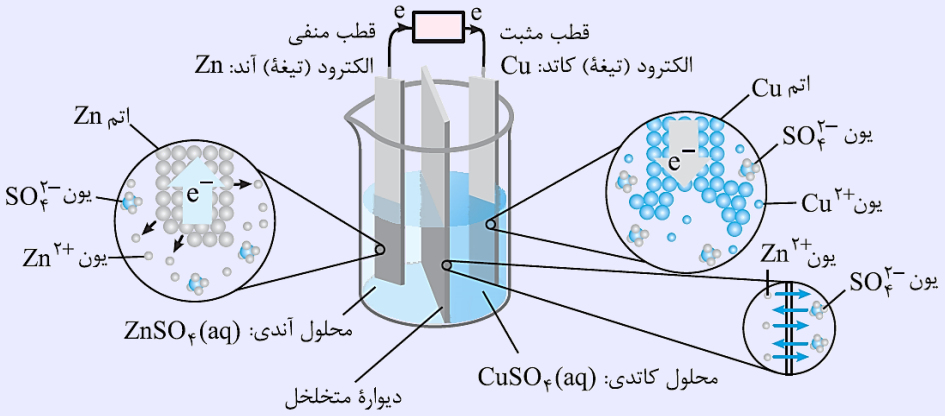
✓ آند: به الکترود یا همان تیغه‌ای که نیم‌واکنش اکسایش در مجاورت آن اتفاق می‌افتد، آند گفته می‌شود. از آنجا که تیغه آند در یک سلول گالوانی، اکسید شده و کاتیون‌های حاصل از آن وارد محلول می‌شوند، به مرور زمان از جرم این تیغه کاسته شده و به اصطلاح، جرم تیغه آندی به مرور زمان کاهش می‌یابد.

✓ الکترولیت آندی: به الکترولیت یا محلولی که تیغه آند در آن قرار دارد، الکترولیت آندی گفته می‌شود. کاتیون‌های تولیدشده بر اثر اکسایش تیغه آند، در قالب یون‌های آب‌پوشیده وارد این محلول می‌شوند.

✓ کاتد: الکترودی است که نیم‌واکنش کاهش در مجاورت آن اتفاق می‌افتد. از آنجا که در مجاورت کاتد یک سلول گالوانی، نیم‌واکنش کاهش انجام شده و اتم‌های فلزی حاصل از این فرایند به تیغه کاتدی می‌چسبند، به مرور زمان جرم تیغه کاتدی افزایش پیدا می‌کند.

✓ الکترولیت کاتدی: الکترولیت یا محلولی است که تیغه کاتد در آن قرار دارد. کاتیون‌های موجود در این محلول به مرور زمان کاهش یافته و به تیغه کاتد می‌چسبند، پس غلظت کاتیون در این محلول به‌تدریج کاهش پیدا می‌کند.

✓ دیواره متخلخل: در یک سلول گالوانی، به مرور زمان فلز به‌کاررفته در آند اکسایش پیدا کرده و کاتیون‌های حاصل از این فرایند، وارد الکترولیت آندی می‌شوند. با ادامه این فرایند، کاتیون‌ها در الکترولیت آندی تجمع پیدا کرده و این محلول بار مثبت پیدا می‌کند. تجمع بار مثبت در این نیم‌سلول، الکترون‌ها را به سمت خود جذب کرده و از حرکت آن‌ها در مدار خارجی جلوگیری می‌کند. در سمت کاتدی نیز، غلظت آنیون‌ها بیشتر از کاتیون‌های نیم‌سلول شده و مانع از وارد شدن الکترون به نیم‌سلول می‌شوند. دیواره متخلخل با به جریان انداختن یون‌ها (حرکت آنیون‌ها به سمت آند و کاتیون‌ها به سمت کاتد)، باعث خنثی ماندن دو الکترولیت می‌شود. تصویر زیر، نمایی از یک سلول گالوانی نشان می‌دهد:



۹۹- تیغه آهنی به جرم ۱۰ گرم را وارد ۵۰۰ میلی‌لیتر محلول ۰/۲ مولار مس (II) سولفات می‌کنیم. اگر با انجام کامل واکنش و مصرف کامل مس (II) سولفات موجود در محلول، جرم تیغه به ۷/۶ گرم برسد، چند درصد از فلز تولید شده در واکنش، روی تیغه آهنی رسوب کرده است؟ $(Cu = ۶۴ , Fe = ۵۶ : g.mol^{-1})$

۱) ۵۰ ۲) ۶۰ ۳) ۸۰ ۴) ۱۰۰

پاسخ: گزینهٔ ۱ (متوسط ـ محاسباتی ـ استاندارد ـ صفحهٔ ۴۳ ـ ۱۲۰۲)

فلز آهن در مقایسه با مس قدرت کاهندگی بیشتری داشته و در سری الکتروشیمیایی در موقعیت پایین‌تری دارد. در رابطه با قدرت کاهندگی و اکسندگی عناصر مختلف، داریم:

- قدرت اکسندگی ـ کاهندگی
  - در سری الکتروشیمیایی هرچه بالاتر می‌رویم.
    - پتانسیل استاندارد افزایش پیدا می‌کند.
      - قدرت اکسندگی افزایش می‌یابد.
      - قدرت کاهندگی کاهش می‌یابد.
  - در سری الکتروشیمیایی هرچه پایین‌تر می‌رویم.
    - پتانسیل استاندارد کاهش پیدا می‌کند.
      - قدرت اکسندگی کاهش می‌یابد.
      - قدرت کاهندگی افزایش می‌یابد.

بنابراین آهن می‌تواند با یون مس (II) به‌صورت طبیعی واکنش دهد. معادله واکنش انجام شده به‌صورت زیر است:

$$Fe(s) + CuSO_4(aq) \longrightarrow FeSO_4(aq) + Cu(s)$$

توجه داریم که یون سولفات در این واکنش به‌عنوان یون ناظر بوده و می‌توان آن را از معادله واکنش حذف کرد. در این صورت معادله واکنش شیمیایی انجام شده به‌صورت زیر است:

$$Fe(s) + Cu^{۲+}(aq) \longrightarrow Fe^{۲+}(aq) + Cu(s)$$

ابتدا با توجه به مقدار $CuSO_۴$ موجود در محلول، جرم آهن مصرف شده را محاسبه می‌کنیم:

$$?\,g\ Fe = ۰/۵\ L\ \text{محلول} \times \frac{۰/۲\ mol\ CuSO_۴}{۱\ L\ \text{محلول}} \times \frac{۱\ mol\ Fe}{۱\ mol\ CuSO_۴} \times \frac{۵۶\ g\ Fe}{۱\ mol\ Fe} = ۵/۶\ g$$

در مرحله بعد، جرم فلز مس تولید شده را به‌دست می‌آوریم:

$$?\,g\ Cu = ۰/۵\ L\ \text{محلول} \times \frac{۰/۲\ mol\ CuSO_۴}{۱\ L\ \text{محلول}} \times \frac{۱\ mol\ Cu}{۱\ mol\ CuSO_۴} \times \frac{۶۴\ g\ Cu}{۱\ mol\ Cu} = ۶/۴\ g$$

با مصرف ۵/۶ گرم از فلز آهن موجود در تیغه، جرم آن از ۱۰ گرم به ۴/۴ گرم می‌رسد. در ادامه با رسوب مقداری از مس تولید شده روی تیغه آهنی، جرم آن به ۷/۶ گرم رسیده است؛ بنابراین می‌توان گفت جرم فلز مس رسوب کرده روی تیغه آهنی برابر ۳/۲ گرم است. در این رابطه داریم:

$$m = ۷/۶ - ۴/۴ = ۳/۲\ g$$

از ۶/۴ گرم فلز مس تولید شده، ۳/۲ گرم آن روی سطح تیغه رسوب کرده است. در پایان درصد فلز مس رسوب کرده روی تیغه آهنی را به‌دست می‌آوریم:

$$\text{درصد فلز مس رسوب کرده روی تیغه آهنی} = \frac{۳/۲}{۶/۴} \times ۱۰۰ = ٪۵۰$$

۱۰۰- کدام‌یک از موارد زیر درست است؟ ($O = ۱۶\,, N = ۱۴\,, H = ۱ : g.mol^{-۱}$)

الف ـ واکنش انجام شده در کاتد سلول سوختی و کاتد سلول برقکافت آب یکسان است.

ب ـ در سلول سوختی هیدروژن-اکسیژن، همانند سلول سوختی متان، گاز گلخانه‌ای تولید می‌شود.

ج ـ فراورده تولید شده در کاتد سلول برقکافت آب، به‌عنوان واکنش‌دهنده در آند سلول سوختی کاربرد دارد.

د ـ کاغذ pH در سمتی از سلول برقکافت آب که حجم گاز تولید شده آن بیشتر است، به رنگ قرمز دیده می‌شود.

۱) «الف» و «ج» ۲) «الف» و «د» ۳) «ب» و «ج» ۴) «ب» و «د»

پاسخ: گزینهٔ ۳ (متوسط ـ مفهومی ـ سریع ـ صفحهٔ ۵۴ ـ ۱۲۰۲)

عبارت‌های (ب) و (ج) درست هستند.

بررسی موارد:

الف) نیم‌واکنش‌های کاهش، اکسایش و واکنش کلی انجام شده در سلول سوختی به‌صورت زیر است:

نیم‌واکنش کاهش : $۴H^+ + ۴e^- + O_۲ \longrightarrow ۲H_۲O$

نیم‌واکنش اکسایش : $H_۲ \longrightarrow ۲H^+ + ۲e^-$

واکنش کلی : $۲H_۲(g) + O_۲(g) \longrightarrow ۲H_۲O(g)$

نیم‌واکنش‌ها و واکنش کلی انجام شده در سلول برقکافت آب نیز به‌صورت زیر است:

نیم‌واکنش کاهش : $۲H_۲O + ۲e^- \longrightarrow ۲OH^- + H_۲$

نیم‌واکنش اکسایش : $۲H_۲O \longrightarrow O_۲ + ۴H^+ + ۴e^-$

واکنش کلی : $۲H_۲O(l) \longrightarrow ۲H_۲(g) + O_۲(g)$

توجه داریم که در کاتد سلول‌های گالوانی و الکترولیتی، نیم‌واکنش کاهش انجام می‌شود. همان‌طور که مشخص است، نیم‌واکنش کاهش انجام شده در این سلول‌ها متفاوت است.

ب) در سلول سوختی هیدروژن، بخار آب و در سلول سوختی متان، گاز کربن دی‌اکسید و بخار آب تولید می‌شود. بخار آب همانند کربن دی‌اکسید از جمله گازهای گلخانه‌ای است.

ج) فراورده‌های تولید شده در کاتد سلول برقکافت آب، یون هیدروکسید و گاز هیدروژن است. گاز هیدروژن به‌عنوان سوخت، در سمت آند سلول سوختی هیدروژن-اکسیژن کاربرد دارد.

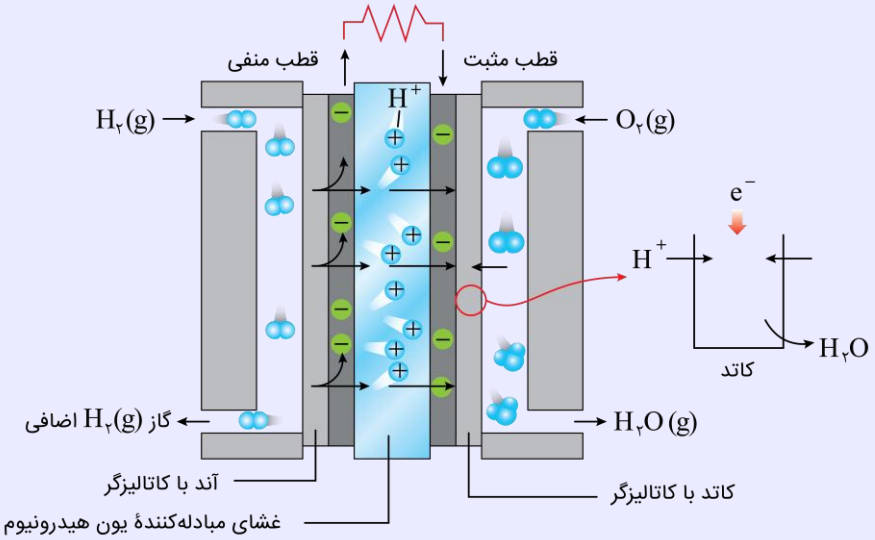
د) معادله کلی واکنش انجام شده در سلول برقکافت آب به‌صورت زیر است:

$$2H_2O(l) \longrightarrow 2H_2(g) + O_2(g)$$

با توجه به ضرایب استوکیومتری مواد در معادله واکنش، حجم گاز هیدروژن تولید شده در کاتد، دو برابر حجم گاز اکسیژن تولید شده در آند است. در کاتد این سلول، علاوه بر گاز هیدروژن، یون هیدروکسید نیز تولید می‌شود. با افزایش غلظت یون هیدروکسید در محلول آبی، pH افزایش پیدا کرده و رنگ کاغذ pH آبی تا بنفش خواهد بود.

سلول سوختی هیدروژن ـ اکسیژن

شکل زیر ساختار سلول سوختی هیدروژن ـ اکسیژن را نشان می‌دهد:



سلول سوختی نوعی سلول گالوانی است که شیمی‌دان‌ها برای تأمین انرژی و کاهش آلودگی محیط زیست پیشنهاد می‌دهند. این سلول‌ها افزون بر کارایی بیشتر، می‌توانند ردپای کربن‌دی‌اکسید را کاهش دهند و منبع انرژی سبز به حساب می‌آیند. رایج‌ترین سلول سوختی، سلول هیدروژن ـ اکسیژن است. دستگاهی که در آن گاز هیدروژن با گاز اکسیژن به‌صورت کنترل شده واکنش می‌دهد و بخش قابل توجهی از انرژی شیمیایی به انرژی الکتریکی تبدیل می‌شود. مطابق شکل، هر سلول سوختی سه جزء اصلی دارد به‌طوری‌که شامل یک غشا، الکترود آند و الکترود کاتد است. در این سلول، آند و کاتد دارای کاتالیزگرهایی هستند که به نیم‌واکنش‌های اکسایش و کاهش سرعت می‌بخشند. واکنش کلی در چنین سلولی به‌صورت زیر است:

$$2H_2(g) + O_2(g) \rightarrow 2H_2O(g)$$

صرف‌نظر از حالت فیزیکی H_2O، واکنش کلی در این سلول را می‌توان عکس واکنش کلی برقکافت آب در نظر گرفت. مطابق شکل بالا جهت جریان H^+ در غشای مبادله‌کننده از سمت آند به کاتد است.

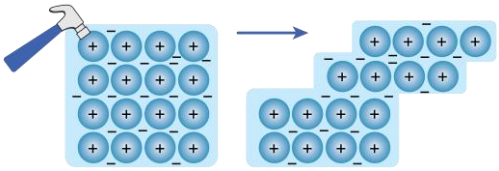
۱۰۱- کدام‌یک از گزینه‌های زیر درست است؟

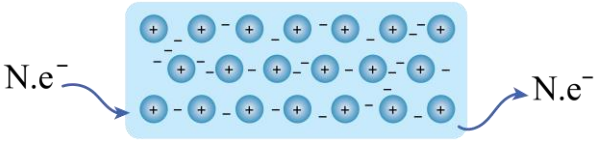
۱) با توجه به مدل دریای الکترونی، فلزها از جمله رساناهای یونی به‌شمار می‌روند.
۲) اگر A یک فلز قلیایی خاکی باشد، آنتالپی فروپاشی AO، کوچک‌تر از لیتیم سولفید است.
۳) با افزایش شعاع در آنیون‌های حاصل از عناصر دوره سوم، چگالی بار آن‌ها کاهش پیدا می‌کند.
۴) با استفاده از مدل دریای الکترونی، می‌توان چکش‌خواری عناصر فلزی را برخلاف واکنش‌پذیری آن‌ها را توجیه کرد.

پاسخ: گزینهٔ ۴ (متوسط ـ مفهومی ـ سریع ـ صفحهٔ ۸۴ ـ ۱۲۰۳)

با استفاده از مدل دریای الکترونی، می‌توان برخی از ویژگی‌های فیزیکی فلزها از جمله رسانایی و چکش‌خواری آن‌ها را توجیه کرد. توجه داریم که واکنش‌پذیری از جمله ویژگی‌های شیمیایی عناصر است و به کمک مدل دریای الکترونی توجیه نمی‌شود.

تصویر زیر، نمایی از توجیه این دو ویژگی بر اساس مدل دریای الکترونی را نشان می‌دهد:





بررسی سایر گزینه‌ها:

۱ عناصر فلزی و کربن (گرافیت)، از جمله رساناهای الکترونی هستند. محلول‌های آبی حاوی یون نیز در دسته رساناهای یونی طبقه‌بندی می‌شوند.

انواع رسانایی مواد

نمودار زیر انواع رسانایی مواد را نمایش می‌دهد:

- رسانایی الکتریکی
  - نارسانا
    - موادی که توانایی انتقال الکترون و ایجاد جریان الکتریکی را ندارند.
    - اغلب نافلزهای جامد و محلول‌های غیرالکترولیت نارسانا هستند.
      - به موادی که انحلال آن‌ها در آب به‌صورت مولکولی است، غیرالکترولیت و به محلول آن‌ها، محلول غیرالکترولیت گفته می‌شود.
        - شکر
        - اتانول
  - نیمه‌رسانا
    - موادی که میزان رسانایی آن‌ها بین مواد رسانا و مواد نارسانا است.
      - شبه فلزها نیمه‌رسانا هستند.
  - رسانا
    - رسانای الکترونی
      - رسانایی آن‌ها به‌وسیله جابه‌جایی الکترون‌های لایه ظرفیت انجام می‌شود.
      - فلزها و گرافیت رسانای الکترونی هستند.
    - رسانای یونی
      - رسانایی آن‌ها با جابه‌جایی یون‌ها انجام می‌شود.
      - محلول‌های الکترولیت، رسانای یونی هستند.
        - به موادی که انحلال آن‌ها در آب به‌صورت یونی است، الکترولیت و به محلول آن‌ها، محلول الکترولیت گفته می‌شود.

۲ به فلزهای موجود در گروه دوم جدول تناوبی، فلزهای قلیایی خاکی گفته می‌شود. این عناصر با از دست دادن دو الکترون و تشکیل کاتیون A^{2+}، در ساختار ترکیب‌های یونی قرار می‌گیرند. برای مقایسه آنتالپی فروپاشی دو ترکیب یونی، ابتدا مجموع اندازه بار یون‌های آن‌ها را مقایسه می‌کنیم. مجموع اندازه بار آنیون و کاتیون (مجموع قدر مطلق بارها) در اکسید فلز قلیایی خاکی و لیتیم سولفید، به‌ترتیب برابر ۴ و ۳ است؛ بنابراین آنتالپی فروپاشی اکسید فلز قلیایی خاکی بزرگ‌تر است.

۳ آنیون‌های حاصل از نافلزهای دوره سوم جدول تناوبی، یون‌های فسفید (P^{3-})، سولفید (S^{2-}) و کلرید (Cl^-) هستند. با پیمایش یک دوره از چپ به راست، شعاع آنیون‌ها کاهش پیدا می‌کند؛ بنابراین مقایسه شعاع این ۳ یون به‌صورت زیر است:

شعاع : $P^{3-} > S^{2-} > Cl^-$

از طرفی با افزایش اندازه بار الکتریکی یون، چگالی بار آن افزایش پیدا می‌کند؛ بنابراین می‌توان گفت مقایسه چگالی بار این ۳ یون به‌صورت زیر است:

چگالی بار : $P^{3-} > S^{2-} > Cl^-$

همان‌طور که مشخص است، در بین آنیون‌های دوره سوم جدول تناوبی، با افزایش شعاع، چگالی بار نیز افزایش پیدا می‌کند.

دریای الکترونی

بر اساس مدل دریای الکترونی، ساختار فلزها آرایش منظمی از کاتیون‌ها در سه بعد است که در فضای میان آن‌ها سست‌ترین الکترون‌های موجود در اتم، دریایی را ساخته‌اند و در آن آزادانه جابه‌جا می‌شوند. دریای الکترونی عاملی است که چیدمان کاتیون‌ها را در شبکه بلوری فلز حفظ می‌کند. از این مدل برای توجیه برخی ویژگی‌های فیزیکیِ فلزها از جمله رسانایی و چکش‌خواری استفاده می‌شود.

آنتالپی فروپاشی

به انرژی لازم برای فروپاشی شبکه بلوری یک مول جامد یونی در فشار ثابت و تبدیل آن به یون‌های گازی مجزا، آنتالپی فروپاشی شبکه گفته می‌شود. آنتالپی فروپاشی شبکه جامدهای یونی را در مقیاس کیلوژول بر مول گزارش می‌کنند. به‌عنوان مثال، معادله زیر، واکنش فروپاشی شبکه بلور سدیم کلرید جامد را نشان می‌دهد:

$$\underbrace{NaCl(s)}_{\text{جامد یونی}} \rightarrow \overbrace{Na^+(g) + Cl^-(g)}^{\text{یون‌های گازی مجزا}} \;;\; \Delta H_{\text{فروپاشی}} = +۷۸۷\ kJ.mol^{-1}$$

در این واکنش، یک ترکیب یونی جامد به یون‌های گازی تبدیل شده است. برای مقایسه آنتالپی فروپاشی شبکهٔ بلور مواد یونی، ابتدا به مجموع قدر مطلق بار یون‌های ترکیب دقت می‌کنیم و سپس شعاع یون‌های تشکیل‌دهندهٔ ترکیب را مقایسه می‌کنیم. هر چه مجموع قدر مطلق بار یون‌ها بیشتر باشد، آنتالپی فروپاشی شبکه نیز بیشتر است و هرچه شعاع یون‌های سازنده کمتر باشد، باز هم آنتالپی فروپاشی شبکه بیشتر خواهد بود.

۱۰۲- کدام‌یک از موارد زیر درست است؟

الف ـ تنها دلیل کاربرد تیتانیم در موتور جت، مقاومت آن در برابر واکنش با سایر مواد است.

ب ـ تفاوت شمار الکترون‌های موجود در زیرلایه $3d$ دو فلز به‌کار رفته در آلیاژ نیتینول برابر ۶ است.

ج ـ اکسیدی از تیتانیم که کاتیون آن به آرایش گاز نجیب رسیده است، به‌عنوان رنگ‌دانه سفید کاربرد دارد.

د ـ اگر گرمای ویژه تیتانیم و فولاد برابر باشد، انرژی لازم برای ذوب فولاد در دمای اتاق، بیشتر از نمونه هم جرم تیتانیم است.

۱) «الف» و «ج» ۲) «الف» و «د» ۳) «ب» و «ج» ۴) «ب» و «د»

پاسخ: گزینهٔ ۳ (متوسط ـ مفهومی ـ استاندارد ـ صفحهٔ ۸۸ ـ ۱۲۰۳)

عبارت‌های (ب) و (ج) درست هستند.

بررسی موارد:

الف) هنگامی‌که موتور جت کار می‌کند همه اجزای سازنده (ثابت و متحرک)، دمای بالایی دارند؛ بنابراین مهم‌ترین علت کاربرد این فلز در موتور جت، نقطه ذوب بالای آن است. علاوه بر این، تیتانیم چگالی کمی دارد و باعث می‌شود موتور جت سبک‌تر باشد.

ب) آلیاژ نیتینول از ترکیب دو فلز تیتانیم و نیکل تولید می‌شود. آرایش الکترونی این دو عنصر به‌صورت زیر است:

$_{22}Ti : 1s^2 2s^2 2p^6 3s^2 3p^6 3d^2 4s^2$

$_{28}Ni : 1s^2 2s^2 2p^6 3s^2 3p^6 3d^8 4s^2$

همان‌طور که مشخص است، تفاوت شمار الکترون‌های موجود در زیرلایه $3d$ این دو عنصر برابر ۶ است.

ج) از ترکیب یونی TiO_2، به‌عنوان رنگ‌دانه سفید در صنعت استفاده می‌شود. آرایش الکترونی یون تیتانیم (IV) در این ترکیب یونی به‌صورت زیر است:

$$_{22}Ti^{4+} : 1s^2 2s^2 2p^6 3s^2 3p^6$$

همان‌طور که مشخص است، آرایش الکترونی این یون همانند گاز نجیب قبل از خود یعنی آرگون است.

د) دمای ذوب یک نمونه از تیتانیم بالاتر از یک نمونه فولاد است؛ بنابراین اگر گرمای ویژه این دو نمونه فلزی برابر باشد، برای ذوب نمونه تیتانیم نیاز به مصرف انرژی بیشتری داریم. جدول زیر مقایسه‌ای از ویژگی‌های فولاد و تیتانیم را نشان می‌دهد:

ویژگی	تیتانیم	فولاد
نقطه ذوب $(^\circ C)$	بالاتر (۱۶۶۷)	پایین‌تر (۱۵۳۵)
چگالی $(g.mL^{-1})$	کم‌تر (۴/۵۱)	بالاتر (۷/۹۰)
واکنش با ذرات موجود در آب دریا	ناچیز	متوسط
مقاومت در برابر خوردگی	عالی	ضعیف
مقاومت در برابر سایش	عالی	عالی

رنگ‌دانه‌ها

جزء سازنده اصلی یک ماده رنگی که به آن رنگ می‌بخشد، رنگ‌دانه نام دارد. در واقع، رنگ‌دانه‌های موجود در یک ماده با جذب یا بازتاب برخی از پرتوهای مرئی، سبب ایجاد رنگ‌های مختلف می‌شوند. به‌عنوان مثال، رنگ سبز درختان و رنگ سرخ گل رز به خاطر وجود رنگ‌دانه‌ها است. تیتانیم (IV) اکسید، آهن (III) اکسید و دوده، از جمله رنگ‌دانه‌های معدنی هستند که به‌ترتیب رنگ‌های سفید، قرمز و سیاه را ایجاد می‌کنند. انسان‌های گذشته این مواد را از منابع طبیعی همچون گیاهان، جانوران و برخی از کانی‌ها تهیه می‌کردند.

۱۰۳- کدام‌یک از گزینه‌های زیر نادرست است؟

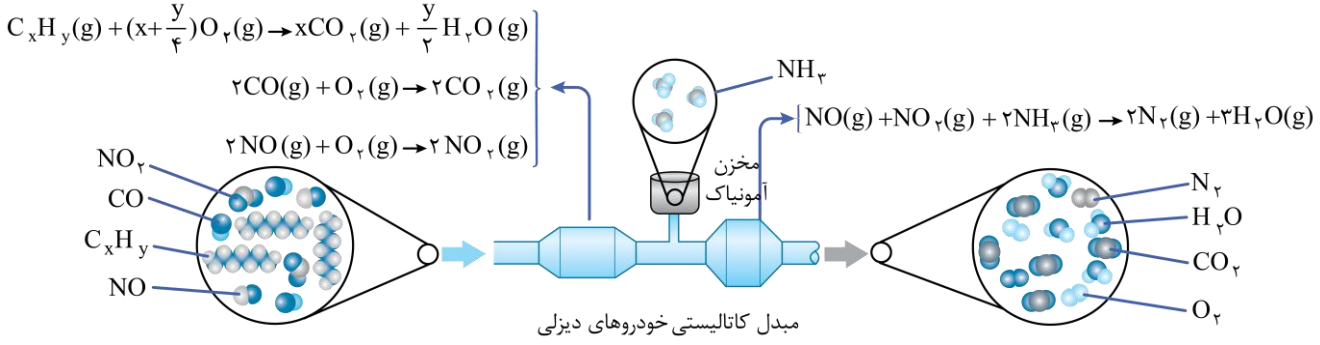
۱) در خودروهای دیزلی، از آمونیاک به‌عنوان کاتالیزگر واکنش حذف اکسیدهای نیتروژن استفاده می‌شود.
۲) با استفاده از کاتالیزگر مناسب در یک واکنش، مقدار تبادل گرما در یک بازه زمانی افزایش پیدا می‌کند.
۳) در خودروهای دارای مبدل کاتالیستی، حذف نیتروژن مونوکسید سخت‌تر از کربن مونوکسید انجام می‌شود.
۴) با به کار بردن کاتالیزگر در یک واکنش، اختلاف سطح انرژی مواد واکنش‌دهنده و قله انرژی کاهش پیدا می‌کند.

پاسخ: گزینهٔ ۱ (متوسط ـ مفهومی ـ سریع ـ صفحهٔ ۱۰۲ ـ ۱۲۰۴)

با استفاده از مبدل کاتالیستی می‌توان از ورود آلاینده‌های تولید شده در خودروهای بنزینی به هواکره جلوگیری کرد. بررسی‌ها نشان می‌دهد که با استفاده از این نوع مبدل‌ها نمی‌توان گازهای NO و NO_2 خروجی از خودروهای دیزلی را به گاز نیتروژن تبدیل کرد. در این مبدل با ورود آمونیاک و انجام واکنش زیر، گازهای NO و NO_2 به گاز N_2 تبدیل شده و تا حدود زیادی از ورود گازهای NO و NO_2 به هواکره جلوگیری می‌شود.

$$NO(g) + NO_2(g) + 2NH_3(g) \longrightarrow 2N_2(g) + 3H_2O(g)$$

همان‌طور که مشخص است، آمونیاک از جمله واکنش‌دهنده‌های این واکنش است. این در حالی است که کاتالیزگرها سرعت انجام واکنش‌های شیمیایی را افزایش داده و در پایان به‌صورت مصرف نشده باقی می‌مانند. واکنش‌های انجام شده در این مبدل‌ها به‌صورت زیر است:



بررسی سایر گزینه‌ها:

۲) کاتالیزگرها سرعت انجام واکنش و تبادل انرژی در واکنش‌های شیمیایی را افزایش می‌دهند؛ بنابراین مقدار تبادل گرما در یک بازه زمانی افزایش پیدا می‌کند. البته توجه داریم که مقدار نهایی گرمای تولید شده در واکنش، دچار هیچ تغییری نمی‌شود.

۳) انرژی فعال‌سازی حذف نیتروژن مونوکسید، بیشتر از انرژی فعال‌سازی حذف کربن مونوکسید است؛ بنابراین انرژی اولیه لازم برای حذف نیتروژن مونوکسید بیشتر از انرژی لازم برای حذف کربن مونوکسید است.

۴) کاتالیزگرها با کاهش فاصله انرژی واکنش‌دهنده‌ها و قله انرژی، سرعت انجام واکنش‌ها را افزایش داده و در پایان دست‌نخورده باقی می‌مانند. توجه داریم که کاتالیزگرها بر آنتالپی واکنش، تفاوت انرژی واکنش‌دهنده‌ها و فراورده‌ها و انرژی هر یک از این مواد تأثیری ندارند.

کاتالیزگرها

کاتالیزگرها موادی هستند که سرعت انجام واکنش‌ها را افزایش می‌دهند. این مواد در واکنش شرکت کرده و با تغییر مسیر انجام واکنش، موجب کاهش انرژی فعال‌سازی و به دنبال آن افزایش سرعت واکنش می‌شوند. اگر چه کاتالیزگرها ابتدا در واکنش شرکت می‌کنند، اما دوباره تولید شده و مقدار آن‌ها عملاً در طول مراحل انجام شدن واکنش ثابت باقی می‌ماند. بر این اساس، کاتالیزگرها می‌توانند در واکنش مورد نظر بارها استفاده شوند. کاتالیزگر چندین ویژگی دارد:

۱) اغلب به‌صورت اختصاصی عمل می‌کند؛ یعنی تنها برای همان واکنش شیمیایی در نقش کاتالیزگر است و روی سایر واکنش‌ها تأثیری ندارد. البته کاتالیزگر یک واکنش، کاتالیزگر واکنش برگشت همان واکنش نیز خواهد بود.

۲) در شرایط انجام واکنش، پایداری گرمایی و شیمیایی دارد و در حضور آن واکنش ناخواسته انجام نمی‌شود؛ یعنی کاتالیزگر در شرایط واکنش مصرف نمی‌شود.

۳) کاتالیزگر بیشترین سطح انرژی مواد (مواد تشکیل شده در قله نمودار انرژی) را کاهش می‌دهد و به دنبال آن انرژی فعال‌سازی واکنش‌های رفت و برگشت کاهش و سرعت هر دو واکنش را افزایش می‌دهد.

۴) کاتالیزگر بر آنتالپی واکنش، سطح انرژی واکنش‌دهنده‌ها و فراورده‌ها، مقدار نهایی فراورده تولید شده و مقدار ثابت تعادل واکنش تأثیری ندارد.

مبدل کاتالیستی

مبدل کاتالیستی وسیله‌ای است که بر روی مسیر گاز خروجی از موتور خودرو قرار گرفته و باعث کاهش آلاینده‌ها می‌شود. در این قطعه کاتالیزگرهای واکنش‌های حذف آلاینده‌ها و تبدیل آن‌ها به مواد پایدارتر و بی‌خطر وجود دارند تا در مدت زمان کم و دمای پایین، مانع از ورود بخش عمده‌ای از این آلاینده‌ها به هوا شود. در مبدل کاتالیستی خودروهای بنزینی، کاتالیزگرها معادل با سه فلز رودیم (Rh)، پالادیم (Pd) و پلاتین (Pt) بوده که بر روی سطح سرامیک توری شکل قرار دارند. البته در این مبدل‌ها، برای افزایش کارایی می‌توان سرامیک را به‌صورت مش (دانه) در آورد تا سطح تماس آن با آلاینده‌ها افزایش یابد. واکنش‌های انجام‌شده در این قطعه به‌صورت زیر است:

$$2CO(g) + O_2(g) \longrightarrow 2CO_2(g)$$
$$2NO(g) \longrightarrow N_2(g) + O_2(g)$$
$$C_xH_y + \frac{4x+y}{4}O_2(g) \longrightarrow xCO_2(g) + \frac{y}{2}H_2O(g)$$

هر سه واکنش مطرح‌شده گرماده بوده و به دلیل انرژی فعال‌سازی بالا، در دمای پایین و بدون حضور کاتالیزگر به کندی انجام می‌شوند. توجه داریم که کاتالیزگرهای موجود در مبدل‌های کاتالیستی، بارها و بارها در واکنش‌های مربوط به حذف آلاینده‌ها شرکت می‌کنند و مصرف نمی‌شوند؛ اما این کاتالیزگرها گاهی با برخی از مواد افزودنی موجود در سوخت‌ها وارد واکنش شده و کارایی خود را از دست می‌دهند. در این شرایط، کارایی مبدل کاتالیستی کاهش پیدا کرده و این مبدل دیگر قابل استفاده نیست.

۱۰۴- مقدار ۲۶ گرم گاز هیدروژن و ۲۵۲ گرم گاز نیتروژن را وارد یک مخزن ۴ لیتری می‌کنیم تا فرایند هابر انجام شود. اگر پس از ایجاد تعادل، گازی با نقطه جوش پایین‌تر، ۲۵ درصد حجم مخزن را شامل شود، ثابت تعادل واکنش کدام است؟

$(N = ۱۴ , H = ۱ : g.mol^{-۱})$

۱) ۶ ۲) ۱/۵ ۳) ۳ ۴) ۴/۵

پاسخ: گزینهٔ ۲ (متوسط ـ محاسباتی ـ استاندارد ـ صفحهٔ ۱۰۵ ـ ۱۲۰۴)

معادله موازنه‌شده فرایند هابر به‌صورت زیر است:

$$N_۲(g) + ۳H_۲(g) \rightleftharpoons ۲NH_۳(g)$$

مول اولیه گازهای نیتروژن و هیدروژن وارد شده به ظرف واکنش به‌ترتیب برابر با ۹ و ۱۳ است. فرض می‌کنیم تا رسیدن به تعادل، x مول از گاز نیتروژن مصرف شود. بر این اساس، داریم:

ماده	$N_۲$	$H_۲$	$NH_۳$
مقدار اولیه (mol)	۹	۱۳	۰
تغییر مقدار (mol)	$-x$	$-۳x$	$۲x$
مقدار تعادلی (mol)	$۹ - x$	$۱۳ - ۳x$	$۲x$

همان‌طور که می‌دانیم، در بین این سه گاز، نقطه جوش هیدروژن از دو گاز دیگر پایین‌تر بوده و سخت‌تر میعان می‌شود. از طرفی در شرایط یکسان، درصد حجمی گازها معادل درصد مولی آن‌ها است؛ بنابراین داریم:

$$\text{درصد مولی گاز هیدروژن} = \frac{\text{مول گاز هیدروژن}}{\text{مول کل گازها}} \times ۱۰۰ \Longrightarrow ۲۵ = \frac{۱۳ - ۳x}{۲۲ - ۲x} \times ۱۰۰ \Longrightarrow x = ۳$$

بر این اساس داریم:

ماده	$N_۲$	$H_۲$	$NH_۳$
مقدار تعادلی (mol)	۶	۴	۶

در پایان ثابت تعادل واکنش را به‌دست می‌آوریم:

$$K = \frac{[NH_۳]^۲}{[H_۲]^۳ \times [N_۲]^۱} = \frac{(n_{NH_۳})^۲}{(n_{H_۲})^۳.(n_{N_۲})^۱} \times V^{\Delta n} = \frac{۶^۲}{۴^۳ \times ۶^۱} \times ۴^۲ = ۱/۵\ L^۲.mol^{-۲}$$

$\Delta n =$ مجموع ضرایب گازی فراورده‌ها − مجموع ضرایب گازی واکنش‌دهنده‌ها

فرایند هابر

فرایند هابر روشی برای تولید آمونیاک از عناصر سازنده با استفاده از واکنش تعادلی زیر است:

$$N_۲(g) + ۳H_۲(g) \overset{Fe(s),\ ۴۵۰^\circ C,\ ۲۰۰atm}{\rightleftharpoons} ۲NH_۳(g) + Q$$

این واکنش به‌علت انرژی فعال‌سازی زیاد، سرعت کمی داشته و برای انجام این واکنش باید دما را افزایش داد. در نقطه مقابل، با توجه به گرماده بودن واکنش، افزایش دما موجب کاهش پیشرفت واکنش و برگشت تعادل به سمت واکنش‌دهنده‌ها می‌شود؛ پس دمای واکنش را نمی‌توان بسیار بالا برد. به این منظور هابر از سه راهکار برای تولید به صرفه‌تر آمونیاک استفاده کرد:

۱) اضافه کردن کاتالیزگر: با اضافه‌شدن فلز آهن به محیط واکنش، مقدار E_a واکنش کاهش یافته و سرعت واکنش افزایش می‌یابد. توجه داریم که کاتالیزگر، هیچ تأثیری روی مقدار ثابت تعادل و درصد پیشرفت آن ندارد.

۲) افزایش فشار مخلوط واکنش: در این فرایند، فشار را افزایش می‌دهند. با توجه به شمار مولکول‌های گازی کمتر در سمت فراورده، افزایش فشار موجب رفتن تعادل به سمت واکنش رفت و افزایش پیشرفت واکنش در جهت تولید آمونیاک می‌شود. همچنین افزایش فشار سرعت انجام این واکنش را افزایش خواهد داد.

۳) خارج کردن آمونیاک از ظرف: پس از رسیدن به تعادل، مخلوط تعادلی از ظرف واکنش خارج و تا دمای $-۴۰^\circ C$ سرد می‌شود. با توجه به نقطه جوش بیشتر آمونیاک نسبت به واکنش‌دهنده‌ها، آمونیاک زودتر از دو ماده دیگر به حالت مایع درآمده و از مخلوط جدا می‌شود. همچنین گاز باقی‌مانده که شامل گاز نیتروژن و هیدروژن است، مجدداً به ظرف بازگردانده می‌شود.

- با توجه به توضیحات داده شده، شرایط بهینه تولید آمونیاک در فرایند هابر معادل با دمای $۴۵۰^\circ C$، فشار ۲۰۰ اتمسفر و حضور فلز آهن به‌عنوان کاتالیزگر است. در این شرایط نیز پیشرفت واکنش کمتر از ۱۰۰ درصد بوده (به‌تقریب ۴۴ درصد) و درصد حجمی (درصد مولی) آمونیاک در مخلوط گازی تعادل ۲۸ درصد است.

ثابت تعادل

رابطه مربوط به محاسبه مقدار ثابت تعادل واکنش $aA(g) + bB(g) \longrightarrow cC(g) + dD(g)$ برابر است با:

$$K = \frac{[C]^c \times [D]^d}{[A]^a \times [B]^b}$$

اگر به جای غلظت‌ها، بخواهیم از مقدار مواد موجود در واکنش استفاده کنیم، رابطه زیر را به کار می‌بریم:

$$K = \frac{(n_C)^c \times (n_D)^d}{(n_A)^a \times (n_B)^b} \times V^{(a+b)-(c+d)}$$

در واقع در رابطه بالا، توان حجم ظرف واکنش (V) برابر مجموع ضرایب مواد گازی یا محلول در واکنش‌دهنده‌ها منهای مجموع ضرایب مواد گازی یا محلول در سمت فراورده‌ها است.

۱۰۵- کدام‌یک از عبارت‌های زیر درست است؟

الف ـ تولید پرک، مرحله‌ای از بازیافت شیمیایی پلی‌اتیلن ترفتالات است.

ب ـ یکی از مواد واکنش‌دهنده تولید دی‌اسید و دی‌الکل سازنده پلی‌اتیلن ترفتالات، یکسان است.

ج ـ برای تولید متانول در روش غیرمستقیم، از اکسید پایدارتر کربن به‌عنوان واکنش‌دهنده استفاده می‌شود.

د ـ با تبدیل پارازایلن به مونومر استفاده شده در تولید *PET*، میانگین عدد اکسایش اتم‌های کربن افزایش پیدا می‌کند.

۱) «الف» و «ج» ۲) «الف» و «د» ۳) «ب» و «ج» ۴) «ب» و «د»

پاسخ: گزینهٔ ۴ (متوسط ـ مفهومی ـ استاندارد ـ صفحهٔ ۱۲۱ ـ ۱۲۰۴)

عبارت‌های (ب) و (د) درست هستند.

بررسی موارد:

الف) یکی از راه‌های بازیافت فیزیکی مواد پلاستیکی این است که آن‌ها را پس از شست‌وشو و تمیز کردن، ذوب کرده و دوباره از آن‌ها برای تولید وسایل و ابزار دیگر استفاده می‌کنند. البته پس از شست‌وشوی مواد پلاستیکی می‌توان آن‌ها را خرد کرده و به تکه‌های کوچک به نام **پَرک** تبدیل و در تولید مواد پلاستیکی دیگر استفاده کرد. توجه داریم که تبدیل مواد پلاستیکی به پرک از جمله روش‌های فیزیکی بازیافت به‌شمار می‌رود.

ب) اکسنده استفاده شده برای تولید دی‌اسید (ترفتالیک اسید) و دی‌الکل (اتیلن گلیکول) سازنده پلی‌اتیلن ترفتالات، پتاسیم پرمنگنات است. توجه داریم که شرایط تولید اتیلن گلیکول در مقایسه با شرایط تولید ترفتالیک اسید راحت‌تر بوده و با **غلظت پایین‌تر اکسنده** و **بازده بالاتر** انجام می‌شود.

ج) برای تولید متانول از روش غیر مستقیم، از کربن مونوکسید به‌عنوان واکنش‌دهنده استفاده می‌شود. توجه داریم که کربن مونوکسید، اکسید ناپایدارتر کربن بوده و منظور از اکسید پایدارتر کربن، همان کربن‌دی‌اکسید است.

د) با تبدیل پارازایلن به ترفتالیک اسید، عدد اکسایش دو اتم کربن موجود در ساختار آن، از ۳ − به ۳+ تغییر پیدا می‌کند؛ بنابراین می‌توان گفت مجموع عدد اکسایش اتم‌های کربن و درنتیجه میانگین عدد اکسایش آن‌ها نیز افزایش پیدا می‌کند.

متانول

متانول ساده‌ترین عضو خانواده الکل‌ها است. این ماده، مایعی بی‌رنگ و بی‌بو بوده و بسیار سمی و کشنده است. این ماده را می‌توان از تخمیر چوب تهیه کرد. در صنعت این ماده را از واکنش میان گازهای کربن مونوکسید و هیدروژن در حضور کاتالیزگر تولید می‌کنند:

$$CO(g) + 2H_2(g) \rightarrow CH_3OH(l)$$

کربن مونوکسید و هیدروژن مصرف‌شده در این واکنش را می‌توان از واکنش گاز متان و بخار آب در حضور کاتالیزگر به‌دست آورد:

$$CH_4(g) + H_2O(g) \rightarrow CO(g) + 3H_2(g)$$

دو فرایند بالا در مجموع موجب تولید متانول از گاز متان به شیوه غیرمستقیم خواهند شد. در این فرایند ابتدا واکنشی میان گاز متان و بخار آب در دمای حدود ۵۵۰°C – ۴۵۰ انجام خواهد شد و موجب تولید گازهای CO و H_2 می‌شود. در نهایت این دو گاز در دمای ۳۵۰°C و فشار ۳۰ تا ۵۰ اتمسفر با یکدیگر واکنش می‌دهند و متانول تولید می‌کنند. در این فرایند، $\frac{1}{3}$ گاز هیدروژن تولیدشده در مرحله اول، در مرحله دوم مصرف نمی‌شود و به‌عنوان فراورده جانبی این روش در نظر گرفته می‌شود. با توجه به هزینه‌بر بودن تأمین شرایط انجام این واکنش‌ها و همچنین تولید گاز CO در این فرایند، شیمیدان‌ها در حال

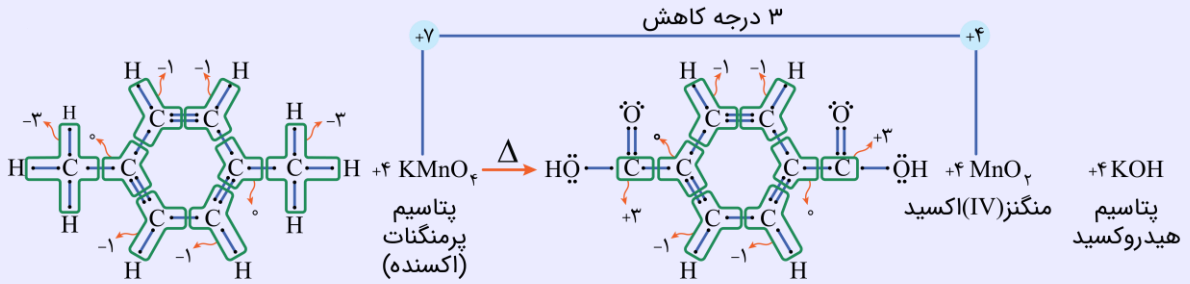
پژوهش بر روش تولید متانول از گاز متان به شیوه مستقیم هستند. در این روش با واکنش میان گاز متان و اکسیژن در حضور کاتالیزگر، متانول بدون واسطه تولید می‌شود. معادله این واکنش شیمیایی به‌صورت زیر است:

$$۲CH_۴(g) + O_۲(g) \longrightarrow ۲CH_۳OH(l)$$

منابع تأمین متان در این دو روش، گاز مشعل، گاز طبیعی و زیست‌گاز خواهد بود.

تولید ترفتالیک اسید

فرایند اکسایش پارازایلن به ترفتالیک اسید دشوار بوده و با وجود غلظت بالای یون پرمنگنات در محلول، تنها با افزایش دمای مخلوط واکنش، شرایط تبدیل پارازایلن به ترفتالیک اسید تأمین می‌شود؛ بنابراین انرژی فعال‌سازی این واکنش بالا است. توجه داریم که در این واکنش، یون $MnO_۴^-$ به $MnO_۲$ تبدیل شده و عدد اکسایش منگنز از ۷+ به ۴+ کاهش می‌یابد. معادله واکنش انجام شده به‌صورت زیر است:



همان‌طور که مشخص است، طی این فرایند عدد اکسایش دو اتم کربن از ۳− به ۳+ رسیده است. بر این اساس، می‌توان گفت در این واکنش، عدد اکسایش هر یک از اتم‌های کربن به اندازه ۶ واحد (مجموعاً به اندازه ۱۲ واحد برای ۲ اتم کربن) افزایش پیدا کرده است. پارازایلن یک هیدروکربن حلقوی سیرنشده و آروماتیک با فرمول شیمیایی $C_۸H_{۱۰}$ است که از تقطیر نفت خام به‌دست می‌آید.

برای مطالعهٔ بیشتر، این چند تا تست اضافه رو هم براتون گذاشتیم که علاوه‌بر آزمون، یک محک دوباره برای خودتون باشه!

۱- اگر در واکنش ۱۰۲ گرم از فلوئورید فلز A با مقدار کافی سود سوزآور محلول در آب طبق معادله موازنه‌نشده زیر، ۱۲۶ گرم ماده محلول در آب تولید شود، عنصر A معادل کدام‌یک از فلزهای زیر می‌تواند باشد؟

$(Fe = ۵۶ , Sc = ۴۵ , Ca = ۴۰ , Mg = ۲۴ , Na = ۲۳ , F = ۱۹ , O = ۱۶ , H = ۱ : g.mol^{-۱})$

$AF_n(s) + NaOH(aq) \longrightarrow A(OH)_n(s) + NaF(aq)$

۱) آهن ۲) منیزیم ۳) کلسیم ۴) اسکاندیم

۲- جرم برابر از نخستین و دومین عضو خانواده آلکان‌ها را در اختیار داریم. اگر با سوزاندن آن‌ها در شرایط استاندارد، اختلاف حجم گازهای تولید شده در دو واکنش برابر ۲۲/۴ لیتر باشد، مجموع جرم گاز اکسیژن مصرف شده در این دو واکنش، برابر چند گرم بوده است؟ $(O = ۱۶ , C = ۱۲ , H = ۱ : g.mol^{-۱})$

۱) ۲۲۰۴ ۲) ۱۴۶۸ ۳) ۱۸۵۶ ۴) ۱۱۳۲

۳- ۶۰۰ میلی‌لیتر محلول ۲ مولار لیتیم سولفات، ۸۰۰ میلی‌لیتر محلول لیتیم فلوئورید $(d = ۱/۰۴ \ g.mL^{-۱})$ و مقداری آب، مخلوط شده و یک محلول ۲/۵ لیتری به‌دست می‌آید. اگر غلظت یون لیتیم در محلول ایجاد شده ۱/۶ مولار باشد، درصد جرمی لیتیم فلوئورید در محلول اولیه کدام بوده و با استفاده از ۸/۹۶ لیتر گاز فلوئور در شرایط استاندارد، نمک موجود در چند لیتر از این محلول تهیه می‌شود؟

$(S = ۳۲, F = ۱۹ , O = ۱۶ , Li = ۷ : g.mol^{-۱})$

۱) ۵ ـ ۰/۴ ۲) ۱۰ ـ ۰/۲ ۳) ۵ ـ ۰/۲ ۴) ۱۰ ـ ۰/۴

۴- کدام‌یک از عبارت‌های زیر درست است؟ $(O = ۱۶ , C = ۱۲ : g.mol^{-۱})$

۱) در جرم برابر از پلی‌اتن سنگین و سبک، شمار اتم‌های کربن در پلی‌اتن سنگین بیشتر است.

۲) مونومر به کار رفته در تولید نوعی از پلاستیک‌های سبز، سیر شده بوده و فاقد پیوند دوگانه است.

۳) به‌دلیل بیشتر بودن جرم مولی پروپن در مقایسه با اتن، جرم مولی پلی‌پروپن نیز به‌یقین بیشتر از پلی‌اتن است.

۴) در ساختار مولکولی پلی‌پروپن، برخلاف پلی‌اتن سنگین، برخی از اتم‌های کربن به ۳ اتم هیدروژن متصل شده‌اند.

۵- محلولی از سود به حجم ۳ لیتر در اختیار داریم. در ابتدا، ۸ گرم هیدروفلوئوریک اسید و سپس ۲۷ گرم دی‌نیتروژن پنتاکسید به این محلول آبی می‌افزاییم. اگر پس از اضافه کردن این مواد، یک محلول خنثی به‌دست بیاید، مقدار تغییر pH محلول در این فرایند برابر با چند واحد بوده است؟ $(Na = ۲۳ , F = ۱۹ , O = ۱۶ , N = ۱۴ , H = ۱ : g.mol^{-۱})$

۱) ۴/۵ ۲) ۵ ۳) ۷ ۴) ۶/۵

محل انجام محاسبات

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

برای مطالعهٔ بیشتر، این چند تا تست اضافه رو هم براتون گذاشتیم که علاوه‌بر آزمون، یک محک دوباره برای خودتون باشه!

۱- اگر در واکنش ۱۰۲ گرم از فلوئورید فلز A با مقدار کافی سود سوزآور محلول در آب طبق معادله موازنه نشده زیر، ۱۲۶ گرم ماده محلول در آب تولید شود، عنصر A معادل کدام‌یک از فلزهای زیر می‌تواند باشد؟

$(Fe = ۵۶ , Sc = ۴۵ , Ca = ۴۰ , Mg = ۲۴ , Na = ۲۳ , F = ۱۹ , O = ۱۶ , H = ۱ : g.mol^{-۱})$

$AF_n(s) + NaOH(aq) \longrightarrow A(OH)_n(s) + NaF(aq)$

۱) آهن ۲) منیزیم ۳) کلسیم ۴) اسکاندیم

پاسخ: گزینهٔ ۴ (سخت ـ محاسباتی ـ استاندارد ـ صفحهٔ ۸۰ ـ ۱۰۰۲)

معادله موازنه‌شده واکنش انجام شده به‌صورت زیر است:

$AF_n(s) + nNaOH(aq) \longrightarrow A(OH)_n(s) + nNaF(aq)$

برای حل سؤال، ابتدا جرم مولی عنصر مجهول را برابر a فرض کرده و با استفاده از روابط استوکیومتری، نسبت جرم مولی این فلز به ظرفیت آن (n) را محاسبه می‌کنیم. در این رابطه، داریم:

$$۱۲۶\ g\ NaF = ۱۰۲\ g\ AF_n \times \frac{۱\ mol\ AF_n}{(a + ۱۹n)g\ AF_n} \times \frac{n\ mol\ NaF}{۱\ mol\ AF_n} \times \frac{۴۲\ g\ NaF}{۱\ mol\ NaF}$$

$$\Longrightarrow ۱۲۶ \times (a + ۱۹n) = ۴۲۸۴n \Longrightarrow ۱۲۶a = ۱۸۹۰n \Longrightarrow a = ۱۵n$$

برای حل این سؤال از روش تناسب نیز داریم:

$$\frac{\text{جرم } AF_n}{\underbrace{\text{جرم مولی} \times \text{ضریب}}_{AF_n}} = \frac{\text{جرم } NaF}{\underbrace{\text{جرم مولی} \times \text{ضریب}}_{NaF}} \Longrightarrow \frac{۱۰۲}{(a + ۱۹n) \times ۱} = \frac{۱۲۶}{۴۲ \times n} \Longrightarrow a = ۱۵n$$

با توجه به محاسبات انجام‌شده، جرم مولی فلز مورد نظر، ۱۵ برابر ظرفیت آن است. این ویژگی صرفاً برای اسکاندیم صدق می‌کند. اسکاندیم نخستین عنصر واسطه جدول تناوبی بوده و در ترکیب‌های شیمیایی به‌صورت یون $Sc^{۳+}$ حضور پیدا می‌کند. جرم مولی این عنصر نیز برابر با ۴۵ گرم بر مول است. توجه داریم که برای حل این سؤال می‌توان از روش امتحان کردن گزینه‌ها نیز استفاده کرد.

۲- جرم برابر از نخستین و دومین عضو خانواده آلکان‌ها را در اختیار داریم. اگر با سوزاندن آن‌ها در شرایط استاندارد، اختلاف حجم گازهای تولید شده در دو واکنش برابر ۲۲/۴ لیتر باشد، مجموع جرم گاز اکسیژن مصرف شده در این دو واکنش، برابر چند گرم بوده است؟ $(O = ۱۶ , C = ۱۲ , H = ۱ : g.mol^{-۱})$

۱) ۲۲۰۴ ۲) ۱۴۶۸ ۳) ۱۸۵۶ ۴) ۱۱۳۲

پاسخ: گزینهٔ ۳ (سخت ـ محاسباتی ـ زمان‌بر ـ صفحهٔ ۸۰ ـ ۱۱۰۱)

نخستین و دومین آلکان، به‌ترتیب معادل متان $(CH_۴)$ و اتان $(C_۲H_۶)$ هستند. معادله موازنه شده سوختن این دو ترکیب مولکولی در شرایط استاندارد به‌صورت زیر است:

$CH_۴(g) + ۲O_۲(g) \longrightarrow CO_۲(g) + ۲H_۲O(l)$

$۲C_۲H_۶(g) + ۷O_۲(g) \longrightarrow ۴CO_۲(g) + ۶H_۲O(l)$

توجه داریم که در شرایط استاندارد، مولکول‌های آب به حالت مایع تولید شده و تنها گاز حاصل از واکنش، کربن‌دی‌اکسید است. در شرایط استاندارد، حجم هر مول گاز برابر ۲۲/۴ لیتر است؛ بنابراین می‌توان گفت اختلاف مول گاز کربن‌دی‌اکسید تولید شده در این دو واکنش برابر ۱ مول بوده است.

حال جرم هر یک از گازهای متان و اتان مصرف شده را برابر x فرض کرده و مول گاز کربن دی‌اکسید تولید شده را محاسبه می‌کنیم:

$$CH_۴ : ?\,mol\ CO_۲ = x\ g\ CH_۴ \times \frac{۱\ mol\ CH_۴}{۱۶\ g\ CH_۴} \times \frac{۱\ mol\ CO_۲}{۱\ mol\ CH_۴} = \frac{x}{۱۶}\ mol$$

$$C_۲H_۶ : ?\,mol\ CO_۲ = x\ g\ C_۲H_۶ \times \frac{۱\ mol\ C_۲H_۶}{۳۰\ g\ C_۲H_۶} \times \frac{۴\ mol\ CO_۲}{۲\ mol\ C_۲H_۶} = \frac{x}{۱۵}\ mol$$

در مرحله بعد با استفاده از اختلاف مول گازهای تولید شده، جرم متان و اتان را محاسبه می‌کنیم:

$$C_۲H_۶ \text{ حاصل از سوختن } CO_۲ \text{ گاز} - CH_۴ \text{ حاصل از سوختن } CO_۲ \text{ گاز} = \frac{x}{۱۵} - \frac{x}{۱۶} = ۱ \Longrightarrow x = ۲۴۰\ g$$

در مرحله بعد جرم گاز اکسیژن مصرف شده در هر واکنش را محاسبه می‌کنیم:

$$CH_۴ : ?\,g\ O_۲ = ۲۴۰\ g\ CH_۴ \times \frac{۱\ mol\ CH_۴}{۱۶\ g\ CH_۴} \times \frac{۲\ mol\ O_۲}{۱\ mol\ CH_۴} \times \frac{۳۲\ g\ O_۲}{۱\ mol\ O_۲} = ۹۶۰\ g$$

$$C_۲H_۶ : ?\,g\ O_۲ = ۲۴۰\ g\ C_۲H_۶ \times \frac{۱\ mol\ C_۲H_۶}{۳۰\ g\ C_۲H_۶} \times \frac{۷\ mol\ O_۲}{۲\ mol\ C_۲H_۶} \times \frac{۳۲\ g\ O_۲}{۱\ mol\ O_۲} = ۸۹۶\ g$$

با توجه به محاسبات انجام شده، مجموع جرم گاز اکسیژن مصرف شده در دو واکنش برابر ۱۸۵۶ گرم است.

متان

جدول زیر جمع‌بندی ویژگی‌های متان را نمایش می‌دهد:

متان	ساده‌ترین آلکان بوده و در ساختار خود یک اتم کربن و چهار اتم هیدروژن دارد.
	در دمای اتاق به حالت گاز یافت می‌شود.
	مولکول آن ناقطبی بوده و در میدان الکتریکی جهت‌گیری پیدا نمی‌کند.
	هرگاه غلظت آن در هوای معدن به بیش از ۵ درصد برسد، احتمال انفجار وجود دارد.
	در برخی سلول‌های سوختی به‌عنوان سوخت مصرف می‌شود.
	در صنعت پتروشیمی در تولید متانول نقش دارد.

۳- ۶۰۰ میلی‌لیتر محلول ۲ مولار لیتیم سولفات، ۸۰۰ میلی‌لیتر محلول لیتیم فلوئورید ($d = ۱/۰۴\ g.mL^{-۱}$) و مقداری آب، مخلوط شده و یک محلول ۲/۵ لیتری به‌دست می‌آید. اگر غلظت یون لیتیم در محلول ایجاد شده ۱/۶ مولار باشد، درصد جرمی لیتیم فلوئورید در محلول اولیه کدام بوده و با استفاده از ۸/۹۶ لیتر گاز فلوئور در شرایط استاندارد، نمک موجود در چند لیتر از این محلول تهیه می‌شود؟

$(S = ۳۲, F = ۱۹, O = ۱۶, Li = ۷ : g.mol^{-۱})$

۱) ۰/۴ ـ ۵ ۲) ۰/۲ ـ ۱۰ ۳) ۰/۲ ـ ۵ ۴) ۰/۴ ـ ۱۰

پاسخ: گزینهٔ ۱ (سخت ـ محاسباتی ـ زمان‌بر ـ صفحهٔ ۱۰۰ ـ ۱۰۰۳)

از تقسیم کردن مول یک ماده به حجم محلول، غلظت مولار حاصل می‌شود. برای حل این سؤال ابتدا با توجه به حجم محلول پایانی، مقدار مول یون لیتیم حل شده در آن را محاسبه می‌کنیم:

$$\text{غلظت محلول نهایی} = \frac{\text{مول}}{\text{حجم}} \Longrightarrow \text{مول} = \text{غلظت} \times \text{حجم} = ۱/۶ \times ۲/۵ = ۴\ mol$$

در مرحله بعد مقدار یون لیتیم موجود در محلول حاوی لیتیم سولفات ($Li_۲SO_۴$) را به‌دست می‌آوریم. توجه داریم که مقدار یون لیتیم موجود در محلول نهایی حاصل جمع مقدار یون لیتیم موجود در محلول‌های حاوی لیتیم سولفات و لیتیم فلوئورید است. داریم:

$$Li_۲SO_۴ \text{ محلول}: \text{غلظت} = \frac{\text{مول}}{\text{حجم}} \Longrightarrow \text{مول} = \text{غلظت} \times \text{حجم} = ۲ \times ۰/۶ = ۱/۲\ mol$$

با توجه به محاسبات انجام شده، در محلول لیتیم سولفات، ۱/۲ مول از این ترکیب یونی حضور دارد. هر واحد از نمک لیتیم سولفات ($Li_۲SO_۴$)، ۲ یون لیتیم در محلول آزاد می‌کند؛ بنابراین می‌توان گفت در این محلول ۲/۴ مول یون لیتیم حضور دارد. در این حالت، داریم:

$$\text{یون لیتیم موجود در محلول نهایی} = Li_۲SO_۴ \text{ یون لیتیم موجود در محلول} + LiF \text{ یون لیتیم موجود در محلول} \Longrightarrow$$

$$۴ = ۲/۴ + x \Longrightarrow x = ۴ - ۲/۴$$

تا به اینجای کار متوجه شدیم که محلول لیتیم فلوئورید حاوی ۱/۶ مول یون لیتیم بوده است. حال می‌توانیم غلظت مولار این محلول را محاسبه کنیم:

$$\text{غلظت} = \frac{\text{مول}}{\text{حجم}} = \frac{۱/۶}{۰/۸} = ۲\ mol.L^{-۱}$$

در مرحله بعد با استفاده از فرمول زیر، درصد جرمی لیتیم فلوئورید حل شده را به‌دست می‌آوریم:

$$\underbrace{M}_{\text{غلظت مولار}} = \frac{۱۰ \times \overbrace{a}^{\text{درصد جرمی}} \times \overbrace{d}^{\text{چگالی محلول}}}{\text{جرم مولی}} \Longrightarrow ۲ = \frac{۱۰ \times \text{درصد جرمی} \times ۱/۰۴}{۲۶} \Longrightarrow \text{درصد جرمی} = ۵$$

معادله موازنه شده تولید لیتیم فلوئورید از گاز فلوئور و فلز لیتیم به‌صورت زیر است:

$$۲Li(s) + F_۲(g) \longrightarrow ۲LiF(s)$$

در پایان حجم محلول لیتیم فلوئورید تولید شده به ازای مصرف ۸/۹۶ لیتر گاز فلوئور را محاسبه می‌کنیم. داریم:

$$?\ L \text{ محلول} = ۸/۹۶\ L \text{ گاز} \times \frac{۱\ mol \text{ گاز}}{۲۲/۴\ L \text{ گاز}} \times \frac{۲\ mol\ LiF}{۱\ mol\ F_۲} \times \frac{۱\ L \text{ محلول}}{۲\ mol\ LiF} = ۰/۴\ L$$

۴- کدام‌یک از عبارت‌های زیر درست است؟ ($O = ۱۶, C = ۱۲ : g.mol^{-۱}$)

۱) در جرم برابر از پلی‌اتن سنگین و سبک، شمار اتم‌های کربن در پلی‌اتن سنگین بیشتر است.
۲) مونومر به کار رفته در تولید نوعی از پلاستیک‌های سبز، سیر شده بوده و فاقد پیوند دوگانه است.
۳) به‌دلیل بیشتر بودن جرم مولی پروپن در مقایسه با اتن، جرم مولی پلی‌پروپن نیز به‌یقین بیشتر از پلی‌اتن است.
۴) در ساختار مولکولی پلی‌پروپن، برخلاف پلی‌اتن سنگین، برخی از اتم‌های کربن به ۳ اتم هیدروژن متصل شده‌اند.

پاسخ: گزینهٔ ۴ (متوسط ـ مفهومی ـ استاندارد ـ صفحهٔ ۱۲۱ ـ ۱۱۰۳)

پلی‌پروپن نوعی پلیمر افزایشی است که از به هم پیوستن مولکول‌های پروپن با فرمول شیمیایی $C_۳H_۶$ به یکدیگر حاصل می‌شود. واکنش تولید پلی‌پروپن به‌صورت زیر است:

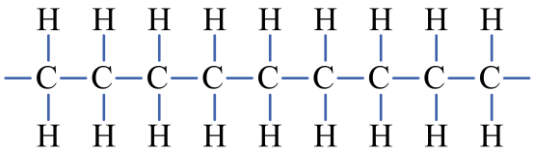
$$nC_۳H_۶(g) \longrightarrow (C_۳H_۶)_n(s)$$

ساختار مولکولی پلی‌پروپن نیز به‌صورت زیر است:

همان‌طور که مشخص است، برخی از اتم‌های کربن موجود در پلی‌پروپن، در قالب گروه‌های متیل قرار داشته و بر این اساس، با ۳ اتم هیدروژن پیوند اشتراکی (کووالانسی) برقرار کرده‌اند. پلی‌اتن نیز از متصل شدن مولکول‌های اتن به یکدیگر تولید می‌شود. واکنش تولید پلی‌اتن به‌صورت زیر است:

$$nC_۲H_۴(g) \longrightarrow (C_۲H_۴)_n(s)$$

ساختار پلی‌اتن سنگین به‌صورت زیر است:



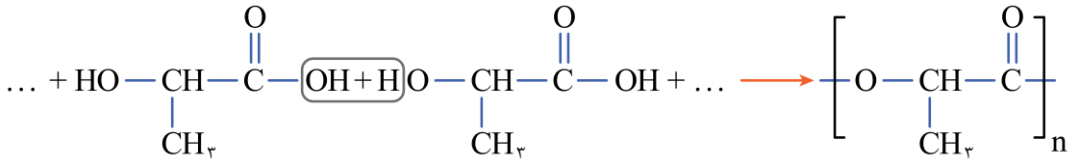
همان‌طور که مشخص است، هرکدام از اتم‌های کربن موجود در ساختار پلی‌اتن، تنها به ۲ اتم هیدروژن متصل شده‌اند. البته، در دو انتهای زنجیره هر پلمیر ممکن است اتم‌های کربنی یافت شوند که به سه اتم هیدروژن متصل شده‌اند اما چون زنجیره پلمیر بسیار بلند است به‌طور کلی، از این اتم‌های کربن می‌توان صرف نظر کرد.

بررسی سایر گزینه‌ها:

۱) فرمول شیمیایی پلی‌اتن سنگین و سبک به‌صورت $(C_2H_4)_n$ نمایش داده می‌شود. اگر جرم این دو نوع پلیمر با یکدیگر برابر باشد، شمار مونومرهای موجود در این دو ترکیب و درنتیجه شمار اتم‌های کربن و هیدروژن آن‌ها برابر خواهد بود. مقایسه ویژگی‌های پلی‌اتن سنگین و سبک به‌صورت زیر است:

ویژگی	پلی‌اتن سبک	پلی‌اتن سنگین
چگالی	کمتر	بیشتر
ساختار	شاخه‌دار	بدون شاخه
نیروی بین‌مولکولی	وان‌دروالسی ـ ضعیف‌تر	وان‌دروالسی ـ قوی‌تر
استحکام	کمتر	بیشتر
نقطه جوش	پایین‌تر	بالاتر
ظاهر	شفاف	کدر
کاربرد	تولید کیسه‌های پلاستیکی	لوله‌های پلاستیکی، دبه‌های آب و بطری

۲) مونومر به‌کاررفته در ساخت برخی از انواع پلاستیک‌های سبز، لاکتیک اسید است. این مونومر در ساختار خود گروه‌های عاملی کربوکسیل و الکلی دارد و به وجود گروه عاملی کربوکسیل، از روی نام این ماده نیز می‌توانیم پی ببریم. ساختار این ماده و پلیمر حاصل از آن به‌صورت زیر است:



مولکول‌های لاکتیک اسید　　پلی‌لاکتیک اسید

توجه داریم که در ساختار گروه عاملی کربوکسیل، پیوند دوگانه کربن-اکسیژن حضور دارد.

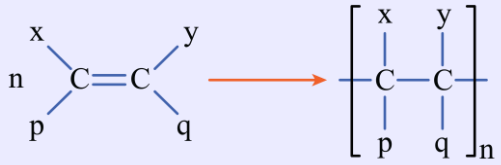
۳) برای مقایسه جرم دو پلیمر، باید شمار مونومرهای تشکیل‌دهنده و جرم مولی مونومرها را با یکدیگر مقایسه کنیم. مونومر پلی‌پروپن در مقایسه با مونومر پلی‌اتن، جرم مولی بیشتری دارد اما بدون داشتن شمار مونومرهای شرکت‌کننده در واکنش پلیمری شدن، نمی‌توان جرم مولی پلیمرهای حاصل را با یکدیگر مقایسه کرد.

جدول زیر مونومر و کاربردهای برخی پلیمرهای افزایشی را نمایش می‌دهد:

نام پلیمر	نام مونومر	کاربرد
پلی‌اتن	اتن	کیسه‌های پلاستیکی ـ بطری پلاستیکی ـ لولهٔ پلاستیکی
پلی‌سیانواتن	سیانواتن	پتو و پارچه
پلی‌پروپن	پروپن	تهیه و تولید سرنگ
پلی‌استیرن	استیرن	تولید ظرف یکبار مصرف
تفلون	ترافلوئورواتن	نخ دندان ـ کفی اتو ـ تولید ظروف نچسب
پلی‌وینیل کلرید	وینیل کلرید (کلرواتن)	کیسه‌های خون

انواع واکنش پلیمری شدن

اگر در زنجیرهٔ هیدروکربنی یک ترکیب آلی پیوند دوگانه وجود داشته باشد، آن ترکیب می‌تواند در واکنش پلیمری شدن شرکت کند. به این نوع واکنش، پلیمری شدن افزایشی گفته می‌شود؛ چراکه تمامی اتم‌های موجود در واکنش‌دهنده، به فراورده هدف منتقل شده و فراورده جانبی تولید نمی‌شود. پلیمرهای افزایشی اغلب تحت فشار و گرما تشکیل می‌شوند. تولید پلیمرهایی مانند پلی‌اتن، پلی‌پروپن، پلی‌استیرن، تفلون و ... از جمله این واکنش‌ها است. تصویر زیر، نمای کلی از این واکنش را نشان می‌دهد:



واکنش تولید شدن انواعی از پلیمرها (پلی‌استرها و پلی‌آمیدها) نیز با تولید فراورده جانبی همراه بوده و شماری از اتم‌های مواد واکنش‌دهنده‌ها، در ساختار فراورده جانبی (آب) قرار می‌گیرند.

پلیمر سبز

شیمی‌دان‌ها با انجام پژوهش‌های گسترده، موفق به ساخت دسته‌ای از پلیمرها شدند که توسط جانداران ذره‌بینی تجزیه می‌شوند. هرگاه این پلیمرها و کالاهای ساخته شده از آن‌ها در طبیعت رها شوند، پس از چند ماه به مولکول‌های ساده مانند آب و کربن‌دی‌اکسید تبدیل می‌شوند. چنین پلیمرهایی دوست‌دار محیط زیست بوده و به پلیمرهای سبز معروف هستند. این پلیمرها را از فراورده‌های کشاورزی مانند سیب‌زمینی، ذرت و نیشکر تهیه می‌کنند، به‌طوری‌که نخست نشاسته موجود در این مواد را به لاکتیک اسید تبدیل کرده، سپس از واکنش پلیمری شدن آن در شرایط مناسب، پلی‌لاکتیک اسید تولید می‌کنند.

۵- محلولی از سود به حجم ۳ لیتر در اختیار داریم. در ابتدا، ۸ گرم هیدروفلوئوریک اسید و سپس ۲۷ گرم دی‌نیتروژن پنتاکسید به این محلول آبی می‌افزاییم. اگر پس از اضافه کردن این مواد، یک محلول خنثی به‌دست بیاید، مقدار تغییر pH محلول در این فرایند برابر با چند واحد بوده است؟ $(Na = ۲۳ , F = ۱۹ , O = ۱۶ , N = ۱۴ , H = ۱ : g.mol^{-۱})$

۱) ۴/۵ ۲) ۵ ۳) ۷ ۴) ۶/۵

پاسخ: گزینهٔ ۴ (سخت ـ محاسباتی ـ زمان‌بر ـ صفحهٔ ۲۵ ـ ۱۲۰۱)

یکی از واکنش‌های اسیدها و بازها، واکنش خنثی شدن است. به‌طور کلی، معادله این واکنش را می‌توان به‌صورت زیر نمایش داد:

$$H^+(aq) + OH^-(aq) \longrightarrow H_۲O(l)$$

معادله موازنه شده واکنش سدیم هیدروکسید و هیدروفلوئوریک اسید به‌صورت زیر است:

$$NaOH + HF \longrightarrow NaF + H_۲O$$

حال مول سدیم هیدروکسید مصرف شده در این واکنش را محاسبه می‌کنیم:

$$?\,mol\ NaOH = ۸\ g\ HF \times \frac{۱\ mol\ HF}{۲۰\ g\ HF} \times \frac{۱\ mol\ NaOH}{۱\ mol\ HF} = ۰/۴\ mol$$

دی‌نیتروژن پنتاکسید، از جمله اسیدهای دو عاملی بوده و با حل شدن در آب، به‌صورت زیر با آب واکنش می‌دهد:

$$N_۲O_۵ + H_۲O \longrightarrow ۲HNO_۳$$

معادله واکنش نیتریک اسید تولید شده در این واکنش و سدیم هیدروکسید به‌صورت زیر است:

$$NaOH + HNO_۳ \longrightarrow NaNO_۳ + H_۲O$$

برای هم‌ارزی دو معادله، می‌توانیم واکنش دوم را در ۲ ضرب کنیم تا ضریب نیتریک اسید به‌عنوان ماده مشترک در دو معادله، یکسان شود؛ بنابراین داریم:

$$N_2O_5 + H_2O \longrightarrow 2HNO_3 \qquad 2NaOH + 2HNO_3 \longrightarrow 2NaNO_3 + 2H_2O$$

در واقع، هر مول دی‌نیتروژن پنتاکسید می‌تواند ۲ مول سدیم هیدروکسید موجود در محلول را خنثی کند. در مرحله بعد مول سدیم هیدروکسید مصرف شده در این واکنش را به‌دست می‌آوریم:

$$?\,mol\ NaOH = 27\,g\ N_2O_5 \times \frac{1\,mol\ N_2O_5}{108\,g\ N_2O_5} \times \frac{2\,mol\ NaOH}{1\,mol\ N_2O_5} = 0/5\,mol$$

با توجه به محاسبات انجام شده، در محلول اولیه ۰/۹ مول سدیم هیدروکسید (۰/۴+۰/۵) وجود داشته است. توجه داریم که سدیم هیدروکسید یک باز تک‌ظرفیتی بوده و هر واحد از آن با حل شدن در آب یک یون هیدروکسید تولید می‌کند؛ بنابراین می‌توان گفت در محلول اولیه ۰/۹ مول یون هیدروکسید وجود داشته است. حال غلظت یون هیدروکسید در محلول اولیه را محاسبه می‌کنیم:

$$\text{غلظت} = \frac{\text{مول}}{\text{حجم}} = \frac{0/9\,mol}{3\,L} = 0/3\,mol.L^{-1}$$

در قدم بعد، غلظت یون هیدروژن در محلول اولیه را محاسبه می‌کنیم:

$$[H^+] \times [OH^-] = 10^{-14} \Rightarrow [H^+] = \frac{10^{-14}}{[OH^-]} = \frac{10^{-14}}{0/3} = \frac{1}{3} \times 10^{-13}\,mol.L^{-1}$$

در مرحله بعد برای محاسبه pH محلول داریم:

$$pH = -log[H^+] = -log\frac{1}{3} \times 10^{-13} = 13 + log\,3 = 13/5$$

با خنثی شدن کامل محلول، pH آن به ۷ می‌رسد؛ بنابراین تغییر pH محلول از ابتدا تا انتها برابر ۶/۵ واحد بوده است.

واکنش خنثی شدن اسید و باز

پاک‌کننده‌های صابونی و غیرصابونی، با مولکول‌ها و ذرات سازنده آلودگی‌ها وارد واکنش شیمیایی نشده و فقط براساس برهم‌کنش‌های بین ذره‌ای، سبب پاک‌شدن آلودگی‌ها می‌شوند. گروه دیگری از پاک‌کننده‌ها نیز وجود دارند که با ذرات سازنده آلودگی‌ها وارد واکنش شیمیایی شده و در کنار برهم‌کنش‌های بین ذره‌ای، از این طریق نیز سبب پاک‌شدن آلودگی‌ها می‌شوند. به این دسته از انواع شوینده‌ها، به اصطلاح پاک‌کننده‌های خورنده گفته می‌شود. در واقع، پاک‌کننده‌های خورنده، گروهی از پاک‌کننده‌ها هستند که بر مبنای واکنش میان اسیدها و بازها عمل می‌کنند.

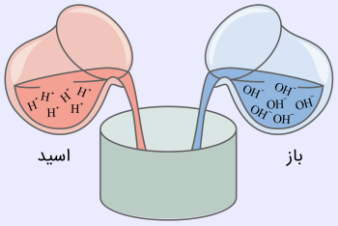
انواع پاک‌کننده‌های خورنده ← هیدروکلریک اسید ، محلول سود ، محلول سفیدکننده

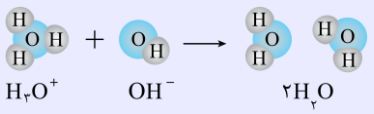
واکنش خنثی‌شدن میان اسید و باز انجام می‌شود. در واقع در این واکنش، یون‌های هیدروژن تولیدشده از اسید با یون‌های هیدروکسید تولیدشده از باز واکنش می‌دهند. با توجه به مصرف شدن دو یون هیدروژن و هیدروکسید در این واکنش، فرایند یونش یا تفکیک یونی اسید و باز به‌طور کامل انجام می‌شود؛ پس قوی و ضعیف بودن اسید و باز، تأثیری بر فرایند خنثی شدن ندارد و این فرایند تنها به مول اسید و باز (n) و تعداد عوامل اسیدی و بازی موجود ساختار اسید و باز (a) بستگی دارد. بر این اساس، در رابطه با واکنش خنثی‌شدن داریم:

$$a_{\text{اسید}} \times n_{\text{اسید}} = a_{\text{باز}} \times n_{\text{باز}}$$

تعداد عوامل اسیدی یا همان ظرفیت اسید برابر تعداد هیدروژن‌های اسیدی است. تعداد عوامل بازی نیز در ساختار بازهای یونی برابر تعداد یون هیدروکسید موجود در آن ماده است. در رابطه با آمونیاک، ظرفیت باز برابر یک و ظرفیت بازی آمین‌ها نیز برابر شمار گروه‌های آمینی موجود در آن‌ها می‌باشد. تصویر زیر، نمایی از واکنش خنثی شدن اسید و باز را نشان می‌دهد:

$$OH^-(aq) + H_3O^+(aq) \rightarrow 2H_2O(l)$$





بسته شبیه‌ساز کنکور
مارکوپولو منتشر شد!

- **۱۷ دوره کنکور سراسری** از ۹۸ تا ۱۴۰۴؛ آپدیت شده و منطبق با تغییرات کنکور ۱۴۰۵
- **پاسخنامه به سبک ماز**؛ شامل بررسی دقیق گزینه‌ها، نکته‌ها، جداول و کادرهای جمع‌بندی
- **قابلیت تخمین رتبه و تراز کنکور سراسری**؛ براساس نمرات نهایی و درصدهای کنکور
- **آزمون پیش‌بینی** کنکور سراسری ۱۴۰۵ از نگاه طراحان ماز
- **تحلیل پاسخنامهٔ ویدیویی سؤالات کنکور** توسط اساتید ماز
- **بستهٔ جامع آمادگی امتحانات نهایی** خرداد ۱۴۰۵
- بانک کنکور به تفکیک درس به درس و مبحث به مبحث مناسب دوران جمع‌بندی
- بانک کامل سؤالات شیمی و فیزیک کنکور تجربی مشترک با رشتهٔ ریاضی

ثبت سفارش
از سایت مازمارکت
mazemarket.ir

اسکن کن!

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir