



گروه آزمایشی علوم ریاضی و فنی

آزمون ماز | پایه دوازدهم



جامع شبیه ساز کنکور سراسری

(تعداد سؤالات مطابق کنکور سراسری)
دشواری سؤالات هم سطح با کنکور سراسری



ویژه کنکوری های ۱۴۰۵

دفترچه پاسخ

پنجشنبه ۱۴ خردادماه ۱۴۰۵

- ✓ پاسخنامه سریع؛ برای بررسی فوری بعد از آزمون
- ✓ تحلیل تمام گزینه های هر سؤال؛ برای بررسی سؤالاتی که پاسخ نادرست داده اید
- ✓ نکات و درسنامه های آموزشی؛ برای یادگیری کامل مباحث هر سؤال
- ✓ مشاوره تستی؛ برای یادگیری انواع روش های حل تست
- ✓ استراتژی آزمون؛ برای یادگیری مدیریت زمان و مدیریت جلسه آزمون

دیس	مسئول درس	طراحان	ویراستاران
ریاضیات	مہرداد کیوان حسین شفیع زاده سید جواد نظری	حسین شفیع زاده - مہرداد کیوان حسن محمد بیگی - سوگند روشنی رسول حاجی زاده	ندا فرہختی - مائدہ بادن فیروز حمید رضا ولی پور - مہرداد اسپید کار یزدان نیک قدم - فواد خیر آبادی علی اسدی
فیزیک	سجاد صادقی زاده سعید احمدی	سجاد صادقی زاده - سعید احمدی - حسین عبدوی نژاد مجید رجبی وندچالی - محسن قندچلر - سارا قانع محمد جواد سورچی - مہدی پارسا - مہدی شریفی امیر رضا خوینی‌ها - سینا قاضی سعیدی - ہادی حمزہ پور غلام رضا محبی - مہدی رحمت اللہی - مہران تاکی	محمد جواد سورچی حنا خلعتبری
شیمی	فرشاد ہادیان فرد	فرشاد ہادیان فرد - فرہنگ امیری عالیہ میرزایی - طاہا حق بین - علی ترابی مہسا بایمانی نژاد	طاہا حق بین - محمد دارابی جم امیر علی حسینی فرد

تیم اجرایی و تولید آزمون

مجتبی آدمیان

نازنین امیری

مائدہ بادن فیروز

زہرہ جعفری

مدیر تولید آزمون: محدثہ شیخعلی



یک تیم با بیش از ۵۰۰ نفر در حال کار هستن تا آزمون‌های ماز با حداکثر کیفیت حاضر بشن و به شما کمک کنن و مسیر موفقیت رو براتون ساده‌تر کنن. همیشه از نظرات و کامنت‌های خوبتون انرژی می‌گیریم. مرسی که همراهمون هستین. راستی! حتماً در نظرسنجی آزمون شرکت کنین و نظرات و پیشنهاداتتون رو برامون بنویسین.

دکتر رسول خنجری

سؤالای کنکور سخته؟

خیلیا نگران سخت بودن سؤالای کنکور و می ترسن اگه سؤال سخت باشه، رتبه شون خراب بشه. ولی واقعیت اینه که کنکور قرار نیست بینه چند تا سؤال بلدی؛ قراره مقایست کنه با بقیه. یعنی سختی یا آسونی سؤال تأثیری نداره، چون با «تراز» کردن نمره ها، اثرش حذف میشه.

نمره خام فقط نشون میده چند تا درست و غلط زدی، ولی «تراز» نمرت رو تو یه مقیاس استاندارد قرار میده تا بشه همه رو با هم مقایسه کرد. فرمول ساده اش اینه:

$$Z = \frac{X - M}{S}$$

میانگین کل داوطلب ها نمره خام
S انحراف معیار نمرات

اگه در آزمونی سخت درصدت بشه ۴۰ ولی میانگین ۲۰ باشه، و مثلاً انحراف معیار هم ۱۰ باشه نمره استاندارد Z برای تو میشه ۲، یعنی به اندازه ۲ انحراف معیار از میانگین بالاتری. توی کنکور سراسری همین نمره Z رو در ۲۱۸۰ ضرب میکنن و با ۵۰۰۰ جمع می کنن و میشه ترازت توی اون درس یعنی ۹۳۶۰، بعد تراز هر درس در ضریبش ضرب میشه (مثلاً زیست ۱۲، ریاضی و فیزیک ۷، شیمی ۹، زمین شناسی ۱)، و مجموعه ش تقسیم بر کل ضرایب میشه تراز نهایی.

پس چون میانگین و پراکندگی در محاسبه لحاظ میشه، سخت بودن آزمون به ضرر هیچ کس نیست؛

همه در یه شرایط مشابه مسابقه میدن. اگر آزمون سخت باشه، برای همه سخته! رتبه ت نه با تعداد

سؤالات درست، بلکه با عملکردت نسبت به بقیه تعیین می شه.

کنکور مثل یه کوهنوردیه؛ مهم نیست مسیر چقدر سخت باشه، مهم اینه تو چقدر آرام و بااستقامت جلو بری. طبیعیه بعضی سؤال رو بلد نباشی؛ بقیه هم همین طورن. چیزی که رتبه می سازه، تسلط و تمرکز توی لحظه ست.

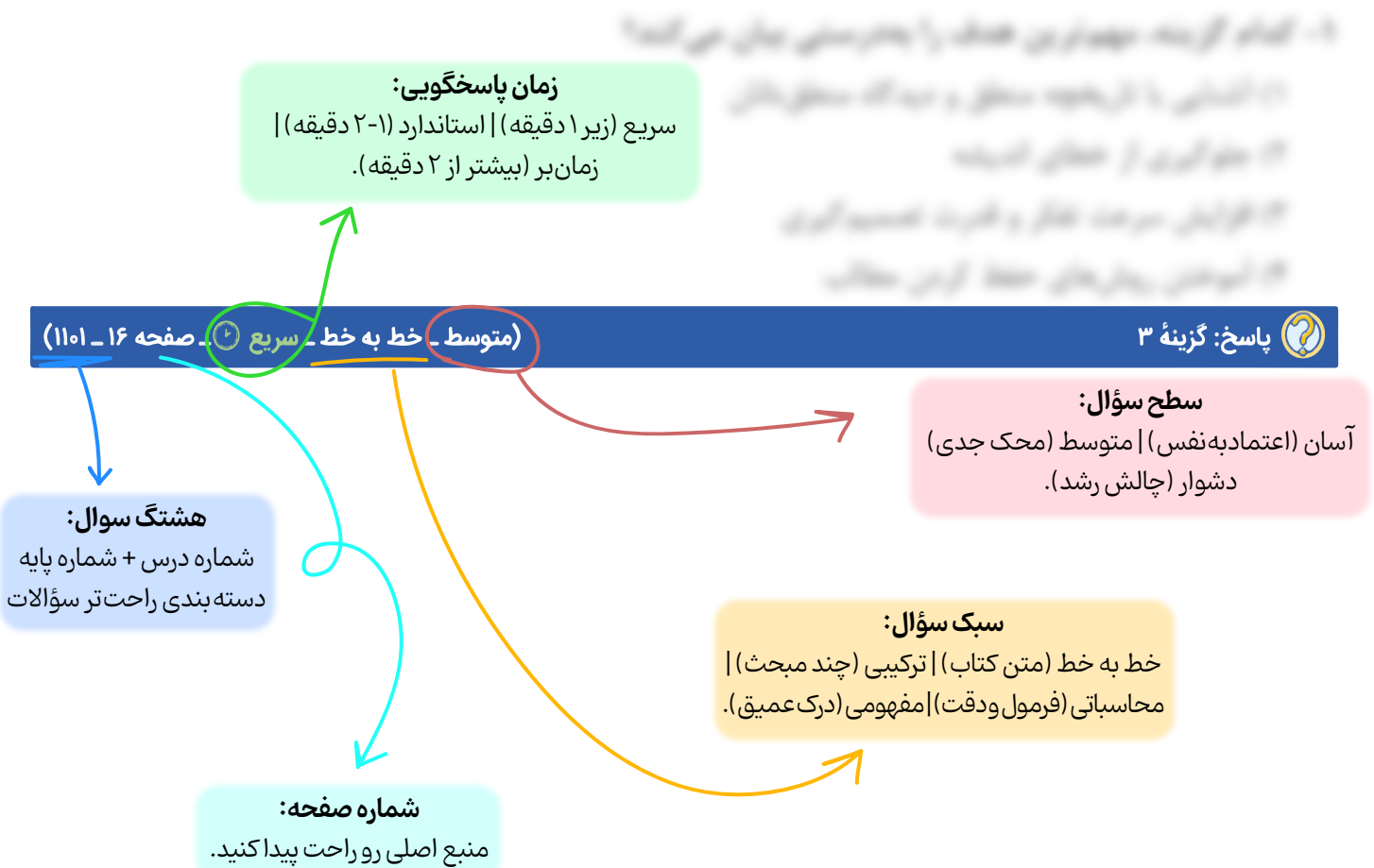
✱ **یه نکته ظریف:** وقتی زیاد می گیم «آزمون خیلی سخته»، در واقع داریم به ذهنمون بهونه می دیم تا فشار کمتری تحمل کنه. در حالی که سختی برای همه یکسانه؛ فرق آدمای موفق اینه که با وجود سختی ادامه میدن.

در آزمون های آزمایشی ما هم سؤالات تا حد ممکن شبیه کنکور واقعی طراحی میشن تا همون حس و فشار تجربه بشه اما در کنار این شبیه سازی، مهمه بدونی اساس محاسبه نمره و رتبه چیه وقتی بدونی تراز چطور حساب میشه، دیگه سختی سؤال ذهنت رو درگیر نمی کنه. و در آخر یادت باشه سر جلسه اگر با سؤال سخت مواجه شدی، گیر نکن. علامت بزن و برو سراغ سؤال های قابل حل. چون ارزش همه سؤال های یک درس برابره؛ مهم این نیست کدوم رو درست بزنی، مهم اینه چند تا درست بزنی. پس تمرکزت رو بذار روی سؤال هایی که بلدی و اجازه نده چند تا سؤال سخت بی خودی زمان و انرژی رو بدزده.

خلاصه اینکه...

خیلی از داوطلب ها نگرانن که اگه سؤال های کنکور یا آزمون های آزمایشی سخت باشه، رتبه شون خراب میشه. اما واقعیت اینه که کنکور یه آزمون رتبه بنریه و نمره ها رو با روش های آماری «تراز» می کنن تا اثر سختی یا آسونی سؤال ها حذف بشه. نمره خام فقط تعداد جواب های درست رو نشون میده، ولی توی تراز، نمره تو با توجه به میانگین و پراکندگی نمره بقیه سنجیده میشه؛ یعنی اگه آزمون سخت باشه، برای همه سخته. پس مهم تراز سختی آزمون، مدیریت جلسه ست: روی سؤال های خیلی سخت گیر نکن و برو سراغ سؤال هایی که بلدی. چون ارزش سؤال های هر درس یکیه و هرچه تعداد جواب های درستت بیشتر باشه، ترازت هم بالاتر میره.

راهنمای پاسخنامه آزمون‌ها



یادتون باشه:

- ✓ هر سؤال یک فرصت یادگیری، نه یک مانع.
- ✓ پاسخنامه فقط جواب نیست؛ یک کارگاه آموزشی کامله.
- ✓ با هر آزمون و مرور این پاسخنامه، یک پله بالاتر می‌رید و یک قدم به رؤیایون نزدیک‌تر می‌شید.
- ✓ موفقیت فقط برای کسانی که با برنامه و انگیزه حرکت می‌کنن. شما همون آدمید.

ریاضی ۱ + حسابان ۱ + حسابان ۲: کل کتاب
هندسه ۱ + هندسه ۲ + هندسه ۳: کل کتاب
آمار و احتمال: کل کتاب
گسسته: کل کتاب

بودجه‌بندی
این آزمون



برای دیدن پاسخنامه ویدئویی آزمون
QRcode بالا را اسکن کنید!
یا بر روی لینک زیر کلیک کنید!

پاسخنامه ویدئویی

حسابان ۲: این مبحث در مجموع ۶ تست از ۴۰ تست کنکور را پوشش داده است.
حسابان ۱: این مبحث در مجموع ۱۰ تست از ۴۰ تست کنکور را پوشش داده است.
ریاضی ۱: این مبحث در مجموع ۴ تست از ۴۰ تست کنکور را پوشش داده است.
هندسه ۳: این مبحث در مجموع ۴ تست از ۴۰ تست کنکور را پوشش داده است.
هندسه ۲: این مبحث در مجموع ۴ تست از ۴۰ تست کنکور را پوشش داده است.
هندسه ۱: این مبحث در مجموع ۴ تست از ۴۰ تست کنکور را پوشش داده است.
گسسته: این مبحث در مجموع ۴ تست از ۴۰ تست کنکور را پوشش داده است.
آمار و احتمال: این مبحث در مجموع ۴ تست از ۴۰ تست کنکور را پوشش داده است.

سهم در
کنکور

۱- دنباله $a, b, c, \dots$ حسابی و دنباله $a + 2, b, c - 2, \dots$ هندسی است. مجموع بیست جمله اول دنباله حسابی چقدر از $20a$ بیشتر است؟
(۱) ۱۹۰ (۲) ۳۸۰ (۳) ۲۸۵ (۴) ۳۴۲

(متوسط - ترکیبی - استاندارد) - حسابان ۱ صفحه ۳ - ۱۱۰۱

پاسخ: گزینه ۲

دنباله $a, b, c, \dots$ و همچنین دنباله $2, 0, -2, \dots$ حسابی است، پس دنباله $a + 2, b, c - 2, \dots$ نیز باید حسابی باشد که چون طبق فرض هندسی هم هست، پس دنباله $a + 2, b, c - 2, \dots$ ثابت است.

$$a + 2 = b = c - 2 \Rightarrow \begin{cases} a = b - 2 \\ c = b + 2 \end{cases}$$

دنباله حسابی $a, b, c, \dots$ همان دنباله $b - 2, b, b + 2, \dots$ است که جمله اول آن $a = b - 2$ و قدرنسبت آن برابر $d = 2$ است.

$$S_{20} = \frac{20}{2} (2(b - 2) + 19 \times 2) = 10(2a + 38) = 20a + 380 \Rightarrow S_{20} - 20a = 380$$

مجموع دو دنباله حسابی و حاصل ضرب دو دنباله هندسی

اگر a_n و b_n هر دو دنباله‌هایی حسابی باشند، $a_n + b_n$ و $a_n - b_n$ دنباله‌هایی حسابی‌اند.

اگر a_n و b_n هر دو دنباله‌هایی هندسی باشند، $a_n \cdot b_n$ و $\frac{a_n}{b_n}$ دنباله‌هایی هندسی‌اند.

یه نکته طلایی!

دنباله ثابت تنها دنباله‌ای است که هم حسابی و هم هندسی است.

مجموع جملات دنباله‌های حسابی

اگر a_n دنباله‌ای حسابی با جمله اول a_1 و قدرنسبت d باشد، مجموع n جمله اول دنباله a_n برابر است با:

$$S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n = \frac{n}{2} (a_1 + a_n) = \frac{n}{2} (2a_1 + (n-1)d)$$

۲- اگر a یک ریشه معادله $\frac{1}{x^2-1} + \frac{1}{x^2+1} = 2$ باشد، حاصل $\frac{1}{a^2} + \frac{1}{a^2-1}$ کدام است؟

(۱) $2\sqrt{5}$ (۲) $\sqrt{5}+1$ (۳) $\sqrt{5}-1$ (۴) $\sqrt{5}$

(متوسط - محاسباتی - استاندارد) - ریاضی ۱ صفحه ۶۰ و حسابان ۱ صفحه ۱۳ - ۱۳۰۳ و ۱۱۰۱

پاسخ: گزینه ۴

تساوی داده شده را ساده می‌کنیم:

$$\frac{x^2+1+x^2-1}{(x^2-1)(x^2+1)} = 2 \Rightarrow \frac{2x^2}{x^4-1} = 2 \Rightarrow x^4-1 = x^2 \quad (I)$$

$$\Rightarrow x^4 - x^2 - 1 = 0 \xrightarrow{x^2=t} t^2 - t - 1 = 0 \xrightarrow{\Delta=5} t = \frac{-(-1) \pm \sqrt{5}}{2} \xrightarrow{x^2=t \geq 0} t = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a^2 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \Rightarrow 2a^2 - 1 = \sqrt{5} \\ (I): a^4 - a^2 = 1 \end{cases}$$

حال خواسته سوال را پیدا می‌کنیم:

روش اول

$$\frac{1}{a^2} + \frac{1}{a^2-1} = \frac{2a^2-1}{a^4-a^2} = \frac{\sqrt{5}}{1} = \sqrt{5}$$

روش دوم

$$a^2 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \Rightarrow \begin{cases} \frac{1}{a^2} = \frac{2}{1+\sqrt{5}} \\ a^2-1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} - 1 = \frac{\sqrt{5}-1}{2} \Rightarrow \frac{1}{a^2-1} = \frac{2}{\sqrt{5}-1} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{a^2} + \frac{1}{a^2-1} = \frac{2}{1+\sqrt{5}} + \frac{2}{\sqrt{5}-1} = \frac{2(\sqrt{5}-1) + 2(\sqrt{5}+1)}{5-1} = \frac{4\sqrt{5}}{4} = \sqrt{5}$$

روش تغییر متغیر در حل معادلات درجه ۴

بسیاری از اوقات حین حل یک سؤال به معادله‌ای درجه ۴ مانند $ax^4 + bx^2 + c = 0$ می‌رسیم. در این مواقع باید ابتدا x^2 را یک متغیر جدید مانند t در نظر بگیریم و سپس با تبدیل معادله به معادله $at^2 + bt + c = 0$ ابتدا جواب‌های قابل قبول برای t را یافته و سپس با جای‌گذاری مقادیر قابل قبول در $t = x^2$ مقادیر x را بیابیم.



۳- اگر سه مجموعه ناتهی A ، B و C چنان باشند که $A \cap (B - C) = (B \cap C) - A$ باشد، آن گاه چه تعداد از مجموعه‌های $A \cap B$ ، $A \cap C$ و $B \cap C$ با مجموعه $A \cap B \cap C$ برابر است؟

(۴) صفر

(۳) ۳

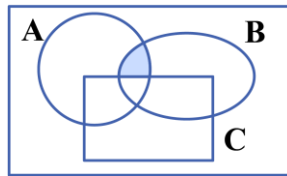
(۲) ۲

(۱) ۱

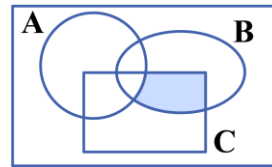
(متوسط - محاسباتی - استاندارد) - آمار و احتمال صفحه ۲۹ - ۱۱۰۱

پاسخ: گزینه ۲

ابتدا دو مجموعه موجود در تساوی داده شده را روی نمودار ون نشان می‌دهیم:



$A \cap (B - C)$



$(B \cap C) - A$

از تساوی نوشته شده معلوم می‌شود که هر دو ناحیه رنگی تهی هستند، بنابراین هم $A \cap B$ و هم $B \cap C$ برابر $A \cap B \cap C$ بوده ولی $A \cap C$ می‌تواند با $A \cap B \cap C$ برابر نباشد. پس در مجموع ۲ مجموعه از بین مجموعه‌های ذکر شده با $A \cap B \cap C$ برابرند.

۴- اگر α و β صفرهای سهمی $y = x^2 + 3x - 1$ باشند، حاصل $A = \frac{3\beta}{\alpha^2 - 1} + \frac{3\alpha}{\beta^2 - 1}$ کدام است؟

(۴) -۱۱

(۳) ۱۱

(۲) ۷

(۱) -۷

(متوسط - محاسباتی - استاندارد) - حسابان ۱ صفحه ۸ و ۱۰ - ۱۱۰۱

پاسخ: گزینه ۳

صفرهای سهمی از معادله $x^2 + 3x - 1 = 0$ به دست می‌آیند.

با توجه به آن که α و β صفرهای سهمی هستند پس در معادله آن صدق می‌کنند و داریم:

$$\begin{cases} \alpha^2 + 3\alpha - 1 = 0 \\ \beta^2 + 3\beta - 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha^2 - 1 = -3\alpha \\ \beta^2 - 1 = -3\beta \end{cases}$$

$$\begin{cases} S = \alpha + \beta = -3 \\ P = \alpha\beta = -1 \end{cases}$$

از طرفی مجموع و حاصل ضرب ریشه‌های $x^2 + 3x - 1 = 0$ برابر است با:

$$\begin{aligned} \Rightarrow A &= \frac{3\beta}{-3\alpha} + \frac{3\alpha}{-3\beta} = -\frac{\beta}{\alpha} - \frac{\alpha}{\beta} = -\frac{\alpha^2 + \beta^2}{\alpha\beta} \\ &= -\frac{(\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta}{\alpha\beta} = -\frac{S^2 - 2P}{P} = -\frac{9 + 2}{-1} = 11 \end{aligned}$$

صفرهای تابع

صفرهای تابع $y = f(x)$ از حل معادله $y = 0$ به دست می‌آیند.

مجموع و حاصل ضرب ریشه‌ها در معادله درجه دوم

در معادله درجه دوم $ax^2 + bx + c = 0$ با شرط $\Delta > 0$ ، مجموع و حاصل ضرب ریشه‌ها برابر است با:

$$\begin{cases} S = \alpha + \beta = \frac{-b}{a} : \text{مجموع ریشه‌ها} \\ P = \alpha\beta = \frac{c}{a} : \text{حاصل ضرب ریشه‌ها} \end{cases}$$

۵- مجموعه جواب نامعادله $a < \frac{2x+3}{x-1} < -1$ بازه $(-\infty, b)$ است. حاصل $a+b$ کدام است؟

۱ (۴)

۲ (۳)

۳ (۲)

۴ (۱)

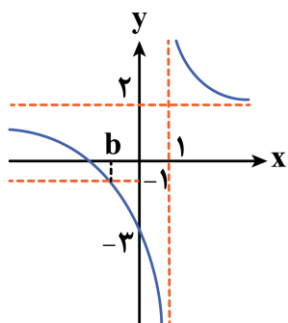
(متوسط - ترکیبی - استاندارد) - ریاضی ۱ صفحه ۸۹ - ۱۰۰۴

پاسخ: گزینه ۱

روش اول

نمودار تابع هموگرافیک $f(x) = \frac{2x+3}{x-1}$ به صورت مقابل است.

با توجه به نمودار، $a=2$ و $f(b)=-1$ است.



$$\begin{aligned} \frac{2b+3}{b-1} &= -1 \Rightarrow 2b+3 = -b+1 \Rightarrow b = -\frac{2}{3} \\ \Rightarrow a+b &= 2 - \frac{2}{3} = \frac{4}{3} \end{aligned}$$

روش دوم

$$\begin{cases} \frac{2x+3}{x-1} + 1 > 0 \Rightarrow \frac{2x+3+x-1}{x-1} > 0 \Rightarrow \frac{3x+2}{x-1} > 0 \\ \frac{2x+3}{x-1} - a < 0 \Rightarrow \frac{2x+3-ax+a}{x-1} < 0 \Rightarrow \frac{(2-a)x+3+a}{x-1} < 0 \end{cases}$$

حال اگر $(2-a) < 0$ باشد، نامعادله پایین جوابی به صورت اجتماع دو بازه به شکل $(n, +\infty)$ و $(-\infty, m)$ خواهد داشت و اشتراک آن با مجموعه جواب نامعادله بالایی به صورت اجتماع دو بازه خواهد بود که غیرقابل قبول است و اگر $(2-a) > 0$ باشد، جواب نامعادله پایینی بازه‌ای به شکل (m, n) است و اشتراک آن با مجموعه جواب نامعادله بالایی به فرم $(-\infty, b)$ نمی‌باشد و غیرقابل قبول است، پس چاره‌ای نداریم جز این که $2-a=0$ یعنی $a=2$ باشد، در این صورت داریم:

$$a=2 \Rightarrow \begin{cases} \frac{3x+2}{x-1} > 0 \xrightarrow{\text{تعیین علامت}} x < -\frac{2}{3} \text{ یا } x > 1 \quad (1) \\ \frac{5}{x-1} < 0 \Rightarrow x-1 < 0 \Rightarrow x < 1 \quad (2) \end{cases}$$

$$(1) \cap (2) \Rightarrow x < -\frac{2}{3} \Rightarrow x \in (-\infty, -\frac{2}{3}) \Rightarrow b = -\frac{2}{3}$$

بنابراین:

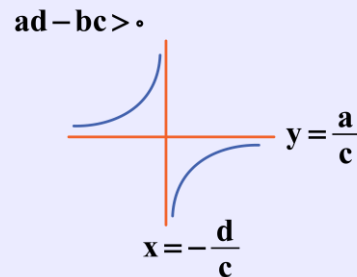
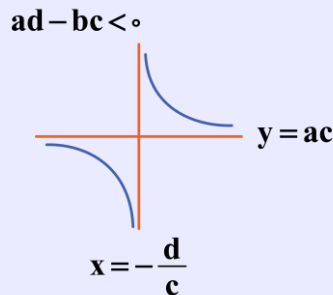
$$a+b = 2 - \frac{2}{3} = \frac{4}{3}$$

دام تستی!

اگر به جای b مقدار $f(b)$ را با a جمع کنید، در دام گزینه ۴ می‌افتید!

تابع هموگرافیک

تابع $y = \frac{ax+b}{cx+d}$ یک تابع هموگرافیک با دامنه $\mathbb{R} - \left\{-\frac{d}{c}\right\}$ و برد $\mathbb{R} - \left\{\frac{a}{c}\right\}$ است و نمودار آن به یکی از دو شکل زیر است:



راهنمای زرنگ‌بازی!

برای تعیین علامت $y = \frac{ax+b}{cx+d}$ ، مانند $y = (ax+b)(cx+d)$ عمل می‌کنیم با این تفاوت که تابع در ریشهٔ مخرج $(-\frac{d}{c})$ تعریف نشده است.



۶- نقاط $A(3,3)$ و $B(1,-3)$ دو سر قطر دایره‌ای است که در نقطهٔ H بر خط $y = 3x + a$ مماس است. حاصل ضرب مختصات نقطهٔ H کدام است؟ ($a > 0$)

۴ (۴)

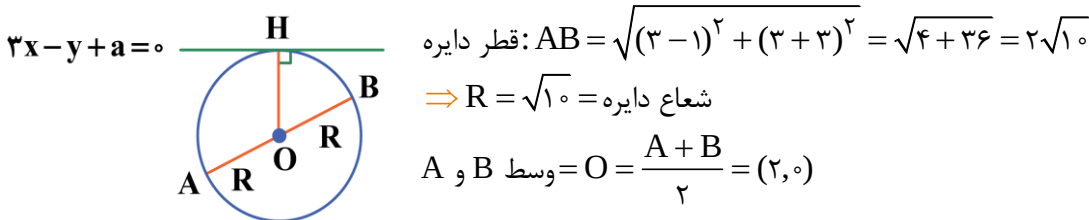
۳ (۳)

۶ (۲)

۱ (۱)

(متوسط - محاسباتی - استاندارد) - حسابان ۱ صفحه ۳۳ - ۱۱۰۱

پاسخ: گزینه ۱



فاصلهٔ $O(2,0)$ از خط مماس $3x - y + a = 0$ برابر شعاع است.

$$OH = R \Rightarrow \sqrt{10} = \frac{|6 - 0 + a|}{\sqrt{1+9}} \Rightarrow |6 + a| = 10 \Rightarrow \begin{cases} 6 + a = 10 \\ 6 + a = -10 \end{cases} \xrightarrow{a > 0} a = 4$$

روش اول

فرض کنید $H(x, 3x+4)$ نقطهٔ تماس باشد، پس:

$$\begin{aligned} OH = R &\Rightarrow \sqrt{(x-2)^2 + (3x+4)^2} = \sqrt{10} \\ \Rightarrow x^2 - 4x + 4 + 9x^2 + 24x + 16 &= 10 \Rightarrow 10x^2 + 20x + 20 = 10 \\ \Rightarrow 10x^2 + 20x + 10 &= 0 \xrightarrow{\div 10} x^2 + 2x + 1 = 0 \\ \Rightarrow (x+1)^2 &= 0 \Rightarrow \begin{cases} x_H = -1 \\ y_H = 1 \end{cases} \Rightarrow x_H \times y_H = -1 \end{aligned}$$

روش دوم

نقطهٔ H ، محل تلاقی خط مماس $y = 3x + 4$ و شعاع OH است، پس معادلهٔ OH را می‌یابیم:

$$m_{\text{مماس}} = 3$$

$$\begin{cases} m_{OH} = \frac{-1}{m} = \frac{-1}{3} \Rightarrow OH: y - 0 = \frac{-1}{3}(x - 2) \Rightarrow -3y = x - 2 \\ O(2, 0) \end{cases}$$

حال از حل دستگاه زیر مختصات H به دست می آید:

$$\begin{cases} y = 3x + 4 \\ -3y = x - 2 \end{cases} \Rightarrow -3(3x + 4) = x - 2 \Rightarrow -9x - 12 = x - 2 \Rightarrow -10x = +10$$

$$\Rightarrow x_H = -1 \xrightarrow{y=3x+4} y_H = 1$$

$$x_H \times y_H = (-1)(1) = -1$$

بنابراین:

هندسه تحلیلی

۱) اگر $A(x_1, y_1)$ و $B(x_2, y_2)$ ، آن گاه:

$$AB \text{ طول پاره خط} = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$

$$AB \text{ مختصات وسط} = \frac{A+B}{2} = \left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2} \right)$$

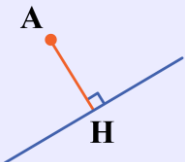
$$AB \text{ شیب پاره خط} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

۲) فاصله نقطه $A(x_0, y_0)$ از خط $ax + by + c = 0$ برابر است با:

$$AH = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

۳) معادله خطی با شیب m و گذرا از نقطه $A(x_0, y_0)$ برابر است با:

$$y - y_0 = m(x - x_0)$$



شیب خطوط موازی و خطوط عمود برهم

۱) شیب خطوط موازی با هم برابر است.

۲) اگر دو خط بر هم عمود باشند شیب آن ها عکس و قرینه یکدیگر است. یعنی:

$$m_1 m_2 = -1 \text{ یا } m_1 = \frac{-1}{m_2}$$

۷- وارون تابع $f(x) = x + \sqrt{x+a}$ خط $y = 3x - 3a + 1$ را در نقطه ای به عرض یک قطع می کند. مقدار $a^2 - a$ کدام است؟

۹ (۴)

۶ (۳)

۲ (۲)

۱۲ (۱)

(متوسط - ترکیبی - استاندارد) - حسابان ۱ صفحه ۵۸ - ۱۱۰۲

پاسخ: گزینه ۳

ابتدا طول نقطه تقاطع را با استفاده از ضابطه خط به دست می آوریم:

$$y = 3x - 3a + 1 \xrightarrow{y=1} x = a \Rightarrow (a, 1)$$

بنابراین $f^{-1}(a) = 1$ است، پس $f(1) = a$ است و یعنی تابع f از نقطه $A(1, a)$ عبور می‌کند.

$$f(1) = a \Rightarrow a = 1 + \sqrt{1+a} \Rightarrow a - 1 = \sqrt{1+a} \xrightarrow{\text{توان ۲}} (a-1)^2 = 1+a$$

$$\Rightarrow a^2 - 2a + 1 = a + 1 \Rightarrow a^2 - 3a = 0$$

$$\Rightarrow a(a-3) = 0 \xrightarrow{a \geq 1} a = 3 \Rightarrow a^2 - a = 9 - 3 = 6$$

وارون تابع

اگر در ضابطه تابع f ابتدا x را بر حسب y به دست آوریم و سپس جای x و y را در تابع $y = f(x)$ جابه‌جا کنیم، **وارون تابع** f یعنی f^{-1} به دست می‌آید. اگر وارون f خود یک تابع باشد، f وارون‌پذیر است و f^{-1} را **تابع وارون** f می‌گوییم. بنابراین اگر f یک‌به‌یک باشد f^{-1} تابع وارون f است و داریم:

$$f(a) = b \Leftrightarrow f^{-1}(b) = a$$



$$8- \text{ اگر } f(x) \text{ یک تابع باشد، تعداد جواب‌های معادله } f(x+2) = 3 \text{ کدام است؟} \quad f(x) = \begin{cases} 2x+a & x \leq 1 \\ x^2 - 3x - 1 & x \geq 1 \end{cases}$$

۴) صفر

۳) ۳

۲) ۲

۱) ۱

(آسان - مفهومی - استاندارد) - ریاضی ۱ صفحه ۱۱۲ و حسابان ۱ صفحه ۶۷ - ۱۰۰۵ و ۱۱۰۲

پاسخ: گزینه ۱

اولاً چون f تابع است، باید مقدار $f(1)$ از هر دو ضابطه بالایی و پایینی یکسان باشد:

$$f(1) \Rightarrow 2 + a = 1 - 3 - 1 \Rightarrow a = -5$$

حال به جای تمام x ها در ضابطه $f(x)$ ، $x+2$ را قرار داده و معادله را تشکیل می‌دهیم:

$$f(x+2) = 3 \Rightarrow \begin{cases} 2(x+2) - 5 = 3 & x+2 \leq 1 \\ (x+2)^2 - 3(x+2) - 1 = 3 & x+2 \geq 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2x - 1 = 3 & x \leq -1 \\ x^2 + x - 6 = 0 & x \geq -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2 & x \leq -1 \\ x = -3, x = 2 & x \geq -1 \end{cases}$$

تنها جواب قابل قبول، $x = 2$ است.

یه نکته طلایی!

در تابع چندضابطه‌ای، اگر دامنه‌ها دارای **نقاط مشترک** باشند باید **مقدار تابع** به‌ازای هر کدام از ضابطه‌ها در این نقاط مشترک **یکسان** باشد تا تابع بودن برقرار باشد.



$$9- \text{ مجموع ریشه‌های معادله } 2(a+b)x^2 - ax + b = 0 \text{ برابر } \log_3 \text{ است. حاصل } \left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{b}{a}} \text{ کدام است؟}$$

۴) ۱/۵

۳) ۱/۲۵

۲) ۵/۰

۱) ۲۵/۲

(سخت - ترکیبی - زمان‌بر) - حسابان ۱ صفحه ۸ و ۸۶ - ۱۱۰۱ و ۱۱۰۳

پاسخ: گزینه ۴

ابتدا ضرایب معادله درجه دوم داده شده را نام‌گذاری کرده و با توجه به روابط مجموع و حاصل ضرب ریشه‌ها داریم:

$$2(a+b)x^2 - ax + b = 0 \Rightarrow A = 2(a+b), B = -a, C = b$$

$$\text{مجموع ریشه‌ها برابر } \frac{-B}{A} = \frac{a}{2(a+b)} \text{ است.}$$

$$\frac{a}{2(a+b)} = \log_3^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \log_3^{\frac{1}{2}}$$

$$\Rightarrow \frac{a}{a+b} = \log_3^{\frac{1}{2}} \Rightarrow \frac{a+b}{a} = \log_3^{\frac{1}{2}} \Rightarrow 1 + \frac{b}{a} = \log_3^{\frac{1}{2}} \Rightarrow \frac{b}{a} = \log_3^{\frac{1}{2}} - 1 = \log_3^{\frac{1}{2}} - \log_3^1 = \log_3^{\frac{1}{2}-1} = \log_3^{-\frac{1}{2}}$$

$$\Rightarrow 3^{\frac{b}{a}} = \frac{1}{3} \Rightarrow \left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{b}{a}} = (3^{\frac{b}{a}})^{-1} = \left(\frac{1}{3}\right)^{-1} = \frac{1}{\frac{1}{3}} = 3$$

مهمترین ویژگی‌های لگاریتم

♦ اگر $a > 0, a \neq 1, c > 0, b > 0$ داریم:

۱) $\log_a^{(bc)} = \log_a^b + \log_a^c$

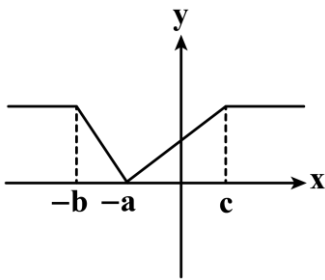
۲) $\log_a^{\left(\frac{b}{c}\right)} = \log_a^b - \log_a^c$

۳) $\log_{a^m}^{b^n} = \frac{n}{m} \log_a^b$

۴) $\log_b^a = \frac{1}{\log_a^b} \quad (b \neq 1)$



۱۰- نمودار تابع $y = f(x)$ به صورت مقابل است. اگر بازه $\left[-\frac{1}{3}, 3\right]$ بزرگ‌ترین بازه‌ای باشد که تابع $y = -2f\left(\frac{1-3x}{2}\right)$ در آن اکیداً صعودی است، آن‌گاه کدام گزینه صحیح است؟



(۱) $b - a = 4$

(۲) $c + b = 7$

(۳) $a + c = 5$

(۴) $c - b = -1$

(متوسط - ترکیبی - استاندارد) - حسابان ۲ صفحه ۹ و ۱۷ - ۱۴۰۱

پاسخ: گزینه ۳

روش اول

اگر تابع $y = -2f\left(\frac{1-3x}{2}\right)$ در بازه $\left[-\frac{1}{3}, 3\right]$ اکیداً صعودی باشد، تابع $y = f\left(\frac{1-3x}{2}\right)$ در این بازه اکیداً نزولی است.

پس $y = f\left(\frac{1+3x}{2}\right)$ روی بازه $\left[-3, \frac{1}{3}\right]$ اکیداً صعودی است.

$$x = -3 \Rightarrow \frac{1+3x}{2} = -4$$

$$x = \frac{1}{3} \Rightarrow \frac{1+3x}{2} = 1$$

$$-a = -4 \Rightarrow a = 4$$

$$c = 1$$

پس $f(x)$ روی $[-4, 1]$ اکیداً صعودی است، بنابراین با توجه به نمودار:

در نتیجه:

$$a + c = 5$$

اگر تابع $y = -2f\left(\frac{1-3x}{2}\right)$ در بازه $\left[-\frac{1}{3}, 3\right]$ اکیداً صعودی باشد، تابع $y = f\left(\frac{1-3x}{2}\right)$ در این بازه اکیداً نزولی است لذا با توجه به نزولی اکید بودن $y = \frac{1-3x}{2}$ باید f صعودی اکید باشد، اما تابع f در بازه $[-a, c]$ صعودی اکید است، پس:

$$-a \leq \frac{1-3x}{2} \leq c \Rightarrow -2a \leq 1-3x \leq 2c \Rightarrow -2c \leq 3x-1 \leq 2a \Rightarrow \frac{-2c+1}{3} \leq x \leq \frac{2a+1}{3}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{-2c+1}{3} = -\frac{1}{3} \Rightarrow c=1 \\ \frac{2a+1}{3} = 3 \Rightarrow a=4 \end{cases}$$

$$a+c=5$$

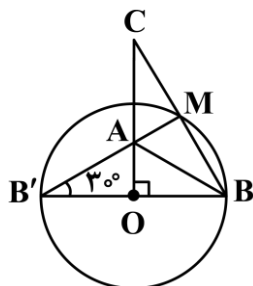
در نتیجه:

صعودی یا نزولی؟

- ♦ اگر f تابع صعودی (اکید) باشد، $(-f)$ تابع نزولی (اکید) است.
- ♦ اگر f تابع نزولی (اکید) باشد، تابع $(-f)$ صعودی (اکید) است.



۱۱- در دایره مثلثاتی شکل مقابل، مساحت مثلث ABC چقدر است؟ (O مرکز دایره است.)



$$\frac{\sqrt{3}}{3} \quad (2)$$

$$\frac{\sqrt{3}}{6} \quad (4)$$

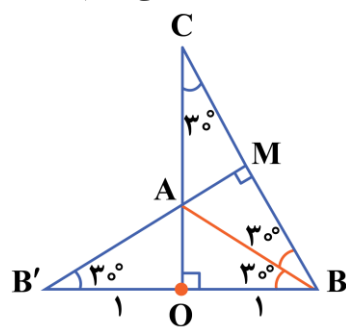
$$\frac{2\sqrt{3}}{3} \quad (1)$$

$$\frac{2\sqrt{3}}{9} \quad (3)$$

(متوسط - ترکیبی - استاندارد) - ریاضی ۱ صفحه ۳۳ و ۳۶ - ۱۰۰۲

پاسخ: گزینه ۲

مثلث $BB'M$ در رأس M قائمه است. ($\hat{M}$ روبه‌رو به قطر است.) OA عمود منصف BB' است. پس زوایا را در شکل مشخص می‌کنیم:



$$\triangle OAB: \cos 30^\circ = \frac{OB}{AB} = \frac{1}{AB} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{AB} \Rightarrow AB = \frac{2}{\sqrt{3}}$$

$$\triangle ABC: \hat{B} = \hat{C} = 30^\circ \Rightarrow AB = AC, \quad \hat{BAC} = 180^\circ - 30^\circ - 30^\circ = 120^\circ$$

بنابراین برای محاسبه مساحت دو روش داریم:

روش اول

با استفاده از فرمول محاسبه مساحت با داشتن دو ضلع و زاویه بین:

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \times AB \times AC \times \sin 120^\circ = \frac{1}{2} \times \frac{2}{\sqrt{3}} \times \frac{2}{\sqrt{3}} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

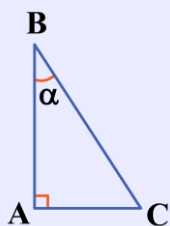
روش دوم

با توجه به این که OB ارتفاع وارد بر ضلع AC است:

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \times AC \times 1 = \frac{1}{2} \times \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

نسبت‌های مثلثاتی

در هر مثلث قائم‌الزاویه داریم:



$$\sin \alpha = \frac{AC}{BC}$$

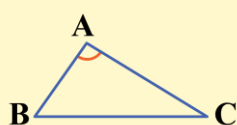
$$\cos \alpha = \frac{AB}{BC}$$

$$\tan \alpha = \frac{AC}{AB}$$

$$\cot \alpha = \frac{AB}{AC}$$

مساحت مثلث با مثلثات!

مساحت مثلث ABC که طول دو ضلع و زاویه بین آن‌ها معلوم باشد برابر است با:



$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} AB \times AC \times \sin \hat{A}$$

نسبت‌های مثلثاتی مهم و حفظی

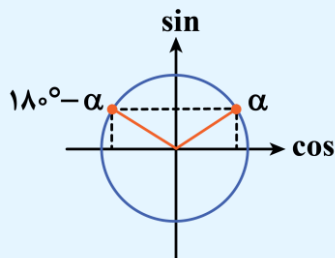
♦ نسبت‌های مثلثاتی زوایای زیر را به خاطر داشته باشید:

	۰	۳۰°	۴۵°	۶۰°	۹۰°
sin	۰	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	۱
cos	۱	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	۰
tan	۰	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	۱	$\sqrt{3}$	تعریف نشده
cot	تعریف نشده	$\sqrt{3}$	۱	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	۰

نسبت‌های مثلثاتی مجموع یا تفاضل زوایا با زاویه ۱۸۰ درجه

♦ اگر نسبت‌های مثلثاتی زاویه α را داشته باشیم، آنگاه:

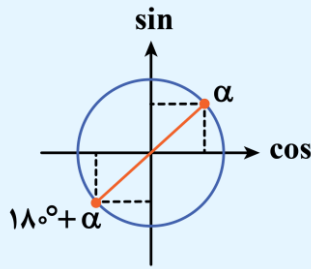
۱) $\sin(180^\circ - \alpha) = \sin \alpha$, $\cos(180^\circ - \alpha) = -\cos \alpha$



یه نمونه باحال ببین!

$$\sin 120^\circ = \sin(180^\circ - 60^\circ) = \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

۲) $\sin(180^\circ + \alpha) = -\sin \alpha$, $\cos(180^\circ + \alpha) = -\cos \alpha$



یه نمونه باحال ببین!

$$\cos 210^\circ = \cos(180^\circ + 30^\circ) = -\cos 30^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$



۱۲- اگر انتهای کمان α در ربع دوم و $\frac{1+\cos \alpha}{1-\cos \alpha} = \frac{1}{4}$ باشد، مقدار $\cot(\frac{\alpha+\pi}{2})$ کدام است؟

- (۱) ۲ (۲) -۲ (۳) $\frac{1}{2}$ (۴) $-\frac{1}{2}$

(متوسط - محاسباتی - استاندارد) - حسابان ۱ صفحه ۱۱۱ - ۱۱۴

پاسخ: گزینه ۲

$$\frac{1+\cos \alpha}{1-\cos \alpha} = \frac{2\cos^2 \frac{\alpha}{2}}{2\sin^2 \frac{\alpha}{2}} \Rightarrow \cot^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{1}{4} \xrightarrow[\cot \frac{\alpha}{2} > 0]{\text{حاده } \frac{\alpha}{2}} \cot \frac{\alpha}{2} = \frac{1}{2}$$

ابتدا با توجه به روابط طلایی مثلثات داریم:

$$\cot(\frac{\alpha+\pi}{2}) = \cot(\frac{\alpha}{2} + \frac{\pi}{2}) = -\tan \frac{\alpha}{2} = \frac{-1}{\cot \frac{\alpha}{2}} = -2$$

حال داریم:

توجه کنید که...

α در ربع دوم است، پس:

$$90^\circ < \alpha < 180^\circ \xrightarrow{\div 2} 45^\circ < \frac{\alpha}{2} < 90^\circ \Rightarrow \text{حاده } \frac{\alpha}{2}$$

روابط دو برابر کمان

۱) $\sin 2\alpha = 2\sin \alpha \cos \alpha$

۲) $\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = 2\cos^2 \alpha - 1 = 1 - 2\sin^2 \alpha$

نسبت‌های مثلثاتی مجموع یا تفاضل زوایا با زاویه ۹۰ درجه

اگر نسبت‌های مثلثاتی زاویه α را داشته باشیم، آنگاه:

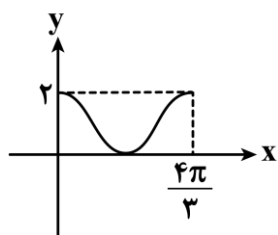
۱) $\sin(\frac{\pi}{2} - \alpha) = \cos \alpha$, $\cos(\frac{\pi}{2} - \alpha) = \sin \alpha$

$\tan(\frac{\pi}{2} - \alpha) = \cot \alpha$, $\cot(\frac{\pi}{2} - \alpha) = \tan \alpha$

۲) $\sin(\frac{\pi}{2} + \alpha) = \cos \alpha$, $\cos(\frac{\pi}{2} + \alpha) = -\sin \alpha$

$\tan(\frac{\pi}{2} + \alpha) = -\cot \alpha$, $\cot(\frac{\pi}{2} + \alpha) = -\tan \alpha$





۱۳- نمودار تابع $f(x) = a \sin^2(bx) + c$ در یک دوره تناوب به صورت مقابل است. مقدار $\frac{ac}{|b|}$ کدام است؟

$$\begin{aligned} & -\frac{16}{3} \quad (2) \\ & \frac{16}{3} \quad (4) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & -\frac{8}{3} \quad (1) \\ & \frac{8}{3} \quad (3) \end{aligned}$$

(متوسط - محاسباتی - استاندارد) - حسابان ۲ صفحه ۲۷ - ۱۲۰۲

پاسخ: گزینه ۲

روش اول

با استفاده از نقاط روی نمودار:

$$f(x) = a \sin^2(bx) + c$$

$$f(0) = 2 \Rightarrow a \sin^2(0) + c = 2 \Rightarrow c = 2$$

$$f(x) = a \sin^2(bx) + 2 \xrightarrow{f(x) \leq 2} a < 0$$

$$\min(f) = c - |a| = 0 \Rightarrow |a| = 2 \xrightarrow{a < 0} a = -2$$

بنابراین:

$$T = \frac{\pi}{|b|} = \frac{4\pi}{3} \Rightarrow |b| = \frac{3}{4}$$

$$\Rightarrow \frac{ac}{|b|} = \frac{-2 \times 2}{\frac{3}{4}} = -\frac{16}{3}$$

روش دوم

با استفاده از ساده سازی ضابطه و سپس نقاط روی نمودار:

$$f(x) = a \sin^2(bx) + c \xrightarrow{f(0)=2} c = 2$$

$$f(x) = a \sin^2(bx) + 2 \xrightarrow{\sin^2 \alpha = \frac{1 - \cos 2\alpha}{2}} f(x) = a \left(\frac{1 - \cos(2bx)}{2} \right) + 2$$

$$f(x) = \frac{-a}{2} \cos(2bx) + 2 + \frac{a}{2}$$

$$\min(f) = -\left| \frac{-a}{2} \right| + 2 + \frac{a}{2} = 0 \Rightarrow \begin{cases} a < 0: -\left(\frac{-a}{2}\right) + 2 + \frac{a}{2} = 0 \Rightarrow a = -2 \\ a > 0: -\left(\frac{a}{2}\right) + 2 + \frac{a}{2} = 0 \Rightarrow 2 = 0 \text{ غ قق} \end{cases}$$

$$T = \frac{2\pi}{|2b|} = \frac{4\pi}{3} \Rightarrow |b| = \frac{3}{4}$$

از طرفی داریم:

$$\Rightarrow \frac{ac}{|b|} = \frac{(-2)(2)}{\frac{3}{4}} = -\frac{16}{3}$$

بنابراین:

برد و دوره تناوب توان تابع سینوسی

$$\diamond -1 \leq \sin x \leq 1 \Rightarrow 0 \leq \sin^2 x \leq 1$$

$$\diamond \begin{cases} y = a \sin(bx) + c \Rightarrow T = \frac{2\pi}{|b|} \\ y = a \sin^2(bx) + c \Rightarrow T = \frac{\pi}{|b|} \end{cases}$$

۱۴- مجموع جواب‌های معادلهٔ مثلثاتی $\sin 2x + \sin(x - \frac{\pi}{6}) = 0$ در بازهٔ $[0, \pi]$ کدام است؟

$$\frac{29\pi}{18} \quad (۴)$$

$$\frac{17\pi}{9} \quad (۳)$$

$$\frac{14\pi}{9} \quad (۲)$$

$$\frac{25\pi}{18} \quad (۱)$$

(متوسط - محاسباتی - زمان‌بر) - حسابان ۲ صفحه ۳۷ - ۱۲۰۲

پاسخ: گزینهٔ ۴

ابتدا معادله را به معادله‌ای تبدیل می‌کنیم که در دو طرف آن سینوس باشد و علامت منفی پشت هیچ کدام نباشد:

$$\sin 2x = -\sin(x - \frac{\pi}{6}) = \sin(\frac{\pi}{6} - x)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2x = 2k\pi + \frac{\pi}{6} - x \Rightarrow 3x = 2k\pi + \frac{\pi}{6} \\ 2x = 2k\pi + \pi - \frac{\pi}{6} + x \Rightarrow x = 2k\pi + \frac{5\pi}{6} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = \frac{2k\pi}{3} + \frac{\pi}{18} \xrightarrow{[0, \pi]} \frac{\pi}{18}, \frac{13\pi}{18} \\ x = 2k\pi + \frac{5\pi}{6} \xrightarrow{[0, \pi]} \frac{5\pi}{6} \end{cases}$$

$$\Rightarrow x = \frac{\pi}{18}, \frac{13\pi}{18}, \frac{5\pi}{6}$$

$$\text{مجموع} = \frac{\pi + 13\pi + 5\pi}{18} = \frac{29\pi}{18}$$

حل معادلات مثلثاتی

برای حل معادلهٔ مثلثاتی پس از ساده کردن طرفین تساوی آن را به یکی از صورت‌های زیر تبدیل می‌کنیم که در دو طرف تساوی دو نسبت هم‌جنس (هر دو $\sin$ ، هر دو $\cos$ ، ...) و هم‌علامت وجود داشته باشد:

$$۱) \sin x = \sin \alpha \Rightarrow \begin{cases} x = 2k\pi + \alpha \\ x = 2k\pi + \pi - \alpha \end{cases}$$

$$۲) \cos x = \cos \alpha \Rightarrow \begin{cases} x = 2k\pi + \alpha \\ x = 2k\pi - \alpha \end{cases}$$

$$۳) \tan x = \tan \alpha \Rightarrow x = k\pi + \alpha$$

اگر نسبت‌ها هم علامت نبودند با استفاده از روابط مجموع یا تفاضل کمان‌ها با مضارب صحیح π و اگر هم‌جنس نبودند با استفاده از روابط مجموع یا تفاضل کمان با مضارب صحیح $\frac{\pi}{2}$ آن‌ها را هم‌علامت و هم‌جنس می‌کنیم.



۱۵- حاصل $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+2x}\sqrt{1+4x}-1}{\sin x}$ کدام است؟

$$۴ \quad (۴)$$

$$۳ \quad (۳)$$

$$۲ \quad (۲)$$

$$۱ \quad (۱)$$

(متوسط - ترکیبی - استاندارد) - حسابان ۱ صفحه ۱۴۲ - ۱۱۰۵

پاسخ: گزینهٔ ۳

چون حاصل حد مبهم $\frac{0}{0}$ است برای رفع ابهام، کسر را در مزدوج صورت ضرب و تقسیم می‌کنیم:

$$\text{حاصل حد} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{1+2x}\sqrt{1+4x}-1)(\sqrt{1+2x}\sqrt{1+4x}+1)}{\sin x(\sqrt{1+2x}\sqrt{1+4x}+1)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+2x)(1+4x)-1}{2 \sin x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 + 4x + 2x + 8x^2 - 1}{2 \sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{6x + 8x^2}{2 \sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(6 + 8x)}{2 \sin x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{x}{\sin x} \times \frac{6 + 8x}{2} \right) = 1 \times \frac{6}{2} = 3$$

یک حد مهم و حیاتی!

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

نتایج:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sin x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^n x}{x^n} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a \sin x}{bx} = \frac{a}{b}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin ax}{x} = a$$



۱۶- فرض کنید $f(x) = ax^2 + bx + c$ باشد. اگر $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - 1}{f(x)} = \frac{1}{c}$ و $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f'(x)}{x^2 - 1} = 2$ باشد، مقدار $f(2)$ کدام است؟

۴ (۴) ۳ (۳) ۲ (۲) ۱ (۱)

(متوسط - ترکیبی - زمان ۵ دقیقه) - حسابان ۲ صفحه ۶۱ و ۹۳ - ۱۴۰۳ و ۱۴۰۴

پاسخ: گزینه ۲

طبق قانون پرتوان حد در بی نهایت داریم:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - 1}{f(x)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{ax^2} = \frac{1}{a} = \frac{1}{c} \Rightarrow a = c$$

از طرفی:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f'(x)}{x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2ax + b}{x^2 - 1} = 2$$

به شرطی حد وجود دارد که حالت مبهم $\frac{0}{0}$ رخ داده باشد، پس $2a + b = 0$ است و در نتیجه:

$$b = -2a$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2ax - 2a}{x^2 - 1} = 2 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2a(x-1)}{(x-1)(x+1)} = 2 \Rightarrow \frac{2a}{2} = 2 \Rightarrow a = 2$$

و داریم:

بنابراین $a = 2$ ، $b = -4$ و $c = 2$ است و داریم:

$$f(x) = 2x^2 - 4x + 2 \Rightarrow f(2) = 8 - 8 + 2 = 2$$

حد در بی نهایت و قانون جمله پرتوان

در حد توابع در بی نهایت داریم:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (ax^n + bx^{n-1} + \dots + cx + d) = \lim_{x \rightarrow \infty} ax^n$$

یعنی هر چند جمله‌ای با جمله پرتوان آن هم‌ارز است، در نتیجه:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{ax^n}{bx^m} = \begin{cases} \frac{a}{b} & ; n = m \\ \infty & ; n > m \\ 0 & ; n < m \end{cases}$$

قلیش رو یاد بگیر!

♦ اگر $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \ell$ و $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$ باشد، باید حالت مبهم $\frac{0}{0}$ رخ داده باشد که پس از رفع ابهام حاصل حد تابع کسری ℓ شده باشد، پس $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0$ است.

مشتق توابع چندجمله‌ای

♦ برای مشتق‌گیری از توابع چندجمله‌ای داریم:

۱) $(x^n)' = nx^{n-1}$

۲) $(af(x) + bg(x))' = af'(x) + bg'(x)$



۱۷- تابع $f(x) = \begin{cases} a[-x] + b[x] & x \leq 2 \\ 2x + 3 & x > 2 \end{cases}$ در نقطه $x = 2$ پیوسته است. حاصل $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x)$ کدام است؟

(۱) ۷ (۲) $\frac{7}{2}$ (۳) $-\frac{7}{2}$ (۴) -۷

(متوسط - ترکیبی - استاندارد) - حسابان ۱ صفحه ۱۴۶ - ۱۱۰۵

پاسخ: گزینه ۱

شرط پیوستگی آن است که حد چپ و حد راست با مقدار تابع در $x = 2$ برابر باشد:

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} (a[-x] + b[x]) = a[(-2)^+] + b[2^-] = -2a + b \\ \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} (2x + 3) = 4 + 3 = 7 \\ f(2) = a[-2] + b[2] = -2a + 2b \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -2a + 2b = 7 \\ -2a + b = 7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b = 0 \\ a = -\frac{7}{2} \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (a[-x] + b[x]) = a[(-1)^-] + b[1^+] = -2a + b = -2(-\frac{7}{2}) + 0 = 7$$

پیوستگی در نقطه

تابع f را در $x = a$ پیوسته می‌گوییم اگر حد چپ و حد راست و مقدار تابع f در $x = a$ با هم برابر باشند:

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = f(a)$$

اگر x عددی بین دو عدد صحیح n و $n+1$ باشد یا $x = n$ باشد، آن گاه: $[x] = n$

$$n \leq x < n+1 \Rightarrow [x] = n$$

به عبارت دیگر:

نتیجه 

اگر a عددی صحیح باشد:

$$\bullet \lim_{x \rightarrow a^+} [-x] = [(-a)^-] = -a - 1$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow a^-} [-x] = [(-a)^+] = -a$$



۱۸- اگر $f(x) = x^2 + 1$ و $g(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{x^2 - 1}}$ باشد، مقدار $(fog)'(3)$ کدام است؟

$$-\frac{3}{4} \quad (4)$$

$$-\frac{3}{8} \quad (3)$$

$$-\frac{1}{4} \quad (2)$$

$$-\frac{1}{8} \quad (1)$$

آسان - محاسباتی - استاندارد (حسابان ۲ صفحه ۹۴ - ۱۲۰۴)

پاسخ: گزینه ۱ 

$$(fog)'(3) = g'(3) \cdot f'(g(3))$$

ابتدا با استفاده از فرمول مشتق ترکیب توابع داریم:

$$g(3) = \frac{1}{\sqrt[3]{9-1}} = \frac{1}{2}$$

با توجه به ضابطه تابع $g(x)$ مقدار آن در $x = 3$ برابر است با:

حال به محاسبه مشتق توابع می پردازیم:

$$f(x) = x^2 + 1 \Rightarrow f'(x) = 2x \Rightarrow f'\left(\frac{1}{2}\right) = 1$$

$$g(x) = (x^2 - 1)^{-\frac{1}{3}} \Rightarrow g'(x) = -\frac{1}{3}(x^2 - 1)' \times (x^2 - 1)^{-\frac{1}{3}-1} = -\frac{1}{3} \times 2x \times (x^2 - 1)^{-\frac{4}{3}}$$

$$\Rightarrow g'(3) = -\frac{1}{3} \times 6 \times 8^{-\frac{4}{3}} = -2 \times \frac{1}{16} = -\frac{1}{8}$$

$$(fog)'(3) = g'(3) \times f'\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{8} \times 1 = -\frac{1}{8}$$

قوانین مشتق گیری 

$$1) (x^n)' = nx^{n-1} \xrightarrow{\text{نتیجه}} \begin{cases} f(x) = k \Rightarrow f'(x) = 0 \\ \left((u(x))^n \right)' = nu'(x) \times (u(x))^{n-1} \end{cases}$$

$$2) (f \pm g)' = f' \pm g'$$

$$3) (f \cdot g)' = f' \cdot g + g' \cdot f$$

$$4) \left(\frac{f}{g} \right)' = \frac{f' \cdot g - g' \cdot f}{g^2}$$

$$5) (fog)'(x) = g'(x) \cdot f'(g(x))$$



۱۹- خط گذرنده از نقاط $A(3, -1)$ و $B(-5, 5)$ در ناحیه اول بر نمودار تابع $y = \sqrt{ax+1}$ مماس است. a کدام است؟

- (۱) -۵ (۲) $-\frac{5}{4}$ (۳) $-\frac{3}{4}$ (۴) -۳

(متوسط - مفهومی - زمان بر) - حسابان ۲ صفحه ۷۶ - ۱۲۰۴

پاسخ: گزینه ۳

به کمک نقاط A و B معادله خط مماس را می نویسیم:

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{5+1}{-5-3} = -\frac{3}{4}$$

$$AB \text{ معادله: } y - 5 = -\frac{3}{4}(x + 5) \Rightarrow y = -\frac{3}{4}x + \frac{5}{4}$$

معادله حاصل از تقاطع خط و تابع، باید ریشه مضاعف داشته باشد.

$$\sqrt{ax+1} = -\frac{3}{4}x + \frac{5}{4} \xrightarrow{\text{توان ۲}} ax+1 = \frac{9x^2}{16} + \frac{25}{16} - \frac{15x}{8}$$

$$\xrightarrow{\times 16} 9x^2 - (16a + 30)x + 9 = 0 \quad (*)$$

$$\Delta = 0 \Rightarrow (16a + 30)^2 - 4 \times 9 = 0 \Rightarrow 16a + 30 = \pm 2 \times 9$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 16a = -18 - 30 \\ 16a = +18 - 30 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = -3 \xrightarrow{(*)} x = -1 \times \\ a = -\frac{3}{4} \xrightarrow{(*)} x = 1 \checkmark \end{cases}$$

چون نقطه تقاطع در ناحیه اول است، پس باید $x > 0$ باشد، در نتیجه $a = -\frac{3}{4}$ قابل قبول است.



۲۰- نمودار تابع $y = x\sqrt{2-x|x|}$ در بازه $(-\infty, \alpha)$ اکیداً یکنواست. حداکثر α کدام است؟

- (۱) ۱ (۲) -۱ (۳) صفر (۴) $-\sqrt{2}$

(سخت - محاسباتی - زمان بر) - حسابان ۲ صفحه ۱۲۱ - ۱۲۰۵

پاسخ: گزینه ۱

ابتدا قدرمطلق را تعیین علامت کرده و برمی داریم و در هر شاخه مشتق می گیریم:

$$x < 0 \Rightarrow y = x\sqrt{2+x^2} \Rightarrow y' = (x)'\sqrt{2+x^2} + (\sqrt{2+x^2})' \times x$$

$$y' = \sqrt{2+x^2} + \frac{2x}{2\sqrt{2+x^2}} \times x = \frac{2+2x^2}{\sqrt{2+x^2}}$$

در بازه $(-\infty, 0)$ حاصل y' همواره مثبت است، پس در این بازه y اکیداً صعودی است.

$$x \geq 0 \Rightarrow y = x\sqrt{2-x^2} \Rightarrow y' = (x)'\sqrt{2-x^2} + (\sqrt{2-x^2})' \times x$$

$$y' = \sqrt{2-x^2} - \frac{2x}{2\sqrt{2-x^2}} \times x = \frac{2-2x^2}{\sqrt{2-x^2}}$$

یعنی جدول تعیین علامت مشتق و یکنوایی تابع در شاخه $(0, +\infty)$ نیز به صورت زیر است:

x	۰	۱
y'		+
y		

در بازه $[0, 1]$ نیز اکیداً صعودی است، پس چون f در $x = 0$ پیوسته است، تابع در بازه $(-\infty, 1)$ اکیداً صعودی و اکیداً یکنوا است، یعنی حداکثر مقدار α برابر ۱ است.

وضعیت مشتق و یکنوایی

اگر تابع f در بازه (a, b) پیوسته باشد، در این بازه:

- (۱) اگر $f' \geq 0$ باشد $f \Leftarrow$ صعودی است.
- (۲) اگر $f' \leq 0$ باشد $f \Leftarrow$ نزولی است.
- (۳) اگر $f' > 0$ باشد $f \Leftarrow$ صعودی اکید است. (البته در تعدادی از نقاط می‌تواند مشتق برابر صفر شود اما نباید روی یک خط افقی باشند).
- (۴) اگر $f' < 0$ باشد $f \Leftarrow$ نزولی اکید است. (البته در تعدادی از نقاط می‌تواند مشتق برابر صفر شود اما نباید روی یک خط افقی باشند).



۲۱- تابع $f(x) = ax^2 + \frac{b}{x}$ در نقطه $A(2, 6)$ دارای اکسترمم نسبی است. اگر $x = \alpha$ طول نقطه عطف f باشد، α^3 کدام است؟

- (۱) -۱۶ (۲) -۸ (۳) $-\frac{8}{3}$ (۴) $-\frac{16}{3}$

پاسخ: گزینه ۱

(متوسط - ترکیبی - زمان بر ۵) - حسابان ۲ صفحه ۱۳۱ - ۱۳۰۵

$$f'(x) = 2ax - \frac{b}{x^2}$$

$x = 2$ نقطه بحرانی تابع f است، پس داریم:

چون $f'(2) = 0$ وجود دارد، پس:

$$\begin{cases} f'(2) = 0 \\ f(2) = 6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4a - \frac{b}{4} = 0 \\ 4a + \frac{b}{2} = 6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = \frac{1}{2} \\ b = 8 \end{cases}$$

بنابراین:

$$f'(x) = x - \frac{8}{x^2} \Rightarrow f''(x) = 1 + \frac{16}{x^3}$$

$x = \alpha$ ریشه $f''(x) = 0$ است:

$$f''(\alpha) = 0 \Rightarrow 1 + \frac{16}{\alpha^3} = 0 \Rightarrow \alpha^3 = -16$$

نقاط اکسترمم نسبی

♦ اگر $x = \alpha$ طول نقطه اکسترمم نسبی f باشد، آن‌گاه $x = \alpha$ یک نقطه بحرانی برای f است یعنی $f'(\alpha) = 0$ یا $f'(\alpha)$ موجود نیست و به علاوه f' در $x = \alpha$ تغییر علامت می‌دهد.

نقطه عطف

♦ اگر $x = \alpha$ طول نقطه عطف f باشد، آن‌گاه تابع در $x = \alpha$ خط مماس دارد و f'' در $x = \alpha$ تغییر علامت می‌دهد.



۲۲- از بین اعداد ۱۹۲۵، ۲۷۳، ۲۶۶، ۲۵۹، ۲۵۲، ... به تصادف انتخاب می‌کنیم. احتمال آن‌که عدد انتخابی از بین اعداد ۶ و ۱۵ فقط

بر یکی بخش‌پذیر باشد، کدام است؟

- (۱) $\frac{1}{5}$ (۲) $\frac{1}{6}$ (۳) $\frac{1}{7}$ (۴) $\frac{1}{8}$

پاسخ: گزینه ۲

(سخت - محاسباتی - زمان بر ۵) - آمار و احتمال صفحه ۴۳ - ۱۱۰۲

بررسی سریع:

کوچک‌ترین مضرب مشترک دو عدد ۶ و ۱۵ عدد ۳۰ است، بنابراین در هر ۳۰ عدد طبیعی متوالی (یا ۳۰ عدد متوالی از یک دنباله حسابی که قدرنسبتش نسبت به ۳۰ اول است) دقیقاً ۲۴ عدد داریم که نه بر ۶ بخش‌پذیرند و نه بر ۱۵. ۵ عدد بر یکی بخش‌پذیرند و یک عدد بر هر دو.

چون تعداد اعداد داده شده برابر ۲۴۰ بوده و ۲۴۰ بر ۳۰ بخش پذیر است و در هر ۳۰ عضو متوالی، دقیقاً ۵ عدد خاصیت مورد اشاره را دارند، بنابراین جواب مورد نظر $\frac{5}{30}$ یا $\frac{1}{6}$ است.

دنباله داده شده یک دنباله حسابی با قدر نسبت ۷ است. وقتی می خواهیم مضارب ۶ و ۱۵ را در بین تعدادی عدد بشماریم به ک.م.م آن ها نگاه می کنیم و محاسبه می کنیم که در بین $[6, 15] = 30$ عدد متوالی چند عدد ویژگی مورد نظر را دارند. با توجه به این که در بین هر ۳۰ عدد متوالی ۵ عدد مضرب ۶ هستند و ۲ عدد مضرب ۱۵ (خود ۳۰ مضرب هر دو است) در مجموع ۵ عدد فقط مضرب یکی از اعداد ۶ یا ۱۵ هستند. در نتیجه احتمال مطلوب در بین اعداد ۱ تا ۳۰ برابر با $\frac{5}{30} = \frac{1}{6}$ است.

حال اگر دنباله ای از اعداد را در نظر بگیریم که قدر نسبت آن نسبت به ۳۰ اول است، تعداد اعداد مضرب ۶ و ۱۵ به همین صورت حفظ خواهد شد، اما اگر قدر نسبت شمارنده ای از ۳۰ را داشته باشد، ممکن است این نسبت بهم بخورد و تعداد مضارب را باید به طور خاص شمرد.

حال جمله عمومی دنباله را می نویسیم:

$$a_n = 252 + (n-1)7 = 7n + 245$$

برای به دست آوردن تعداد اعداد دنباله باید دید آخرین عدد چندمین جمله دنباله است؟

$$7n + 245 = 1925 \Rightarrow 7n = 1680 \Rightarrow n = 240$$

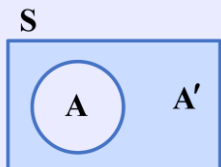
چون تعداد اعداد دنباله ۲۴۰ تا است و از بین هر ۳۰ عدد دنباله ۵ عدد ویژگی مذکور را دارند:

$$240 = 30 \times 8 \Rightarrow 5 \times 8 = 40 \Rightarrow 40 \text{ عدد ویژگی مذکور را در دنباله دارند.}$$

پس احتمال مطلوب برابر است با:

$$\frac{40}{240} = \frac{5 \times 8}{30 \times 8} = \frac{1}{6}$$

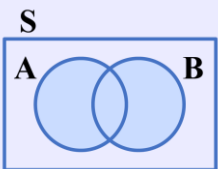
قوانین احتمال



احتمال آن که A اتفاق نیفتد

$$\bullet P(A) + P(A') = 1$$

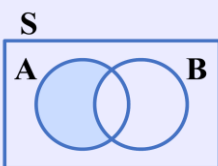
احتمال آن که A اتفاق بیفتد



احتمال آن که A و B باهم (همزمان) رخ دهند

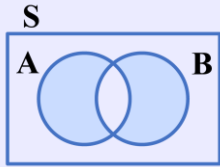
$$\bullet P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

احتمال آن که از بین پیشامدهای A و B حداقل یکی اتفاق بیفتد

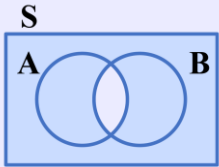


$$\bullet P(A - B) = P(A) - P(A \cap B)$$

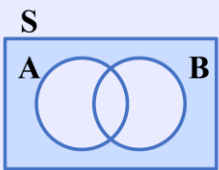
احتمال آن که A اتفاق بیفتد ولی B اتفاق نیفتد (فقط A اتفاق بیفتد)



• $P(A \Delta B) = P(A \cup B) - P(A \cap B) = P(A - B) + P(B - A) = P(A) + P(B) - 2P(A \cap B)$
 ↓
 احتمال آن که A اتفاق بیفتد ولی B اتفاق نیفتد یا B اتفاق بیفتد ولی A اتفاق نیفتد (فقط یکی اتفاق بیفتد)



• $P(A' \cup B') \stackrel{\text{دمورگان}}{=} P((A \cap B)') = 1 - P(A \cap B)$
 ↓
 احتمال آن که A اتفاق نیفتد یا B اتفاق نیفتد



• $P(A' \cap B') \stackrel{\text{دمورگان}}{=} P((A \cup B)') = 1 - P(A \cup B)$
 ↓
 احتمال آن که نه A اتفاق بیفتد نه B



۲۳- سه مهندس و سه پزشک به تصادف دور یک میزگرد می‌نشینند. احتمال آن که مهندسين و پزشک‌ها یک در میان باشند چقدر است؟

$\frac{1}{6}$ (۴)

$\frac{1}{10}$ (۳)

$\frac{1}{12}$ (۲)

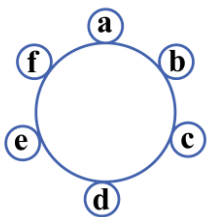
$\frac{1}{15}$ (۱)

(متوسط - محاسباتی - استاندارد ۶) - آمار و احتمال صفحه ۵۳ - ۱۱۰۲

پاسخ: گزینه ۳

روش اول

احتمال آن که a مطلوب باشد (از نظر مهندس یا پزشک بودن) $\frac{6}{6}$ است.



بعد از جایگیری a، احتمال آن که b مطلوب باشد $\frac{3}{5}$ است.

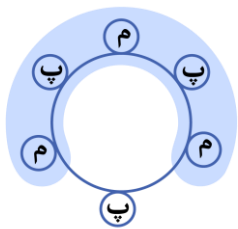
به همین ترتیب احتمال مطلوب بودن f, e, d, c به ترتیب برابر $\frac{2}{4}, \frac{2}{3}, \frac{1}{2}, \frac{1}{1}$ است، بنابراین طبق قانون ضرب احتمال، عدد مطلوب

یعنی $\frac{1}{10}$ خواهد شد. $\frac{6}{6} \times \frac{3}{5} \times \frac{2}{4} \times \frac{2}{3} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{1}$

روش دوم

این روش مناسب افرادی است که جایگشت دوری را بلدند.

فضای نمونه‌ای، جایگشت دوری ۶ نفر است که $(6-1)!$ می‌باشد. برای محاسبه پیشامد کافی است یکی از افراد مثلاً یک پزشک را به دلخواه روی یک صندلی بنشانیم سپس ۵ فضای خالی ایجاد می‌شود که باید مهندس‌ها و دو پزشک در آن یک در میان جای بگیرند.



جایگشت ۲ پزشک حالت قرارگیری نفر اول

$$n(A) = 1 \times 3! \times 2! \Rightarrow P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{3! \times 2!}{5!} = \frac{3! \times 2!}{5 \times 4 \times 3!} = \frac{1}{10}$$

جایگشت مهندس‌ها

جایگشت دوری

اگر n شیء متمایز را دور یک میزگرد قرار دهیم جایگشت دوری آن اشیاء ایجاد می‌شود. جایگشت دوری n شیء متمایز $(n-1)!$ است.



۲۴- بیشترین و کمترین مقدار ممکن برای ضریب تغییرات ۵ عدد فرد متوالی دو رقمی را به ترتیب a و b می‌نامیم. حاصل $\frac{a}{b}$ به کدام عدد نزدیک‌تر است؟

۶ (۴)

۵ (۳)

۳ (۲)

۱ (۱)

(متوسط - مفهومی - استاندارد) - آمار و احتمال صفحه ۹۰ - ۱۱۰۳

پاسخ: گزینه ۴

انحراف معیار هر دو گروه از داده‌ها یکسان است، زیرا اگر به هر یک از داده‌ها مقدار یکسانی اضافه شود تا داده‌های گروه دوم به دست آیند، واریانس و انحراف معیار تغییر نمی‌کند. اما میانگین وقتی ماکزیمم است که اعداد منتخب ۹۱، ۹۳، ۹۵، ۹۷، ۹۹ باشند و وقتی مینیمم است که آن اعداد ۱۱، ۱۳، ۱۵، ۱۷، ۱۹ باشند، پس:

$$\frac{a}{b} = \frac{CV_{\max}}{CV_{\min}} = \frac{\frac{\sigma}{\bar{x}_{\min}}}{\frac{\sigma}{\bar{x}_{\max}}} = \frac{\bar{x}_{\max}}{\bar{x}_{\min}} \Rightarrow \frac{a}{b} = \frac{95}{15} = \frac{19}{3} = 6 \frac{1}{3}$$

که به ۶ از همه نزدیک‌تر است.

معیارهای پراکندگی و میانگین

اگر $X_1, X_2, X_3, \dots, X_n$ داده‌های آماری باشند، آن‌گاه:

$$\bar{x} = \frac{X_1 + X_2 + \dots + X_n}{n}$$

(۱) میانگین:

$$\sigma^2 = \frac{(X_1 - \bar{x})^2 + (X_2 - \bar{x})^2 + \dots + (X_n - \bar{x})^2}{n} \quad \text{یا} \quad \sigma^2 = \frac{X_1^2 + X_2^2 + \dots + X_n^2}{n} - \bar{x}^2$$

(۲) واریانس:

$$\sigma = \sqrt{\text{واریانس}}$$

(۳) انحراف معیار:

$$R = x_{\max} - x_{\min}$$

(۴) دامنه تغییرات:

$$CV = \frac{\sigma}{\bar{x}}$$

(۵) ضریب تغییرات:

وقتی همه داده‌ها با هم برابرند...

اگر داده‌ها با هم برابر باشند، میانگین با داده‌ها برابر بوده و واریانس، انحراف معیار، ضریب تغییرات و دامنه تغییرات برابر صفر است.

$$x_1 = x_2 = \dots = x_n \longleftrightarrow \sigma^2 = \sigma = R = CV = 0$$

اگر داده‌ها در a ضرب و با b جمع شوند...

- (۱) میانگین در a ضرب و با b جمع می‌شود.
- (۲) واریانس در a^2 ضرب می‌شود.
- (۳) انحراف معیار در $|a|$ ضرب می‌شود.
- (۵) ضریب تغییرات، بعد از محاسبه تغییر میانگین و انحراف معیار محاسبه شده و تغییر می‌کند.



۲۵- متوازی‌الاضلاع با طول قطرهای ۱۳ و ۷ و ضلع a قابل رسم است. مقدار a برابر کدام می‌تواند باشد؟

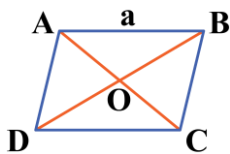
- (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۹ (۴) ۱۰

(آسان - مفهومی - سریع) - هندسه ۱ صفحه ۱۱ - ۱۰۰۱

پاسخ: گزینه ۳

در متوازی‌الاضلاع ABCD فرض می‌کنیم $BD = 13$ ، $AC = 7$ و $AB = a$ باشد، چون قطرها متوازی‌الاضلاع همدیگر را نصف می‌کنند، پس $OA = \frac{7}{2}$ و $OB = \frac{13}{2}$. بنابراین این متوازی‌الاضلاع قابل رسم است هرگاه مثلث OAB با سه ضلع $\frac{7}{2}$ ، $\frac{13}{2}$ و a قابل رسم باشد.

پس داریم:



$$|OB - OA| < AB < OA + OB \Rightarrow \left| \frac{13}{2} - \frac{7}{2} \right| < a < \frac{13}{2} + \frac{7}{2} \Rightarrow 3 < a < 10$$

در بین گزینه‌ها تنها عدد ۹ در این فاصله قرار دارد و قابل قبول می‌باشد.

نامساوی مثلثی

مثلث ABC با اضلاع a, b, c قابل رسم است اگر مجموع هر دو ضلع آن از ضلع سوم بزرگ‌تر باشد.

نکته‌های تکمیلی نامساوی مثلث

اگر $a < b < c$ باشد، مثلث ABC قابل رسم است، اگر:

$$a + b > c$$

مثلث ABC با اضلاع a, b, c قابل رسم است، اگر:

$$|a - c| < b < a + c$$



۲۶- در مثلث به طول اضلاع ۴، ۷، ۵ فاصله پای بزرگ‌ترین میانه تا پای بزرگ‌ترین ارتفاع چقدر است؟

- (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴) ۱

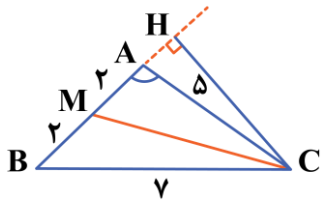
(متوسط - مفهومی - استاندارد) - هندسه ۱ صفحه ۴۲ - ۱۰۰۲

پاسخ: گزینه ۲

در مثلث ABC، با فرض $AB = 4$ ، $AC = 5$ و $BC = 7$ نتیجه می‌گیریم:

$$BC^2 > AB^2 + AC^2 \Rightarrow \hat{A} > 90^\circ$$

بنابراین ارتفاع CH وارد بر کوچک‌ترین ضلع یعنی AB، اولاً بزرگ‌ترین ارتفاع است، ثانیاً این ارتفاع CH بیرون مثلث قرار می‌گیرد. (شکل را ببینید.)



در ضمن میانه CM وارد بر کوچک‌ترین ضلع یعنی AB، بزرگ‌ترین میانه است، پس باید طول MH را به دست آوریم. برای این کار از قضیه فیثاغورس استفاده می‌کنیم:

$$\left. \begin{array}{l} \triangle AHC: CH^2 + AH^2 = AC^2 = 25 \\ \triangle BHC: CH^2 + BH^2 = BC^2 = 49 \end{array} \right\} \xrightarrow{\text{کم می‌کنیم}} BH^2 - AH^2 = 49 - 25$$

$$\xrightarrow{BH=AH+4} (AH+4)^2 - AH^2 = 24 \Rightarrow AH^2 + 16 + 8AH - AH^2 = 24 \Rightarrow 8AH = 8 \Rightarrow AH = 1$$

در نتیجه:

$$MH = AM + AH = 2 + 1 = 3$$

دام تستی! 

توجه کنید که اگر به منفرجه بودن زاویه A دقت نکنیم آن‌گاه ارتفاع CH به اشتباه داخل مثلث قرار خواهد گرفت و $MH = 1$ به دست می‌آید که نادرست است.

فیثاغورس برقرار باشد یا نباشد؟! 

♦ در مثلث ABC به اضلاع a, b, c با استفاده از مجموع مربعات دو ضلع و مقایسه با مربع ضلع سوم می‌توان **حاده**، یا **قائمه** یا **منفرجه** بودن یک زاویه را تشخیص داد:

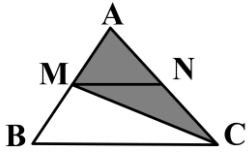
$$\begin{cases} a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow \hat{A} = 90^\circ \\ a^2 > b^2 + c^2 \Rightarrow \hat{A} > 90^\circ \\ a^2 < b^2 + c^2 \Rightarrow \hat{A} < 90^\circ \end{cases}$$

بزرگ‌ترین/کوچک‌ترین ارتفاع و میانه 

♦ همواره **بزرگ‌ترین ارتفاع و بزرگ‌ترین میانه**، بر **کوچک‌ترین ضلع** وارد می‌شوند و **کوچک‌ترین ارتفاع و کوچک‌ترین میانه** بر **بزرگ‌ترین ضلع** وارد می‌شوند.



۲۷- در شکل مقابل، نسبت قاعده‌های دوزنقه BMNC، $\frac{3}{5}$ است. مساحت مثلث سایه زده چند برابر مساحت دوزنقه است؟



$$\begin{aligned} \frac{9}{25} & (2) \\ \frac{15}{16} & (4) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{9}{16} & (1) \\ \frac{14}{15} & (3) \end{aligned}$$

(متوسط - مفهومی - استاندارد) - هندسه ۱ صفحه ۴۷ - ۱۰۰۲

پاسخ: گزینه ۴

بنا بر فرض سؤال $\frac{MN}{BC} = \frac{3}{5}$ ، در نظر می‌گیریم $MN = 3x$ و $BC = 5x$. با توجه به شکل عمود CH که بر امتداد MN وارد شده است هم ارتفاع مثلث MNC است و هم ارتفاع دوزنقه BMNC، پس داریم:

$$\frac{S_{\triangle MNC}}{S_{BMNC}} = \frac{\frac{1}{2} CH \times MN}{\frac{1}{2} CH(MN + BC)} = \frac{MN}{MN + BC} = \frac{3x}{8x} = \frac{3}{8} \quad (1)$$

از طرف دیگر:

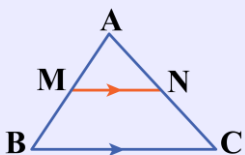
$$\begin{aligned} MN \parallel BC & \xrightarrow{\text{قضیه اساسی تشابه}} \triangle AMN \sim \triangle ABC \Rightarrow \frac{S_{\triangle AMN}}{S_{\triangle ABC}} = \left(\frac{MN}{BC}\right)^2 = \left(\frac{3}{5}\right)^2 = \frac{9}{25} \\ & \xrightarrow{\text{تفصیل در مخرج}} \frac{S_{\triangle AMN}}{S_{\triangle ABC} - S_{\triangle AMN}} = \frac{9}{25 - 9} \Rightarrow \frac{S_{\triangle AMN}}{S_{BMNC}} = \frac{9}{16} \quad (2) \end{aligned}$$

بنابراین:

$$\begin{aligned} (1) + (2) & \Rightarrow \frac{S_{\triangle MNC}}{S_{BMNC}} + \frac{S_{\triangle AMN}}{S_{BMNC}} = \frac{3}{8} + \frac{9}{16} \Rightarrow \frac{S_{\triangle MNC} + S_{\triangle AMN}}{S_{BMNC}} = \frac{6 + 9}{16} \\ & \Rightarrow \frac{\text{مساحت قسمت سایه زده}}{\text{مساحت دوزنقه}} = \frac{S_{\triangle AMC}}{S_{BMNC}} = \frac{15}{16} \end{aligned}$$

قضیه اساسی تشابه

در هر مثلث، اگر خطی موازی یکی از اضلاع دو ضلع دیگر را قطع کند، مثلث کوچک ایجاد شده با مثلث اولیه متشابه است و داریم:



$$\begin{aligned} \triangle AMN & \sim \triangle ABC \\ \text{نسبت تشابه} & = \frac{MN}{BC} = \frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} \end{aligned}$$

نسبت تشابه

اگر دو مثلث متشابه باشند و نسبت تشابه آن‌ها k باشد، نسبت محیط‌ها، ارتفاع‌های متناظر، میانه‌های متناظر و نیمسازهای متناظر برابر با k است اما نسبت مساحت‌ها برابر با k^2 است.

$$۱) \frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow \begin{cases} ad = bc \text{ (طرفین وسطین)} \\ \frac{d}{b} = \frac{c}{a} \\ \frac{a}{c} = \frac{b}{d} \end{cases}$$

$$۲) \frac{a}{b} = \frac{c}{d} \xrightarrow{\text{معکوس کردن}} \frac{b}{a} = \frac{d}{c}$$

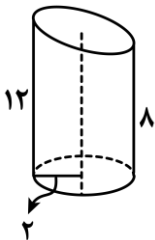
$$۳) \frac{a}{b} = \frac{c}{d} \xrightarrow{\text{ترکیب در صورت}} \frac{a+b}{b} = \frac{c+d}{d}$$

$$۴) \frac{a}{b} = \frac{c}{d} \xrightarrow{\text{تفضیل در صورت}} \frac{a-b}{b} = \frac{c-d}{d}$$

$$۵) \frac{a}{b} = \frac{c}{d} \xrightarrow{\text{ترکیب در مخرج}} \frac{a}{b+a} = \frac{c}{d+c}$$

$$۶) \frac{a}{b} = \frac{c}{d} \xrightarrow{\text{تفضیل در مخرج}} \frac{a}{b-a} = \frac{c}{d-c}$$

$$۷) \frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{a+c}{b+d}$$



۲۸- در شکل مقابل، با یک صفحه مایل استوانه قائمی را برش داده‌ایم. حجم این جسم برابر کدام است؟

(۱) 40π

(۲) 32π

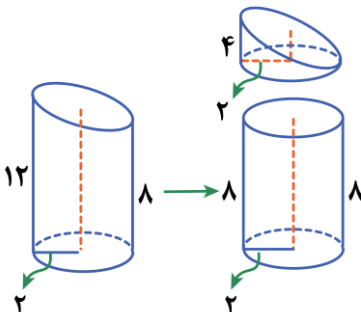
(۳) 42π

(۴) 48π

(آسان - مفهومی - سریع) - هندسه ۱ صفحه ۹۳ - ۱۰۰۴

پاسخ: گزینه ۱

جسم داده شده را با یک صفحه افقی به فاصله ۸ از قاعده برش می‌دهیم. در این صورت یک قسمت استوانه قائم به شعاع قاعده ۲ و ارتفاع ۸ است و قسمت دیگر نصف یک استوانه قائم به ارتفاع ۴ و شعاع قاعده ۲ است.



$$\text{حجم استوانه} = \pi R^2 h = \pi (2)^2 (8) = 32\pi$$

$$\text{حجم نیم استوانه} = \frac{\pi R'^2 h'}{2} = \frac{\pi (2)^2 (4)}{2} = 8\pi$$

$$\text{حجم جسم خواسته شده} = 32\pi + 8\pi = 40\pi$$

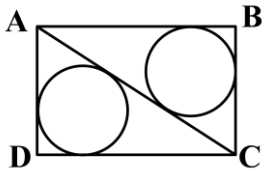
یادآوری! 

$$V = \pi r^2 h$$

حجم استوانه به شعاع قاعده r و ارتفاع h برابر است با:



۲۹- در مستطیل ABCD، قطر AC و دایره‌های محاطی داخلی دو مثلث ABC و ADC را رسم کرده‌ایم. اگر محیط مستطیل برابر ۶۲ و طول مماس مشترک داخلی این دو دایره برابر ۹ باشد، آنگاه مساحت مستطیل چقدر است؟



(۱) ۲۷۹

(۲) ۱۶۴

(۳) ۲۲۰

(۴) ۲۴۸

(متوسط - مفهومی - زمان‌بر) - هندسه ۲ صفحه ۲۶ - ۱۱۰۱

پاسخ: گزینه ۳

در شکل زیر، MN مماس مشترک داخلی دو دایره است. چون دو مثلث ABC و ADC همنهشت‌اند، پس محیط‌های این دو مثلث برابرند و داریم:

$$\left. \begin{array}{l} MC = P_{\triangle ADC} - AD \\ NC = P_{\triangle ABC} - AB \end{array} \right\} \xrightarrow{\text{کم کنیم}} MC - NC = AB - AD \Rightarrow MN = AB - AD$$

$$\xrightarrow{MN=9} AB - AD = 9 \quad (۱)$$

از طرف دیگر:

$$(۲) \quad AB + AD = ۳۱ \Rightarrow ۲(AB + AD) = ۶۲ \Rightarrow \text{محیط مستطیل}$$

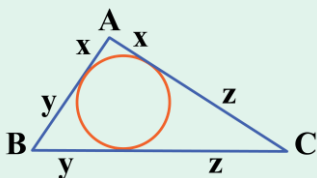
$$(۱), (۲) \Rightarrow \begin{cases} AB + AD = ۳۱ \\ AB - AD = ۹ \end{cases} \xrightarrow{+} ۲AB = ۴۰ \Rightarrow AB = ۲۰, AD = ۱۱$$

بنابراین:

$$S_{ABCD} = AB \times AD = ۲۰ \times ۱۱ = ۲۲۰$$

قلقش رو یاد بگیر!

اگر دایره محاطی مثلث ABC را رسم کنیم، چون طول مماس‌های رسم شده از نقطه‌ای بیرون دایره بر دایره با هم برابرند، داریم:



$$\text{محیط } ABC: ۲P = ۲x + ۲y + ۲z \Rightarrow P = x + y + z \Rightarrow x = P - (y + z) \Rightarrow x = P - BC$$

به طور مشابه:

$$y = P - AC, \quad z = P - AB$$



۳۰- یک دوزنقه متساوی الساقین با قاعده‌های ۱۶ و ۹ واحد بر دایره‌ای محیط است. بیشترین فاصله رأس دوزنقه تا نقاط دایره چند واحد است؟

۱۸ (۴)

۱۶ (۳)

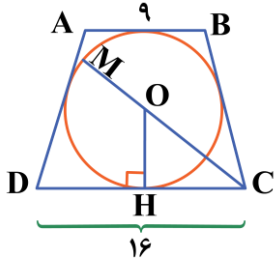
۱۴ (۲)

۱۲ (۱)

(متوسط - ترکیبی - استاندارد) - هندسه ۲ صفحه ۲۸ - ۱۱۰۱

پاسخ: گزینه ۳

دوزنقه متساوی الساقین ABCD بر دایره به شعاع R محیط است. از رأس C به O (مرکز دایره) وصل کرده، امتداد می‌دهیم تا دایره را در نقطه M قطع کند، در این صورت CM بیشترین فاصله نقاط دایره تا رأس این دوزنقه است.



می‌دانیم در هر دوزنقه متساوی الساقین محیطی، قطر دایره محاطی واسطه هندسی دو قاعده است، پس:

$$(2R)^2 = AB \times DC \Rightarrow 4R^2 = 9 \times 16 \Rightarrow R^2 = 36 \Rightarrow R = 6 \Rightarrow OH = 6$$

اکنون عمود OH را بر قاعده DC وارد می‌کنیم، در این صورت $CH = \frac{CD}{2} = \frac{16}{2} = 8$ پس:

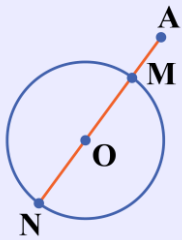
$$OHC : OC^2 = OH^2 + CH^2 \Rightarrow OC^2 = 6^2 + 8^2 = 100 \Rightarrow OC = 10$$

بنابراین:

$$\text{فاصله بیشترین} = CM = OC + R = 10 + 6 = 16$$

بیشترین و کمترین فاصله یک نقطه از بیرون دایره تا نقاط دایره

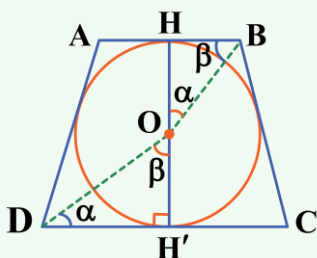
برای یافتن بیشترین و کمترین فاصله A از نقاط دایره از A به مرکز دایره وصل می‌کنیم و امتداد می‌دهیم تا محیط دایره را در نقاط M و N قطع کند. در این صورت AM کمترین فاصله و AN بیشترین فاصله را تا نقاط دایره دارد.



دوزنقه متساوی الساقین

♦ هر دوزنقه متساوی الساقین، چهارضلعی محاطی است.

♦ اگر R شعاع دایره محاطی آن باشد، آنگاه قطر دایره واسطه هندسی قاعده‌های دوزنقه است، زیرا O محل تلاقی نیمساز زوایای B و D است، پس OB و OD نیمساز زوایا هستند و داریم: $\alpha + \beta = 90^\circ$



پس دو مثلث OHB و OH'D متشابه‌اند و داریم:

$$\frac{R}{\frac{1}{2}AB} = \frac{\frac{1}{2}CD}{R} \Rightarrow R^2 = \frac{1}{4}AB \times CD \Rightarrow AB \times CD = 4R^2 = (2R)^2$$



۳۱- بازتاب نقطه $A(3, 4)$ نسبت به خط $2x + y = 1$ را A' و بازتاب A' نسبت به خط $x - 2y = 8$ را A'' می‌نامیم. حاصل ضرب مختصات نقطه A'' برابر کدام است؟

۹ (۴)

۱۰ (۳)

-۹ (۲)

-۱۰ (۱)

(متوسط - مفهومی - استاندارد ۵) - هندسه ۲ صفحه ۴۳ - ۱۱۰۲

پاسخ: گزینه ۱

می‌دانیم حاصل بازتاب نسبت به دو خط متقاطع یک دوران به مرکز نقطه تلاقی دو خط با زاویه‌ای مساوی دو برابر زاویه بین دو خط است.

ابتدا نقطه تلاقی دو خط را به دست می‌آوریم:

$$\begin{cases} 2x + y = 1 \\ x - 2y = 8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4x + 2y = 2 \\ x - 2y = 8 \end{cases} \Rightarrow 5x = 10 \Rightarrow x = 2, y = -3$$

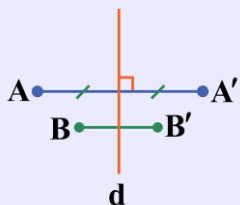
پس نقطه $O(2, -3)$ مرکز این دوران است.

از طرف دیگر، شیب‌های این دو خط ۲ و $\frac{1}{2}$ می‌باشند، پس این دو خط بر هم عمودند. بنابراین دو نقطه A و A'' دوران یکدیگر به مرکز O و زاویه $180^\circ = 2 \times 90^\circ$ هستند، (به عبارتی A'' بازتاب A نسبت به نقطه O است)، یعنی:

$$O = \frac{A + A''}{2} \Rightarrow A'' = 2O - A \Rightarrow A'' = 2(2, -3) - (3, 4) \Rightarrow A'' = (1, -10) \\ \Rightarrow x_{A''} \times y_{A''} = -10$$

تبدیل‌های هندسی

۱. **بازتاب محوری:** تصویر هر نقطه مانند A در بازتاب نسبت به محور d ، نقطه‌ای است که فاصله‌اش تا محور d با فاصله A تا d برابر است و d عمودمنصف پاره‌خط نقطه و تصویر آن است. یعنی برای یافتن تصویر A در بازتاب نسبت به خط d ، از A بر d عمود می‌کنیم و به اندازه خودش امتداد می‌دهیم.

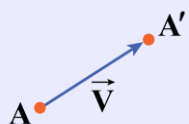


ویژگی‌های بازتاب محوری:

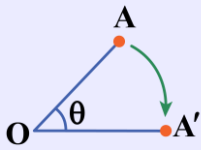
۱) ترکیب دو بازتاب محوری با محورهای موازی یک انتقال است.

۲) ترکیب دو بازتاب با محورهایی که با هم زاویه θ می‌سازند و در نقطه O متقاطع‌اند یک دوران به مرکز O و زاویه 2θ است.

۳. **انتقال:** تصویر هر نقطه از صفحه تحت انتقال با بردار $\vec{V}$ نقطه‌ای مانند A' است به طوری که $\vec{AA'} = \vec{V}$.



۳. دوران: تبدیلی است که با نقطه ثابت به نام مرکز دوران و یک زاویه جهت دار به نام زاویه دوران مشخص می شود. دوران نقطه A نسبت به مرکز دوران O و با زاویه θ (ساعتگرد یا پادساعتگرد) نقطه ای مانند A' است به طوری که:



$$OA = OA'$$

$$\angle AOA' = \theta$$



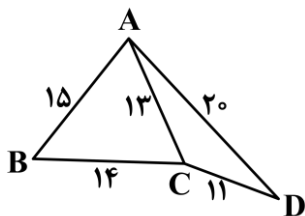
دوران 180° همان **بازتاب** نسبت به نقطه O است.

۴. تجانس: تبدیلی که توسط یک نقطه ثابت به نام **مرکز تجانس** و عددی حقیقی و ناصفر مثل k به نام **نسبت تجانس** مشخص می شود. A' تصویر A تحت تجانس به مرکز O و نسبت k است، اگر:

۱) A', A, O روی یک خط باشند.

$$|OA'| = k|OA| \quad (۲)$$

۳) اگر $k > 0$ ، A و A' در یک طرف O و اگر $k < 0$ ، A و A' در طرفین O اند.



۳۲- مساحت چهارضلعی مقعر ABCD برابر کدام است؟

۱) ۱۴۷

۲) ۱۵۰

۳) ۱۵۴

۴) ۱۵۲

(آسان - محاسباتی - استاندارد) - هندسه ۲ صفحه ۷۳ - ۱۱۰۳

پاسخ: گزینه ۲

مساحت هر دو مثلث ABC و ACD را به کمک قضیه هرون به دست می آوریم.

$$P_{\triangle ABC} = \frac{15 + 14 + 13}{2} = 21$$

$$S_{\triangle ABC} = \sqrt{P(P-a)(P-b)(P-c)} = \sqrt{21(21-15)(21-14)(21-13)} = \sqrt{21 \times 6 \times 7 \times 8} = \sqrt{21 \times 21 \times 16} = 21 \times 4 = 84$$

$$P_{\triangle ACD} = \frac{20 + 13 + 11}{2} = 22$$

$$S_{\triangle ACD} = \sqrt{P(P-a)(P-b)(P-c)} = \sqrt{22(22-20)(22-13)(22-11)} = \sqrt{22 \times 2 \times 9 \times 11} = \sqrt{22 \times 22 \times 9} = 22 \times 3 = 66$$

بنابراین:

$$S_{ABCD} = S_{\triangle ABC} + S_{\triangle ACD} = 84 + 66 = 150$$

قضیه هرون

مساحت مثلثی به اضلاع a, b, c برابر است با:

$$S = \sqrt{P(P-a)(P-b)(P-c)}$$

به طوری که در آن P نصف محیط مثلث است.



۳۳- اگر $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 4 & a+5 \\ a-1 & 6 & -1 \end{vmatrix} = 0$ و $AB = \begin{bmatrix} a-8 & 2 \\ a+1 & 3 \end{bmatrix}$ ، آنگاه حاصل ضرب درایه‌های غیرواقع بر قطر اصلی ماتریس

$$A \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -6 & 3 \end{bmatrix} B - A \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -6 & 2 \end{bmatrix} B$$

۲۰ (۴)

۱۵ (۳)

۳ (۲)

۱۲ (۱)

(سخت - ترکیبی - زمان ۵) - هندسه ۳ صفحه ۲۸ - ۱۲۰۱

پاسخ: گزینه ۴

ابتدا دترمینان داده شده را بر حسب سطر اول محاسبه می‌کنیم:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 4 & a+5 \\ a-1 & 6 & -1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow 1(-1)^2 \begin{vmatrix} 4 & a+5 \\ 6 & -1 \end{vmatrix} + 2(-1)^3 \begin{vmatrix} -2 & a+5 \\ a-1 & -1 \end{vmatrix} + 3(-1)^4 \begin{vmatrix} -2 & 4 \\ a-1 & 6 \end{vmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow 1(-4-6a-30) - 2(2-a^2-4a+5) + 3(-12-4a+4) = 0$$

$$\Rightarrow -34-6a+2a^2+8a-14-24-12a=0 \Rightarrow 2a^2-10a-72=0$$

$$\xrightarrow{\div 2} a^2-5a-36=0 \Rightarrow (a-9)(a+4)=0 \Rightarrow a=9, a=-4$$

طبق فرض سؤال، $a > 0$ است، پس $a=9$ قابل قبول است، بنابراین:

$$AB = \begin{bmatrix} a-8 & 2 \\ a+1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 10 & 3 \end{bmatrix}$$

اکنون در عبارت خواسته شده از سمت چپ از A و از سمت راست از B فاکتور می‌گیریم:

$$A \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -6 & 3 \end{bmatrix} B - A \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -6 & 2 \end{bmatrix} B = A \left(\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -6 & 3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -6 & 2 \end{bmatrix} \right) B = A \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} B = AIB = AB = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 10 & 3 \end{bmatrix}$$

بنابراین حاصل ضرب درایه‌های غیرواقع بر قطر اصلی این ماتریس برابر $2 \times 10 = 20$ است.

اعمال روی ماتریس‌ها

۱) جمع و تفریق ماتریس‌ها: برای جمع کردن (تفریق کردن) دو ماتریس هم‌مرتبه A و B کافی است درایه‌ها را **نظیر به نظیر** با هم جمع (تفریق) کنیم.

۲) ضرب ماتریس سطری در ستونی:

$$\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} = a_1b_1 + a_2b_2 + \dots + a_nb_n$$

۳) ضرب دو ماتریس: برای ضرب دو ماتریس $A_{(m \times n)} \times B_{(n \times k)}$ که **تعداد ستون** ماتریس اول (A) با **تعداد سطر** ماتریس دوم (B) برابر است، کافی است سطر i ام A را در ستون j ام B ضرب کنیم و عدد حاصل را در درایه C_{ij} ام از ماتریس حاصل ضرب بنویسیم.

نکات ضرب و جمع ماتریس‌ها

$$I_n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

حاصل ضرب ماتریس همانی

I_n در هر ماتریس مربعی مرتبه n برابر با خود ماتریس است.

۱) $AI = IA = A$

۲) $A + \bar{0} = \bar{0} + A = A$

- ۳) $A + B = B + A$
 ۴) $A(B + C) = AB + AC$
 ۵) $A(BC) = (AB)C$

دترمینان ماتریس های 3×3 

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = (-1)^{1+1} a \begin{vmatrix} e & f \\ h & i \end{vmatrix} + (-1)^{1+2} b \begin{vmatrix} d & f \\ g & i \end{vmatrix} + (-1)^{1+3} c \begin{vmatrix} d & e \\ g & h \end{vmatrix}$$

دترمینان بالا حول سطر اول نوشته شده، این کار را روی هر سطر یا ستون دلخواه دیگری نیز می توان انجام داد به طوری که هر درایه آن سطر و ستون را در $(-1)^{i+j}$ می کنیم (که i و j سطر و ستون مربوط به آن درایه است) و حاصل را در دترمینان ماتریسی که از حذف سطر i ام و ستون j ام به دست می آید ضرب می کنیم. در نهایت سه عدد به دست آمده را با هم جمع می کنیم.



۳۴- ماتریس A در تساوی های $A = \begin{bmatrix} |A| & 2 \\ |A| & |A|+1 \end{bmatrix}$ و $\frac{1}{2}AB = A^{-1}$ صدق می کند. مجموع درایه های ماتریس B برابر کدام است؟

$\frac{3}{2}$ (۱) -2 (۲) $\frac{1}{2}$ (۳) -1 (۴)

(متوسط - ترکیبی - استاندارد) - هندسه ۳ صفحه ۲۸ - ۱۲۰۱

پاسخ: گزینه ۳ 

ابتدا دترمینان A را به دست می آوریم:

$$A = \begin{bmatrix} |A| & 2 \\ |A| & |A|+1 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{از طرفین دترمینان می گیریم}} |A| = \begin{vmatrix} |A| & 2 \\ |A| & |A|+1 \end{vmatrix}$$

$$|A| = |A|^2 + |A| - 2|A| \Rightarrow |A|^2 - 2|A| = 0 \Rightarrow |A|(|A| - 2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} |A| = 0 \\ |A| = 2 \end{cases}$$

چون ماتریس A^{-1} در این سؤال وجود دارد، پس A وارون پذیر است، بنابراین $|A| \neq 0$ و $|A| = 2$ داریم:

$$A = \begin{bmatrix} |A| & 2 \\ |A| & |A|+1 \end{bmatrix} \xrightarrow{|A|=2} A = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{2} & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

اکنون با ضرب کردن A^{-1} در طرفین تساوی $\frac{1}{2}AB = A^{-1}$ از سمت چپ ماتریس B را پیدا می کنیم.

$$\frac{1}{2}AB = A^{-1} \xrightarrow{A^{-1} \times} \frac{1}{2}B = (A^{-1})^2 \Rightarrow \frac{1}{2}B = \begin{bmatrix} \frac{3}{2} & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{3}{2} & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}B = \begin{bmatrix} \frac{13}{4} & -\frac{5}{2} \\ -\frac{5}{2} & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{2 \times} B = \begin{bmatrix} \frac{13}{2} & -5 \\ -5 & 4 \end{bmatrix}$$

بنابراین مجموع درایه های ماتریس B برابر $\frac{13}{2} - 5 + 4 = \frac{1}{2}$ است.

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \Rightarrow |A| = ad - bc$$

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

به وضوح شرط وارون پذیری ماتریس این است که دترمینان آن ناصفر باشد.



اگر A^{-1} وارون ماتریس A باشد، آن گاه: $|A| \neq 0$

و به علاوه داریم: $AA^{-1} = A^{-1}A = I$



۳۵- نقطه $(0, m)$ و مبدأ مختصات، کانون های یک بیضی بوده و $(-3, 0)$ یک نقطه واقع بر این بیضی است. اگر خروج از مرکز این بیضی

$\frac{1}{\sqrt{2}}$ باشد، آن گاه چند قطر به طول صحیح در این بیضی وجود دارد؟ ($m > 0$)

۸ (۴)

۷ (۳)

۶ (۲)

۴ (۱)

(سخت - مفهومی - زمان بر) - هندسه ۳ صفحه ۴۹ - ۱۲۰۲

پاسخ: گزینه ۳

کانون های این بیضی $F(0, 0)$ و $F'(0, m)$ هستند، در نتیجه چون طول هایشان یکسان است، بیضی قائم است و داریم:

$$FF' = 2c \Rightarrow m = 2c \Rightarrow c = \frac{m}{2} \quad (1)$$

$$A(-3, 0) \in \text{بیضی} \Rightarrow AF + AF' = 2a \Rightarrow 3 + \sqrt{9 + m^2} = 2a \quad (2)$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{c}{a} \Rightarrow \frac{c}{a} = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow a = c\sqrt{2} \xrightarrow{2 \times} 2a = 2\sqrt{2}c \xrightarrow{\text{از (1), (2)}} 3 + \sqrt{9 + m^2} = \sqrt{2}m$$

$$\Rightarrow \sqrt{9 + m^2} = \sqrt{2}m - 3 \xrightarrow{\text{توان ۲}} 9 + m^2 = 2m^2 + 9 - 6\sqrt{2}m$$

$$\Rightarrow m^2 - 6\sqrt{2}m = 0 \Rightarrow m(m - 6\sqrt{2}) = 0 \Rightarrow m = 0 \text{ یا } m = 6\sqrt{2}$$

مسلماً $m = 0$ قابل قبول نیست زیرا به ازای $m = 0$ به کانون $F'(0, 0)$ می رسیم که همان کانون F است، پس $m = 6\sqrt{2}$ قابل قبول است و بنابراین:

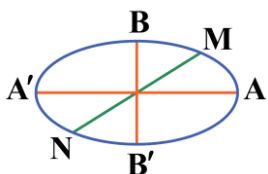
$$c = 3\sqrt{2}, a = 6$$

$$\Rightarrow b^2 = a^2 - c^2 \Rightarrow b^2 = 36 - 18 \Rightarrow b^2 = 18 \Rightarrow b = 3\sqrt{2}$$

پس اقطار این بیضی $2a = 12$ و $2b = 6\sqrt{2}$ هستند. در نتیجه طول سایر قطرهای بیضی مثل MN بین این دو قطر قرار دارند، یعنی:

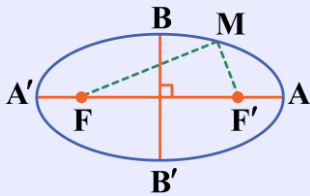
$$2b \leq MN \leq 2a \Rightarrow 6\sqrt{2} \leq MN \leq 12$$

عدد $6\sqrt{2}$ حدوداً برابر 8.5 است، پس قطرهای این بیضی در فاصله بین 8.5 و 12 قرار دارند. در این فاصله دو قطر به طول ۹ و دو قطر به طول ۱۰ و دو قطر به طول ۱۱ و فقط یک قطر به طول ۱۲ وجود دارد، پس در مجموع ۷ قطر به طول صحیح در این بیضی وجود دارد.





بیضی مکان هندسی همه نقاطی از صفحه است به طوری که مجموع فواصل آن نقاط از دو نقطه ثابت به نام کانون‌های بیضی F و F' برابر با مقدار ثابت $2a$ باشد.



$$MF + MF' = 2a$$

و فاصله F و F' را **فاصله کانونی بیضی** می‌گویند.

$$FF' = 2c$$

در هر بیضی **قطر بزرگ** آن که **در راستای کانون‌های بیضی** است (AA') برابر با $2a$ و **قطر کوچک** آن که **عمود بر محور کانونی** است و از مرکز بیضی $(O = \frac{F + F'}{2})$ می‌گذرد برابر با $BB' = 2b$ است، به طوری که:

$$a^2 = b^2 + c^2$$

خروج از مرکز

مقدار عددی $e = \frac{c}{a}$ را خروج از مرکز بیضی می‌گویند و هر چه **به صفر نزدیک‌تر** باشد بیضی **به دایره شبیه‌تر** است، همچنین هر چه **به یک نزدیک‌تر** باشد بیضی **به پاره‌خط شبیه‌تر** است.



۳۶- دو بردار $\vec{a} = (1, -4, m+1)$ و $\vec{b} = (4, 5, 3-m)$ دو ضلع یک لوزی هستند. حجم متوازی السطوحی که بر بردارهای $\vec{a}$ ، $\vec{b}$ و $\frac{1}{3} \vec{a} \times \vec{b}$ ساخته می‌شود، چقدر است؟

۳۴۲ (۴)

۳۶۱ (۳)

۴۲۰ (۲)

۴۴۱ (۱)

(متوسط - خط به خط - استاندارد) - هندسه ۳ صفحه ۸۳ - ۱۲۰۳

پاسخ: گزینه ۱

دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ موازی نیستند زیرا نسبت مختصات این دو بردار برابر نیست:

$$\frac{4}{1} \neq \frac{5}{-4}$$

پس بردارهای $\vec{a}$ و $\vec{b}$ دو ضلع مجاور لوزی هستند و طول این دو بردار برابر است:

$$|\vec{a}| = |\vec{b}| \Rightarrow \sqrt{1 + 16 + (m+1)^2} = \sqrt{16 + 25 + (3-m)^2}$$

$$\xrightarrow{\text{توان ۲}} 17 + m^2 + 1 + 2m = 16 + 25 + 9 + m^2 - 6m \Rightarrow 8m = 32 \Rightarrow m = 4$$

پس $\vec{a} = (1, -4, 5)$ و $\vec{b} = (4, 5, -1)$

از طرف دیگر، حجم متوازی السطوحی که با بردارهای $\vec{a}$ و $\vec{b}$ و $\frac{1}{3} \vec{a} \times \vec{b}$ ساخته می‌شود برابر با $\left| \frac{1}{3} (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot (\vec{a} \times \vec{b}) \right|$ یعنی مساوی $\frac{1}{3} |\vec{a} \times \vec{b}|^2$

است. پس:

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -4 & 5 \\ 4 & 5 & -1 \end{vmatrix} = -21\vec{i} + 21\vec{j} + 21\vec{k}$$

$$\text{حجم} = \frac{1}{3} |\vec{a} \times \vec{b}|^2 = \frac{1}{3} (21^2 + 21^2 + 21^2) = \frac{1}{3} \times 3 \times 21^2 = 21^2 = 441$$



اندازه بردار:

$$\vec{v} = (v_1, v_2, v_3) \Rightarrow |\vec{v}| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2}$$

ضرب عدد در بردار:

$$k\vec{v} = (kv_1, kv_2, kv_3)$$

تفریق و جمع بردارها:

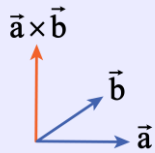
$$\vec{a} \pm \vec{b} = (a_1, a_2, a_3) \pm (b_1, b_2, b_3) = (a_1 \pm b_1, a_2 \pm b_2, a_3 \pm b_3)$$

ضرب داخلی دو بردار:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = (a_1, a_2, a_3) \cdot (b_1, b_2, b_3) = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \theta$$

(θ زاویه بین دو بردار است.)

ضرب خارجی دو بردار: برداری است عمود بر صفحه دو بردار و برابر است با:



$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$$

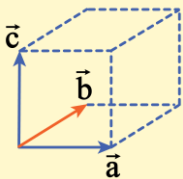
نکات ضرب خارجی

$$|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}| |\vec{b}| \sin \theta$$

$$\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$$

حجم متوازی السطوح

حجم متوازی السطوحی که روی بردارهای a, b, c بنا می‌شود برابر است با:



$$V = |\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c})| = |\vec{b} \cdot (\vec{a} \times \vec{c})| = |\vec{c} \cdot (\vec{a} \times \vec{b})|$$

توجه!

حجم هر متوازی السطوحی برابر حاصل ضرب مختلط سه یال هم‌رس آن است و ترتیب قرار گرفتن این یال‌ها در ضرب مختلط مهم نیست، یعنی:

$$\text{حجم} = \left| \frac{1}{3} (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot (\vec{a} \times \vec{b}) \right| = \left| \vec{a} \cdot \left(\left(\frac{1}{3} \vec{a} \times \vec{b} \right) \times \vec{b} \right) \right|$$



۳۷- اگر باقی مانده تقسیم x بر ۴ برابر ۳ و باقی مانده تقسیم x بر عدد ۱۲ هر سه مقدار a, b و c را بتواند بپذیرد به گونه‌ای که $a < b < c$ باشد، باقی مانده a^{bc} بر عدد ۸۰ کدام است؟

(۴) ۷۷

(۳) ۵۵

(۲) ۲۱

(۱) ۳

(متوسط - ترکیبی - استاندارد) - گسسته صفحه ۱۵ - ۱۲۰۱

پاسخ: گزینه ۱

$$x = 4q + 3 \Rightarrow \begin{cases} q = 3t & : x = 12t + 3 \\ q = 3t + 1 & : x = 12t + 7 \\ q = 3t + 2 & : x = 12t + 11 \end{cases}$$

بنابراین $a = 3$ ، $b = 7$ و $c = 11$ است و داریم:

$$3^{77} \equiv ?^{80}$$

ابتدا توانی از ۳ را می‌یابیم که به پیمانه ۸۰ کوچک شود. بلافاصله می‌دانیم که:

$$3^4 = 81 \equiv 1^{80}$$

حال با استفاده از تقسیم کردن ۷۷ بر ۴، توان ۷۷ را می‌سازیم، از آن‌جا که $77 = 4 \times 19 + 1$ داریم:

$$3^{77} = (3^4)^{19} \times 3$$

$$(3^4)^{19} \equiv 1^{19} \equiv 1 \Rightarrow 3 \times (3^4)^{19} \equiv 3^{80}$$

قضیه تقسیم و هم‌نهشتی

قضیه تقسیم: در تقسیم عدد صحیح a بر عدد طبیعی b ، اگر خارج قسمت q و باقی‌مانده r باشد، داریم:

$$\begin{array}{l} a \overline{) b} \\ q \Rightarrow a = bq + r ; 0 \leq r < b \\ r \end{array}$$

در واقع باقی‌مانده (r) یکی از اعداد ۰ یا ۱ یا ۲ یا ... یا $(b-1)$ می‌تواند باشد.

هم‌نهشتی: اگر دو عدد a و b در تقسیم بر m دارای باقی‌مانده یکسان r باشند، می‌گوییم در پیمانه m هم‌نهشت‌اند و می‌نویسیم:

$$\begin{array}{c} m \\ a \equiv b \end{array}$$

در واقع a و b متعلق به یک کلاس هم‌نهشتی‌اند:

$$a, b \in [r]_m = \{x \mid x = mq + r\}$$

کلاس‌های هم‌نهشتی

به ازای هر $m \in \mathbb{N}$ ، تعداد کلاس‌های هم‌نهشتی در پیمانه m برابر m است:

$$[0]_m, [1]_m, \dots, [m-1]_m$$

بر این اساس هر عدد صحیح مانند a به یکی از شکل‌های زیر است:

$$a = mq \text{ یا } a = mq + 1 \text{ یا } \dots \text{ یا } a = mq + (m-1)$$

ویژگی‌های هم‌نهشتی

$$1) \quad a \equiv b \Rightarrow m \mid b - a$$

$$۲) a \equiv b \Rightarrow \begin{cases} a + mq \equiv b \\ a \equiv b + mq' \end{cases}$$

$$۳) a \equiv b \Rightarrow \begin{cases} a + c \equiv b + c \\ ac \equiv bc \end{cases}$$

$$۴) ac \equiv bc \xrightarrow{(m,c)=d} a \equiv b \xrightarrow{\text{نتیجه}} ac \equiv bc \xrightarrow{(m,c)=1} a \equiv b$$

$$۵) a \equiv b \Rightarrow a^n \equiv b^n$$

$$۶) a \equiv b, b \equiv c \Rightarrow a \equiv c$$

$$۷) a \equiv b, a \equiv b \Rightarrow a \equiv b \pmod{[m,m']}$$



۳۸- در گراف ناهمبند G با حداقل تعداد رئوس، همواره $|N_G[v_i]| = 5$ برقرار است. این گراف از راست به چپ چند مجموعه

احاطه‌گر دارد و عدد احاطه‌گری آن کدام است؟

۴-۹۶۱ (۴)

۴-۱۰۲۴ (۳)

۲-۱۰۲۴ (۲)

۲-۹۶۱ (۱)

(متوسط - مفهومی/ترکیبی - استاندارد) - گسسته صفحه ۴۴ - ۱۲۰۲

پاسخ: گزینه ۱

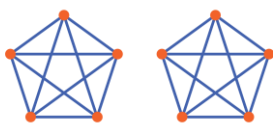
برای هر رأس داریم:

$$|N_G[v_i]| = 5 \Rightarrow |N_G[v_i]| = \deg(v_i) + 1 = 5$$

$$\Rightarrow \deg(v_i) = 4$$

یعنی هر رأس باید به ۴ رأس دیگر وصل باشد.

لذا گراف، ۴- منتظم و ناهمبند و به صورت زیر است:



می‌دانیم که عدد احاطه‌گری K_5 برابر ۱ است و چون گراف دو بخش دارد، برای احاطه کل گراف باید حداقل ۱ رأس از هر بخش انتخاب شود، پس:

$$\gamma(G) = 1 + 1 = 2$$

از طرفی در گراف K_p هر زیرمجموعه ناتهی از رئوس، یک مجموعه احاطه‌گر است که تعداد آن برابر با $(2^p - 1)$ است، لذا در گراف فوق داریم:

$$\text{تعداد مجموعه‌های احاطه‌گر} = (2^5 - 1)(2^5 - 1) = 31 \times 31 = 961$$

گراف همبند و ناهمبند

گراف G را همبند می‌گوییم اگر به ازای هر دو رأس دلخواه مسیری بین این دو رأس وجود داشته باشد.

گرافی که همبند نباشد، ناهمبند است.

گراف منتظم و کامل: به گرافی که درجه همه رأس‌های آن r باشد، گراف r -منتظم می‌گویند.

در گراف از مرتبه p ، اگر $r = p - 1$ باشد، یعنی هر رأس به همه رأس‌های دیگر وصل شده باشد، آن‌گاه این گراف منتظم را **گراف کامل** می‌گویند و آن را با K_p نشان می‌دهند.

همسایگی گراف

اگر v_i یک رأس از گراف G باشد همسایگی باز v_i یعنی $N_G(v_i)$ مجموعه همه رؤوس G است که با v_i **یال مشترک** دارند یعنی با v_i مجاورند. $N_G[v_i] = N_G(v_i) \cup \{v_i\}$ همسایگی بسته v_i است و برابر است با:

مجموعه‌های احاطه‌گر

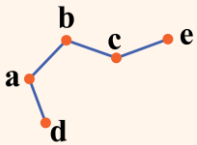
مجموعه A زیرمجموعه مجموعه رؤوس G را یک مجموعه احاطه‌گر می‌گویند اگر هر رأس دلخواه از G یا **در A باشد** یا **با رأسی از A مجاور** باشد.

- ۱) مجموعه احاطه‌گر با **کمترین تعداد عضو** را مجموعه **احاطه‌گر مینیمم** می‌گویند و تعداد اعضای آن را **عدد احاطه‌گری گراف** می‌نامند.
- ۲) مجموعه احاطه‌گری که با حذف عضوی از آن دیگر احاطه‌گر نباشد را، مجموعه احاطه‌گر **مینیمال** می‌گویند.

هر مینیممی مینیماله ولی برعکس نه!

واضح است که مجموعه‌های احاطه‌گر مینیمم، مینیمال هم هستند ولی لزوماً مجموعه‌های احاطه‌گر مینیمال، مینیمم نیستند.

یه نمونه باحال ببین!



مجموعه‌های احاطه‌گر: $\{a, b, c, d, e\}, \{a, b, d, e\}, \{a, d, c, e\}, \{b, c, d, e\}, \dots, \{a, c\}$

مجموعه‌های احاطه‌گر مینیمال: $\{d, b, e\}, \{a, c\}, \{d, c\}, \{a, e\}$

$\Rightarrow$ عدد احاطه‌گری = ۲: مجموعه‌های احاطه‌گر مینیمم $\{a, c\}, \{d, c\}, \{a, e\}$

احاطه‌گرهای گراف کامل

در گراف K_p هر رأس یک مجموعه **احاطه‌گر مینیمم** است، پس عدد احاطه‌گری برابر با ۱ است و هر زیرمجموعه **نا تهی** از رؤوس مجموعه‌ای **احاطه‌گر** است.



۳۹- از بین اعداد طبیعی دو رقمی، عددی را به تصادف انتخاب می‌کنیم. با کدام احتمال اگر به جای m در رابطه $mx + 24y = 18$ قرار گیرد، معادله سیاله در مجموعه اعداد صحیح جواب دارد؟

$$\frac{11}{45} \quad (4)$$

$$\frac{34}{45} \quad (3)$$

$$\frac{23}{45} \quad (2)$$

$$\frac{11}{15} \quad (1)$$

(سخت - مفهومی - زمان‌بر) - گسسته صفحه ۷۳ - ۱۲۰۳

پاسخ: گزینه ۳

شرط آن که معادله سیاله جواب داشته باشد، آن است که:

$$(m, 24) | 18$$

$$\downarrow \quad \downarrow$$

$$2^3 \times 3 \quad 3^2 \times 2$$

برای این که ب.م.م ۲۴ و m ، ۱۸ را عاد کند باید یکی از شمارنده‌های ۱۸ باشد. برای آن با توجه به تجزیه ۱۸ و ۲۴ باید m مضرب ۴ نباشد:

$$22 = 24 - 2 = \left[\frac{99}{4} \right] - \left[\frac{9}{4} \right] = \text{تعداد اعداد دو رقمی مضرب ۴}$$

$$68 = 90 - 22 = \text{تعداد اعداد دو رقمی که مضرب ۴ نیستند}$$

پس احتمال موردنظر برابر است با:

$$P = \frac{68}{90} = \frac{34}{45}$$

معادله سیاله

معادله $ax + by = c$ را یک معادله سیاله خطی می‌گویند. منظور از حل معادله سیاله یافتن x و y های صحیحی است که به‌ازای آن‌ها تساوی داده شده برقرار باشد.

جواب معادله سیاله

شرط آن که معادله سیاله $ax + by = c$ دارای جواب باشد آن است که:

$$(a, b) | c$$

b

برای حل معادله سیاله، معادله همنهشتی $ax \equiv c$ را حل می‌کنیم و با یافتن جواب‌های عمومی x ، آن را در معادله قرار می‌دهیم و جواب‌های عمومی y را می‌یابیم.

یه نمونه باحال ببین!

$$\begin{aligned} 3x + 4y &= 5 \xrightarrow{(3,4)|5} \text{معادله جواب دارد} \\ 3x &\equiv 5 \pmod{4} \xrightarrow{(3,4)=1} x \equiv 3 \pmod{4} \Rightarrow x = 4k + 3; (k \in \mathbb{Z}) \\ 3x + 4y &= 5 \xrightarrow{x=4k+3} 3(4k+3) + 4y = 5 \Rightarrow 12k + 9 + 4y = 5 \\ \Rightarrow 4y &= -12k - 4 \xrightarrow{\div 4} y = -3k - 1 \end{aligned}$$

اعداد طبیعی بخش‌پذیر بر k

تعداد اعداد طبیعی کوچک‌تر یا مساوی n که بر k بخش‌پذیرند برابر است با:

$$\left[\frac{n}{k} \right]$$



۴۰- ۶ نفر با نام‌های $\{a, b, c, d, e, f\}$ به چند حالت در سه هتل کوروش، استقلال و هما می‌توانند اقامت داشته باشند، به‌طوری‌که هیچ هتلی خالی نماند و بدانیم f هتل کوروش نمی‌رود و b نیز هتل هما نمی‌رود؟

۳۱۰ (۴)

۲۴۵ (۳)

۱۸۰ (۲)

۳۶۰ (۱)

(متوسط - مفهومی - استاندارد) - گسسته صفحه ۷۸ - ۱۲۰۳

پاسخ: گزینه ۳

بررسی سریع:

می‌توانیم مستقیماً هنگام شمارش توابع پوشا مانند h از $\{a, b, c, d, e, f\}$ به $\{K, E, H\}$ شروط $h(b) \neq H$ و $h(f) \neq K$ را لحاظ کنیم:

ابتدا تعداد کل توابع پوشا را می‌یابیم. اگر H', E', K' به ترتیب توابعی باشند که K را نمی‌پوشانند (یعنی هتل کوروش خالی بماند)، E را نمی‌پوشانند (یعنی هتل استقلال خالی بماند) و H' را نمی‌پوشانند (یعنی هتل هما خالی بماند)، داریم:

$$|K' \cup E' \cup H'| = |K'| + |E'| + |H'| - |K' \cap E'| - |K' \cap H'| - |E' \cap H'| + |K' \cap E' \cap H'|$$

$$= 2^6 \times 3 - 1^6 \times 3 + 0 = 189$$

$$\text{تعداد توابع پوشا} = 2^6 - 189 = 540$$

تعداد کل توابع

حال تعریف می‌کنیم:

$A: h(f) = K$ توابع پوشا که

توابع پوشا که $B: h(b) = H$

بنابراین توابع موردنظر برابر با $(A' \cap B')$ اند و داریم:

$$|A' \cap B'| = |(A \cup B)'| = |\text{کل توابع پوشا}| - |A \cup B| \quad (*)$$

از طرفی داریم:

$$|A| = |h(f) = K| \text{ کل توابعی که } |h(f) = K| \text{ توابع غیر پوشا که } h(f) = K \\ = 3^5 - (2^5 + 2^5 - 1^5) = 243 - 63 = 180$$

به طور مشابه داریم:

$$|B| = 180$$

و همچنین:

$$|A \cap B| = |h(f) = K, h(b) = H| \text{ کل توابعی که } |h(f) = K, h(b) = H| \text{ توابع غیر پوشا که } h(f) = K, h(b) = H \\ = 3^4 - 2^4 = 81 - 16 = 65$$

بنابراین:

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B| = 180 + 180 - 65 = 295 \\ 540 - 295 = 245$$

حال با توجه به رابطه $(*)$ ، مطلوب مسئله برابر است با:

 اصل شمول و عدم شمول

$$۱) |A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$$

$$۲) |A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|$$

$$۳) |A'| = (\text{تعداد کل}) - |A|$$

 تعداد توابع پوشا

برای یافتن تعداد توابع پوشا، از تعداد کل توابع، توابع غیرپوشا را حذف می‌کنیم.





برای دیدن پاسخنامه ویدئویی آزمون
QR Code بالا را اسکن یا روی آن کلیک کنید!

جامع شبیه‌ساز کنکور سراسری

بودجه‌بندی
این آزمون

۴۱- تپ‌های الکترومغناطیسی را که با سرعت نور در فضا حرکت می‌کنند، به طرف ماهواره موردنظر می‌فرستند و بازتاب آن توسط ایستگاه زمینی دریافت می‌شود. اگر زمان رفت و برگشت یک تپ $0/24^\circ$ ثانیه باشد، فاصله ماهواره از ایستگاه زمینی، چند یکای نجومی است؟ (نور فاصله زمین تا خورشید را در مدت ۸ دقیقه طی می‌کند.)

(۱) $2/5 \times 10^{-4}$ (۲) 5×10^{-4} (۳) $2/5 \times 10^{-3}$ (۴) 5×10^{-3}

(آسان - محاسباتی - سریع - صفحه ۱۳ - ۱۲۰۱)

پاسخ: گزینه ۱

مدت زمان رفت و برگشت یک تپ $0/24^\circ$ ثانیه است؛ بنابراین زمان رفت آن برابر $\Delta t = \frac{0/24}{2} = 0/12$ است. حال با یک تناسب ساده، فاصله‌ای که تپ در این مدت طی می‌کند را برحسب یکای نجومی (AU) محاسبه می‌کنیم:

زمان	مسافت
8×60 s	1 AU
$0/12$ s	x AU

$$\Rightarrow x = \frac{1 \times 0/12}{8 \times 60} = 2/5 \times 10^{-4} \text{ AU}$$

راهنمای مسیرت

بچه‌ها این تمرین کتاب درسی رو با تبدیل یکا براتون ترکیب کردیم تا ایده طراحی چنین تپ‌هایی رو در ذهنتون داشته باشین و سر جلسه کنکور سوپرایز نشین.

آنچه گذشت...

بچه‌ها امیدوارم حواستون باشه که یکای نجومی، میانگین فاصله زمین تا خورشید است و با AU نشان داده می‌شود.



۴۲- معادله مکان - زمان متحرکی در SI به صورت $x = -2t^2 + 24t - 13$ است. به ترتیب، در کدام لحظه و در کدام مکان، سرعت

متحرک برابر $-4 \frac{m}{s}$ می‌شود؟

(۱) $x = 57m, t = 7s$ (۲) $x = 57m, t = 5s$ (۳) $x = 83m, t = 7s$ (۴) $x = 83m, t = 5s$

(آسان - محاسباتی - استاندارد - صفحه ۱۷ - ۱۲۰۱)

پاسخ: گزینه ۱

گام اول

ابتدا معادله سرعت - زمان را به دست می‌آوریم:

$$\begin{cases} x = \frac{1}{2}at^2 + v_0t + x_0 \\ x = -2t^2 + 24t - 13 \end{cases} \Rightarrow a = -4 \frac{m}{s^2}, v_0 = 24 \frac{m}{s}$$

$$v = at + v_0 \Rightarrow v = -4t + 24$$

گام دوم

لحظه‌ای که سرعت متحرک برابر $v = -4 \frac{m}{s}$ می‌شود را به دست می‌آوریم:

$$v = -4t + 24 \Rightarrow -4 = -4t + 24 \Rightarrow t = 7s$$

مکان متحرک را در این لحظه به دست می آوریم:

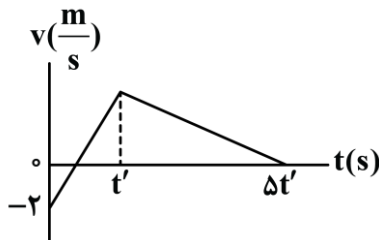
$$x = -2t^2 + 24t - 13 \xrightarrow{t=7s} x = -2 \times (7)^2 + (24 \times 7) - 13$$

$$\Rightarrow x = -98 + 168 - 13 = 57m$$



۴۲- نمودار سرعت - زمان متحرکی که روی محور x حرکت می کند، مطابق شکل است. اگر سرعت متوسط متحرک در t' ثانیه اول

حرکت، $\frac{3}{2} \frac{m}{s}$ باشد، آن گاه سرعت متوسط متحرک در کل حرکت چند متر بر ثانیه است؟

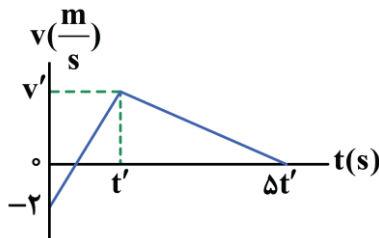


- (۱) ۲/۳
- (۲) ۲/۵
- (۳) ۳/۳
- (۴) ۳/۵

(متوسط - محاسباتی - استاندارد) - صفحه ۱۹ - ۱۲۰۱

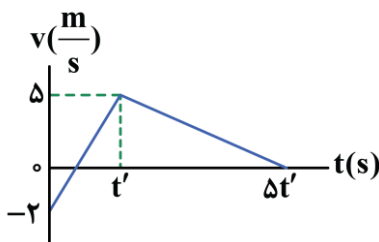
پاسخ: گزینه ۱

در t' ثانیه اول، نمودار سرعت - زمان به صورت خطی است. در نتیجه وسط این خط، برابر با سرعت متوسط در بازه زمانی مورد نظر است. اگر سرعت متحرک در لحظه t' برابر با v' باشد:



$$0 \leq t < t': v_{av1} = \frac{v_0 + v'}{2} \Rightarrow \frac{3}{2} = \frac{-2 + v'}{2} \Rightarrow v' = 5 \frac{m}{s}$$

در نتیجه نمودار سرعت - زمان متحرک به صورت روبه رو می شود. در بازه زمانی t' تا $5t'$ نیز نمودار خطی است. در این بازه نیز وسط خط، برابر با سرعت متوسط در این بازه زمانی است.



$$t' \leq t < 5t': v_{av2} = \frac{5 + 0}{2} = 2.5 \frac{m}{s}$$

اکنون سرعت متوسط کل را به دست می آوریم:

$$v_{av} = \frac{v_{av1} \Delta t_1 + v_{av2} \Delta t_2}{\Delta t_1 + \Delta t_2} = \frac{(1/5 \times t') + (2.5 \times 4t')}{t' + 4t'} = 2/3 \frac{m}{s}$$

راهنمای مسیر

بچه ها برای حل این تست روش های مختلفی وجود داره! ولی ما بهترین روش حل رو برات نوشتیم. پس حتماً به نگاهی به پاسخ نامه بندازین.

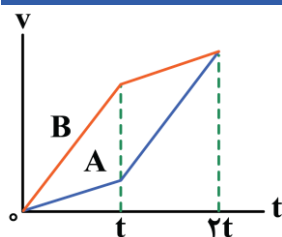


۴۴- دو متحرک A و B از حالت سکون، به طور هم زمان حرکت خود را در جهت محور x شروع می کنند. متحرک A ابتدا مدت زمان t ثانیه با شتاب $\frac{3}{2} \frac{m}{s^2}$ و t ثانیه بعدی را با شتاب $\frac{5}{2} \frac{m}{s^2}$ حرکت می کند. متحرک B نیز مدت زمان t ثانیه با شتاب $\frac{5}{2} \frac{m}{s^2}$ و t ثانیه بعدی را با شتاب $\frac{3}{2} \frac{m}{s^2}$ حرکت می کند. در این صورت در بازه زمانی صفر تا $\frac{3}{2}t$ ، کدام موارد زیر، صحیح هستند؟

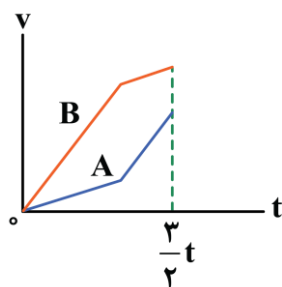
- الف - شتاب متوسط متحرک A از شتاب متوسط متحرک B بیش تر است.
 ب - شتاب متوسط متحرک B از شتاب متوسط متحرک A بیش تر است.
 ج - تندی متوسط متحرک A از تندی متوسط متحرک B بیش تر است.
 د - تندی متوسط متحرک B از تندی متوسط متحرک A بیش تر است.
- (۱) «الف» و «ج» (۲) «الف» و «د» (۳) «ب» و «ج» (۴) «ب» و «د»

پاسخ: گزینه ۴

(سخت - نموداری - استاندارد ۴ - صفحه ۲۱ - ۱۴۰۱)



با توجه به این که شیب نمودار سرعت - زمان، برابر با شتاب متحرک است، برای بررسی راحت تر حرکت، این نمودار را رسم و گزینه ها را بررسی می کنیم.



دقت شود چون هیچ یک از دو متحرک تغییر جهت نداده اند، تندی متوسط و سرعت متوسط برابر می باشند. اکنون لحظه $\frac{3}{2}t$ را روی نمودار مشخص کرده و v_{av} و a_{av} دو متحرک را مقایسه می کنیم.

سرعت اولیه دو متحرک صفر و در لحظه $\frac{3}{2}t$ ، سرعت متحرک B بیش تر از سرعت متحرک A است:

$$a_{av} = \frac{\Delta v}{\Delta t} \xrightarrow{v_0=0, v_B > v_A} (a_{av})_B > (a_{av})_A$$

سطح زیر نمودار سرعت - زمان برابر با جابه جایی است و تا لحظه $\frac{3}{2}t$ ، سطح زیر نمودار B از سطح زیر نمودار A بیش تر است:

$$\Delta x_B > \Delta x_A \Rightarrow (v_{av})_B > (v_{av})_A$$

راهنمای مسیر

اگر فکر کردی این تست سخت هست، پس باید یک نکته مهم رو برات یادآوری کنم. در این تیپ تست ها که باید یک کمیت رو بین دو متحرک مقایسه کنی، حتماً یک نمودار کیفی رسم کن تا گره حل مسئله برات باز بشه.



۴۵- دو گوی هم اندازه A و B به طور هم زمان از ارتفاع یکسانی نسبت به سطح زمین رها می شوند. اگر اندازه نیروی مقاومت هوا برای هر دو گوی در طول مسیر ثابت و ۸۰ درصد کم تر از نیروی وزن گوی A باشد، تندی گلوله A هنگام برخورد به زمین چند برابر تندی گلوله B در لحظه برخورد به زمین است؟ ($m_B = 2m_A$)

- (۱) $\frac{8}{9}$ (۲) $\frac{9}{8}$ (۳) $\frac{\sqrt{2}}{3}$ (۴) $\frac{2\sqrt{2}}{3}$

با نوشتن قانون دوم نیوتون برای هر دو گوی، می‌توانیم نسبت شتاب آن‌ها را به‌دست آوریم:

$$F_{\text{net}} = ma \Rightarrow mg - f_D = ma \Rightarrow a = \frac{mg - f_D}{m}$$

$$\frac{a_A}{a_B} = \frac{\frac{m_A g - f_D}{m_A}}{\frac{m_B g - f_D}{m_B}} \xrightarrow{f_D = 0.2 m_A g, m_B = 2 m_A} \frac{a_A}{a_B} = \frac{\frac{m_A g - 0.2 m_A g}{m_A}}{\frac{2 m_A g - 0.2 m_A g}{2 m_A}} \Rightarrow \frac{a_A}{a_B} = \frac{\frac{0.8 m_A g}{m_A}}{\frac{1.8 m_A g}{2 m_A}} = \frac{0.8}{0.9} = \frac{8}{9}$$

با استفاده از رابطه $v^2 - v_0^2 = 2a\Delta y$ داریم:

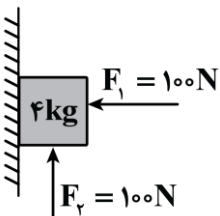
$$\left(\frac{v_A}{v_B}\right)^2 = \frac{a_A}{a_B} \times \frac{\Delta y_A}{\Delta y_B} \xrightarrow{\Delta y_A = \Delta y_B, v_0 = 0} \left(\frac{v_A}{v_B}\right)^2 = \frac{8}{9} \Rightarrow \frac{v_A}{v_B} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$$

آقا ما که نسبت شتاب‌ها رو به‌دست آوردیم رفتیم سراغ معادله $v = at + v_0$. که صفر بود. اها هم که یکیه و تهش گزینه «۱» شد! چجوری اها رو خط زدید مگه باهم می‌رسن؟ وقتی مقاومت هوا دارید و شتاب حرکت به جرم بستگی داره، دو گلوله باهم نمی‌رسن و نمی‌تونید از معادله $v = at + v_0$ استفاده کنید.



۴۶- مطابق شکل زیر، دو نیروی F_1 و F_2 به جسم وارد شده و آن را به حالت سکون نگه داشته‌اند. اگر نیروی F_2 حذف شود، کدام

گزینه صحیح است؟ ($g = 10 \frac{N}{kg}$)



(۱) جسم ساکن می‌ماند.

(۲) جسم رو به پایین شروع به حرکت می‌کند.

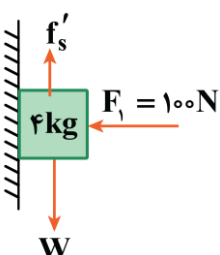
(۳) جسم در آستانه حرکت قرار می‌گیرد.

(۴) نیروی سطح به جسم ثابت می‌ماند.

در حالت اول داریم:

$$F_{\text{net}, y} = 0 \Rightarrow -f_s - mg + F_2 = 0$$

$$\Rightarrow -f_s - 40 + 100 = 0 \Rightarrow f_s = 60 \text{ N} \xrightarrow{f_s \leq f_{s, \text{max}}} f_{s, \text{max}} \geq 60 \text{ N}$$



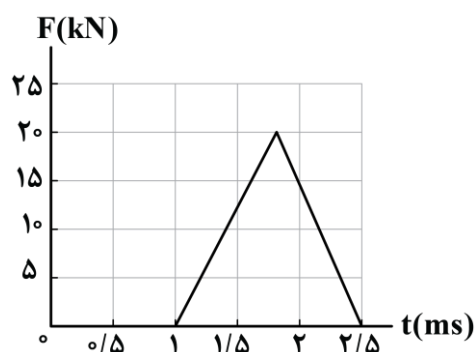
در حالت دوم تنها نیرویی که ممکن است جسم را به حرکت درآورد، نیروی وزن است که چون $40 \text{ N} < 60 \text{ N}$ است، قطعاً جسم ساکن می‌ماند و گزینه (۱) صحیح است.

$$F_{\text{net}, y} = 0 \Rightarrow f'_s = mg = 40 \text{ N}$$

بچه‌ها حواستون باشه که طبق رابطه $R = \sqrt{f_s^2 + F_N^2}$ ، چون F_N ثابت بوده و f_s کاهش یافته است، پس بزرگی نیروی سطح به جسم، کاهش می‌یابد.



۴۷- نمودار نیروی خالص بر حسب زمان برای جسمی به جرم 5 kg که از حال سکون شروع به حرکت می‌کند، مطابق شکل زیر است. به ترتیب از راست به چپ در بازه زمانی $t_1 = 1 \text{ ms}$ تا $t_2 = 2/5 \text{ ms}$ ، نیروی خالص متوسط وارد بر جسم چند نیوتون و کار کل انجام‌شده بر روی جسم چند ژول است؟



(۱) $22/5, 10^4$

(۲) $225, 10^3$

(۳) $225, 10^4$

(۴) $22/5, 10^3$

(متوسط - نموداری - استاندارد) - صفحه ۴۸ - ۱۲۰۲

پاسخ: گزینه ۳

گام اول

می‌دانیم مساحت سطح زیر نمودار نیرو - زمان برابر است با تغییر تکانه (Δp)، پس مساحت سطح زیر نمودار نیرو - زمان در بازه زمانی $t_1 = 1 \text{ ms}$ تا $t_2 = 2/5 \text{ ms}$ را محاسبه می‌کنیم:

$$S = \Delta p = \frac{\text{ارتفاع} \times \text{قاعده}}{2} = \frac{F_{\text{max}} \times \Delta t}{2} = \frac{20 \times 10^3 \text{ N} \times 1/5 \times 10^{-3} \text{ s}}{2}$$

$$S = \Delta p = \frac{1/5 \times 10^{-3} \times 20 \times 10^3}{2} = 15 \frac{\text{kg.m}}{\text{s}}$$

گام دوم

حال نیروی خالص متوسط وارد بر جسم را در بازه زمانی $t_1 = 1 \text{ ms}$ تا $t_2 = 2/5 \text{ ms}$ محاسبه می‌کنیم:

$$F_{\text{av}} = \frac{\Delta p}{\Delta t} = \frac{15 \frac{\text{kg.m}}{\text{s}}}{1/5 \times 10^{-3} \text{ s}} \rightarrow F_{\text{av}} = \frac{15}{1/5 \times 10^{-3}} = 10^4 \text{ N}$$

رفع ابهام 

بچه‌ها شاید فکر کنین بشه با تیزبازی، بیشینه مقدار نمودار مثلثی رو نصف کرد و به نیروی خالص متوسط رسید. ولی خب در ادامه سؤال باز هم مجبوریم مقدار p_2 رو داشته باشیم.

گام سوم

جسم از حال سکون ($v_1 = 0$) شروع به حرکت کرده است، پس تکانه اولیه جسم (p_1) برابر با صفر است؛ بنابراین تغییر تکانه جسم در بازه زمانی t_1 تا t_2 برابر است با تکانه ثانویه جسم (p_2):

$$\Delta p = p_2 - p_1 \xrightarrow{p_1=0} \Delta p = p_2 = 15 \frac{\text{kg.m}}{\text{s}}$$

حال انرژی جنبشی ثانویه جسم (K_2) را با استفاده از تکانه ثانویه جسم (p_2) محاسبه می‌کنیم:

$$K_2 = \frac{p_2^2}{2m} \quad p_2 = 15 \frac{\text{kg.m}}{\text{s}} \quad m = 0.5 \text{ kg} \rightarrow K_2 = \frac{15^2}{2 \times 0.5} = 225 \text{ J}$$

براساس قضیه کار - انرژی جنبشی، کار کل وارد بر جسم را محاسبه می‌کنیم (دقت شود جسم از حال سکون $(v_1 = 0)$ شروع به حرکت کرده است؛ پس انرژی جنبشی اولیه (K_1) آن برابر با صفر است):

$$W_t = \Delta K \Rightarrow W_t = K_2 - K_1 \xrightarrow{K_1=0} W_t = K_2 = 225 \text{ J}$$



۴۸ - گلوله‌ای به جرم 200 g روی دایره‌ای به شعاع 4 m ، تحت تأثیر نیرویی مرکزگرا به بزرگی 18 N ، به طور یکنواخت می‌چرخد. اگر در دو لحظه t_1 و t_2 بردار تکانه گلوله قرینه هم باشد، حداقل مقدار $t_2 - t_1$ چند ثانیه است؟ $(\pi^2 = 10)$

- $\frac{3}{4}$ (۱) $\frac{3}{2}$ (۲) $\frac{2}{3}$ (۳) $\frac{4}{3}$ (۴)

(متوسط - محاسباتی - استاندارد ۵ - صفحه ۵۲ - ۱۲۰۲)

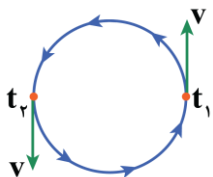
پاسخ: گزینه ۳

کام اول

دوره تناوب گلوله را محاسبه می‌کنیم:

$$F_C = m \times \frac{v^2}{r} = m \times \frac{4\pi^2 r}{T^2} \Rightarrow 18 = 0.2 \times \frac{4 \times 10 \times 4}{T^2}$$

$$\Rightarrow T^2 = \frac{16}{9} \Rightarrow T = \frac{4}{3} \text{ s}$$



$$\Delta t = \frac{T}{2} = \frac{2}{3} \text{ s}$$

کام آخر

برای آن که بردار سرعت و همین‌طور بردار تکانه قرینه شود، حداقل زمان مورد نیاز نصف دوره است.



۴۹ - دو آونگ ساده A و B به طول‌های $\ell_A = 64 \text{ cm}$ و $\ell_B = 36 \text{ cm}$ بر روی سطح زمین قرار دارند. در لحظه $t = 0$ ، آونگ A و در لحظه $t = 16 \text{ s}$ ، آونگ B شروع به نوسان می‌کند. در چه لحظه‌ای بر حسب ثانیه، آونگ A، ۵ نوسان کامل بیش‌تر از آونگ B انجام داده است؟ $(\pi^2 = 10, g = 10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2})$

- 30 (۱) 35 (۲) 40 (۳) 45 (۴)

(سخت - محاسباتی - استاندارد ۵ - صفحه ۶۷ - ۱۲۰۳)

پاسخ: گزینه ۳

کام اول

ابتدا به کمک رابطه $T = 2\pi \sqrt{\frac{\ell}{g}}$ ، دوره تناوب هر یک از آونگ‌های A و B را به دست می‌آوریم:

$$T_A = 2\pi \sqrt{\frac{\ell_A}{g}} \xrightarrow{\ell_A = 64 \text{ cm} = 0.64 \text{ m}, \pi = \sqrt{10}} T_A = 2\sqrt{10} \times \sqrt{\frac{0.64}{10}} = 2 \times 0.8 = 1.6 \text{ s}$$

$$T_B = 2\pi \sqrt{\frac{\ell_B}{g}} \xrightarrow{\ell_B = 36 \text{ cm} = 0.36 \text{ m}, \pi = \sqrt{10}} T_B = 2\sqrt{10} \times \sqrt{\frac{0.36}{10}} = 2 \times 0.6 = 1.2 \text{ s}$$

فرض کنید در لحظه t ثانیه، آونگ ساده A ، 5 نوسان کامل بیش‌تر از آونگ ساده B انجام دهد؛ بنابراین به کمک رابطه $T = \frac{t}{n}$ داریم:

$$\left. \begin{aligned} T_A = \frac{t}{n+5} \Rightarrow 1/6 = \frac{t}{n+5} \Rightarrow n+5 = \frac{t}{1/6} \Rightarrow n = \frac{5}{8}t - 5 \\ T_B = \frac{t-16}{n} \Rightarrow 1/2 = \frac{t-16}{n} \Rightarrow n = \frac{t-16}{1/2} \Rightarrow n = \frac{5}{6}t - \frac{40}{3} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{5}{8}t - 5 = \frac{5}{6}t - \frac{40}{3}$$

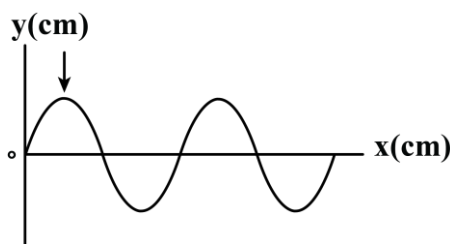
$$\Rightarrow \left(\frac{5}{6} - \frac{5}{8}\right)t = \frac{40}{3} - 5 \Rightarrow \frac{5}{24}t = \frac{25}{3} \Rightarrow t = 40s$$

راهنمای مسیرت

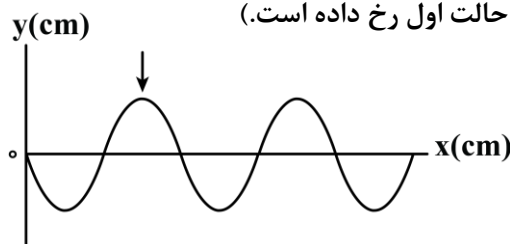
مقایسه دو آونگ به روش‌های مختلف سؤال می‌شه و همواره مورد علاقه طراحان هست. ما سعی کردیم با یه کوچولو خلاقیت جدید این سؤال رو براتون طرح کنیم تا حواستون به ایده‌های جدید باشه.



۵۰- شکل‌های زیر، نقش یک موج را درون یک طناب در دو لحظه $t_1 = 0$ و $t_2 = 0.3s$ نشان می‌دهد. اگر مسافت طی شده توسط هریک از ذرات طناب در این مدت $20cm$ باشد، بیشینه تندی هر یک از ذرات طناب چند سانتی‌متر بر ثانیه است؟ ($\pi = 3$) و حالت دوم اولین بار بعد از حالت اول رخ داده است.



حالت اول



حالت دوم

- (۱) ۱۰۰
- (۲) ۱۰
- (۳) ۱
- (۴) ۰/۱

(متوسط - نموداری - استاندارد ۶ - صفحه ۷۳ - ۱۲۰۳)

پاسخ: گزینه ۱

با توجه به نقش موج‌ها در دو حالت، در مدت زمان 0.3 ثانیه موج به اندازه $\frac{\lambda}{2}$ پیشروی می‌کند؛ بنابراین می‌توانیم دوره تناوب موج را محاسبه کنیم.

$$\frac{T}{2} = 0.3s \Rightarrow T = 0.6s$$

در مدت $\frac{T}{2}$ هر کدام از ذرات طناب به اندازه $2A$ مسافت طی می‌کنند؛ بنابراین داریم:

$$2A = 20cm \Rightarrow A = 10cm$$

$$v_{max} = A\omega = A \frac{2\pi}{T} = \frac{10 \times 2 \times 3}{0.6} = 100 \frac{cm}{s}$$

سوتی‌های پرتکرار

اگر حواست به یکای گفته شده نباشه و جواب نهایی رو در SI به دست بیاری، در دام گزینه (۳) می‌افتی.



۵۱- شکل زیر، جهت‌های حرکت یک چشمه صوتی و یک ناظر (شنونده) را در وضعیت‌های مختلف نشان می‌دهد. اگر طول موج دریافتی ناظر در وضعیت‌های (۱)، (۲)، (۳) و (۴) به ترتیب، λ_1 ، λ_2 ، λ_3 و λ_4 باشد، کدام گزینه درست است؟ (تندی ناظر یا چشمه متحرک را در تمام وضعیت‌ها یکسان در نظر بگیرید.)

چشمه ناظر (شنونده)

- | | | |
|----|----|-----|
| • | • | (۱) |
| •→ | • | (۲) |
| • | ←• | (۳) |
| ←• | • | (۴) |

$$(۱) \lambda_4 < \lambda_1 = \lambda_3 < \lambda_2$$

$$(۲) \lambda_2 = \lambda_3 < \lambda_1 < \lambda_4$$

$$(۳) \lambda_2 < \lambda_3 < \lambda_1 < \lambda_4$$

$$(۴) \lambda_4 < \lambda_1 = \lambda_3 < \lambda_2$$

(آسان - مفهومی - سریع) (صفحه ۸۲ - ۱۲۰۳)

پاسخ: گزینه ۱

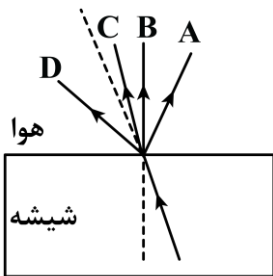
هنگامی که چشمه ساکن باشد، با نزدیک شدن یا دور شدن ناظر به آن، بسامد دریافتی ناظر تغییر می‌کند ولی فاصله جبهه‌های متوالی (طول موج) تغییر نمی‌کند؛ بنابراین $\lambda_1 = \lambda_3$ است؛ اما هنگامی که ناظر ساکن است، با نزدیک شدن چشمه به آن، تجمع جبهه‌های موج بین ناظر و چشمه بیش‌تر شده و فاصله جبهه‌ها (طول موج) کاهش می‌یابد. با استدلال مشابه، در دور شدن چشمه متحرک از ناظر ساکن، طول موج دریافتی ناظر افزایش می‌یابد؛ بنابراین $\lambda_2 < \lambda_1$ و $\lambda_4 > \lambda_1$ است. در نتیجه، گزینه (۱) درست است.

راهنمای مسیرت

بچه‌ها این سؤال از دل کتاب درسی براتون طرح شده و هم برای کنکور و هم برای نهایی به شدت مناسبه. پس حواستون به پاسخ‌نامه باشه.



۵۲- شکل زیر، پرتوی نوری را نشان می‌دهد که از شیشه وارد هوا شده است. کدام گزینه می‌تواند پرتوی وارد شده به هوا باشد؟



(۱) A

(۲) B

(۳) C

(۴) D

(آسان - مفهومی - سریع) (صفحه ۹۸ - ۱۲۰۴)

پاسخ: گزینه ۴

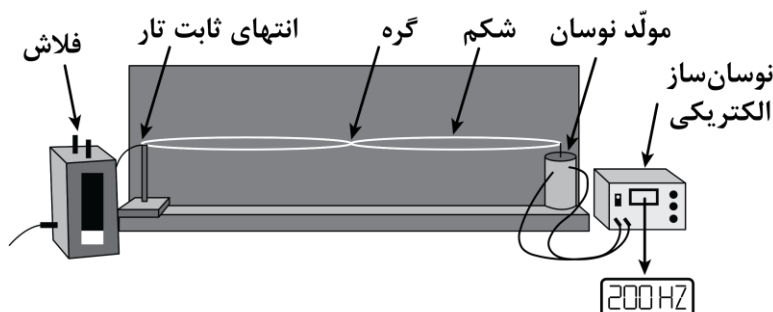
وقتی نور از محیط غلیظ به محیط رقیق وارد شود، از خط عمود دورتر می‌شود. در نتیجه تنها پرتوی صحیح D است.

راهنمای مسیرت

بچه‌ها رسم مسیر پرتوی شکست، همواره مورد علاقه طراحان امتحان نهایی و کنکور هست. پس با یک مرور ساده کتاب درسی، خیالت رو از این تیپ‌ها راحت کن. امیدوارم حواست به این تیپ سؤالی ساده هم باشه.



۵۳- شکل زیر، موج ایستاده‌ای را در یک تار نشان می‌دهد. اگر طول و جرم این تار به ترتیب ۸۰cm و ۲۰g باشد، نیروی کشش تار چند نیوتون است؟



(۱) ۶۴۰

(۲) ۳۲۰

(۳) ۱۶۰

(۴) ۸۰

با توجه به شکل داده شده، هماهنگ $n = 2$ به صدا درآمده است. تندی انتشار موج را در طناب به دست می آوریم:

$$f_n = \frac{nv}{2L} \Rightarrow 200 = \frac{2v}{2 \times 0.8} \Rightarrow v = 160 \frac{m}{s}$$

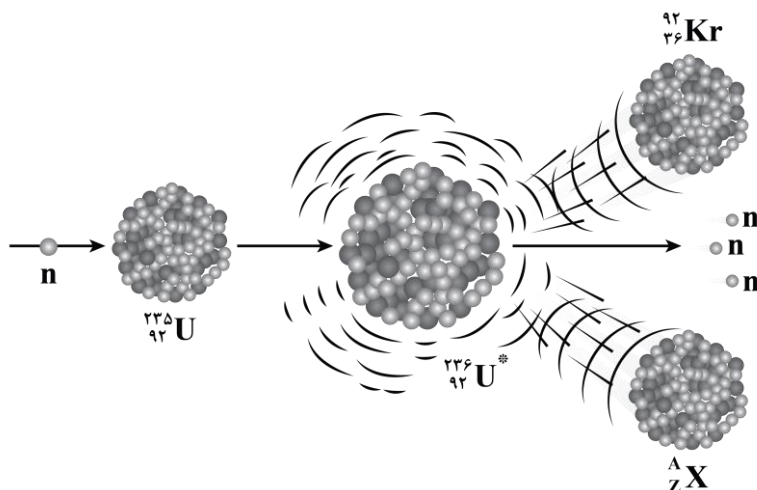
نیروی کشش را در طناب محاسبه می کنیم:

$$v = \sqrt{\frac{FL}{m}} \Rightarrow 160 = \sqrt{\frac{F \times 0.8}{20 \times 10^{-3}}} \Rightarrow 160 = \sqrt{40F}$$

$$\Rightarrow 25600 = 40F \Rightarrow F = 640N$$



۵۴- شکل زیر، کدام واکنش هسته‌ای را نشان می دهد و تعداد نوترون های هسته X چقدر است؟



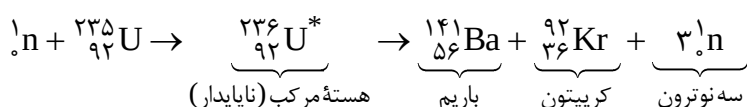
(۱) شکافت هسته‌ای، ۸۵

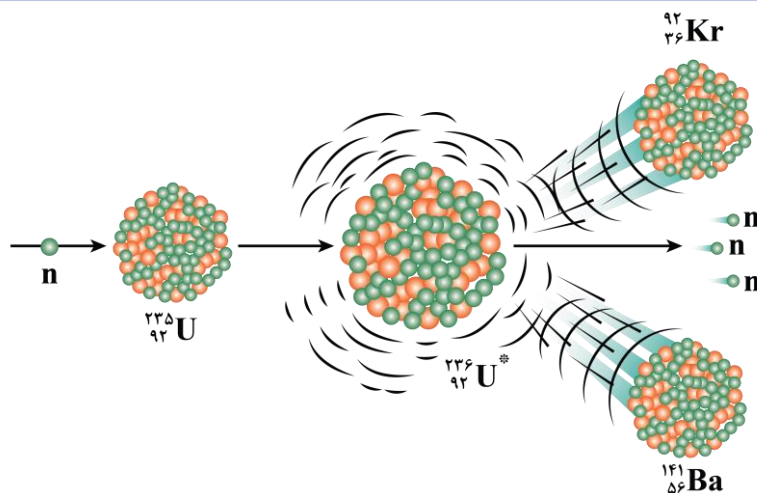
(۲) شکافت هسته‌ای، ۸۶

(۳) گداخت هسته‌ای، ۸۵

(۴) گداخت هسته‌ای، ۸۶

فرایند تقسیم شدن یک هسته سنگین به دو هسته با جرم کمتر، شکافت هسته‌ای نامیده می شود. در فرایند شکافت اورانیوم، ترکیب های متفاوتی از هسته های کوچک تر همراه با تعدادی نوترون (بین ۲ تا ۵) به وجود می آید. شکل زیر، یکی از این واکنش های ممکن شکافت را نشان می دهد که در آن هسته اورانیوم $^{235}_{92}\text{U}$ پس از جذب نوترون و تبدیل به ایزوتوپ ناپایدار $^{236}_{92}\text{U}^*$ ، به هسته های باریوم $^{141}_{56}\text{Ba}$ و کریپتون $^{92}_{36}\text{Kr}$ تقسیم شده است. واکنش وقتی شروع می شود که نوترونی کند (با انرژی جنبشی در حدود 0.04eV) توسط هسته $^{235}_{92}\text{U}$ جذب و هسته مرکب $^{236}_{92}\text{U}^*$ ایجاد شود. این هسته مرکب در کم تر از 10^{-12}s و مطابق واکنش زیر واپاشیده می شود:





واکنش شکافت $^{235}_{92}\text{U}$ با جذب یک نوترون کند شروع می‌شود.

$$\Rightarrow {}^A_Z\text{X} = {}^{141}_{56}\text{Ba} \Rightarrow N = A - Z = 141 - 56 = 85$$



۵۵- کدام یک از عبارت‌های زیر صحیح است؟

الف - تامسون موفق به کشف الکترون و اندازه‌گیری نسبت بار به جرم $(\frac{e}{m})$ آن شد. کشف الکترون، تامسون را ترغیب کرد تا مدل اتم هسته‌ای را برای اتم ارائه دهد.

ب - مدل اتمی رادرفورد، پایداری اتم را توجیه کرد، اما متفاوت بودن شدت خط‌های طیفی اتم هیدروژن را توجیه نکرد.
ج - انرژی لازم برای خارج کردن الکترون از حالت پایه و رساندن آن به حالت برانگیخته $n=\infty$ ($E_\infty=0$)، انرژی یونش الکترون نام دارد که برای اتم هیدروژن در حدود یک ریذبرگ است.

د - فوتون‌هایی که باریکه لیزری را ایجاد می‌کنند، هم‌بسامد، هم‌جهت و هم‌فاز هستند و انرژی آن‌ها باهم برابر است.

(۱) «الف» و «ب» (۲) «الف» و «ج» (۳) «ب» و «د» (۴) «ج» و «د»

(آسان - خط‌به‌خط - سریع ۵ - صفحه ۱۳۳ - ۱۲۰۵)

پاسخ: گزینه ۴

عبارت‌های «ج» و «د» طبق متن کتاب درسی صحیح هستند.

بررسی موارد نادرست:



تامسون موفق به کشف الکترون و اندازه‌گیری نسبت بار به جرم $(\frac{e}{m})$ آن شد. کشف الکترون، تامسون را ترغیب کرد تا مدل کیک کشمشی را برای اتم ارائه دهد.



در مدل رادرفورد (اتم هسته‌ای) پایداری اتم توجیه نشد. توضیحات داده‌شده در این عبارت مربوط به مدل اتمی بور است.



۵۶- در مدل اتمی هیدروژن، الکترونی از سومین حالت برانگیخته به حالت پایه می‌رود. به ترتیب از راست به چپ، بسامد فوتون

گسیل‌شده چند تراهرتز است و شعاع مدار الکترون چند برابر شده است؟ ($h = 4 \times 10^{-15} \text{ eV.s}$, $E_R = 13/6 \text{ eV}$)

(۱) $\frac{1}{9}$ ، $3187/5$ (۲) $\frac{1}{16}$ ، $3187/5$ (۳) $\frac{1}{9}$ ، 3025 (۴) $\frac{1}{16}$ ، 3025

گام اول

انرژی فوتون تابش شده برابر است با:

$$E_{\text{فوتون}} = E_4 - E_1 = -\frac{13/6}{4^2} - \left(-\frac{13/6}{1^2}\right) = 12/75 \text{ eV}$$

گام دوم

بسامد فوتون تابش شده برابر است با:

$$E_{\text{فوتون}} = hf \Rightarrow 12/75 = 4 \times 10^{-15} f \Rightarrow f = 3/1875 \times 10^{15} \text{ Hz}$$

$$\Rightarrow f = 3187/5 \text{ THz}$$

گام آخر

با آمدن الکترون از سومین حالت برانگیخته ($n=4$) به حالت پایه ($n'=1$)، شعاع مدار آن $\frac{1}{16}$ برابر می‌شود.

$$r = a_0 n^2 \Rightarrow \frac{r_1}{r_4} = \frac{a_0}{16a_0} = \frac{1}{16}$$



۵۷- تعداد هسته‌های موجود در یک نمونه پرتوزا در زمان $t=0$ برابر ۲۰۰۰ عدد و در زمان $t=2s$ برابر ۱۸۰۰ عدد است. در زمان $t=6s$ چه تعداد هسته باقی مانده است؟

۱۴۵۸ (۴)

۱۶۵۲ (۳)

۱۵۵۴ (۲)

۱۴۴۲ (۱)

با توجه به این که در زمان $t=0$ تعداد ذرات ۲۰۰۰ عدد است، در نتیجه $N_0 = 2000$ است؛ و برای زمان $t=2s$ داریم:

$$N = \frac{N_0}{2^{\frac{t}{T}}} \Rightarrow 1800 = \frac{2000}{2^{\frac{2}{T}}} \Rightarrow 2^{\frac{2}{T}} = \frac{2000}{1800} \Rightarrow 2^{\frac{2}{T}} = \frac{10}{9}$$

اکنون برای لحظه $t=6s$ داریم:

$$N = \frac{N_0}{2^{\frac{t}{T}}} \Rightarrow N = \frac{2000}{2^{\frac{6}{T}}}$$

با توجه به این که $2^{\frac{2}{T}} = \left(2^{\frac{2}{T}}\right)^3$ و با استفاده از رابطه $2^{\frac{2}{T}} = \frac{10}{9}$ داریم:

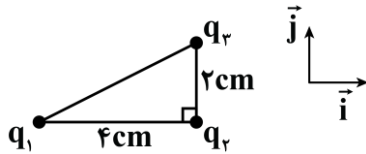
$$N = \frac{2000}{2^{\frac{6}{T}}} = \frac{2000}{\left(2^{\frac{2}{T}}\right)^3} = \frac{2000}{\left(\frac{10}{9}\right)^3} = 1458$$

راهنمای مسیرت

بچه‌ها این تست از نیمه عمر رو خیلی خلاقانه و جدید براتون طرح کردیم و حتماً حواستون به این تیپ جدید باشه.



۵۸- سه ذره باردار مطابق شکل زیر، در سه رأس مثلث قائم‌الزاویه‌ای ثابت شده‌اند و نیروی الکتریکی خالص وارد بر بار q_2 در SI، $\vec{F}_T = 4 \times 10^{-3} \vec{i} - 4 \times 10^{-3} \vec{j}$ است. اگر جای دو ذره q_1 و q_3 را عوض کنیم، نیروی الکتریکی خالص وارد بر بار q_2 در SI، مطابق با کدام گزینه خواهد شد؟



$$(1) 10^{-3} \vec{i} - 16 \times 10^{-3} \vec{j}$$

$$(2) -2 \times 10^{-3} \vec{i} + 8 \times 10^{-3} \vec{j}$$

$$(3) 2 \times 10^{-3} \vec{i} - 8 \times 10^{-3} \vec{j}$$

$$(4) -10^{-3} \vec{i} + 16 \times 10^{-3} \vec{j}$$

(متوسط - محاسباتی - سریع ۶ - صفحه ۹ - ۱۱۰۱)

پاسخ: گزینه ۱

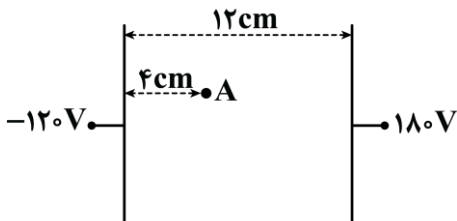
با توجه به علامت ضرایب $\vec{i}$ و $\vec{j}$ در $\vec{F}_T$ ، بارهای q_1 و q_3 ، هم‌نام با بار q_2 هستند؛ بنابراین با عوض کردن جای q_1 و q_3 ، علامت مؤلفه‌های نیروی خالص وارد بر بار q_2 تغییر نخواهد کرد (رد گزینه‌های (۲) و (۴)). از طرفی، طبق قانون کولن، اندازه نیروی الکتریکی بین دو ذره با مربع فاصله بین دو ذره رابطه وارون دارد. با عوض کردن جای بارهای q_1 و q_3 ، فاصله بین بارهای q_1 و q_2 ، نصف و فاصله بین بارهای q_3 و q_2 ، دو برابر می‌شود؛ بنابراین اندازه $\vec{F}_{12}$ ، چهار برابر و اندازه $\vec{F}_{32}$ ، $\frac{1}{4}$ برابر می‌شود. در نتیجه، گزینه (۱) درست است.

راهنمای مسیر

اگر با محاسبه‌های طولانی این تست رو حل کردی باید خدمت عرض کنم که پاسخ‌نامه منتظر شماست تا با یک ابتکار حل عالی آشنا بشی.



۵۹- در شکل زیر، ذره‌ای به جرم 10 ng و بار الکتریکی 1 mC را با تندی $4 \times 10^4 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ از نقطه A در خلاف جهت میدان الکتریکی یکنواخت بین دو صفحه رسانا پرتاب می‌کنیم. پتانسیل الکتریکی نقطه‌ای که در آن، ذره متوقف می‌شود، چند ولت است؟ (از وزن ذره و مقاومت هوا صرف نظر شود).



$$(1) -40$$

$$(2) -60$$

$$(3) 40$$

$$(4) 60$$

(سخت - محاسباتی - استاندارد ۶ - صفحه ۲۶ - ۱۱۰۱)

پاسخ: گزینه ۴

گام اول

ابتدا اندازه میدان الکتریکی یکنواخت بین دو صفحه را به دست می‌آوریم:

$$E = \frac{|\Delta V|}{d} = \frac{180 - (-120)}{12 \times 10^{-2}} = 2500 \frac{\text{V}}{\text{m}}$$

گام دوم

تنها نیروی مؤثر در حرکت ذره، نیروی الکتریکی ناشی از میدان الکتریکی یکنواخت است؛ بنابراین به کمک قضیه کار - انرژی جنبشی داریم:

$$W_t = \Delta K \Rightarrow W_E = \Delta K \Rightarrow E|q|d' \cos \theta = \frac{1}{2} m(v_2^2 - v_1^2)$$

$$\Rightarrow 2500 \times 10^{-3} \times d' \times \cos 180^\circ = \frac{1}{2} \times 100 \times 10^{-12} \times (0^2 - (4 \times 10^4)^2) \Rightarrow \frac{5}{2} d' = 8 \times 10^{-2}$$

$$\Rightarrow d' = 3 / 2 \times 10^{-2} \text{ m} = 3 / 2 \text{ cm}$$

ذره پس از پرتاب شدن از نقطه A به اندازه $d' = 3/2 \text{ cm}$ جابه‌جا شده و متوقف می‌شود تا تغییر جهت داده و برگردد. اگر نقطه توقف را B بنامیم، به کمک یکنواخت بودن میدان الکتریکی بین دو صفحه داریم (فاصله نقطه B از صفحه با ولتاژ منفی را ℓ فرض کنید):

$$E = \frac{V_B - V_-}{\ell} \Rightarrow 2500 = \frac{V_B - (-120)}{(4 + 3/2) \times 10^{-2}} \Rightarrow V_B + 120 = 180 \Rightarrow V_B = 60 \text{ V}$$



۶۰- بین دو صفحه خازنی بدون دی‌الکتریک که متصل به باتری است، میدان E_1 برقرار است. خازن را از باتری جدا کرده و یک دی‌الکتریک با ثابت $\kappa = 2$ بین صفحات آن قرار می‌دهیم، سپس فاصله بین صفحه‌ها را افزایش می‌دهیم تا میدان E_2 بین دو صفحه برقرار شود. کدام گزینه درباره E_2 صحیح است؟

$$\frac{1}{2} E_1 < E_2 < E_1 \quad (4) \quad E_2 = E_1 \quad (3) \quad E_2 < \frac{1}{2} E_1 \quad (2) \quad E_2 = \frac{1}{2} E_1 \quad (1)$$

(متوسط - محاسباتی - سریع) - صفحه ۳۶ - ۱۱۰۱

پاسخ: گزینه ۱

خازن از باتری جدا شده $\Leftarrow Q$ ثابت است.

کلم اول

رابطه میدان الکتریکی بین خازن برابر است با:

$$\left. \begin{aligned} V &= \frac{Q}{C} \\ E &= \frac{V}{d} \end{aligned} \right\} \Rightarrow E = \frac{Q}{C \cdot d} \xrightarrow{C = \frac{\kappa \epsilon_0 A}{d}} E = \frac{Q}{\kappa \epsilon_0 A}$$

کلم آخر

ثابت دی‌الکتریک دو برابر می‌شود و تغییر فاصله دو صفحه خازنی که از باتری جدا شده است، تأثیری در میدان میان دو صفحه آن ندارد؛ بنابراین داریم:

$$\frac{E_2}{E_1} = \frac{Q_2}{Q_1} \times \frac{\kappa_1}{\kappa_2} \xrightarrow{Q_2=Q_1, \kappa_2=2\kappa_1} \frac{E_2}{E_1} = \frac{Q_1}{Q_1} \times \frac{\cancel{\kappa_1}}{2\cancel{\kappa_1}} \Rightarrow E_2 = \frac{1}{2} E_1$$

راهنمای مسیرت

بچه‌ها برای بررسی میدان الکتریکی یکنواخت خازن، اگر خازن به باتری وصل است، رابطه $E = \frac{V}{d}$ و اگر خازن شارژ شده از باتری جدا شده

است، رابطه $E = \frac{Q}{\kappa \epsilon_0 A}$ سرعت تحلیل شما را افزایش می‌دهد.



۶۱- یک کابل مسی به طول 20 m و به جرم 8 kg در اختیار داریم. چگالی مس $8 \frac{\text{g}}{\text{cm}^3}$ و مقاومت ویژه آن $8 \times 10^{-7} \Omega \cdot \text{cm}$ است.

اگر اختلاف پتانسیل الکتریکی 20 V را به دو سر این کابل مسی اعمال کنیم، توان مصرفی آن چند کیلووات می‌شود؟

$$1250 \quad (4) \quad 125 \quad (3) \quad 12/5 \quad (2) \quad 1/25 \quad (1)$$

گام اول

ابتدا مقاومت الکتریکی کابل مسی را به دست می آوریم:

$$R = \rho \rho' \frac{L}{m} \quad \begin{matrix} \rho = 8 \times 10^{-7} \Omega \cdot \text{cm} = 8 \times 10^{-9} \Omega \cdot \text{m} \\ \rho' = 8 \frac{\text{g}}{\text{cm}^3} = 8 \times 10^3 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}, L = 2 \times 10^2 \text{ m}, m = 8 \text{ kg} \end{matrix} \rightarrow R = \frac{8 \times 10^{-9} \times 8 \times 10^3 \times 4 \times 10^4}{8} = 32 \times 10^{-2} \Omega$$

گام آخر

با برقراری اختلاف پتانسیل الکتریکی 20V بین دو سر کابل مسی، توان مصرفی آن برابر است با:

$$P = \frac{V^2}{R} \quad V = 20\text{V}, R = 32 \times 10^{-2} \Omega \rightarrow P = \frac{400}{32 \times 10^{-2}} = 1250\text{W} = 1/25\text{kW}$$

سوتی‌های پرتکرار

اگر به یکای کیلووات حواستون نباشه در دام گزینه (۴) می‌افتین.



۶۲- در مدار شکل زیر، تمام مقاومت‌ها مشابه و آمپرسنج‌ها و ولت‌سنج‌ها آرمانی هستند. کدام یک از آمپرسنج‌ها جریان صفر را نشان

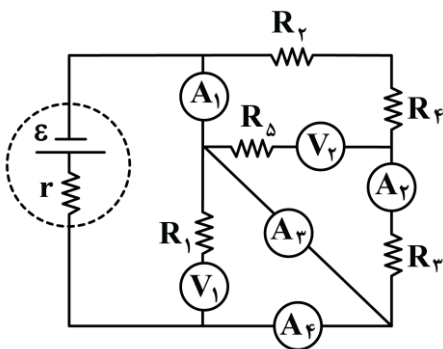
می‌دهد؟

A_1 (۱)

A_2 (۲)

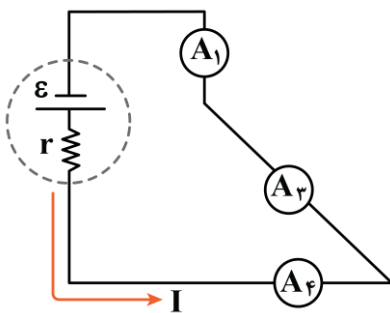
A_3 (۳)

A_4 (۴)



(متوسط - مفهومی - سریع (صفحه ۷۳ - ۱۱۰۲)

پاسخ: گزینه ۲



دقت کنید ولت‌سنج آرمانی دارای مقاومت زیاد و جریان عبوری از آن صفر است (جریان عبوری از R_1 و R_2 صفر است).

از طرفی اگر دو سر یک مولد با سیم رابط (بدون مقاومت) به هم متصل شده باشند، تمامی مقاومت‌ها اتصال کوتاه می‌شوند و از مدار حذف می‌شوند.

بنابراین با ردیابی جریان در مدار، آمپرسنج A_2 جریانی را نشان نمی‌دهد و سایر آمپرسنج‌ها جریان کل مدار را نشان می‌دهند.

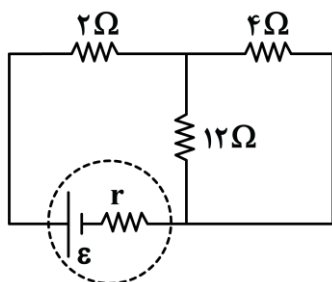
راهنمای مسیرت

گاهی وقت‌ها سؤال ظاهراً سخت و مشکل‌ساز هست ولی با کمی دقت می‌شه تبدیل به یک سؤال ساده! اینجا هم دقیقاً همین داستان برقراره! پس اگر نتونستی حلش کنی، بدون که الکی ازش ترسیدی. پس یه سر به پاسخ‌نامه بزن تا چندوقون تحلیل این تست رو حسابی بلد باشی.



۶۳- در مدار شکل زیر، اگر جای باتری و مقاومت ۴ اهمی عوض شود، توان مصرفی در مقاومت ۲ اهمی ۳۶ درصد کاهش می‌یابد. مقاومت

درونی مولد چند اهم است؟



(۱) ۵/۰

(۲) ۱

(۳) ۵/۱

(۴) ۲

(سخت - محاسباتی - زمان‌بر) - صفحه ۷۳ - ۱۱۰۲

پاسخ: گزینه ۲

حالت اول

مقاومت معادل مدار برابر است با:

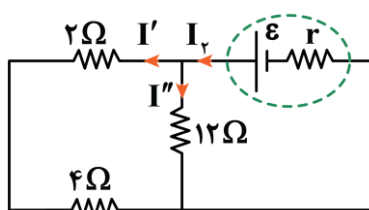
$$R_{eq} = (4 \parallel 12) + 2 = \frac{4 \times 12}{4 + 12} + 2 = 5 \Omega$$

بنابراین جریان اصلی مدار که همان جریان گذرنده از مقاومت ۲ اهمی است، برابر است با:

$$I_1 = \frac{\varepsilon}{R_{eq} + r} = \frac{\varepsilon}{5 + r}$$

حالت دوم

با عوض کردن باتری با مقاومت ۴ اهمی (شکل زیر)، مقاومت معادل برابر است با:



$$R'_{eq} = (4 + 2) \parallel 12 = \frac{6 \times 12}{6 + 12} = 4 \Omega$$

و جریان اصلی مدار برابر است با:

$$I_2 = \frac{\varepsilon}{R'_{eq} + r} = \frac{\varepsilon}{4 + r}$$

شاخه ۶ اهمی و ۱۲ اهمی باهم موازی‌اند. در نتیجه، داریم:

$$\begin{cases} 6I' = 12I'' \Rightarrow I' = 2I'' \\ I' + I'' = I_2 \Rightarrow 3I'' = I_2 \Rightarrow I'' = \frac{1}{3}I_2 \Rightarrow I' = \frac{2}{3}I_2 = \frac{2}{3} \times \frac{\varepsilon}{4 + r} \end{cases}$$

توان مصرفی یک مقاومت از رابطه $P = RI^2$ به دست می‌آید؛ بنابراین داریم:

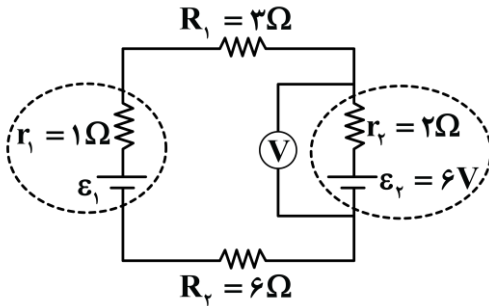
$$(P_{2\Omega})_{\text{در حالت اول}} = \frac{1}{64} \Rightarrow \frac{1}{64} \times \left(\frac{2}{3} \times \frac{\varepsilon}{4 + r} \right)^2 = \frac{1}{64} \times \frac{1}{3} \times \left(\frac{\varepsilon}{5 + r} \right)^2$$

$$\xrightarrow{\text{جذر}} \frac{2}{3} \times \frac{1}{4 + r} = \frac{1}{5 + r} \Rightarrow r = 1 \Omega$$

راهنمای مسیر

در این تیپ تست‌ها، سرعت عمل شما در تحلیل حالت‌های مختلف مدار با چاشنی دقت، نقش مهمی در رسیدن به جواب درست در حداقل زمان ممکن دارد. سعی کنید با تمرین و تکرار به بالاترین سرعت مطمئن برسید تا به راحتی از پس این تست‌ها بربیایید.

۶۴- در مدار شکل زیر، ولت‌سنج آرمانی ۸۷ را نشان می‌دهد. توان خروجی باتری (۱) چند وات است؟



- (۱) ۱۵
(۲) ۱۷
(۳) ۱۸
(۴) ۱۶

(متوسط - محاسباتی - استاندارد) - صفحه ۶۹ - ۱۱۰۲

پاسخ: گزینه ۲

گام اول

ولت‌سنج اختلاف پتانسیل دو سر باتری مصرف‌کننده (۲) را نشان می‌دهد؛ بنابراین:

$$V = \varepsilon_2 + r_2 I \Rightarrow 87 = 6 + 2I \Rightarrow I = 41 \text{ A}$$

گام دوم

نیروی محرکه باتری (۱) را به دست می‌آوریم:

$$I = \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{r_1 + r_2 + R_{eq}} \Rightarrow 41 = \frac{\varepsilon_1 - 6}{1 + 2 + 9} \Rightarrow \varepsilon_1 = 187 \text{ V}$$

گام آخر

توان خروجی باتری (۱) برابر است با:

$$P = \varepsilon_1 I - r_1 I^2 = 187 \times 41 - 1 \times 41^2 = 7741 \text{ W}$$

نکته

در مدارهایی با بیش از یک باتری، اگر اختلاف پتانسیل دو سر مولد:

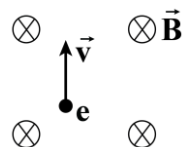
- ۱- کمتر از نیروی محرکه باتری باشد، آن باتری شارژدهنده (تولیدکننده) است.
- ۲- بیش‌تر از نیروی محرکه باتری باشد، آن باتری شارژشونده (مصرف‌کننده) است.

ایلو

۶۵- مطابق شکل زیر، الکترونی درون یک میدان مغناطیسی یکنواخت درون‌سو در جهت نشان داده‌شده در حال حرکت است. میدان

الکتریکی یکنواخت را در چه جهتی برقرار کنیم تا الکترون، بدون انحراف به حرکت خود ادامه دهد؟ (از نیروی وزن و نیروی

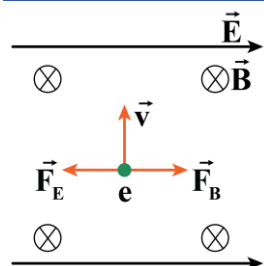
مقاومت هوا صرف‌نظر کنید.)



- (۱) برون‌سو
(۲) پایین
(۳) چپ
(۴) راست

(آسان - مفهومی - سریع) - صفحه ۸۹ - ۱۱۰۳

پاسخ: گزینه ۴



مطابق شکل زیر، طبق قاعده دست راست، نیروی مغناطیسی وارد بر الکترون ($\vec{F}_B$) به سمت راست است؛ بنابراین برای آن‌که الکترون بدون انحراف به حرکت خود ادامه دهد، باید نیروی الکتریکی ($\vec{F}_E$) به سمت چپ و هم‌اندازه با نیروی مغناطیسی ($\vec{F}_B$) بر آن وارد شود تا نیروی خالص وارد بر الکترون، صفر شود. از آنجا که بر بار منفی در خلاف جهت میدان الکتریکی، نیرو وارد می‌شود، میدان الکتریکی باید به سمت راست باشد.

ایلو

- ۶۶- سیملوله‌ای به طول 40cm از سیمی با ضخامت 2mm ساخته شده است. اگر اختلاف پتانسیل دو انتهای سیملوله 12V باشد، میدان مغناطیسی در محوری که از وسط سیملوله عبور می‌کند، چند گاوس است؟ ($\pi \approx 3$)، $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \frac{\text{T.m}}{\text{A}}$ ، شعاع مقطع سیملوله 1cm و مقاومت هر متر سیم 0.5Ω است و حلقه‌ها بدون فاصله کنار هم قرار گرفته‌اند.
- (۱) ۶ (۲) ۱۲ (۳) ۶۰ (۴) ۱۲۰

(سخت - محاسباتی - زمان‌بر - صفحه ۱۰۰ - ۱۱۰۳)

پاسخ: گزینه ۲

گام اول

تعداد حلقه‌های سیملوله را حساب می‌کنیم. با توجه به این که حلقه‌ها بدون فاصله کنار هم قرار گرفته‌اند، داریم:

$$\ell = N.D \xrightarrow{\ell = 40\text{cm} = 0.4\text{m}, D = 2\text{mm} = 0.002\text{m}} 0.4 = N \times 0.002 \Rightarrow N = 200$$

گام دوم

طول سیم تشکیل‌دهنده سیملوله را به دست می‌آوریم:

$$L = N \times 2\pi r \xrightarrow{N = 200, \pi = 3, r = 1\text{cm} = 0.01\text{m}} L = 200 \times 2 \times 3 \times 0.01 = 12\text{m}$$

گام سوم

مقاومت سیم را به دست می‌آوریم. با توجه به این که مقاومت هر متر سیم 0.5Ω است، داریم:

$$R = 12 \times 0.5 = 6\Omega$$

گام چهارم

جریان عبوری از سیملوله را به دست می‌آوریم. طبق قانون اهم داریم:

$$R = \frac{V}{I} \Rightarrow 6 = \frac{12}{I} \Rightarrow I = 2\text{A}$$

گام آخر

میدان مغناطیسی ناشی از سیملوله را به دست می‌آوریم:

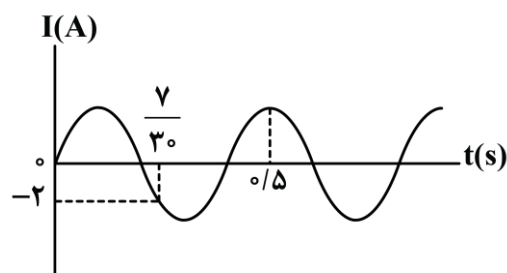
$$B = \frac{\mu_0 NI}{\ell} \Rightarrow B = \frac{12 \times 10^{-7} \times 200 \times 2}{0.4} = 12 \times 10^{-4} \text{T} = 12\text{G}$$

راهنمای مسیرت 

بچه‌ها توی این سؤال، تقریباً می‌شه گفت تمام ایده‌های مهم برای سیملوله رو براتون آوردیم تا با همین یه دونه تست، حسابی نکاتش براتون مرور بشه. حتماً حواستون به گام‌های پاسخ‌نامه باشه.

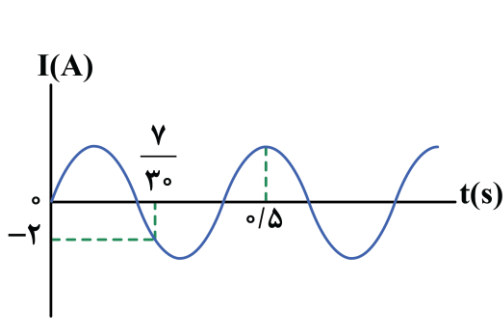


- ۶۷- نمودار تغییرات یک جریان متناوب سینوسی که از یک القاگر به ضریب خودالقایی 2H می‌گذرد، مطابق شکل زیر است. بیشینه انرژی مغناطیسی ذخیره‌شده در این القاگر چند ژول است؟



- (۱) 0.2
(۲) 0.4
(۳) $1/6$
(۴) $3/2$

با توجه به شکل می‌توان نوشت:



$$T + \frac{T}{4} = 0.5 \Rightarrow T = 0.4 \text{ s}$$

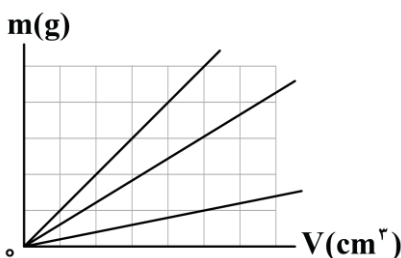
$$I = I_m \sin\left(\frac{2\pi}{T} t\right) \Rightarrow -2 = I_m \sin\left(\frac{2\pi}{0.4} \times \frac{0.5}{3}\right)$$

$$-2 = I_m \sin\left(\frac{5\pi}{6}\right) \Rightarrow -2 = I_m \times \left(-\frac{1}{2}\right) \Rightarrow I_m = 4 \text{ A}$$

$$U_m = \frac{1}{2} L I_m^2 \Rightarrow U = \frac{1}{2} \times 0.2 \times 16 = 1.6 \text{ J}$$



۶۸- نمودار جرم بر حسب حجم دو مایع و مخلوط حاصل از آن‌ها مطابق شکل است. جرم مایع چگال‌تر، چند برابر جرم مایع با چگالی کم‌تر است؟ (تغییر حجم در اثر اختلاط دو مایع ناچیز است.)



۵ (۱)

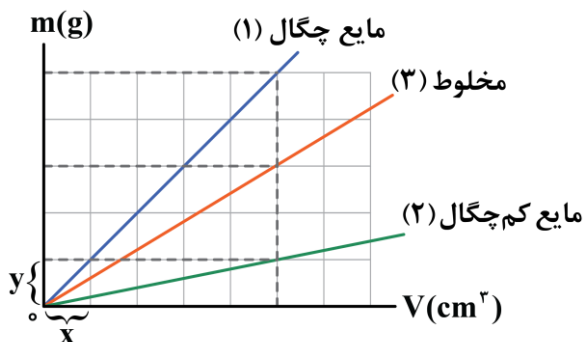
۳ (۲)

۴ (۳)

۱ (۴)

کلام اول

می‌دانیم چگالی مخلوط همواره بین چگالی مایع‌ها است. از طرفی هم در نمودار جرم بر حسب حجم، هرچه شیب نمودار بیش‌تر باشد، چگالی نیز بیش‌تر خواهد بود؛ بنابراین $\rho_2 < \rho_3 < \rho_1$ است:



$$\rho_1 = \text{شیب (۱)} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y}{x}, \quad \rho_2 = \text{شیب (۲)} = \frac{y}{\Delta x}, \quad \rho_3 = \text{شیب (۳)} = \frac{3y}{\Delta x}$$

$$\Rightarrow \frac{\rho_1}{\rho_3} = \frac{x}{3y} = \frac{1}{3} \Rightarrow \rho_1 = \frac{1}{3} \rho_3, \quad \frac{\rho_2}{\rho_3} = \frac{\Delta x}{3y} = \frac{1}{3} \Rightarrow \rho_2 = \frac{1}{3} \rho_3$$

کلام آخر

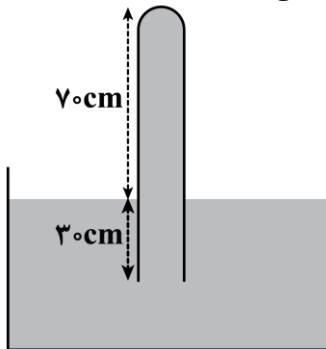
حالا که ρ_1 و ρ_2 را بر حسب ρ_3 به‌دست آورده‌ایم، به کمک رابطه $\rho_3 = \frac{m_3}{V_3}$ داریم:

$$\rho_3 = \frac{m_3}{V_3} = \frac{m_1 + m_2}{V_1 + V_2} = \frac{m_1 + m_2}{\frac{m_1}{\rho_1} + \frac{m_2}{\rho_2}} \Rightarrow \rho_3 = \frac{m_1 + m_2}{\frac{m_1}{\frac{1}{3}\rho_3} + \frac{m_2}{\frac{1}{3}\rho_3}} \Rightarrow \frac{3}{\rho_3} m_1 + 3 m_2 = m_1 + m_2$$

$$\Rightarrow 2m_2 = \frac{2}{3} m_1 \Rightarrow \frac{m_1}{m_2} = 3$$



۶۹- در شکل زیر، نیروی ناشی از مایع که بر انتهای بسته لوله به مساحت 4 cm^2 وارد می‌شود، 64 N است. لوله را چند سانتی‌متر در راستای قائم جابه‌جا کنیم تا بزرگی نیروی ناشی از مایع بر انتهای بسته لوله، ۹۰ درصد کاهش یابد؟ ($P_0 = 1.0^5 \text{ Pa}$, $g = 10 \frac{\text{N}}{\text{kg}}$)



(۱) ۱۱/۲

(۲) ۱۲

(۳) ۱۳/۲

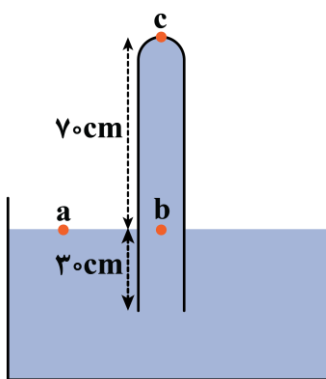
(۴) ۱۳

(سخت - محاسباتی - زمان‌بر ۵ - صفحه ۳۷ - ۱۰۰۲)

پاسخ: گزینه ۲

گام اول

ابتدا فشار ناشی از مایع را که بر انتهای بسته لوله وارد می‌شود (P_c)، به دست می‌آوریم:



$$P_c = \frac{F}{A} \quad F = 64 \text{ N}, A = 4 \text{ cm}^2 = 4 \times 10^{-3} \text{ m}^2 \rightarrow P_c = \frac{64}{4 \times 10^{-3}} = 16000 \text{ Pa}$$

گام دوم

فشار در نقاط هم‌تراز a و b برابر است:

$$P_a = P_b \Rightarrow P_0 = \rho gh + P_c \Rightarrow 1.0^5 = \rho \times 10 \times 70 \times 10^{-2} + 16000$$

$$\Rightarrow 70\rho = 84000 \Rightarrow \rho = 12000 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$$

گام سوم

می‌خواهیم نیروی ناشی از مایع که بر انتهای بسته لوله وارد می‌شود، ۹۰ درصد کاهش یابد:

$$F' = (1 - 0.9)F = 0.1 \times 64 = 6.4 \text{ N} \Rightarrow P'_c = \frac{F'}{A} = \frac{6.4}{4 \times 10^{-3}} = 1600 \text{ Pa}$$

$$\frac{P_a = P'_b}{P'_b = \rho gh' + P'_c, P_a = P_0} \rightarrow P_0 = \rho gh' + P'_c \Rightarrow 1.0^5 = 12000 \times 10 \times h' + 1600 \Rightarrow 12000 \times h' = 98400$$

$$\Rightarrow h' = 0.82 \text{ m} = 82 \text{ cm}$$

گام آخر

باید لوله را در راستای قائم به اندازه $h' - h = 82 - 70 = 12 \text{ cm}$ بالا ببریم تا نیروی ناشی از مایع که بر انتهای بسته لوله وارد می‌شود، ۹۰ درصد کاهش یابد.

راهنمای مسیرت

بچه‌ها این تست دید بسیار خوبی رو نسبت به ایده‌های طرح سؤال از آزمایش توریچلی بهتون می‌ده. حتماً سعی کنید حسابی روش حلش رو بلد باشید تا یک قدم دیگه به موفقیتتون نزدیک بشین.

۷۰- شخصی از درون یک بالون که به سمت بالا در حال حرکت است، بسته‌ای را رها می‌کند. کار نیروی وزن بسته از لحظه رها شدن تا رسیدن به زمین:

- (۱) همواره منفی است.
(۲) ابتدا مثبت و سپس منفی است.
(۳) همواره مثبت است.
(۴) ابتدا منفی و سپس مثبت است.

(آسان - مفهومی - سریع - صفحه ۶۵ - ۱۰۰۳)

پاسخ: گزینه ۴

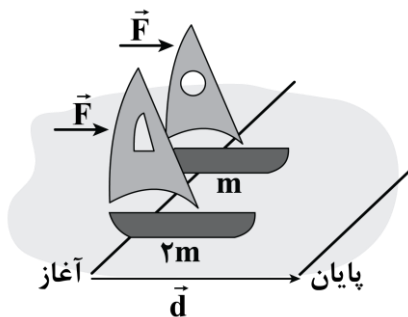
تندی بسته در لحظه رها شدن برابر با تندی بالن و به سمت بالا است؛ بنابراین بسته پس از رها شدن، ابتدا به سمت بالا رفته و در اثر شتاب جاذبه زمین، تندی آن کاهش یافته و به صفر می‌رسد. سپس، به سمت پایین سقوط می‌کند تا به زمین برسد. هنگام بالا رفتن، کار نیروی وزن، منفی و هنگام پایین آمدن، کار نیروی وزن، مثبت است؛ بنابراین گزینه (۴) درست است.



۷۱- مطابق شکل، دو قایق بادبانی مخصوص حرکت روی سطوح یخ‌زده، دارای جرم‌های m و $2m$ ، روی دریاچه افقی و بدون اصطکاکی قرار دارند و نیروی ثابت و یکسان $\vec{F}$ با وزیدن باد به هر دو وارد می‌شود. هر دو قایق از حال سکون شروع به حرکت می‌کنند و

پس از جابه‌جایی $\vec{d}$ ، از خط پایان می‌گذرند. کدام یک از عبارات‌های زیر صحیح است؟

- (۱) دو قایق با تندی برابر به خط پایان می‌رسند، اما انرژی جنبشی قایق سنگین‌تر بیشتر است.
(۲) دو قایق با انرژی جنبشی برابر به خط پایان می‌رسند، اما تندی قایق سبک‌تر بیشتر است.
(۳) دو قایق با تندی برابر به خط پایان می‌رسند، اما انرژی جنبشی قایق سبک‌تر بیشتر است.
(۴) دو قایق با انرژی جنبشی برابر به خط پایان می‌رسند، اما تندی قایق سنگین‌تر بیشتر است.



(آسان - مفهومی - سریع - صفحه ۶۳ - ۱۰۰۳)

پاسخ: گزینه ۲

کلم اول

نیرو و جابه‌جایی برای هر دو قایق هم‌اندازه است؛ بنابراین کار انجام‌شده روی هر دو قایق برابر است و طبق قضیه کار - انرژی جنبشی، انرژی جنبشی دو قایق نیز در خط پایان برابر است.

کلم آخر

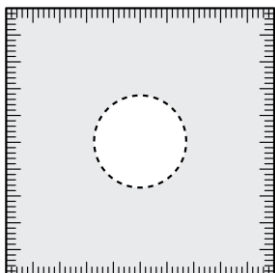
طبق رابطه $K = \frac{1}{2}mv^2$ و با توجه به برابر بودن انرژی جنبشی دو قایق، هرچه جرم قایق کم‌تر باشد، تندی آن بیش‌تر است؛ بنابراین تندی قایق سبک‌تر بیشتر است.



۷۲- در ورقه فلزی شکل زیر، حفره‌ای به قطر ۱cm وجود دارد. دمای ورقه را چقدر و چگونه تغییر دهیم تا مساحت حفره $1/5 \text{ mm}^2$ افزایش یابد؟

($\alpha_{\text{فلز}} = 4 \times 10^{-5} \text{ K}^{-1}$, $\pi \approx 3$)

- (۱) 250°C افزایش
(۲) 250°C کاهش
(۳) 500°C افزایش
(۴) 500°C کاهش



مساحت اولیه حفره برابر است با:

$$A_1 = \pi r^2 = 3 \times (0.5)^2 = \frac{3}{4} \text{ cm}^2 = 75 \text{ mm}^2$$

می‌خواهیم مساحت حفره به اندازه $\Delta A = 1/5 \text{ mm}^2$ افزایش یابد؛ بنابراین:

$$\Delta A = A_1 \alpha \Delta \theta \Rightarrow 1/5 = 75 \times 2 \times 4 \times 10^{-5} \times \Delta \theta$$

$$\Rightarrow \Delta \theta = 25^\circ \text{C}$$

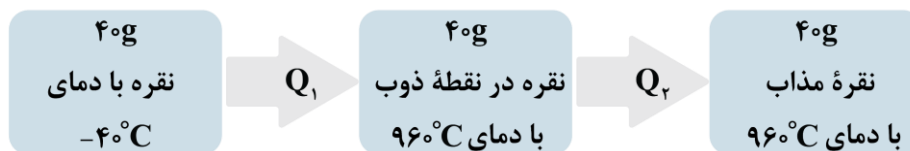
امیدوارم به اهمیت متن کتاب درسی پی برده باشی و حواست به کتاب درسی باشه.



۷۳- یک جواهرساز برای ساختن جواهری می‌خواهد از ۴۰g نقره برای ریختن در قالب‌های جواهر استفاده کند. به این منظور او باید نقره را ذوب کند. اگر دمای اولیه نقره برابر 40°C باشد، حداقل چند کیلوژول گرما باید به این مقدار نقره داده شود؟ (دمای ذوب نقره 960°C است و گرمای ویژه و گرمای نهان ذوب آن به ترتیب $235 \frac{\text{J}}{\text{kg.K}}$ و $90 \frac{\text{kJ}}{\text{kg}}$ است).

$8/4$ (۴)	14 (۳)	$9/4$ (۲)	13 (۱)
-----------	----------	-----------	----------

مرحله‌های این فرایند به‌طور طرح‌وار در شکل زیر رسم شده است.



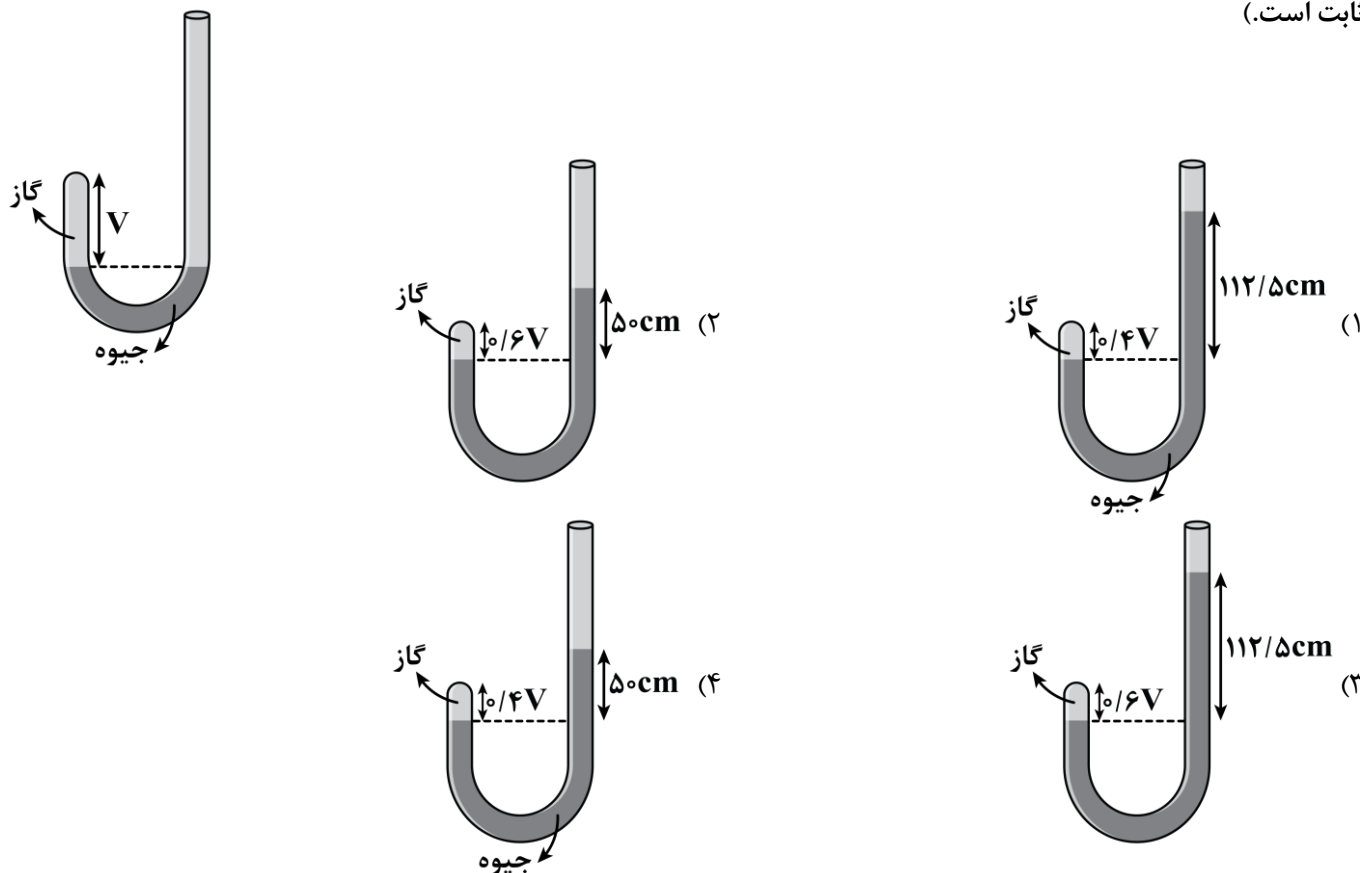
$$Q_1 = mc\Delta\theta = 40 \times 10^{-3} \times 235 \times (960 - (-40)) = 9400 \text{ J} = 9/4 \text{ kJ}$$

$$Q_2 = mL_F = 40 \times 10^{-3} \times 90 = 3/6 \text{ kJ}$$

$$\Rightarrow Q_{\text{کل}} = Q_1 + Q_2 = 9/4 + 3/6 = 13 \text{ kJ}$$



۷۴- در شکل زیر، جیوه و مقداری گاز آرمانی درون لوله در حالت تعادل قرار دارند. اگر آن قدر جیوه به لوله اضافه کنیم که حجم گاز جمع شده در لوله ۴۰٪ کاهش یابد، کدام شکل وضعیت لوله را به درستی نشان می‌دهد؟ ($P_0 = 75 \text{ cmHg}$ و دما در کل فرایند ثابت است).



(متوسط - محاسباتی - استاندارد) - صفحه ۱۲۰ - ۱۰۴

پاسخ: گزینه ۲

اگر حجم گاز ۴۰٪ کم شود، حجم نهایی آن برابر است با:

$$V_2 = V_1 - \frac{40}{100} V_1 = \frac{60}{100} V_1 \Rightarrow V_2 = \frac{6}{10} V_1$$

طبق قانون گازها در دمای ثابت داریم:

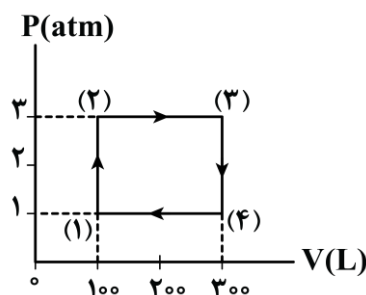
$$P_1 V_1 = P_2 V_2 \Rightarrow 75 \times V_1 = P_2 \times \frac{6}{10} V_1 \Rightarrow P_2 = 125 \text{ cmHg}$$

بنابراین فشار گاز ۵۰ cmHg از فشار هوای محیط بیش‌تر است، پس اختلاف سطح جیوه در دو سمت باید ۵۰ cm باشد.



۷۵- یک گاز کامل چرخه نشان داده شده در شکل زیر را می‌پیماید. دمای گاز در حالت (۱) برابر ۲۰۰ K است. به ترتیب از راست به چپ

دمای گاز در حالت (۳) چند درجه سلسیوس است و در هر چرخه، چند کیلوژول گرما مبادله می‌شود؟ ($1 \text{ atm} = 10^5 \text{ Pa}$)



(۱) ۴۰، ۱۸۰۰

(۲) ۹۰، ۱۸۰۰

(۳) ۴۰، ۱۵۲۷

(۴) ۹۰، ۱۵۲۷

برای مقایسه دما در حالت‌های (۱) و (۳)، از معادله حالت گازهای آرمانی استفاده می‌کنیم:

$$PV = nRT \Rightarrow \frac{T_3}{T_1} = \frac{P_3 V_3}{P_1 V_1} \Rightarrow \frac{T_3}{200} = \frac{3 \times 300}{1 \times 100}$$

$$\Rightarrow T_3 = 1800 \text{ K} \Rightarrow \theta_3 = 1800 - 273 = 1527^\circ \text{C}$$

برای محاسبه اندازه گرمای مبادله‌شده، کافی است مساحت درون چرخه را به دست آوریم:

$$|Q| = S \Rightarrow |Q| = 2 \text{ atm} \times 200 \text{ L}$$

$$\Rightarrow |Q| = 2 \times 10^5 \text{ Pa} \times 200 \times 10^{-3} \text{ m}^3$$

$$\Rightarrow |Q| = 40000 \text{ J} = 40 \text{ kJ}$$





برای دیدن پاسخنامه ویدئویی آزمون
QRcode بالا را اسکن کنید
یا بر روی لینک زیر کلیک کنید
پاسخنامه ویدئویی آزمون

جامع شبیه ساز کنکور سراسری

بودجه بندی
این آزمون

مباحث این آزمون در مجموع ۳۰ تست کنکور را پوشش داده است.

سهم در
کنکور

۷۶- مجموع اعداد کوانتومی اصلی و فرعی الکترون های لایه ظرفیت عنصری که با اکسیژن در یک گروه و با گالیم در یک دوره قرار دارد، برابر کدام است؟

۱۲ (۴)

۲۸ (۳)

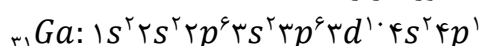
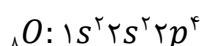
۳۴ (۲)

۶ (۱)

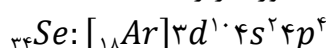
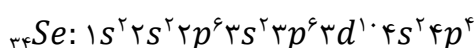
(آسان - مفهومی و محاسباتی - سریع ۵ - صفحه ۳۴ - ۱۰۰۱)

پاسخ: گزینه ۳

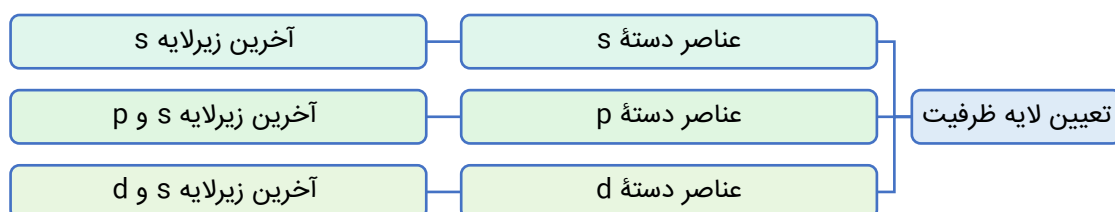
اتم اکسیژن نخستین عنصر نافلزی گروه شانزدهم جدول دوره های و گالیم سومین عنصر گروه سیزدهم بوده و در دوره چهارم قرار دارد. آرایش الکترونی این دو عنصر به صورت زیر است:



با توجه به توضیحات گفته شده، عنصر مورد نظر در گروه شانزدهم و دوره چهارم جدول دوره های قرار داشته و معادل سلنیم با نماد Se است. آرایش الکترونی کامل و فشرده سلنیم به صورت زیر است:



برای پیدا کردن لایه ظرفیت عناصر مختلف از جدول زیر استفاده می کنیم:



همانطور که مشخص است، لایه ظرفیت عنصر سلنیم شامل زیرلایه های $4s^2$ و $4p^4$ است. حال مجموع اعداد کوانتومی اصلی و فرعی الکترون های موجود در لایه ظرفیت این عنصر را محاسبه می کنیم. توجه داریم که عدد کوانتومی فرعی زیرلایه های s و p به ترتیب معادل صفر و یک است. بر این اساس، داریم:

$$\text{مجموع اعداد کوانتومی اصلی و فرعی} = \underbrace{2 \times 4}_{4s^2} + \underbrace{4 \times 5}_{4p^4} = 28$$

با توجه به محاسبات انجام شده، مجموع اعداد کوانتومی اصلی و فرعی الکترون های موجود در لایه ظرفیت عنصر سلنیم برابر ۲۸ است.



۷۷- کدام مورد درست است؟

- ۱) هیدروژن تنها عنصری است که در ترکیب های خود می تواند به آرایش دوتایی دست پیدا کند.
- ۲) اتم های نافلزی، فقط با گرفتن الکترون می توانند به آرایش گاز نجیب هم دوره خود دست پیدا کنند.
- ۳) مولکول، ذره ای است که اتم های تشکیل دهنده آن، تمام الکترون های ظرفیتی خود را به اشتراک می گذارند.
- ۴) در ترکیب های مولکولی، الکترون های اشتراکی بیشتر زمان خود را اطراف هسته اتمی با بار جزئی منفی سپری می کنند.

(متوسط - مفهومی - سریع ۵ - صفحه ۴۱ - ۱۲۰۳)

پاسخ: گزینه ۴

در ترکیب های مولکولی، الکترون های اشتراکی بیشتر زمان خود را در اطراف هسته اتمی سپری می کنند که خاصیت نافلزی بالاتری دارد. به همین دلیل به این اتم ها بار جزئی منفی نسبت داده می شود. همچنین به اتمی که خاصیت نافلزی کمتری داشته باشد، بار جزئی مثبت نسبت داده می شود. برای مثال در مولکول H_2O اتم اکسیژن خاصیت نافلزی بیشتری داشته و بار جزئی آن منفی است.

اتم‌های هیدروژن نیز خاصیت نافلزی کم‌تری داشته و بار جزئی آن‌ها مثبت است؛ بنابراین الکترون‌های اشتراکی بیشتر زمان خود را در اطراف هسته اتم اکسیژن سپری می‌کنند. نقشه پتانسیل الکترواستاتیکی مولکول آب به صورت زیر است:



در این تصویر رنگ قرمز نشان‌دهنده تراکم بالاتر الکترون و رنگ آبی نشان‌دهنده تراکم کم‌تر الکترون است.

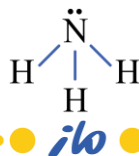
بررسی سایر گزینه‌ها:

۱) اتم هیدروژن می‌تواند با گرفتن یا به اشتراک گذاشتن الکترون ظرفیتی خود، به آرایش الکترونی گاز نجیب هم‌دوره خود یعنی هلیم دست پیدا کند. همچنین عنصر لیتیم نیز می‌تواند با از دست دادن الکترون و تبدیل شدن به کاتیون، به آرایش الکترونی هلیم دست پیدا کند. در رابطه با هلیم، داریم:



۲) اتم‌های نافلزی با گرفتن یا به اشتراک گذاشتن الکترون‌های ظرفیتی خود، به آرایش الکترونی گاز نجیب هم‌دوره خود می‌رسند. برای مثال اتم اکسیژن در مولکول H_2O ، با به اشتراک گذاشتن و در ترکیب یونی K_2O ، با گرفتن الکترون به آرایش گاز نجیب هم‌دوره خود یعنی نئون دست پیدا می‌کند.

۳) مولکول‌ها، ترکیب‌هایی هستند که در آن‌ها اتم‌ها با به اشتراک گذاشتن برخی یا تمام الکترون‌های لایه ظرفیت خود، به آرایش گاز نجیب هم‌دوره خود می‌رسند. برای مثال اتم نیتروژن (که در لایه ظرفیت خود دارای ۵ الکترون است) در مولکول آمونیاک (NH_3) ۳ الکترون خود را با اتم‌های هیدروژن به اشتراک گذاشته و ۲ الکترون ظرفیتی خود را نیز به صورت جفت الکترون ناپیوندی روی اتم خود نگه می‌دارد. از طرفی اتم‌های هیدروژن تک الکترون ظرفیتی خود را با نیتروژن به اشتراک گذاشته و به آرایش گاز نجیب هم‌دوره خود یعنی هلیم می‌رسند. ساختار لوویس آمونیاک به صورت زیر است:



۷۸- کدام مورد درست است؟

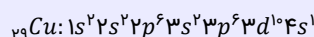
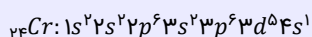
- ۱) در یک اتم، انرژی الکترون در زیرلایه $5p$ نسبت به انرژی الکترون در زیرلایه $4f$ بیشتر است.
- ۲) در اتم یک عنصر، اگر زیرلایه $6p$ در حال پرشدن باشد، زیرلایه $4f$ یقیناً پر از الکترون است.
- ۳) در اتم هیدروژن، انرژی پرتو حاصل از بازگشت الکترون از لایه ۶ به ۳، در طیف امواج فرابنفش جای دارد.
- ۴) در جدول تناوبی امروزی، در آرایش الکترونی ۹۴ عنصر، حداقل ۵ الکترون در زیرلایه (ها) با $l = 2$ وجود دارد.

(متوسط - مفهومی - استاندارد) - صفحه ۳۲ - ۱۰۰۱

پاسخ: گزینه ۲

مجموع اعداد کوانتومی اصلی و فرعی برای زیرلایه‌های $6p$ و $4f$ برابر ۷ است. از آنجا که عدد کوانتومی اصلی یعنی n در زیرلایه $6p$ بالاتر است، پس می‌توان گفت این زیرلایه انرژی بیشتری داشته و نسبت به زیرلایه $4f$ دیرتر از الکترون پر خواهد شد.

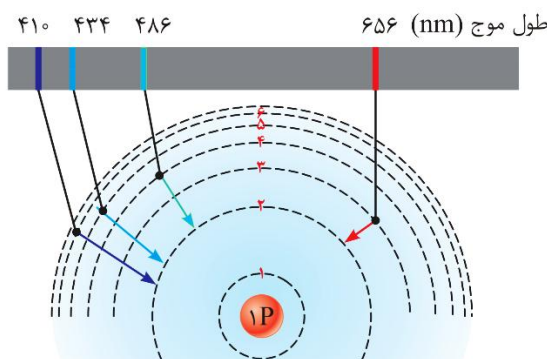
پرشدن زیرلایه‌ها تنها به عدد کوانتومی اصلی وابسته نیست؛ بلکه از یک قاعده کلی به نام **قاعده آفبا** پیروی می‌کند. قاعده آفبا ترتیب پر شدن زیرلایه‌ها را در اتم‌های گوناگون نشان می‌دهد. مطابق این قاعده هنگام افزودن الکترون به زیرلایه‌ها، نخست زیرلایه‌های نزدیک‌تر به هسته پر می‌شوند که دارای انرژی **کمتر** هستند و سپس لایه‌های بالاتر پر خواهند شد. براساس قاعده آفبا هرچه انرژی یک زیرلایه کمتر باشد، آن زیرلایه زودتر از الکترون پر می‌شود. هرچه یک زیرلایه $n + l$ پایین‌تری داشته باشد، انرژی آن زیرلایه **کمتر** است. برای مثال زیرلایه $4s$ زودتر از زیرلایه $3d$ شروع به گرفتن الکترون می‌کند. هنگامی که مقدار $n + l$ برای دو زیرلایه برابر باشد، زیرلایه با عدد کوانتومی اصلی **کوچک‌تر**، انرژی کمتری داشته و زودتر از الکترون پر می‌شود. برای مثال زیرلایه $3p$ نسبت به زیرلایه $4s$ انرژی کمتری دارد. داده‌های طیف‌سنجی نشان می‌دهند که قاعده آفبا برای برخی اتم‌ها **نارسایی** دارد. برای مثال عناصر کروم و مس در بیرونی‌ترین زیرلایه خود ($4s$) تنها دارای **یک الکترون** هستند. آرایش الکترونی این عناصر به شرح زیر است:



بررسی سایر گزینه‌ها:

① مجموع اعداد کوانتومی اصلی و فرعی برای زیرلایه‌های $5p$ و $4f$ به ترتیب برابر ۶ و ۷ است. پس می‌توان گفت انرژی زیرلایه $4f$ نسبت به $5p$ بیشتر بوده و این زیرلایه، دیرتر از الکترون پر می‌شود.

② در اتم هیدروژن، بازگشت الکترون از لایه‌های سوم تا ششم به لایه دوم باعث ایجاد پرتوهای رنگی در طیف مرئی می‌شود. تصویر زیر طول موج و رنگ این پرتوها را نمایش می‌دهد:



همانطور که مشخص است، بازگشت الکترون از لایه ششم به دوم، پرتویی با طول موج 410 nm در محدوده طیف مرئی ایجاد می‌کند. انرژی پرتو حاصل از بازگشت الکترون از لایه ششم به سوم قطعاً از انرژی این پرتو کمتر بوده و طول موج آن بیشتر است. از طرفی این پرتو در طیف مرئی حضور ندارد؛ بنابراین می‌توان نتیجه گرفت که طول موج پرتو حاصل از بازگشت الکترون از لایه ششم به سوم بیشتر از 700 nm بوده و نمی‌تواند در طیف فرابنفش قرار بگیرد. این پرتو در محدوده فروسرخ قرار دارد.

③ کروم نخستین عنصری است که در زیرلایه‌های خود حداقل ۵ الکترون با $l = 2$ دارد. آرایش الکترونی این عنصر به صورت زیر است:

$${}_{24}Cr: 1s^2 2s^2 2p^6 3s^2 3p^6 3d^5 4s^1$$

در جدول تناوبی امروزی ۱۱۸ عنصر در ۷ دوره و ۱۸ گروه جای گرفته‌اند. در ۲۳ عنصر اول از این ۱۱۸ عنصر (از اتم هیدروژن تا اتم وانادیم)، کمتر از ۵ الکترون در زیرلایه (ها) با $l = 2$ وجود دارد؛ بنابراین مقدار خواسته شده برابر است با:

$$A = 118 - 23 = 95$$



۷۹- نام کدام ترکیب به صورت درست نوشته شده است؟

(۲) کبالت (II) سولفات: $CoSO_4$

(۱) بوکسیت: Al_2O_3

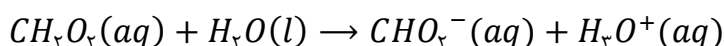
(۴) روی دی کلرید: $ZnCl_2$

(۳) لیتیم فورمات: $LiCHO_2$

(متوسط - مفهومی - سریع - صفحه ۳۹ - ۱۰۰۱)

پاسخ: گزینه ۳

فورمیک اسید، ساده‌ترین اسید آلی با فرمول مولکولی CH_2O_2 است. از یونش این اسید در آب، یون‌های هیدرونیوم و فورمات تولید می‌شوند. معادله یونش این اسید در آب به صورت زیر است:



از ترکیب یون فورمات با یون لیتیم، ترکیب یونی لیتیم فورمات با فرمول شیمیایی $LiCHO_2$ تولید می‌شود. با توجه به مطرح شدن موارد مشابه در کنکور سراسری، بهتر است یون‌های پرکاربرد زیر را علاوه بر یون‌های مطرح‌شده در کتاب درسی، به خاطر بسپارید:

نام یون	فرمول شیمیایی یون	نام یون	فرمول شیمیایی یون
فورمات	CHO_2^-	هیدروژن کربنات	HCO_3^-
استات	$C_2H_3O_2^-$	هیدروژن سولفات	HSO_4^-
بنزوات	$C_6H_5COO^-$	سولفیت	SO_3^{2-}
پرمنگنات	MnO_4^-	نیتريت	NO_2^-
سیانید	CN^-	پراکسید	O_2^{2-}

بررسی سایر گزینه‌ها:

۱ نام درست این ترکیب، به صورت آلومینیم اکسید است. توجه داریم که آلومینیم در طبیعت به شکل بوکسیت (Al_2O_3) به همراه ناخالصی یافت شده و این نام، مربوط به سنگ معدن حاوی فلز آلومینیم است.

۲ کبالت از جمله فلزهای چند ظرفیتی است. عدد اکسایش این عنصر در ترکیبات مختلف می‌تواند ۲+ یا ۳+ باشد؛ بنابراین برای نام‌گذاری ترکیب‌های آن، باید عدد اکسایش فلز در آن ترکیب را نیز ذکر کنیم. نام‌گذاری این ترکیب یونی ایرادی ندارد، اما در نوشتن نماد عناصر مختلف باید حرف اول با حروف بزرگ و حرف دوم را با حرف کوچک بنویسیم. فرمول شیمیایی کبالت (II) سولفات به صورت $CoSO_4$ است.

۳ فلزها در واکنش‌های شیمیایی الکترون از دست داده و به کاتیون تبدیل می‌شوند. با کنار هم قرار گرفتن کاتیون‌ها و آنیون‌ها، ترکیبات یونی شکل می‌گیرند. توجه داریم هر ترکیب دارای فلز، نوعی ترکیب یونی بوده و باید با قواعد ترکیبات یونی آن‌ها را نام‌گذاری کنیم. برای مثال نام ترکیب مطرح شده در صورت سؤال، به صورت روی کلرید است.



۸۰- کدام یک از موارد زیر درست است؟

- الف - بخش عظیمی از آب‌کره موجود در زمین، به طور مستقیم در صنعت قابل استفاده است.
 ب - بخش مهمی از تبادل مواد بین هواکره و سنگ‌کره از طریق فرایندهای فیزیکی انجام می‌شود.
 ج - مجموع غلظت یون‌های موجود در آب‌کره زمین، پس از انقلاب صنعتی تغییر محسوسی کرده است.
 د - اتم سازنده فراوان‌ترین کاتیون موجود در آب‌کره، نسبت به سایر فلزهای هم‌دوره خود واکنش‌پذیرتر است.
 ۱) «الف» و «ج» ۲) «الف» و «د» ۳) «ب» و «ج» ۴) «ب» و «د»

(آسان - خط به خط و مفهومی - سریع ۵ - صفحه ۸۸ - ۱۰۰۳)

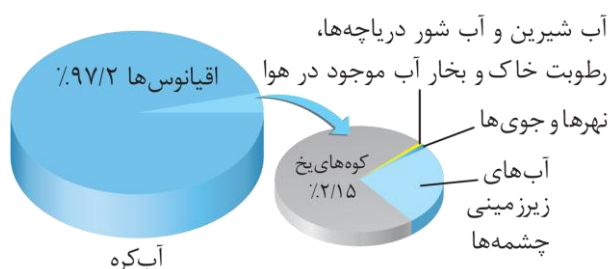
پاسخ: گزینه ۴

زمین از چهار بخش سنگ‌کره، هواکره، آب‌کره و زیست‌کره تشکیل شده است. زمین از دیدگاه شیمیایی پویاست و بخش‌های مختلف آن با یکدیگر برهم‌کنش‌های فیزیکی و شیمیایی دارند. در رابطه با بخش‌های سازنده کره زمین، عبارت‌های (ب) و (د) درست هستند.

مبادله مواد در کره زمین

سالانه حجم عظیمی از آب دریاها بخار و وارد هواکره می‌شود و به صورت بارش در آب‌کره یا سنگ‌کره فرود می‌آید. جانداران آبرزی سالانه میلیاردها تن کربن‌دی‌اکسید را وارد هواکره و مقدار بسیار زیادی از گاز اکسیژن محلول در آب را مصرف می‌کنند. فعالیت‌های آتشفشانی سبب می‌شود گازهای گوناگون و مواد شیمیایی جامد به صورت گرد و غبار وارد هواکره شوند. لاشه جانوران و گیاهان بر اثر واکنش‌های شیمیایی تجزیه شده و به صورت مولکول‌های کوچک‌تری وارد آب‌کره، هواکره یا سنگ‌کره می‌شوند.

الف) بخش عظیمی از آب کره شامل آب شور موجود در اقیانوس ها و دریاها است که بایستی قبل از مصرف تصفیه شده و در نتیجه به طور مستقیم قابل استفاده نیست. تصویر زیر نحوه توزیع منابع مختلف آب کره را نمایش می دهد:



نکته | آب کره

در رابطه با آب کره زمین، به نکات زیر توجه کنید:

- ۷۵٪ سطح زمین از آب پوشیده شده است؛ به همین علت در فضا به رنگ **آبی** دیده می شود. بخش عمده این آب در اقیانوس ها و دریاها توزیع شده است. اگر زمین مسطح می بود، همه سطح آن را تا ارتفاع بیش از ۲ کیلومتر، آب می پوشاند.
 - آب اقیانوس ها و دریاها مخلوطی همگن است که اغلب مزه ای شور دارد، زیرا مقدار قابل توجهی از نمک های گوناگون در آن حل شده است. برآوردها نشان می دهد که 5×10^6 تن نمک در آب اقیانوس ها و دریاها وجود دارد و سالانه میلیاردها تن مواد گوناگون از سنگ کره نیز وارد آب کره می شوند. از آنجا که جرم کل مواد حل شده در آب های کره زمین تقریباً ثابت است، پس باید همین مقدار ماده نیز از آب دریاها و اقیانوس ها خارج شود.
 - ۹۷/۲٪ آب کره در اقیانوس ها و ۲/۸٪ آن به صورت زیر وجود دارد:
- مجموعه آب دریاچه ها، رطوبت خاک و بخار آب > آب نه رها و جوی ها > آب های زیرزمینی > کوه های یخ (۲/۱۵٪) : منابع غیر اقیانوسی آب کره
- آب باران در هوای پاک تقریباً خالص است، زیرا هنگام تشکیل برف و باران، تقریباً همه مواد حل شده در آب از آن جدا می شود. این فرایند، الگویی برای تهیه آب خالص است. فرایندی که تقطیر و فراورده آن **آب مقطر** نام دارد.

پ) بخش مهمی از تبادل هواکره و سنگ کره از طریق فرایندهای فیزیکی مانند بارش باران یا ورود گرد و غبار از سنگ کره به هواکره است. برای مثال، طی فعالیت های آتشفشانی، مقدار زیادی از گازها وارد هواکره می شود.

ج) جرم کل مواد حل شده در آب کره زمین تقریباً ثابت است. به این معنا که به همان اندازه که مواد تازه ای به آن اضافه می شود، تقریباً به همان اندازه نیز موادی از آن خارج می شوند.

د) جدول زیر غلظت یون های مختلف در نمونه ای از آب دریا را نمایش می دهد:

نام یون	کلرید	سدیم	سولفات	منیزیم	کلسیم	پتاسیم	کربنات	برمید
نماد یون	Cl^-	Na^+	SO_4^{2-}	Mg^{2+}	Ca^{2+}	K^+	CO_3^{2-}	Br^-
مقدار یون (میلی گرم در کیلوگرم آب)	۱۹۰۰۰	۱۰۵۰۰	۲۶۵۵	۱۳۵۰	۴۰۰	۳۸۰	۱۴۰	۶۵

همانطور که مشخص است، یون سدیم فراوان ترین کاتیون موجود در آب دریا است. سدیم از جمله فلزهای قلیایی بوده و در گروه یک و دوره سوم جدول تناوبی قرار گرفته است. در هر دوره، فلزهای قلیایی بیشترین خاصیت فلزی را دارند.



- ۸۱- اگر ۰/۵ مول برم مایع در ۴۰۰ میلی لیتر هگزانول حل شود، درصد جرمی حل شونده کدام است؟ (جرم هر میلی لیتر از حلال را برابر ۰/۸ گرم در نظر بگیرید. $Br = ۸۰, O = ۱۶, C = ۱۲, H = ۱ : g.mol^{-1}$)
- (۱) ۲۰ (۲) ۴۰ (۳) ۵۰ (۴) ۶۰

پاسخ: گزینه ۱

(آسان - محاسباتی - سریع - صفحه ۹۶ - ۱۰۰۳)

فرمول شیمیایی مولکول برم به صورت Br_2 بوده و این ماده تنها عنصر نافلز است که در شرایط اتاق به حالت مایع یافت می شود. ابتدا جرم برم حل شده را محاسبه می کنیم:

$$? g Br_2 = ۰/۵ mol Br_2 \times \frac{۱۶۰ g Br_2}{۱ mol Br_2} = ۸۰ g$$

هگزانول، ششمین الکل تک عاملی بوده که به دلیل غلبه بخش ناقطبی (زنجر هیدروکربنی) بر بخش قطبی (گروه هیدروکسیل) آن، ناقطبی بوده و طبق قاعده شبیه، شبیه را حل می کند، حلال مناسبی برای مواد ناقطبی از جمله مولکول های جور هسته مانند برم به شمار می رود. در مرحله بعد جرم حلال یعنی هگزانول را به دست می آوریم:

$$جرم = چگالی \times حجم = ۰/۸ g.mL^{-1} \times ۴۰۰ mL = ۳۲۰ g$$

$$\frac{جرم}{حجم} = چگالی$$

در پایان طبق فرمول درصد جرمی، جرم حل شونده یعنی برم را محاسبه می کنیم:

$$درصد = \frac{جرم حل شونده}{جرم حلال + جرم حل شونده} \times ۱۰۰ = \frac{۸۰}{۸۰ + ۳۲۰} \times ۱۰۰ = ۲۰$$

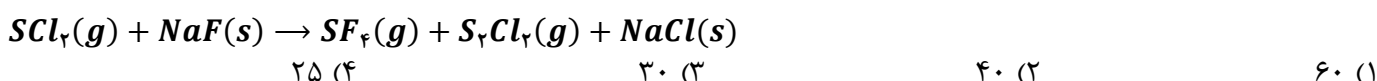
$$درصد جرمی = \frac{جرم حل شونده}{جرم محلول} \times ۱۰۰$$

قطبیت الکل ها

با افزایش طول زنجیره هیدروکربنی در مولکول الکل ها، میزان قطبیت این مواد کاهش می یابد؛ پس با افزایش طول زنجیره کربنی در الکل ها میزان انحلال پذیری این مواد در آب (حلال قطبی) کاهش پیدا کرده و میزان انحلال پذیری آن ها در چربی (حلال ناقطبی) افزایش می یابد؛ به عبارت دیگر، با افزایش طول زنجیره کربنی در الکل ها، خاصیت آب گریزی یا همان چربی دوستی الکل ها بیشتر می شود. در متانول، اتانول و ۱-پروپانول (سه عضو اول خانواده الکل های تک عاملی)، بخش قطبی به شدت بر بخش ناقطبی غلبه دارد و به همین خاطر، این الکل ها به هر نسبتی در آب حل شده و نمی توان محلول سیر شده ای از آن ها تهیه کرد. انحلال پذیری ۱-پروپانول و ۱-پنتانول بیشتر از ۱ گرم در ۱۰۰ گرم آب است؛ پس این مواد محلول در آب هستند. از طرفی، انحلال پذیری ۱-هگزانول، ۱-هپتانول و ۱-اوکتانول، بین ۱ تا ۰/۱ گرم در ۱۰۰ گرم آب است؛ پس این الکل ها کم محلول در آب محسوب می شوند. سایر الکل های تک عاملی با تعداد اتم کربن بیشتر، نامحلول در آب هستند.



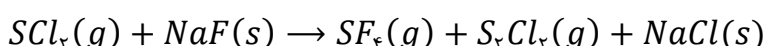
- ۸۲- با توجه به معادله موازنه نشده زیر، اگر ۶/۱۸ گرم $SrCl_2$ در واکنش با مقدار کافی سدیم فلوئورید، ۱۲۰ میلی لیتر گاز $SrCl_2$ تولید کند، بازده درصدی واکنش انجام شده برابر چند درصد خواهد بود؟ (حجم مولی گازها در شرایط ذکر شده برابر ۲۴ لیتر بر مول است. $Cl = ۳۵/۵, S = ۳۲ : g.mol^{-1}$)



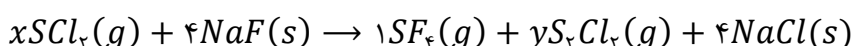
پاسخ: گزینه ۴

(سخت - محاسباتی - زمان بر - صفحه ۲۴ - ۱۱۰۱)

معادله واکنش انجام شده به صورت زیر است:



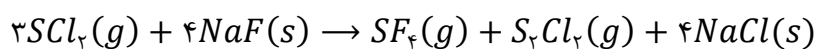
برای موازنه واکنش انجام شده، ابتدا به پیچیده ترین ماده یعنی SF_6 ضریب ۱ می دهیم. حال باید برای موازنه اتم فلوئور، به NaF ضریب ۴ بدهیم. در مرحله بعد، $NaCl$ برای موازنه شدن سدیم ضریب ۴ می گیرد. ادامه موازنه با روش وارسی امکان پذیر نبوده و بایستی به مواد باقی مانده ضرایب مجهول اختصاص دهیم؛ بنابراین ضریب ماده $SrCl_2$ را برابر x و ضریب ماده $SrCl_2$ را برابر y فرض می کنیم. حال داریم:



در مرحله بعد، پس از برابر قرار دادن شمار اتم‌های گوگرد و کلر در دو طرف معادله، ضرایب مجهول را پیدا می‌کنیم.

$$\begin{cases} S : x = 1 + 2y \\ Cl : 2x = 2y + 4 \end{cases} \Rightarrow x = 3, y = 1$$

طبق محاسبات انجام شده، معادله موازنه شده به صورت زیر است:



حال بر اساس قواعد استوکیومتری، مقدار نظری S_2Cl_2 تولید شده را محاسبه می‌کنیم:

$$? L S_2Cl_2 = 6/18 g SCl_2 \times \frac{1 \text{ mol } SCl_2}{10.3 g SCl_2} \times \frac{1 \text{ mol } S_2Cl_2}{3 \text{ mol } SCl_2} \times \frac{24 L S_2Cl_2}{1 \text{ mol } S_2Cl_2} \times \frac{1000 \text{ mL}}{1 L} = 480 \text{ mL}$$

در پایان، بازده درصدی واکنش انجام شده را به دست می‌آوریم:

$$\text{بازده درصدی} = \frac{\text{مقدار نظری}}{\text{مقدار عملی}} \times 100 = \frac{120 \text{ mL}}{480 \text{ mL}} \times 100 = 25 \text{ درصد}$$

بازده درصدی

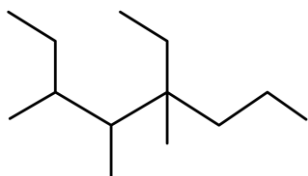
واکنش‌های شیمیایی همیشه مطابق آنچه انتظار می‌رود پیش نمی‌روند؛ زیرا ممکن است واکنش‌دهنده‌ها ناخالص باشند یا ممکن است واکنش به طور کامل انجام نشود، حتی گاهی نیز هم‌زمان با آن واکنش‌های ناخواسته دیگری انجام می‌شوند. با این توصیف، مقدار واقعی فراورده از مقدار مورد انتظار کمتر است. در واقع بازده درصدی واکنش‌های شیمیایی از ۱۰۰ کمتر است. در مسائل مختلف از طریق فرمول زیر می‌توانیم بازده درصدی واکنش را محاسبه کنیم:

$$\text{بازده واکنش} = \frac{\text{مقدار نظری}}{\text{مقدار عملی}} \times 100$$

برای محاسبه سریع‌تر مقدار نظری واکنش‌دهنده مصرف شده، ابتدا مول عملی فراورده مورد نظر را در کسر $\frac{\text{ضریب استوکیومتری واکنش‌دهنده}}{\text{ضریب استوکیومتری فراورده}}$ ضرب می‌کنیم. در مرحله بعد مول به دست آمده را به بازده واکنش تقسیم می‌کنیم. همچنین برای به دست آوردن مقدار عملی فراورده تولید شده، ابتدا مول نظری واکنش‌دهنده مورد نظر را در کسر $\frac{\text{ضریب استوکیومتری فراورده}}{\text{ضریب استوکیومتری واکنش‌دهنده}}$ ضرب می‌کنیم. در مرحله بعد مول به دست آمده را در بازده واکنش ضرب می‌کنیم. توجه داریم برای تبدیل مول یک فراورده به فراورده دیگر و همچنین یک واکنش‌دهنده به واکنش‌دهنده دیگر بازده تأثیری نخواهد داشت!



۸۳- نام‌گذاری آلکان مقابل، به چه صورت بوده و جرم مولی این ترکیب، به تقریب چند برابر جرم مولی ساده‌ترین آلکن شاخه‌دار است؟



$$(C = 12, H = 1 : g.mol^{-1})$$

۱) ۵-اتیل-۵،۴،۳-تری‌متیل اوکتان - ۳/۲۸

۲) ۴-اتیل-۶،۵،۴-تری‌متیل اوکتان - ۲/۲۴

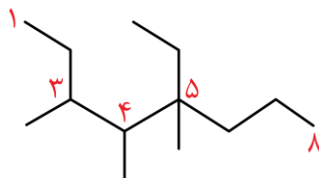
۳) ۵-اتیل-۵،۴،۳-تری‌متیل اوکتان - ۲/۲۴

۴) ۴-اتیل-۶،۵،۴-تری‌متیل اوکتان - ۳/۲۸

(متوسط - مفهومی - استاندارد) - صفحه ۴۱ - ۱۱۰۱

پاسخ: گزینه ۱ 

فرمول نقطه-خط آلکان مورد نظر و نحوه شماره‌گذاری اتم‌های کربن موجود در زنجیر اصلی به صورت زیر است:



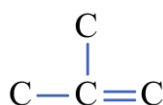
به دلیل نزدیک‌تر بودن به اولین شاخه فرعی، شماره‌گذاری زنجیر اصلی هیدروکربن مورد نظر از سمت چپ انجام شده و نام آن به صورت ۵-اتیل-۵،۴،۳-تری‌متیل اوکتان خواهد بود.

نام‌گذاری آلکان‌ها

برای نام‌گذاری آلکان‌ها، ابتدا باید زنجیر اصلی که دارای بیشترین شمار کربن باشد را پیدا کنیم. توجه داریم که اگر در دو حالت، تعداد کربن زنجیر اصلی یکسان باشد، اولویت با حالتی است که تعداد شاخه‌های فرعی بیشتر است. در مرحله بعد، بایستی جهت شماره‌گذاری را براساس تراکم شاخه‌های فرعی تعیین کنیم. شماره‌گذاری را از سمتی آغاز می‌کنیم که به اولین شاخه فرعی نزدیک‌تر باشد. اگر این مورد از هر دو جهت یکسان بود، شماره‌گذاری را از سمتی آغاز می‌کنیم که به دومین شاخه فرعی نزدیک‌تر باشد. در صورت برابر بودن این مورد، همین روند را ادامه می‌دهیم. اگر شماره تمام شاخه‌های فرعی از هر دو سمت برابر بود، اولویت شماره‌گذاری با سمتی است که به شاخه‌ای که حرف اول آن بر شاخه دیگر مقدم باشد، نزدیک‌تر باشد (برای مثال شاخه فرعی اتیل بر متیل مقدم است). فرمول مولکولی این آلکان به صورت $C_{13}H_{28}$ بوده و جرم مولی آن برابر 184 g.mol^{-1} است. فرمول ساختاری ساده‌ترین آلکن شاخه‌دار به صورت زیر است:



ساختار زنجیر کربنی این ماده، به صورت زیر است:



فرمول مولکولی این آلکن به صورت C_4H_8 بوده و جرم مولی آن برابر 56 g.mol^{-1} است. در پایان نسبت خواسته شده را محاسبه می‌کنیم:

$$\frac{184}{56} \approx 3.28$$


۸۴- در یک ظرف، ۲۵ گرم آب ($c = 4 \text{ J/g.}^\circ\text{C}$) با دمای 23°C وجود دارد. با سوزاندن ۰/۹ گرم گلوکز و انتقال گرمای تولید شده به ظرف، دمای آب به چند درجه سانتی‌گراد خواهد رسید؟ (نیمی از گرمای تولید شده در فرایند سوختن گلوکز، به هدر می‌رود.)

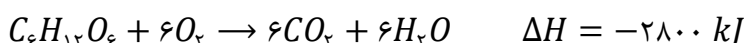
$$C_6H_{12}O_6 + 6O_2 \rightarrow 6CO_2 + 6H_2O \quad ; \quad \Delta H = -2800 \text{ kJ} \quad (O = 16, C = 12, H = 1 : \text{g.mol}^{-1})$$

۴۸ (۴) ۵۰ (۳) ۷۳ (۲) ۷۵ (۱)

(متوسط - محاسباتی - استاندارد - صفحه ۶۴ - ۱۱۰۲)

پاسخ: گزینه ۲

معادله ترموشیمی موازنه شده سوختن گلوکز به صورت زیر است:



ابتدا مقدار انرژی تولید شده را محاسبه می‌کنیم:

$$? J = 0.9 \text{ g } C_6H_{12}O_6 \times \frac{1 \text{ mol } C_6H_{12}O_6}{180 \text{ g } C_6H_{12}O_6} \times \frac{2800 \text{ kJ}}{1 \text{ mol } C_6H_{12}O_6} \times \frac{1000 \text{ J}}{1 \text{ kJ}} = 14000 \text{ J}$$

گرماشیمی (ترموشیمی)

هر واکنش شیمیایی می‌تواند با تغییر رنگ، تولید رسوب، آزاد شدن گاز و حتی ایجاد جرقه و گرما همراه باشد؛ اما ویژگی بنیادی و مشترک همه واکنش‌های شیمیایی داد و ستد و تبادل انرژی با محیط اطراف است. بررسی و مطالعه گرمای مبادله شده در واکنش‌ها موجب پیدایش شاخه ترموشیمی (گرماشیمی) از علم شیمی شد. این شاخه از علم شیمی گرمای واکنش‌های شیمیایی از لحاظ کمی و کیفی، تغییر این گرما و تأثیر آن بر حالت فیزیکی مواد را بررسی می‌کند. همچنین به‌خاطر داشته باشید که اگر یک واکنش را با آنتالپی آن واکنش بیان کنند، به آن واکنش ترموشیمیایی گفته می‌شود.

طبق گفته صورت سؤال، نیمی از انرژی معادل ۷۰۰۰ ژول به هدر رفته و نیم دیگر آن به آب داده می‌شود. حال با استفاده از فرمول، مقدار تغییر دمای آب را محاسبه می‌کنیم:

$$Q = mc\Delta\theta \Rightarrow 7000 = 35 \times 4 \times \Delta\theta \Rightarrow \Delta\theta = 50$$

با توجه به محاسبات انجام شده، تغییر دمای آب برابر ۵۰ درجه سانتی‌گراد بوده و دمای نهایی آن به ۷۳ درجه سانتی‌گراد خواهد رسید.

ظرفیت گرمایی (C) و ظرفیت گرمایی ویژه (c)

ظرفیت گرمایی (C)، مقدار گرمای لازم برای افزایش دمای یک ماده به اندازه 1°C یا 1K است. این کمیت به جرم و جنس جسم بستگی دارد. یکای این کمیت، $\text{J} \cdot \text{K}^{-1}$ یا $\text{J} \cdot ^\circ\text{C}^{-1}$ است. ظرفیت گرمایی از رابطه $C = m \times c$ محاسبه می‌شود. ظرفیت گرمایی ویژه (c)، مقدار گرمای لازم برای افزایش دمای یک گرم از ماده به اندازه 1°C یا 1K است. این کمیت فقط به جنس ماده وابسته است. همچنین یکای این کمیت، $\text{J} \cdot \text{g}^{-1} \cdot ^\circ\text{C}^{-1}$ یا $\text{J} \cdot \text{g}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$ است. با توجه به توضیحات داده شده، برای افزایش دمای یکسان دو نمونه ماده با ظرفیت گرمایی (C) برابر، انرژی یکسانی لازم است؛ اما برای افزایش دمای یکسان دو نمونه با جرم برابر، نمونه‌ای با گرمای ویژه (c) بالاتر، انرژی بیشتری نیز نیاز دارد.



۸۵- برای شکستن یک مول از کدام پیوند، انرژی بیشتری مصرف می‌شود؟

$$C = O \quad (۴)$$

$$N - N \quad (۳)$$

$$C = C \quad (۲)$$

$$O - H \quad (۱)$$

(آسان - مفهومی - سریع - صفحه ۶۸ - ۱۱۰۲)

پاسخ: گزینه ۴

به انرژی لازم برای شکستن یک مول از هر پیوند اشتراکی، در حالت گازی، آنتالپی پیوند گفته می‌شود. مقدار آنتالپی پیوند به دو عامل مرتبه پیوند و طول پیوند بستگی دارد. در رابطه با این دو عامل، داریم:

(۱) **مرتبه پیوند:** هرچه مرتبه یک پیوند بیشتر باشد، آنتالپی پیوند نیز بزرگ‌تر است. برای مثال میانگین آنتالپی پیوند $C = O$ از میانگین آنتالپی پیوند $C - O$ بزرگ‌تر است.

(۲) **شعاع اتم‌های دخیل در پیوند:** هرچه شعاع اتم‌های تشکیل‌دهنده پیوند کوچک‌تر باشد، آنتالپی پیوند بزرگ‌تر است. برای مثال آنتالپی پیوند $Cl - Cl$ از آنتالپی پیوند $I - I$ بزرگ‌تر است.

پس می‌توان گفت در بین پیوندهای ذکر شده در صورت سؤال، میانگین آنتالپی پیوند $C = O$ از همه بزرگ‌تر است.

میانگین آنتالپی پیوند

برای پیوندهایی که بیش از یک مورد از آن‌ها در یک مولکول وجود دارد (مانند پیوند $N - H$ در آمونیاک) و یا اینکه در دو مولکول متفاوت بتوان آن‌ها را دید (مانند پیوند $C = C$ در اتن و بنزن)، باید از اصطلاح **میانگین آنتالپی پیوند** استفاده کرد. این در حالی است که در پیوندهایی که تنها در یک ماده با مولکول‌های دو اتمی دیده می‌شوند، نیازی به استفاده از لفظ میانگین برای آنتالپی پیوند نیست. در کتاب درسی از واژه آنتالپی پیوند برای پیوند موجود در مولکول هالوژن‌ها، هیدروژن هالیدها و گازهای نیتروژن و اکسیژن استفاده شده است.



۸۶- کدام مورد نادرست است؟

- (۱) گرمای یک نمونه، انرژی جنبشی ذرات سازنده آن را تعیین می‌کند.
- (۲) هرچه آنتالپی پیوند بزرگ‌تر باشد، پایداری آن پیوند نیز بیشتر خواهد بود.
- (۳) نوع عناصر تشکیل‌دهنده یک پیوند، یکی از عوامل مؤثر بر انرژی آن پیوند است.
- (۴) تصعید، همانند ذوب و برخلاف چگالش، از جمله فرایندهای گرماگیر به شمار می‌رود.

(متوسط - مفهومی - سریع - صفحه ۶۸ - ۱۱۰۲)

پاسخ: گزینه ۱

دما، گرما و انرژی گرمایی، از جمله مفاهیمی هستند که در بحث ترمودینامیک با آن‌ها سروکار داریم. به تعاریف زیر دقت کنید:

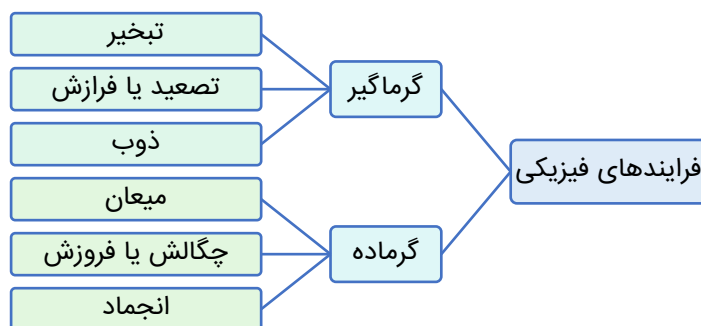
- **دما:** دمای یک نمونه، نشان‌دهنده میانگین انرژی جنبشی و سرعت حرکت ذرات آن ماده است. دما، میزان سردی و گرمی جسم مورد نظر را نشان می‌دهد.
- **انرژی گرمایی:** به مجموع انرژی جنبشی ذرات سازنده یک نمونه، انرژی گرمایی گفته می‌شود.
- **گرما:** به مقدار انرژی که در اثر تفاوت دمای میان دو نمونه، بین آن‌ها جابه‌جا می‌شود، گرما می‌گوییم. توجه داریم که گرما، از جمله ویژگی‌های یک نمونه ماده به شمار نمی‌رود. بر این اساس، می‌توان گفت دما و انرژی گرمایی، از جمله ویژگی‌های یک نمونه بوده و گرما مربوط به یک فرایند است. پس نمی‌توان از عبارت گرما برای توصیف ویژگی یک نمونه استفاده کرد.

۲) هرچه آنتالپی پیوند بزرگ‌تر باشد، اتم‌های دخیل در پیوند محکم‌تر به یکدیگر اتصال پیدا کرده‌اند و در نتیجه پایدارتر هستند. برای مثال پیوند $C = O$ پایدارتر از پیوند $C - O$ است.

۳) دو عامل در تعیین پایداری و انرژی یک پیوند دخیل هستند. این دو عامل، به شرح زیر هستند:

- نوع اتم‌های دخیل در پیوند: برای مثال آنتالپی پیوند $Cl - Cl$ متفاوت از آنتالپی پیوند $N - H$ است.
- مرتبه پیوند: برای مثال آنتالپی پیوند $C - O$ متفاوت از آنتالپی پیوند $C = O$ است.

۴) فرایندهای فیزیکی به دو دسته گرماگیر و گرماده تقسیم‌بندی می‌شوند. نمودار زیر نشان‌دهنده انواع فرایندهای فیزیکی است:



همانطور که مشخص است، فرایند تصعید همانند ذوب و برخلاف چگالش، از جمله فرایندهای فیزیکی گرماگیر است. توجه داریم که انرژی سامانه در طی یک فرایند فیزیکی گرماگیر افزایش پیدا کرده و در طی یک فرایند فیزیکی گرماده، کاهش پیدا می‌کند.



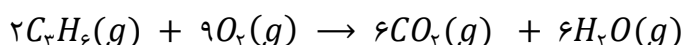
۸۷- در ظرف ۲ لیتری، مقداری پروپن به همراه اکسیژن کافی وجود دارد. اگر در این واکنش طی مدت ۳۰ ثانیه، ۳۲/۴ گرم بخار آب تولید شود، سرعت مصرف پروپن چند مول بر لیتر بر دقیقه است؟ ($H = 1 : g \cdot mol^{-1}$, $C = 12$, $O = 16$)

۰/۳ (۱) ۰/۵ (۲) ۰/۶ (۳) ۰/۹ (۴)

(متوسط - محاسباتی - استاندارد) - صفحه ۸۸ - ۱۱۰۲

پاسخ: گزینه ۳

پروپن دومین عضو خانواده آلکن‌ها بوده و طبق معادله موازنه شده زیر، با اکسیژن به سرعت واکنش داده و گاز کربن‌دی‌اکسید و بخار آب تولید می‌کند:



ابتدا با توجه به مقدار بخار آب تولید شده، مقدار پروپن مصرف شده را محاسبه می‌کنیم:

$$? \text{ mol } C_3H_6 = 32/4 \text{ g } H_2O \times \frac{1 \text{ mol } H_2O}{18 \text{ g } H_2O} \times \frac{2 \text{ mol } C_3H_6}{6 \text{ mol } H_2O} = 0/6 \text{ mol}$$

سرعت متوسط واکنش

شیب نمودار مول - زمان برای هر یک از مواد شرکت‌کننده در واکنش، متناسب با ضریب استوکیومتری آن ماده در معادله موازنه شده واکنش است. به عبارت دیگر، اگر ضریب استوکیومتری شرکت‌کننده‌ها یکسان نباشد، سرعت متوسط آن‌ها متفاوت از یکدیگر خواهد بود. شیمی‌دان‌ها برای درک آسان‌تر روند پیشرفت واکنش‌ها در واحد زمان، از یک مفهوم کاربردی به نام سرعت واکنش استفاده می‌کنند. سرعت واکنش، از تقسیم سرعت متوسط مصرف یا تولید هر ماده شرکت‌کننده در واکنش بر ضریب استوکیومتری آن ماده به دست می‌آید. به عنوان مثال در واکنش $3A(g) + 2B(g) \rightarrow C(g) + 2D(g)$ برای محاسبه سرعت متوسط واکنش در بازه زمانی Δt به روش زیر عمل می‌کنیم:

$$R_{\text{واکنش}} = \frac{|\Delta n_A|}{3 \times \Delta t} = \frac{|\Delta n_B|}{2 \times \Delta t} = \frac{|\Delta n_C|}{1 \times \Delta t} = \frac{|\Delta n_D|}{2 \times \Delta t}$$

حال سرعت متوسط مصرف گاز پروپن را محاسبه می‌کنیم:

$$R_{C_3H_6} = \frac{\Delta n}{V \Delta t} = \frac{0/6 \text{ mol}}{2 \text{ L} \times \frac{1 \text{ min}}{30 \text{ s} \times \frac{1 \text{ min}}{60 \text{ s}}}} = \frac{0/3}{0/5} = 0/6 \text{ mol} \cdot L^{-1} \cdot \text{min}^{-1}$$



۸۸- از سوختن ۰/۵ مول گاز اتان در اکسیژن کافی، ۷۸۰ کیلوژول انرژی آزاد می‌شود. همچنین اگر ۶ گرم گاز متان را به صورت کامل بسوزانیم، ۳۳۳/۷۵ کیلوژول انرژی تولید می‌شود. ارزش سوختی گاز متان به تقریب چند برابر گاز اتان است؟
($O = 16, C = 12, H = 1 : g.mol^{-1}$)

۰/۸۶ (۴)

۰/۹۵ (۳)

۱/۰۷ (۲)

۱/۲۸ (۱)

(متوسط - محاسباتی - استاندارد) - صفحه ۷۳ - ۱۱۰۲

پاسخ: گزینه ۲

برای محاسبه ارزش سوختی یک ماده از رابطه زیر استفاده می‌کنیم:

$$\text{ارزش سوختی} = \frac{|\text{آنتالپی سوختن}|}{\text{جرم مولی}}$$

طبق فرض سؤال، به ازای سوختن ۰/۵ مول از اتان، ۷۸۰ کیلوژول انرژی آزاد می‌شود. پس می‌توان گفت اگر ۱ مول از این ماده سوختنی را با اکسیژن کافی وارد واکنش کنیم، ۱۵۶۰ کیلوژول انرژی تولید خواهد شد. حال ارزش سوختی اتان را محاسبه می‌کنیم. توجه داریم که اتان با فرمول مولکولی C_2H_6 و جرم مولی $30 g.mol^{-1}$ ، دومین عضو خانواده آلکان‌ها است. در این رابطه، داریم:

$$\text{ارزش سوختی اتان} = \frac{1560 kJ.mol^{-1}}{30 g.mol^{-1}} = 52 kJ.g^{-1}$$

انرژی آزاد شده از سوختن نمونه‌های مختلف از رابطه زیر محاسبه می‌شود:

$$\text{جرم نمونه} \times \text{ارزش سوختی} = \text{انرژی آزاد شده}$$

در مرحله بعد برای یافتن ارزش سوختی متان از همین رابطه استفاده می‌کنیم. حال داریم:

$$\frac{333.75}{6} = \text{ارزش سوختی} \Rightarrow 6 g \times \text{ارزش سوختی} = 333.75 kJ \Rightarrow \text{جرم نمونه} \times \text{ارزش سوختی} = \text{انرژی آزاد شده} \\ = 55.625 kJ.g^{-1}$$

در رابطه با متان، داریم:



در مرحله پایانی، نسبت خواسته شده را محاسبه می‌کنیم:

$$\text{نسبت ارزش سوختی} = \frac{55.625}{52} \approx 1.07$$

ارزش سوختی

ارزش سوختی، مقدار انرژی آزاد شده حاصل از سوختن ۱ گرم از ماده سوختنی بوده و همواره عددی مثبت است. مقایسه ارزش سوختی ترکیبات آلی هم‌کربن از خانواده‌های مختلف آلی به صورت زیر است:

آلکان < آلکین < الکل

آنتالپی سوختن نیز معادل آنتالپی واکنشی است که در آن ۱ مول از ماده سوختنی با اکسیژن کافی واکنش داده و به صورت کامل بسوزد. توجه داریم که سوختن همه مواد گرماده بوده و در نتیجه آنتالپی واکنش سوختن آن‌ها عددی منفی است. مقایسه اندازه آنتالپی سوختن ترکیب‌های آلی هم‌کربن از خانواده‌های مختلف به صورت زیر است:

آلکان < آلکین < الکل

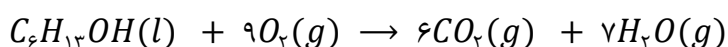
۸۹- کدام مورد نادرست است؟

- (۱) اجزای پلاستیکی سازنده سرنگ و کیسه خون، به ترتیب از پلیمرهایی با نام پلی پروپن و پلی وینیل کلرید تولید می شوند.
- (۲) از سوختن هر مول از نخستین الکلی که انحلال پذیری کمتر از $1g/100gH_2O$ دارد، ۶ مول بخار آب تولید می شود.
- (۳) کریوکسیلیک اسید سازنده استر موجود در موز، تعداد کربن برابری با الکل سازنده استر موجود در آناناس دارد.
- (۴) شمار پیوندهای دوگانه کربن-کربن در ویتامین (ث)، با شمار گروه های عاملی الکلی در ویتامین دی برابر است.

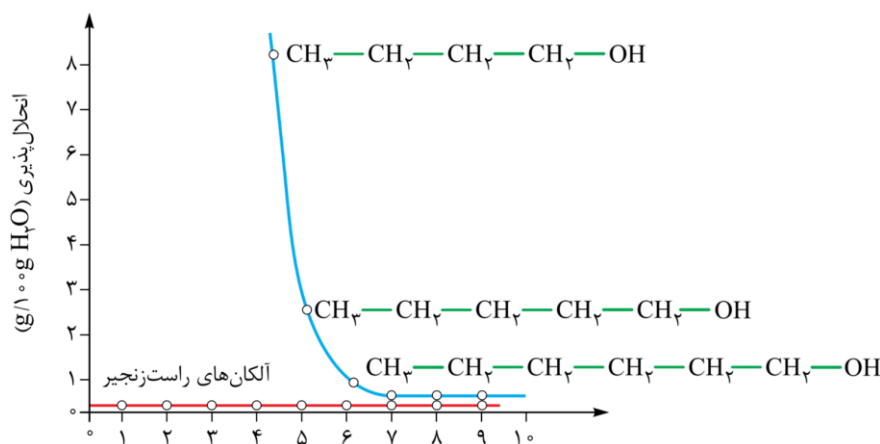
پاسخ: گزینه ۲

(متوسط - مفهومی - استاندارد) - صفحه ۱۱۵ - ۱۱۰۳

الکل های یک تا سه کربنه یعنی متانول، اتانول و پروپانول و همچنین ساده ترین ترکیب کتونی یعنی استون، به هر نسبتی در آب حل شده و نمی توان محلول سیرشده ای از آن ها تهیه کرد. الکل های ۴ و ۵ کربنه نیز انحلال پذیری مناسبی در آب داشته و با مخلوط کردن یک نمونه از آن ها با آب، محلول تشکیل می شود. الکل هایی که بیشتر از ۵ کربن در ساختار خود دارند، نمی توانند به خوبی در آب حل شده و محلول تشکیل دهند. پس ساده ترین الکلی که در آب محلول نیست و انحلال پذیری کمتر از $1g/100gH_2O$ دارد، هگزانول با فرمول مولکولی $C_6H_{13}OH$ است. معادله موازنه شده سوختن این الکل به صورت زیر است:



همانطور که مشخص است، از سوختن هر مول هگزانول، ۷ مول بخار آب تولید می شود. نمودار زیر انحلال پذیری الکل ها و آلکان ها را مقایسه می کند:



توجه داریم که به طور کلی، الکل ها به دلیل داشتن گروه هیدروکسیل و در نتیجه توانایی برقراری پیوند هیدروژنی با مولکول های آب، انحلال پذیری بیشتری نسبت به آلکان ها دارند.

بررسی سایر گزینه ها:

پروپن و وینیل کلرید، به ترتیب مونومر شرکت کننده در واکنش تولید پلی پروپن و پلی وینیل کلرید هستند. جدول زیر نام مونومر و کاربرد تعدادی از پلیمرهای افزایشی را نمایش می دهد:

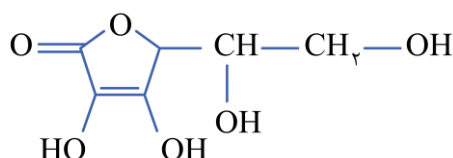
نام پلیمر	نام مونومر	کاربرد
پلی اتن	اتن	کیسه های پلاستیکی - بطری پلاستیکی - لوله پلاستیکی
پلی سیانواتن	سیانواتن	پتو و پارچه
پلی پروپن	پروپن	تهیه و تولید سرنگ
پلی استیرن	استیرن	تولید ظرف یکبار مصرف
تفلون	تترافلوئورواتن	نخ دندان - کفی اتو - تولید ظروف نجسب
پلی وینیل کلرید	وینیل کلرید (کلرواتن)	کیسه های خون

انواع واکنش پلیمری شدن

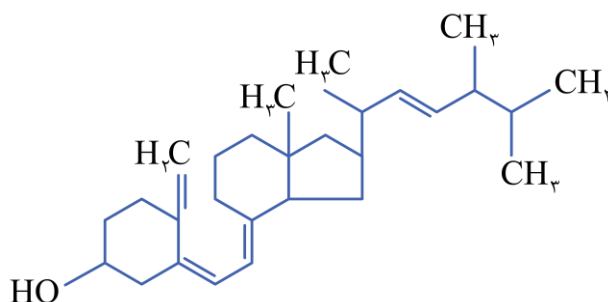
اگر در زنجیر هیدروکربنی یک ترکیب آلی پیوند دوگانه وجود داشته باشد، آن ترکیب می‌تواند در واکنش پلیمری شدن شرکت کند. به این نوع واکنش، پلیمری شدن افزایشی گفته می‌شود؛ چراکه تمامی اتم‌های موجود در واکنش‌دهنده، به فراورده هدف منتقل شده و فراورده جانبی تولید نمی‌شود. پلیمرهای افزایشی اغلب تحت فشار و گرما تشکیل می‌شوند. تولید پلیمرهایی مانند پلی‌اتن، پلی‌پروپن، پلی‌استیرن، تفلون و ... از جمله این واکنش‌ها است. واکنش تولید شدن انواعی از پلیمرها (پلی‌استرها و پلی‌آمیدها) نیز با تولید فراورده جانبی مثل آب همراه بوده و شماری از اتم‌های مواد واکنش‌دهنده‌ها، در ساختار فراورده جانبی قرار می‌گیرند.

۳ استر موجود در موز، پنتیل اتانوات است. این استر از واکنش الکلی به نام پنتانول و کربوکسیلیک اسیدی به نام اتانویک اسید حاصل می‌شود. استر موجود در آناناس، اتیل بوتانوات است. این استر از واکنش الکلی به نام اتانول و کربوکسیلیک اسیدی به نام بوتانویک اسید حاصل می‌شود. در ساختار اتانول همانند اتانویک اسید، ۲ اتم کربن حضور دارد.

۴ فرمول ساختاری ویتامین (ث) به صورت زیر است:



در ساختار ویتامین (ث)، ۲ پیوند دوگانه حضور داشته که تنها یک مورد از آن‌ها بین دو اتم کربن برقرار شده است. فرمول ساختاری ویتامین دی نیز به صورت زیر است:



همانطور که مشخص است، در ساختار ویتامین دی تنها یک گروه عاملی هیدروکسیل وجود دارد.



۹۰- در ساختار یک پاک‌کننده صابونی مایع، ۱۸ اتم کربن و ۲ پیوند دوگانه وجود دارد. تعداد اتم هیدروژن موجود در اسید چرب سازنده این صابون، برابر چند بوده و با تبدیل این ماده به نوعی صابون جامد، جرم مولی آن به تقریب چند درصد افزایش پیدا می‌کند؟ (در ساختار صابون مایع اتم فلزی حضور ندارد.)

$$(K = 39, Na = 23, O = 16, N = 14, C = 12, H = 1 : g.mol^{-1})$$

$$1/67 - 34 \quad (4)$$

$$3/33 - 32 \quad (3)$$

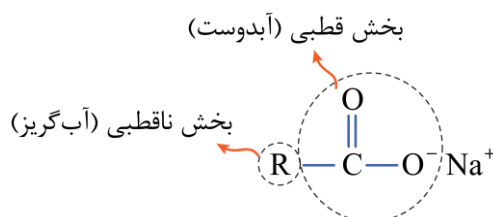
$$3/33 - 34 \quad (2)$$

$$1/67 - 32 \quad (1)$$

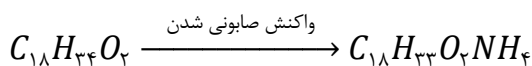
(سخت - مفهومی و محاسباتی - زمان‌بر ۵ - صفحه ۶ - ۱۲۰۱)

پاسخ: گزینه ۴

در صورت سیرشده بودن زنجیر هیدروکربنی در صابون‌ها، فرمول مولکولی آن‌ها به صورت $C_nH_{2n-1}O_2X$ است. توجه داریم که در یک صابون با زنجیر هیدروکربنی سیرشده نیز یک پیوند دوگانه $C=O$ حضور دارد. ساختار کلی صابون‌های جامد به صورت زیر است:



طبق اطلاعات صورت سؤال، صابون مورد نظر در ساختار خود ۲ پیوند دوگانه دارد؛ بنابراین می‌توان برداشت کرد که در زنجیر هیدروکربنی این صابون، یک پیوند $C = C$ حضور داشته و فرمول مولکولی آن به صورت $C_nH_{2n-3}O_2X$ خواهد بود. صابون‌های مایع، نمک پتاسیم یا آمونیوم اسیدهای چرب هستند. طبق گفته صورت سؤال، در ساختار صابون مایع مورد نظر ۱۸ اتم کربن حضور داشته و اتم فلزی حضور ندارد؛ بنابراین می‌توان گفت این صابون نمک آمونیوم اسید چرب بوده و فرمول آن به صورت $C_{18}H_{33}O_2NH_4$ است. معادله واکنش تولید این صابون از اسید چرب به صورت زیر است:



پس می‌توان گفت در اسید چرب سازنده این صابون، ۳۴ اتم هیدروژن حضور داشته است. جرم مولی این صابون برابر با 299 g.mol^{-1} است. با جایگزین کردن یون آمونیوم با یون سدیم، جرم مولی آن به اندازه 5 g.mol^{-1} افزایش پیدا کرده و به 304 g.mol^{-1} می‌رسد. در پایان درصد افزایش جرم مولی را محاسبه می‌کنیم:

$$\text{درصد} = \frac{5}{299} \times 100 \approx 1/67$$

صابون مراغه

صابون **طبیعی** یا همان صابون **مراغه**، با بیش از ۱۵۰ سال قدمت، معروف‌ترین صابون **سنتی ایران** است. برای تهیه این صابون، بیه (چربی) گوسفند و سود سوزآور (سدیم هیدروکسید یا $NaOH$) را در دیگ‌های بزرگ با آب برای چندین ساعت می‌جوشانند و پس از قالب‌گیری، آن‌ها را در آفتاب خشک می‌کنند. این صابون‌ها فاقد افزودنی‌های شیمیایی هستند و به دلیل خاصیت بازی مناسبی که دارند، از آن‌ها برای شست‌وشوی موهای چرب استفاده می‌شود. توجه داریم که **بیه گوسفند**، نوعی **چربی جانوری** بوده و حالت **جامد** دارد.



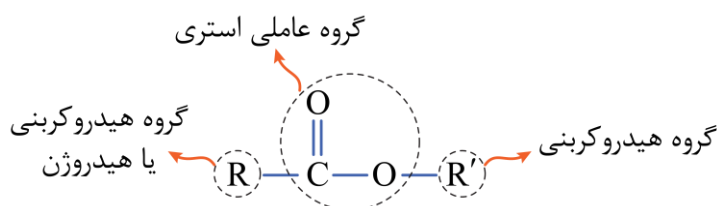
۹۱- کدام مورد نادرست است؟

- (۱) در یک ترکیب استری حاوی حلقه آروماتیک، حداقل ۳ پیوند دوگانه دیده می‌شود.
- (۲) در ساختار الکل‌ها، برخلاف اترها، اتم اکسیژن به اتم‌های متفاوتی متصل شده است.
- (۳) کتون‌ها همانند آلدهیدها، توانایی برقراری پیوند هیدروژنی با مولکول‌های خود را ندارند.
- (۴) در استرها و کربوکسیلیک اسیدهای تک‌عاملی، مجموع شمار الکترون‌های ناپیوندی اتم‌های اکسیژن یکسان است.

(متوسط - مفهومی - استاندارد) - صفحه ۱۱۵ - ۱۱۰۳

پاسخ: گزینه ۱

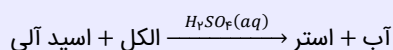
استرها دسته‌ای از مواد آلی هستند که در ساختار خود یک یا چند گروه عاملی $RCOOR'$ دارند. ساختار این مواد به صورت زیر است:



در گروه عاملی استری، یک پیوند دوگانه بین اتم کربن و یکی از اتم‌های اکسیژن برقرار شده است. از طرفی حلقه آروماتیک به معنای یک حلقه شش کربنه است که پیوند بین اتم‌های کربن به صورت یک در میان دوگانه است؛ بنابراین می‌توان گفت در ساختار یک استر دارای حلقه آروماتیک، حداقل ۴ پیوند دوگانه بین اتم‌ها برقرار شده است.

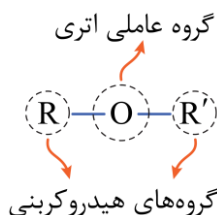
استرها

استرها دسته‌ای از **ترکیب‌های آلی** هستند که در ساختار خود یک یا چند گروه استری ($-COO-$) دارند. استرها را اغلب به عنوان عامل طعم و بوی میوه‌ها، گل‌ها، شکوفه‌ها و عطرها می‌شناسند. این مواد آلی از واکنش اسیدهای آلی (کربوکسیلیک اسیدها) و الکل‌ها حاصل می‌شوند. برای تهیه استرها، نیاز به محیط اسیدی قوی (معمولاً سولفوریک اسید) است. معادله این واکنش به صورت زیر است:



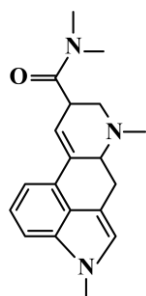
از استرهای معروف می‌توان به اتیل بوتانوات (عامل طعم و بوی آناناس)، اتیل اتانوات (حلال چسب)، متیل بوتانوات (عامل طعم و بوی سیب)، پنتیل اتانوات (عامل طعم و بوی موز) و اتیل هپتانوات (عامل طعم و بوی انگور) اشاره کرد.

۲ در الکل‌ها، اتم اکسیژن از یک سو به اتم کربن و سوی دیگر به اتم هیدروژن متصل شده است. این در حالی است که در اترها، اتم اکسیژن از هر دو سمت به اتم‌های کربن متصل شده است. ساختار گروه عاملی اتری به صورت زیر است:



۳ در آلدئیدها، همانند کتون‌ها، اتم اکسیژن با یک پیوند دوگانه به یک اتم کربن متصل شده است. در این مولکول‌ها هیدروژن متصل به اکسیژن دیده نشده و در نتیجه این مولکول‌ها نمی‌توانند با مولکول‌های خود پیوند هیدروژنی تشکیل دهند. البته، توجه داریم که اعضای هر دو گروه می‌توانند با ذرات آب پیوند هیدروژنی تشکیل دهند.

۴ اتم‌های اکسیژن موجود در ساختار کربوکسیلیک اسیدها و استرها، ۲ الکترون ظرفیتی خود را با سایر اتم‌ها به اشتراک گذاشته و ۴ الکترون ظرفیتی خود را به صورت ۲ جفت الکترون ناپیوندی بر روی خود نگه می‌دارند.



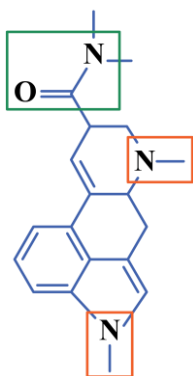
- ۹۲- با توجه به ساختار داده شده، کدام موارد زیر درست هستند؟
- الف - یک ترکیب آلی آروماتیک با گروه‌های عاملی آمینی و آمیدی است.
- ب - شمار جفت الکترون ناپیوندی آن نصف شمار اتم‌های هیدروژن در نفتالن است.
- ج - شمار پیوندهای $C-N$ آن، برابر با شمار اتم‌های موجود در یک مولکول بنزن است.
- د - تفاوت شمار اتم‌های هیدروژن و اتم‌های کربن در ساختار آن برابر با مجموع شمار اتم‌های نیتروژن و اکسیژن است.
- (۱) «الف» و «ج» (۲) «الف» و «د» (۳) «ب» و «ج» (۴) «ب» و «د»

سخت - مفهومی - استاندارد ۵ - صفحه ۱۱۷ - ۱۱۰۳

پاسخ: گزینه ۲

عبارت‌های (الف) و (د) درست هستند.

بررسی موارد:



الف) ترکیب مورد نظر دارای دو گروه عاملی آمینی و یک گروه عاملی آمیدی است که به ترتیب با رنگ‌های نارنجی و سبز در شکل زیر نمایش داده شده‌اند:

این ماده دارای یک حلقه بنزنی بوده و نوعی ترکیب آروماتیک است.

پ) در ترکیب‌های آلی، به ازای هر اتم نیتروژن ۱ جفت الکترون، به ازای هر اتم اکسیژن ۲ جفت الکترون و به ازای هر هالوژن ۳ جفت الکترون ناپیوندی حضور دارد. ترکیب مورد نظر در ساختار خود دارای ۱ اتم اکسیژن و ۳ اتم نیتروژن است؛ بنابراین شمار جفت الکترون ناپیوندی آن برابر ۵ است. از طرفی نفتالن نوعی هیدروکربن آروماتیک با فرمول مولکولی $C_{10}H_8$ است. در پایان نسبت خواسته شده را محاسبه می‌کنیم:

$$A = \frac{5}{8} > 0.5$$

شمارش جفت الکترون پیوندی و ناپیوندی در مواد آلی

در ترکیب‌های آلی، اتم‌های کربن و هیدروژن از همه الکترون‌های ظرفیتی خود برای تشکیل پیوند استفاده می‌کنند. اتم‌های اکسیژن و عناصر هم‌گروه آن مانند گوگرد، ۶ الکترون ظرفیتی دارند که ۲ تا آن‌ها را برای تشکیل پیوند استفاده می‌کنند و ۴ الکترون ظرفیتی دیگر، به صورت ۲ جفت الکترون ناپیوندی روی اتم آن‌ها قرار می‌گیرد. اتم‌های نیتروژن و عناصر هم‌گروه آن نیز، ۵ الکترون ظرفیتی دارند که ۳ تا آن‌ها را برای تشکیل پیوند استفاده می‌کنند و ۲ الکترون ظرفیتی دیگر نیز به صورت ۱ جفت الکترون ناپیوندی روی اتم آن‌ها قرار می‌گیرد. هالوژن‌ها نیز ۷ الکترون ظرفیتی دارند که از ۱ الکترون برای تشکیل پیوند استفاده می‌کنند و ۶ الکترون ظرفیتی باقی‌مانده به صورت ۳ جفت الکترون ناپیوندی روی اتم آن‌ها قرار می‌گیرد. با توجه به نکات گفته شده، برای شمارش جفت الکترون پیوندی (تعداد پیوند) و جفت الکترون‌های ناپیوندی در ترکیب‌های آلی، از روابط زیر استفاده می‌کنیم:

$$(1) \text{ اتم‌های هالوژن} + (3) \text{ اتم‌های نیتروژن} + (2) \text{ اتم‌های اکسیژن} + (1) \text{ اتم‌های هیدروژن} + (4) \text{ اتم‌های کربن} = \text{تعداد پیوند}$$

$$(3 \times \text{اتم‌های هالوژن}) + (1 \times \text{اتم‌های گروه ۱۵}) + (2 \times \text{اتم‌های گروه ۱۶}) = \text{تعداد جفت الکترون ناپیوندی}$$

در ترکیب مورد نظر، ۹ پیوند یگانه کربن-نیتروژن وجود دارد. از طرفی بنزن با فرمول شیمیایی C_6H_6 در ساختار خود ۱۲ اتم دارد.

برای شمارش تعداد هیدروژن از فرمول زیر استفاده می‌کنیم:

$$(4 \times \text{تعداد پیوند سه‌گانه}) - (2 \times \text{تعداد پیوند دوگانه}) - (2 \times \text{تعداد حلقه}) - 2 + (2 \times \text{تعداد کربن}) = \text{تعداد اتم هیدروژن}$$

$$- (\text{تعداد نیتروژن}) + (\text{تعداد هالوژن})$$

فرمول مولکولی ترکیب مورد نظر به صورت $C_{19}H_{23}N_3O$ است. همانطور که مشخص است، تفاوت شمار اتم‌های کربن و هیدروژن، همانند مجموع شمار اتم‌های اکسیژن و نیتروژن برابر ۴ است.



۹۳- کدام مورد درست است؟

- ۱) مدل آرنیوس می‌تواند تفاوت رسانایی محلول‌های حاوی NH_3 و $NaOH$ را بررسی کند.
- ۲) در محلول اسیدهای قوی، برخلاف اسیدهای ضعیف، غلظت یون‌های موجود در محلول ثابت است.
- ۳) اگر انحلال یک ماده در آب به صورت مولکولی باشد، محلول حاوی آن به یقین رسانایی ناچیزی خواهد داشت.
- ۴) با توجه به مدل آرنیوس، هر مولکول دارای اتم هیدروژن، اسید بوده و حل کردن آن در آب، رسانایی را افزایش می‌دهد.

(متوسط - مفهومی - سریع - صفحه ۲۲ - ۱۲۰۱)

پاسخ: گزینه ۳

اگر ماده‌ای به صورت مولکولی در آب حل شود، محلول حاوی آن رسانایی ناچیزی خواهد داشت. این رسانایی ناچیز بابت یونش مولکول‌های آب بوده و حاصل از انحلال ماده حل‌شونده در محلول مورد نظر نیست.

بررسی سایر گزینه‌ها:

۱) مدل آرنیوس می‌تواند اسیدی یا بازی بودن محلول را تعیین کند، اما نمی‌تواند مشخص کند کدام محلول، اسیدی‌تر و کدام محلول، بازی‌تر است. بر این اساس، نمی‌توان از این مدل برای تشخیص و بررسی میزان رسانایی محلول حاوی آمونیاک و محلول حاوی سدیم هیدروکسید استفاده کرد.

مدل آرنیوس

شواهد بسیاری در تاریخ علم وجود دارند که نشان می‌دهند پیش از آنکه ساختار اسیدها و بازها شناخته شود، شیمی‌دان‌ها افزون بر ویژگی‌های اسیدها و بازها با برخی از واکنش‌های آن‌ها نیز آشنا بودند؛ اما توجیه رفتار اسیدها و بازها به یک مبنای علمی نیاز داشت. سوانت آرنیوس نخستین کسی بود که اسیدها و بازها را بر یک مبنای علمی توصیف کرد. او بر روی رسانایی الکتریکی محلول‌های آبی کار می‌کرد. یافته‌های تجربی او نشان می‌داد که محلول اسیدها و بازها رسانای برق هستند، هر چند میزان رسانایی آن‌ها با یکدیگر برابر نیست.

۲) در محلول اسیدهای ضعیف، پس از ایجاد تعادل، شمار تولید شده و مصرف شده از هر گونه با یکدیگر برابر بوده و به نظر می‌رسد که واکنش متوقف شده است؛ بنابراین می‌توان گفت پس از ایجاد تعادل، غلظت یون‌های موجود در محلول ثابت باقی خواهد ماند. در محلول اسیدهای قوی نیز کل ذرات اسیدی یونش یافته و غلظت یون‌ها ثابت می‌ماند.

طبق مدل آرنیوس، ماده‌ای که با حل شدن آن در آب، غلظت یون هیدروژن را افزایش بدهد، اسید آرنیوس بوده و ماده‌ای که با حل شدن آن در آب، غلظت یون هیدروکسید را افزایش بدهد، باز آرنیوس است. برخی از مولکول‌های حاوی اتم هیدروژن (مانند الکل‌ها) به صورت مولکولی در آب حل شده و خاصیت اسیدی یا بازی ندارند. همچنین برخی از مولکول‌های دارای اتم هیدروژن (شامل آمین‌ها و آمونیاک) با حل شدن در آب، غلظت یون هیدروکسید را افزایش داده و باز آرنیوس به شمار می‌روند.



۹۴- در دمای اتاق، در ۵۰ میلی‌لیتر از یک محلول، ۰/۶ گرم از اسید ضعیف HA ($\alpha = ۰/۴$) حل شده است. تفاوت pH این محلول با محلول ۱ مولار سدیم کلرید چقدر بوده و با استفاده از چند میلی‌لیتر از این محلول، می‌توان ۳ کیلوگرم محلول $۲۰ppm$ از اسید مورد نظر را تهیه کرد؟ ($HA = ۲۰ : g \cdot mol^{-1}$)

$$۸ - ۵/۳ (۴)$$

$$۸ - ۶/۴ (۳)$$

$$۵ - ۵/۳ (۲)$$

$$۵ - ۶/۴ (۱)$$

(متوسط - محاسباتی - استاندارد ۵ - صفحه ۲۵ - ۱۲۰۱)

پاسخ: گزینه ۱

برای حل سؤال، ابتدا شمار مول اسید حل شده در محلول مورد نظر را محاسبه می‌کنیم:

$$\text{شمار مول} = \frac{\text{جرم}}{\text{جرم مولی}} = \frac{۰/۶}{۲۰} = ۰/۰۳ \text{ mol}$$

در مرحله بعد با توجه به حجم محلول، غلظت اسید حل شده را به دست می‌آوریم:

$$\text{غلظت (مولار)} = \frac{\text{شمار مول}}{\text{حجم محلول}} = \frac{۰/۰۳ \text{ mol}}{۰/۰۵ \text{ L}} = ۰/۶ \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$$

سپس با توجه به درجه یونش و غلظت اولیه اسید، غلظت تعادلی یون هیدروژن را محاسبه می‌کنیم.

$$۰/۲۴ \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1} = ۰/۶ \times ۰/۴ = \text{درجه یونش} \times \text{غلظت اولیه اسید} = \text{غلظت یون هیدروژن}$$

حال مقدار pH محلول را با استفاده از غلظت تعادلی یون هیدروژن به دست می‌آوریم.

$$pH = -\log[H^+] = -\log \frac{۰/۲۴}{۰/۰۵} = -(\log ۸ + \log ۳ + \log ۱۰^{-۲}) = -(۰/۹ + ۰/۵ - ۲) = ۰/۶$$

از طرفی، می‌دانیم که محلول حاوی سدیم کلرید، یک نوع محلول خنثی بوده و pH آن برابر ۷ است. پس می‌توان گفت تفاوت pH این دو محلول برابر ۶/۴ است. در قدم بعد، مقدار مول اسید موجود در ۳ کیلوگرم محلول $۲۰ppm$ از اسید مورد نظر را محاسبه می‌کنیم:

$$? \text{ mol HA} = ۳ \text{ kg محلول} \times \frac{۱۰۰۰ \text{ g محلول}}{۱ \text{ kg محلول}} \times \frac{۲۰ \text{ g HA}}{۱۰۶ \text{ g محلول}} \times \frac{۱ \text{ mol HA}}{۲۰ \text{ g HA}} = ۰/۰۰۳ \text{ mol}$$

محلول اولیه از اسید HA ، غلظت ۰/۶ مولار دارد. بر این اساس، حجمی از محلول مورد نظر که حاوی ۰/۰۰۳ مول اسید است را محاسبه می‌کنیم:

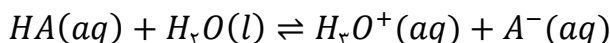
$$? \text{ mL محلول} = ۰/۰۰۳ \text{ mol HA} \times \frac{۱ \text{ L محلول}}{۰/۰۶ \text{ mol HA}} \times \frac{۱۰۰۰ \text{ mL محلول}}{۱ \text{ L محلول}} = ۵ \text{ mL}$$



۹۵- کدام مورد درست است؟

- (۱) در محلول آبی حاوی هیدروفلوئوریک اسید، فقط یک نوع یون چنداتیمی حضور دارد.
- (۲) معادله یونش اسیدهای تک پروتون‌دار در دمای اتاق در محلول آبی، به صورت یک طرفه است.
- (۳) با اضافه کردن آب به محلول حاوی اسید ضعیف، درجه یونش همانند غلظت یون هیدروژن کاهش پیدا می‌کند.
- (۴) بعد از ایجاد تعادل در محلول آبی یک اسید ضعیف تک پروتون‌دار، سرعت تولید و مصرف همه مواد با هم برابر می‌شود.

معادله یونش اسیدهای ضعیف تک پروتون دار، به صورت زیر است:

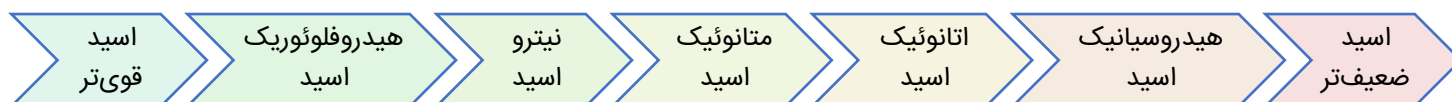


پس از ایجاد تعادل، سرعت تولید هر ماده با سرعت مصرف همان ماده برابر است؛ به همین خاطر غلظت همه مواد ثابت باقی می ماند. در چنین شرایطی، به نظر می رسد که واکنش متوقف شده است.

بررسی سایر گزینه ها:

۱) حل شدن هیدروفلوئوریک اسید در آب، باعث تولید یون های H^+ و F^- می شود. همچنین می دانیم که در محلول های آبی به دلیل یونش مولکول های آب، همیشه مقداری از یون های H^+ و OH^- حضور دارند. پس می توان گفت در این محلول ۲ نوع یون چنداتی می یافت می شود.

۲) معادله یونش تعدادی از اسیدهای تک پروتون دار شامل نیتریک اسید، هیدروکلریک اسید، هیدروبرمیک اسید و هیدرویدیک اسید به صورت یک طرفه است. این اسیدها از جمله اسیدهای قوی طبقه بندی می شوند. این در حالی است که معادله یونش بسیاری از اسیدهای تک ظرفیتی مثل کربوکسیلیک اسیدها، هیدروفلوئوریک اسید و ... در آب به صورت تعادلی و برگشت پذیر است. مقایسه قدرت اسیدهای ضعیف به صورت زیر است:



۳) برای محاسبه ثابت یونش اسیدهای ضعیف می توانیم از فرمول $K = Ma^x$ استفاده کنیم. طبق این رابطه، با افزایش حجم که منجر به کاهش غلظت اسید می شود، درجه یونش باید افزایش پیدا کند تا عبارت ثابت یونش تغییر نکند. توجه داریم که در دمای ثابت، ثابت یونش یک اسید مقداری مشخص بوده که به عواملی مثل غلظت اسید و ... ارتباطی ندارد. همچنین با افزودن آب به محلول اسید ضعیف، غلظت یون هیدروژن کاهش پیدا خواهد کرد.



۹۶- کدام یک از موارد زیر درباره سلول گالوانی روی-مس، درست است؟

- الف - جهت حرکت الکترون ها در مدار، همسو با جهت حرکت کاتیون ها از خلال دیواره متخلخل است.
 ب - با افزایش غلظت یون های روی در نیم سلول آندی، نیروی الکتروموتوری سلول تغییر پیدا می کند.
 ج - با حذف دیواره متخلخل از این سلول، هیچ واکنش اکسایش-کاهش در سامانه انجام نخواهد شد.
 د - با گذشت زمان، کاتیون حاصل از فلزی که واکنش پذیری کمتری دارد، به سمت دیگر حرکت می کند.
- ۱) «الف» و «ب» ۲) «الف» و «د» ۳) «ب» و «ج» ۴) «ج» و «د»

بین این دو فلز، روی نسبت به مس پتانسیل کاهشی استاندارد کمتری داشته و به همین دلیل، در سلول مورد نظر در نقش آند ظاهر خواهد شد. نیم سلول مس نیز کاتد این سلول است. در رابطه با این سلول، عبارت های (الف) و (ب) درست هستند.

بررسی موارد:

الف) الکترون ها در مدار خارجی از سمت آند به سمت کاتد حرکت می کنند. همچنین کاتیون ها نیز در محلول از سمت آند به سمت کاتد حرکت می کنند.

پ) افزایش غلظت کاتیون ها در آند و کاتد به ترتیب باعث کاهش و افزایش نیروی الکتروموتوری سلول های گالوانی می شود، چراکه در سمت آند، اتم های روی در نیم واکنش اکسایش شرکت کرده و به کاتیون تبدیل می شوند. با افزایش غلظت یون های مثبت در این نیم سلول، مقاومتی مقابل تولید بیشتر کاتیون ایجاد شده و در نتیجه توانایی نیم سلول در تولید الکترون کاهش پیدا می کند.

عوامل مؤثر بر نیروی الکتروموتوری سلول گالوانی



توجه کنید که در حد سؤالات کنکور، فقط باید بدانید که کدام عوامل موجب تغییر emf می‌شوند، اما نیاز ندارید که روند کاهش یا افزایش نیروی الکتروموتوری را بلد باشید.

با حذف دیواره متخلخل، محلول‌ها با یکدیگر مخلوط شده و واکنش اکسایش-کاهش ادامه پیدا می‌کند، با این تفاوت که هر دو نیم‌واکنش اکسایش و کاهش در سطح تیغه روی انجام شده و انرژی رد و بدل شده قابل استفاده نخواهد بود.

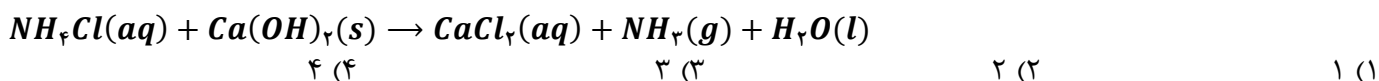
در بین این دو فلز، عنصر مس واکنش‌پذیری کم‌تری داشته و کاتد سلول را تشکیل می‌دهد. در یک سلول گالوانی، کاتیون‌ها از سمت آند به کاتد حرکت می‌کنند. در این سلول نیز کاتیون‌ها از نیم‌سلول روی به سمت نیم‌سلول مس حرکت می‌کنند.

دیواره متخلخل

در سلول گالوانی روی - مس، با گذشت زمان، در سمت آند اتم‌های روی الکترون از دست داده و به صورت کاتیون وارد محلول می‌شوند. با ادامه این روند، غلظت کاتیون‌ها در آند بیشتر از غلظت آنیون‌ها شده و این اتفاق باعث متوقف شدن واکنش اکسایش - کاهش خواهد شد. بر این اساس، آنیون‌ها از سمت کاتد از طریق دیواره متخلخل به سمت آند حرکت کرده و بار الکتریکی آن را خنثی می‌کنند. از طرفی در سمت کاتد، یون‌های مس با گرفتن الکترون به اتم مس تبدیل شده و به تیغه می‌چسبند. با ادامه این روند غلظت آنیون‌ها در کاتد بیشتر از کاتیون‌ها شده و بار کلی نیم‌سلول منفی می‌شود. جهت جلوگیری از این اتفاق، کاتیون‌ها از سمت آند به سمت کاتد حرکت می‌کنند تا بار الکتریکی آن را خنثی کنند.



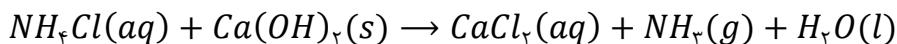
۹۷- پس از موازنه معادله زیر، نسبت مجموع ضرایب مواد محلول در آب به ماده جامد برابر چه عددی است؟



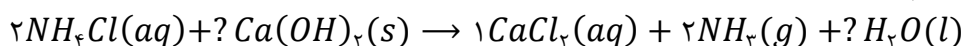
(آسان - محاسباتی - سریع - صفحه ۶۵ - ۱۰۰۲)

پاسخ: گزینه ۳

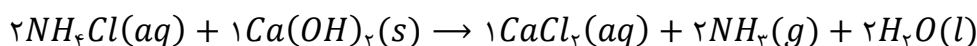
معادله واکنش انجام شده به صورت زیر است:



برای موازنه این واکنش، ابتدا به پیچیده‌ترین ماده یعنی آمونیوم کلرید، ضریب ۱ می‌دهیم. در مرحله بعد، آمونیاک برای موازنه شدن نیتروژن، ضریب ۱ می‌گیرد. سپس کلسیم کلرید برای موازنه شدن کلر، ضریب ۵/۰ می‌گیرد. در مرحله بعد همه ضرایب را در ۲ ضرب می‌کنیم تا ضریب کسری نداشته باشیم. تا به اینجا کار، داریم:



حال برای موازنه شدن کلسیم، به کلسیم هیدروکسید ضریب ۱ می‌دهیم. در پایان برای موازنه شدن اکسیژن، به مولکول آب ضریب ۲ می‌دهیم. معادله موازنه شده واکنش انجام شده به صورت زیر است:



در پایان نسبت خواسته شده را محاسبه می‌کنیم:

$$A = \frac{\text{مجموع ضرایب مواد محلول در آب}}{\text{ضریب ماده جامد}} = \frac{3}{1} = 3$$

۹۸- اگر از الکترون‌های تولید شده در سلول سوختی متان-اکسیژن، برای استخراج آلومینیم در سلول هال استفاده شود، با مصرف چند کیلوگرم متان در سلول سوختی با بازده ۸۰ درصد، می‌توان ۲۷ کیلوگرم آلومینیم مذاب را تولید کرد؟
($Al = 27, C = 12, H = 1 : g.mol^{-1}$)

۷/۵ (۴)

۱۵ (۳)

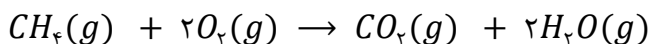
۳۰ (۲)

۲۲/۵ (۱)

(سخت - محاسباتی - زمان‌بر - صفحه ۶۱ - ۱۲۰۲)

پاسخ: گزینه ۴

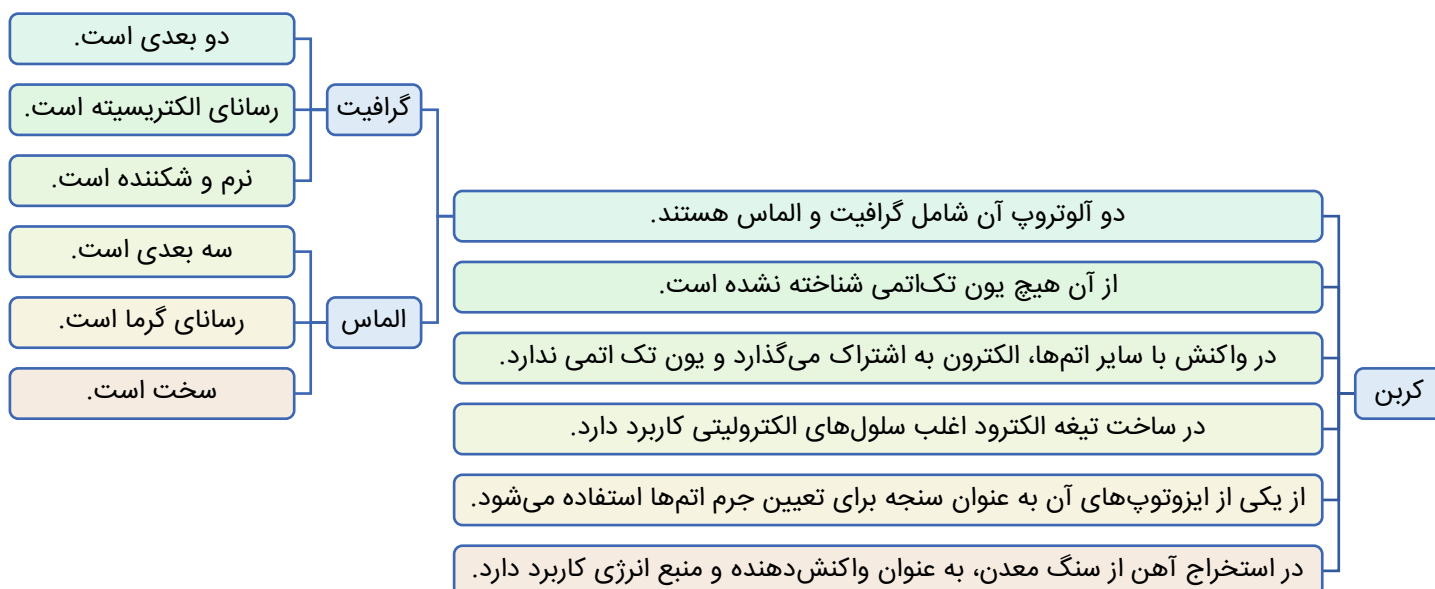
معادله موازنه شده واکنش انجام شده در سلول سوختی متان-اکسیژن به صورت زیر است:



عدد اکسایش کربن در متان و کربن‌دی‌اکسید به ترتیب برابر ۴- و ۴+ است. بر این اساس، می‌توان گفت به ازای مصرف هر مول متان در این واکنش، ۸ مول الکترون تولید می‌شود. البته توجه داریم که طبق گفته صورت سؤال، بازده سلول برابر با ۸۰ درصد است، پس می‌توان گفت مصرف هر مول متان در عمل تنها می‌تواند ۶/۴ مول ($8 \times \frac{80}{100}$) الکترون تولید کند. معادله واکنش انجام شده در سلول هال به صورت زیر است:

$$2Al_2O_3(l) + 3C(s) \rightarrow 4Al(l) + 3CO_2(g)$$

در این سلول به کمک گرافیت که یکی از آلوتروپ‌های کربن است، می‌توان آلومینیم را از نمک آن یعنی آلومینیم اکسید مذاب استخراج کرد. در رابطه با عنصر کربن و آلوتروپ‌های آن، داریم:



عدد اکسایش آلومینیم در آلومینیم اکسید و عنصر فلزی آلومینیم به ترتیب برابر با ۳+ و ۰ است، پس می‌توان گفت به ازای تولید هر مول آلومینیم مذاب در این سلول، ۳ مول الکترون مصرف می‌شود. ابتدا شمار الکترون مورد نیاز برای تولید ۲۷ کیلوگرم آلومینیم را محاسبه می‌کنیم:

$$? mol e^- = 27 kg Al \times \frac{1000 g}{1 kg} \times \frac{1 mol Al}{27 g Al} \times \frac{3 mol e^-}{1 mol Al} = 3000 mol$$

حال جرم متان مورد نیاز برای تولید این مقدار از الکترون را به دست می‌آوریم:

$$? kg CH_4 = 3000 mol e^- \times \frac{1 mol CH_4}{6/4 mol e^-} \times \frac{16 g CH_4}{1 mol CH_4} \times \frac{1 kg}{1000 g} = 7/5 kg$$

با توجه به محاسبات انجام شده، به ازای مصرف ۷/۵ کیلوگرم متان در سلول سوختی با بازده ۸۰ درصد، می‌توان الکترون لازم جهت تهیه ۲۷ کیلوگرم آلومینیم مذاب از سلول هال را تأمین کرد.



۹۹- کدام مورد، عبارت زیر را از نظر علمی به درستی تکمیل می کند؟

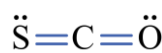
«مولکول ، مولکول کربونیل سولفید»

- (۱) هیدرازین - همانند - دارای ۵ جفت الکترون پیوندی است.
- (۲) گوگرد دی اکسید - برخلاف - دارای ۶ جفت الکترون ناپیوندی است.
- (۳) کربن دی سولفید - برخلاف - دارای اتم مرکزی با بار جزئی منفی است.
- (۴) هیدروژن پراکسید - برخلاف - در میدان الکتریکی جهت گیری می کند.

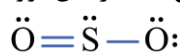
پاسخ: گزینه ۲

(متوسط - مفهومی - استاندارد) - صفحه ۷۶ - ۱۳۰۳

آرایش لوویس کربونیل سولفید به صورت زیر است:



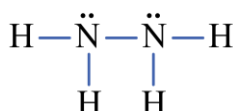
این مولکول در ساختار خود دارای ۴ جفت الکترون پیوندی و ۴ جفت الکترون ناپیوندی بوده و به دلیل داشتن اتم های متفاوت اطراف اتم مرکزی، قطبی است و در میدان الکتریکی جهت گیری پیدا می کند. آرایش لوویس گوگرد دی اکسید نیز به صورت زیر است:



همانطور که مشخص است، گوگرد دی اکسید برخلاف کربونیل سولفید، در مولکول خود دارای ۶ جفت الکترون ناپیوندی است.

بررسی سایر گزینه ها:

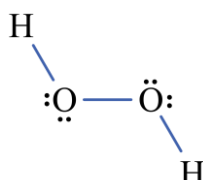
۱) آرایش لوویس هیدرازین به صورت زیر است:



هر مولکول هیدرازین برخلاف هر مولکول کربونیل سولفید، در ساختار خود ۵ جفت الکترون پیوندی دارد.

۳) اتم مرکزی در کربن دی سولفید همانند کربونیل سولفید، کربن است. کربن نسبت به اتم های گوگرد و اکسیژن خاصیت نافلزی کمتری دارد. به همین دلیل بار جزئی کربن در کربن دی سولفید همانند کربونیل سولفید مثبت است.

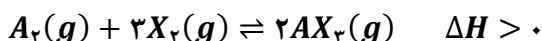
۴) آرایش لوویس هیدروژن پراکسید یا همان آب اکسیژنه به صورت زیر است:



آب اکسیژنه به دلیل وجود الکترون ناپیوندی روی اتم های مرکزی و کربونیل سولفید به دلیل داشتن اتم های متفاوت اطراف اتم مرکزی، قطبی هستند و در میدان الکتریکی جهت گیری پیدا می کنند.



۱۰۰- با توجه به تعادل گازی زیر، کدام یک از عبارت های داده شده درست هستند؟ (حجم ظرف واکنش برابر ۴ لیتر است).



- الف - با افزایش دما، سرعت مصرف فراورده کاهش پیدا می کند.
 - ب - با افزایش فشار، تعادل به سمت تولید فراورده بیشتر جابه جا خواهد شد.
 - ج - با انتقال مواد به ظرف ۶ لیتری، تعادل به سمت تولید فراورده بیشتر پیش می رود.
 - د - با اضافه کردن مقداری A_2 به ظرف واکنش، سرعت مصرف AX_2 در تعادل جدید بیشتر از تعادل اولیه خواهد شد.
- (۱) «الف» و «ج» (۲) «الف» و «د» (۳) «ب» و «ج» (۴) «ب» و «د»

پاسخ: گزینه ۴

(متوسط - مفهومی - استاندارد) - صفحه ۱۰۹ - ۱۳۰۴

عبارت های (ب) و (د) درست هستند.

الف) تغییر دما، از جمله عوامل مؤثر بر سرعت واکنش‌های شیمیایی است. افزایش دما در همه تعادل‌های گرماگیر و گرماده باعث افزایش سرعت واکنش‌های رفت و برگشت می‌شود.

تأثیر گرما بر تعادل

در واکنش‌های **گرماگیر**، با **افزایش** دما تعادل در جهت مصرف گرما یعنی جهت **رفت** پیش می‌رود. در این شرایط، سرعت واکنش‌های رفت و برگشت افزایش پیدا کرده ولی افزایش سرعت واکنش رفت بیشتر از **افزایش** سرعت واکنش برگشت خواهد بود. در نقطه مقابل، در واکنش‌های گرماده، با افزایش دما تعادل در جهت مصرف گرما یعنی جهت برگشت پیش می‌رود. در این شرایط، سرعت واکنش‌های رفت و برگشت افزایش پیدا کرده ولی افزایش سرعت واکنش **رفت** کمتر از افزایش سرعت واکنش برگشت خواهد بود.

در واکنش‌های گرماگیر با کاهش دما، تعادل در جهت تولید گرما یعنی جهت برگشت پیش می‌رود. در این شرایط، سرعت واکنش‌های رفت و برگشت کاهش پیدا کرده ولی کاهش سرعت واکنش رفت بیشتر از کاهش سرعت واکنش برگشت خواهد بود. در نقطه مقابل، در واکنش‌های گرماده با کاهش دما، تعادل در جهت تولید گرما یعنی جهت رفت پیش می‌رود. در این شرایط، سرعت واکنش‌های رفت و برگشت کاهش پیدا کرده ولی کاهش سرعت واکنش رفت کمتر از کاهش سرعت واکنش برگشت خواهد بود.

پ) با افزایش فشار در واکنش‌های تعادلی، تعادل در جهت مول گازی کمتر پیش می‌رود. مجموع ضرایب مواد گازی در سمت فراورده برابر ۲ و در سمت واکنش‌دهنده‌ها برابر ۴ است. پس می‌توان گفت با افزایش فشار، تعادل به سمت راست یعنی تولید فراورده بیشتر پیش می‌رود.

ج) با انتقال مواد به ظرف بزرگ‌تر، غلظت همه مواد گازی کاهش پیدا کرده و تعادل در جهت مول گازی بیشتر یعنی سمت واکنش‌دهنده‌ها پیش می‌رود.

د) با اضافه کردن مقداری A_2 به ظرف تعادل، تعادل در جهت مصرف این گاز پیش رفته و مقدار فراورده (AX_3) در ظرف تعادل افزایش پیدا می‌کند. سرعت مصرف یک ماده، با غلظت آن ماده در ظرف واکنش و همچنین دمای سامانه ارتباط دارد. پس می‌توان گفت سرعت مصرف AX_3 در تعادل جدید بیشتر از تعادل اولیه خواهد بود.



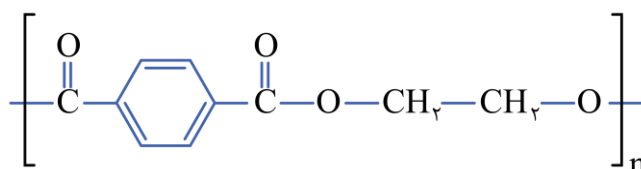
۱۰۱- کدام مورد درست است؟

- (۱) پلیمر سازنده بطری‌های آب، حاوی اتم اکسیژن بوده و تبدیل به پرک، مرحله‌ای از بازیافت آن است.
- (۲) از واکنش یک نمونه بنزن با کاهنده مناسب، در حضور کاتالیزگر، ذرات ترفتالیک اسید تولید می‌شوند.
- (۳) در صنعت، ساده‌ترین ترکیب الکلی تک‌عاملی از واکنش اکسید ناقطبی کربن با گاز هیدروژن تولید می‌شود.
- (۴) برای تولید صنعتی متانول با استفاده از متان، می‌توان از فراوان‌ترین گاز موجود در یک نمونه هواکره استفاده کرد.

(آسان - خط به خط - سریع) - صفحه ۱۲۱ - ۱۲۰۴

پاسخ: گزینه ۱

پلیمر سازنده بطری‌های آب، پلی‌اتیلن ترفتالات با ساختار زیر است:



یکی از روش‌های بازیافت PET، خرد کردن این مواد به تکه‌های کوچکی به نام پرک و استفاده از آن‌ها برای تولید مواد پلاستیکی دیگر است. همانطور که مشخص است، این فرایند یکی از روش‌های فیزیکی برای بازیافت این ماده است.

بازیافت مواد پلاستیکی

یکی از مواد پلاستیکی قابل بازیافت، پلی‌اتیلن ترفتالات است. برای این منظور، باید آن‌ها را جداگانه جمع‌آوری و سپس با انجام فرایندهای فیزیکی و شیمیایی به مواد قابل استفاده تبدیل کرد. یکی از راه‌های بازیافت این است که آن‌ها را پس از شست‌وشو و تمیز کردن، ذوب کرده و دوباره از آن‌ها برای تولید وسایل و ابزار دیگر استفاده می‌کنند. البته پس از شست و شوی مواد پلاستیکی، می‌توان آن‌ها را خرد کرده و به تکه‌های کوچک به نام **پرک** تبدیل و در تولید مواد پلاستیکی دیگر استفاده کرد.

توجه داریم که راه دیگری نیز وجود دارد که این پسماندها را به مونومرهای سازنده یا مواد اولیه مفید و ارزشمند تبدیل می‌کنند. باید توجه داشت که سطح فناوری هر کشور یا گروه صنعتی است که تعیین می‌کند کدام راه را باید انتخاب کرد، زیرا برگرداندن پسماندها به مونومرهای سازنده کاری بس دشوار است. از آنجا که سالانه حجم انبوهی از پسماندهای این پلیمر تولید می‌شود، بازیافت شیمیایی آن بسیار ضروری و ارزشمند است. پلی‌استرها قابل تبدیل به مونومرهای سازنده هستند. شیمی‌دان‌ها با بررسی‌های فراوان پی بردند که PET در شرایط مناسب با متانول واکنش می‌دهد و به مواد مفیدی تبدیل می‌شود؛ موادی که می‌توان آن‌ها را برای تولید پلیمرها به کار برد.

بررسی سایر گزینه‌ها:

۲) از واکنش پارازایلن با اکسنده مناسب در حضور کاتالیزگر، ترفتالیک اسید تولید می‌شود. اتن نیز در واکنش با اکسنده مناسب در حضور کاتالیزگر، اتیلن گلیکول تولید می‌کند. ترفتالیک اسید با اتیلن گلیکول واکنش داده و در طی این فرایند، پلی‌اتیلن ترفتالات یا همان PET تولید می‌شود.

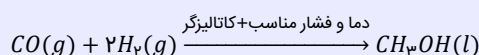
۳) ساده‌ترین الکل تک‌عاملی، متانول بوده که از واکنش کربن مونوکسید با گاز هیدروژن تولید می‌شود. کربن دو نوع اکسید مختلف دارد. کربن مونوکسید، معادل با اکسید ناپایدارتر و قطبی و کربن‌دی‌اکسید، معادل با اکسید پایدارتر و ناقطبی کربن است.



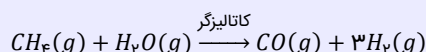
۴) در صنعت برای تولید متانول، گاز کربن مونوکسید را با گاز هیدروژن در شرایط مناسب و در حضور کاتالیزگر واکنش می‌دهند. به دلیل اهمیت متانول در صنایع گوناگون از یک سو و ارزان بودن گاز متان از سوی دیگر، پژوهش‌های شیمیایی زیادی در حال انجام است تا بتوان روشی برای تبدیل مستقیم گاز متان به متانول پیدا کرد. توجه داریم که گاز اکسیژن، دومین گاز فراوان موجود در هواکره است.

متانول

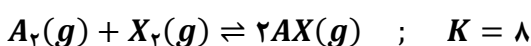
متانول مایعی بی‌رنگ، بسیار سمی و ساده‌ترین عضو خانواده الکل‌هاست که می‌توان آن را از چوب تهیه کرد. از آنجا که این الکل کاربردهای زیادی در صنایع گوناگون دارد، باید آن را در مقیاس صنعتی تولید کرد. در صنعت گاز کربن مونوکسید را با گاز هیدروژن در شرایط مناسب و در حضور کاتالیزگر واکنش می‌دهند. معادله شیمیایی این واکنش به صورت زیر است:



مواد واکنش‌دهنده برای این واکنش در دسترس نیستند. از این رو باید نخست آن‌ها را تولید و سپس به متانول تبدیل کرد. برای تهیه گازهای کربن مونوکسید و هیدروژن، می‌توان از واکنش گاز متان و بخار آب در حضور کاتالیزگر بهره برد.



۱۰۲- دو ظرف m و n ، هر یک به حجم ۸ لیتر، با یک شیر به یکدیگر متصل شده‌اند. ظرف m محتوای ۴ مول از گاز A_2 و ظرف n محتوای ۳ مول از گاز X_2 است. اگر شیر رابط میان دو ظرف را باز کنیم، غلظت گاز AX به چند مول بر لیتر رسیده و پس از ایجاد تعادل، چند مول گاز در ظرف‌ها وجود خواهد داشت؟



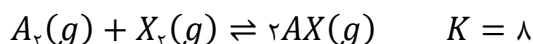
$$۹ - ۰/۵ \quad (۴)$$

$$۷ - ۰/۵ \quad (۳)$$

$$۹ - ۰/۲۵ \quad (۲)$$

$$۷ - ۰/۲۵ \quad (۱)$$

معادله واکنش تعادلی انجام شده به صورت زیر است:



در ابتدا با مخلوط کردن گازهای موجود در دو ظرف، فقط واکنش رفت انجام شده و با مصرف مقداری از این دو واکنش دهنده، تعادل برقرار می شود. جدول زیر، مول اولیه، تغییر مول و مول نهایی هر گاز را در طول این واکنش تعادلی نمایش می دهد:

ماده	A_r	X_r	AX
مول اولیه	۴	۳	۰
تغییر مول	$-x$	$-x$	$+2x$
مول تعادلی	$4-x$	$3-x$	$2x$

حال کسر ثابت تعادل را می نویسیم.

$$K = \frac{(n_{AX})^2}{n_{A_r} \times n_{X_r}} \times \frac{1}{V} \xrightarrow{\Delta n=0} K = \frac{(2x)^2}{(4-x) \times (3-x)} = \frac{4x^2}{x^2 - 7x + 12} = 8 \Rightarrow x = 2$$

با توجه به محاسبات انجام شده، مول گازهای A_r ، X_r و AX در حالت تعادل به ترتیب برابر با ۲، ۱ و ۴ است. همانطور که مشخص است، مجموع مول گازها پس از ایجاد تعادل برابر با ۷ خواهد بود. همچنین غلظت گاز AX پس از برقراری تعادل به ۰/۲۵ مول بر لیتر خواهد رسید. توجه داریم که پس از باز شدن شیر رابط میان دو ظرف، حجم کل برابر با مجموع حجم دو ظرف یعنی ۱۶ لیتر است.



۱۰۳- کدام موارد از عبارتهای زیر، درست هستند؟

- الف - با حل شدن فراوان ترین ترکیب موجود در هوای پاک و خشک در آب، مرجان ها از بین می روند.
 ب - در بازه دمایی که آرگون به حالت گازی دیده می شود، اکسیژن نیز قطعاً به حالت گازی یافت می شود.
 ج - در بازه دمایی که نیتروژن برخلاف اکسیژن به حالت گاز است، فلئور به کندی با هیدروژن واکنش می دهد.
 د - فراوان ترین عنصر موجود در پوسته زمین، در هواکره وجود داشته و در مقایسه با نیتروژن، راحت تر مایع می شود.
 ۱) «الف» و «ج» ۲) «الف» و «د» ۳) «ب» و «ج» ۴) «ب» و «د»

پاسخ: گزینه ۲

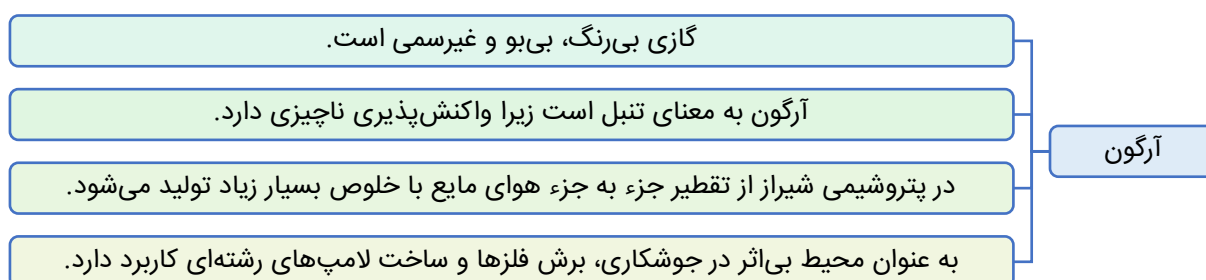
(متوسط - خط به خط و مفهومی - استاندارد ۵ - صفحه ۶۱ - ۱۰۰۲)

عبارتهای (الف) و (د) درست هستند.

بررسی موارد:

الف) فراوان ترین ترکیب موجود در هواکره پاک و خشک، معادل با گاز کربن دی اکسید است. مرجان ها با افزایش مقدار کربن دی اکسید در آب از بین می روند؛ زیرا خاصیت اسیدی آب افزایش پیدا می کند.

پ) نقطه جوش آرگون و اکسیژن به ترتیب برابر -186°C و -183°C است. بر این اساس، می توان گفت آرگون در دماهای بالاتر از -186°C و اکسیژن در دماهای بالاتر از -183°C به صورت گاز دیده می شود. در دماهای بین -186°C و -183°C ، یک نمونه از آرگون به حالت گاز و اکسیژن به حالت مایع دیده می شود. جدول زیر ویژگی های آرگون را نمایش می دهد:



نقطه جوش نیتروژن و اکسیژن به ترتیب برابر -196°C و -183°C است. پس می‌توان گفت نیتروژن در دماهای بالاتر از -196°C و اکسیژن در دماهای بالاتر از -183°C به صورت گاز دیده می‌شود. در دماهای بین -196°C و -183°C ، یک نمونه از نیتروژن به حالت گاز و اکسیژن به حالت مایع دیده می‌شود. از طرفی فلوئور در دماهای بالاتر از -200°C به سرعت با گاز هیدروژن واکنش می‌دهد. نمودار زیر ویژگی‌های هالوژن‌ها را مقایسه می‌کند:



دو عنصر فراوان موجود در هواکره شامل نیتروژن و اکسیژن می‌شوند. در این بین، اکسیژن نقطه جوش بالاتری داشته و آسان‌تر مایع می‌شود. اکسیژن فراوان‌ترین عنصر پوسته زمین است.



۱۰۴- از ترکیب a گرم محلول ۳۰ درصد جرمی سدیم کلرید با 500 گرم محلول ۷۰ درصد جرمی سدیم کلرید، مقداری محلول ۴۰ درصد جرمی حاصل می‌شود. مقدار a ، برابر با چند گرم بوده و 585 گرم از این محلول، با چند لیتر محلول $0/1$ مولار نقره نیترات به‌طور کامل واکنش می‌دهد؟ ($Cl = 35/5, Na = 23 : g.mol^{-1}$)

(۱) $20 - 1500$ (۲) $40 - 1500$ (۳) $20 - 2000$ (۴) $40 - 2000$

(آسان - محاسباتی - استاندارد) - صفحه ۱۰۰ - ۱۰۰۳

پاسخ: گزینه ۲

برای محاسبه درصد جرمی محلول‌های مختلف، از رابطه زیر استفاده می‌کنیم:

$$\frac{\text{جرم محلول} \times \text{درصد جرمی}}{100} = \text{جرم حل‌شونده} \implies \frac{\text{جرم محلول}}{\text{جرم محلول}} \times 100 = \frac{\text{جرم حل‌شونده}}{\text{جرم محلول}} \times 100 = \text{درصد جرمی}$$

ابتدا جرم حل‌شونده موجود در هر یک از محلول‌های اولیه را به دست می‌آوریم:

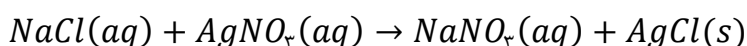
$$\text{جرم حل‌شونده : محلول ①} = \frac{\text{جرم محلول} \times \text{درصد جرمی}}{100} = \frac{30 \times a}{100} = 0/3a \text{ g}$$

$$\text{جرم حل‌شونده : محلول ②} = \frac{\text{جرم محلول} \times \text{درصد جرمی}}{100} = \frac{70 \times 500}{100} = 350 \text{ g}$$

حال با توجه به فرمول، مقدار a را محاسبه می‌کنیم.

$$\frac{\text{جرم حل‌شونده}}{\text{جرم محلول}} \times 100 = 40 \implies 40 = \frac{350 + 0/3a}{500 + a} \times 100 \implies a = 1500 \text{ گرم}$$

درصد جرمی محلول نهایی سدیم کلرید برابر با ۴۰٪ است. معادله واکنش این محلول با محلول نقره نیترات، به صورت زیر خواهد بود:



بر این اساس، داریم:

$$? L = \text{محلول سدیوم کلرید } 40 \text{ g NaCl} \times \frac{1 \text{ mol NaCl}}{58.5 \text{ g NaCl}} \times \frac{1 \text{ mol AgNO}_3}{1 \text{ mol NaCl}} \times \text{محلول نقره نیترات } 585 \text{ g}$$

$$\times \frac{1 \text{ L}}{1 \text{ mol AgNO}_3} = 40 \text{ L}$$



۱۰۵- کدام مورد درست است؟ ($O = 16, C = 12, H = 1: g \cdot mol^{-1}$)

- (۱) سس مایونز، همانند آب دریا، نوعی مخلوط همگن و پایدار است.
- (۲) مسیر عبور نور در شربت معده، همانند محلول سدیوم کلرید، نامشخص است.
- (۳) مخلوط ید در هگزان، همانند یک نمونه از ژله، پایدار بوده و با گذر زمان ته‌نشین نمی‌شود.
- (۴) یک نمونه محلول حاوی ۱۰۸ گرم آب و ۱۳۸ گرم اتانول، نوعی محلول غیرآبی محسوب می‌شود.

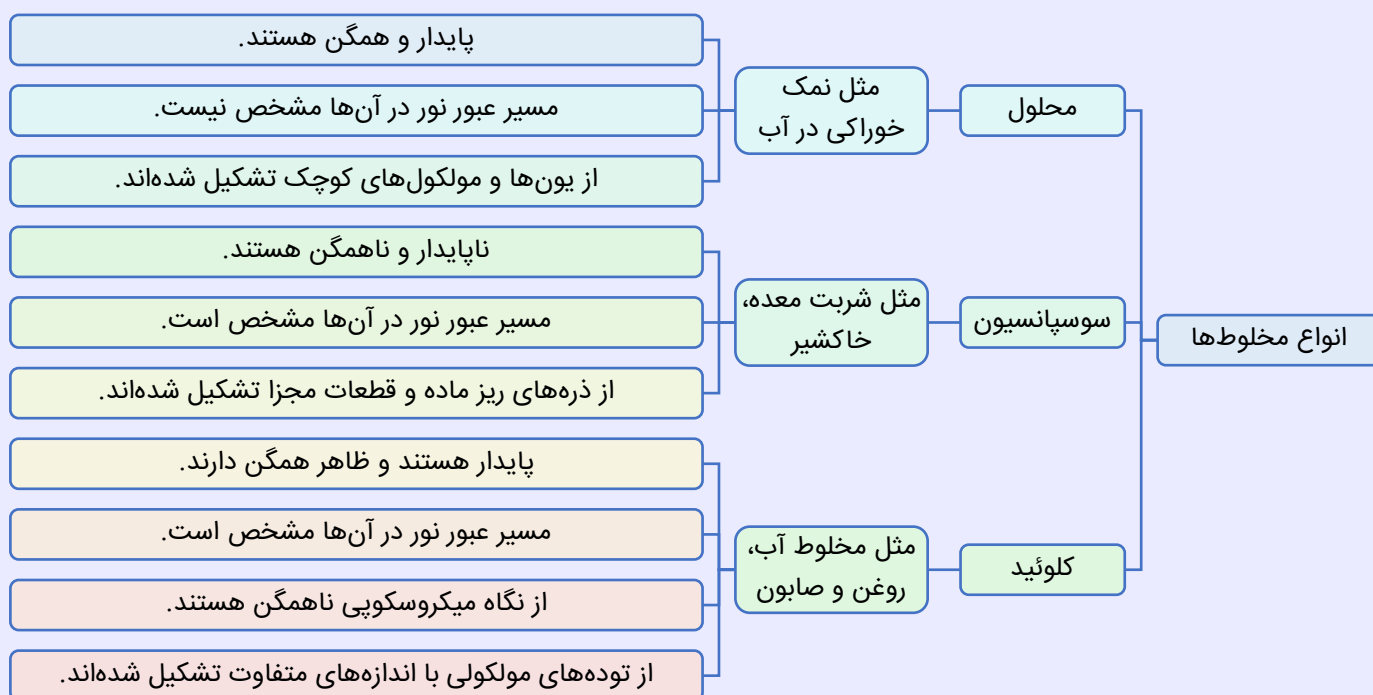
(آسان - خط به خط و مفهومی - سریع ۵ - صفحه ۷ - ۱۲۰۱)

پاسخ: گزینه ۳

ید و هگزان هر دو جزو مواد ناقطبی بوده و به خوبی در یکدیگر حل می‌شوند. مخلوط حاصل از این دو نمونه، نوعی محلول غیرآبی بوده و پایدار است. ژله نیز نوعی کلوئید بوده و مخلوط آن ناهمگن ولی پایدار است.

انواع مخلوط‌ها

نمودار زیر ویژگی‌های انواع مخلوط‌ها را مقایسه می‌کند.



کلوئیدها

کلوئیدها مخلوط‌هایی از دو یا چند ماده به حساب می‌آیند که در برخی از ویژگی‌های خود، به محلول‌ها شباهت دارند و در برخی از ویژگی‌های خود، با محلول‌ها تفاوت داشته و به مخلوط‌های ناهمگن شبیه هستند. ذره‌های سازنده کلوئیدها عموماً به صورت مولکول‌های بزرگ و یا توده‌های مولکولی هستند که اندازه آن‌ها بزرگ‌تر از اندازه حل‌شونده‌های موجود در محلول‌های همگن است. چون اندازه ذرات موجود در کلوئیدها بزرگ‌تر از اندازه ذرات موجود در محلول‌ها است، اگر پرتوی نوری از درون کلوئیدها بگذرد، توسط ذره‌های سازنده کلوئید پخش شده و به چشم بازتابیده می‌شود و به همین خاطر است که مسیر عبور نور در کلوئیدها قابل مشاهده است. سطح ذرات موجود در ساختار کلوئیدها باردار بوده و به همین خاطر، این مواد با ماندن در یک موقعیت ثابت ته‌نشین نمی‌شوند.

بررسی سایر گزینه‌ها:

- ۱) سس مایونز، نوعی کلوئید و آب دریا نوعی محلول است. محلول‌ها همگن بوده و کاملاً پایدار هستند. کلوئیدها نیز ناهمگن ولی پایدار هستند. توجه داریم که کلوئیدها ظاهراً همگن به نظر می‌رسند.
- ۲) شربت معده نوعی سوسپانسیون و مخلوط نمک خوراکی و آب نوعی محلول است. مسیر عبور نور در سوسپانسیون‌ها برخلاف محلول‌ها مشخص است.
- ۴) در یک محلول حاوی مواد مختلف، ماده‌ای که مول بیشتری داشته باشد، حلال و اعضای دیگر حل‌شونده هستند. مقدار ۱۰۸ گرم آب معادل ۶ مول آب و ۱۳۸ گرم اتانول معادل ۳ مول اتانول است. پس می‌توان گفت این محلول، نوعی محلول آبی است.

