گروه آزمایشی علوم ریاضی و فنی

آزمون ماز | پایهٔ دوازدهم

دفترچه پاسخ

پنجشنبه ۹ بهمن‌ماه ۱۴۰۴

نیم‌سال دوم دوازدهم $\frac{۱}{۸}$

پایهٔ یازدهم $\frac{۱}{۵}$

ویژهٔ کنکـــوری‌های ۱۴۰۵

- پاسخنامه سریع؛ برای بررسی فوری بعد از آزمون
- تحلیل تمام گزینه‌های هر سؤال؛ برای بررسی سؤالاتی که پاسخ نادرست داده‌اید
- نکات و درسنامه‌های آموزشی؛ برای یادگیری کامل مباحث هر سؤال
- مشاورهٔ تستی؛ برای یادگیری انواع روش‌های حل تست
- استراتژی آزمون؛ برای یادگیری مدیریت زمان و مدیریت جلسهٔ آزمون

حق چاپ و تکثیر سؤالات به هر روش (الکترونیکی و...) پس از برگزاری آزمون برای تمامی اشخاص حقوقی تنها با مجوز «گروه ماز» مجاز می‌باشد و با متخلفین برابر مقررات رفتار می‌شود.

سنجش کلاد
www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshCloud

درس	مسئول درس	طراحان	ویراستاران
ریاضیات	حسین شفیع‌زاده سیدجواد نظری مهرداد کیوان	مهرداد کیوان ـ کیوان دارابی علیرضا شریف خطیبی ـ رسول حاجی‌زاده	مهران جعفری ـ ندا فرهختی مائده بادان فیروز حمیدرضا ولی‌پور ـ وحید بهروزی علیرضا ملک حسینی ـ علی اسدی
فیزیک	سجاد صادقی‌زاده سعید احمدی	سعید احمدی ـ سجاد صادقی‌زاده حسین عبدوی‌نژاد ـ محمدجواد سورچی مهدی پارسا ـ زهره آقامحمدی احسان ایرانی ـ امیررضا خوینی‌ها سارا قانع ـ محسن قندچلر حسین زین‌العابدین‌زاده ـ مهدی رحمت‌اللهی امیرحسین اکبری ـ غلامرضا محبی هادی همزه‌پور ـ حامد نبی‌منصور	محمدجواد سورچی حنا خلعتبری
شیمی	فرشاد هادیان‌فرد	فرشاد هادیان‌فرد ـ فرهنگ امیری علی ترابی ـ مهسا بایمانی‌نژاد عالیه میرزایی ـ طاها حق بین	فرهنگ امیری ـ طاها حق‌بین محمدرضا جمشیدی محمد دارابی‌جم

تیم اجرایی و تولید آزمون

مجتبی آدمیان — نازنین امیری

مائده بادان‌فیروز — زهره جعفری

مدیر تولید آزمون: محدثه شیخعلی

یک تیم با بیش از ۵۰۰ نفر در حال کار هستن تا آزمون‌های ماز با حداکثر کیفیت حاضر بشن و به شما کمک کنن و مسیر موفقیت رو براتون ساده‌تر کنن. همیشه از نظرات و کامنت‌های خوب‌تون انرژی می‌گیریم. مرسی که همراهمون هستین.

راستی! حتماً در نظرسنجی آزمون شرکت کنین و نظرات و پیشنهادات‌تون رو برامون بنویسین.

دکتر رسول خنجری

سنجش کلاد
www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshCloud

آموزش استراتژی آزمون و مدیریت جلسه کنکور- قسمت ۱۵

دفتر رفع اشکال و یادداشت‌های ویژه

درس خوندن ذاتاً کار سختیه، نه چون ما تنبلیم، بلکه چون مغز انسان دنبال کم‌کردن فشاره و طبیعی‌ترین واکنشش اینه که بهونه پیدا کنه برای توقف.

یکی از بهترین بهونه‌هاش هم اینه که وسط مطالعه به یه نکته‌ای برسیم که نفهمیدیم. همین «نفهمیدم» کافیه تا ذهن سریع ترمز بکشه و قانعمون کنه که الان ادامه نده، اول اینو حل کن، بعداً برگرد.

نتیجه‌ش هم معمولاً توقف مطالعه و به‌هم‌ریختن تمرکزه.

اما وقتی این مکانیزم رو بشناسیم، می‌تونیم جلوش رو بگیریم و نذاریم مغز از نفهمیدن به‌عنوان بهونهٔ توقف استفاده کنه.

راه‌حل ساده‌ست:

هر جا وسط مطالعه به نکته‌ای رسیدی که نفهمیدی، لازم نیست همون لحظه متوقف بشی.

- کافیه اون نکته رو کوتاه و مشخص توی دفتر رفع اشکال بنویسی و به خودت بگی بعداً برمی‌گردم سراغش.

همین کار باعث می‌شه خیالت راحت باشه چیزی از قلم نیفتاده و در عین حال ریتم مطالعه‌ت هم حفظ بشه.

دفتر رفع اشکال در واقع جاییه که سوال‌ها پارک می‌شن، نه اینکه وسط مسیر مطالعه‌ت سد راهت بشن.

الان البته یه ابزار خیلی قوی هم در اختیار دانش‌آموزاست و اون هوش مصنوعیه.

- هر جا رو نفهمیدی می‌تونی ازش بخوای مرحله‌به‌مرحله و با مثال برات توضیح بده، اما باید حواست باشه که برای خیلی‌ها وصل شدن به وب تمرکز رو می‌ریزه به‌هم.

نوتیفیکیشن‌ها، گشتن‌های بی‌هدف و پرش ذهنی باعث می‌شه همون چند دقیقه تبدیل به یه وقفه‌ی طولانی بشه.

برای همین اگه می‌دونی تمرکزت می‌ریزه، بهتره باز هم نکته رو یادداشت کنی و بذاری برای یه زمان مشخص بعداً با کمک چت‌جی‌پی‌تی، دبیر، کلاس یا کلیپ آموزشی برطرفش کنی.

اما داستان دفتر یادداشت‌های ویژه از یه جای مهم‌تر شروع می‌شه: بعد از تست زدن.

- معمولاً توصیه می‌کنیم برای درسای خوندنی دو روز بعد از مطالعه از اون مبحث تست بزنی، چون اونجاست که مشخص می‌شه کدوم نکات واقعاً جا نیفتادن.

خیلی وقت‌ها نکاتی که فکر می‌کردی ساده‌ان یا اصلاً مهم نیستن، باعث غلط زدن تست‌ها می‌شن، یا یه سری ریزه‌کاری هستن که سریع از ذهن می‌پرن.

این دقیقاً همون چیزاییه که باید به‌طور ویژه توی دفتر یادداشت‌های مخصوص نوشته بشه.

سنجش کلاد
www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshCloud

فرق یادداشت معمولی با یادداشت ویژه اینه که موقع مطالعه انگار مطالب رو می‌ریزی توی بند عمومی، اما وقتی بعد از تست از غلط‌هات نکته درمیاری، اون مطالب می‌رن توی انفرادی.

دفتر یادداشت‌های ویژه عصارهٔ اشتباهات شخصی خودتن؛ چیزایی که کنکور دقیقاً از همونا ضربه می‌زنه.

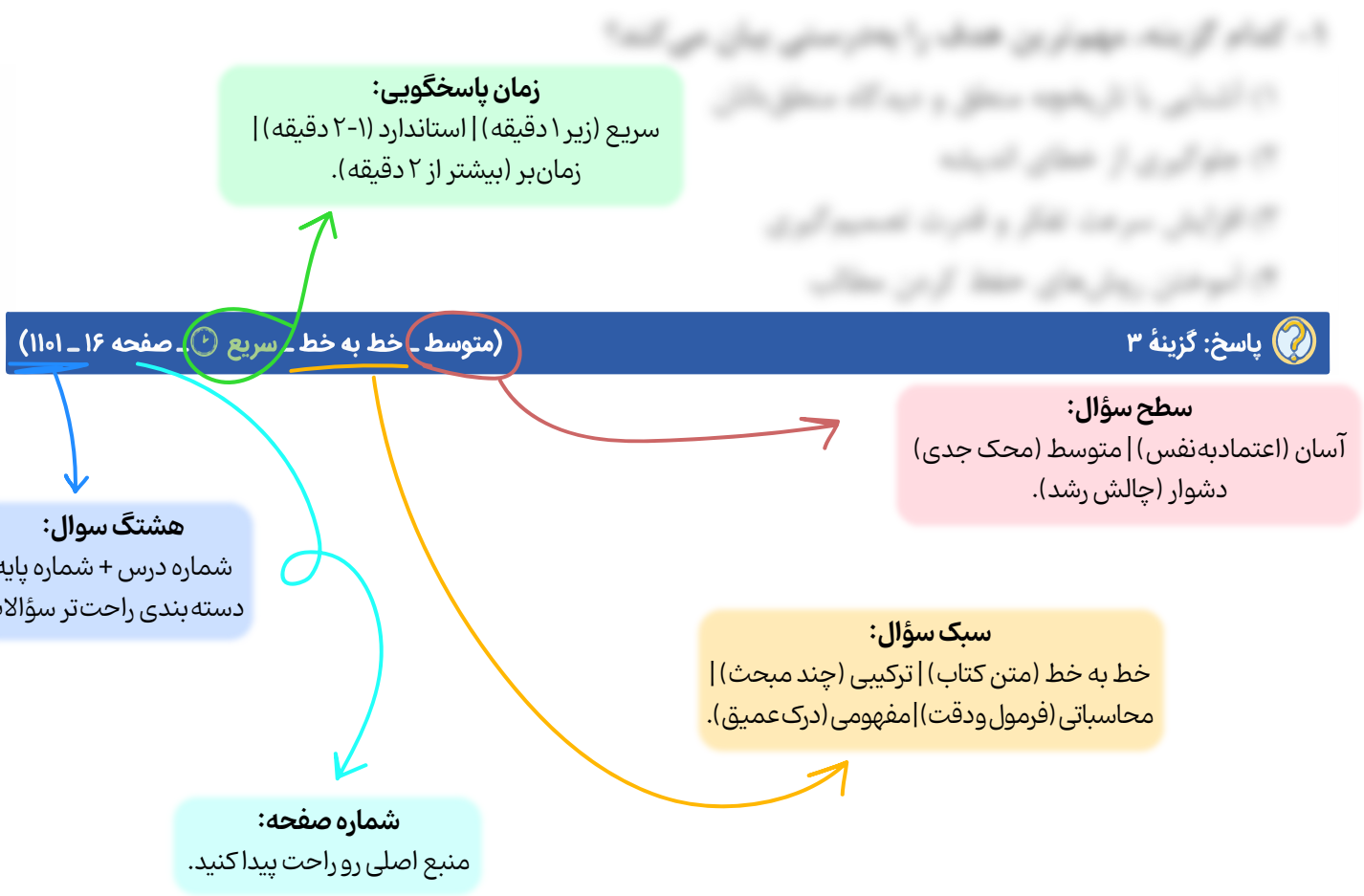
کسی که این دو تا دفتر رو درست و جدی استفاده می‌کنه، نه فقط بیشتر می‌خونه، بلکه هوشمندانه‌تر و حرفه‌ای‌تر درس می‌خونه.

به طور خلاصه اینکه

- مغز برای فرار از فشارِ درس خوندن دنبال بهونه‌ست و نفهمیدن یه نکته بهترین ترمز مطالعه‌ست.
- راه درست اینه که وسط خوندن توقف نکنیم و نکات نامفهوم رو توی دفتر رفع اشکال یادداشت کنیم تا بعداً سراغشون بریم و ریتم مطالعه‌مون حفظ بشه.
- هوش مصنوعی می‌تونه کمک‌کننده باشه، ولی اگه تمرکزت به‌هم می‌ریزه بهتره حل اشکال رو بذاری برای زمان مشخص بعدی.
- بعد از تست زدن، نکات ریز و دام‌داری که باعث غلط شدن تست‌ها می‌شن باید وارد دفتر یادداشت‌های ویژه بشن.
- این دفتر عصارهٔ اشتباهات شخصیه و دقیقاً همون چیزیه که دانش‌آموز حرفه‌ای رو از بقیه جدا می‌کنه.

سنجش کلاد
www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshCloud

راهنمای پاسخنامه آزمون ها



یادتون باشه:

- ✓ هر سؤال یک فرصت یادگیریه، نه یک مانع.
- ✓ پاسخ‌نامه فقط جواب نیست؛ یک کارگاه آموزشی کامله.
- ✓ با هر آزمون و مرور این پاسخ‌نامه، یک پله بالاتر می‌رید و یک قدم به رؤیاتون نزدیک‌تر می‌شید.
- ✓ موفقیت فقط برای کسایی‌یه که با برنامه و انگیزه حرکت می‌کنن. شما همون آدمید.

www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshCloud

بودجه‌بندی این آزمون

حسابان ۲: مشتق، صفحه‌های ۷۱ تا ۸۳
ریاضی پایه: معادله، نامعادله و تعیین علامت، ریاضی ۱ صفحه‌های ۸۳ تا ۹۳، حسابان ۱ صفحه‌های ۱۴ تا ۲۸
هندسه ۳: آشنایی با مقاطع مخروطی (تا ابتدای سهمی)، صفحه‌های ۴۷ تا ۵۰
هندسه پایه: دایره، هندسه ۲ (از ابتدای حالت‌های دو دایره نسبت به هم تا انتهای فصل) صفحه‌های ۲۰ تا ۳۰
گسسته: گراف و مدل‌سازی (از ابتدای مدل‌سازی با گراف تا ابتدای فعالیت ص ۴۸)، صفحه‌های ۴۳ تا ۴۸
آمار و احتمال: آشنایی با مبانی ریاضیات، صفحه‌های ۱ تا ۳۴، ریاضی ۱ صفحه‌های ۱ تا ۱۳

سهم در کنکور

حسابان ۲: از این مبحث به‌طور مستقیم تستی در کنکور طرح نشده است.
ریاضی پایه: این مبحث در مجموع ۱ تست از ۱۴ تستِ کنکور را پوشش داده است.
هندسه ۳: از این مبحث به‌طور مستقیم تستی در کنکور طرح نشده است.
هندسه پایه: این مبحث در مجموع ۱ تست از ۸ تستِ کنکور را پوشش داده است.
گسسته: این مبحث در مجموع ۱ تست از ۴ تستِ کنکور را پوشش داده است.
آمار و احتمال: این مبحث در مجموع ۲ تست از ۴ تستِ کنکور را پوشش داده است.

برای دیدن پاسخنامهٔ ویدئویی آزمون QRcode بالا را اسکن کنید!
یا بر روی لینک زیر کلیک کنید!
پاسخنامهٔ ویدئویی

۱- اگر $f(x)=x^۲-۲x$ باشد، مقدار $\lim\limits_{x\to ۲}\frac{f(x)}{۴-x^۲}$ چند برابر $\lim\limits_{h\to ۰}\frac{f(۲+h)}{h}$ است؟

۱) $\frac{۱}{۴}$ ۲) $-\frac{۱}{۴}$ ۳) -۴ ۴) ۴

پاسخ: گزینهٔ ۲ (آسان ـ خط‌به‌خط ـ استاندارد ⏱ ـ حسابان ۲ صفحهٔ ۷۹ ـ ۱۲۰۴)

با توجه به آن‌که $f(۲)=۰$ است، پس:

$$\lim_{x\to ۲}\frac{f(x)}{۴-x^۲}=\lim_{x\to ۲}\frac{f(x)-f(۲)}{-(x-۲)(x+۲)}=\frac{-۱}{۴}f'(۲)$$

$$\lim_{h\to ۰}\frac{f(۲+h)}{h}=\lim_{h\to ۰}\frac{f(۲+h)-f(۲)}{h}=f'(۲)$$

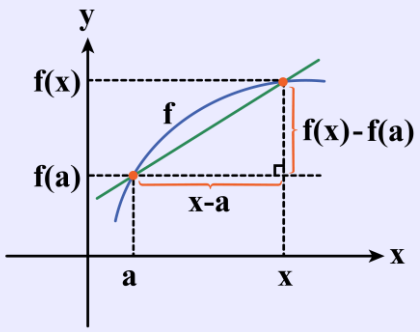
درنتیجه:

$$\frac{\lim\limits_{x\to ۲}\frac{f(x)}{۴-x^۲}}{\lim\limits_{h\to ۰}\frac{f(۲+h)}{h}}=\frac{\frac{-۱}{۴}f'(۲)}{f'(۲)}=\frac{-۱}{۴}$$

لذا نسبت خواسته‌شده برابر با $-\frac{۱}{۴}$ است.

تعریف مشتق

تعریف: فرض کنید f یک تابع باشد، حد زیر را (در صورت وجود) مشتق تابع f در نقطهٔ a می‌نامیم و با $f'(a)$ نمایش می‌دهیم.

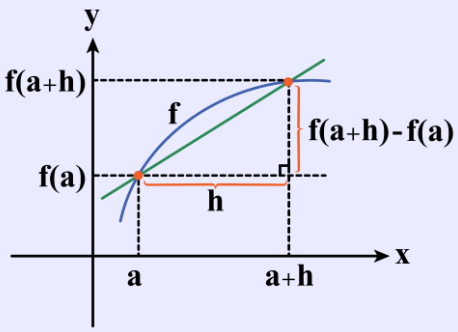


$$f'(a)=\lim_{h\to ۰}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

سنجش کلاد
www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshCloud

همچنین حاصل این حد را شیب خط مماس بر نمودار تابع f در نقطهٔ a (و یا شیب منحنی f در a) می‌نامیم.

تعریف دیگر مشتق: اگر در تعریف مشتق، قرار دهیم $x = a + h$ و $x \to a$، آن‌گاه تعریف معادل زیر برای مشتق به‌دست می‌آید:



$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

تعمیم تعریف مشتق: اگر f در a مشتق‌پذیر باشد، آن‌گاه:

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(a+mh) - f(a+nh)}{h} = mf'(a) - nf'(a) = (m-n)f'(a)$$

یه نمونهٔ باحال ببین!

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(2+3h) - f(2-2h)}{h} = 3f'(2) - (-2)f'(2) = 5f'(2)$$

۲- اگر $2y + ax = 3$ مماس بر نمودار f در نقطه‌ای با طول $x = -2$ باشد، به‌طوری که $-2f'(-2) + f(-2) = \frac{9}{2}$ مقدار a کدام است؟

۱) $-0/5$ ۲) $-1/5$ ۳) $0/5$ ۴) $1/5$

پاسخ: گزینهٔ ۴ (آسان ـ مفهومی ـ استاندارد ـ حسابان ۲ صفحهٔ ۷۳ ـ ۱۲۰۴)

$$2y + ax = 3 \Rightarrow 2y = -ax + 3 \Rightarrow y = \frac{-a}{2}x + \frac{3}{2}$$

این خط در نقطه‌ای به طول $x = -2$، مماس بر f است، پس $f'(x)$ برابر با شیب خط y است.

$$f'(x) = \frac{-a}{2} = f'(-2)$$

از طرفی نقطهٔ $x = -2$ محل تماس خط و تابع f است، پس در هر دوی آن‌ها صدق می‌کند.

$$\Rightarrow y = \frac{-a}{2}(-2) + \frac{3}{2} \Rightarrow y = \frac{2a+3}{2} = f(-2)$$

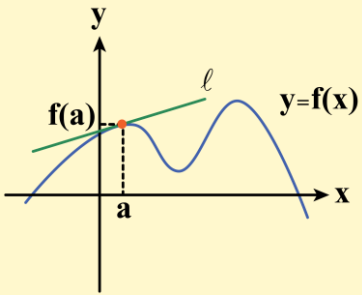
پس:

$$-2f'(-2) + f(-2) = \frac{9}{2} \Rightarrow -2(-\frac{a}{2}) + \frac{2a+3}{2} = \frac{9}{2} \Rightarrow 2a + \frac{3}{2} = \frac{9}{2} \Rightarrow a = \frac{3}{2} = 1/5$$

مشتق و شیب خط مماس

اگر خط ℓ در نقطهٔ $x = a$ بر تابع $f(x)$ مماس باشد، در این صورت شیب خط ℓ برابر با مشتق تابع $f(x)$ در نقطهٔ $x = a$ می‌شود. به عبارتی اگر داشته باشیم: $m =$ شیب خط

در این صورت:



$$f'(a) = m$$

سنجش کلاد
www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshCloud

۳- برای تابع پیوستهٔ f، هرگاه $\lim\limits_{x\to 1}\frac{f(x)+1}{2x^2-x-1}=\frac{4}{3}$، مقدار $\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(1+2h)+1}{h}$ چه عددی است؟

۱) ۲ ۲) ۴ ۳) ۸ ۴) ۶

پاسخ: گزینهٔ ۳ (متوسط ـ خط‌به‌خط ـ زمان‌بَر ـ حسابان ۲ صفحهٔ ۷۹ ـ ۱۲۰۴)

اگر f در همسایگی a تعریف شده باشد، $f'(a)=\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ پس:

$$\lim_{x\to 1}\frac{f(x)+1}{2x^2-x-1}=\frac{4}{3}\Rightarrow\lim_{x\to 1}\frac{f(x)+1}{(x-1)(2x+1)}=\frac{4}{3}\Rightarrow\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-(-1)}{x-1}=4$$

بنابراین $f'(1)=4$ و $f(1)=-1$ است.

برای محاسبهٔ حد $\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(1+2h)+1}{h}$ با توجه به تعریف مشتق، در مخرج یک ضریب ۲ کم داریم، پس صورت و مخرج را در ۲ ضرب می‌کنیم و داریم:

$$2\lim_{h\to 0}\frac{f(1+2h)+1}{2h}=2f'(1)=2\times 4=8$$

۴- هرگاه $f(2)=0$ و $f'(2)=4$، مقدار $\lim\limits_{x\to+\infty} xf\left(\frac{2x+3}{x}\right)$ چه عددی است؟

۱) ۱۲ ۲) ۴ ۳) $\frac{4}{3}$ ۴) $\frac{8}{3}$

پاسخ: گزینهٔ ۱ (متوسط ـ مفهومی ـ استاندارد ـ حسابان ۲ صفحهٔ ۷۹ ـ ۱۲۰۴)

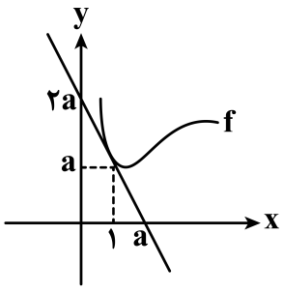
$$\lim_{x\to+\infty} xf\left(\frac{2x+3}{x}\right)=\lim_{x\to+\infty} xf\left(2+\frac{3}{x}\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{f\left(2+\frac{3}{x}\right)}{\frac{1}{x}}$$

فرض می‌کنیم $h=\frac{1}{x}$ است، در این صورت: $\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(2+3h)}{h}$

با توجه به $f(2)=0$ می‌توانیم مقدار $f(2)$ را از صورت تفریق کنیم، چون تاثیری در حاصل نهایی ندارد، به این ترتیب تعریف مشتق را ساخته‌ایم:

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(2+3h)-f(2)}{h}=\lim_{h\to 0}3\frac{f(2+3h)-f(2)}{3h}=3f'(2)=3\times 4=12$$

۵- خط مماس بر تابع $y=f(x)$ در $x=1$ مطابق شکل داده شده است. مقدار $2f'(1)-f(1)$ چه عددی است؟



۱) ۶
۲) -6
۳) -4
۴) ۴

پاسخ: گزینهٔ ۲ (متوسط ـ ترکیبی ـ سریع ـ حسابان ۲ صفحهٔ ۷۸ ـ ۱۲۰۴)

ابتدا معادلهٔ خط مماس را با توجه به اطلاعات روی نمودار به‌دست می‌آوریم.

خط از نقاط $(0,2a)$ و $(a,0)$ می‌گذرد، پس: $m=\frac{0-2a}{a-0}=-2$

$$y=mx+n\xrightarrow[n=2a]{m=-2}y=-2x+2a$$

سنجش کلاد
www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshCloud

محل برخورد خط مماس و منحنی نقطهٔ $(۱,a)$ است، پس این نقطه در هر دو معادله صدق می‌کند.

$$f(۱)=a \Rightarrow -۲(۱)+۲a=a \Rightarrow a=۲ \Rightarrow f(۱)=۲$$

از طرفی مشتق تابع f در نقطه $(۱,a)$ برابر با شیب خط مماس است، یعنی:

$$f'(۱)=-۲$$

پس:

$$۲f'(۱)-f(۱)=۲(-۲)-۲=-۶$$

۶- هرگاه $f(x)=(۲x^۲-x-۱)\sqrt{ax+۳}$ باشد به‌طوری که $f'(۱)=۱۲$، مقدار a کدام است؟

۱) ۱۵ ۲) ۱۴ ۳) ۱۹ ۴) ۱۳

پاسخ: گزینهٔ ۴ (آسان ـ مفهومی ـ سریع ـ حسابان ۲ صفحهٔ ۷۹ ـ ۱۲۰۴)

مطابق تعریف مشتق داریم:

$$f'(۱)=\lim_{x\to ۱}\frac{f(x)-f(۱)}{x-۱}=\lim_{x\to ۱}\frac{(۲x^۲-x-۱)\sqrt{ax+۳}-۰}{x-۱}$$

$$=\lim_{x\to ۱}\frac{(x-۱)(۲x+۱)\sqrt{ax+۳}}{x-۱}=\lim_{x\to ۱}(۲x+۱)\sqrt{ax+۳}=۳\times\sqrt{a+۳}$$

می‌دانیم مقدار $f'(۱)=۱۲$ است، بنابراین:

$$۳\sqrt{a+۳}=۱۲ \Rightarrow \sqrt{a+۳}=۴ \Rightarrow a=۱۳$$

۷- اگر عرض از مبدأ خط مماس بر نمودار تابع $f(x)=۴-(۱-x)^۲$ در $x=۳$ برابر k باشد و مقدار $\lim_{h\to ۰}\frac{h}{f(۳+۲h)}$ برابر m باشد، مقدار mk کدام است؟

۱) $-\frac{۴}{۳}$ ۲) $-\frac{۳}{۴}$ ۳) $-\frac{۲}{۳}$ ۴) $-\frac{۳}{۲}$

پاسخ: گزینهٔ ۴ (متوسط ـ خط‌به‌خط ـ استاندارد ـ حسابان ۲ صفحهٔ ۷۹ ـ ۱۲۰۴)

محاسبهٔ عرض نقطه:

$$f(۳)=۴-(۱-۳)^۲=۰$$

شیب خط مماس بر نمودار تابع $f(x)$ در نقطهٔ $x=۳$، همان مشتق $f(x)$ در $x=۳$ است، بنابراین:

$$f'(۳)=\lim_{x\to ۳}\frac{۴-(۱-x)^۲-۰}{x-۳}=\lim_{x\to ۳}\frac{(۲-۱+x)(۲+۱-x)}{x-۳}=\lim_{x\to ۳}\frac{(۱+x)(۳-x)}{x-۳}=\lim_{x\to ۳}-(۱+x)=-۴$$

پس $f'(۳)=-۴$ و $A(۳,۰)$ نقطهٔ روی نمودار f است. پس ضابطهٔ خط مماس برابر با $y=-۴x+۱۲$ است، پس $k=۱۲$ است. از طرف دیگر:

$$\lim_{h\to ۰}\frac{h}{f(۳+۲h)}=\frac{۱}{۲}\lim_{h\to ۰}\frac{۲h}{f(۳+۲h)}=\frac{۱}{۲}\times\frac{۱}{f'(۳)}=\frac{۱}{۲f'(۳)}=\frac{-۱}{۸} \Rightarrow m=\frac{-۱}{۸}$$

در نهایت:

$$mk=\frac{-۱}{۸}\times ۱۲=-\frac{۱۲}{۸}=-\frac{۳}{۲}$$

سنجش کلاد
www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshCloud

۸- هرگاه جواب نامعادلهٔ $\frac{x+۳\sqrt{x}+۲}{ax+۲}>۰$، مجموعهٔ $[۰,+\infty)$ باشد، حدود a کدام است؟

۱) $۱\le a\le ۲$ ۲) $a\le ۰$ ۳) $a\ge ۰$ ۴) $۰\le a\le ۲$

پاسخ: گزینهٔ ۳ (آسان ـ مفهومی ـ سریع ـ ریاضی ۱ صفحهٔ ۹۳ ـ ۱۰۰۴)

$$\frac{x+۳\sqrt{x}+۲}{ax+۲}>۰\Rightarrow\frac{(\sqrt{x}+۱)(\sqrt{x}+۲)}{ax+۲}>۰$$

برای تعریف شده بودن عبارت $\sqrt{x}$ باید x نامنفی باشد، یعنی $x\ge ۰$.

از طرفی صورت کسر $\frac{(\sqrt{x}+۱)(\sqrt{x}+۲)}{ax+۲}$ همواره مثبت است. برای مثبت بودن این کسر باید مخرج هم مثبت باشد، یعنی:

$$ax+۲>۰\xrightarrow[\text{برقرار باشد.}]{\text{برای x‌های نامنفی همواره نامعادله باید}}a\ge ۰$$

زیرا اگر $a<۰$ باشد، مخرج در بازهٔ $[۰,+\infty)$ تغییر علامت می‌دهد و نامعادله مجموعه جوابش کوچک‌تر از $[۰,+\infty)$ می‌شود.

رفع ابهام!

اگر $a<۰$ بود مجموعه جواب کلی نامعادله به‌صورت $[۰,m)$ می‌شد! با رسم نمودار خط $ax+۲$ در دو حالت شیب مثبت و منفی خودتون بهتر درک می‌کنید که چی می‌گم. 😉

۹- اگر مجموعه جواب نامعادلهٔ $(m+۴)x^۲<n-(m-n+۴)x$ بازهٔ $(m+۱,-۱)$، با شرط صحیح بودن m باشد، مقدار $m+n$ چه عددی است؟

۱) -۴ ۲) -۵ ۳) -۳ ۴) -۶

پاسخ: گزینهٔ ۲ (متوسط ـ محاسباتی ـ زمان‌بَر ـ ریاضی ۱ صفحهٔ ۸۹ ـ ۱۰۰۴)

ابتدا تمام عبارات را به سمت چپ نامعادله می‌بریم:

$$(m+۴)x^۲+(m-n+۴)x-n<۰$$

با توجه به این‌که بازهٔ جواب نامعادله بین دو عدد قرار دارد، پس ضریب $x^۲$ مثبت است:

$$m+۴>۰\Rightarrow m>-۴$$

از طرفی جواب نامعادله به‌صورت $(m+۱,-۱)$ است، یعنی:

$$m+۱<-۱\Rightarrow m<-۲$$

یعنی $-۴<m<-۲$ و با توجه به این‌که m صحیح است، فقط $m=-۳$ قابل قبول است، پس:

$$x^۲+(-n+۱)x-n<۰\xrightarrow{a+c=b}(x+۱)(x-n)<۰\Rightarrow n<x<-۱\ \text{یا}\ -۱<x<n$$

با توجه به این‌که بازهٔ $(m+۱,-۱)$ جواب است، $n<x<-۱$ قابل قبول است. پس ریشهٔ کوچک‌تر معادله برابر n است، بنابراین:

$$n=m+۱\Rightarrow n=-۲$$

در نتیجه:

$$m+n=-۵$$

قِلِقِشو یاد بگیر!

در حل نامعادلات تشکیل شده از چندجمله‌ای‌ها با حداکثر درجهٔ ظاهر شدهٔ ۲، اگر بازهٔ جواب بین دو عدد به‌صورت (m,n) بود، قطعاً نامعادله به‌صورت درجهٔ دوم با $\Delta>۰$ است و m و n ریشه‌های آن هستند.

حالت‌های خاص جواب معادلهٔ درجه دوم

دو حالت خاص و مهم در معادلهٔ $ax^۲+bx+c=۰$:

الف) اگر جمع ضرایب a، b و c صفر شود، یک ریشهٔ معادله $x_۱=۱$ و ریشهٔ دیگر آن $x_۲=\frac{c}{a}$ است.

یه نمونهٔ باحال ببین!

$$x^{۲}-۳x+۲=۰ \xrightarrow{a+b+c=۱-۳+۲=۰} x_{۱}=۱, x_{۲}=\frac{c}{a}=\frac{۲}{۱}$$

ب) اگر $b=a+c$ باشد، داریم: $x_{۱}=-۱$ و $x_{۲}=-\frac{c}{a}$

یه نمونهٔ باحال ببین!

$$x^{۲}-۲x-۳=۰ \xrightarrow{b=a+c} x_{۱}=-۱, x_{۲}=-\frac{c}{a}=۳$$

ماز

۱۰- در یک مستطیل که نسبت طلایی بین طول و عرض آن برقرار است، محیط آن از سه برابر عرض آن ۲ واحد بیشتر است، مساحت این مستطیل چه عددی است؟

۱) $۰/۲(\sqrt{۵}+۱)$ ۲) $۰/۲(\sqrt{۵}+۵)$ ۳) $۰/۴(\sqrt{۵}+۱)$ ۴) $۰/۴(\sqrt{۵}+۵)$

پاسخ: گزینهٔ ۳ (متوسط ـ محاسباتی ـ استاندارد ـ حسابان ۱ صفحهٔ ۱۹ ـ ۱۱۰۱)

ترجمهٔ سؤال

«محیط آن از سه برابر عرض آن ۲ واحد بیشتر است»، یعنی با فرض این‌که $a=$ عرض و $b=$ طول باشد: $۲(a+b)=۳a+۲$

چون نسبت طلایی در مستطیل برقرار است، پس با فرض آن‌که عرض آن a و طول آن b باشد، آن‌گاه:

$$\frac{a+b}{a}=\frac{b}{a} \Rightarrow \frac{b}{a}=\frac{۱+\sqrt{۵}}{۲} \Rightarrow b=\frac{۱+\sqrt{۵}}{۲}a \quad (۱)$$

از طرفی می‌دانیم:

$$۲(a+b)=۳a+۲$$
$$\Rightarrow ۲a+۲b=۳a+۲ \Rightarrow ۲b=a+۲$$
$$\xrightarrow{(۱)} ۲(\frac{۱+\sqrt{۵}}{۲})a=a+۲ \Rightarrow (۱+\sqrt{۵})a=a+۲ \Rightarrow a\sqrt{۵}=۲ \Rightarrow a=\frac{۲}{\sqrt{۵}} \Rightarrow b=\frac{۱+\sqrt{۵}}{۲}\times\frac{۲}{\sqrt{۵}}=\frac{۱+\sqrt{۵}}{\sqrt{۵}}$$

$$S=ab=\frac{۲}{\sqrt{۵}}\times\frac{۱+\sqrt{۵}}{\sqrt{۵}}=۰/۴(۱+\sqrt{۵})$$

نسبت طلایی

اگر در یک مستطیل با طول x و عرض y رابطهٔ زیر برقرار باشد، در این صورت به آن مستطیل، **«مستطیل طلایی»** و به نسبت $\frac{x}{y}$ **«نسبت طلایی»** می‌گوییم.

$$\frac{x}{y}=\frac{x+y}{x}$$

اگر نسبت $\frac{x}{y}$ را برابر با t فرض کنیم، داریم:

$$\frac{x}{y}=t \xrightarrow{\frac{x+y}{x}=۱+\frac{y}{x}=۱+\frac{۱}{t}} t=۱+\frac{۱}{t} \Rightarrow t^{۲}-t-۱=۰ \Rightarrow \begin{cases} t=\frac{۱+\sqrt{۵}}{۲} \\ t=\frac{۱-\sqrt{۵}}{۲}<۰ \text{ غ ق ق} \end{cases}$$

توجه داشته باشید که عدد $\frac{۱+\sqrt{۵}}{۲}$ به عدد طلایی معروف است و مقدار تقریبی آن ۱/۶۱۸ است. بنابراین می‌توان گفت که در یک مستطیل طلایی نسبت طول به عرض آن برابر است با:

$$t=\frac{x}{y}=\frac{۱+\sqrt{۵}}{۲}$$

سنجش کلاد
www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshCloud

۱۱- مجموعه جواب نامعادلهٔ $(۲a+۴)x^۲+(۲b-۳)x+۲c-۱<۰$ با فرض طبیعی بودن b بازهٔ $(a-b,+\infty)$ است. مقدار $ac+b$ چه عددی است؟

۱) ۱ ۲) -۲ ۳) -۱ ۴) ۳

پاسخ: گزینهٔ ۴ (سخت ـ مفهومی ـ استاندارد ـ ریاضی ۱ صفحه‌های ۸۹ تا ۹۳ ـ ۱۰۰۴)

جواب نامعادله به‌صورت یک بازه است که از یک طرف تا بی‌نهایت ادامه دارد و ریشهٔ معادله $a-b$ می‌باشد. پس عبارت $f(x)=(۲a+۴)x^۲+(۲b-۳)x+۲c-۱$ درجهٔ اول و به‌صورت خطی است.

بررسی معادلهٔ خط: در معادلهٔ خطی (درجه اول)، ضریب $x^۲$ برابر با صفر است:

$$۲a+۴=۰ \Rightarrow a=-۲$$

جواب به‌صورت $x>a-b$ است، پس شیب خط منفی است:

$$۲b-۳<۰ \Rightarrow b<\frac{۳}{۲} \xrightarrow{b\in\mathbb{N}} b=۱$$

طبق نامعادلهٔ اصلی داریم:

$$f(x)<۰ \xrightarrow[b=۱]{a=-۲} -x+۲c-۱<۰ \Rightarrow x>۲c-۱$$

$$\xrightarrow{(a-b,+\infty)} ۲c-۱=a-b \Rightarrow ۲c-۱=-۳ \Rightarrow c=-۱$$

بنابراین:

$$ac+b=(-۲)(-۱)+۱=۳$$

تفاوت مجموعه جواب در نامعادلهٔ درجه اول و دوم

ویژگی	درجهٔ اول	درجهٔ دوم
شکل تابع	خط	سهمی
نوع جواب	یک بازه	(تهی، یک بازه، اجتماع دو بازه یا $\mathbb{R}$)
روش اصلی	حل مستقیم	جدول تعیین
تغییر جهت	با ضریب x	با علامت ضریب $x^۲$

مجموعه جواب نامعادلهٔ درجه اول

در نامعادلهٔ درجه اول، با توجه به علامت ضریب x داریم:

حالت اول: $a>۰$

$$ax+b>۰ \Rightarrow x>-\frac{b}{a}$$

حالت دوم: $a<۰$

$$ax+b>۰ \Rightarrow x<-\frac{b}{a}$$

۱۲- مجموعه جواب نامعادلهٔ $(x+۳)(\sqrt{x}+۳)\geq ۸(x^۳+۱)$ بازهٔ $[\alpha,\beta]$ است. مقدار $\frac{\alpha+\beta}{۲}$ چه عددی است؟

۱) $\frac{۳}{۴}$ ۲) $\frac{۱}{۴}$ ۳) $\frac{۳}{۲}$ ۴) $\frac{۱}{۲}$

پاسخ: گزینهٔ ۴ (متوسط ـ ترکیبی ـ استاندارد ـ ریاضی ۱ صفحهٔ ۹۳ ـ ۱۰۰۴)

$$(x+۳)(\sqrt{x}+۳)\geq ۸(x^۳+۱) \xrightarrow{\text{ساده‌سازی}} x\sqrt{x}+۳x+۳\sqrt{x}+۹\geq ۸x^۳+۸ \xrightarrow{۹+\text{را به }۱+۸+\text{تبدیل می‌کنیم}}$$

$$(\sqrt{x}+۱)^۳+۸\geq ۸x^۳+۸ \Rightarrow (\sqrt{x}+۱)^۳\geq ۸x^۳ \Rightarrow \sqrt{x}+۱\geq ۲x$$

سنجش کلاد
www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshCloud

از تغییر متغیر $\sqrt{x}=t$ استفاده می‌کنیم:

$$t+۱\geq ۲t^۲ \Rightarrow ۲t^۲-t-۱\leq ۰ \xrightarrow{a+b+c=۰} (t-۱)\underbrace{(t+\frac{۱}{۲})}_{\text{همواره مثبت}}\leq ۰ \Rightarrow t-۱\leq ۰ \Rightarrow \sqrt{x}-۱\leq ۰ \Rightarrow ۰\leq x\leq ۱$$

پس $\alpha=۰$ و $\beta=۱$ است، بنابراین:

$$\frac{\alpha+\beta}{۲}=\frac{۰+۱}{۲}=\frac{۱}{۲}$$

اعمال مجاز روی نامعادله‌ها

چه عملیات‌هایی روی نامعادله‌ها مجاز است؟

۱) جمع، تفریق، ضرب یا تقسیم یک عدد دلخواه در دو طرف نامعادله: $(C>۰)$

$$A>B \Rightarrow \begin{matrix} \pm & \pm \\ A\times C & > & B\times C \\ \div & \div \end{matrix}$$

۲) توان فرد یا ریشهٔ فرد:

$$A>B \Rightarrow \begin{cases} A^k>B^k \\ \sqrt[k]{A}>\sqrt[k]{B} \end{cases} \quad k \text{ فرد است}$$

۳) ضرب و تقسیم در عدد منفی که باعث تغییر جهت نامعادله می‌شود:

$$A>B \xrightarrow{C<۰} A\overset{\times}{\underset{\div}{}}C<B\overset{\times}{\underset{\div}{}}C$$

ماز

۱۳- هرگاه یکی از جواب‌های معادلهٔ $x^۲+\frac{۱۲}{x^۲+۴}=۴$ برابر α باشد، مقدار $\frac{(\alpha^۲+۴)^۲}{۱۶}+\frac{۹}{(\alpha^۲+۴)^۲}$ چه عددی است؟

۱) $\frac{۲۵}{۴}$ ۲) $\frac{۵}{۲}$ ۳) $\frac{۲۵}{۱۶}$ ۴) $\frac{۲۵}{۹}$

پاسخ: گزینهٔ ۲ (سخت ـ ترکیبی ـ زمان‌بَر ـ حسابان ۱ صفحهٔ ۱۹ ـ ۱۱۰۱)

می‌دانیم که همواره جواب معادله (ریشه) در آن معادله صدق می‌کند، پس α را در معادله جای‌گذاری می‌کنیم:

$$x^۲+\frac{۱۲}{x^۲+۴}=۴ \xrightarrow{x=\alpha} \alpha^۲+\frac{۱۲}{\alpha^۲+۴}=۴$$

حالا باید معادلهٔ به‌دست آمده برحسب α را با عملیات ریاضی، تبدیل به معادلهٔ خواسته شده کنیم:

طرفین معادله را $+۴$ می‌کنیم:

$$\alpha^۲+۴+\frac{۱۲}{\alpha^۲+۴}=۸$$

طرفین معادله را $\div ۴$ می‌کنیم:

$$\frac{\alpha^۲+۴}{۴}+\frac{۳}{\alpha^۲+۴}=۲$$

طرفین معادله را به توان ۲ می‌رسانیم:

$$(\frac{\alpha^۲+۴}{۴})^۲+(\frac{۳}{\alpha^۲+۴})^۲+\frac{۳}{۲}=۴$$

سنجش کلاد
www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshCloud

با کم کردن $\frac{۳}{۲}$ از هر دو طرف معادله، به‌دست می‌آید:

$$(\frac{\alpha^۲+۴}{۴})^۲+(\frac{۳}{\alpha^۲+۴})^۲=۴-\frac{۳}{۲}=\frac{۵}{۲}$$

قِلقِشو یاد بگیر!

در معادله‌های درجه دوم هر کدام از ریشه‌ها، در معادله صدق می‌کند و یک تساوی صحیح ایجاد می‌شود.

یه نمونهٔ باحال ببین!

در معادلهٔ درجه دوم $۲x^۲+۳x-۵=۰$ بررسی کنید که $x=۱$ و $x=۰$ ریشه‌های معادله هستند یا خیر؟

پاسخ تشریحی:

ریشه‌های معادله باید در آن صدق کنند. پس:

$x=۱$ ریشه معادله است. $\Rightarrow$ تساوی صحیح است ✓ $\Rightarrow ۰=۰ \leftarrow ۲(۱)^۲+۳(۱)-۵=۰ \leftarrow^{x=۱} ۲x^۲+۳x-۵=۰$

$x=۰$ ریشهٔ معادله نیست. $\Rightarrow$ تساوی صحیح نیست ✗ $\Rightarrow -۵=۰ \leftarrow ۲(۰)^۲+۳(۰)-۵=۰ \leftarrow^{x=۰} ۲x^۲+۳x-۵=۰$

ماز

۱۴- دو ماشین A و B با هم در ۶ ساعت کاری را انجام می‌دهند. ماشین A به تنهایی ۹ ساعت زودتر از ماشین B کار را تمام می‌کند. اگر A به تنهایی ۳ ساعت کار کند و B به تنهایی n ساعت کار کند، کل کار انجام می‌شود. n کدام است؟

۱) ۹ ۲) ۱۲ ۳) ۱۸ ۴) ۸

پاسخ: گزینهٔ ۲ (سخت ـ محاسباتی ـ زمان‌بَر ـ حسابان ۱ صفحهٔ ۱۸ ـ ۱۱۰۱)

فرض می‌کنیم ماشین A به تنهایی طی a ساعت و ماشین B به تنهایی طی b ساعت کار را تمام می‌کند. پس کاری که A در یک ساعت انجام می‌دهد برابر با $\frac{۱}{a}$ و کاری که B در یک ساعت انجام می‌دهد برابر با $\frac{۱}{b}$ است. با توجه به این‌که با هم در ۶ ساعت کار را انجام می‌دهند، داریم:

$$\frac{۱}{a}+\frac{۱}{b}=\frac{۱}{۶}$$

از طرفی ماشین A به تنهایی ۹ ساعت زودتر از ماشین B کار را انجام می‌دهد، پس $b=a+۹$ است، بنابراین:

$$\frac{۱}{a}+\frac{۱}{a+۹}=\frac{۱}{۶}\Rightarrow\frac{۲a+۹}{a^۲+۹a}=\frac{۱}{۶}\Rightarrow a^۲-۳a-۵۴=۰\Rightarrow\begin{cases}a=-۶\\a=۹\end{cases}$$

یعنی ماشین A به تنهایی در ۹ ساعت و ماشین B به تنهایی در $۱۸=۹+۹$ ساعت کار را انجام می‌دهند، پس:

$$\left.\begin{array}{l}\text{در هر ساعت } A \text{ کار انجام شده توسط } =\frac{۱}{۹}\text{کار} \xrightarrow{A\text{ به تنهایی }۳\text{ ساعت}} \frac{۳}{۹}\\ \text{در هر ساعت } B \text{ کار انجام شده توسط } =\frac{۱}{۱۸}\text{کار} \xrightarrow{B\text{ به تنهایی }n\text{ ساعت}} \frac{n}{۱۸}\end{array}\right\}\Rightarrow\frac{۳}{۹}+\frac{n}{۱۸}=۱\Rightarrow\frac{n}{۱۸}=\frac{۲}{۳}\Rightarrow n=۱۲$$

مسائل همکاری و معادلات گویا

نوع خاصی از سؤالات هستند که در آن یک کار با همکاری چند نفر یا چند وسیله انجام می‌شود. برای تشکیل معادلهٔ این سؤالات باید ابتدا همهٔ اطلاعات داده شده را برحسب یک واحد زمانی بنویسیم و معمولا باید مقدار کاری که هر نفر یا وسیله در یک واحد زمان انجام می‌دهد را به‌دست آوریم و بعد عملکرد آن‌ها را با هم جمع کنیم، تا به جواب نهایی برسیم.

یه نمونهٔ باحال ببین!

علی در ۶ روز و محمد در ۱۲ روز دیواری را کاشی می‌کند. اگر این دو نفر با هم کار کنند در چند روز دیوار کاشی می‌شود؟

پاسخ تشریحی:

اطلاعات صورت سؤال یعنی علی روزی $\frac{۱}{۶}$ و محمد روزی $\frac{۱}{۱۲}$ دیوار را کاشی می‌کنند. اگر با هم کار کنند روزی $\frac{۱}{۶}+\frac{۱}{۱۲}=\frac{۳}{۱۲}=\frac{۱}{۴}$ و درنتیجه دیوار در ۴ روز کاشی می‌شود.

سنجش کلاد
www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshCloud

۱۵- اگر معادلات $\sqrt{۲x-۱}+x=۲$ و $\sqrt{۳x-۲}+k\sqrt{x}=۴$ دارای ریشهٔ مشترک باشند، مقدار k چه عددی است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

پاسخ: گزینهٔ ۳ (متوسط ـ ترکیبی ـ زمان‌بَر ـ حسابان ۱ صفحهٔ ۲۲ ـ ۱۱۰۱)

دو معادلهٔ رادیکالی داده شده ریشهٔ مشترک دارند. یعنی یک مقدار مشخص از x در هر دو معادله صدق می‌کند.

کام اول

معادلهٔ $\sqrt{۲x-۱}=۲-x$ را حل می‌کنیم. (توجه داریم که باید $x\leq ۲$ باشد، چون حاصل رادیکال نامنفی است.)

ابتدا طرفین معادله را به توان ۲ می‌رسانیم:

$$\Rightarrow ۲x-۱=x^۲-۴x+۴\Rightarrow x^۲-۶x+۵=۰$$

$$\Rightarrow (x-۵)(x-۱)=۰\Rightarrow \begin{cases} x=۵ \text{ غ ق ق} \\ x=۱ \end{cases}$$

پس تنها ریشهٔ مورد قبول، $x=۱$ است که همان ریشهٔ مشترک می‌باشد.

کام دوم

پس $x=۱$ را در معادلهٔ دوم جای‌گذاری می‌کنیم:

$$\sqrt{۳x-۲}+k\sqrt{x}=۴\xrightarrow{x=۱}۱+k=۴\Rightarrow k=۳$$

استراتژی حل معادلات گنگ

برای حل معادلات گنگ به فرم $\sqrt{f(x)}=k$ مراحل زیر را طی می‌کنیم:

۱) عبارات شامل رادیکال را به یک طرف تساوی و عبارات دیگر را به طرف دیگر تساوی منتقل می‌کنیم.

۲) طرفین را به توان ۲ می‌رسانیم تا رادیکال نداشته باشیم.

۳) با حل معادلهٔ نهایی (که معمولاً به فرم معادلهٔ درجه دوم است) جواب‌های معادله را به‌دست می‌آوریم.

۴) جواب‌های به‌دست آمده را در معادله صدق می‌دهیم تا ببینیم قابل قبول است یا خیر.

نکتهٔ خیلی مهم!

در مرحلهٔ (۴) باید ریشه‌های معادلهٔ $\sqrt{f(x)}=k$، در دو شرط $k\geq ۰$ و $f(x)\geq ۰$ صدق کنند، در غیر این صورت غیرقابل قبول هستند.

۱۶- اگر $|x-۱|+۲|۲x-۳|=۳$ دارای جواب‌های α و β باشد، $\frac{\beta}{\alpha}+\frac{\alpha}{\beta}$ چه عددی است؟

۱) $\frac{۱۵}{۴}$ ۲) $\frac{۱۷}{۴}$ ۳) ۴ ۴) ۸

پاسخ: گزینهٔ ۲ (متوسط ـ محاسباتی ـ سریع ـ حسابان ۱ صفحهٔ ۲۶ ـ ۱۱۰۱)

ابتدا معادلهٔ داده شده را با بازه‌بندی مناسب بدون قدرمطلق می‌نویسیم، سپس معادلات به‌دست آمده را حل می‌کنیم. اگر جواب نهایی در شرط دامنه‌اش صدق می‌کرد، قابل قبول است.

$$|۲x-۳|+۲|x-۱|=۳\Rightarrow \begin{cases} ۱)\ x\geq \frac{۳}{۲}\Rightarrow ۲x-۳+۲x-۲=۳\Rightarrow ۴x=۸\Rightarrow x=۲ \checkmark \\ ۲)\ ۱\leq x\leq \frac{۳}{۲}\Rightarrow ۳-۲x+۲x-۲=۳\Rightarrow ۱=۳ \times \text{ تناقض} \\ ۳)\ x\leq ۱\Rightarrow -۲x+۳-۲x+۲=۳\Rightarrow ۴x=۲\Rightarrow x=\frac{۱}{۲} \checkmark \end{cases}$$

سنجش کلاد
www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshCloud

پس جواب‌های معادله، برابر با $\alpha=۲$ و $\beta=\frac{۱}{۲}$ است، بنابراین:

$$\frac{\alpha}{\beta}+\frac{\beta}{\alpha}=\frac{\frac{۱}{۲}}{۲}+\frac{۲}{\frac{۱}{۲}}=\frac{۱}{۴}+۴=\frac{۱۷}{۴}$$

قدرمطلق

مهم‌ترین ویژگی قدرمطلق این است که اگر ورودی a نامنفی باشد قدرمطلق کاری با آن نمی‌کند اما اگر a منفی باشد، یک منفی در a ضرب می‌شود تا حاصل مثبت باشد، به عبارتی دقیق‌تر:

$$|a|=\begin{cases}a & a\geq ۰\\ -a & a<۰\end{cases}$$

ویژگی‌های قدرمطلق

۱) $|x|=\begin{cases}x & ;\ x\geq ۰\\ -x & ;\ x<۰\end{cases}$

۲) $|x|=a\Rightarrow x=\pm a;a>۰$

۳) $|x|=|a|\Rightarrow x=\pm a$

۴) $\sqrt{x^۲}=|x|$

۵) $|-x|=|x|$

۶) $|x|^۲=x^۲$

۷) $|xy|=|x|\times|y|$

۸) $\left|\frac{x}{y}\right|=\frac{|x|}{|y|}\ ;\ y\neq ۰$

۹) $|x|\leq a\Rightarrow -a\leq x\leq a;(a>۰)$

۱۰) $|x|\geq a\Rightarrow (x\geq a)$ یا $(x\leq -a);(a>۰)$

حل معادله با برداشتن قدرمطلق

در معادلات قدرمطلقی‌ای که ویژگی‌ها هیچ کمکی نمی‌کنند، باید با ایجاد شروطی بر مبنای عبارات درون قدرمطلق‌ها و ریشه‌های آن‌ها، از وجود قدرمطلق خلاص شویم. هر جواب وقتی قابل قبول است که در شرط داده شده‌اش صدق کند.

یه نمونهٔ باحال ببین!

$$۲|x|+|x-۱|=-x+۲$$

$x\leq ۰$ $\xrightarrow[\text{و دومی منفی}]{\text{اولی منفی یا صفر}}$ $-۲x-x+۱=-x+۲\Rightarrow x=-\frac{۱}{۲}$ $\xrightarrow{\text{در محدودهٔ } x\leq ۰ \text{ است.}}$ قابل قبول

$۰\leq x\leq ۱$ $\xrightarrow[\text{و دومی منفی یا صفر}]{\text{اولی مثبت یا صفر}}$ $۲x-x+۱=-x+۲\Rightarrow x=\frac{۱}{۲}$ $\xrightarrow{\text{در محدودهٔ } ۰\leq x\leq ۱ \text{ است.}}$ قابل قبول

$۱\leq x$ $\xrightarrow[\text{و دومی مثبت یا صفر}]{\text{اولی مثبت}}$ $۲x+x-۱=-x+۲\Rightarrow x=\frac{۳}{۴}$ $\xrightarrow{\text{در محدودهٔ } x\leq ۱ \text{ نیست.}}$ غیرقابل قبول

۱۷- اگر حاصل جمع جواب‌های حقیقی معادلهٔ $\sqrt{۴-۲x}=|ax+۲|$ برابر $-\frac{۵}{۲}$ باشد، حاصل‌ضرب مقادیر به‌دست آمده برای a کدام است؟

۱) $-\frac{۲}{۵}$ ۲) $-\frac{۴}{۵}$ ۳) $\frac{۸}{۵}$ ۴) $\frac{۱}{۵}$

پاسخ: گزینهٔ ۲ (متوسط ـ محاسباتی ـ استاندارد ـ حسابان ۱ صفحهٔ ۱۴ ـ ۱۱۰۱)

طرفین معادله را به توان ۲ می‌رسانیم:

$$۴-۲x=a^۲x^۲+۴ax+۴\Rightarrow a^۲x^۲+(۴a+۲)x=۰$$

سنجش کلاد
www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshCloud

مجموع ریشه‌ها برابر با $-\frac{۵}{۲}$ است، یعنی: $S=-\frac{۵}{۲}\Rightarrow -\frac{۴a+۲}{a^۲}=-\frac{۵}{۲}\Rightarrow ۵a^۲-۸a-۴=۰$

حاصل‌ضرب مقادیر a را می‌خواهیم: $P=-\frac{۴}{۵}$

مجموع و حاصل‌ضرب ریشه‌ها

در معادلهٔ درجه دوم به فرم استاندارد $ax^۲+bx+c=۰$ با شرط $\Delta>۰$، مجموع و حاصل‌ضرب ریشه‌ها از روابط زیر به‌دست می‌آید:

حاصل‌ضرب ریشه‌ها: $P=\frac{c}{a}$

مجموع ریشه‌ها: $S=-\frac{b}{a}$

۱۸- به‌ازای چند مقدار صحیح a معادلهٔ $۲|۲x+۱|=x^۲+x+a$ دارای ۴ جواب حقیقی و متمایز است؟

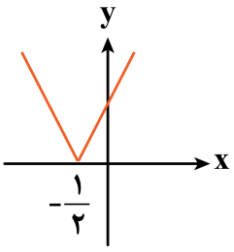
۱) ۴ ۲) ۳ ۳) ۵ ۴) ۶

پاسخ: گزینهٔ ۱ (سخت ـ مفهومی ـ زمان‌بَر ـ حسابان ۱ صفحهٔ ۱۶ ـ ۱۱۰۱)

روش اول

گام اول

بررسی $۲|۲x+۱|$: این تابع از نوع قدرمطلق با رأس $(-\frac{۱}{۲},۰)$ است و برد آن $[۰,+\infty)$ است و نمودار آن به شکل مقابل است.



گام دوم

بررسی $x^۲+x+a$: معادلهٔ سهمی را تبدیل به فرم مربع کامل می‌کنیم:

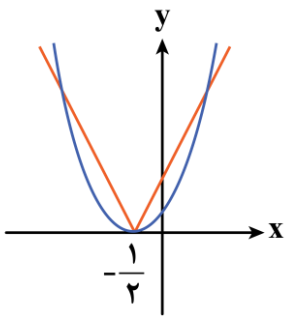
$$y=x^۲+x+a\Rightarrow y=(x+\frac{۱}{۲})^۲+a-\frac{۱}{۴}$$

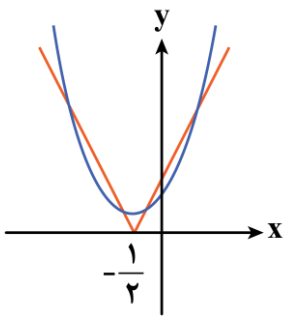
محور تقارن سهمی با محور تقارن $y=|۲x+۱|$ بر هم منطبق است و در $x=-\frac{۱}{۲}$ قرار دارد و رأس سهمی در نقطهٔ $(-\frac{۱}{۲},a-\frac{۱}{۴})$ است.

برای آن‌که این دو تابع در چهار نقطه یکدیگر را قطع کنند، باید معادلهٔ تلاقی سهمی و هر شاخه از معادلهٔ قدرمطلقی دو ریشه داشته باشد، ابتدا $x\geq -\frac{۱}{۲}$ را فرض می‌کنیم:

$$x^۲+x+a=۴x+۲\Rightarrow x^۲-۳x+a-۲=۰\xrightarrow{\Delta>۰}\Delta=۹-۴(a-۲)>۰\Rightarrow -۴a+۱۷>۰\Rightarrow a<\frac{۱۷}{۴}$$

از طرفی، برای این‌که نمودار سهمی هر شاخهٔ نمودار قدرمطلقی را در دو نقطه قطع کند (مجموعاً ۴ نقطهٔ تقاطع) لازم است رأس سهمی بالاتر از رأس نمودار قدرمطلق قرار گیرد، بنابراین باید:





$$a-\frac{۱}{۴}>۰\Rightarrow a>\frac{۱}{۴}$$

بازهٔ نهایی a:

$$\frac{۱}{۴}<a<\frac{۱۷}{۴}$$

اعداد صحیح در این بازه عبارتند از:

$$a=\underbrace{۱,۲,۳,۴}_{\text{۴عدد}}$$

سنجش کلاد
www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshCloud

روش دوم

$$۲|۲x+۱| = x^۲ + x + a \Rightarrow ۲|۲x+۱| = (x+\frac{۱}{۲})^۲ + a - \frac{۱}{۴} \xrightarrow[t\geq ۰]{|x+\frac{۱}{۲}|=t} ۴t = t^۲ + a - \frac{۱}{۴} \Rightarrow t^۲ - ۴t + a - \frac{۱}{۴} = ۰$$

چون معادله ۴ جواب حقیقی و متمایز دارد، پس باید $t \geq ۰$ باشد و معادلهٔ درجه دوم به‌دست آمده باید دو جواب مثبت مانند α و β داشته باشد.

$$|x+\frac{۱}{۲}| = \alpha \Rightarrow x_۱ = \alpha - \frac{۱}{۲}, x_۲ = -\alpha - \frac{۱}{۲}$$

$$|x+\frac{۱}{۲}| = \beta \Rightarrow x_۳ = \beta - \frac{۱}{۲}, x_۴ = -\beta - \frac{۱}{۲}$$

$$\left.\begin{array}{l} \Delta > ۰ \Rightarrow (-۴)^۲ - ۴(a-\frac{۱}{۴}) > ۰ \Rightarrow ۱۶ - ۴a + ۱ > ۰ \Rightarrow a < \frac{۱۷}{۴} \\ S > ۰ \checkmark \\ P > ۰ \Rightarrow a - \frac{۱}{۴} > ۰ \Rightarrow a > \frac{۱}{۴} \end{array}\right\} \xrightarrow{\cap} \frac{۱}{۴} < a < \frac{۱۷}{۴} \Rightarrow a = ۱, ۲, ۳, ۴$$

پس ۴ جواب متمایز برای a وجود دارد.

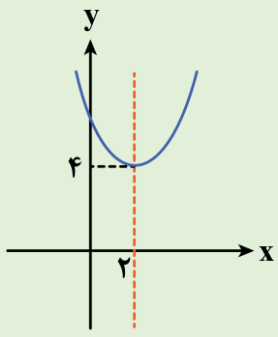
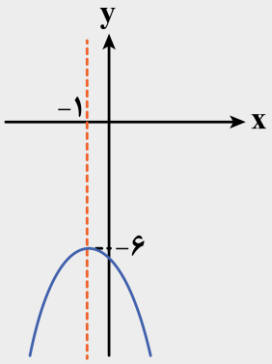
سهمی به فرم اتحاد مربع دوجمله‌ای

گاهی می‌توانیم برای راحت‌تر شدن مسائل، سهمی را تبدیل به مربع کامل کنیم. در معادلهٔ سهمی به فرم $y = a(x-h)^۲ + k$ داریم:

۱) مختصات نقطهٔ رأس سهمی: (h, k)

۲) محور تقارن: $x = h$

دو نمونهٔ باحال ببین!

سهمی	$y = (x-۲)^۲ + ۴$	$y = -۳(x+۱)^۲ - ۶$
رأس	$S(۲, ۴)$	$S(-۱, -۶)$
جهت سهمی	سهمی رو به بالا است. $(a > ۰)$	سهمی رو به پایین است. $(a < ۰)$
محور تقارن	$x = ۲$	$x = -۱$
نمودار		

سنجش کلاد
www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshCloud

۱۹- جواب نامعادلهٔ $x\left|\frac{۳x-۳}{۲x+۲}\right| \le ۵$ شامل تعدادی عدد طبیعی است. جمع اعداد طبیعی به‌دست آمده چه عددی است؟

۱) ۱۵ ۲) ۱۸ ۳) ۱۰ ۴) ۶

پاسخ: گزینهٔ ۱ (متوسط ـ محاسباتی ـ استاندارد ـ ریاضی ۱ صفحهٔ ۹۱ ـ ۱۰۰۴)

جواب نامعادله شامل اعداد طبیعی می‌شود و ما فقط به دنبال این اعداد هستیم، بنابراین حاصل $|۲x+۲|$ و $|۳x-۳|$ همواره غیرمنفی است و نیازی به بررسی بازه‌های منفی‌کنندهٔ داخل قدرمطلق نیست. پس عبارت داخل قدرمطلق را بدون تغییر، بیرون می‌آوریم.

$$\frac{۳x-۳}{۲x+۲} \ge ۰ \Rightarrow x \ge ۱$$

$$x\left(\frac{۳x-۳}{۲x+۲}\right) \le ۵ \Rightarrow ۳x^۲ - ۳x \le ۱۰x + ۱۰ \Rightarrow ۳x^۲ - ۱۳x - ۱۰ \le ۰$$

$$\Rightarrow (x-۵)(۳x+۲) \le ۰ \Rightarrow -\frac{۲}{۳} \le x \le ۵$$

اعداد طبیعی در این بازه عبارتند از: $x = ۱, ۲, ۳, ۴, ۵$

پس: $S = ۱+۲+۳+۴+۵ = ۱۵$

دو ویژگی مهم قدرمطلق و کاربرد آن در حل نامعادله‌ها

$$|x| < a \xleftarrow{a>۰} -a < x < a$$
$$|x| \le a \xleftarrow{a>۰} -a \le x \le a$$

$$|x| > a \xleftarrow{a>۰} x > a \text{ یا } x < -a$$
$$|x| \ge a \xleftarrow{a>۰} x \ge a \text{ یا } x \le -a$$

۲۰- در یک ظرف ۲۰۰ کیلوگرم آب‌نمک با غلظت ۵ درصد داریم. اگر ۲۰ کیلوگرم نمک خالص به آن اضافه کنیم، در نهایت چند کیلوگرم آب‌نمک با غلظت ۱۰ درصد به آن اضافه کنیم تا غلظت کل به ۱۱/۶ درصد برسد؟

۱) ۲۶۰ ۲) ۳۲۰ ۳) ۲۸۰ ۴) ۳۴۰

پاسخ: گزینهٔ ۳ (متوسط ـ خط‌به‌خط ـ استاندارد ـ حسابان ۱ صفحهٔ ۱۷ ـ ۱۱۰۱)

ابتدا محاسبه می‌کنیم که در محلول اولیه چه مقدار نمک وجود دارد؟

مقدار نمک اولیه: $۰/۰۵ \times ۲۰۰ = ۱۰kg$

افزودن ۲۰ کیلو نمک

$$\begin{cases} \text{جرم کل} = ۲۰۰ + ۲۰ = ۲۲۰kg \\ \text{جرم نمک} = ۱۰ + ۲۰ = ۳۰kg \end{cases}$$

افزودن آب‌نمک با غلظت ۱۰٪ : فرض کنید n کیلوگرم آب‌نمک با غلظت ۱۰٪ اضافه کنیم.

$$\text{نمک اضافه شده} = (۰/۱)n$$
$$\text{جرم کل نهایی} = ۲۲۰ + n$$
$$\text{مقدار نمک نهایی} = ۳۰ + (۰/۱)n$$

با توجه به شرط غلظت که باید ۱۱/۶٪ باشد، باید نسبت جرم نمک به جرم کل محلول برابر با $\frac{۱۱۶}{۱۰۰۰}$ باشد:

$$\frac{۳۰ + (۰/۱)n}{۲۲۰ + n} = \frac{۱۱۶}{۱۰۰۰} \Rightarrow ۳۰۰۰۰ + ۱۰۰n = ۲۵۵۲۰ + ۱۱۶n \Rightarrow ۴۴۸۰ = ۱۶n \Rightarrow n = ۲۸۰$$

سنجش کلاد
www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshCloud

پیوند با شیمی!

اگر بخواهیم غلظت یک محلول (مانند آب‌نمک) را برحسب درصد به‌دست آوریم کافی است جرم حل شونده (نمک) را بر جرم محلول تقسیم کرده و جواب را در ۱۰۰ ضرب کنیم.

$$\text{غلظت برحسب درصد} = \frac{\text{جرم حل شونده}}{\text{جرم محلول}} \times ۱۰۰$$

توجه داریم جرم محلول برابر **مجموع جرم حلال و حل‌شونده** است.

۲۱- یک بیضی با پارامترهای $b=c=۲$ مفروض است. اگر F و F' کانون‌های بیضی باشند، به‌طوری که $MF+MF'=n$ و نقطهٔ M داخل بیضی باشد، آن‌گاه n در کدام محدوده قرار می‌گیرد؟

۱) $۴ \le n \le ۴\sqrt{۲}$ ۲) $۴ \le n < ۴\sqrt{۲}$ ۳) $۲ \le n \le ۲\sqrt{۲}$ ۴) $۲ \le n < ۲\sqrt{۲}$

پاسخ: گزینهٔ ۲ (آسان ـ مفهومی ـ سریع ـ هندسه۳ صفحهٔ ۴۸ ـ ۱۲۰۲)

برای آن‌که نقطه داخل بیضی باشد، باید:

$$MF + MF' < ۲a$$

اما:

$$a^۲ = b^۲ + c^۲ \xrightarrow{b=c=۲} a = ۲\sqrt{۲} \Rightarrow ۲a = ۴\sqrt{۲}$$

بنابراین:

$$MF + MF' < ۴\sqrt{۲} \quad (۱)$$

از طرفی بنا به نامساوی مثلثی: $MF + MF' \ge FF'$ (حالت تساوی زمانی رخ می‌دهد که M روی قطر کانونی و بین F و F' باشد.)، بنابراین:

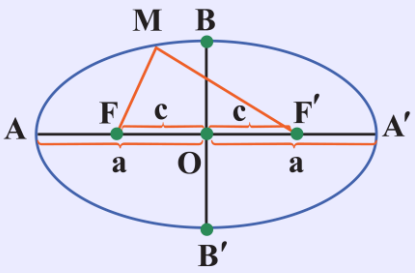
$$۲c \le MF + MF' \xrightarrow{c=۲} ۴ \le MF + MF' \quad (۲)$$

در نتیجه:

$$(۱),(۲) \Rightarrow ۴ \le \underbrace{MF + MF'}_{n} < ۴\sqrt{۲} \Rightarrow ۴ \le n < ۴\sqrt{۲}$$

بیضی

همهٔ نقاطی از صفحه که مجموع فاصله‌های آن‌ها از دو نقطهٔ ثابت F و F' برابر با مقدار ثابتی باشد، یک بیضی تشکیل می‌دهند. اگر آن مقدار ثابت را $(۲a)$ در نظر بگیریم، داریم:



$$MF + MF' = ۲a$$

می‌توان نشان داد:

$$AA' = ۲a$$

در بیضی با کانون‌های F و F'، نقاط A و A' را **دو سر قطر بزرگ بیضی** و نقاط B و B' را **دو سر قطر کوچک بیضی** می‌گویند. می‌توان نشان داد اگر $FF' = ۲c$ و $BB' = ۲b$ باشد، آن‌گاه همواره:

$$a^۲ = b^۲ + c^۲$$

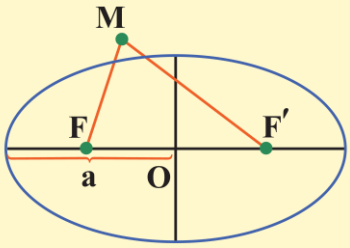
AA' را **قطر کانونی** و BB' را **قطر غیرکانونی** بیضی و FF' را **فاصلهٔ کانونی** بیضی می‌گویند.

سنجش کلاد
www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshCloud

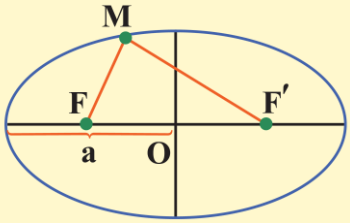
وضعیت نقطه و بیضی

اگر یک بیضی با کانون‌های F و F' و طول قطر بزرگ $AA' = ۲a$ داشته باشیم، آن‌گاه:

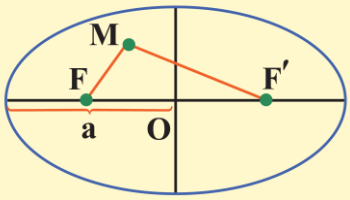
۱) اگر $MF + MF' > ۲a$ باشد، آن‌گاه M خارج بیضی قرار دارد.



۲) اگر $MF + MF' = ۲a$ باشد، آن‌گاه M روی بیضی قرار دارد.



۳) اگر $MF + MF' < ۲a$ باشد، آن‌گاه M داخل بیضی قرار دارد.

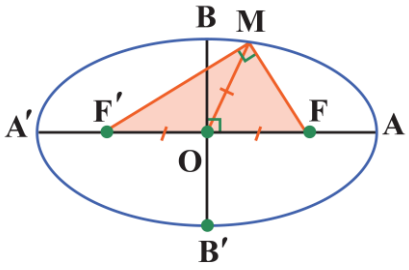


۲۲- روی کدام بیضی با کانون‌های F و F'، نقطه‌ای مانند M وجود دارد به‌طوری که $F'\hat{M}F = ۹۰^\circ$ باشد؟

۱) $e = \frac{\sqrt{۳}}{۳}$ ۲) $b = ۲, c = ۱$ ۳) $a = ۲, b = ۱$ ۴) $a = ۴, c = \sqrt{۷}$

پاسخ: گزینهٔ ۳ (متوسط ـ مفهومی ـ استاندارد ـ هندسه۳ صفحهٔ ۴۹ ـ ۱۲۰۲)

فرض می‌کنیم، M نقطهٔ مطلوب باشد، در این صورت OM میانهٔ وارد بر وتر است که می‌دانیم برابر با نصف وتر است.



بنابراین اگر دایره‌ای به مرکز O و شعاع $OF = c$ رسم کنیم (دایرهٔ محیطی مثلث $F'MF$) این دایره بیضی را در نقطهٔ M قطع می‌کند. پس شرط جواب این است که دایره به قطر FF'، بیضی را حداقل در یک نقطه (عملاً دو نقطه) قطع کند، برای این منظور، باید $OF \geq OB$ باشد، به عبارتی، $c \geq b$، در نتیجه:

$$c \geq b \Rightarrow \frac{c}{a} \geq \frac{b}{a} \Rightarrow \frac{c^۲}{a^۲} \geq \frac{b^۲}{a^۲} \Rightarrow \frac{c^۲}{a^۲} \geq ۱ - \frac{c^۲}{a^۲} \Rightarrow \frac{۲c^۲}{a^۲} \geq ۱ \Rightarrow \frac{c^۲}{a^۲} \geq \frac{۱}{۲} \Rightarrow \frac{c}{a} \geq \frac{\sqrt{۲}}{۲} \Rightarrow e \geq \frac{\sqrt{۲}}{۲}$$

حال گزینه‌ها را بررسی می‌کنیم تا بیضی با خروج از مرکز بزرگ‌تر یا مساوی $\frac{\sqrt{۲}}{۲}$ را پیدا کنیم. می‌دانیم که: $\frac{\sqrt{۲}}{۲} \simeq ۰/۷$

بررسی گزینه‌ها:

۱)

$$e = \frac{\sqrt{۳}}{۳} \simeq ۰/۵۶ \Rightarrow e < \frac{\sqrt{۲}}{۲} \times$$

سنجش کلاد
www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshCloud

۲) $b=۲, c=۱ \Rightarrow a=\sqrt{۴+۱}=\sqrt{۵} \Rightarrow e=\frac{c}{a}=\frac{۱}{\sqrt{۵}}<\frac{\sqrt{۲}}{۲}$ ×

۳) $a=۲, b=۱ \Rightarrow c=\sqrt{۴-۱}=\sqrt{۳}$

$\Rightarrow e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{۳}}{۲}>\frac{\sqrt{۲}}{۲}$ ✓

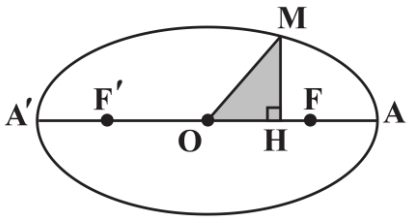
۴) $e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{۷}}{۴}=\sqrt{\frac{۷}{۱۶}}<\sqrt{\frac{۱}{۲}}=\frac{\sqrt{۲}}{۲}$ ×

خروج از مرکز بیضی

در هر بیضی به مقدار پارامتر $e=\frac{c}{a}$ خروج از مرکز بیضی می‌گویند. از آن‌جا که همواره $c<a$، بنابراین $۰<e<۱$ و هر چه e به صفر نزدیک‌تر شود اندازهٔ a و b به هم نزدیک‌تر شده و بیضی به دایره شبیه‌تر می‌شود و هر چه e به ۱ نزدیک‌تر شود b به صفر نزدیک می‌شود و بیضی کشیده‌تر می‌شود:

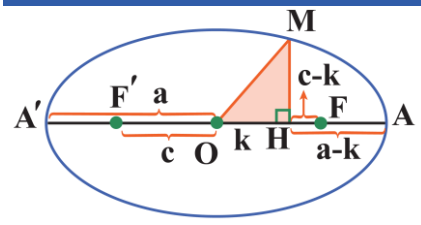
$$e=\frac{c}{a}=\sqrt{\frac{c^۲}{a^۲}}=\sqrt{\frac{a^۲-b^۲}{a^۲}}=\sqrt{۱-(\frac{b}{a})^۲}$$

۲۳- نقطهٔ M روی بیضی زیر واقع شده است، به‌طوری که اگر از M عمود MH را بر وتر کانونی رسم کنیم، $A'H\times AH=۳۶$ و $HF\times HF'=۶$ باشد. اگرخروج از مرکز بیضی برابر با $\frac{\sqrt{۱۰}}{۵}$ باشد، آن‌گاه حاصل $\frac{OH}{OF\times OA}$ کدام است؟



۱) $\frac{\sqrt{۳۵}}{۵۰}$
۲) $\frac{\sqrt{۳۵}}{۷۰}$
۳) $\frac{\sqrt{۱۴}}{۱۰}$
۴) $\frac{\sqrt{۱۴}}{۵۰}$

پاسخ: گزینهٔ ۱ (متوسط ـ مفهومی/محاسباتی ـ زمان‌بَر ـ هندسه۳ صفحهٔ ۴۹ ـ ۱۲۰۲)



فرض می‌کنیم که $OH=k$، آن‌گاه:

$$\begin{cases} AH\times A'H=(a-k)(a+k)=a^۲-k^۲=۳۶ \quad (۱) \\ FH\times F'H=(c-k)(c+k)=c^۲-k^۲=۶ \quad (۲) \end{cases}$$

در نتیجه: $(۱)-(۲) \Rightarrow a^۲-c^۲=۳۰ \quad (*)$

از طرفی: $e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{۱۰}}{۵} \Rightarrow \frac{c^۲}{a^۲}=\frac{۱۰}{۲۵} \Rightarrow c^۲=\frac{۲}{۵}a^۲$

در نتیجه با توجه به رابطهٔ $(*)$ داریم:

$$a^۲-\frac{۲}{۵}a^۲=۳۰$$

$$\Rightarrow \frac{۳}{۵}a^۲=۳۰ \Rightarrow a^۲=\frac{۳۰\times ۵}{۳}=۵۰ \Rightarrow a=\sqrt{۵۰}=۵\sqrt{۲}$$

سنجش کلاد
www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshCloud

$$c^۲ = \frac{۲}{۵} \times ۵۰ = ۲۰ \Rightarrow c = \sqrt{۲۰} = ۲\sqrt{۵}$$

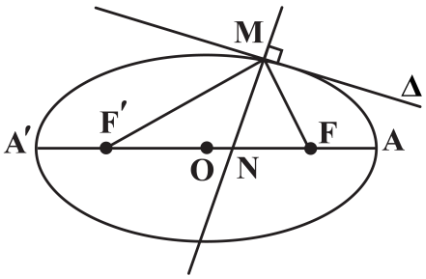
از طرفی:

$$(۱) \Rightarrow a^۲ - k^۲ = ۳۶ \Rightarrow ۵۰ - k^۲ = ۳۶ \Rightarrow k^۲ = ۱۴ \Rightarrow k = \sqrt{۱۴}$$

در نتیجه:

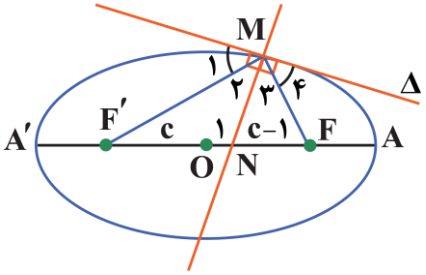
$$\frac{OH}{OF \times OA} = \frac{k}{c \times a} = \frac{\sqrt{۱۴}}{۵\sqrt{۲} \times ۲\sqrt{۵}} = \frac{\sqrt{۱۴}}{۱۰\sqrt{۱۰}} = \frac{\sqrt{۷}}{۱۰\sqrt{۵}} = \frac{\sqrt{۷} \times \sqrt{۵}}{۱۰\sqrt{۵} \times \sqrt{۵}} = \frac{\sqrt{۳۵}}{۵۰}$$

۲۴- خط Δ در نقطهٔ M بر بیضی مماس است. از M عمودی بر Δ رسم می‌کنیم تا محور کانونی را در N قطع کند. اگر ON = ۱ و MF′ = ۲MF باشد، آن‌گاه فاصلهٔ کانونی چقدر است؟



۱) ۴
۲) ۵
۳) ۶
۴) ۷

پاسخ: گزینهٔ ۳ (متوسط ـ مفهومی ـ استاندارد ⑥ ـ هندسه۳ صفحهٔ ۵۰ ـ ۱۲۰۲)



طبق ویژگی بازتابندگی بیضی $\hat{M}_۱ = \hat{M}_۴$، بنابراین:

$$۹۰^\circ - \hat{M}_۱ = ۹۰^\circ - \hat{M}_۴$$

در نتیجه:

$$\hat{M}_۲ = M_۳$$

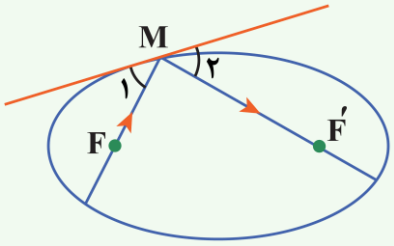
پس MN نیمساز نظیر رأس M در مثلث MFF′ است، در نتیجه طبق قضیهٔ نیمسازهای زوایای داخلی:

$$\frac{F'N}{FN} = \frac{MF'}{MF} = \frac{۲MF}{MF} = ۲ \Rightarrow \frac{c+۱}{c-۱} = ۲$$

$$\Rightarrow c + ۱ = ۲c - ۲ \Rightarrow c = ۳ \Rightarrow ۲c = ۶ = \text{فاصلهٔ کانونی}$$

ویژگی بازتابندگی بیضی

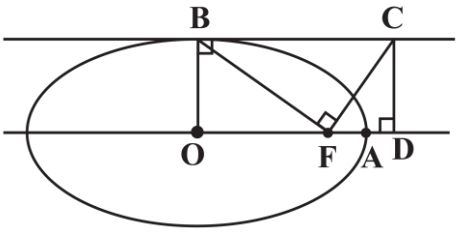
اگر بدنهٔ داخلی بیضی آینه‌ای باشد، اگر از یکی از کانون‌های بیضی پرتو نوری بر بدنهٔ بیضی بتابد، انعکاس (بازتاب) نور پس از برگشت از بدنهٔ بیضی از کانون دیگر عبور می‌کند. بر این اساس اگر در نقطهٔ برخورد نور با بدنهٔ بیضی خطی مماس رسم کنیم زاویهٔ پرتو تابش و خط مماس با زاویهٔ پرتو بازتاب و خط مماس با هم برابر است.



$$\begin{cases} \text{تابش } FM \\ \text{بازتابش } MF' \end{cases} \Rightarrow \hat{M}_۱ = \hat{M}_۲$$

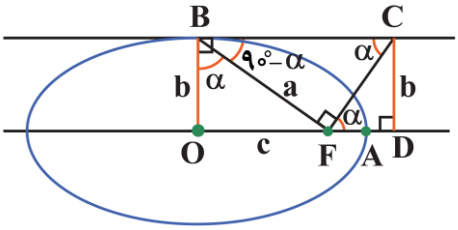
سنجش کلاد
www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshCloud

۲۵- در بیضی زیر از نقطهٔ B مماسی بر آن رسم می‌کنیم، سپس در نقطهٔ F عمودی بر BF رسم می‌کنیم تا خط مماس را در نقطهٔ C قطع کند. از C عمودی بر امتداد قطر بزرگ رسم می‌کنیم تا آن را در D قطع کند. اگر CF = ۶ و خروج از مرکز بیضی $\frac{۲}{۳}$ باشد، آن‌گاه اندازه AD چند برابر $\frac{\sqrt{۵}}{۵}$ است؟



۱) ۷
۲) ۶
۳) ۵
۴) ۴

پاسخ: گزینهٔ ۲ (سخت ـ مفهومی/محاسباتی ـ زمان‌بَر ـ هندسه۳ صفحهٔ ۵۰ ـ ۱۲۰۲)



اگر $O\hat{B}F = \alpha$، آن‌گاه زاویهٔ $B\hat{C}F$ نیز برابر با α خواهد بود. زیرا دو زاویه، متمم زاویهٔ $F\hat{B}C$ هستند، پس با هم برابرند.

به‌طور مشابه زاویهٔ $C\hat{F}D$ نیز برابر با α است، زیرا $C\hat{F}D$ و $B\hat{C}F$ هر دو متمم زاویهٔ $F\hat{C}D$ هستند، پس با هم برابرند.

بنابراین مثلث قائم‌الزاویهٔ FCD با مثلث قائم‌الزاویهٔ OBF متشابه است، حال در این دو مثلث داریم:

$$\sin\alpha = \frac{c}{a} = \frac{CD}{CF} \xrightarrow{e=\frac{c}{a}=\frac{۲}{۳}} \frac{۲}{۳} = \frac{b}{۶} \Rightarrow b = ۴$$

حال $\tan\alpha$ را در هر دو مثلث CFD و OBF می‌نویسیم:

$$\tan\alpha = \frac{c}{b} = \frac{CD}{FD} = \frac{b}{FD} \Rightarrow FD = \frac{b^۲}{c} \quad (*)$$

بنابراین داریم:

$$\frac{FA}{AD} = \frac{FA}{FD - FA} \overset{(*)}{=} \frac{a-c}{\frac{b^۲}{c} - (a-c)} = \frac{a-c}{\frac{b^۲ + c^۲ - ac}{c}}$$

$$\Rightarrow \frac{FA}{AD} = \frac{a-c}{\frac{a^۲ - ac}{c}} = \frac{a-c}{\frac{a(a-c)}{c}} = \frac{c}{a} = e$$

از طرفی:

$$e = \frac{۲}{۳} \Rightarrow e^۲ = \frac{۴}{۹} \Rightarrow \frac{c^۲}{a^۲} = \frac{۴}{۹} \Rightarrow \frac{a^۲ - b^۲}{a^۲} = \frac{۴}{۹}$$

$$\Rightarrow ۱ - (\frac{b}{a})^۲ = \frac{۴}{۹} \Rightarrow (\frac{b}{a})^۲ = \frac{۵}{۹} \xrightarrow{b=۴} \frac{۱۶}{a^۲} = \frac{۵}{۹}$$

$$\Rightarrow a^۲ = \frac{۹\times۱۶}{۵} \Rightarrow a = \frac{۳\times۴}{\sqrt{۵}} = \frac{۱۲}{\sqrt{۵}} \xrightarrow{\frac{c}{a}=\frac{۲}{۳}} c = \frac{۲}{۳}\times\frac{۱۲}{\sqrt{۵}} = \frac{۸}{\sqrt{۵}}$$

در نتیجه داریم:

$$\Rightarrow \frac{FA}{AD} = e = \frac{۲}{۳} \Rightarrow \frac{a-c}{AD} = \frac{۲}{۳} \Rightarrow \frac{\frac{۱۲}{\sqrt{۵}} - \frac{۸}{\sqrt{۵}}}{AD} = \frac{۲}{۳} \Rightarrow ۲AD = ۳\times\frac{۴}{\sqrt{۵}} \Rightarrow AD = \frac{۶}{\sqrt{۵}} = ۶\frac{\sqrt{۵}}{۵}$$

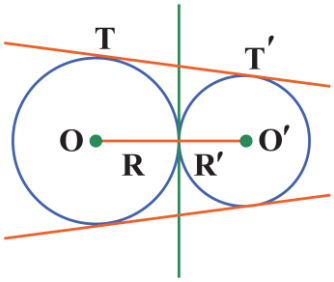
www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshCloud

۲۶- دو دایرهٔ C_1 و C_2 دقیقاً ۳ مماس مشترک دارند که اندازهٔ یکی از آن‌ها ۴ است. اگر اندازهٔ خط‌المرکزین این دو دایره $\frac{17}{2}$ باشد، شعاع دایرهٔ بزرگ‌تر چند برابر شعاع دایرهٔ کوچک‌تر است؟

۱) ۱۲ ۲) ۱۸ ۳) ۱۵ ۴) ۱۶

پاسخ: گزینهٔ ۴ (آسان ـ محاسباتی ـ استاندارد ـ هندسه ۲ صفحهٔ ۲۳ ـ ۱۱۰۱)

دو دایره مماس خارج‌اند زیرا دقیقاً ۳ مماس مشترک دارند، بنابراین:



$$d = R + R' = \frac{17}{2} \quad (1)$$

و با توجه به شکل، طول مماس مشترک خارجی دو دایره برابر با ۴ است:

$$TT' = \sqrt{(R+R')^2 - (R-R')^2} = 2\sqrt{RR'} = 4 \Rightarrow \sqrt{RR'} = 2 \Rightarrow RR' = 4 \quad (2)$$

$$(1),(2) \Rightarrow R + \frac{4}{R} = \frac{17}{2} \xrightarrow{\times R} R^2 - \frac{17}{2}R + 4 = 0$$

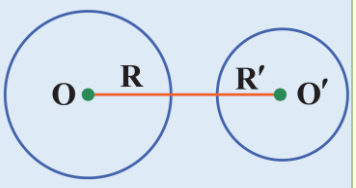
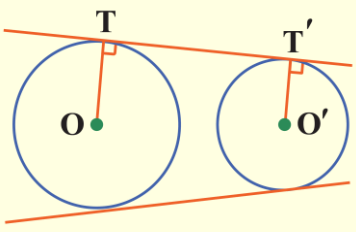
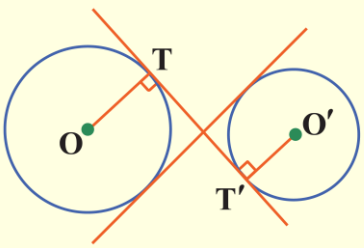
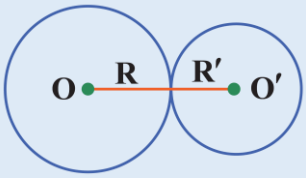
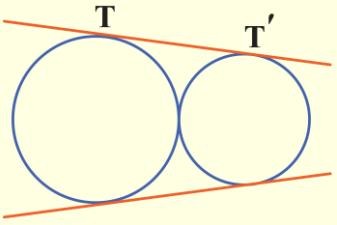
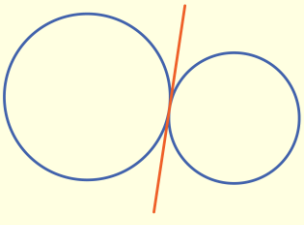
در نتیجه R و R' جواب‌های یک معادلهٔ درجه دوم هستند:

$$x^2 - \frac{17}{2}x + 4 = 0 \xrightarrow{\times 2} 2x^2 - 17x + 8 = 0$$

$$\Rightarrow \Delta = (-17)^2 - 4\times 2\times 8 = 289 - 64 = 225$$

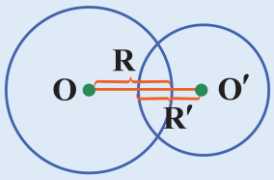
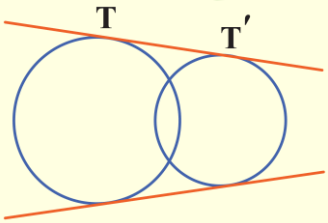
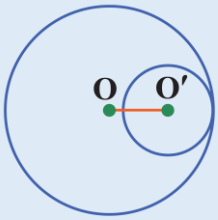
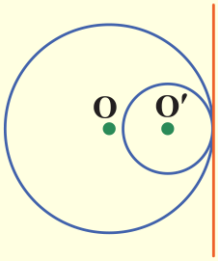
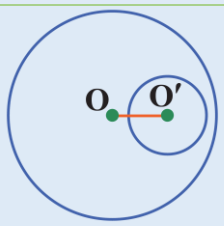
$$\Rightarrow x = \frac{17 \pm 15}{4} \Rightarrow \begin{cases} R = 8 \\ R' = \frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \frac{R}{R'} = 16$$

وضعیت نسبی دو دایره

وضعیت دو دایره	تعداد مماس‌ها	
	۲ مماس مشترک خارجی	۲ مماس مشترک داخلی
متخارج	 $OO' > R + R'$	 $TT' = \sqrt{(OO')^2 - (R-R')^2}$	 $TT' = \sqrt{(OO')^2 - (R+R')^2}$
مماس خارج	 $OO' = R + R'$	 ۲ مماس مشترک خارجی	 ۱ مماس مشترک داخلی

$$TT' = \sqrt{(R+R')^2 - (R-R')^2} = 2\sqrt{RR'}$$

سنجش کلاد
www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshCloud

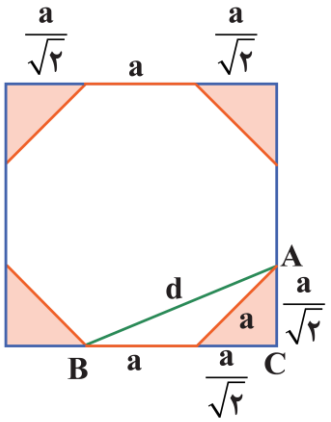
متقاطع	 $\lvert R-R'\rvert < OO' < R+R'$	 ۲ مماس مشترک خارجی دارد، اما مماس مشترک داخلی ندارد. $TT' = \sqrt{(OO')^۲ - (R-R')^۲}$
مماس داخل	 $OO' = \lvert R-R'\rvert$	 ۱ مماس مشترک خارجی دارد و مماس مشترک داخلی ندارد.
متداخل	 $OO' < \lvert R-R'\rvert$	نه مماس مشترک داخلی دارد نه مماس مشترک خارجی.

۲۷- در یک ۸ ضلعی منتظم، اندازهٔ کوچک‌ترین قطر برابر با $\sqrt{۱+\sqrt{۲}}$ است. مساحت ۸ ضلعی چقدر است؟

۱) $۱+\sqrt{۲}$ ۲) $۲+\sqrt{۲}$ ۳) $۴-\sqrt{۲}$ ۴) $۶-\sqrt{۲}$

پاسخ: گزینهٔ ۲ (متوسط ـ محاسباتی ـ زمان‌بَر ـ هندسه ۲ صفحهٔ ۲۹ ـ ۱۱۰۱)

روش اول



هشت‌ضلعی منتظم را در یک مربع محاط می‌کنیم.

اولاً در هر مثلث قائم‌الزاویهٔ متساوی‌الساقین طول اضلاع قائمه $\frac{۱}{\sqrt{۲}} = \frac{\sqrt{۲}}{۲}$ وتر است، پس اگر ضلع ۸ ضلعی منتظم را a و اندازهٔ کوچک‌ترین قطر را d در نظر بگیریم، آن‌گاه داریم:

$$\overset{\triangle}{ABC}: d^۲ = (\frac{a}{\sqrt{۲}})^۲ + (a+\frac{a}{\sqrt{۲}})^۲ = a^۲((\frac{۱}{\sqrt{۲}})^۲ + (۱+\frac{۱}{\sqrt{۲}})^۲)$$

$$\Rightarrow d^۲ = a^۲(\frac{۱}{۲}+۱+\frac{۱}{۲}+\sqrt{۲}) \Rightarrow d^۲ = a^۲(۲+\sqrt{۲})$$

$$\xrightarrow{d=\sqrt{۱+\sqrt{۲}}} ۱+\sqrt{۲} = a^۲ \times \sqrt{۲}(۱+\sqrt{۲}) \Rightarrow \sqrt{۲}a^۲ = ۱ \Rightarrow a^۲ = \frac{۱}{\sqrt{۲}} \quad (*)$$

از طرفی:

$$S_{\text{۸ ضلعی}} = S_{\text{مربع}} - ۴S_{\text{مثلث قائم‌الزاویه}}$$

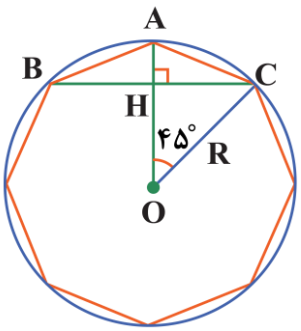
$$S_{\text{۸ ضلعی}} = a^۲(۱+\sqrt{۲})^۲ - ۴ \times \frac{۱}{۲} \times (\frac{a}{\sqrt{۲}})^۲$$

www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshCloud

$$\Rightarrow S=a^{۲}(۱+۲+۲\sqrt{۲})-a^{۲} \Rightarrow S=۲a^{۲}(۱+\sqrt{۲}) \overset{(*)}{=} ۲(\frac{۱}{\sqrt{۲}})(۱+\sqrt{۲})=\sqrt{۲}(۱+\sqrt{۲})=۲+\sqrt{۲}$$

روش دوم

۸ ضلعی منتظم را در یک دایره محاط می‌کنیم:



$$A\hat{O}C=\frac{۳۶۰^\circ}{۸}=۴۵^\circ \Rightarrow S=۸\times S_{\overset{\triangle}{OAC}}=۸\times\frac{۱}{۲}\times R\times R\times \sin ۴۵^\circ$$

$$\Rightarrow S=۴\times R^{۲}\times\frac{\sqrt{۲}}{۲}=۲\sqrt{۲}R^{۲} \quad (۱)$$

$$\overset{\triangle}{OHC}: \sin ۴۵^\circ=\frac{CH}{OC} \Rightarrow \frac{\sqrt{۲}}{۲}=\frac{\frac{۱}{۲}\sqrt{۱+\sqrt{۲}}}{R} \Rightarrow R=\frac{\sqrt{۱+\sqrt{۲}}}{\sqrt{۲}} \Rightarrow R^{۲}=\frac{۱+\sqrt{۲}}{۲} \quad (۲)$$

$$(۱)\ ,\ (۲) \Rightarrow S=۲\sqrt{۲}\times\frac{۱+\sqrt{۲}}{۲}=\sqrt{۲}(۱+\sqrt{۲})=۲+\sqrt{۲}$$

قِقِشو یاد بگیر!

اصولاً برای حل سوالات مربوط به هشت‌ضلعی منتظم، بهتر است آن را در یک مربع، یا یک دایره محاط کنیم.

ماز

۲۸- مساحت یک ذوزنقهٔ متساوی‌الساقین محیطی برابر با ۴ و مجموع ارتفاع وارد بر قاعده و یک ساق آن برابر با $۳\sqrt{۲}$ است. در این ذوزنقه قاعدهٔ بزرگ چقدر از قاعدهٔ کوچک بزرگ‌تر است؟

۱) $\sqrt{۶}$ ۲) $۲\sqrt{۶}$ ۳) ۳ ۴) ۴

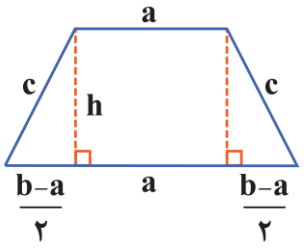
پاسخ: گزینهٔ ۲ (متوسط ـ محاسباتی ـ استاندارد ـ هندسه ۲ صفحهٔ ۲۹ ـ ۱۱۰۱)

روش اول

اگر طول قاعدهٔ بزرگ را b، قاعدهٔ کوچک را a و دو ساق را c فرض کنیم،چون ذوزنقه محیطی است، داریم:

$$a+b=۲c \Rightarrow c=\frac{a+b}{۲} \quad (*)$$

از طرفی بنابر فرض داریم:



$$\begin{cases} h+c=۳\sqrt{۲} \\ S=\frac{a+b}{۲}\times h=۴ \xrightarrow{(*)} ch=۴ \end{cases}$$

$$\Rightarrow h(۳\sqrt{۲}-h)=۴ \Rightarrow h^{۲}-۳\sqrt{۲}h+۴=۰ \xrightarrow{\Delta=۲} h=\frac{۳\sqrt{۲}\pm\sqrt{۲}}{۲}$$

$$\xrightarrow{c>h} \begin{cases} c=۲\sqrt{۲} \\ h=\sqrt{۲} \end{cases}$$

طبق رابطهٔ فیثاغورس در مثلث قائم‌الزاویه داریم:

$$(\frac{b-a}{۲})^{۲}=c^{۲}-h^{۲}=۸-۲=۶ \Rightarrow (\frac{b-a}{۲})=\sqrt{۶} \Rightarrow b-a=۲\sqrt{۶}$$

پس طول قاعدهٔ بزرگ‌تر $۲\sqrt{۶}$ واحد از قاعدهٔ کوچک‌تر بیشتر است.

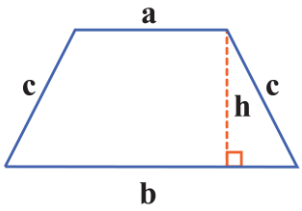
سنجش کلاد
www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshCloud

روش دوم

همان‌طور که در کتاب درسی اثبات شده است، در ذوزنقهٔ متساوی‌الساقین محیطی، ارتفاع وارد بر قاعده با واسطهٔ هندسی دو قاعده برابر است و ساق با واسطهٔ حسابی دو قاعده برابر است. (که البته به سادگی اثبات می‌شود.) یعنی:

$$c=\frac{a+b}{۲} \quad , \quad h=\sqrt{ab}$$

بنابراین:



$$S=\frac{۱}{۲}h(a+b)=h(\frac{a+b}{۲})=hc$$

بنابراین:

$$\begin{cases} hc=۴ \\ h+c=۳\sqrt{۲} \end{cases}$$

در نتیجه h و c جواب‌های معادله درجه دوم زیر هستند:

$$x^{۲}-۳\sqrt{۲}x+۴=۰ \Rightarrow \Delta=(۳\sqrt{۲})^{۲}-۴\times۴=۲ \Rightarrow x=\frac{۳\sqrt{۲}\pm\sqrt{۲}}{۲} \Rightarrow \begin{cases} h=\sqrt{۲} \\ c=۲\sqrt{۲} \end{cases}$$

توجه داشته باشید h ضلع قائمه و c وتر است، بنابراین $h<c$. به همین دلیل مقدار کوچک‌تر را h گرفتیم.

حال:

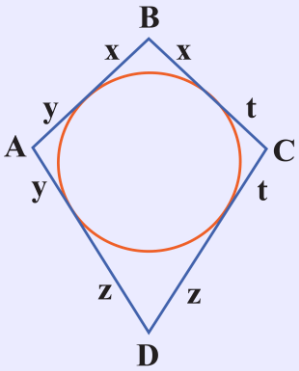
$$\begin{cases} h=\sqrt{۲} \Rightarrow \sqrt{ab}=\sqrt{۲} \Rightarrow ab=۲ \\ c=۲\sqrt{۲} \Rightarrow \frac{a+b}{۲}=۲\sqrt{۲} \Rightarrow a+b=۴\sqrt{۲} \end{cases}$$

پس a و b نیز ریشه‌های معادلهٔ درجه دوم زیر هستند:

$$x^{۲}-۴\sqrt{۲}x+۲=۰ \Rightarrow \text{تفاضل ریشه‌ها}=\frac{\sqrt{\Delta}}{a}=\frac{\sqrt{۳۲-۸}}{۱}=\sqrt{۲۴}=۲\sqrt{۶}$$

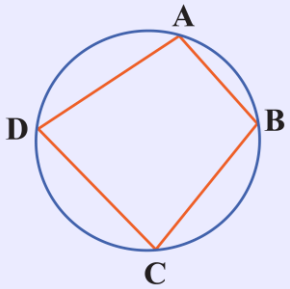
چهارضلعی‌های محیطی و محاطی

اگر ABCD یک چهارضلعی محیطی باشد، مجموع اضلاع روبه‌رو با هم برابر است و برعکس.



$$AB+CD=AD+BC=(x+y+z+t)$$

اگر ABCD یک چهارضلعی محاطی باشد، زوایای روبه‌رو مکمل همدیگر می‌باشند و برعکس.

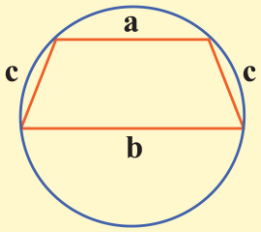


$$\hat{A}+\hat{C}=\hat{B}+\hat{D}=۱۸۰^{\circ}$$

سنجش کلاد
www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshCloud

ذوزنقهٔ محاطی و محیطی

۱) هر ذوزنقهٔ محاطی حتماً متساوی‌الساقین است و برعکس اگر ذوزنقه‌ای متساوی‌الساقین باشد، حتماً محاطی است. (زیرا وترهای بین دو خط موازی در دایره با هم برابرند.)



۲) در ذوزنقه‌های متساوی‌الساقین که محیطی هم باشند، داریم:

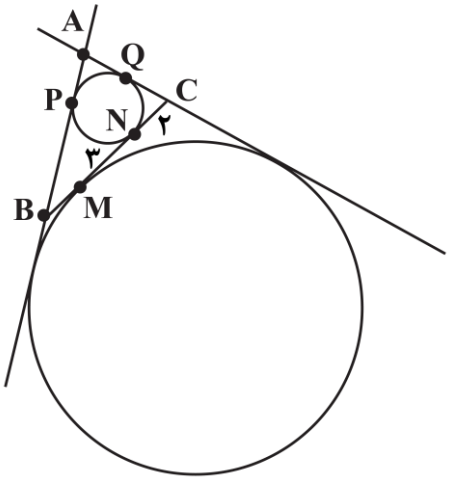
$$a+b=c+c \Rightarrow c=\frac{a+b}{۲}$$

یعنی طول ساق واسطهٔ حسابی قاعده‌ها است.

همچنین طول ارتفاع ذوزنقه واسطه هندسی قاعده‌ها است، یعنی:

$$h=\sqrt{ab}$$

۲۹- در مثلث زیر دایرهٔ محاطی و دایرهٔ محاطی خارجی نظیر ضلع BC رسم شده است. اگر CN=۲ و MN=۳، آن‌گاه اندازهٔ پاره‌خط BM کدام است؟



۱) $\frac{۵}{۲}$

۲) ۲

۳) ۳

۴) $\frac{۷}{۲}$

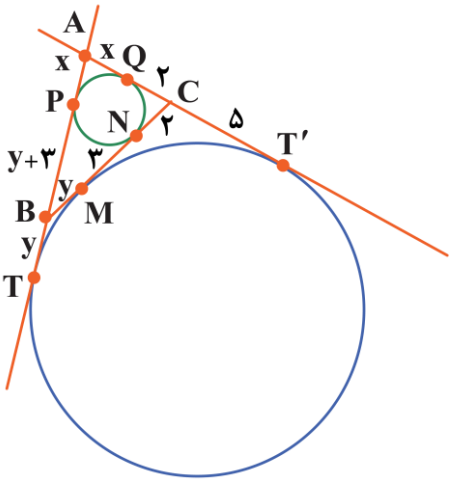
پاسخ: گزینهٔ ۲ (متوسط ـ محاسباتی ـ استاندارد ـ هندسه ۲ صفحهٔ ۳۰ ـ ۱۱۰۱)

می‌دانیم از یک نقطه خارج دایره مماس‌هایی هم‌اندازه بر دایره رسم می‌شود، در نتیجه:

$$CQ=۲$$

از طرفی، اگر $AQ=x$ و $BM=y$، آن‌گاه داریم:

$$\begin{cases} AP=AQ=x \\ BT=BM=y \\ BP=BN=y+۳ \\ CT'=CM=۵ \end{cases}$$



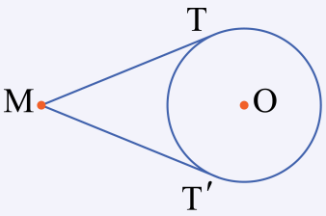
www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshCloud

حال با توجه به این‌که $AT = AT'$ خواهیم داشت:

$$x+y+۳+y=x+۷ \Rightarrow ۲y=۴ \Rightarrow y=۲ \Rightarrow BM=۲$$

یادآوری!

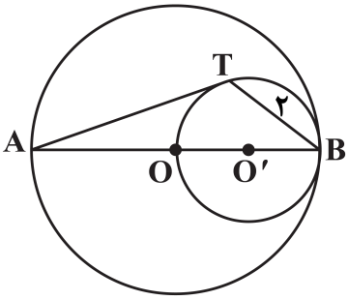
اگر از یک نقطه خارج دایره مماس‌هایی بر دایره رسم کنیم، طول آن‌ها با هم برابر است.



$$MT = MT'$$

۳۰- دو دایرهٔ زیر با مرکزهای O و O' در نقطهٔ B بر یکدیگر مماس‌اند. اگر AT بر دایرهٔ کوچک‌تر مماس باشد و $BT=۲$، آن‌گاه AT چقدر است؟

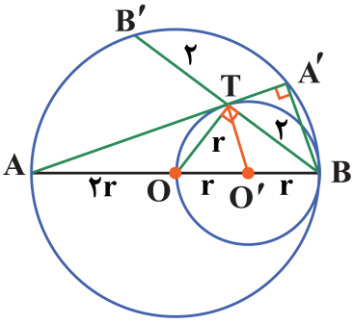
۱) $۲\sqrt{۲}$
۲) $۲\sqrt{۳}$
۳) $۳\sqrt{۳}$
۴) $۳\sqrt{۲}$



پاسخ: گزینهٔ ۲ (سخت ـ مفهومی ـ استاندارد ـ هندسه ۲ صفحهٔ ۲۲ ـ ۱۱۰۱)

اگر شعاع دایرهٔ کوچک را r بگیریم، شعاع دایرهٔ بزرگ‌تر $۲r$ است.

زاویهٔ $O\hat{T}B$ قائمه است، زیرا زاویهٔ محاطی روبه‌روی قطر OB برابر با ۹۰° است.



بنابراین در دایرهٔ بزرگ‌تر OT بر وتر BB' عمود است پس آن را نصف می‌کند، پس:

$$B'T = BT = ۲$$

از طرفی، $A\hat{A'}B = ۹۰^\circ$، زیرا این زاویه، زاویهٔ محاطی روبه‌روی قطر AB است.

از طرفی $O'T$ بر AA' عمود است، زیرا شعاع در نقطه تماس بر خط مماس عمود است، در نتیجه $BA' \| O'T$. در نتیجه با توجه به قضیهٔ تالس در $\overset{\triangle}{AA'B}$ داریم:

$$\frac{AT}{TA'} = \frac{AO'}{O'B} = \frac{۲r+r}{r} = ۳ \Rightarrow AT = ۳A'T \quad (*)$$

حال در دایرهٔ بزرگ‌تر، روابط طولی مربوط به نقطهٔ T را می‌نویسیم:

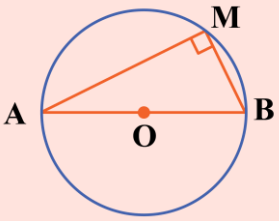
$$AT \times A'T = B'T \times BT \xrightarrow{(*)} ۳A'T \times A'T = ۲ \times ۲ \Rightarrow (A'T)^۲ = \frac{۴}{۳} \Rightarrow A'T = \frac{۲}{\sqrt{۳}}$$

$$\Rightarrow AT = ۳A'T = ۲\sqrt{۳}$$

سنجش کلاد
www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshCloud

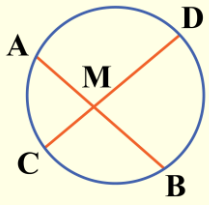
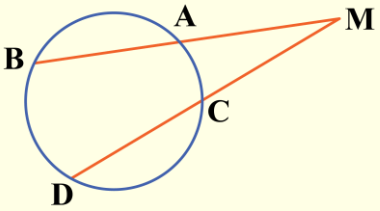
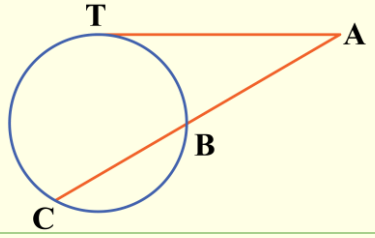
توجه!

زاویهٔ محاطی روبه‌روی قطر دایره برابر ۹۰° است.

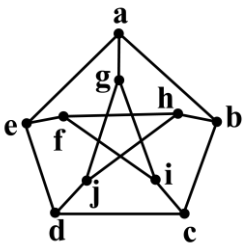


$$\hat{M} = \frac{\overset{\frown}{AB}}{۲} = \frac{۱۸۰^\circ}{۲} = ۹۰^\circ$$

روابط طولی در دایره

وترهای AB و CD داخل دایره یکدیگر را در نقطهٔ M قطع می‌کنند.	امتداد وترهای AB و CD خارج دایره در نقطهٔ M همدیگر را قطع می‌کنند.	اگر AT در نقطهٔ T بر دایره مماس باشد.
		
$MA \times MB = MC \times MD$	$MA \times MB = MC \times MD$	$AT^۲ = AB \times AC$

۳۱- در گراف مقابل، اختلاف بیشترین و کمترین تعداد عضوهای مجموعهٔ احاطه‌گر مینیمال کدام است؟



۱) صفر
۲) ۱
۳) ۲
۴) ۳

پاسخ: گزینهٔ ۳ (آسان ـ مفهومی ـ استاندارد ـ گسسته صفحهٔ ۴۶ ـ ۱۲۰۲)

کوچک‌ترین مجموعهٔ احاطه‌گر مینیمال از نظر تعداد عضو همان ۷- مجموعه است که در گراف بالا می‌توان مثلاً $\{a,i,j\}$ را نام برد و ۳ عضوی است و بیشترین تعداد عضو مجموعهٔ احاطه‌گر مینیمال در گراف قبل مثلاً $\{a,b,c,d,e\}$ است، که ۵ عضوی است، پس:

$۵ - ۳ = ۲$

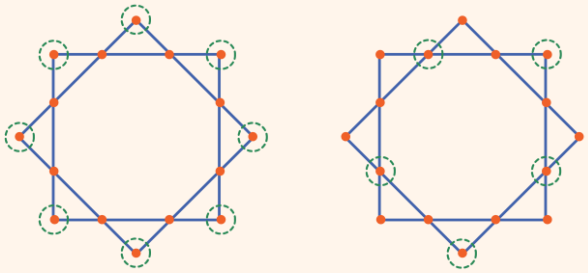
اختلاف کمترین از بیشترین می‌شود.

مجموعهٔ احاطه‌گر

اگر زیرمجموعه‌ای از رأس‌های گراف را درنظر بگیریم، به گونه‌ای که هر رأس گراف یا در این مجموعه باشد یا با حداقل یک رأس آن مجاور باشد، این مجموعه **مجموعهٔ احاطه‌گر** نامیده می‌شود.

یه نمونهٔ باحال ببین!

دو نوع مجموعهٔ احاطه‌گر برای گراف زیر مشاهده می‌کنید:



سنجش کلاد
www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshCloud

مجموعهٔ احاطه‌گر مینیمم

به مجموعهٔ احاطه‌گری که کمترین تعداد رأس‌ها را داشته باشد، مجموعهٔ **احاطه‌گر مینیمم** یا اصطلاحاً **γ–مجموعه** گفته می‌شود.

مجموعهٔ احاطه‌گر مینیمال

به مجموعهٔ احاطه‌گری که با حذف هر یک از رأس‌هایش دیگر احاطه‌گر نباشد، مجموعهٔ **احاطه‌گر مینیمال** گفته می‌شود.

مینیمم یا مینیمال، مسئله این است!

دقت کنید که یک مجموعهٔ احاطه‌گر مینیمم همیشه مینیمال است **اما** یک مجموعهٔ احاطه‌گر مینیمال لزوما احاطه‌گر مینیمم نیست و کمترین تعداد اعضا را ندارد.

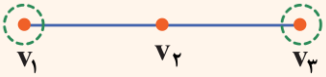
یه نمونهٔ باحال ببین!

با ساده‌ترین مثال‌ها هم می‌شه تفاوت مجموعه احاطه‌گر مینیمال و مینیمم رو دید:

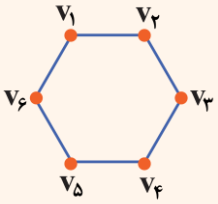
۱) گراف P_3:

تنها مجموعهٔ احاطه‌گر مینیمم: $\{v_2\}$

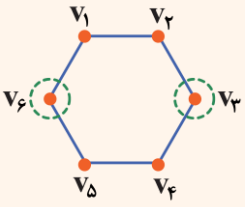
یک مجموعهٔ احاطه‌گر مینیمال: $\{v_1, v_3\}$



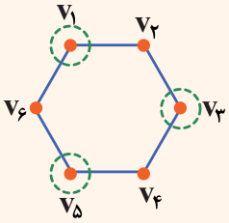
۲) گراف C_6:



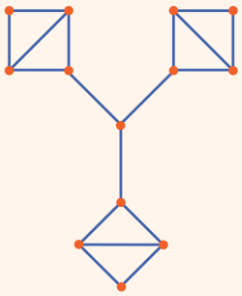
یک مجموعهٔ احاطه‌گر مینیمم: $\{v_3, v_6\}$

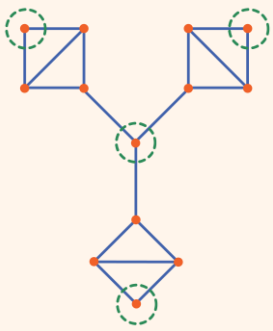


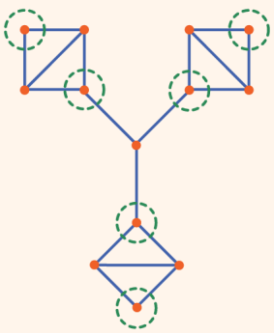
یک مجموعهٔ احاطه‌گر مینیمال: $\{v_1, v_3, v_5\}$



۳) به مجموعهٔ احاطه‌گر مینیمم و مینیمال در گراف زیر دقت کنید:







سعی کنید مجموعه‌های احاطه‌گر مینیمم یا مینیمال دیگری بسازید.

سنجش کلاد
www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshCloud

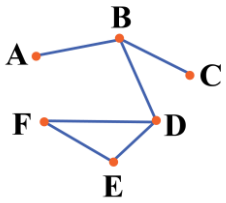
۳۲- F,E,D,C,B,A روستاهای یک شهرستان استان خراسان جنوبی هستند که قرار است با نصب دکل‌های مخابراتی از اینترنت پرسرعت بهره‌مند شوند. اگر قدرت ارسال این فرستنده‌ها تا $50km$ اطراف خود باشد با در نظر گرفتن حداقل چند دکل مخابراتی می‌توان همهٔ این ۶ روستا را تحت پوشش قرار داد؟ جدول زیر، فاصلهٔ دوبه‌دوی این روستاها برحسب km را نشان می‌دهد.

	A	B	C	D	E	F
A	۰	۴۵	۷۰	۸۵	۱۰۰	۵۵
B	۴۵	۰	۳۹	۴۵	۵۵	۶۰
C	۷۰	۳۹	۰	۷۵	۵۵	۵۵
D	۸۵	۴۵	۷۵	۰	۳۰	۴۹
E	۱۰۰	۵۵	۵۵	۳۰	۰	۳۷
F	۵۵	۶۰	۵۵	۴۹	۳۷	۰

۱) ۱
۲) ۲
۳) ۳
۴) ۴

پاسخ: گزینهٔ ۲ (متوسط ـ مفهومی ـ استاندارد ـ گسسته صفحهٔ ۴۳ تا ۴۸ ـ ۱۲۰۲)

فرض کنیم روستاها همان رأس‌های گراف باشند و وجود یک یال بین دو رأس نشان‌دهندهٔ فاصلهٔ کمتر از ۵۰ کیلومتر بین دو روستا باشد که در واقع با وجود یک دکل در یکی از دو روستایی که به هم وصل هستند، هر دو از اینترنت بهره‌مند می‌شوند. با توجه به فاصلهٔ دو روستا آن‌هایی را به هم وصل می‌کنیم که فاصلهٔ آن‌ها کمتر یا مساوی $50km$ باشد، مطابق گراف رسم شده، اگر رأس‌های $\{E,B\}$ یا $\{D,B\}$ یا $\{B,F\}$ انتخاب شوند، کل رأس‌ها احاطه می‌شوند. درنتیجه عدد احاطه‌گری گراف برابر است با: $\gamma = ۲$

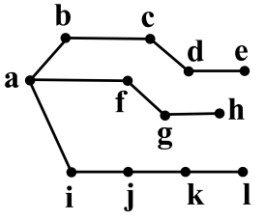


یعنی با نصب دکل در حداقل ۲ روستا همهٔ روستاها می‌توانند از اینترنت پرسرعت بهره‌مند شوند.

عدد احاطه‌گری

به تعداد رأس‌های مجموعهٔ احاطه‌گر مینیمم گراف G عدد احاطه‌گری گراف می‌گوییم و آن را با $\gamma(G)$ نشان می‌دهیم.

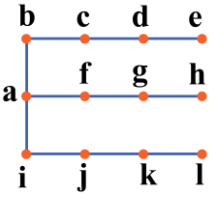
۳۳- عدد احاطه‌گری گراف مقابل ..... است و این گراف ..... مجموعهٔ احاطه‌گر مینیمم دارد.



۱) ۳ـ۲
۲) ۴ـ۱
۳) ۳ـ۱
۴) ۴ـ۲

پاسخ: گزینهٔ ۴ (متوسط ـ مفهومی ـ استاندارد ـ گسسته صفحهٔ ۴۸ ـ ۱۲۰۲)

نمودار گراف را به شکل زیر تغییر می‌دهیم تا کمتر خطا کنیم. عدد احاطه‌گری گراف ۴ $\gamma = ۴$ است.



و ۲ مجموعهٔ $\{a,d,g,k\}$ و $\{a,d,h,k\}$ مجموعه‌های احاطه‌گر مینیمم آن هستند.

سنجش کلاد
www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshCloud

۳۴- گراف P_5 چند مجموعهٔ احاطه‌گر دارد؟

۱) ۳ ۲) ۱۵ ۳) ۱۷ ۴) ۱۹

پاسخ: گزینهٔ ۳ (متوسط ـ محاسباتی ـ استاندارد ـ گسسته صفحهٔ ۴۸ ـ ۱۲۰۲)

چون در کل ۵ رأس بیشتر نداریم با انتخاب هر ۵ رأس و انتخاب هر ۴ رأسی از ۵ رأس یک گراف احاطه‌گر به‌دست می‌آید. در بین انتخاب‌های ۳ تایی از رئوس فقط دو انتخاب $\{c,d,e\},\{a,b,c\}$ احاطه‌گر نیستند. در بین انتخاب‌های دوتایی که مجموعه‌های احاطه‌گر مینیمم را می‌سازند، فقط ۳ انتخاب قابل قبول داریم و به‌وضوح با انتخاب یک رأس هم به هیچ عنوان مجموعهٔ احاطه‌گر ساخته نمی‌شود. پس:

$$\binom{5}{5} + \binom{5}{4} + \left(\binom{5}{3} - 2\right) + \overbrace{(\{a,d\},\{b,e\},\{b,d\})}^{\text{تعداد مجموعه‌ها} = 3} = 1+5+8+3 = 17$$

$\binom{5}{5}$: تعداد مجموعه‌های احاطه‌گر ۵ عضوی

$\binom{5}{4}$: تعداد مجموعه‌های احاطه‌گر ۴ عضوی

$\binom{5}{3}-2$: تعداد مجموعه‌های احاطه‌گر ۳ عضوی ($\{c,d,e\},\{a,b,c\}$)

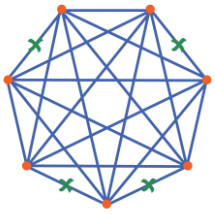
۳۵- گرافی از مرتبهٔ ۷ داریم. اگر عدد احاطه‌گری در این گراف ۲ باشد، حداکثرِ اندازهٔ گراف کدام است؟

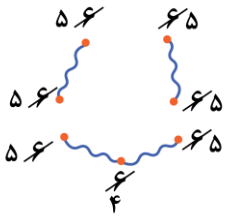
۱) ۱۵ ۲) ۲۰ ۳) ۱۷ ۴) ۷

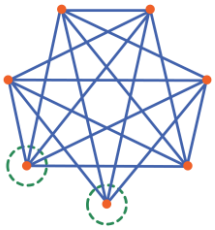
پاسخ: گزینهٔ ۳ (سخت ـ مفهومی ـ استاندارد ـ گسسته صفحهٔ ۴۸ ـ ۱۲۰۲)

ابتدا گراف را کامل در نظر می‌گیریم تا حداکثر تعداد یال را داشته باشیم در گراف K_7 اندازه مساوی $\binom{7}{2}=21$ است.

ولی چون همهٔ رأس‌ها از درجهٔ ۶ هستند $\gamma=1$ است، اگر مطابق شکل زیر ۴ یال را از این گراف حذف کنیم دیگر رأس‌هایی با درجهٔ ۶ نداریم.







در این‌صورت با در نظر گرفتن حداقل ۲ رأس می‌توان کل شکل را احاطه کرد، پس:

$$q_{max} = \binom{7}{2} - 4 = 17$$

این دو تا رو باهم قاطی نکنی!

تعداد **رأس** ⟵ مرتبه

تعداد **یال** ⟵ اندازه

سنجش کلاد
www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshCloud

۳۶- در جبر گزاره‌ها، گزارهٔ ترکیبی $r \vee (p \Rightarrow (q \wedge \sim p))$ با گزارهٔ $p \sim$ هم‌ارز است. r هم‌ارز کدام‌یک از گزاره‌های زیر می‌تواند باشد؟

۱) $p \wedge q$ ۲) $p \vee q$ ۳) $p \Rightarrow q$ ۴) $\sim (p \vee q)$

پاسخ: گزینهٔ ۴ (متوسط ـ مفهومی ـ استاندارد ـ آمار و احتمال صفحهٔ ۱۱ ـ ۱۱۰۱)

ابتدا $p \Rightarrow (q \wedge \sim p)$ را ساده‌تر می‌کنیم:

$$p \Rightarrow (q \wedge \sim p) \equiv \sim p \vee (q \wedge \sim p) \overset{\text{(قانون جذب)}}{\equiv} \sim p$$

حال گزارهٔ $r \vee \sim p$ را بررسی می‌کنیم که چه وقت با $\sim p$ هم‌ارز خواهد شد. یعنی به‌جای r هر کدام از گزینه‌ها را جایگزین کرده و گزارهٔ حاصل را ساده می‌کنیم تا ببینیم کدام یک هم‌ارز با $\sim p$ می‌شود؟

بررسی گزینه‌ها:

۱) $\sim p \vee (p \wedge q) \overset{\text{(هم‌پوشانی)}}{\equiv} \sim p \vee q \not\equiv \sim p$

۲) $\sim p \vee (p \vee q) \equiv T \not\equiv \sim p$

۳) $\sim p \vee (p \Rightarrow q) \equiv \sim p \vee (\sim p \vee q) \equiv \sim p \vee q \not\equiv \sim p$

۴) $\sim p \vee \sim (p \vee q) \equiv \sim p \vee (\sim p \wedge \sim q) \overset{\text{(قانون جذب)}}{\equiv} \sim p$

هم‌ارزی‌های مهم در گزاره‌ها

گزاره‌های همواره درست یا همواره نادرست	
$p \vee T \equiv T$	$p \vee \sim p \equiv T$
$p \wedge F \equiv F$	$p \wedge \sim p \equiv F$

نقیض ترکیب فصلی و عطفی (قوانین دمورگان)	
$\sim (p \vee q) \equiv \sim p \wedge \sim q$	$\sim (p \wedge q) \equiv \sim p \vee \sim q$

قوانین ترکیب‌های فصلی و عطفی		
جذب: $\begin{cases} p \vee (p \wedge q) \equiv p \\ p \wedge (p \vee q) \equiv p \end{cases}$	شرکت‌پذیری: $\begin{matrix} p \vee (q \vee r) \equiv (p \vee q) \vee r \\ p \wedge (q \wedge r) \equiv (p \wedge q) \wedge r \end{matrix}$	خودتوانی: $\begin{cases} p \vee p \equiv p \\ p \wedge p \equiv p \end{cases}$
هم‌پوشانی: $\begin{cases} p \vee (\sim p \wedge q) \equiv p \vee q \\ p \wedge (\sim p \vee q) \equiv p \wedge q \end{cases}$	توزیع‌پذیری: $\begin{cases} p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r) \\ p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r) \end{cases}$	جابه‌جایی: $\begin{cases} p \vee q \equiv q \vee p \\ p \wedge q \equiv q \wedge p \end{cases}$

۳۷- مجموعه‌های $A = \{۴,۵,۶,۷,۸,۹\}$ و $B = \{k, k+۱, k+۲, \ldots, ۶۰\}$ مفروض‌اند. حداکثر مقدار k که به‌ازای آن گزارهٔ سوری $\exists x \in B;\ \forall y \in A : x^۲.y \leq ۱۴۰۴$ ارزش درست داشته باشد، کدام رقم یکان را دارد؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

پاسخ: گزینهٔ ۲ (سخت ـ مفهومی ـ استاندارد ـ آمار و احتمال صفحهٔ ۱۲ ـ ۱۱۰۱)

چون فرض کرده‌ایم گزارهٔ سوری ارزش درست دارد، به‌ازای هر عضوی از A نابرابری داده شده برقرار است. پس می‌توان y را ۹ قرار داد:

$$۹x^۲ \leq ۱۴۰۴ \Rightarrow x^۲ \leq ۱۵۶ \Rightarrow x \leq ۱۲$$

بنابراین باید در B عضوی کوچک‌تر یا مساوی ۱۲ موجود باشد، پس با نابرابری موجود به حداکثر مقدار $k_{max} = ۱۲$ خواهیم رسید که رقم یکان آن ۲ است.

سنجش کلاد
www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshCloud

رفع ابهام!

توجه کنید که اگر با هر یک از اعداد ۴ تا ۸ در A کار می‌کردیم، در این‌صورت مقادیر بزرگ‌تر از ۱۲ برای k به‌دست می‌آمد اما دیگر ارزش گزارهٔ سوری درست نمی‌شد. چرا که گزارهٔ سوری می‌گوید:«عضوی در B وجود دارد، که به‌ازای آن برای هر عضو در A نامساوی مذکور برقرار است.» و طبق این اگر هر عددی بزرگ‌تر از ۱۲ برای k درنظر بگیریم و B شامل ۱۲ نشود، به‌ازای عدد ۹ در A، عددی در B پیدا نمی‌شود که در گزاره صدق کند. پس عدد ۱۲ حداکثر مقداری است که k می‌تواند داشته باشد.

ماز

۳۸- اگر مجموعهٔ A به‌صورت $A=\{۲,\{۲\},\{۲,\{۲\}\}\}$ تعریف شده باشد، آن‌گاه تعداد اعضای مجموعهٔ $P(A)-A$ از تعداد اعضای مجموعهٔ $A-P(A)$ چه تعداد بیش‌تر است؟ (مجموعهٔ $P(A)$ مجموعهٔ توانی مجموعهٔ A است.)

۱) صفر ۲) ۲ ۳) ۴ ۴) ۵

پاسخ: گزینهٔ ۴ (متوسط ـ محاسباتی ـ استاندارد ـ آمار و احتمال صفحهٔ ۱۷ ـ ۱۱۰۱)

تعداد اعضای هر مجموعه را به‌دست می‌آوریم:

$$|P(A)-A|=|P(A)-[P(A)\cap A]|=|P(A)|-|P(A)\cap A|=۲^۳-۲=۶$$
$$|A-P(A)|=|A-[A\cap P(A)]|=|A|-|A\cap P(A)|=۳-۲=۱$$
$$\Rightarrow ۶-۱=۵$$

لازم به ذکر است که $A\cap P(A)=\{\{۲\},\{۲,\{۲\}\}\}$ و $|A\cap P(A)|=۲$.

جرقهٔ ذهنی!

در بین اعضای A $\{۲\}$ و $\{۲,\{۲\}\}$ زیرمجموعه‌های آن نیز هستند، زیرا همین که ۲ عضو A است یعنی $\{۲\}$ یک زیرمجموعهٔ آن است.

از طرفی چون ۲ و $\{۲\}$ اعضای A هستند، پس یک زیر مجموعهٔ دو عضوی آن $\{۲,\{۲\}\}$ است.

پس برای پیدا کردن اشتراک A و $P(A)$ نیازی نیست تمام $P(A)$ را تشکیل دهیم.

مجموعهٔ توانی

اگر همهٔ زیرمجموعه‌های یک مجموعه را در یک مجموعه بریزیم، به مجموعهٔ حاصل مجموعهٔ توانی می‌گویند و آن را با $P(A)$ نمایش می‌دهند. (حرف P اولین حرف واژهٔ powerset به معنی مجموعهٔ توانی است.)

یه نمونهٔ باحال ببین!

اگر $A=\{\varnothing,a,\{b\}\}$ باشد، مجموعهٔ توانی A را به‌دست آورید.

تک عضوی‌ها — دو عضوی‌ها

$$P(A)=\{\varnothing,\{\varnothing\},\{a\},\{\{b\}\},\{\varnothing,a\},\{a,\{b\}\},\{\varnothing,\{b\}\},A\}$$

ماز

۳۹- اگر A، B و C سه مجموعهٔ ناتهی متمایز باشند، آن‌گاه مجموعهٔ $(A-B)-(B\cup C')$ با کدام مجموعه برابر خواهد شد؟

۱) $A-(B\cap C)$ ۲) $(A\cap C)-B$ ۳) $A-(B-C)$ ۴) $(A-B)-C$

پاسخ: گزینهٔ ۲ (آسان ـ محاسباتی ـ سریع ـ آمار و احتمال صفحهٔ ۲۸ ـ ۱۱۰۱)

$$(A-B)-(B\cup C')$$
$$=(A\cap B')\cap(B\cup C')' \quad \text{(تبدیل تفاضل به اشتراک)}$$
$$=(A\cap B')\cap(B'\cap C) \quad \text{(دمورگان)}$$
$$=(A\cap C)\cap B' \quad \text{(توزیع‌پذیری)}$$
$$=(A\cap C)-B \quad \text{(تبدیل اشتراک به تفاضل)}$$

سنجش کلاد
www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshCloud

جمع‌بندی قوانین مجموعه‌ها

اگر U مجموعهٔ مرجع و A، B و C زیرمجموعه‌های آن باشند؛ داریم:

تبدیل تفاضل به اشتراک	$\underbrace{A-B}_{A-(A\cap B)}=A\cap B'$
جابه‌جایی	$\begin{cases}A\cup B=B\cup A\\A\cap B=B\cap A\end{cases}$
توزیع‌پذیری	$\begin{cases}A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)\\A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)\end{cases}$
قوانین دمورگان	$\begin{cases}(A\cup B)'=A'\cap B'\\(A\cap B)'=A'\cup B'\end{cases}$
قانون جذب	$\begin{cases}A\cap(A\cup B)=A\\A\cup(A\cap B)=A\end{cases}$
شرکت‌پذیری	$\begin{cases}(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)\\(A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C)\end{cases}$

ماز

۴۰- اگر $A=\{۱,۲,۳,۴\}$، $B=\{۳,۴,۵\}$ و $C=\{۲,۴,۶,۸,۱۰\}$، آن‌گاه چند زوج‌مرتب وجود دارد که عضوی از $B\times C$ بوده ولی عضوی از $A\times C$ نباشد؟

۱) ۳ ۲) ۴ ۳) ۵ ۴) ۸

پاسخ: گزینهٔ ۳ (متوسط ـ ترکیبی ـ استاندارد ـ آمار و احتمال صفحهٔ ۳۱ ـ ۱۱۰۱)

عضوی از $B\times C$ بوده ولی عضوی از $A\times C$ نباشد یعنی $(B\times C)-(A\times C)$ یعنی باید اعضایی که هم در $B\times C$ هستند و هم در $A\times C$ از $B\times C$ حذف شوند.

$$|(B\times C)\cap(A\times C)'|=|(B\times C)-(A\times C)|=|(B-A)\times C|=|B-A|\times|C|$$

$$=|\{۵\}|\times|\{۲,۴,۶,۸,۱۰\}|=۱\times۵=۵$$

ضرب دکارتی دو مجموعه

برای هر دو مجموعهٔ A و B ضرب دکارتی آن‌ها به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$A\times B=\{(x,y)\mid x\in A\wedge y\in B\}$$

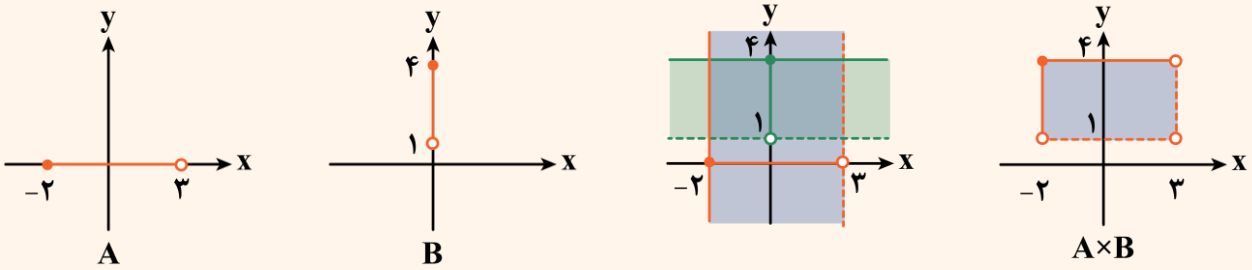
نمایش ضرب دکارتی روی محورهای مختصات

ابتدا مجموعهٔ A را روی محور xها، و مجموعهٔ B را روی محور yها مشخص می‌کنیم. سپس هر دو را در امتداد محور دیگر ادامه می‌دهیم. محل تلاقی هر دو ناحیهٔ ذکر شده همان $A\times B$ است.

سنجش کلاد
www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshCloud

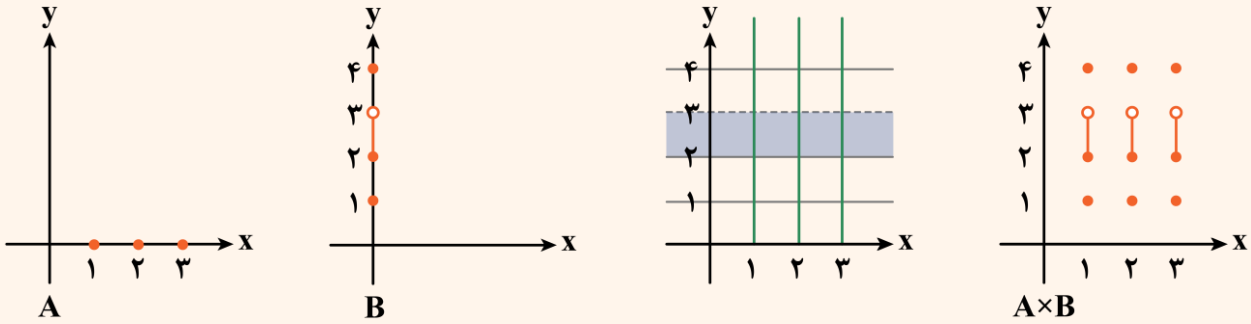
یه نمونهٔ باحال ببین!

$A=[-۲,۳)$ $B=(۱,۴]$



یه نمونهٔ باحال ببین!

$A=\{۱,۲,۳\}$ $B=[۲,۳)\cup\{۱,۴\}$



خواص ضرب دکارتی

۱) ضرب دکارتی خاصیت جابه‌جایی ندارد.

$$A\times B\neq B\times A$$

۲)

$$(A-C)\times B=A\times B-C\times B$$

$$(A\cup C)\times B=(A\times B)\cup(C\times B)$$

$$(A\times B)\cap(B\times A)=(A\cap B)\times(B\cap A)=(A\cap B)^{۲}$$

تعداد اعضای ضرب دکارتی

$$|A\times B|=|A|\times|B|$$

سنجش کلاد
www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshCloud

بودجه‌بندی این آزمون

فیزیک ۲: الکتریسیتهٔ ساکن + جریان الکتریکی و مدارهای جریان مستقیم (از خازن تا قبل از نیروی محرکهٔ الکتریکی و مدارها) - صفحه‌های ۳۲ تا ۶۱

فیزیک ۳: نوسان و موج (تا قبل از موج عرضی و مشخصه‌های آن) - صفحه‌های ۶۱ تا ۷۲

سهم در کنکور

پایهٔ یازدهم: درمجموع **۳** تست از **۳۵** تست کنکور را پوشش داده است.

پایهٔ دوازدهم: درمجموع **۱ یا ۲** تست از **۳۵** تست کنکور را پوشش داده است.

برای دیدن پاسخ‌نامهٔ ویدئویی آزمون بالا را اسکن یا روی آن کلیک کنید! QR Code

۴۱- معادلهٔ حرکت نوسانگر هماهنگ ساده‌ای در SI به‌صورت $x = A\cos(۲۰\pi t)$ است. نوسانگر در بازهٔ زمانی $۰/۰۵s < t < ۰/۲۵s$ چند بار تغییر جهت می‌دهد؟

۱) ۳ ۲) ۲ ۳) ۴ ۴) ۱

پاسخ: گزینهٔ ۱ (متوسط ـ محاسباتی ـ استاندارد ـ صفحهٔ ۶۳ ـ ۱۲۰۳)

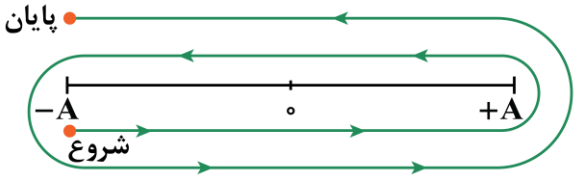
ابتدا زمان‌های داده‌شده را درون معادله قرار می‌دهیم تا مکان‌های متناظر با آن‌ها به‌دست آید:

$$t_۱ = ۰/۰۵s \Rightarrow x_۱ = A\cos(۲۰\pi\frac{۵}{۱۰۰}) = A\cos(\pi) = -A$$

$$t_۲ = ۰/۲۵s \Rightarrow x_۲ = A\cos(۲۰\pi\frac{۲۵}{۱۰۰}) = A\cos(۵\pi) = -A$$

$$\omega = ۲۰\pi = \frac{۲\pi}{T} \Rightarrow T = ۰/۱s \Rightarrow \Delta t = ۰/۲۵ - ۰/۰۵ = ۰/۲s = ۲T$$

متحرک به‌صورت زیر حرکت کرده است:



پس متحرک ۳ بار تغییر جهت داده است. دقت کنید بازهٔ $۰/۰۵s < t < ۰/۲۵s$ شامل لحظات $t = ۰/۰۵s$ و $t = ۰/۲۵s$ نیست.

معادلهٔ حرکت هماهنگ ساده

معادلهٔ مکان ـ زمان حرکت هماهنگ ساده درحالتی‌که نوسانگر در مبدأ زمان $(t = ۰)$ در مکان $x = +A$ قرار داشته باشد، به‌صورت زیر است:

$$x = A\cos\omega t$$

x: مکان نوسانگر (m) A: دامنهٔ نوسان (m) ωt: شناسهٔ تابع کسینوسی (rad) یا فاز

بسامد زاویه‌ای (ω) از چه رابطه‌ای به‌دست می‌آید؟

اگر بسامد نوسان را با f و دورهٔ تناوب را با T نشان دهیم، رابطهٔ ω با f و T به‌صورت زیر است:

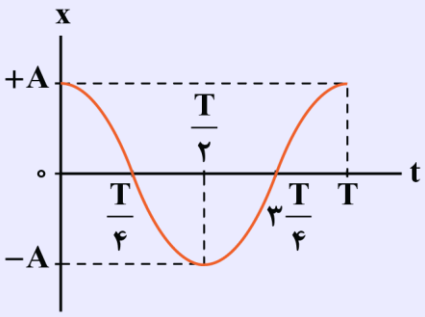
$$\omega = ۲\pi f \ , \ \omega = \frac{۲\pi}{T}$$

ω: بسامد زاویه‌ای $(\frac{rad}{s})$ f: بسامد (Hz) T: دورهٔ تناوب (s)

سنجش کلاد
www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshCloud

نمودار مکان ـ زمان حرکت هماهنگ ساده

با توجه به معادلهٔ حرکت هماهنگ ساده $(x = A\cos\omega t)$ نمودار مکان ـ زمان آن نیز به‌صورت کسینوسی است. شکل زیر این نمودار را در مدت‌زمان یک دورهٔ تناوب نشان می‌دهد.



یه نمونهٔ باحال

معادلهٔ مکان ـ زمان نوسانگری در SI به‌صورت $x = ۰/۲\cos ۱۰\pi t$ است.

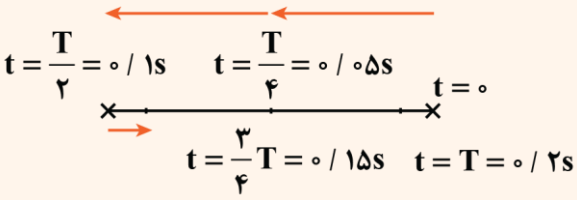
۱- دامنه، دورهٔ تناوب و بسامد نوسانگر را به‌دست آورید.

$$x = A\cos\omega t \Rightarrow \begin{cases} A = ۰/۲\text{m} \\ \omega = ۱۰\pi(\frac{\text{rad}}{\text{s}}) \\ \omega = \frac{۲\pi}{T} \Rightarrow ۱۰\pi = \frac{۲\pi}{T} \Rightarrow T = ۰/۲\text{s} \\ f = \frac{۱}{T} = \frac{۱}{۰/۲} = ۵\text{Hz} \end{cases}$$

۲- تندی متوسط نوسانگر را در مدت یک دورهٔ تناوب به‌دست آورید.

$$s_{av} = \frac{\ell}{\Delta t} \xrightarrow[\Delta t = T = ۰/۲\text{s}]{\ell = ۴A = ۴(۰/۲) = ۰/۸\text{m}} s_{av} = \frac{۰/۸}{۰/۲} = ۴\frac{\text{m}}{\text{s}}$$

۳- در بازهٔ زمانی $t_۱ = ۰/۰۲\text{s}$ تا $t_۲ = ۰/۱۲\text{s}$، چند ثانیه شتاب و تکانه در خلاف جهت یکدیگرند؟



کندشونده ⇒ شتاب و سرعت خلاف جهت ⇒ شتاب و تکانه خلاف جهت

$$\Delta t = ۰/۰۵\text{s}$$

۴- در لحظهٔ $t = ۱۷۵\text{ms}$، فاصلهٔ نوسانگر از مرکز نوسان چند سانتی‌متر است؟

$$x = ۰/۲\cos ۱۰\pi t \xrightarrow{t = ۱۷۵\text{ms} = ۰/۱۷۵\text{s}} x = ۰/۲\cos(\underbrace{۱۰\pi \times ۰/۱۷۵}_{\frac{۷\pi}{۴}}) \quad \underbrace{(۱/۷۵\pi)}$$

$$x = ۰/۲ \times \frac{\sqrt{۲}}{۲} = ۰/۱\sqrt{۲}\text{m} = ۱۰\sqrt{۲}\text{cm}$$

۵- سرعت متوسط نوسانگر در بازهٔ زمانی $t_۱ = \frac{۵۰}{۳}\text{ms}$ تا $t_۲ = \frac{۲۵۰}{۳}\text{ms}$ چند $\frac{\text{cm}}{\text{s}}$ است؟

$$x_۱ = ۰/۲\cos(\underbrace{۱۰\pi \times \frac{۵۰}{۳} \times ۱۰^{-۳}}_{\frac{\pi}{۶}}) = ۰/۲ \times \frac{\sqrt{۳}}{۲} = ۰/۱\sqrt{۳}\text{m} = ۱۰\sqrt{۳}\text{cm}$$

سنجش کلاد
www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshCloud

$$x_۲ = ۰/۲\cos(\underbrace{۱۰\pi \times \frac{۲۵۰}{۳} \times ۱۰^{-۳}}_{\frac{۵\pi}{۶}}) = ۰/۲ \times (-\frac{\sqrt{۳}}{۲}) = -۰/۱\sqrt{۳}m = -۱۰\sqrt{۳}cm$$

$$\Delta x = x_۲ - x_۱ = -۱۰\sqrt{۳} - ۱۰\sqrt{۳} = -۲۰\sqrt{۳}cm$$

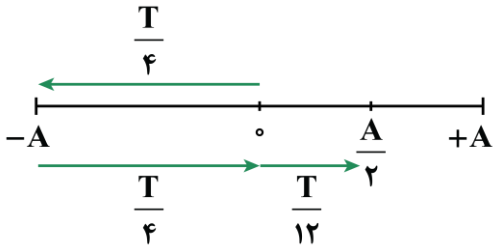
$$v_{av} = \frac{\Delta x}{\Delta t} \Rightarrow v_{av} = \frac{-۲۰\sqrt{۳}}{\frac{۰/۲۵}{۳} - \frac{۰/۰۵}{۳}} = -\frac{۲۰\sqrt{۳}}{\frac{۰/۲}{۳}} = -۳۰۰\sqrt{۳}\frac{cm}{s}$$

۴۲- نوسانگری با دامنهٔ A نوسان می‌کند. در یک دورهٔ تناوب اگر حداکثر زمانی که نوسانگر از نقطهٔ تعادل ($x=۰$) برای اولین بار به مکان $x=\frac{A}{۲}$ می‌رسد، برابر با $\frac{۱}{۳۰}$ ثانیه باشد، نوسانگر در هر دقیقه چند بار طول پاره‌خط را طی می‌کند؟

۱) ۲۱۰۰ ۲) ۴۲۰۰ ۳) ۱۰۵۰ ۴) ۳۰۰۰

پاسخ: گزینهٔ ۱ (متوسط ـ محاسباتی ـ استاندارد ـ صفحهٔ ۶۳ ـ ۱۲۰۳)

با استفاده از مسیر حرکت نوسانگر می‌توانیم دورهٔ تناوب و سپس تعداد نوسان‌های آن را به‌دست بیاوریم.

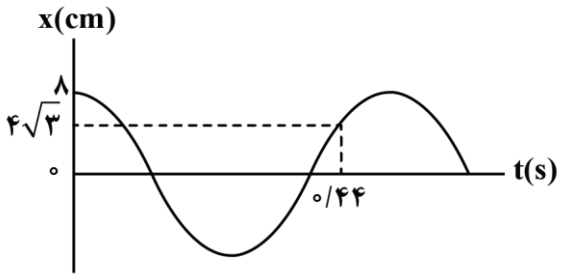


$$\frac{T}{۴} + \frac{T}{۴} + \frac{T}{۱۲} = \frac{۱}{۳۰} \Rightarrow \frac{۷T}{۱۲} = \frac{۱}{۳۰} \Rightarrow T = \frac{۲}{۳۵}s$$

$$T = \frac{t}{n} \xrightarrow{n: \text{تعداد نوسان}} \frac{۲}{۳۵} = \frac{۶۰}{n} \Rightarrow n = ۱۰۵۰$$

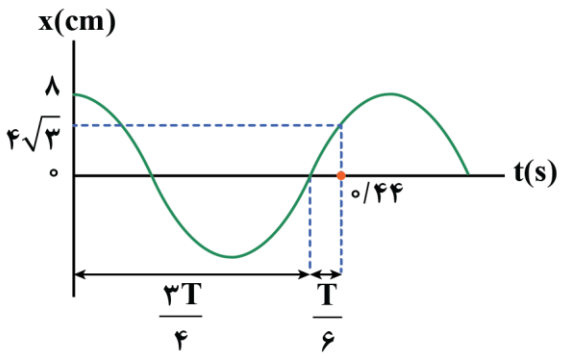
در هر نوسان کامل، نوسانگر دو بار طول پاره‌خط را طی می‌کند، پس نوسانگر ۲۱۰۰ بار طول پاره‌خط را طی می‌کند.

۴۳- نمودار مکان ـ زمان نوسانگر هماهنگ سادهٔ وزنه و فنری به‌صورت زیر است. اگر ثابت فنر $۱\frac{N}{cm}$ باشد، جرم وزنه چند گرم است؟ ($\pi \simeq ۳$)



۱) ۳۲
۲) ۶۴
۳) ۳۲۰
۴) ۶۴۰

پاسخ: گزینهٔ ۴ (متوسط ـ مفهومی/محاسباتی ـ استاندارد ـ صفحهٔ ۶۵ ـ ۱۲۰۳)



ابتدا دورهٔ تناوب نوسانگر را از روی نمودار داده‌شده محاسبه می‌کنیم:

$$\frac{۳T}{۴} + \frac{T}{۶} = ۰/۴۴$$

$$\Rightarrow \frac{۹T + ۲T}{۱۲} = ۰/۴۴ \Rightarrow \frac{۱۱T}{۱۲} = ۰/۴۴$$

$$\Rightarrow T = ۱۲ \times ۰/۰۴ = ۰/۴۸s$$

سنجش کلاد
www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshCloud

دورهٔ تناوب سامانهٔ جرم ـ فنر را می‌توانیم از رابطهٔ $T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$ به‌دست بیاوریم. درنتیجه:

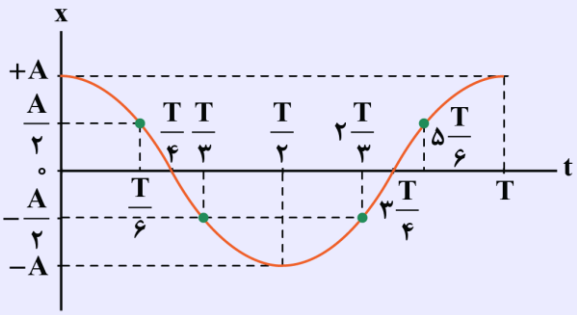
$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} \Rightarrow 0/48 = 6\sqrt{\frac{m}{100}}$$

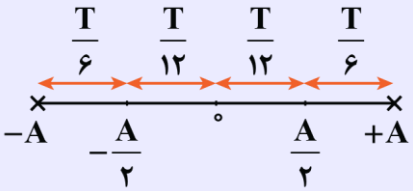
$$\Rightarrow 0/08 = \sqrt{\frac{m}{100}} \Rightarrow 64\times10^{-4} = \frac{m}{100} \Rightarrow m = 64\times10^{-2}\,kg = 640\,g$$

بازه‌های زمانی معروف در نمودار مکان ـ زمان حرکت نوسانی ساده

۱- مکان $\pm\frac{A}{2}$:

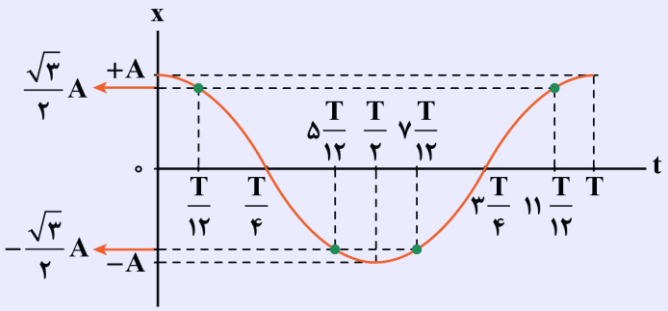
مدت‌زمانی که حد فاصل $\pm\frac{A}{2}$ تا انتهای مسیر طی می‌شود برابر با $\frac{T}{6}$ و مدت‌زمانی که حدفاصل $\pm\frac{A}{2}$ تا مرکز نوسان طی می‌شود برابر با $\frac{T}{12}$ است.

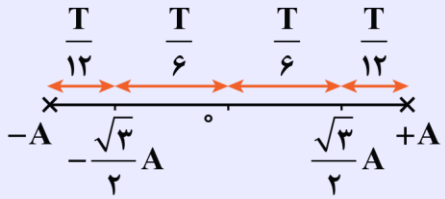




۲- مکان $\pm\frac{\sqrt{3}}{2}A$:

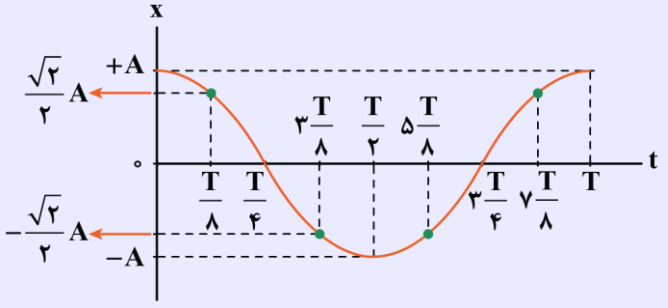
مدت‌زمانی که حد فاصل $\pm\frac{\sqrt{3}}{2}A$ تا انتهای مسیر طی می‌شود برابر با $\frac{T}{12}$ و مدت‌زمانی که حد فاصل $\pm\frac{\sqrt{3}}{2}A$ تا مرکز نوسان طی می‌شود برابر با $\frac{T}{6}$ است.

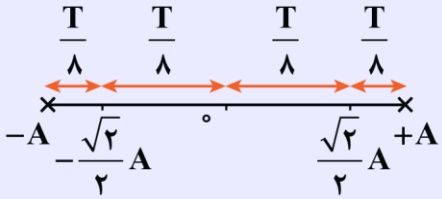




۳- مکان $\pm\frac{\sqrt{2}}{2}A$:

مدت‌زمانی که حد فاصل $\pm\frac{\sqrt{2}}{2}A$ تا انتهای مسیر طی می‌شود برابر با $\frac{T}{8}$ و مدت‌زمانی که حد فاصل $\pm\frac{\sqrt{2}}{2}A$ تا مرکز نوسان طی می‌شود برابر با $\frac{T}{8}$ است.





سنجش کلاد
www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshCloud

یه نمونهٔ باحال

یک نوسانگر هماهنگ ساده در لحظهٔ $t=۰/۳s$ برای اولین بار در مکان $x=-۲\sqrt{۲}cm$ قرار دارد. اگر این نوسانگر در یک دورهٔ تناوب مسافت $۱۶cm$ را طی کند:

۱- معادلهٔ مکان ـ زمان آن را به‌دست آورید.

$$\ell=۴A=۱۶cm\Rightarrow A=۴cm$$

$$x=-۲\sqrt{۲}cm\Rightarrow \frac{x}{A}=\frac{-۲\sqrt{۲}}{۴}=\frac{-\sqrt{۲}}{۲}$$

$$\Rightarrow x=-\frac{\sqrt{۲}}{۲}A$$

$$\Delta t=\frac{T}{۴}+\frac{T}{۸}=\frac{۳T}{۸}=۰/۳\Rightarrow T=۰/۸s$$

$$\omega=\frac{۲\pi}{T}=\frac{۲\pi}{۰/۸}=۲/۵\pi\frac{rad}{s}$$

$$x=A\cos\omega t\xrightarrow[\omega=۲/۵\pi\frac{rad}{s}]{A=۴cm=۰/۰۴m}x=۰/۰۴\cos ۲/۵\pi t$$

۲- در بازهٔ زمانی $t_۱=\frac{۲}{۱۵}s$ تا $t_۲=\frac{۷}{۱۵}s$ متحرک چه مسافتی را برحسب سانتی‌متر به‌صورت تندشونده حرکت می‌کند؟

$$\begin{cases}\frac{t_۱}{T}=\frac{\frac{۲}{۱۵}}{۰/۸}=\frac{۱}{۶}\Rightarrow t_۱=\frac{T}{۶}\\ \frac{t_۲}{T}=\frac{\frac{۷}{۱۵}}{۰/۸}=\frac{۷}{۱۲}\Rightarrow t_۲=\frac{۷T}{۱۲}=\frac{T}{۲}+\frac{T}{۱۲}\end{cases}$$

$$\ell=۲+(۴-۲\sqrt{۳})=۶-۲\sqrt{۳}cm$$

سامانهٔ جرم ـ فنر

اگر جسمی به جرم m را به یک فنر با ثابت k وصل کنیم و در شرایطی که نیروی اصطکاک و مقاومت هوا نباشد، جسم را از حالت تعادل خارج و رها کنیم، جسم حرکت هماهنگ ساده انجام می‌دهد.

دورهٔ تناوب نوسانگر جرم ـ فنر:

دورهٔ تناوب نوسانگر جرم ـ فنر از رابطهٔ زیر به‌دست می‌آید:

$$T=۲\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$$

T: دورهٔ تناوب (s) $\quad$ m: جرم نوسانگر (kg) $\quad$ k: ثابت فنر $(\frac{N}{m})$

www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshCloud

بنابراین رابطهٔ مقایسه‌ای دورهٔ سامانهٔ جرم ـ فنر به‌صورت زیر است:

$$\frac{T_۲}{T_۱}=\sqrt{\frac{m_۲}{m_۱}\times(\frac{k_۱}{k_۲})}$$

با توجه به رابطهٔ $f=\frac{۱}{T}$، بسامد نوسانگر جرم ـ فنر از رابطهٔ زیر به‌دست می‌آید:

$$f=\frac{۱}{۲\pi}\sqrt{\frac{k}{m}}$$

بنابراین رابطهٔ مقایسه‌ای آن به‌صورت زیر است:

$$\frac{f_۲}{f_۱}=\sqrt{\frac{k_۲}{k_۱}\times\frac{m_۱}{m_۲}}$$

از طرفی با توجه به رابطهٔ $\omega=\frac{۲\pi}{T}$، بسامد زاویه‌ای نوسانگر جرم ـ فنر از رابطهٔ زیر به‌دست می‌آید:

$$\omega=\sqrt{\frac{k}{m}}$$

بنابراین رابطهٔ مقایسه‌ای آن به‌صورت زیر است:

$$\frac{\omega_۲}{\omega_۱}=\sqrt{\frac{k_۲}{k_۱}\times\frac{m_۱}{m_۲}}$$

یه نمونهٔ باحال

یک نوسانگر جرم ـ فنر، از جسمی به جرم ۱/۵kg و فنری با ثابت $۴۸۶\frac{N}{m}$ تشکیل شده است. این نوسانگر در مدت‌زمان یک دقیقه چند نوسان کامل انجام می‌دهد؟ $(\pi=۳)$

پاسخ تشریحی:

$$T=۲\pi\sqrt{\frac{m}{k}}\Rightarrow T=۲\times۳\sqrt{\frac{۱/۵}{۴۸۶}}=۲\times۳\times\frac{۱}{۱۸}=\frac{۱}{۳}s$$

$$T=\frac{t}{n}\Rightarrow\frac{۱}{۳}=\frac{۶۰}{n}\Rightarrow n=۱۸۰$$

یه نمونهٔ باحال

دو نوسانگر جرم ـ فنر A و B در اختیار داریم. اگر جرم نوسانگر A، ۲۱ درصد بیش‌تر از جرم نوسانگر B و ثابت فنر A، ۳۶ درصد کم‌تر از ثابت فنر B باشد، بسامد نوسانگر A چند برابر بسامد نوسانگر B است؟

پاسخ تشریحی:

$$f=\frac{۱}{۲\pi}\sqrt{\frac{k}{m}}\Rightarrow\frac{f_A}{f_B}=\sqrt{\frac{k_A}{k_B}\times\frac{m_B}{m_A}}\xrightarrow[m_A=m_B+\frac{۲۱}{۱۰۰}m_B=\frac{۱۲۱}{۱۰۰}m_B]{k_A=k_B-\frac{۳۶}{۱۰۰}k_B=\frac{۶۴}{۱۰۰}k_B}$$

$$\frac{f_A}{f_B}=\sqrt{\frac{۶۴}{۱۰۰}\times\frac{۱۰۰}{۱۲۱}}=\sqrt{\frac{۶۴}{۱۲۱}}=\frac{۸}{۱۱}$$

سنجش کلاد
www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshCloud

۴۴- معادلهٔ حرکت هماهنگ سادهٔ یک نوسانگر در SI به‌صورت $x=0/08\cos 30t$ است. شتاب متوسط نوسانگر در بازهٔ زمانی $t_1=\frac{\pi}{60}s$ تا $t_2=\frac{7\pi}{60}s$ چند متر بر مربع ثانیه است؟

۱) صفر ۲) $-\frac{48}{\pi}$ ۳) $+\frac{48}{\pi}$ ۴) $+\frac{24}{\pi}$

پاسخ: گزینهٔ ۳ (متوسط ـ محاسباتی ـ استاندارد ـ صفحهٔ ۶۳ ـ ۱۲۰۳)

گام اول

دورهٔ نوسان (T) را به‌دست می‌آوریم:

$$x=\underset{A=0/08m}{0/08}\cos\underset{\omega=30\frac{rad}{s}}{30}t\Rightarrow\omega=\frac{2\pi}{T}=30\Rightarrow T=\frac{\pi}{15}s$$

گام دوم

لحظات t_1 و t_2 را به‌صورت مضربی از T مشخص می‌کنیم:

$$\frac{t_1}{T}=\frac{\frac{\pi}{60}}{\frac{\pi}{15}}=\frac{1}{4}\Rightarrow t_1=\frac{T}{4}$$

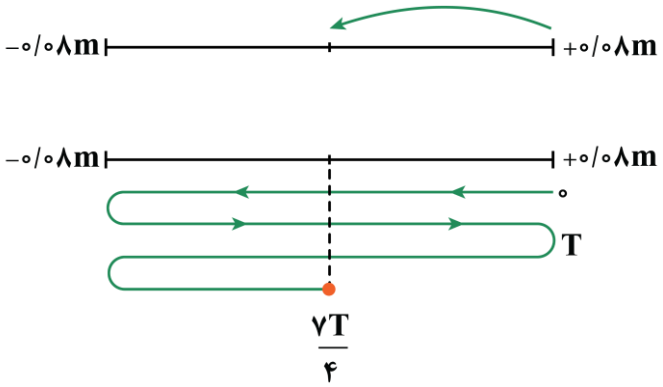
$$\frac{t_2}{T}=\frac{\frac{7\pi}{60}}{\frac{\pi}{15}}=\frac{7}{4}\Rightarrow t_2=\frac{7T}{4}$$

گام سوم

مکان نوسانگر و جهت حرکت آن را در هریک از لحظات t_1 و t_2 مشخص می‌کنیم:

در لحظهٔ $t_1=\frac{T}{4}$ نوسانگر در مرکز نوسان قرار دارد و در جهت منفی محور x درحال حرکت است $(v_1<0)$.

در لحظهٔ $t_2=\frac{7T}{4}$ نوسانگر در مرکز نوسان قرار دارد و در جهت مثبت محور x درحال حرکت است $(v_2>0)$.



تندی نوسانگر در مرکز نوسان، همان تندی بیشینه (v_{max}) می‌باشد و از رابطهٔ زیر به‌دست می‌آید:

$$v_{max}=A\omega=0/08\times 30=2/4\frac{m}{s}$$

گام آخر

شتاب متوسط (a_{av}) برابر است با:

$$a_{av}=\frac{\Delta v}{\Delta t}=\frac{v_2-v_1}{t_2-t_1}=\frac{+2/4-(-2/4)}{\frac{7\pi}{60}-\frac{\pi}{60}}=\frac{+4/8}{\frac{6\pi}{60}}=\frac{+48}{\pi}\frac{m}{s^2}$$

سنجش کلاد
www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshCloud

آزمون سراسری ریاضی تیرماه ۱۴۰۳

۵۶- معادلهٔ حرکت هماهنگ سادهٔ یک نوسانگر در SI به‌صورت $x = ۰/۰۴\cos ۵۰t$ است. سرعت نوسانگر در لحظهٔ $t = ۰/۰۷\pi s$ چند متر بر ثانیه است؟

۱) صفر ۲) ۱- ۳) ۱ ۴) ۲

پاسخ تشریحی:

روش اول: ابتدا با توجه به معادلهٔ حرکت، دورهٔ تناوب و دامنهٔ نوسانگر را به‌دست می‌آوریم:

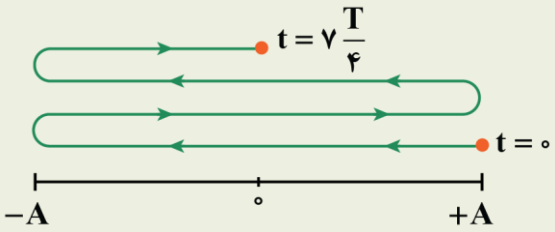
$$x = ۰/۰۴\cos ۵۰t \Rightarrow A = ۰/۰۴m \ , \ \omega = ۵۰\frac{rad}{s}$$

$$\omega = \frac{۲\pi}{T} \Rightarrow ۵۰ = \frac{۲\pi}{T} \Rightarrow T = ۰/۰۴\pi(s)$$

حال باید بررسی کنیم لحظهٔ موردنظر چه مضربی از دوره است:

$$\frac{t}{T} = \frac{۰/۰۷\pi}{۰/۰۴\pi} = \frac{۷}{۴} \Rightarrow t = ۷\frac{T}{۴}$$

روی پاره‌خط نوسان این لحظه را مشخص می‌کنیم:



چون در این لحظه نوسانگر در مرکز نوسان و در جهت محور x درحال حرکت است، پس سرعت آن بیشینه و از رابطهٔ زیر به‌دست می‌آید:

$$v_m = +A\omega$$

$$\Rightarrow v_m = +۰/۰۴ \times ۵۰ = +۲\frac{m}{s}$$

روش دوم: لحظهٔ موردنظر را در معادلهٔ مکان قرار می‌دهیم:

$$x = ۰/۰۴\cos ۵۰t \xrightarrow{t = ۰/۰۷\pi(s)} x = ۰/۰۴\cos(۵۰ \times ۰/۰۷\pi)$$

$$\Rightarrow x = ۰/۰۴\cos(\frac{۷\pi}{۲}) \Rightarrow x = ۰$$

چون متحرک در این لحظه در مرکز نوسان است، پس سرعت آن بیشینه است:

$$v_m = +A\omega \Rightarrow v_m = +۰/۰۴ \times ۵۰ = +۲\frac{m}{s}$$

پاسخ: گزینهٔ ۴

۴۵- جسمی به جرم m به فنری با ثابت k بسته شده و روی یک سطح افقی بدون اصطکاک با دورهٔ تناوب ۰/۳ ثانیه نوسان می‌کند. اگر وزنه‌ای به جرم ۷۰۰ گرم به آن اضافه کنیم، دورهٔ تناوب آن ۰/۱ ثانیه تغییر می‌کند. ثابت فنر چند نیوتون بر متر است؟ $(\pi^۲ = ۱۰)$

۱) ۳۰ ۲) ۳۰۰ ۳) ۴۰ ۴) ۴۰۰

پاسخ: گزینهٔ ۴ (متوسط ـ محاسباتی ـ استاندارد ـ صفحهٔ ۶۵ ـ ۱۲۰۳)

چون جرم وزنه زیاد شده است، طبق رابطهٔ دورهٔ تناوب برای سامانهٔ جرم ـ فنر $(T = ۲\pi\sqrt{\frac{m}{k}})$ دورهٔ تناوب افزایش می‌یابد:

$$T_۲ = T_۱ + ۰/۱ = ۰/۳ + ۰/۱ \Rightarrow T_۲ = ۰/۴s$$

سنجش کلاد
www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshCloud

$$T=۲\pi\sqrt{\frac{m}{k}}\Rightarrow\frac{T_۲}{T_۱}=\sqrt{\frac{m_۲}{m_۱}}\Rightarrow\frac{۰/۴}{۰/۳}=\sqrt{\frac{m_۱+۷۰۰}{m_۱}}$$

$$\Rightarrow\frac{۱۶}{۹}=\frac{m_۱+۷۰۰}{m_۱}\Rightarrow m_۱=۹۰۰g$$

دورهٔ تناوب در حالت اول: $T_۱=۲\pi\sqrt{\frac{m_۱}{k}}\Rightarrow ۰/۳=۲\pi\sqrt{\frac{۰/۹}{k}}$

$$\Rightarrow ۰/۰۹=\frac{۴\pi^۲\times ۰/۹}{k}\xrightarrow{\pi^۲=۱۰}k=۴۰۰\frac{N}{m}$$

۴۶- آونگی به طول L و جرم m بر روی سطح زمین حرکت هماهنگ ساده انجام می‌دهد. طول آونگ را چند درصد و چگونه تغییر دهیم تا در سطح سیاره‌ای که شعاع و جرم آن دو برابر زمین است، با همان دورهٔ تناوب قبلی نوسان کند؟

۱) ۵۰ درصد کاهش دهیم.
۲) ۵۰ درصد افزایش دهیم.
۳) ۲۵ درصد کاهش دهیم.
۴) ۲۵ درصد افزایش دهیم.

پاسخ: گزینهٔ ۱ (متوسط ـ محاسباتی ـ استاندارد ـ صفحهٔ ۶۸ ـ ۱۲۰۳)

دورهٔ تناوب آونگ ساده از رابطهٔ $T=۲\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$ و شتاب گرانش در سطح هر سیاره از رابطهٔ $g=\frac{GM}{r^۲}$ به‌دست می‌آید.

از ترکیب دو رابطهٔ بالا داریم:

$$T=۲\pi\sqrt{\frac{L}{\frac{GM}{r^۲}}}\Rightarrow T=۲\pi r\sqrt{\frac{L}{GM}}$$

$$\frac{T_{سیاره}}{T_{زمین}}=\frac{r_{سیاره}}{r_{زمین}}\sqrt{\frac{L_{سیاره}}{L_{زمین}}}\sqrt{\frac{M_{زمین}}{M_{سیاره}}}\Rightarrow ۱=۲\times\sqrt{\frac{L_{سیاره}}{L_{زمین}}}\times\sqrt{\frac{۱}{۲}}\Rightarrow\frac{L_{سیاره}}{L_{زمین}}=\frac{۱}{۲}$$

پس باید طول آونگ را ۵۰ درصد کاهش دهیم.

آونگ ساده

۱- دورهٔ تناوب یک آونگ ساده به طول L برابر است با:

$$T=۲\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$$

۲- برای مقایسهٔ دورهٔ تناوب دو آونگ ساده داریم:

$$T\propto\sqrt{\frac{L}{g}}\Rightarrow\frac{T_۲}{T_۱}=\sqrt{\frac{L_۲}{L_۱}\times\frac{g_۱}{g_۲}}$$

۳- گاهی سؤالات آونگ با سؤالات گرانش ترکیب می‌شوند. در این صورت باید شتاب گرانش را خودمان محاسبه کنیم.

$$\begin{cases}g=G\frac{M}{r^۲}\\T=۲\pi\sqrt{\frac{L}{g}}\end{cases}\Rightarrow T=۲\pi r\sqrt{\frac{L}{GM}}$$

در رابطهٔ فوق، r فاصله از مرکز سیاره و M جرم سیاره است.

سنجش کلاد
www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshCloud

۴۷- چند مورد از عبارت‌های زیر در مورد حرکت هماهنگ ساده الزاماً صحیح می‌باشد؟

الف ـ در بازهٔ زمانی‌ای که اندازهٔ نیروی خالص وارد بر نوسانگر افزایش می‌یابد، انرژی پتانسیل آن نیز رو به افزایش است.

ب ـ به‌دلیل متغیربودن شتاب این نوع حرکت، در هیچ دو بازهٔ زمانی با طول یکسان، جابه‌جایی‌ها یکسان نیست.

ج ـ هنگام تغییر جهت بردار شتاب نوسانگر، اندازهٔ تکانهٔ نوسانگر بیشینه است.

د ـ در بازهٔ زمانی دلخواه $\frac{T}{۶}$، بیش‌ترین تندی متوسط نوسانگر برابر با $\frac{۶A}{T}$ می‌باشد.

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

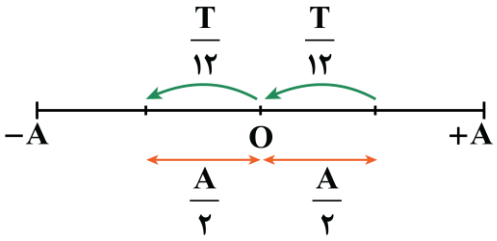
پاسخ: گزینهٔ ۳ (متوسط ـ مفهومی ـ استاندارد ـ صفحهٔ ۶۶ ـ ۱۲۰۳)

بررسی موارد:

الف

با دورشدن نوسانگر از مرکز نوسان و نزدیک‌شدن به نقاط بازگشت $(x=\pm A)$ نیروی خالص وارد بر نوسانگر افزایش می‌یابد و در این مدت انرژی پتانسیل نوسانگر نیز افزایش می‌یابد. (✓)

ب



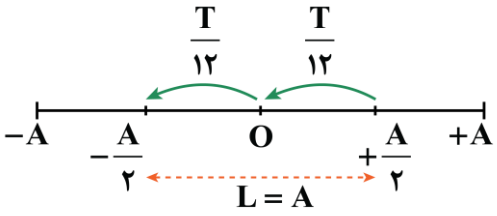
حرکت هماهنگ ساده حرکتی با شتاب متغیر است ولی الزامی ندارد که اندازهٔ جابه‌جایی در بازه‌های زمانی هم‌اندازه متفاوت باشند. مثلاً در شکل مقابل می‌بینیم که در بازه‌های زمانی یکسان $\frac{T}{۱۲}$، جابه‌جایی‌ها یکسان (برابر با $\frac{A}{۲}$) می‌باشد. (✗)

ج

بردار شتاب نوسانگر هنگام عبور از مرکز نوسان تغییر جهت می‌دهد و در این لحظه تندی نوسانگر بیشینه و درنتیجه تکانهٔ نوسانگر بیشینه است. (✓)

د

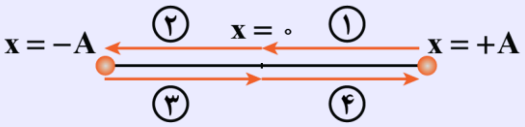
در بازهٔ زمانی دلخواه $\frac{T}{۶}$ بیش‌ترین تندی متوسط هنگامی رخ می‌دهد که حرکت نوسانگر به دو بازهٔ زمانی مساوی $(\frac{T}{۱۲})$ حول مرکز نوسان تقسیم شود و مطابق شکل مقابل داریم:



$$s_{av}=\frac{L}{\Delta t}=\frac{A}{\frac{T}{۶}}=\frac{۶A}{T}$$ (✓)

مسیر حرکت یک نوسان کامل هماهنگ ساده:

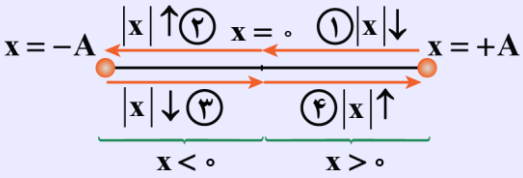
در حالت استاندارد در لحظهٔ شروع بررسی حرکت $(t=۰)$ نوسانگر در مکان $x=+A$ قرار دارد و پس از یک نوسان کامل یعنی در لحظهٔ $t=T$ نوسانگر مجدداً در این نقطه قرار می‌گیرد. حالا اگر کل مسیر حرکت را به ۴ بخش مساوی تقسیم کنیم، داریم:



سنجش کلاد
www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshCloud

• **بررسی مکان نوسانگر:**

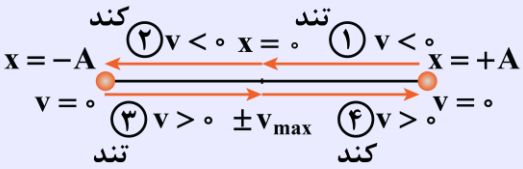
مکان نوسانگر در بخش‌های (۱) و (۴) مثبت و در بخش‌های (۲) و (۳) منفی است و مقدار بردار مکان در بخش‌های (۱) و (۳) درحال کاهش و در بخش‌های (۲) و (۴) درحال افزایش است.



• **بررسی سرعت نوسانگر:**

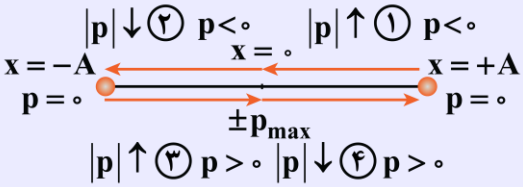
سرعت نوسانگر در بخش‌های (۱) و (۲) که به سمت چپ حرکت می‌کند، منفی و در بخش‌های (۳) و (۴) که به سمت راست حرکت می‌کند، مثبت است.

از طرفی مقدار سرعت در دو انتهای پاره‌خط (نقاط بازگشتی) صفر و در وسط پاره‌خط (مرکز نوسان) بیشینه است؛ بنابراین با نزدیک‌شدن به مرکز نوسان یعنی بخش‌های (۱) و (۳) حرکت تندشونده و با دورشدن از مرکز نوسان یعنی بخش‌های (۲) و (۴) حرکت کندشونده است.



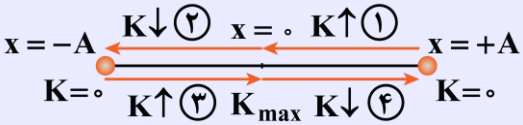
• **بررسی تکانهٔ نوسانگر:**

با توجه به این‌که تکانه هم‌جهت با سرعت بوده و مقدار آن نیز متناسب با مقدار سرعت است، درمی‌یابیم تکانهٔ نوسانگر در بخش‌های (۱) و (۲) منفی و در بخش‌های (۳) و (۴) مثبت است. از طرفی مقدار تکانه در بخش‌های (۱) و (۳) درحال افزایش و در بخش‌های (۲) و (۴) درحال کاهش است.



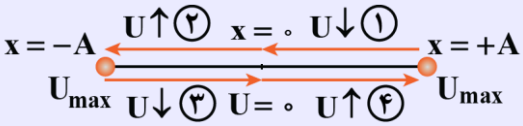
• **بررسی انرژی جنبشی نوسانگر:**

می‌دانیم انرژی جنبشی با مقدار سرعت نوسانگر متناسب است؛ بنابراین انرژی جنبشی در وسط پاره‌خط نوسان بیشینه و در دو انتهای پاره‌خط صفر است؛ درنتیجه با نزدیک‌شدن نوسانگر به مرکز نوسان یعنی بخش‌های (۱) و (۳) انرژی جنبشی افزایش و با دورشدن از مرکز نوسان یعنی بخش‌های (۲) و (۴) انرژی جنبشی کاهش می‌یابد.



• **بررسی انرژی پتانسیل نوسانگر:**

با توجه به این‌که در حرکت هماهنگ ساده، نیروهای ناپایستار مثل اصطکاک و مقاومت هوا نداریم، درمی‌یابیم انرژی مکانیکی پایسته (ثابت) بوده و تغییر انرژی پتانسیل قرینهٔ تغییر انرژی جنبشی است؛ بنابراین در بخش‌های (۱) و (۳) که انرژی جنبشی درحال افزایش است، انرژی پتانسیل درحال کاهش و در بخش‌های (۲) و (۴) که انرژی جنبشی درحال کاهش است، انرژی پتانسیل درحال افزایش است.

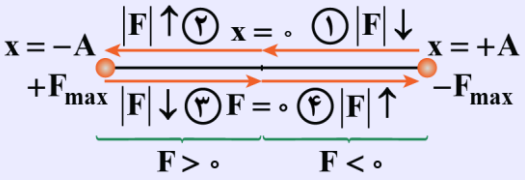


• در مرکز نوسان، انرژی پتانسیل صفر و انرژی جنبشی برابر با بیشینهٔ مقدار خود یعنی انرژی مکانیکی است. از طرفی در نقاط بازگشتی، انرژی جنبشی صفر و انرژی پتانسیل برابر با بیشینهٔ مقدار خود یعنی انرژی مکانیکی است.

سنجش کلاد
www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshCloud

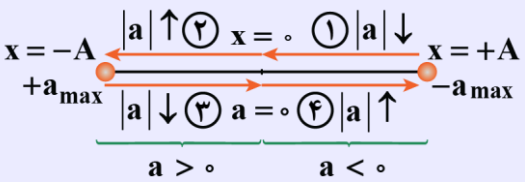
• **بررسی نیروی نوسانگر:**

می‌دانیم جهت نیروی وارد بر نوسانگر هماهنگ ساده همواره به‌طرف مرکز نوسان (نقطهٔ تعادل) است؛ بنابراین در مکان‌های مثبت یعنی بخش‌های (۱) و (۴) جهت نیرو به سمت چپ (منفی) و در مکان‌های منفی یعنی بخش‌های (۲) و (۳) جهت نیرو به سمت راست (مثبت) است. از طرفی با توجه به این‌که مرکز نوسان نقطهٔ تعادل است درمی‌یابیم مقدار نیرو در این نقطه صفر است و هرچه از مرکز به سمت نقاط بازگشتی برویم مقدار نیرو افزایش می‌یابد و در نقاط بازگشتی مقدار آن بیشینه است؛ بنابراین در بخش‌های (۱) و (۳) مقدار نیرو درحال کاهش و در بخش‌های (۲) و (۴) مقدار نیرو درحال افزایش است.



• **بررسی شتاب نوسانگر:**

با توجه به قانون دوم نیوتون می‌دانیم شتاب هم‌جهت با نیروی نوسانگر و متناسب با نیرو تغییر می‌کند. بنابراین شتاب نوسانگر در مرکز نوسان (نقطهٔ تعادل) صفر و در نقاط بازگشتی بیشینه است؛ درنتیجه با نزدیک‌شدن به مرکز نوسان مقدار شتاب کاهش و با دورشدن از مرکز نوسان مقدار شتاب افزایش می‌یابد. از طرفی در مکان‌های مثبت یعنی بخش‌های (۱) و (۴) شتاب منفی و در مکان‌های منفی یعنی بخش‌های (۲) و (۳) شتاب مثبت است.



جمع‌بندی

جدول زیر، کار رو برات در میاره!

مقدار کمیت / محل	x, a, F, U	v, p, K
مرکز نوسان	صفر	بیشینه
نقاط بازگشتی	بیشینه	صفر
نزدیک‌شدن به مرکز نوسان	کاهش	افزایش
دورشدن از مرکز نوسان	افزایش	کاهش

• وقتی نوسانگر از مرکز نوسان عبور می‌کند، جهت بردارهای مکان، نیرو و شتاب تغییر می‌کند. از طرفی در نقاط بازگشتی جهت بردارهای سرعت و تکانه تغییر می‌کند.

• در یک دورهٔ تناوب مکان، سرعت، تکانه، نیرو، شتاب، انرژی جنبشی و انرژی پتانسیل دو بار صفر و دو بار بیشینه می‌شوند.

۴۸- مسافت طی‌شده توسط یک نوسانگر روی سطح افقی در هر دورهٔ تناوب آن برابر ۱۶cm است. اگر شتاب نوسانگر در یکی از نقاط بازگشتی π^2 متر بر مربع ثانیه باشد، در لحظه‌ای که از نقطهٔ تعادل عبور می‌کند، تندی نوسانگر چند متر بر ثانیه است؟

۱) $\frac{\pi}{4}$ ۲) $\frac{\pi}{5}$ ۳) 4π ۴) 5π

www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshCloud

پاسخ: گزینهٔ ۲ (متوسط ـ محاسباتی ـ استاندارد ـ صفحهٔ ۶۷ ـ ۱۲۰۳)

در هر دورهٔ تناوب، نوسانگر مسافتی به‌اندازهٔ $4A$ طی می‌کند؛ بنابراین دامنهٔ نوسان نوسانگر برابر $4cm$ است.

می‌دانیم بیشینهٔ شتاب در نقاط بازگشتی رخ می‌دهد، پس داریم:

$$a_{max} = A\omega^2 \Rightarrow \pi^2 = 0/04\omega^2 \Rightarrow \pi = 0/2\omega$$

$$\Rightarrow \omega = 5\pi(\frac{rad}{s})$$

پس بیشینهٔ تندی حرکت نوسانگر برابر است با:

$$v_{max} = A\omega \Rightarrow v_{max} = 0/04 \times 5\pi = 0/2\pi = \frac{\pi}{5}(\frac{m}{s})$$

درس‌نامه

بیشینهٔ هریک از کمیت‌های مربوط به نوسانگر از روابط زیر به‌دست می‌آید:

مکان بیشینه: $x_{max} = A$

تندی بیشینه: $v_{max} = A\omega$

شتاب بیشینه: $a_{max} = A\omega^2$

نیروی بیشینه: $F_{max} = mA\omega^2$

تکانهٔ بیشینه: $p_{max} = mv_{max} = mA\omega$

آزمون سراسری تجربی تیرماه ۱۴۰۴

۵۹- ذره‌ای حرکت نوسانی ساده با دامنهٔ $7mm$ انجام می‌دهد. اگر بیش‌ترین تندی این ذره $4/4 \frac{m}{s}$ باشد، دورهٔ تناوب حرکت چند واحد SI است؟ $(\pi = \frac{22}{7})$

۱) ۰/۱۲ ۲) ۰/۱۱ ۳) ۰/۰۲ ۴) ۰/۰۱

پاسخ تشریحی:

طبق دو رابطهٔ $v_{max} = A\omega$ و $\omega = \frac{2\pi}{T}$ می‌توانیم بنویسیم:

$$v_{max} = A\omega = A \times \frac{2\pi}{T} \Rightarrow T = \frac{A \times 2\pi}{v_{max}} = \frac{7 \times 10^{-3} \times 2 \times \frac{22}{7}}{4/4} = 10^{-2}s = 0/01s$$

پاسخ: گزینهٔ ۴

۴۹- نوسانگری در راستای محور x و حول مبدأ محور، حرکت هماهنگ ساده انجام می‌دهد. در بازهٔ زمانی که اندازهٔ بردار مکان نوسانگر درحال کاهش می‌باشد و سرعت آن در جهت محور x می‌باشد، چه تعداد از عبارت‌های زیر الزاماً صحیح است؟

الف ـ اندازهٔ شتاب نوسانگر درحال افزایش است.

ب ـ جهت نیروی خالص وارد بر نوسانگر به سمت مبدأ محور می‌باشد.

ج ـ انرژی پتانسیل نوسانگر کم‌تر از انرژی جنبشی آن می‌باشد.

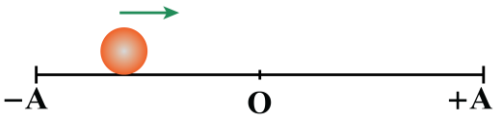
د ـ اندازهٔ تکانهٔ نوسانگر درحال افزایش می‌باشد.

۱) ۴ ۲) ۳ ۳) ۲ ۴) ۱

سنجش کلاد
www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshCloud

پاسخ: گزینهٔ ۳ (متوسط ـ مفهومی ـ استاندارد ـ صفحهٔ ۶۶ ـ ۱۲۰۳)

با توجه به شکل مقابل می‌توان گفت نوسانگر در مکان‌های منفی $(x<0)$ قرار دارد و به سمت راست $(v>0)$ درحال حرکت می‌باشد:



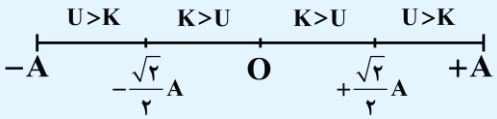
الف) هنگامی که نوسانگر به سمت مرکز نوسان حرکت می‌کند، اندازهٔ شتاب آن رو به کاهش می‌باشد. (✗)

ب) همواره جهت نیروی خالص وارد بر نوسانگر به سمت مرکز نوسان (مبدأ محور) می‌باشد. (✓)

ج) در حرکت به سمت مرکز نوسان، انرژی جنبشی افزایش و انرژی پتانسیل کاهش می‌یابد، ولی در اینجا نمی‌توان به‌طور قطعی گفت که انرژی جنبشی بیش‌تر از انرژی پتانسیل می‌باشد. (✗)

راهنمای زرنگ‌بازی

در مکان $x=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}A$، U و K برابر می‌باشند و در سایر نقاط مقایسهٔ K و U مطابق شکل زیر است:



د) چون نوسانگر به مرکز نوسان نزدیک می‌شود و در این حالت حرکت تندشونده می‌باشد، اندازهٔ تکانه نیز افزایش می‌یابد. (✓)

۵۰- نوسانگری روی پاره‌خطی به طول ۱۸cm حرکت هماهنگ ساده انجام می‌دهد و به‌طور منظم در هر ۹ ثانیه، ۳ بار انرژی پتانسیل آن صفر می‌شود. اگر جرم نوسانگر ۲۰۰ گرم باشد، بزرگی نیروی خالص وارد بر آن در $t=1s$ چند نیوتون است؟ $(\pi^2=10)$

۱) ۰/۰۱ ۲) ۰/۱ ۳) ۰/۰۵ ۴) ۰/۰۲

پاسخ: گزینهٔ ۱ (متوسط ـ محاسباتی ـ استاندارد ـ صفحهٔ ۶۷ ـ ۱۲۰۳)

ابتدا باید بفهمیم دورهٔ حرکت چند بوده است. طبق این جمله که در هر ۹s، ۳ بار انرژی پتانسیل نوسانگر صفر می‌شود و ما می‌دانیم در هر نوسان کامل ۲ بار این اتفاق می‌افتد، درمی‌یابیم در طی ۹s، ۱/۵ نوسان انجام شده است.

$$1/5T=9s\Rightarrow T=6s$$

$$x=A\cos\omega t=A\cos\frac{2\pi}{T}t\xrightarrow[T=6s]{2A=18\Rightarrow A=9cm}x=0/09\cos\frac{2\pi}{6}t=0/09\cos\frac{\pi}{3}t$$

سپس مکان نوسانگر در $t=1s$ را به‌دست می‌آوریم:

$$x=0/09\cos(\frac{\pi}{3}\times1)=0/045m$$

درنهایت بزرگی نیروی خالص وارد بر نوسانگر را حساب می‌کنیم:

$$|F|=m\omega^2|x|\xrightarrow{\omega=\frac{\pi}{3}(\frac{rad}{s})}|F|=0/2\times(\frac{\pi}{3})^2\times0/045=0/2\times\frac{10}{9}\times0/045=0/01N$$

۵۱- در یک سامانهٔ جرم ـ فنر روی سطح افقی بدون اصطکاک، جرم نوسانگر ۴۰g و معادلهٔ مکان ـ زمان آن در SI به‌صورت $x=0/2\cos100t$ است. در لحظه‌ای که اختلاف انرژی جنبشی نوسانگر و انرژی پتانسیل کشسانی آن ۲ ژول می‌باشد، تکانهٔ نوسانگر چند واحد SI می‌تواند باشد؟

۱) $\frac{\sqrt{10}}{10}$ ۲) $\frac{\sqrt{6}}{5}$ ۳) $\frac{1}{5}$ ۴) $\frac{2\sqrt{6}}{5}$

سنجش کلاد
www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshCloud

پاسخ: گزینهٔ ۲ (سخت ـ محاسباتی ـ زمان‌بَر ـ صفحهٔ ۶۶ ـ ۱۲۰۳)

کام اول

ابتدا انرژی مکانیکی (E) نوسانگر را به‌دست می‌آوریم:

$$E = K_{max} = \frac{1}{2}mA^2\omega^2 \xrightarrow{m=0/04kg,\ \omega=100(\frac{rad}{s}),\ A=0/2m} E = K_{max} = \frac{1}{2}\times\frac{4}{100}\times(\frac{2}{10})^2\times(100)^2 = 8J$$

کام دوم

انرژی مکانیکی نوسانگر با مجموع انرژی جنبشی (K) و پتانسیل (U) برابر است و همچنین اختلاف K و U، ۲ ژول است؛ پس داریم:

$$\begin{cases} K+U=8 \\ |K-U|=2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} K+U=8 \\ K-U=2 \end{cases}$$

$$2K=10 \Rightarrow K=5J\ ,\ U=3J$$

یا

$$\begin{cases} K+U=8 \\ U-K=2 \end{cases}$$

$$2U=10 \Rightarrow U=5J\ ,\ K=3J$$

کام آخر

رابطهٔ تکانه (p) و انرژی جنبشی (K) به‌صورت زیر است:

$$K=\frac{p^2}{2m}$$

پس می‌توان نوشت:

$$\text{I حالت: } K=\frac{p^2}{2m} \xrightarrow{K=5J\ ,\ m=0/04kg} 5=\frac{p^2}{\frac{8}{100}} \Rightarrow p^2=\frac{4}{10} \Rightarrow p=\frac{2\sqrt{10}}{10}=\frac{\sqrt{10}}{5}\frac{kg.m}{s}$$

$$\text{II حالت: } K=\frac{p^2}{2m} \xrightarrow{K=3J\ ,\ m=0/04kg} 3=\frac{p^2}{\frac{8}{100}} \Rightarrow p^2=\frac{24}{100} \Rightarrow p=\frac{2\sqrt{6}}{10}=\frac{\sqrt{6}}{5}\frac{kg.m}{s}$$

انرژی در حرکت هماهنگ ساده

انرژی پتانسیل نوسانگر هماهنگ ساده:

در نقاط بازگشت $(x=\pm A)$ بیشینه و در مرکز نوسان صفر است.

U_{max} ×——— $U=0$ ———× U_{max}

انرژی جنبشی نوسانگر هماهنگ ساده:

در مرکز نوسان بیشینه و در نقاط بازگشتی $(x=\pm A)$ صفر است.

$K=0$ ×——— K_{max} ———× $K=0$

رابطهٔ انرژی جنبشی به‌صورت زیر است:

$$K=\frac{1}{2}mv^2$$

برحسب تکانه (p): $K=\frac{p^2}{2m}$, $K=\frac{1}{2}pv$

K: انرژی جنبشی (J) m: جرم (kg) v: تندی $(\frac{m}{s})$

سنجش کلاد
www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshCloud

بنابراین بیشینهٔ انرژی جنبشی نوسانگر برابر است با:

$$K_m = \frac{1}{2}mv_m^2 \qquad K_m = \frac{p_m^2}{2m}$$

v_m : بیشینهٔ تندی p_m : بیشینهٔ تکانه

انرژی مکانیکی نوسانگر هماهنگ ساده:

انرژی مکانیکی (E) برابر است با مجموع انرژی‌های جنبشی (K) و پتانسیل (U):

$$E = K + U$$

با توجه به این‌که در حرکت هماهنگ ساده نیروهای اتلافی مثل اصطکاک و مقاومت هوا نداریم، طبق اصل پایستگی انرژی مکانیکی، مقدار انرژی مکانیکی در تمام نقاط مسیر، یکسان است. بنابراین داریم:

مرکز نوسان $(x=0)$: $E = K + \overset{0}{\cancel{U}} \Rightarrow E = K_m$

نقاط بازگشتی $(x=\pm A)$: $E = \overset{0}{\cancel{K}} + U \Rightarrow E = U_m$

طبق روابط بالا درمی‌یابیم:

۱- انرژی جنبشی نوسانگر در مرکز نوسان همان انرژی مکانیکی نوسانگر است.

۲- انرژی پتانسیل نوسانگر در نقاط بازگشتی $(x=\pm A)$ همان انرژی مکانیکی نوسانگر است.

روابط انرژی مکانیکی نوسانگر هماهنگ ساده:

۱- رابطهٔ انرژی مکانیکی با استفاده از ثابت فنر:

$$E = \frac{1}{2}kA^2$$

۲- رابطهٔ انرژی مکانیکی با استفاده از بسامد زاویه‌ای $(k = m\omega^2)$:

$$E = \frac{1}{2}m\omega^2 A^2$$

۳- رابطهٔ انرژی مکانیکی با بسامد $(\omega = 2\pi f)$:

$$E = 2\pi^2 m f^2 A^2$$

۴- رابطهٔ انرژی مکانیکی با تندی بیشینه $(K_m = \frac{1}{2}mv_m^2)$:

$$E = \frac{1}{2}mv_m^2$$

یه نمونهٔ باحال

یک نوسانگر جرم ـ فنر از جسمی به جرم $2kg$ و یک فنر با ثابت $800\frac{N}{m}$ و طول ۲۰ سانتی‌متر تشکیل شده است. اگر طول فنر را به ۲۵ سانتی‌متر برسانیم، سپس جسم را رها کنیم تا شروع به نوسان کند، در وسط پاره‌خط نوسان، تکانهٔ جسم چند واحد SI است؟

پاسخ تشریحی:

$$E = \frac{1}{2}kA^2 \Rightarrow E = \frac{1}{2}\times 800\times(5\times10^{-2})^2 = 400\times25\times10^{-4} = 1J$$

وسط پاره‌خط: $K_{max} = \frac{p_{max}^2}{2m} \Rightarrow 1 = \frac{p_{max}^2}{2\times2} \Rightarrow p_{max}^2 = 4 \Rightarrow p_{max} = 2\frac{kg.m}{s}$

یه نمونهٔ باحال

نوسانگری با دورهٔ $0/5s$ حرکت هماهنگ ساده انجام می‌دهد. اگر در هر ثانیه این نوسانگر مسافت $16cm$ را طی کند و جرم آن $1kg$ باشد؛

۱- بیشینهٔ انرژی پتانسیل نوسانگر را حساب کنید. $(\pi = \sqrt{10})$

سنجش کلاد
www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshCloud

$$f=\frac{۱}{T}=\frac{۱}{۰/۵}=۲Hz$$

$$۱s=۲T\Rightarrow \ell=۸A=۱۶cm\Rightarrow A=۲cm=۲\times۱۰^{-۲}m$$

$$U_{max}=E=۲\pi^{۲}mf^{۲}A^{۲}\Rightarrow U_{max}=۲\times۱۰\times۱\times(۲)^{۲}\times(۲\times۱۰^{-۲})^{۲}=۳۲۰\times۱۰^{-۴}J$$

$$\Rightarrow U_{max}=۳۲mJ$$

۲- در نقطه‌ای که انرژی پتانسیل نوسانگر ۱۲mJ است. تندی آن چند $\frac{cm}{s}$ است؟

$$E=K+U\xrightarrow[U=۱۲mJ]{E=۳۲mJ}۳۲=K+۱۲\Rightarrow K=۲۰mJ=۰/۰۲J$$

$$K=\frac{۱}{۲}mv^{۲}\xrightarrow[m=۱kg]{K=۰/۰۲J}۰/۰۲=\frac{۱}{۲}\times۱\times v^{۲}\Rightarrow v^{۲}=۰/۰۴\Rightarrow v=۰/۲\frac{m}{s}=۲۰\frac{cm}{s}$$

آزمون سراسری تجربی خارج از کشور تیرماه ۱۴۰۴

۵۹- معادلهٔ حرکت هماهنگ سادهٔ یک نوسانگر در SI به‌صورت $x=۰/۰۴\cos ۲۰\pi t$ است. در لحظه‌ای که انرژی مکانیکی نوسانگر ۲ برابر انرژی جنبشی آن است، تندی نوسانگر چند متر بر ثانیه است؟

۱) $\frac{\sqrt{۲}\pi}{۵}$ ۲) $\frac{۲\sqrt{۲}\pi}{۵}$ ۳) $\frac{۴\pi}{۵}$ ۴) $\frac{۸\pi}{۵}$

پاسخ تشریحی:

گام اول: می‌دانیم در حرکت هماهنگ ساده، انرژی مکانیکی نوسانگر پایسته است؛ بنابراین داریم:

$$\frac{E}{K}=۲\xrightarrow{E=\frac{۱}{۲}mv_{max}^{۲}\ ,\ K=\frac{۱}{۲}mv^{۲}}(\frac{v_{max}}{v})^{۲}=۲\Rightarrow\frac{v_{max}}{v}=\sqrt{۲}\quad(*)$$

گام دوم: به کمک اطلاعات معادلهٔ مکان ـ زمان داریم:

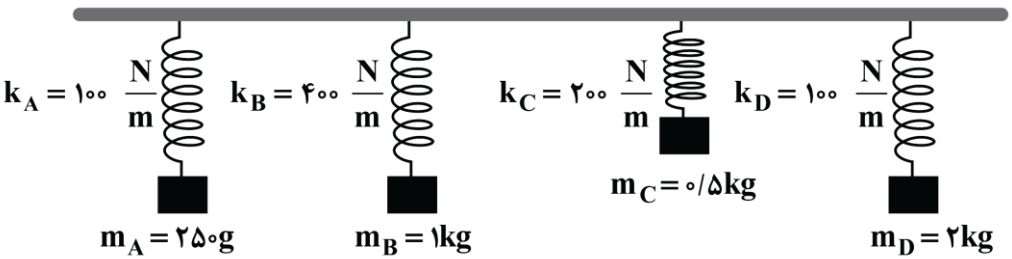
$$\left.\begin{array}{l}x=A\cos(\omega t)\\x=۰/۰۴\cos(۲۰\pi t)\end{array}\right\}\Rightarrow A=۰/۰۴m\ ,\ \omega=۲۰\pi\frac{rad}{s}$$

$$\xrightarrow{v_{max}=A\omega}v_{max}=۰/۰۴\times۲۰\pi=۰/۸\pi\frac{m}{s}\xrightarrow{(*)}\frac{۰/۸\pi}{v}=\sqrt{۲}\Rightarrow v=\frac{۰/۸\pi}{\sqrt{۲}}=۰/۴\sqrt{۲}\pi\frac{m}{s}$$

$$\Rightarrow v=\frac{۲\sqrt{۲}\pi}{۵}\frac{m}{s}$$

پاسخ: گزینهٔ ۲

۵۲- در شکل زیر، اگر سامانهٔ جرم ـ فنر **B** با بسامد طبیعی خود شروع به نوسان کند، کدام‌یک از سامانه‌های جرم ـ فنر دیگر، دچار تشدید می‌شوند؟



۱) A و D
۲) A و C
۳) B و D
۴) B و C

سنجش کلاد
www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshCloud

پاسخ: گزینهٔ ۲ (متوسط ـ مفهومی/محاسباتی ـ استاندارد ـ صفحهٔ ۶۸ ـ ۱۲۰۳)

کام اول

ابتدا به کمک رابطهٔ $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$، بسامد زاویه‌ای طبیعی هر یک از سامانه‌های جرم ـ فنر را به‌دست می‌آوریم:

$$\omega_A = \sqrt{\frac{k_A}{m_A}} = \sqrt{\frac{۱۰۰}{۰/۲۵}} = \sqrt{۴۰۰} = ۲۰\frac{rad}{s}$$

$$\omega_B = \sqrt{\frac{k_B}{m_B}} = \sqrt{\frac{۴۰۰}{۱}} = ۲۰\frac{rad}{s}$$

$$\omega_C = \sqrt{\frac{k_C}{m_C}} = \sqrt{\frac{۲۰۰}{۰/۵}} = \sqrt{۴۰۰} = ۲۰\frac{rad}{s}$$

$$\omega_D = \sqrt{\frac{k_D}{m_D}} = \sqrt{\frac{۱۰۰}{۲}} = ۵\sqrt{۲}\frac{rad}{s}$$

کام آخر

سامانهٔ جرم ـ فنر B با بسامد زاویه‌ای $\omega_B = ۲۰\frac{rad}{s}$ شروع به نوسان می‌کند و سامانه‌های جرم ـ فنری که بسامد زاویه‌ای طبیعی آن‌ها با ω_B برابر باشد، دچار تشدید می‌شوند. پس سامانه‌های جرم ـ فنر A و C دچار تشدید می‌شوند.

تشدید

۱- بسامد طبیعی:

اگر یک سامانهٔ جرم ـ فنر یا یک آونگ ساده را از وضع تعادل خارج کرده و رها کنیم با بسامد معیّنی شروع به نوسان می‌کند که به بسامد این حرکت، بسامد طبیعی گویند و با $f_۰$ نشان داده می‌شود.

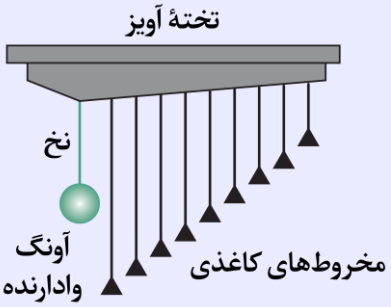
۲- نوسان واداشته:

اگر به‌وسیلهٔ اعمال یک نیروی خارجی، نوسانگرهایی مانند سامانهٔ جرم ـ فنر یا آونگ ساده را وادار به حرکت کنیم، حرکت انجام‌شده را نوسان واداشته می‌گویند و بسامد آن را با f_d نشان می‌دهند.

۳- تشدید:

اگر به یک نوسانگر، یک نیروی خارجی دوره‌ای وارد شود و بسامد نیروی خارجی (f_d) برابر بسامد طبیعی نوسانگر $(f_۰)$ باشد، دامنهٔ نوسان‌های جسم، بزرگ و بزرگ‌تر می‌شود که به این پدیده، تشدید یا رزونانس می‌گویند.

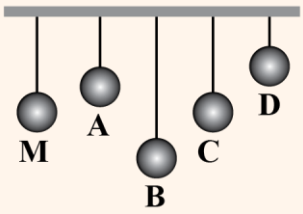
برای بررسی پدیدهٔ تشدید از وسیلهٔ آزمایشگاهی زیر استفاده می‌شود که به آن آونگ‌های **بارتون** می‌گویند. در این آزمایش اگر آونگ وادارنده شروع به نوسان کند، انرژی آن از طریق نخ به سایر آونگ‌ها منتقل شده و همگی شروع به حرکت می‌کنند اما آونگی که با آونگ وادارنده هم‌طول است با دامنهٔ بیش‌تری حرکت خواهد کرد، زیرا طبق رابطهٔ $\omega = \sqrt{\frac{g}{L}}$ آونگ‌های هم‌طول دارای بسامد و بسامد زاویه‌ای یکسانی هستند و درنتیجه در آونگی که با آونگ وادارنده هم‌طول است، تشدید روی می‌دهد.



سنجش کلاد
www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshCloud

یه نمونهٔ باحال

طبق شکل زیر، چند آونگ را از سیم افقی آویخته‌ایم. با به نوسان درآوردن آونگ M، کدام آونگ با دامنهٔ بیش‌تری به نوسان واداشته می‌شود؟



۱) A
۲) B
۳) C
۴) D

پاسخ تشریحی:

با نوسان گلولهٔ M، گلوله‌ای دچار تشدید می‌شود که هم‌طول آونگ M باشد، زیرا در این صورت بسامدهای یکسان خواهند داشت، بنابراین آونگ C دچار تشدید می‌شود.

پاسخ: گزینهٔ ۳

ماز

۵۳- کدام موارد در مورد امواج درست هستند؟

الف ـ به وسیلهٔ موج طولی پیش‌رونده می‌توان انرژی را از یک سر فنر به سر دیگر آن انتقال داد ولی با موج عرضی نمی‌توان این کار را کرد.

ب ـ امواج مکانیکی و امواج الکترومغناطیسی مشخصه‌های یکسانی دارند و رفتار آن‌ها از قاعده‌های کلی مربوط به پدیده‌های موجی پیروی می‌کند.

ج ـ تندی انتشار موج سطحی روی آب‌های کم‌عمق، به عمق آب بستگی دارد ولی به بسامد چشمهٔ موج بستگی ندارد.

د ـ بیشینهٔ تندی تمام ذرات محیطی که موج در آن منتشر می‌شود یکسان است که به آن تندی انتشار موج گفته می‌شود.

۱) «الف» و «ج» ۲) «ب» و «ج» ۳) «ب» و «د» ۴) «الف» و «د»

پاسخ: گزینهٔ ۲ (آسان ـ حفظی/مفهومی ـ استاندارد ـ صفحهٔ ۷۱ ـ ۱۲۰۳)

عبارت‌های «ب» و «ج» درست هستند.

بررسی موارد نادرست:

الف) در موج پیش‌روندهٔ عرضی نیز انرژی می‌تواند از یک سر فنر به سر دیگر آن منتقل شود. (✘)

د) تندی انتشار موج به مسافتی گفته می‌شود که موج (جبههٔ موج) در واحد زمان طی می‌کند و این تندی با تندی نوسان ذرات محیط که حرکت نوسانی انجام می‌دهند متفاوت است. (✘)

انواع موج از نظر منشأ

۱- مکانیکی: برای انتشار خود نیاز به محیط مادی دارد و در خلأ منتشر نمی‌شود.

مثال: موج‌های روی سطح آب، موج صوتی

وجود محیط کشسان برای موج‌های مکانیکی لازم است.

۲- الکترومغناطیسی: امواجی که برای انتشار نیاز به محیط مادی ندارند و در خلأ هم منتشر می‌شوند.

مثال: نور مرئی، موج‌های رادیویی و تلویزیونی، پرتوهای X و...

امواج الکترومغناطیسی اصلاً نیازی به محیط مادی ندارند که بخواهد کشسان یا غیرکشسان باشند، آنچه مهم است پیوستگی نواحی مختلف محیط است.

شباهت: مشخصه‌های یکسانی دارند و رفتار آن‌ها از قاعده‌های کلی مربوط به امواج پیروی می‌کند.

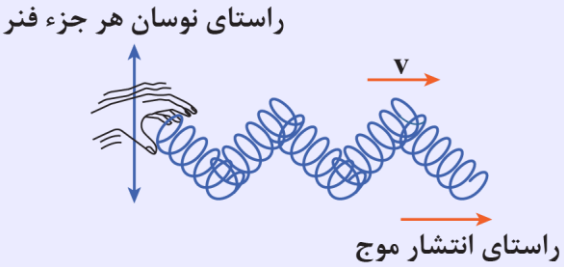
تفاوت: منشأ امواج مکانیکی و الکترومغناطیسی متفاوت است.

سنجش کلاد
www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshCloud

انواع موج از نظر شکل

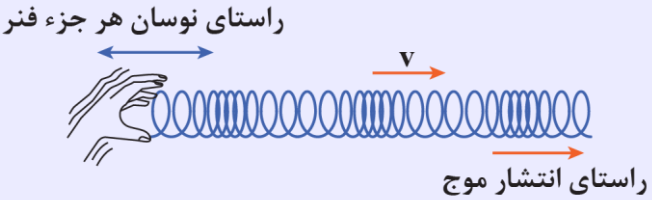
۱- عرضی: جابه‌جایی هر جزء نوسان‌کننده‌ای از محیط، عمود بر جهت حرکت موج است.

مثال: امواج الکترومغناطیسی، موج عرضی در طناب و فنر



۲- طولی: جابه‌جایی هر جزء نوسان‌کننده‌ای از محیط در راستای حرکت موج است.

مثال: موج صوتی



تمرین

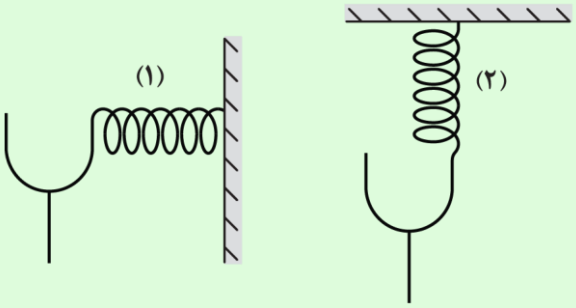
در شکل زیر با ارتعاش دیاپازون در فنر (۱) و (۲) به‌ترتیب، چه نوع موجی تولید می‌شود؟

۱) طولی، عرضی

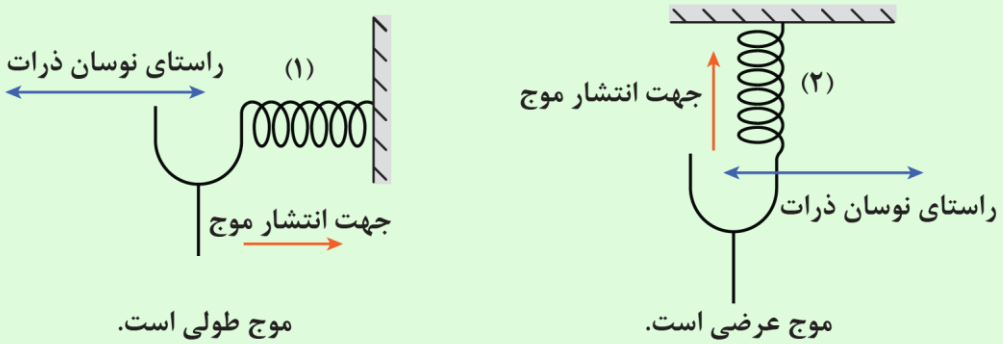
۲) عرضی، طولی

۳) طولی، طولی

۴) عرضی، عرضی



پاسخ تشریحی:



پاسخ: گزینهٔ ۱

در مورد مشخصه‌های امواج و مفاهیم اولیهٔ مرتبط با آن‌ها به نکات زیر توجه کنید

۱- امواج پیش‌رونده (طولی یا عرضی) در یک محیط، پیش‌رَوی می‌کنند و باعث انتقال انرژی می‌شوند. دقت کنید که موج، در محیط پیش‌رَوی می‌کند، ولی ذره‌های محیط فقط در جای خود نوسان می‌کنند.

۲- تندی انتشار امواج به ویژگی‌های محیط انتشار مرتبط است؛ بنابراین با تغییر محیط انتشار یک موج می‌توان تندی انتشار آن را تغییر داد.

۳- دامنه، دورهٔ تناوب و بسامد مربوط به یک موج؛ همگی وابسته به چشمهٔ تولیدکنندهٔ موج هستند و ربطی به محیط انتشار ندارند. در ادامه تعریف هریک از کمیت‌ها را مرور می‌کنیم.

الف) دامنهٔ موج (A): بیش‌ترین فاصلهٔ یک ذره از مکان تعادل آن است. به عبارتی هنگام عبور موج، هریک از ذرات محیط حرکت نوسانی انجام می‌دهند که دامنهٔ این نوسان‌ها همان دامنهٔ موج است.

سنجش کلاد
www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshCloud

ب) دورهٔ تناوب (T): مدت‌زمانی است که طول می‌کشد تا هر ذره از محیط، یک نوسان کامل انجام دهد.

$$T = \frac{t}{N}$$

t: مدت‌زمان N: تعداد نوسانات کامل

پ) بسامد (f): تعداد نوسان‌های کاملی است که هر ذره از محیط در یک ثانیه انجام می‌دهد. بسامد و دورهٔ تناوب عکس یکدیگر هستند.

$$f = \frac{N}{t} = \frac{۱}{T}$$

۴- تا این‌جا دیدیم که سرعت انتشار موج را محیط آن تعیین می‌کند و دامنه، بسامد و دورهٔ آن را چشمهٔ موج مشخص می‌کند. کمیت دیگر مربوط به موج که هم به محیط و هم به چشمهٔ موج بستگی دارد، طول موج است. طول موج برابر مسافتی است که موج در مدت یک دورهٔ تناوب پیش‌رَوی می‌کند و از رابطهٔ زیر به‌دست می‌آید:

طول موج: $\lambda = v\ T = \frac{v}{f}$ (v ← وابسته به محیط، f ← وابسته به چشمه، T ↓ وابسته به چشمه)

۵۴- یک نوسان‌ساز، موج‌هایی دوره‌ای در یک ریسمان کشیده‌شده ایجاد می‌کند. اگر بسامد نوسان‌ساز افزایش یابد، تندی انتشار موج، دورهٔ تناوب موج و طول موج به‌ترتیب چه تغییری می‌کنند؟

۱) ثابت می‌ماند، کاهش می‌یابد و افزایش می‌یابد.
۲) کاهش می‌یابد، کاهش می‌یابد و ثابت می‌ماند.
۳) ثابت می‌ماند، کاهش می‌یابد و کاهش می‌یابد.
۴) افزایش می‌یابد، ثابت می‌ماند و کاهش می‌یابد.

پاسخ: گزینهٔ ۳ (آسان ـ مفهومی ـ سریع ـ صفحهٔ ۷۱ ـ ۱۲۰۳)

تندی انتشار موج به محیط انتشار موج بستگی دارد، پس تغییر بسامد تأثیری روی سرعت انتشار موج ندارد و ثابت می‌ماند. همچنین طبق رابطهٔ $T = \frac{۱}{f}$ با افزایش بسامد، دورهٔ تناوب کاهش می‌یابد و با توجه به رابطهٔ $\lambda = \frac{v}{f}$، با ثابت‌بودن سرعت و افزایش بسامد، طول موج کاهش می‌یابد.

۵۵- چشمهٔ موجی با بسامد ۱۰Hz در یک محیط که تندی انتشار موج در آن $۱\frac{m}{s}$ است، نوسان‌های عرضی ایجاد می‌کند. فاصلهٔ بین یک قله و درهٔ متوالی چند سانتی‌متر است؟

۱) ۵ ۲) ۱۰ ۳) ۱۵ ۴) ۲/۵

پاسخ: گزینهٔ ۱ (آسان ـ محاسباتی ـ سریع ـ صفحهٔ ۷۱ ـ ۱۲۰۳)

ابتدا طول موج را از رابطهٔ $v = \lambda f$ به‌دست می‌آوریم:

$$v = \lambda f \Rightarrow ۱۰۰\frac{cm}{s} = \lambda \times ۱۰ \Rightarrow \lambda = ۱۰cm$$

فاصلهٔ میان یک قله و درهٔ متوالی برابر $\frac{\lambda}{۲}$ یعنی ۵cm می‌باشد.

۵۶- اختلاف پتانسیل الکتریکی بین دو صفحهٔ یک خازن را از ۲۸V به ۴۰V افزایش می‌دهیم. اگر با این کار ۱۵μC بر بار الکتریکی ذخیره‌شده در خازن افزوده شود، ظرفیت خازن چند میلی‌فاراد است؟

۱) ۱/۲۵ ۲) $۱/۲۵ \times ۱۰^{-۳}$ ۳) $۱/۲۵ \times ۱۰^{-۶}$ ۴) ۰/۸

سنجش کلاد
www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshCloud

پاسخ: گزینهٔ ۲ (آسان ـ محاسباتی ـ سریع ـ صفحهٔ ۳۳ ـ ۱۱۰۱)

برای به‌دست آوردن ظرفیت یک خازن، می‌توان نوشت:

$$C=\frac{\Delta Q}{\Delta V}=\frac{۱۵\times۱۰^{-۶}}{۴۰-۲۸}=\frac{۵}{۴}\times۱۰^{-۶}F=۱/۲۵\times۱۰^{-۳}mF$$

ظرفیت خازن

با توجه به آن‌که هرچه اختلاف پتانسیل بین دو صفحهٔ خازن بیش‌تر باشد، بار ذخیره‌شده در آن بیش‌تر می‌شود، نسبت بار ذخیره‌شده به اختلاف پتانسیل بین دو صفحهٔ آن را ظرفیت خازن می‌نامند. ظرفیت خازن، عددی ثابت است و آن را با C نشان می‌دهند و واحد آن فاراد یا کولن بر ولت است:

$$C=\frac{q}{V}$$

هنگامی‌که یک خازن به ظرفیت C توسط یک باتری با ولتاژ V باردار می‌شود، بار ذخیره‌شده در آن از رابطهٔ $q=CV$ به‌دست می‌آید.

عوامل مؤثر بر ظرفیت خازن:

تنها ویژگی‌های ساختمانی می‌توانند بر روی ظرفیت خازن مؤثر باشند.

$$C=\underset{\text{ثابت دی‌الکتریک}}{\underset{\downarrow}{\kappa}}\ \varepsilon_{۰}\frac{A}{d}\begin{matrix}\rightarrow(m^{۲})\ \text{مساحت صفحات}\\ \rightarrow(m)\ \text{فاصلهٔ بین صفحات}\end{matrix}$$

میدان الکتریکی بین صفحه‌های خازن از روابط زیر به‌دست می‌آید:

$E=\frac{V}{d}\Rightarrow$ اگر ولتاژ را داشته باشیم.

$E=\frac{q}{\kappa\varepsilon_{۰}A}\Rightarrow$ اگر بار را داشته باشیم.

انرژی ذخیره‌شده در خازن از روابط زیر به‌دست می‌آید:

$$\text{انرژی خازن}\Rightarrow\begin{cases}U=\frac{۱}{۲}CV^{۲}\\ U=\frac{۱}{۲}\frac{q^{۲}}{C}\\ U=\frac{۱}{۲}qV\end{cases}$$

یه نمونهٔ باحال

یک خازن تخت از صفحه‌هایی با مساحت $۱۰^{-۳}m^{۲}$ ساخته شده است که در فاصلهٔ $۰/۵mm$ از هم قرار گرفته‌اند و بین صفحه‌ها هوا است. اگر این خازن را به اختلاف پتانسیل $۲۰V$ متصل کنیم تا شارژ شود، به سؤالات زیر پاسخ دهید.

الف) ظرفیت خازن چند نانوفاراد است؟ $(\varepsilon_{۰}=۹\times۱۰^{-۱۲}\frac{F}{m})$

$$C=\kappa\varepsilon_{۰}\frac{A}{d}=۱\times۹\times۱۰^{-۱۲}\times\frac{۱۰^{-۳}}{۰/۵\times۱۰^{-۳}}=۱۸\times۱۰^{-۱۲}F=۰/۰۱۸nF$$

ب) بزرگی میدان الکتریکی بین صفحه‌های خازن چند واحد SI است؟

$$E=\frac{V}{d}=\frac{۲۰}{۰/۵\times۱۰^{-۳}}=۴\times۱۰^{۴}\frac{V}{m}$$

سنجش کلاد
www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshCloud

پ) بار ذخیره‌شده در خازن چند نانوکولن است؟

$$q=CV\Rightarrow q=۰/۰۱۸\times۲۰=۰/۳۶\,nC$$

ت) انرژی ذخیره‌شده در خازن چند نانوژول است؟

$$U=\frac{۱}{۲}CV^{۲}=\frac{۱}{۲}\times۰/۰۱۸\times۲۰^{۲}=۳/۶\,nJ$$

۵۷- خازنی که بین صفحات آن هوا است، به دو سر یک باتری متصل است. اگر در این حالت فاصلهٔ بین صفحات خازن را ۲ برابر کنیم، سپس این فاصله را با ماده‌ای با ثابت دی‌الکتریک $\kappa=۱/۵$ پر کنیم، کدام مورد درست است؟

۱) انرژی ذخیره‌شده در خازن، ۷۵ درصد کاهش می‌یابد.
۲) میدان الکتریکی بین دو صفحه، ۵۰ درصد کاهش می‌یابد.
۳) میدان الکتریکی بین دو صفحه، $\frac{۳}{۴}$ برابر می‌شود.
۴) انرژی ذخیره‌شده در خازن، $\frac{۴}{۳}$ برابر می‌شود.

پاسخ: گزینهٔ ۲ (متوسط ـ محاسباتی ـ استاندارد ـ صفحهٔ ۳۹ ـ ۱۱۰۱)

با توجه به رابطهٔ ظرفیت خازن برحسب مشخصات ساختمانی آن، داریم:

$$C=\kappa\varepsilon_{۰}\frac{A}{d}\Rightarrow\frac{C_{۲}}{C_{۱}}=\frac{\kappa_{۲}}{\kappa_{۱}}\times\frac{d_{۱}}{d_{۲}}\xrightarrow[d_{۲}=۲d_{۱}]{\kappa_{۱}=۱\,,\,\kappa_{۲}=۱/۵}\frac{C_{۲}}{C_{۱}}=۱/۵\times\frac{۱}{۲}=\frac{۳}{۴}$$

چون خازن به باتری متصل است، اختلاف پتانسیل الکتریکی بین دو صفحهٔ آن ثابت است و داریم:

$$U=\frac{۱}{۲}CV^{۲}\xrightarrow{V\text{ ثابت است.}}\frac{U_{۲}}{U_{۱}}=\frac{C_{۲}}{C_{۱}}=\frac{۳}{۴}$$

بنابراین درصد تغییر انرژی، برابر است با:

$$(\frac{U_{۲}}{U_{۱}}-۱)\times۱۰۰=(\frac{۳}{۴}-۱)\times۱۰۰=-۲۵٪$$

پس گزینه‌های (۱) و (۴) نادرست‌اند. برای بررسی میدان الکتریکی بین دو صفحه، داریم:

$$E=\frac{V}{d}\xrightarrow{V\text{ ثابت است.}}\frac{E_{۲}}{E_{۱}}=\frac{d_{۱}}{d_{۲}}=\frac{d_{۱}}{۲d_{۱}}=\frac{۱}{۲}$$

درصد تغییرات میدان الکتریکی: $(\frac{E_{۲}}{E_{۱}}-۱)\times۱۰۰=(\frac{۱}{۲}-۱)\times۱۰۰=-۵۰٪$

بنابراین میدان الکتریکی بین دو صفحه، ۵۰ درصد کاهش می‌یابد.

نکته

برای مقایسهٔ انرژی دو خازن از روابط زیر استفاده می‌کنیم:

۱- اگر ظرفیت و ولتاژ خازن‌ها را بدانیم:

$$U=\frac{۱}{۲}CV^{۲}\Rightarrow\frac{U_{۲}}{U_{۱}}=\frac{C_{۲}}{C_{۱}}\times(\frac{V_{۲}}{V_{۱}})^{۲}$$

۲- اگر بار الکتریکی و ظرفیت خازن‌ها را بدانیم:

$$U=\frac{۱}{۲}\frac{q^{۲}}{C}\Rightarrow\frac{U_{۲}}{U_{۱}}=\frac{C_{۱}}{C_{۲}}\times(\frac{q_{۲}}{q_{۱}})^{۲}$$

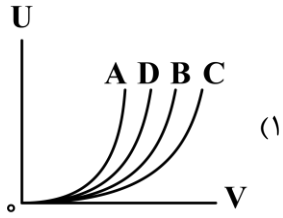
۳- اگر بار الکتریکی و ولتاژ خازن‌ها را بدانیم:

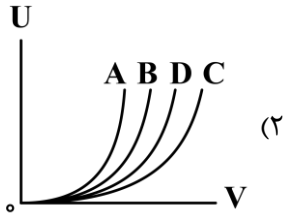
$$U=\frac{۱}{۲}qV\Rightarrow\frac{U_{۲}}{U_{۱}}=\frac{q_{۲}}{q_{۱}}\times\frac{V_{۲}}{V_{۱}}$$

سنجش کلاد
www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshCloud

۵۸- جدول زیر مشخصات ۴ خازن A، B، C و D را نشان می‌دهد. اگر مساحت صفحات خازن‌ها با یکدیگر برابر باشند، کدام نمودار، انرژی ذخیره‌شده در خازن‌ها را برحسب اختلاف پتانسیل الکتریکی، به‌درستی نشان می‌دهد؟

خازن	A	B	C	D
فاصلهٔ بین صفحات (mm)	۶	۹	۱۰	۸
ثابت دی‌الکتریک	۲/۵	۳	۲/۸	۳/۲

۱) 

۲) 

۳)

۴)

پاسخ: گزینهٔ ۱ (سخت ـ مفهومی/محاسباتی ـ زمان‌بَر ـ صفحهٔ ۳۹ ـ ۱۱۰۱)

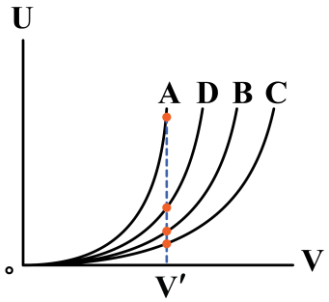
ابتدا ظرفیت خازن‌ها را با یکدیگر مقایسه می‌کنیم:

$$C=\frac{\kappa\varepsilon_{\circ}A}{d}\xrightarrow{A_A=A_B=A_C=A_D}\frac{C'}{C}=\frac{\kappa'}{\kappa}\times\frac{d}{d'}$$

درنتیجه خازنی که مقدار $\frac{\kappa}{d}$ بزرگ‌تری داشته باشد، دارای ظرفیت بیش‌تری است.

$$\begin{cases}A:\frac{\kappa}{d}=\frac{۲/۵}{۶}=۰/۴۲\\ B:\frac{\kappa}{d}=\frac{۳}{۹}=۰/۳۳\\ C:\frac{\kappa}{d}=\frac{۲/۸}{۱۰}=۰/۲۸\\ D:\frac{\kappa}{d}=\frac{۳/۲}{۸}=۰/۴۰\end{cases}\Rightarrow C_A>C_D>C_B>C_C$$

طبق رابطهٔ $U=\frac{۱}{۲}CV^۲$، به‌ازای V' یکسان، هر خازنی که دارای ظرفیت بیش‌تری باشد، انرژی ذخیره‌شدهٔ آن نیز بیش‌تر خواهد بود.



۵۹- چه تعداد از عبارت‌های زیر نادرست است؟

الف ـ همهٔ بارهای متحرک جریان الکتریکی خالص تولید می‌کنند.

ب ـ دراثر ایجاد اختلاف پتانسیل الکتریکی در دو سر یک رسانا، درون آن شارش بار الکتریکی خالص ایجاد می‌شود.

ج ـ الکترون‌ها با سرعت سوق در خلاف جهت میدان الکتریکی به‌طور بسیار آهسته‌ای سوق پیدا می‌کنند.

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

پاسخ: گزینهٔ ۲ (آسان ـ حفظی/مفهومی ـ سریع ـ صفحهٔ ۴۷ ـ ۱۱۰۲)

با توجه به نکات گفته‌شده در درس‌نامه عبارت «الف» نادرست است.

سنجش کلاد
www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshCloud

بررسی موارد نادرست:

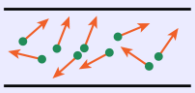
الف) جریان الکتریکی ناشی از شارش **خالص** بارهای متحرک است؛ بنابراین همهٔ بارهای متحرک، جریان الکتریکی ایجاد نمی‌کنند. (✱)

درس‌نامه

رسانا

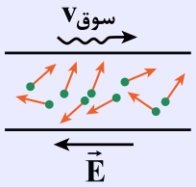
در تعادل الکترواستاتیک

- پتانسیل الکتریکی تمام نقاط یکسان است $(\Delta V = 0)$.
- الکترون‌های آزاد به‌صورت کاتوره‌ای حرکت می‌کنند (تندی بسیار زیاد از مرتبهٔ $10^6 \frac{m}{s}$).
- شارش خالص بار نداریم.
- میدان الکتریکی در داخل رسانا صفر است.



در عدم تعادل

- پتانسیل نقاط باهم برابر نیست $(\Delta V \neq 0)$.
- الکترون‌های آزاد به‌صورت کاتوره‌ای حرکت می‌کنند، از طرفی حرکت دیگری با تندی بسیار کم به نام **سرعت سوق** از مرتبهٔ $0/1 \frac{mm}{s}$ هم دارند.
- شارش خالص بار داریم (سرعت سوق در خلاف جهت میدان داخل رسانا است).
- میدان الکتریکی در داخل رسانا صفر نیست.



جریان الکتریکی چیست؟

آهنگ شارش بار الکتریکی

جریان الکتریکی متوسط ← نسبت بار خالص عبوری به مدت‌زمان

$$I_{av} = \frac{\Delta q}{\Delta t}$$

I_{av} : جریان متوسط (A) $\quad \Delta q$: بار خالص عبوری (C) $\quad \Delta t$: مدت‌زمان (s)

جریان الکتریکی کمیتی اصلی و نرده‌ای است که یکای آن در SI، آمپر (A) است.

یکای فرعی بار الکتریکی:

$$I_{av} = \frac{\Delta q}{\Delta t} \Rightarrow \Delta q = I.\Delta t \Rightarrow C = A.s$$

بنابراین یک کولن معادل یک آمپر ـ ثانیه است.

یکی از یکاهای بار الکتریکی میلی‌آمپر - ساعت است که هر میلی‌آمپر ساعت معادل $3/6C$ است.

$$q = 1mAh \times \frac{3600s}{1h} \times \frac{10^{-3}A}{1mA} \times \frac{1C}{1A.s} = 3/6C$$

سنجش کلاد
www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshCloud

یه نمونهٔ باحال

در مدت ۲ms مقدار ۲۵۰μC بار از یک مقطع مشخص از سیم، عبور می‌کند. جریان متوسط عبوری چند میلی‌آمپر است؟

پاسخ تشریحی:

$$I=\frac{\Delta q}{\Delta t}\xrightarrow[\Delta t=2ms]{\Delta q=250\mu C} I=\frac{250\times10^{-6}}{2\times10^{-3}}=0/125A\times\frac{1000mA}{1A}=125mA$$

یه نمونهٔ باحال

دو کرهٔ رسانای مشابه با بارهای الکتریکی $q_1=3\mu C$ و $q_2=-7\mu C$ را با یک سیم به‌هم وصل می‌کنیم. اگر در مدت ۲ms بار دو کره یکسان شود، جریان عبوری از سیم، چند آمپر است؟

(۱) مرحلهٔ: محاسبهٔ بار نهایی هر کره $\Rightarrow q'=\frac{q_1+q_2}{2}=\frac{3+(-7)}{2}=-2\mu C$

(۲) مرحلهٔ: محاسبهٔ بار منتقل‌شده $\Rightarrow \Delta q=|-2-3|=5\mu C$

(۳) مرحلهٔ: محاسبهٔ جریان $\Rightarrow I=\frac{\Delta q}{\Delta t}=\frac{5\times10^{-6}}{2\times10^{-3}}=2/5\times10^{-3}A$

یه نمونهٔ باحال

در مدت ۱/۵ms تعداد 6×10^{15} الکترون از یک مقطع معین سیمی عبور می‌کند. جریان متوسط عبوری را حساب کنید.

$(e=1/6\times10^{-19}C)$

پاسخ تشریحی:

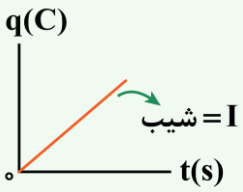
(۱) مرحلهٔ: محاسبهٔ بار شارش‌یافته $\Rightarrow \Delta q=ne=6\times10^{15}\times1/6\times10^{-19}=6\times1/6\times10^{-4}C$

(۲) مرحلهٔ: محاسبهٔ جریان $\Rightarrow I=\frac{\Delta q}{\Delta t}=\frac{6\times1/6\times10^{-4}}{1/5\times10^{-3}}=0/64A$

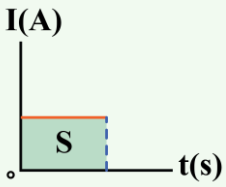
جریان مستقیم چیست؟ اگر آهنگ شارش بار ثابت باشد، یعنی جریان متوسط با جریان لحظه‌ای برابر باشد، به آن جریان مستقیم می‌گوییم.

دو نمودار مهم

نمودار بار برحسب زمان برای جریان مستقیم:



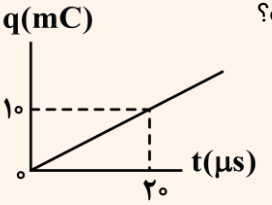
نمودار جریان برحسب زمان برای جریان مستقیم:



$$\Delta q=S$$

یه نمونهٔ باحال

نمودار بار عبوری از یک رسانا برحسب زمان، مطابق شکل روبه‌رو است. جریان عبوری از این رسانا، چند آمپر است؟



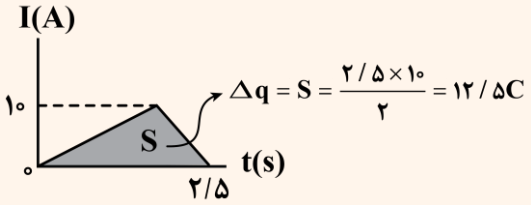
پاسخ تشریحی:

$$I=\frac{\Delta q}{\Delta t}=\frac{10\times10^{-3}}{20\times10^{-6}}=0/5\times10^{3}=500A$$

سنجش کلاد
www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshCloud

یه نمونهٔ باحال

نمودار جریان عبوری از یک رسانا، برحسب زمان مطابق شکل زیر است. جریان الکتریکی متوسط در این مدت، چند آمپر است؟



$\Delta q = S = \frac{۲/۵ \times ۱۰}{۲} = ۱۲/۵C$

$I = \frac{\Delta q}{\Delta t} = \frac{۱۲/۵}{۲/۵} = ۵A$

ماز

۶۰- ولتاژ باتری یک نوع ماشین‌حساب ۳V است. اگر این ماشین‌حساب یک ساعت روشن باشد، باتری ۷/۲J انرژی به مدار آن می‌دهد. جریان الکتریکی عبوری متوسط از مدار باتری در این مدت چند میلی‌آمپر است؟

۱) $\frac{۱}{۳}$ ۲) $\frac{۲}{۳}$ ۳) $\frac{۲}{۹}$ ۴) $\frac{۱}{۱۲}$

پاسخ: گزینهٔ ۲ (متوسط ـ محاسباتی ـ استاندارد ـ صفحهٔ ۴۸ ـ ۱۱۰۲)

گام اول

بار الکتریکی عبوری از مدار را حساب می‌کنیم:

$\Delta V = \frac{\Delta U}{q} \Rightarrow ۳ = \frac{۷/۲}{q} \Rightarrow q = ۲/۴C$

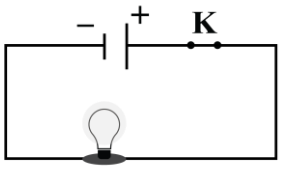
گام آخر

جریان عبوری متوسط را حساب می‌کنیم:

$I_{av} = \frac{\Delta q}{\Delta t} \Rightarrow I_{av} = \frac{۲/۴}{۳۶۰۰} = \frac{۱}{۱۵۰۰}A \Rightarrow I_{av} = \frac{۲}{۳}mA$

ماز

۶۱- در مدار شکل زیر، اختلاف پتانسیل دو سر لامپ ۴V است. اگر در مدت ۵ دقیقه تعداد $۷/۵\times۱۰^{۲۰}$ الکترون از لامپ عبور کند، مقاومت لامپ چند اُهم است؟ $(e=۱/۶\times۱۰^{-۱۹}C)$



۱) ۲ ۲) ۴
۳) ۵ ۴) ۱۰

پاسخ: گزینهٔ ۴ (متوسط ـ محاسباتی ـ استاندارد ـ صفحهٔ ۴۹ ـ ۱۱۰۲)

گام اول

بار خالص عبوری را حساب می‌کنیم:

$\Delta q = ne \Rightarrow \Delta q = ۷/۵\times۱۰^{۲۰}\times۱/۶\times۱۰^{-۱۹} = ۱۲۰C$

گام دوم

جریان الکتریکی را حساب می‌کنیم. با توجه به این‌که جریان مستقیم فرض شده است، داریم:

$I = \frac{\Delta q}{\Delta t} \Rightarrow I = \frac{۱۲۰}{۵\times۶۰} = ۰/۴A$

سنجش کلاد
www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshCloud

گام آخر

مقاومت لامپ را حساب می‌کنیم:

$$R=\frac{V}{I}\Rightarrow R=\frac{۴}{۰/۴}=۱۰\Omega$$

۶۲- جرم سیم مسی A دو برابر جرم سیم مسی B است. اگر قطر سطح مقطع سیم A، ۵۰ درصد کم‌تر از قطر سطح مقطع سیم B باشد، نسبت مقاومت الکتریکی سیم A به سیم B کدام است؟

۱) ۲۴ ۲) ۱۶ ۳) ۸ ۴) ۳۲

پاسخ: گزینهٔ ۴ (سخت ـ محاسباتی ـ استاندارد ـ صفحهٔ ۵۲ ـ ۱۱۰۲)

به کمک رابطهٔ $\rho'=\frac{m}{V}$ مراحل حل سؤال به‌صورت زیر است:

گام اول

از آن‌جایی که چگالی دو سیم برابر است، رابطهٔ بین حجم آن‌ها را به‌دست می‌آوریم:

$$\rho'_A=\rho'_B\Rightarrow\frac{m_A}{V_A}=\frac{m_B}{V_B}\xrightarrow{m_A=۲m_B}V_A=۲V_B$$

گام دوم

با داشتن رابطهٔ بین حجم دو سیم و شعاع سطح مقطع آن‌ها داریم:

$$\begin{cases}V_A=۲V_B\Rightarrow A_AL_A=۲A_BL_B\\ A=\pi r^۲\Rightarrow\frac{A_A}{A_B}=(\frac{r_A}{r_B})^۲=(\frac{۱}{۲})^۲=\frac{۱}{۴}\end{cases}\Rightarrow\frac{۱}{۴}A_BL_A=۲A_BL_B\Rightarrow L_A=۸L_B$$

گام آخر

نسبت مقاومت سیم A به سیم B را می‌یابیم:

$$R=\rho\frac{L}{A}\Rightarrow\frac{R_A}{R_B}=\frac{L_A}{L_B}\times\frac{A_B}{A_A}=۸\times۴=۳۲$$

عوامل مؤثر بر مقاومت الکتریکی

۱- دما ۲- جنس رسانا ۳- شکل رسانا (طول و سطح مقطع)

تأثیر دما بر مقاومت الکتریکی

رسانایی ↓ مقاومت ↑

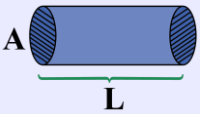
رسانا: با افزایش دما مقاومت افزایش می‌یابد.

نیم‌رسانا: افزایش دما منجر به افزایش حامل الکترون‌های بار می‌شود. درنتیجه رسانایی افزایش و مقاومت کاهش می‌یابد. مثل سیلیسیم و ژرمانیوم

ابررسانایی

در برخی رساناها مثل جیوه و سرب با کاهش دما مقاومت کاهش می‌یابد و وقتی به یک دمای خاص می‌رسد، ناگهان مقاومت صفر می‌شود و رسانایی آن بی‌نهایت می‌شود و در دماهای پایین‌تر هم مقاومت همچنان صفر می‌ماند.

تأثیر شکل و جنس رسانا در مقاومت



$$R=\frac{\rho.L}{A}$$

R: مقاومت (Ω) ρ: مقاومت ویژه $(\Omega.m)$ L: طول رسانا (m)

A: سطح مقطع $(m^۲)$ مقاومت ویژهٔ رسانا وابسته به جنس و دمای رسانا است.

سنجش کلاد
www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshCloud

یه نمونهٔ باحال

مقاومت سیمی به طول ۵m و قطر مقطع ۲mm را به‌دست آورید. $(\pi=3\ ,\ \rho_{\text{سیم}}=6\times10^{-6}\Omega.m)$

پاسخ تشریحی:

(۱) مرحلهٔ: محاسبهٔ سطح مقطع سیم $\rightarrow A=\pi r^2 \xrightarrow[\pi=3]{r=\frac{D}{2}=1mm=10^{-3}m} A=\underbrace{3\times(10^{-3})^2}_{3\times10^{-6}m^2}$

(۲) مرحلهٔ: محاسبهٔ مقاومت $\rightarrow R=\frac{\rho.L}{A} \xrightarrow[L=5m\ ,\ A=3\times10^{-6}m^2]{\rho=6\times10^{-6}\Omega.m} R=\frac{6\times10^{-6}\times5}{3\times10^{-6}}=10\Omega$

یه نمونهٔ باحال

طول رسانای A، نصف طول رسانای B و شعاع مقطع A، سه برابر شعاع مقطع B است. اگر مقاومت این دو رسانا یکسان باشد، مقاومت ویژهٔ A چند برابر مقاومت ویژهٔ B است؟

پاسخ تشریحی:

$$R=\frac{\rho L}{A} \xrightarrow{\text{مقایسه‌ای}} \frac{R_2}{R_1}=\frac{\rho_2}{\rho_1}\times\frac{L_2}{L_1}\times\frac{A_1}{A_2}$$

$$\frac{R_A}{R_B}=\frac{\rho_A}{\rho_B}\times\frac{L_A}{L_B}\times\frac{A_B}{A_A} \xrightarrow[r_A=3r_B\Rightarrow A_A=9A_B]{R_A=R_B\ ,\ L_A=\frac{1}{2}L_B}$$

$$1=\frac{\rho_A}{\rho_B}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{9}\Rightarrow\frac{\rho_A}{\rho_B}=18$$

یه نمونهٔ باحال

رسانایی به طول L و شعاع مقطع ۰/۵mm را به اختلاف پتانسیل ۲۰V وصل می‌کنیم. اگر جریان گذرنده از این رسانا ۲/۵A باشد، L چند متر است؟ $(\pi=3\ ,\ \rho=8\times10^{-7}\Omega.m)$

پاسخ تشریحی:

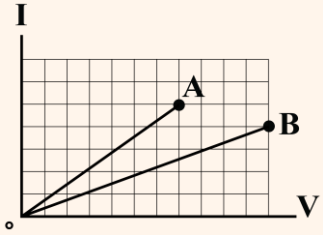
(۱) مرحلهٔ: محاسبهٔ مقاومت با استفاده از قانون اهم $\rightarrow R=\frac{V}{I} \xrightarrow[I=2/5A]{V=20V} R=\frac{20}{2/5}=8\Omega$

(۲) مرحلهٔ: محاسبهٔ مساحت مقطع رسانا $\rightarrow A=\pi r^2 \xrightarrow[r=5\times10^{-4}]{\pi=3} A=3\times25\times10^{-8}=7/5\times10^{-7}m^2$

(۳) مرحلهٔ: محاسبهٔ طول رسانا $\rightarrow R=\frac{\rho.L}{A} \xrightarrow[A=7/5\times10^{-7}m^2]{R=8\Omega} 8=\frac{8\times10^{-7}\times L}{7/5\times10^{-7}}\Rightarrow L=7/5m$

یه نمونهٔ باحال

نمودار جریان برحسب ولتاژ دو مقاومت A و B مطابق شکل زیر است. اگر مقاومت ویژه و سطح مقطع A به‌ترتیب ۲ و ۵ برابر مقاومت ویژه و سطح مقطع B باشد، طول مقاومت A چند برابر B است؟



پاسخ تشریحی:

مقایسهٔ مقاومت A با B: مرحلهٔ (۱)

$$\text{شیب A}=\frac{5}{7}\qquad \text{شیب B}=\frac{4}{11}$$

سنجش کلاد
www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshCloud

$$\frac{R_A}{R_B}=\frac{\text{B شیب}}{\text{A شیب}}=\frac{\frac{۴}{۱۱}}{\frac{۵}{۷}}=\frac{۲۸}{۵۵}$$

مقایسهٔ طول A با B: مرحلهٔ (۲)

$$\frac{R_A}{R_B}=\frac{\rho_A}{\rho_B}\times\frac{L_A}{L_B}\times\frac{A_B}{A_A}\xrightarrow[A_A=۵A_B]{\rho_A=۲\rho_B}\frac{۲۸}{۵۵}=۲\times\frac{L_A}{L_B}\times\frac{۱}{۵}\Rightarrow\frac{L_A}{L_B}=\frac{۱۴}{۱۱}$$

روابط کمکی عوامل مؤثر بر مقاومت

$$V=A.L\Rightarrow\begin{cases}A=\frac{V}{L}\\ L=\frac{V}{A}\end{cases}$$

V: حجم A: سطح مقطع L: طول

تستی:

$$R=\frac{\rho.L}{A}\Rightarrow\begin{cases}R=\frac{\rho.V}{A^۲}\xrightarrow{\rho'=\frac{m}{V}}R=\frac{\rho.m}{\rho'.A^۲}\\ R=\frac{\rho.L^۲}{V}\xrightarrow{\rho'=\frac{m}{V}}R=\frac{\rho.L^۲\rho'}{m}\end{cases}$$

حدیده‌کردن چیست؟

اگر سیمی را از یک دستگاه عبور دهیم که بدون تغییر جرم (بدون تغییر حجم) ابعاد آن را تغییر دهد، به این کار حدیده‌کردن می‌گوییم.

اگر بدون تغییر حجم:

مقاومت $n^۲$ برابر می‌شه ← طول سیم n برابر بشه

مقاومت $\frac{۱}{n^۲}$ برابر می‌شه ← مقطع سیم n برابر بشه

مقاومت $\frac{۱}{n^۴}$ برابر می‌شه ← قطر مقطع سیم n برابر بشه

یه نمونهٔ باحال

مقاومت سیمی ۳۲Ω است. اگر این سیم را ابتدا از دستگاهی بگذرانیم که بدون تغییر جرم طول سیم نصف شود و سپس این سیم را به اختلاف پتانسیل $۲۴V$ وصل کنیم، جریان گذرنده از این سیم چند آمپر می‌شود؟

پاسخ تشریحی:

محاسبهٔ مقاومت جدید: مرحلهٔ (۱) $\rightarrow\frac{R_۲}{R_۱}=(\frac{L_۲}{L_۱})^۲\Rightarrow\frac{R_۲}{۳۲}=\underbrace{(\frac{۱}{۲})^۲}_{\frac{۱}{۴}}\Rightarrow R_۲=۸\Omega$

محاسبهٔ جریان: مرحلهٔ (۲) $\rightarrow R=\frac{V}{I}\xrightarrow[V=۲۴V]{R=۸\Omega}۸=\frac{۲۴}{I}\Rightarrow I=۳A$

سنجش کلاد
www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshCloud

آزمون سراسری ریاضی اردیبهشت‌ماه ۱۴۰۴

۶۴- جنس و دمای دو سیم استوانه‌ای A و B یکسان است. اگر طول سیم A دو برابر طول سیم B و جرم آن نصف جرم B باشد، مقاومت الکتریکی سیم A چند برابر مقاومت سیم B است؟

۱) ۲ ۲) ۴ ۳) ۸ ۴) ۱۶

پاسخ تشریحی:

ابتدا نسبت سطح مقطع سیم‌ها را با کمک چگالی و جرم آن‌ها به‌دست می‌آوریم:

$$m_A = \frac{1}{2}m_B \Rightarrow \rho'_A V_A = \frac{1}{2}\rho'_B V_B \Rightarrow V_A = \frac{1}{2}V_B$$

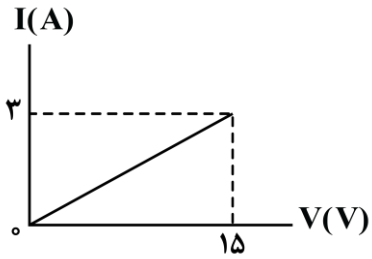
$$\Rightarrow L_A A_A = \frac{1}{2}L_B A_B \Rightarrow 2L_B A_A = \frac{1}{2}L_B A_B \Rightarrow A_A = \frac{1}{4}A_B$$

بنابراین نسبت مقاومت سیم‌ها برابر است با:

$$R = \rho\frac{L}{A} \Rightarrow \frac{R_A}{R_B} = \frac{\rho_A}{\rho_B} \times \frac{L_A}{L_B} \times \frac{A_B}{A_A} = 1 \times 2 \times 4 = 8$$

پاسخ: گزینهٔ ۳

۶۳- **نمودار جریان ـ ولتاژ برای یک سیم فلزی به طول ۹m و قطر مقطع ۶mm مطابق شکل زیر است. مقاومت ویژهٔ این سیم چند $\Omega.cm$ است؟ $(\pi \simeq 3)$**



۱) $1/5 \times 10^{-5}$

۲) $1/5 \times 10^{-3}$

۳) 6×10^{-5}

۴) 6×10^{-3}

پاسخ: گزینهٔ ۲ (سخت ـ مفهومی/محاسباتی ـ استاندارد ـ صفحهٔ ۵۲ ـ ۱۱۰۲)

ابتدا به کمک نمودار، مقاومت سیم را به‌دست می‌آوریم:

$$R = \frac{V}{I} = \frac{15}{3} = 5\Omega$$

حال به کمک رابطهٔ $R = \rho\frac{L}{A}$، می‌توان نوشت:

$$R = \rho\frac{L}{A} \Rightarrow 5 = \rho \times \frac{9}{3 \times (3 \times 10^{-3})^2} \Rightarrow \rho = 15 \times 10^{-6}\Omega.m$$

$$\rho = 15 \times 10^{-6}\Omega.m \times \frac{100cm}{1m} = 15 \times 10^{-4}\Omega.cm = 1/5 \times 10^{-3}\Omega.cm$$

سوتی‌های پرتکرار

اگه حواست به یکای $\Omega.cm$ نباشه و برحسب یکای SI به‌دست بیاری توی دام گزینهٔ (۱) میفتی.

۶۴- **مقاومت الکتریکی رشتهٔ درون یک برشته‌کن که از جنس نیکروم است، در حالت خاموش (دمای ۵۰°C) برابر R_1 است. اگر لامپ را روشن کرده و دمای لامپ به ۱۲۰۰°C برسد، مقاومت الکتریکی این رشته به ۴۴Ω می‌رسد. R_1 برحسب اهم به کدام گزینه نزدیک‌تر است؟ (از تغییر طول و قطر رشته دراثر تغییر دما چشم‌پوشی شود و ضریب دمایی نیکروم برابر $4 \times 10^{-4}K^{-1}$ است.)**

۱) ۱۲ ۲) ۳۰ ۳) ۴۰ ۴) ۳۶

سنجش کلاد
www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshCloud

پاسخ: گزینهٔ ۲ (آسان ـ محاسباتی ـ استاندارد ـ صفحهٔ ۵۳ ـ ۱۱۰۲)

با توجه به رابطهٔ زیر، می‌توانیم مقدار یک مقاومت را براثر تغییر دما محاسبه کنیم:

$$R_۲ = R_۱(۱+\alpha\Delta\theta) \Rightarrow ۴۴ = R_۱(۱+۴\times۱۰^{-۴}\times(۱۲۰۰-۵۰))$$

$$\Rightarrow ۴۴ = R_۱(۱+۰/۴۶) \Rightarrow R_۱ = \frac{۴۴}{۱/۴۶} \simeq ۳۰\Omega$$

اثر تغییر دما بر مقاومت الکتریکی

۱- در مقاومت‌های نیم‌رسانا مانند مقاومت‌های ژرمانیم و سیلیسیم با افزایش دما، مقاومت الکتریکی کاهش می‌یابد.

۲- در مقاومت‌های فلزی، با افزایش دما، مقاومت الکتریکی هم افزایش می‌یابد. برای محاسبهٔ تغییرات مقاومت الکتریکی فلزات برحسب دما از رابطهٔ زیر استفاده می‌کنیم:

$$\Delta R = R_۲ - R_۱ = R_۱\alpha\Delta\theta$$

$$\Rightarrow R_۲ = R_۱(۱+\alpha\Delta\theta)$$

۳- در مسائل مربوط به اثر دما بر مقاومت، ممکن است خواسته‌های زیر مطرح شود:

الف) مقاومت الکتریکی چند برابر می‌شود؟

در این حالت نسبت $\frac{R_۲}{R_۱}$ را می‌خواهیم و داریم:

$$R_۲ = R_۱(۱+\alpha\Delta\theta) \Rightarrow \frac{R_۲}{R_۱} = ۱+\alpha\Delta\theta$$

ب) مقاومت الکتریکی چقدر تغییر می‌کند؟

در این حالت $R_۲ - R_۱$ موردنظر است و داریم:

$$\Delta R = R_۲ - R_۱ = R_۱\alpha\Delta\theta$$

پ) مقاومت الکتریکی چند درصد تغییر کرده است؟

در این حالت $\frac{\Delta R}{R_۱}$ را می‌خواهیم و داریم:

$$\frac{\Delta R}{R_۱} = \frac{R_۱\alpha\Delta\theta}{R_۱} = \alpha\Delta\theta$$

$$\Rightarrow \text{درصد تغییر مقاومت} = \alpha\Delta\theta\times۱۰۰$$

۶۵- ترمیستور حساس به ..... بوده و در ..... کاربرد دارد و LDR حساس به ..... بوده و در ..... کاربرد دارد.

۱) دما ـ چشم الکترونیکی ـ نور ـ زنگ خطر آتش
۲) نور ـ چشم الکترونیکی ـ دما ـ زنگ خطر آتش
۳) دما ـ زنگ خطر آتش ـ نور ـ چشم الکترونیکی
۴) نور ـ زنگ خطر آتش ـ دما ـ چشم الکترونیکی

پاسخ: گزینهٔ ۳ (آسان ـ مفهومی ـ سریع ـ صفحهٔ ۵۹ ـ ۱۱۰۲)

ترمیستور حساس به **دما** بوده و در **زنگ خطر آتش** و مقاومت‌های نوری (LDR) حساس به **نور** بوده و در **چشم‌های الکترونیکی** کاربرد دارد.

سنجش کلاد
www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshCloud

بودجه‌بندی این آزمون

شیمی ۳: شیمی، جلوه‌ای از هنر، زیبایی و ماندگاری (از ابتدای فصل تا سر هنرنمایی شاره‌ها) (صفحه‌های ۶۷ تا ۷۷)

شیمی پایه: قدر هدایای زمینی را بدانیم (صفحه‌های ۲۵ تا ۵۰)

سهم در کنکور

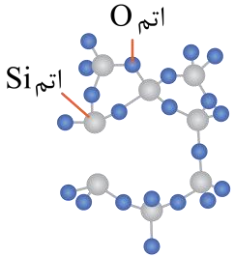
مباحث این آزمون در مجموع ۳ تست از ۳۰ تست کنکور را پوشش داده است.

۶۶- کدام‌یک از مطالب زیر نادرست است؟

۱) برخی از آثار به‌جا مانده از زمان گذشته، از عناصر فلزی ساخته‌شده و نمادی از هنر زمان خویش هستند.
۲) رنگ سرخ خاک رس، به خاطر وجود اکسید فلزی در آن است که آرایش کاتیون آن به $3d^5$ ختم می‌شود.
۳) مواد استفاده‌شده برای ساختن آثار به‌جا مانده از گذشته، فراوانی زیادی داشته و واکنش‌پذیری کمی دارند.
۴) سیلیس، ازجمله مواد موجود در شن و ماسه و سنگ کوارتز بوده و در حالت خالص، سفیدرنگ دیده می‌شود.

پاسخ: گزینهٔ ۴ (متوسط ـ مفهومی و حفظی ـ استاندارد ـ صفحهٔ ۷۰ ـ ۱۲۰۳)

سیلیس یا سیلیسیم دی‌اکسید، عضوی از خانواده جامدهای کووالانسی است. ساختار این ماده به‌صورت زیر است:



سیلیس افزون بر خاک‌های رس، یکی از سازنده‌های اصلی بسیاری از سنگ‌ها، صخره‌ها و نیز شن و ماسه است. وجود این ماده باعث استحکام و ماندگاری سازه‌های سنگی و نقشکندهای روی آن‌ها شده است. در ساختار این ماده، هر اتم سیلیسیم به چهار اتم اکسیژن و هر اتم اکسیژن نیز به دو اتم سیلیسیم متصل شده است. با توجه به ساختار نشان داده‌شده، این ماده مقاومت بالایی در برابر سایش و گرما دارد. کوارتز ازجمله نمونه‌های خالص و ماسه ازجمله نمونه‌های ناخالص سیلیس است. سیلیس خالص، یک ماده شفاف و بی‌رنگ است و به دلیل داشتن خواص نوری ویژه، در ساخت منشورها و عدسی‌ها به کار می‌رود. تصویر زیر، نمایی از سنگ کوارتز را نشان می‌دهد.

بررسی سایر گزینه‌ها:

۱) مواد اولیه برای ساخت آثار به‌جای مانده از گذشتگان، افزون بر فراوانی و در دسترس بودن، واکنش‌پذیری کم و استحکام زیاد داشتند. این آثار، نمادی از هنر زمان خویش هستند. برخی از این آثار با استفاده از فلز و برخی با استفاده از سفال و سنگ ساخته‌شده‌اند.

آثار به‌جا مانده از گذشته

انسان از زمان‌های گذشته مواد ضروری برای زندگی خود را از نعمت‌های الهی گسترده شده در جای‌جای زمین تأمین کرده و برای رفع نیاز، آن‌ها را تغییر داده است. پژوهش‌ها نشان می‌دهد که در تغییر این مواد، افزون بر محیط و شیوهٔ زندگی، آیین‌ها، آداب و رسوم و حتی ادبیات و افسانه‌ها نیز نقش داشته‌اند. شیمی‌دان‌ها با بررسی نوع، مقدار، ساختار و رفتار مواد سازنده آثار به‌جامانده، پرده از اسرار ماندگاری این آثار برداشتند و با بهره‌گیری از دانش خود، توانستند مواد جدیدتری را بسازند. این مواد خواص ویژه و کاربردهای معینی دارند و آن‌ها را می‌توان مبنای کار و کلید موفقیت طراحان، هنرمندان و مهندسان برای خلق سازه‌های زیبا و ماندگار امروزی دانست.

۲) سرخ‌فام بودن خاک رس به دلیل وجود مقداری از Fe_2O_3 قرمزرنگ در آن است. بار الکتریکی آنیون و کاتیون در این ماده به‌ترتیب برابر با ۲- و ۳+ است. آرایش الکترونی کاتیون موجود در ساختار این ترکیب، به $3d^5$ ختم می‌شود.

سنجش کلاد
www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshCloud

خاک رس

خاک رس، مخلوطی از اکسیدهای فلزی، نافلزی، شبه‌فلزی و برخی فلزها است. در ساختار خاک رس، هر ۴ نوع مواد کووالانسی، یونی، مولکولی و فلزی وجود دارد. نکات زیر را در مورد خاک رس استخراج‌شده از معدن طلا به خاطر بسپارید:

- درصد جرمی یک اکسید شبه‌فلزی به نام سیلیس (SiO_2) در خاک رس، بیشتر از سایر مواد سازنده آن است. درواقع، درصد جرمی سیلیس از مجموع درصد جرمی کل اکسیدهای فلزی سازنده آن بیشتر است.
- در ساختار خاک رس، جامدهای فلزی مثل طلا (Au) و ... نیز وجود دارند. البته توجه داریم که بیشترین اتم موجود در خاک رس، اتم اکسیژن است.
- شمار انواع (نه درصد جرمی!) اکسیدهای فلزی سازنده خاک رس، بیشتر از شمار انواع اکسیدهای نافلزی و شبه‌فلزی در آن است؛ درنتیجه خاک رس خاصیت بازی داشته و با ریختن آن در آب، مقدار pH محلول افزایش می‌یابد.
- سرخ‌فام بودن خاک رس به دلیل وجود مقداری از Fe_2O_3 در آن است. این ماده به‌عنوان رنگ قرمز در نقاشی کاربرد دارد.
- هنگام پختن سفالینه‌های تهیه‌شده از خاک رس، جرم آب موجود در این ماده کاهش‌یافته و جرم سایر مواد موجود در آن تغییر نمی‌کند؛ درنتیجه درصد جرمی سایر مواد به هنگام پختن سفال افزایش می‌یابد.

۳) مواد اولیه برای ساخت آثار به‌جای مانده از گذشتگان، افزون بر فراوانی و در دسترس بودن، واکنش‌پذیری کم و استحکام زیاد داشتند.

۶۷- کدام موارد از عبارت‌های زیر درست هستند؟

الف ـ برای ذوب کردن یک نمونه سیلیسیم کربید، باید نیروهای وان‌درووالسی در این ماده از بین برده شوند.

ب ـ فراوان‌ترین اکسید موجود در پوسته جامد زمین، در مقایسه با یک نمونه گوگرد درجه سختی بالاتری دارد.

ج ـ در آخرین زیرلایهٔ الکترونی عناصر اصلی سازندهٔ انواع جامدهای کووالانسی، تعداد ۴ الکترون قرار گرفته است.

د ـ در ساختار سیلیس، هر اتم Si به ۴ اتم دیگر متصل بوده و فاقد جفت الکترون ناپیوندی در لایه ظرفیت خود است.

۱) «الف» و «ج» ۲) «الف» و «د» ۳) «ب» و «ج» ۴) «ب» و «د»

پاسخ: گزینهٔ ۴ **(متوسط ـ مفهومی ـ استاندارد ـ صفحهٔ ۷۲ ـ ۱۲۰۳)**

عبارت‌های (ب) و (د) درست هستند.

بررسی موارد:

الف) سیلیسیم کربید (SiC)، جامدی کووالانسی بوده و دارای پیوندهای اشتراکی $Si-C$ در ساختار خود است. سیلیسیم کربید، ساینده‌ای ارزان‌قیمت بوده و در تهیه سنباده از آن استفاده می‌شود. برای ذوب کردن و یا شکستن بلور یک نمونه سیلیسیم کربید، باید پیوندهای کووالانسی (اشتراکی) موجود در این ماده از بین برده شوند.

دیرگداز بودن مواد کووالانسی

برای ذوب کردن یا خرد کردن سیلیس و سایر جامدهای کووالانسی، باید بر پیوندهای اشتراکی بین اتم‌های موجود در این مواد غلبه کنیم. بر این اساس، جامدهای کووالانسی دیرگداز بوده و علاوه بر سختی زیاد، نقطه ذوب بالایی دارند. به‌عنوان مثال، پخته شدن نان سنگک بر روی دانه‌های درشت سنگ را می‌توان نشانه‌ای از مقاومت گرمایی سیلیس و دیرگداز بودن آن دانست. البته، توجه داریم که گرافیت عضوی از خانواده جامدهای کووالانسی است که به خاطر ساختار ویژه خود، درجه سختی بالایی ندارد.

ب) سیلیسیم پس از اکسیژن فراوان‌ترین عنصر در پوسته جامد زمین است؛ به‌طوری‌که ترکیب‌های گوناگون این دو عنصر بیش از ۹۰ درصد پوسته جامد زمین را تشکیل می‌دهند. ازاین‌رو سیلیس، فراوان‌ترین اکسید در پوسته جامد زمین به شمار می‌رود. سیلیس، نوعی ترکیب کووالانسی بوده و به همین خاطر، در مقایسه با یک ماده مولکولی مثل گوگرد درجه سختی بالاتری دارد.

ج) عناصر اصلی سازندهٔ جامدهای کووالانسی، کربن و سیلیسیم هستند. این دو عنصر متعلق به گروه ۱۴ جدول تناوبی بوده و در ساختار برخی از ترکیبات یونی مثل سدیم کربنات، کلسیم کربید، آمونیوم کربنات و کلسیم سیلیکات وجود دارند؛ درحالی‌که از این دو عنصر تاکنون یون تک اتمی در هیچ ترکیبی یافت نشده است. آرایش الکترونی این عناصر به زیرلایه p^2 ختم شده و بر این اساس، می‌توان گفت آخرین زیرلایه در این عناصر دارای ۲ الکترون است.

سنجش کلاد
www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshCloud

سیلیس یک جامد کووالانسی است که در آن تعداد بسیار زیادی از اتم‌ها توسط پیوندهای اشتراکی به یکدیگر متصل شده و یک شبکه غول‌آسا را به وجود آورده‌اند؛ به همین خاطر در ساختار این مواد مولکول‌های مجزا وجود ندارند. در ساختار این ماده، هر اتم سیلیسیم توسط چهار پیوند به ۴ اتم اکسیژن متصل شده است. اتم‌های سیلیسیم، در ساختار این ماده فاقد جفت الکترون ناپیوندی هستند.

سیلیسیم و کربن

سیلیسیم یک عنصر شبه‌فلزی از دورهٔ سوم جدول تناوبی است که همانند کربن، در گروه چهاردهم جای دارد. برخلاف عنصر سیلیسیم، کربن یک عنصر نافلزی است. اتم‌های کربن و سیلیسیم در واکنش با اتم‌های سایر عناصر، ۴ الکترون ظرفیتی خود را به اشتراک گذاشته و با تشکیل ۴ پیوند اشتراکی، به آرایش هشت‌تایی پایدار می‌رسند. از این عناصر تاکنون یون تک اتمی در هیچ ترکیبی در طبیعت شناخته نشده است.

۶۸- جدول زیر، اطلاعات مربوط به نوعی خاک رس را نشان می‌دهد:

ماده	SiO_2	H_2O	Al_2O_3	MgO	Na_2O	Au	Pt
درصد جرمی	۶۹	۱۲	۸/۵	۴	۳/۱	۲/۵	۰/۹

اگر به یک نمونه از این خاک تا حدی محلول هیدروکلریک اسید با $pH = ۰/۳$ و با چگالی $۱/۲۵ g.mL^{-۱}$ اضافه کنیم که فقط با ۱۰ درصد از اکسیدهای فلزی موجود در آن واکنش بدهد، درصد جرمی سیلیس در نمونه ایجادشده چقدر می‌شود؟
($Al = ۲۷ , Mg = ۲۴ , Na = ۲۳ , O = ۱۶ : g.mol^{-۱}$) (معادله واکنش‌ها موازنه شود.)

$$Al_2O_3(s) + HCl(aq) \rightarrow AlCl_3(aq) + H_2O(l)$$
$$MgO(s) + HCl(aq) \rightarrow MgCl_2(aq) + H_2O(l)$$
$$Na_2O(s) + HCl(aq) \rightarrow NaCl(aq) + H_2O(l)$$

۱) ۱۱/۵ ۲) ۳۴/۵ ۳) ۴۶ ۴) ۲۳

پاسخ: گزینهٔ ۴ (سخت ـ محاسباتی ـ زمان‌بر ـ صفحهٔ ۶۹ ـ ۱۲۰۳)

در رابطه با محلول هیدروکلریک اسید مصرف‌شده در این فرایند، داریم:

$$[H^+] = ۱۰^{-pH} = ۱۰^{-۰/۳} = ۱۰^{۰/۷-۱} = ۰/۵\, mol.L^{-۱}$$

هیدروکلریک اسید، یک اسید قوی بوده و غلظت یون هیدروژن با غلظت اولیه اسید در محلول آن برابر است. بر این اساس، داریم:

$$[H^+] = [HCl] = ۰/۵\, mol.L^{-۱}$$

یک نمونه ۱۰۰ گرمی از این خاک رس را در نظر می‌گیریم. در این نمونه از خاک رس، با توجه به اطلاعات داده‌شده، مقدار ۶۹ گرم سیلیس (سیلیسیم دی‌اکسید)، ۸/۵ گرم آلومینیم اکسید، ۴ گرم منیزیم اکسید و ۳/۱ گرم سدیم اکسید وجود دارد. این مواد، بر اساس معادله‌های زیر با هیدروکلریک اسید وارد واکنش می‌شوند:

$$Al_2O_3(s) + ۶HCl(aq) \rightarrow ۲AlCl_3(aq) + ۳H_2O(l)$$
$$MgO(s) + ۲HCl(aq) \rightarrow MgCl_2(aq) + H_2O(l)$$
$$Na_2O(s) + ۲HCl(aq) \rightarrow ۲NaCl(aq) + H_2O(l)$$

با توجه به جرم هر اکسید فلزی در خاک رس و غلظت محلول هیدروکلریک اسید، جرمی از این محلول که برای خنثی کردن کل هر اکسید فلزی مصرف می‌شود را محاسبه می‌کنیم. اول به سراغ آلومینیم اکسید می‌رویم:

$$?\, g \text{ محلول} = ۸/۵\, g\, Al_2O_3 \times \frac{۱\, mol\, Al_2O_3}{۱۰۲\, g\, Al_2O_3} \times \frac{۶\, mol\, HCl}{۱\, mol\, Al_2O_3} \times \frac{۱\, L \text{ محلول}}{۰/۵\, mol\, HCl} \times \frac{۱۰۰۰\, mL \text{ محلول}}{۱\, L \text{ محلول}} \times \frac{۱/۲۵\, g \text{ محلول}}{۱\, mL \text{ محلول}} = ۱۲۵۰\, g$$

در قدم بعد، مقدار اسید لازم برای خنثی کردن دو اکسید فلزی دیگر را محاسبه می‌کنیم:

$$?\, g \text{ محلول} = ۴\, g\, MgO \times \frac{۱\, mol\, MgO}{۴۰\, g\, MgO} \times \frac{۲\, mol\, HCl}{۱\, mol\, MgO} \times \frac{۱\, L \text{ محلول}}{۰/۵\, mol\, HCl} \times \frac{۱۰۰۰\, mL \text{ محلول}}{۱\, L \text{ محلول}} \times \frac{۱/۲۵\, g \text{ محلول}}{۱\, mL \text{ محلول}} = ۵۰۰\, g$$

$$?\, g \text{ محلول} = ۳/۱\, g\, Na_2O \times \frac{۱\, mol\, Na_2O}{۶۲\, g\, Na_2O} \times \frac{۲\, mol\, HCl}{۱\, mol\, Na_2O} \times \frac{۱\, L \text{ محلول}}{۰/۵\, mol\, HCl} \times \frac{۱۰۰۰\, mL \text{ محلول}}{۱\, L \text{ محلول}} \times \frac{۱/۲۵\, g \text{ محلول}}{۱\, mL \text{ محلول}} = ۲۵۰\, g$$

سنجش کلاد
www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshCloud

اگر بخواهیم کل اکسیدهای فلزی را به‌طور کامل خنثی کنیم، باید ۲۰۰۰ گرم ($۲۰۰۰g = ۲۵۰ + ۵۰۰ + ۱۲۵۰$) محلول اسیدی را به خاک اضافه کنیم. طبق فرض سؤال، می‌خواهیم فقط ۱۰٪ از کل اکسیدهای فلزی را خنثی کنیم، پس به ۲۰۰ گرم محلول اسیدی نیاز داریم. در این حالت، ۲۰۰ گرم محلول اسیدی را به ۱۰۰ گرم نمونه اولیه خاک اضافه می‌کنیم و مخلوطی به جرم ۳۰۰ گرم به‌دست می‌آید. در این رابطه، داریم:

$$\text{جرم نهایی مخلوط} = \text{جرم خاک اولیه} + \text{جرم محلول اضافه شده} = ۱۰۰ + ۲۰۰ = ۳۰۰\ g$$

جرم سیلیس در این نمونه برابر با ۶۹ گرم بوده است. بر این اساس، داریم:

$$\text{درصد جرمی } SiO_۲ = \frac{\text{جرم } SiO_۲}{\text{جرم کل نمونه}} \times ۱۰۰ = \frac{۶۹\ g\ SiO_۲}{۳۰۰\ g\ \text{نمونه}} \times ۱۰۰ = \text{درصد } ۲۳$$

۶۹- کدام‌یک از مطالب زیر درست است؟

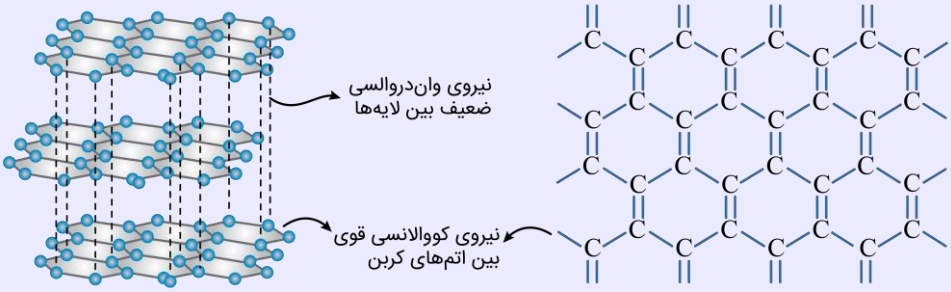
۱) نوعی جامد کووالانسی که در ساخت منشور کاربرد دارد، همانند الماس، فقط از یک نوع اتم ساخته‌شده است.
۲) گرافیت، ظاهر کدر داشته و تراکم اتم‌های کربن در یک نمونهٔ آن، کمتر از تراکم اتم‌های کربن در الماس است.
۳) گرافن، از چینش دوبعدی از اتم‌های کربن ساخته‌شده و همانند مقداری یخ خشک، یک ماده شکننده است.
۴) چون آنتالپی پیوند $Si - O$، بیشتر از پیوند $Si - Si$ است، یک نمونه سیلیسیم پایدارتر از سیلیس است.

پاسخ: گزینهٔ ۲ (آسان ـ مفهومی و حفظی ـ سریع ـ صفحهٔ ۷۲ ـ ۱۲۰۳)

گرافیت، یک ماده کدر سیاه‌رنگ است. با توجه به فاصله نسبتاً زیاد میان لایه‌های کربنی موجود در ساختار گرافیت، تراکم اتم‌های کربن در این ماده کم‌تر از تراکم اتم‌های کربن در الماس است و به همین خاطر، چگالی گرافیت کم‌تر از چگالی الماس خواهد بود.

گرافیت

گرافیت جامدی کووالانسی با چینش دوبعدی اتم‌ها است. اتم‌های کربن در گرافیت در هر صفحه دو بعدی با پیوند کووالانسی به یکدیگر متصل هستند؛ در حالی که میان دو صفحه مجاور، نیروی وان‌دروالسی وجود دارد. از آن‌جا که بین لایه‌های مختلف سازنده گرافیت نیروی ضعیف وان‌دروالسی وجود دارد، این لایه‌ها می‌توانند به‌راحتی بر روی یکدیگر بلغزند و به همین خاطر، گرافیت برخلاف الماس ماده بسیار نرمی است. هر لایه جداگانه از گرافیت، گرافن نام داشته که شفاف و انعطاف‌پذیر است. گرافن استحکام ویژه‌ای دارد؛ به‌طوری‌که مقاومت کششی آن در حدود ۱۰۰ برابر فولاد است. در گرافن، اتم‌های کربن با پیوندهای اشتراکی، حلقه‌های شش‌گوشه تشکیل می‌دهند. توجه داریم که گرافن و گرافیت، هر دو رسانا هستند. تصویر زیر، ساختار لایه‌های گرافن موجود در بلور گرافیت را نمایش می‌دهد:



بررسی سایر گزینه‌ها:

۱) کوارتز ازجمله نمونه‌های خالص و ماسه ازجمله نمونه‌های ناخالص سیلیس است. سیلیس خالص به دلیل داشتن خواص نوری ویژه، در ساخت منشورها و عدسی‌ها به کار می‌رود و همان‌طور که می‌دانیم، منشور وسیله‌ای است که با استفاده از آن می‌توان نور سفید رنگ خورشید را به پرتوهای مرئی سازندهٔ آن تجزیه کرد. سیلیس از عناصر اکسیژن و سیلیسیم ساخته شده است، درحالی که الماس فقط از اتم کربن ساخته شده است.

۳) گرافن، تک لایه‌ای از گرافیت است که در آن، اتم‌های کربن با پیوندهای اشتراکی حلقه‌های شش گوشه تشکیل داده‌اند. بر این اساس، می‌توان گفت گرافن ساختار صفحه‌ای داشته و یک گونهٔ دوبعدی است. این ماده یک گونه شیمیایی شفاف و انعطاف‌پذیر است. این در حالی است که یخ خشک، نمونه‌ای از کربن دی‌اکسید جامد بوده و شکننده است.

سنجش کلاد
www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshCloud

ویژگی ترکیب‌های یونی

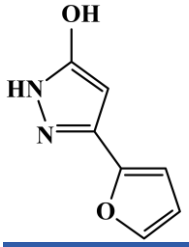
جدول زیر، برخی از ویژگی‌های کلی مواد مولکولی، ترکیب‌های یونی، جامدهای فلزی و مواد کووالانسی را نشان می‌دهد.

	جامدهای یونی	جامدهای کووالانسی	جامدهای فلزی	مواد مولکولی
حالت فیزیکی در دمای اتاق	جامد	جامد	به‌جز جیوه، در بقیه موارد جامد	جامد، مایع یا گاز
رسانایی در حالت مذاب	رسانا	نارسانا	رسانا	نارسانا
رسانایی در حالت جامد	نارسانا	نارسانا (به‌جز گرافیت)	رسانا	نارسانا
دمای ذوب	خیلی بالا	خیلی بالا	بالا	پایین
شکنندگی در حالت جامد	شکننده	شکننده	غیر شکننده	اغلب شکننده
ذرات سازنده	آنیون‌ها و کاتیون‌ها	شبکهٔ غول‌آسا از اتم‌ها	کاتیون‌ها و الکترون‌ها	مولکول‌های مجزا

۴) سیلیسیم در طبیعت به حالت خالص وجود نداشته و به‌طور عمده به شکل سیلیس یافت می‌شود. در واقع چون آنتالپی پیوند $Si-O$ بزرگ‌تر از آنتالپی پیوند $Si-Si$ است، یک نمونه از سیلیس پایداری بیشتری در مقایسه با سیلیسیم خالص دارد و به همین خاطر، اغلب اتم‌های Si موجود در طبیعت در ساختار سیلیس جای می‌گیرند.

ماز

۷۰- تفاوت درصد جرمی اتم‌های کربن و هیدروژن در ترکیب مقابل، برابر با چند درصد بوده و در ساختار هر مولکول از این ماده، چند جفت الکترون ناپیوندی روی اتم‌ها وجود دارد؟ ($O=16, N=14, C=12, H=1 : g.mol^{-1}$)



۱) ۶ ـ ۵۶
۲) ۶ ـ ۵۲
۳) ۸ ـ ۵۶
۴) ۸ ـ ۵۲

پاسخ: گزینهٔ ۲ (متوسط ـ محاسباتی ـ استاندارد ـ صفحهٔ ۶۹ ـ ۱۲۰۳)

ابتدا با توجه به فرمول زیر، تعداد هیدروژن موجود در این ترکیب را به‌دست می‌آوریم:

$$\text{تعداد اتم هیدروژن} = (۲ \times \text{تعداد کربن}) + ۲ - (۲ \times \text{تعداد حلقه}) - (۲ \times \text{تعداد پیوند دوگانه}) - (۴ \times \text{تعداد پیوند سه‌گانه}) + (\text{تعداد نیتروژن})$$

$$= (۷ \times ۲) + ۲ - (۲ \times ۲) - (۴ \times ۲) + ۲ = ۶$$

بنابراین فرمول مولکولی ترکیب ذکر شده به‌صورت $C_۷H_۶N_۲O_۲$ است. با توجه به فرمول شیمیایی این ترکیب، جرم مولی آن برابر با ۱۵۰ گرم بر مول می‌شود. بر این اساس، درصد جرمی اتم‌های کربن و هیدروژن را محاسبه می‌کنیم:

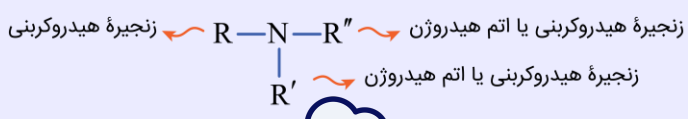
$$\text{درصد جرمی هیدروژن} = \frac{\text{جرم اتم‌های } H}{\text{جرم مولی ترکیب}} \times ۱۰۰ = \frac{۶ \times ۱}{۱۵۰} \times ۱۰۰ = \text{درصد } ۴$$

$$\text{درصد جرمی کربن} = \frac{\text{جرم اتم‌های } C}{\text{جرم مولی ترکیب}} \times ۱۰۰ = \frac{۷ \times ۱۲}{۱۵۰} \times ۱۰۰ = \text{درصد } ۵۶$$

با توجه به محاسبه انجام شده، تفاوت درصد جرمی اتم‌های کربن و هیدروژن در ترکیب مورد نظر برابر با ۵۲٪ می‌شود. ترکیب داده شده دارای ۲ اتم نیتروژن و ۲ اتم اکسیژن است. از طرفی، می‌دانیم که هر اتم نیتروژن یک جفت الکترون ناپیوندی و هر اتم اکسیژن نیز دو جفت الکترون ناپیوندی دارد، پس ترکیب آلی مورد نظر مجموعاً ۶ جفت الکترون ناپیوندی دارد.

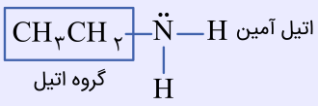
آمین‌ها

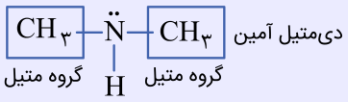
آمین‌ها گروهی از ترکیب‌های آلی نیتروژن‌دار هستند که از جایگزین شدن یک، دو و یا سه مورد از اتم‌های هیدروژن موجود در ساختار آمونیاک ($NH_۳$) با زنجیره‌های هیدروکربنی حاصل می‌شوند. ساختار کلی آمین‌ها به‌صورت زیر است:



سنجش کلاد
www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshCloud

در ساختار آمین‌ها اتم‌های H، C و N وجود دارند. وجود اتم N در ساختار آمین‌ها، خواص شیمیایی و فیزیکی منحصر به فردی به آن‌ها داده است. برای نام‌گذاری آمین‌ها کافی است ابتدا نام و تعداد گروه‌های آلکیل متصل به اتم نیتروژن را ذکر کرده و پس از آن، کلمهٔ (آمین) را قرار بدهیم. به نام‌گذاری آمین‌های زیر توجه کنید:





۷۱- کدام موارد از عبارت‌های زیر درست هستند؟

الف ـ ماده‌ای که از آن در ساخت ظرف فرایند هال استفاده می‌شود، دارای ساختار لایه‌ای است.

ب ـ الماس، رسانای جریان الکتریسیته بوده و نسبت به سیلیسیم خالص، دمای ذوب بالاتری دارد.

ج ـ جامدهای کووالانسی، محلول در آب نیستند اما به راحتی در مواد ناقطبی مثل روغن حل می‌شوند.

د ـ در الماس، چینش اتم‌ها در اطراف هر اتم کربن، مشابه چینش اتم‌های هیدروژن در اطراف اتم کربن در متان است.

۱) «الف» و «ج» ۲) «الف» و «د» ۳) «ب» و «ج» ۴) «ب» و «د»

پاسخ: گزینهٔ ۲ **(متوسط ـ مفهومی و حفظی ـ استاندارد ـ صفحهٔ ۷۳ ـ ۱۲۰۳)**

عبارت‌های (الف) و (د) درست هستند.

بررسی سایر موارد:

الف از آن‌جا که رسانایی الکتریکی فلزها و گرافیت توسط الکترون‌ها انجام می‌شود، به این مواد رسانای الکترونی می‌گویند. با توجه به رسانایی بالای گرافیت، از این ماده به‌عنوان الکترود در سلول‌های الکترولیتی از جمله سلول مورد استفاده برای فرایند هال استفاده می‌شود. گرافیت، نوعی جامد کووالانسی بوده و ساختار لایه‌ای دارد. در جدول زیر نیز، برخی از ویژگی‌های گرافیت و الماس نشان داده شده است:

آلوتروپ‌های طبیعی کربن			
گرافیت		الماس	
سطحی تیره دارد، نرم و شکننده بوده و در طبیعت یافت می‌شود.	یک ماده دیرگداز با نقطهٔ ذوب بالا است.	درخشان، شکننده و سخت است.	یک ماده دیرگداز با نقطهٔ ذوب بسیار بالا است.
به‌عنوان آند و کاتد در سلول‌های الکترولیتی و در تولید مغز مداد کاربرد دارد و در گذشته به سرب مداد معروف بوده است.	ساختاری لایه‌ای داشته که در هر لایه، اتم‌های کربن با ۴ پیوند به ۳ اتم کربن دیگر (دو پیوند یگانه و یک پیوند دوگانه) متصل است.	از الماس نامرغوب در ساخت مته و ابزار برش و از الماس درخشان نیز برای ساخت زیورآلات استفاده می‌شود.	ساختاری غول‌آسا و یکپارچه سه‌بعدی داشته و در آن، هر اتم کربن با ۴ پیوند یگانه به ۴ اتم کربن دیگر متصل است.
هر لایه از آن رسانای جریان برق (رسانای الکترونی) است.	هر لایه از آن دارای حلقه‌های ۶ ضلعی کربنی متصل به هم است.	رسانای جریان برق نیست ولی رسانایی گرمایی بالایی دارد.	در یک نمونه الماس با n اتم، $2n$ پیوند موجود است.
گرافیت، پایدارتر از الماس است ⟸ سطح انرژی الماس از گرافیت بیشتر بوده و در واکنش سوختن، گرمای بیشتری نسبت به گرافیت آزاد می‌کند.			

ب گرافیت رسانا است در حالی که الماس رسانایی الکتریکی ندارد. دمای ذوب یک نمونه از الماس، به‌خاطر قوی‌تر بودن پیوندهای موجود در آن، در مقایسه با سیلیسیم خالص بالاتر است.

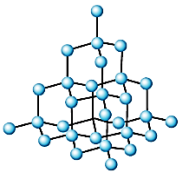
دمای ذوب مواد کووالانسی

مواد کووالانسی، شامل شمار بسیار زیادی از اتم‌ها می‌شوند که توسط پیوندهای اشتراکی به یکدیگر متصل شده‌اند. چون این مواد در شرایط اتاق حالت جامد دارند، آن‌ها را با نام جامدهای کووالانسی نیز می‌خوانند. برای ذوب کردن یک جامد کووالانسی باید پیوندهای اشتراکی میان اتم‌ها شکسته شود، پس دمای ذوب این مواد به قدرت پیوندهای اشتراکی در آن‌ها وابسته است. پیوند $Si-Si$ موجود در سیلیسیم خالص با توجه به شعاع بیشتر اتم‌های سازنده آن، قدرت کمتری نسبت به پیوند $C-C$ میان اتم‌های موجود در بلور الماس دارد؛ بنابراین، نقطهٔ ذوب سیلیسیم کمتر از الماس است.

ج جامدهای کووالانسی، شبکه‌ای گسترده داشته و همهٔ اتم‌های موجود در ساختار آن‌ها توسط پیوند اشتراکی به هم متصل شده‌اند. چون همه ذرات سازنده این مواد خیلی محکم به هم متصل شده‌اند، جامدهای کووالانسی نه در حلال‌های قطبی مثل آب حل می‌شوند، نه در حلال‌های ناقطبی مثل هگزان و انواع روغن‌ها حل می‌شوند.

سنجش کلاد
www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshCloud

در ساختار الماس هر اتم C توسط ۴ پیوند یگانه به ۴ اتم کربن دیگر متصل شده و یک شبکه غول‌آسای بسیار بزرگ را پدید آورده است. اتم کربن در مولکول CH_4 نیز با ۴ پیوند $C-H$، به ۴ اتم هیدروژن متصل می‌شود. ساختار الماس به‌صورت زیر است:



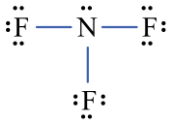
چینش اتم‌ها در اطراف هر اتم کربن، در الماس و متان مشابه هم است.

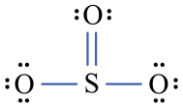
۷۲- در کدام مولکول، اتم مرکزی دارای بار جزئی مثبت بوده و در ساختار این مولکول، چند جفت الکترون ناپیوندی وجود دارد؟

۱) H_2S ـ ۶ ۲) Cl_2O ـ ۸ ۳) NF_3 ـ ۹ ۴) SO_3 ـ ۸

پاسخ: گزینهٔ ۴ (آسان ـ مفهومی ـ سریع ـ صفحهٔ ۷۷ ـ ۱۲۰۳)

در ساختار یک مولکول، اتم مرکزی در حالتی دارای بار جزئی مثبت می‌شود که به اتم‌هایی با خاصیت نافلزی بیشتر متصل شده باشد. در این حالت، اتم‌های کناری از اتم مرکزی الکترون به سمت خود کشیده و اتم مرکزی بار جزئی مثبت پیدا خواهد کرد. در مولکول‌های NF_3 و SO_3، اتم‌های کناری در مقایسه با اتم مرکزی خاصیت نافلزی بیشتری دارند و بر این اساس، اتم مرکزی بار جزئی مثبت پیدا می‌کند. ساختار مولکولی این دو ماده به‌صورت زیر است:



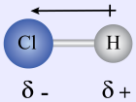


در مولکول‌های NF_3 و SO_3، به‌ترتیب ۱۰ و ۸ جفت الکترون ناپیوندی وجود دارد.

نقشه پتانسیل الکترواستاتیکی

شیمی‌دان‌ها برای نمایش توزیع الکترون‌ها در یک گونه، از شکل‌هایی به نام نقشه پتانسیل الکترواستاتیکی استفاده می‌کنند. در این نقشه‌ها، رنگ آبی تراکم کم‌تر الکترون‌ها (بار جزئی مثبت) و رنگ قرمز تراکم بیشتر الکترون‌ها (بار جزئی منفی) را نشان می‌دهد. به‌عنوان مثال، نقشه الکترواستاتیکی مولکول‌های آب به‌صورت زیر است:

برای نشان دادن بار ایجادشده توسط الکترون‌های پیوندی، می‌توانیم از یک بردار الکتریکی به شکل ⟵+ که ابتدای آن سمت بار مثبت و انتهای آن سمت بار منفی را نشان می‌دهد، استفاده کنیم. به‌عنوان مثال، بردار بار الکتریکی مولکول هیدروژن کلرید به‌صورت زیر رسم می‌شود:



اگر دو اتم یکسان به هم متصل شوند، الکترون‌های پیوندی به‌طور مساوی بین آن‌ها توزیع می‌شوند. در این حالت، هیچ بردار بار الکتریکی ایجاد نمی‌شود. اگر روی اتم مرکزی یک مولکول چندتایی، هیچ الکترون ناپیوندی وجود نداشته باشد و اتم‌های متصل به اتم مرکزی در آن مولکول نیز یکسان باشند، مولکول موردنظر ناقطبی خواهد بود و در حضور یک میدان الکتریکی جهت‌گیری پیدا نخواهد کرد. در غیر این صورت، مولکول مورد نظر قطبی است.

۷۳- اگر روی یک نمونه به جرم ۶۰ گرم از نمک $CaCN_2$، مقدار کافی آب بریزیم، ۶۰ گرم رسوب کلسیم کربنات به همراه گاز آمونیاک به‌دست می‌آید. درصد جرمی نمک $CaCN_2$ در نمونه اولیه چقدر بوده و طی این فرایند، چند لیتر گاز آمونیاک در شرایط استاندارد تولید شده است؟ $(Ca=40, O=16, N=14, C=12 : g.mol^{-1})$

۱) ۶۰ ـ ۱۳/۴۴ ۲) ۶۰ ـ ۲۶/۸۸ ۳) ۸۰ ـ ۱۳/۴۴ ۴) ۸۰ ـ ۲۶/۸۸

سنجش کلاد
www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshCloud

پاسخ: گزینهٔ ۴ (متوسط ـ محاسباتی ـ استاندارد ـ صفحهٔ ۶۹ ـ ۱۲۰۳)

طبق فرض سؤال، در واکنش میان $CaCN_2$ با آب، رسوب کلسیم کربنات به همراه گاز آمونیاک تولید می‌شود. بر این اساس، معادلهٔ موازنه شدهٔ واکنش شیمیایی به‌صورت زیر است:

$$CaCN_2(s) + 3H_2O(l) \longrightarrow CaCO_3(s) + 2NH_3(g)$$

در قدم اول، جرم $CaCN_2$ مصرف شده را حساب می‌کنیم. بر این اساس، داریم:

$$?\,g\,CaCN_2 = 60\,g\,CaCO_3 \times \frac{1\,mol\,CaCO_3}{100\,g\,CaCO_3} \times \frac{1\,mol\,CaCN_2}{1\,mol\,CaCO_3} \times \frac{80\,g\,CaCN_2}{1\,mol\,CaCN_2} = 48\,g$$

درصد جرمی

درصد جرمی هر ماده در نمونه، گرم آن ماده را در صد گرم از نمونه نشان می‌دهد. برای محاسبه درصد جرمی یک ماده در نمونه، از رابطه زیر استفاده می‌کنیم:

$$\text{درصد جرمی ماده} = \frac{\text{جرم ماده یا عنصر در نمونه مورد نظر}}{\text{جرم کل نمونه}} \times 100$$

در نهایت، درصد جرمی نمک $CaCN_2$ را محاسبه می‌کنیم:

$$\text{درصد جرمی نمک} = \frac{\text{جرم نمک}}{\text{جرم کل نمونه}} \times 100 = \frac{48}{60} \times 100 = \text{درصد } 80$$

بنابراین درصد جرمی نمک $CaCN_2$ در نمونه اولیه برابر با ۸۰ درصد است. برای محاسبه درصد جرمی واکنش‌دهنده مصرف شده با استفاده از کسرهای پیش‌ساخته، به‌صورت زیر عمل می‌کنیم:

$$\left[\frac{\text{درصد جرمی} \times \text{جرم کلسیم سیانید ناخالص}}{100 \times \text{جرم مولی} \times \text{ضریب}}\right] = \left[\frac{\text{جرم کلسیم کربنات}}{\text{جرم مولی} \times \text{ضریب}}\right] \Longrightarrow \frac{60 \times \frac{p}{100}}{1 \times 80} = \frac{60}{1 \times 100} \Longrightarrow p = \%80$$

در قدم بعد، با توجه به اطلاعات داده شده، حجم گاز آمونیاک تولید شده را محاسبه می‌کنیم:

$$?\,L\,NH_3 = 60\,g\,CaCO_3 \times \frac{1\,mol\,CaCO_3}{100\,g\,CaCO_3} \times \frac{2\,mol\,NH_3}{1\,mol\,CaCO_3} \times \frac{22/4\,L\,NH_3}{1\,mol\,NH_3} = 26/88\,L$$

۷۴- کدام‌یک از مطالب زیر نادرست است؟

۱) رفتارهای شیمیایی ۲-هگزن، به‌طور عمده وابسته به جفت الکترون‌های پیوندی و ناپیوندی در آن است.

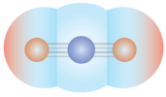
۲) ذرات کربن دی‌اکسید، در یک میدان الکتریکی، از سمت اتم کربن به طرف قطب منفی جهت‌گیری می‌کنند.

۳) در ساختار یخ، هر اتم اکسیژن از هر مولکول در تشکیل ۲ پیوند هیدروژنی با سایر مولکول‌ها شرکت کرده است.

۴) برای توصیف یک نمونه آب، برخلاف گرافیت، می‌توان از واژه‌های شیمیایی رایج مثل فرمول مولکولی استفاده کرد.

پاسخ: گزینهٔ ۲ (متوسط ـ مفهومی ـ استاندارد ـ صفحهٔ ۷۶ ـ ۱۲۰۳)

کربن دی‌اکسید، اکسید ناقطبی کربن به شمار می‌رود. نقشه‌ی پتانسیل الکترواستاتیکی کربن دی‌اکسید به‌صورت زیر است:

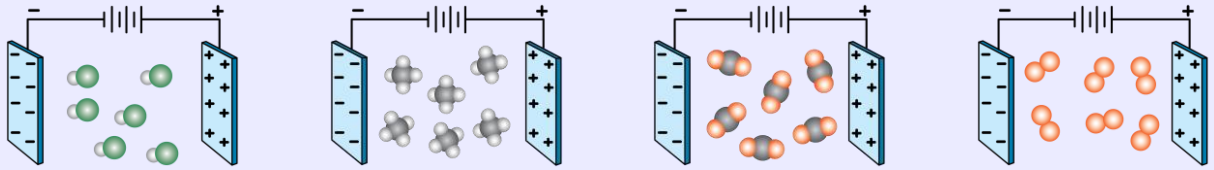


در مولکول خطی کربن دی‌اکسید، تراکم بار الکتریکی بر روی اتم‌های اکسیژن بیشتر از اتم کربن است، از این رو به اتم‌های اکسیژن بار جزئی منفی ($-\delta$) و به اتم کربن، بار جزئی مثبت ($+\delta$) نسبت داده می‌شود. به علت توزیع متقارن بار الکتریکی پیرامون اتم مرکزی، این مولکول در میدان الکتریکی جهت‌گیری نمی‌کند و گشتاور دو قطبی آن برابر با صفر است.

سنجش کلاد
www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshCloud

میدان الکتریکی

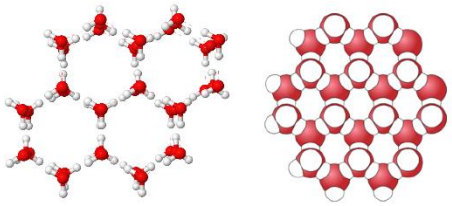
مولکول‌های ناقطبی، سر مثبت و منفی نداشته و توزیع الکترون در آن‌ها به‌صورت متقارن است. بر این اساس، مولکول‌های ناقطبی در حضور میدان الکتریکی جهت‌گیری پیدا نمی‌کنند. در نقطه مقابل، مولکول‌های قطبی، سر مثبت و منفی داشته و توزیع الکترون در آن‌ها به‌صورت نامتقارن انجام شده است. بر این اساس، مولکول‌های قطبی در حضور یک میدان الکتریکی جهت‌گیری پیدا می‌کنند. در این حالت، سر منفی مولکول‌ها به طرف قطب مثبت جهت‌گیری کرده و سر مثبت مولکول‌ها به طرف قطب منفی جهت‌گیری می‌کند. برای مثال، در رابطه با برخی از مولکول‌های ناقطبی و قطبی، داریم:



بررسی سایر گزینه‌ها:

(۱) رفتار فیزیکی مواد مولکولی مانند دمای ذوب و جوش، به نوع و قدرت نیروهای بین مولکولی آن‌ها و رفتار شیمیایی این مواد مانند واکنش‌پذیری، به‌طور عمده به پیوندهای اشتراکی (جفت الکترون‌های پیوندی) و جفت الکترون‌های ناپیوندی موجود در مولکول بستگی دارد.

(۳) در بلور یخ، هر مولکول آب دو اتم هیدروژن و یک اتم اکسیژن دارد. هر اتم اکسیژن به ۲ اتم هیدروژن از مولکول‌های دیگر و هر اتم هیدروژن به یک اتم اکسیژن از مولکول دیگر با پیوند هیدروژنی متصل است. با توجه به توضیحات داده شده، در بلور یخ هر مولکول آب با ۴ پیوند هیدروژنی در ارتباط با ۴ مولکول آب دیگر قرار می‌گیرد. تصویر زیر نمایی از بلور یخ را نشان می‌دهد:



ساختار یخ

یخ در ساختار خود شامل حلقه‌های شش‌گوشه می‌باشد. هر یک از حلقه‌های شش‌گوشه موجود در ساختار یخ، شامل ۶ پیوند کووالانسی (اشتراکی) و ۶ پیوند هیدروژنی می‌شود. به عبارت دیگر، هر حلقه از برقرار شدن مجموعاً ۱۲ پیوند میان ۱۲ اتم مختلف تشکیل شده است. در این ساختار، هر اتم اکسیژن به دو اتم هیدروژن با پیوند اشتراکی و به دو اتم هیدروژن از مولکول‌های دیگر نیز با پیوند هیدروژنی متصل شده است.

(۴) واژه‌های شیمیایی رایج مانند فرمول مولکولی و نیروهای بین مولکولی را نمی‌توان برای توصیف ترکیبات یونی، جامدهای فلزی و همچنین جامدهای کووالانسی به‌کار برد؛ چراکه این مواد در ساختار ذره‌ای خود مولکول ندارند. این اصطلاحات فقط برای توصیف مواد مولکولی به کار می‌روند. گرافیت، یک جامد کووالانسی است.

ماز

۷۵- چه تعداد از عبارت‌های زیر درست است؟

الف ـ اگر اتم‌های کلر مولکول کلروفرم را با اتم فلوئور جایگزین کنیم، گشتاور دوقطبی ذرات این ماده افزایش می‌یابد.

ب ـ گاز نیتروژن، واکنش‌پذیری کمی داشته و در مولکول آن، تراکم بار منفی در فضای بین هسته دو اتم بیشتر است.

ج ـ یک باریکه مایع از متانول، در صورت مجاورت با یک میله شیشه‌ای باردار، از مسیر خود منحرف می‌شود.

د ـ گاز اتین، در جوشکاری کاربرد داشته و در نقشه پتانسیل الکترواستاتیکی آن، دو سر مولکول رنگ آبی دارند.

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

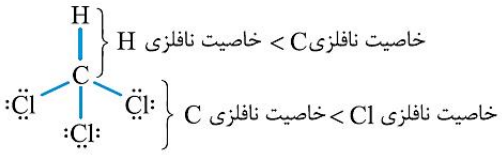
پاسخ: گزینهٔ ۴ **(سخت ـ مفهومی ـ استاندارد ـ صفحهٔ ۷۷ ـ ۱۲۰۳)**

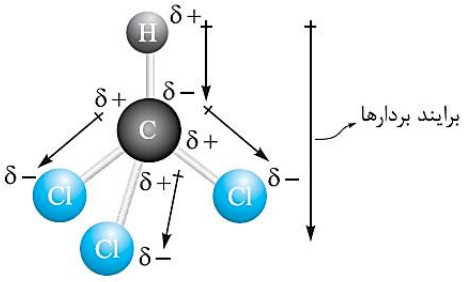
همه عبارت‌های داده شده درست هستند.

سنجش کلاد
www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshCloud

بررسی سایر موارد:

الف) فرمول مولکولی کلروفرم به‌صورت $CHCl_3$ است. با جایگزین کردن اتم‌های کلر موجود در کلروفرم با اتم فلوئور، مولکول تری‌فلوئورومتان با فرمول شیمیایی CHF_3 ایجاد شده و طی این فرایند، اتم‌هایی که در قسمت پایین مولکول هستند خاصیت نافلزی بیشتری پیدا می‌کنند. در این حالت، قسمت پایینی مولکول الکترون‌ها را با شدت بیشتری جذب کرده و گشتاور دوقطبی مولکول بیشتر می‌شود. تصاویر زیر ساختار لوویس، بردار بارهای الکتریکی و نقشهٔ پتانسیل الکترواستاتیکی کلروفرم را نشان می‌دهند:

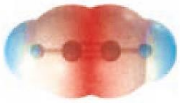




ب) گاز نیتروژن، دارای یک پیوند سه‌گانه در ساختار خود بوده و به همین خاطر، واکنش‌پذیری بسیار ناچیزی دارد. الکترون‌های پیوندی موجود در مولکول‌های دو اتمی جور هسته مثل فلوئور، نیتروژن و یا اکسیژن، بیشتر وقت خود را در فضای بین دو اتم موجود در مولکول مورد نظر سپری می‌کنند. تصویر زیر، نقشه پتانسیل الکترواستاتیکی مولکول نیتروژن را نشان می‌دهد:

ج) برای تشخیص قطبی یا ناقطبی بودن مولکول‌های سازنده یک مایع، می‌توانیم یک میله شیشه‌ای باردار را به باریکه‌ای از آن مایع نزدیک کنیم. اگر باریکهٔ مایع تحت تأثیر میدان ایجادشده توسط میله شیشه‌ای منحرف شود، پی می‌بریم که مولکول‌های سازنده آن ماده قطبی هستند در حالی که اگر باریکهٔ مایع منحرف نشود، پی می‌بریم که مولکول‌های سازنده آن ماده، ناقطبی هستند. چون متانول از ذرات قطبی ساخته شده است، یک باریکهٔ مایع از آن، در صورت مجاورت با یک میله شیشه‌ای باردار، از مسیر خود منحرف می‌شود.

د) در مولکول‌های اتین (اولین عضو خانواده آلکین‌ها با فرمول مولکولی C_2H_2) خاصیت نافلزی اتم‌های کربن بیشتر از اتم‌های هیدروژن است، پس اتم‌های کربن دارای بار جزئی منفی بوده و تراکم بار الکتریکی منفی در فضای بین هستهٔ اتم‌های کربن نیز بیشتر از سایر نقاط است. تصویر زیر، نمایی از نقشه پتانسیل الکترواستاتیکی مولکول اتین را نشان می‌دهد:



گاز اتین، در جوشکاری و برش‌کاری عناصر فلزی کاربرد دارد.

۷۶- کدام‌یک از مطالب زیر نادرست است؟

۱) فلز طلا، رسانایی الکتریکی بالایی داشته و روش گیاه‌پالایی برای استخراج آن از خاک، صرفه اقتصادی دارد.
۲) منگنز، پنجمین فلز واسطه جدول تناوبی بوده و برخی از مناطق کف اقیانوس، محتوی کلوخه‌هایی از آن هستند.
۳) دفن کردن پاکت‌های کاغذی، برخلاف دفن کردن کیسه‌های پلاستیکی، با تولید گازهای آلاینده هوا همراه نیست.
۴) فلزها، منابع تجدیدناپذیر بوده و وسایل ساخته شده از آن‌ها، طی خوردگی و فرسایش به سنگ معدن تبدیل می‌شوند.

پاسخ: گزینهٔ ۳ (متوسط ـ مفهومی ـ سریع ـ صفحهٔ ۲۹ ـ ۱۱۰۱)

در مراحل ارزیابی چرخه عمر، می‌توان روند دفن شدن پاکت کاغذی و کیسه پلاستیکی را بررسی کرد. با دفن کردن پاکت‌های کاغذی، ذرات سازنده این ماده به‌تدریج به مواد ساده‌تر مثل متان تجزیه می‌شوند. گاز متان، نوعی آلاینده است و منجر به آلودگی هوا می‌شود. توجه داریم که کیسه‌های پلاستیکی به این راحتی تجزیه نشده و تا سال‌ها در کره زمین باقی می‌مانند.

سنجش کلاد
www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshCloud

ارزیابی چرخهٔ عمر

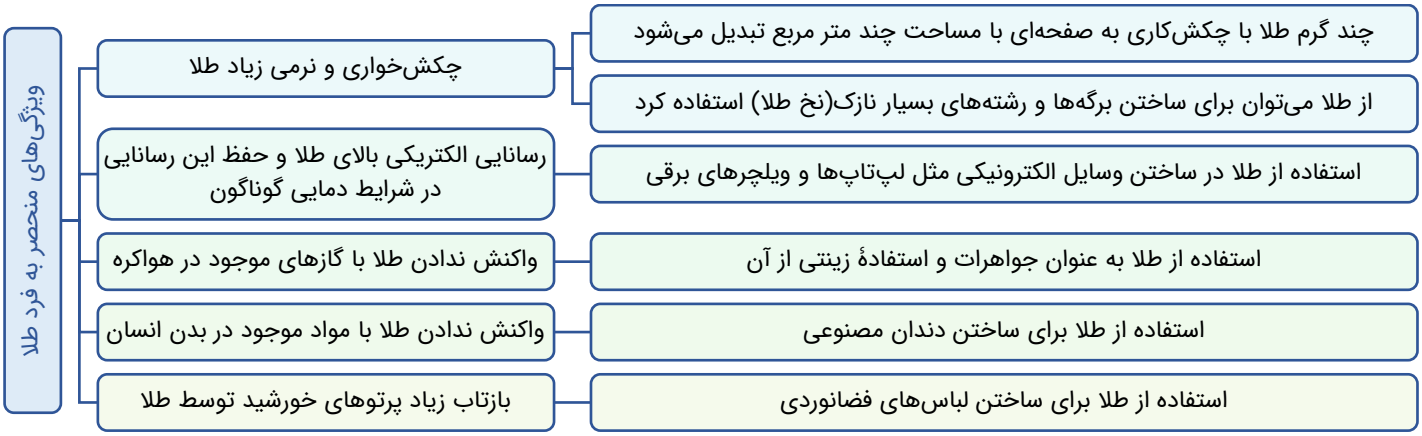
از ارزیابی چرخهٔ عمر، برای بررسی میزان تأثیر یك فراورده روی محیط زیست در مدت طول عمر آن استفاده می‌شود. این فرایند شامل چهار مرحله زیر است:

۱- ارزیابی استخراج و تولید مواد خام برای تولید یک فراورده ۲- ارزیابی تولید و توزیع ۳- ارزیابی مصرف ۴- ارزیابی دفع فراورده

در ارزیابی چرخهٔ عمر، میزان آب و انرژی مصرفی، پایدار بودن فرایند تأمین مواد خام، میزان زباله و پسماند ایجاد شده و سهم حمل و نقل در همهٔ مراحل بررسی می‌شود. ارزیابی چرخه عمر، طی تلاش برای یافتن شاخص‌هایی ایجاد شده است که کمک می‌کنند صنایع در مسیر بهره‌گیری از دانش سازگارتر با محیط زیست حرکت کنند و در راستای رسیدن به توسعهٔ پایدار، رفتار خود را اصلاح کنند.

بررسی سایر گزینه‌ها:

۱ فلز طلا با نماد شیمیایی Au، یکی از عناصر واسطه موجود در جدول دوره‌ای است. طلا، همانند پلاتین، نقره و مس، از جمله فلزهایی است که به حالت آزاد (شکل عنصری و بدون ترکیب با سایر عناصر) در طبیعت یافت می‌شود. البته توجه داریم که در میان فلزها، تنها طلا به شکل کلوخه‌ها یا رگه‌های زرد لابه‌لای خاک یافت می‌شود. طلا فلزی ارزشمند و گران‌بها است که افزون بر داشتن ویژگی‌های مشترک با سایر فلزها، ویژگی‌های منحصربه‌فردی نیز دارد. برخی از ویژگی‌های طلا به شرح زیر هستند:



ویژگی‌های مناسب طلا سبب شده کاربردهای این فلز گسترش یافته و تقاضای جهانی آن روزبه‌روز افزایش پیدا کند. به‌عنوان مثال، از فلز طلا برای ساختن لباس‌های فضانوردی استفاده می‌شود. از روش گیاه‌پالایی، می‌توان برای استخراج طلا استفاده کرد.

گیاه‌پالایی

عناصر فلزی مس، طلا، نیکل و روی موجود در خاک را با استفاده از گیاهان می‌توان استخراج کرد. در این روش، در معدن یا خاك دارای فلز مورد نظر گیاهانی را می‌کارند که می‌توانند آن فلز را جذب کنند. در مرحلهٔ بعد، گیاه را برداشت کرده و می‌سوزانند. در مرحلهٔ آخر، از خاکستر تولید شده فلز را جداسازی کرده و از آن استفاده می‌کنند. مراحل انجام شده به‌صورت زیر است:

استخراج فلز از خاکستر حاصل از سوزاندن گیاهان ← برداشت گیاهان و سوزاندن آن‌ها ← کاشت گیاه در خاک حاوی فلز مورد نظر

درصد فلز روی در سنگ معدن بیشتر از درصد فلز روی در یک کیلوگرم گیاه است، لذا روش گیاه پالایی برای فلز روی مناسب نیست. از طرفی، درصد فلز نیکل در سنگ معدن کمتر از درصد فلز نیکل در یک کیلوگرم گیاه است، با این حال استخراج نیکل نیز با این روش به علت قیمت کم نیکل صرفه اقتصادی ندارد. درصد فلزهای مس و طلا در سنگ معدن کمتر از درصد این فلزها در یک کیلوگرم گیاه است و همچنین این دو فلز قیمت بالایی نیز دارند؛ به همین علت استفاده از گیاهان برای استخراج این دو فلز صرفه اقتصادی بیشتری نسبت به استخراج آن‌ها از سنگ معدن دارد. البته، به دلیل نیاز روزافزون جهان به مواد شیمیایی و کاهش میزان منابع این مواد در سنگ‌کره، شیمی‌دان‌ها به دنبال منابع تازه برای استخراج این مواد می‌گردند. به‌عنوان مثال، بستر اقیانوس‌ها منبع بزرگی از منابع فلزی گوناگون به شمار می‌رود که انسان به تازگی آن را کشف کرده است. این منبع عظیم، در برخی مناطق محتوی سولفید چندین فلز واسطه و در برخی از مناطق دیگر، محتوی کلوخه‌ها و پوسته‌هایی غنی از فلزهایی مانند منگنز، کبالت، آهن، نیکل و مس است. غلظت اغلب گونه‌های فلزی موجود در کف اقیانوس، نسبت به ذخایر زمینی این فلزها بیشتر است.

۲ اولین فلز واسطه، اسکاندیم با عدد اتمی ۲۱ است. بر این اساس، می‌توان گفت منگنز با عدد اتمی ۲۵، پنجمین فلز واسطه جدول تناوبی است. توجه داریم که برخی از مناطق کف اقیانوس، محتوی کلوخه‌هایی از فلز منگنز و برخی از فلزهای واسطه دیگر هستند.

۴ فلزها طی فرآیند فرسایش و خوردگی که فرآیندی کند است، به سنگ معدن خود تبدیل می‌شوند. در نتیجه آهنگ بازگشت فلز به طبیعت بسیار کند بوده و به همین علت فلزها جزء منابع تجدیدناپذیر هستند.

سنجش کلاد
www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshCloud

۷۷- کدام موارد از عبارت‌های زیر درست هستند؟

الف ـ در واکنش استخراج فلز مس در معدن سرچشمه، اکسیدی از گوگرد با مولکول‌های سه اتمی خطی تولید می‌شود.

ب ـ فلزی از تناوب چهارم که تعداد الکترون برابری در ۲ زیرلایه آخر خود دارد، در تولید بدنه دوچرخه کاربرد دارد.

ج ـ واکنش‌پذیرترین عنصر جامد از تناوب دوم، در مقایسه با سایر عناصر این تناوب شعاع اتمی کوچک‌تری دارد.

د ـ عنصری از تناوب سوم که با $_{۱۱۴}Fl$ در یک گروه مشابه قرار دارد، در ساخت سلول خورشیدی استفاده می‌شود.

۱) «الف» و «ج»　　۲) «الف» و «د»　　۳) «ب» و «ج»　　۴) «ب» و «د»

پاسخ: گزینهٔ ۴　　**(سخت ـ مفهومی ـ استاندارد ـ صفحهٔ ۲۱ ـ ۱۱۰۱)**

عبارت‌های (ب) و (د) درست هستند.

بررسی موارد:

الف برای تهیهٔ مس خام از سنگ معدن در مس سرچشمه کرمان از واکنش زیر استفاده می‌شود:

$$Cu_۲S(s) + O_۲(g) \longrightarrow ۲Cu(s) + SO_۲(g)$$

گاز $SO_۲$ تولیدشده در این واکنش را می‌توان توسط کلسیم اکسید و مطابق معادلهٔ زیر به دام انداخت:

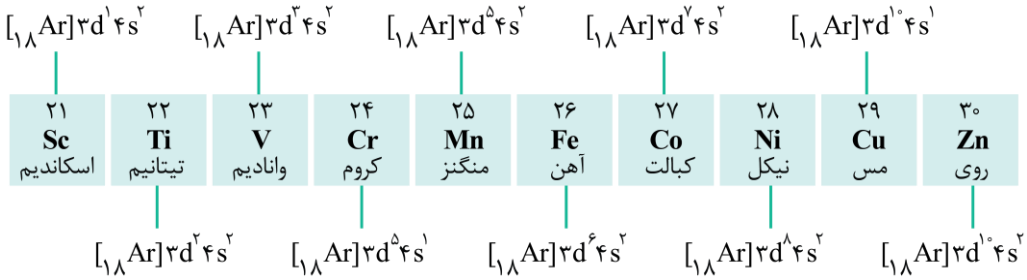
$$CaO(s) + SO_۲(g) \longrightarrow CaSO_۳(s)$$

توجه داریم که گاز $SO_۲$، روی اتم مرکزی خود دارای یک جفت الکترون ناپیوندی بوده و ساختار خمیده دارد.

ب تیتانیم ($_{۲۲}Ti$)، فلزی محکم، کم چگال و مقاوم در برابر خوردگی است که یکی از کاربردهای آن، استفاده در ساخت بدنهٔ دوچرخه است. آرایش الکترونی فلز تیتانیم به‌صورت زیر است:

$$_{۲۲}Ti: ۱s^۲۲s^۲۲p^۶۳s^۲۳p^۶۳d^۲۴s^۲$$

تصویر زیر، آرایش الکترونی عناصر واسطه موجود در تناوب چهارم را نشان می‌دهد:



فلز تیتانیم

تیتانیم، جزو عناصر واسطه دسته d بوده و در دوره و گروه چهارم قرار دارد. یکی از واکنش‌هایی که منجر به تولید تیتانیم می‌شود، واکنش تیتانیم (IV) کلرید با فلز منیزیم است. با توجه به اینکه واکنش‌پذیری منیزیم بیشتر از تیتانیم است، فلز منیزیم می‌تواند فلز تیتانیم را از ترکیبات آن خارج کند. معادله واکنش تولید تیتانیم به‌صورت زیر است:

$$TiCl_۴ + ۲Mg \longrightarrow Ti + ۲MgCl_۲$$

ج اگر فقط عناصر اصلی (عناصر دسته‌های s و p) را در نظر بگیریم، در هر تناوب با حرکت از سمت چپ به راست، ابتدا از خاصیت فلزی عناصر کاسته شده و واکنش‌پذیری آن‌ها کاسته می‌شود. این روند تا گروه ۱۴ هر تناوب ادامه پیدا می‌کند اما پس از آن، خاصیت نافلزی عناصر افزایش پیدا کرده و واکنش‌پذیری آن‌ها نیز مجدداً افزایش پیدا می‌کند تا نهایتاً به گروه ۱۷ از هر تناوب برسیم. توجه داریم که در آخرین خانهٔ هر تناوب (گروه ۱۸) نیز یک گاز نجیب با واکنش‌پذیری اندک وجود دارد.

سنجش کلاد
www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshCloud

به‌عنوان مثال، نمودار زیر روند کلی تغییر واکنش‌پذیری عنصرهای تناوب دوم جدول دوره‌ای را نشان می‌دهد:

عناصر لیتیم و فلوئور، دارای بیشترین واکنش‌پذیری هستند. لیتیم، حالت جامد داشته و فلوئور به حالت گاز است. در میان عناصر نشان داده شده در نمودار بالا، لیتیم دارای بزرگ‌ترین شعاع اتمی است.

عنصری از تناوب سوم که با $_{۱۱۴}Fl$ در یک گروه مشابه (گروه شماره ۱۴ جدول دوره‌ای) قرار دارد، معادل با سیلیسیم است. از سیلیسیم در ساخت سلول‌های خورشیدی استفاده می‌شود.

استخراج سیلیسیم

خواص فیزیکی شبه‌فلزها بیشتر به فلزها شبیه بوده در حالی که رفتار شیمیایی آن‌ها همانند نافلزها است. سیلیسیم، عنصری از تناوب سوم است که در دستهٔ شبه‌فلزها قرار می‌گیرد. همان‌طور که می‌دانیم، سیلیسیم با نماد Si عنصر اصلی سازندهٔ سلول‌های خورشیدی است. این عنصر شبه‌فلزی در واکنش شیمیایی $SiO_۲(s) + ۲C(s) \rightarrow Si(l) + ۲CO(g)$ با مصرف کربن و سیلیسیم دی‌اکسید تولید می‌شود. با توجه به خودبه‌خودی بودن این واکنش، می‌توان گفت واکنش‌پذیری کربن در مقایسه با سیلیسیم بیشتر است.

۷۸- در واکنش هیدروژن‌دار شدن اتن در حضور فلز نیکل، فرایند زیر نیز به‌عنوان یک واکنش جانبی انجام می‌شود. اگر جرم متان تولید شده در این فرایند، ۱/۶ برابر جرم اتان تولید شده در آن باشد، بازده درصدی این واکنش چقدر است؟

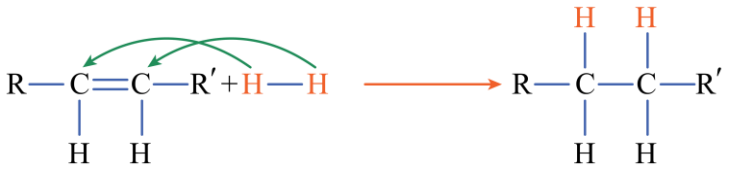
$(C = ۱۲ , H = ۱ : g.mol^{-۱})$

$$C_۲H_۴(g) + ۲H_۲(g) \rightarrow ۲CH_۴(g)$$

۱) ۴۰ ۲) ۶۰ ۳) ۲۵ ۴) ۷۵

پاسخ: گزینهٔ ۱ (سخت ـ محاسباتی ـ زمان‌بر ـ صفحهٔ ۵۰ ـ ۱۱۰۱)

در بسیاری از واکنش‌های شیمیایی، به دلیل انجام شدن برخی از واکنش‌های ناخواسته در کنار واکنش اصلی، مقدار فراورده‌های تولید شده در واکنش کمتر از مقدار مورد انتظار می‌شود. در چنین شرایطی، به مقداری از فراورده‌ها که به‌صورت واقعی در طول واکنش‌های شیمیایی به‌دست می‌آیند، مقدار عملی می‌گویند. چون مقدار عملی فراوردهٔ تولید شده در این حالت همواره کمتر از مقدار فراورده نظری است، بازده واکنش مورد نظر کاهش پیدا می‌کند. آلکن‌ها بر اساس معادله زیر، در حضور کاتالیزگر نیکل با گاز هیدروژن واکنش می‌دهند:



با توجه به معادلهٔ نوشته شده، معادله واکنش میان گاز اتن $(C_۲H_۴)$ و گاز هیدروژن به‌صورت زیر می‌شود:

$$C_۲H_۴(g) + H_۲(g) \xrightarrow{Ni(s)} C_۲H_۶(g)$$

واکنش فوق، واکنش اصلی انجام شده در این فرایند است. فرض می‌گیریم که در این واکنش، یک مول اتان (معادل با ۳۰ گرم اتان) تولید شده است. بر این اساس، اتن مصرف شده در واکنش اصلی را محاسبه می‌کنیم:

$$?\, g\, C_۲H_۴ = ۳۰\, g\, C_۲H_۶ \times \frac{۱\, mol\, C_۲H_۶}{۳۰\, g\, C_۲H_۶} \times \frac{۱\, mol\, C_۲H_۴}{۱\, mol\, C_۲H_۶} \times \frac{۲۸\, g\, C_۲H_۴}{۱\, mol\, C_۲H_۴} = ۲۸\, g$$

سنجش کلاد
www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshCloud

طبق فرض سؤال، جرم متان تولید شده در واکنش فرعی انجام شده در این فرایند، ۱/۶ برابر جرم اتان تولید شده در آن است. متان، بر اساس واکنش فرعی زیر تولید می‌شود:

$$C_۲H_۴(g) + ۲H_۲(g) \rightarrow ۲CH_۴(g)$$

بر این اساس، فرض می‌گیریم که ۴۸ گرم متان (معادل با ۱/۶ برابر جرم اتان تولید شده) تولید شده و مقدار اتن مصرف شده در واکنش فرعی را محاسبه می‌کنیم. در این رابطه، داریم:

$$?\,g\,C_۲H_۴ = ۴۸\,g\,CH_۴ \times \frac{۱\,mol\,CH_۴}{۱۶\,g\,CH_۴} \times \frac{۱\,mol\,C_۲H_۴}{۲\,mol\,CH_۴} \times \frac{۲۸\,g\,C_۲H_۴}{۱\,mol\,C_۲H_۴} = ۴۲\,g$$

در شرایط گفته شده، مجموعاً ۷۰ گرم اتن ($۴۲ + ۲۸ = ۷۰g$) در اختیار داشته‌ایم. از این مقدار گاز اتن، ۲۸ گرم آن در واکنش اصلی مصرف شده و ۴۲ گرم از آن در واکنش فرضی مصرف شده و متان تولید کرده است. ۲۸ گرم اتن مصرف شده در واکنش اصلی، معادل با ۴۰٪ از مقدار اولیه اتن بوده است، پس می‌توان گفت بازده این واکنش شیمیایی برابر با ۴۰٪ است.

۷۹- کدام‌یک از مطالب زیر در رابطه با نفت خام نادرست است؟

۱) نفت خام، به رنگ سیاه یا قهوه‌ای متمایل به سبز دیده شده و در تولید مواد منفجره و برخی شوینده‌ها کاربرد دارد.
۲) بیشتر از ۵۰ درصد از نفت خام استخراج شده، به‌عنوان سوخت در وسایل نقلیه و یا در نیروگاه‌ها مصرف می‌شود.
۳) عنصر اصلی سازندهٔ آن، در ساختار همهٔ ترکیب‌های خود ۴ پیوند تشکیل داده و به آرایش هشت‌تایی می‌رسد.
۴) در یک نمونه از نفت خام، هیدروکربن‌های حلقوی پیدا می‌شوند که همانند گاز اتن، سیرنشده هستند.

پاسخ: گزینهٔ ۳ (آسان ـ مفهومی و حفظی ـ سریع ـ صفحهٔ ۳۳ ـ ۱۱۰۱)

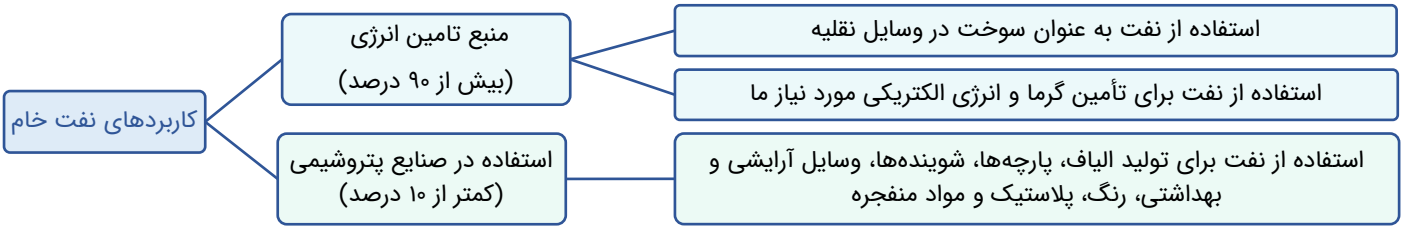
پژوهش‌ها و یافته‌های تجربی نشان می‌دهند که نفت خام، مخلوطی از هزاران ترکیب شیمیایی است که بخش عمدهٔ آن را هیدروکربن‌های گوناگون تشکیل می‌دهند. هیدروکربن‌ها، ترکیب‌هایی هستند که شامل هیدروژن و کربن می‌شوند، پس می‌توان گفت عنصر اصلی سازندهٔ نفت خام، کربن است. کربن در اغلب موارد در تشکیل ۴ پیوند اشتراکی شرکت می‌کند اما در ساختار برخی از مواد مثل مولکول کربن مونوکسید، ممکن است ۳ پیوند اشتراکی تشکیل بدهد. ساختار مولکول کربن مونوکسید به‌صورت زیر است:

$$:C \equiv O:$$

بررسی سایر گزینه‌ها:

۱) اواخر سده ۱۸ میلادی بود که شیمی‌دان‌ها با ماده‌ای روبه‌رو شدند که رفتار آن به مواد شناخته شده تا آن زمان شبیه نبود. این ماده یکی از سوخت‌های فسیلی بوده که به شکل مایع غلیظ سیاه رنگ یا قهوه‌ای متمایل به سبز از دل زمین استخراج می‌شود. نفت خام، مخلوطی از انواع هیدروکربن‌ها، برخی از نمک‌ها، اسیدها، آب و ... است. البته مقدار نمک و اسید در نفت خام کم بوده و در نفت حاصل از نواحی گوناگون نیز متغیر است. توجه داریم که نفت خام در ساخت داروهای تازه برای درمان بیماری‌های گوناگون، در تولید مواد منفجره و تولید انواعی از شوینده‌ها مثل پاک‌کننده‌های غیر صابونی کاربرد دارد.

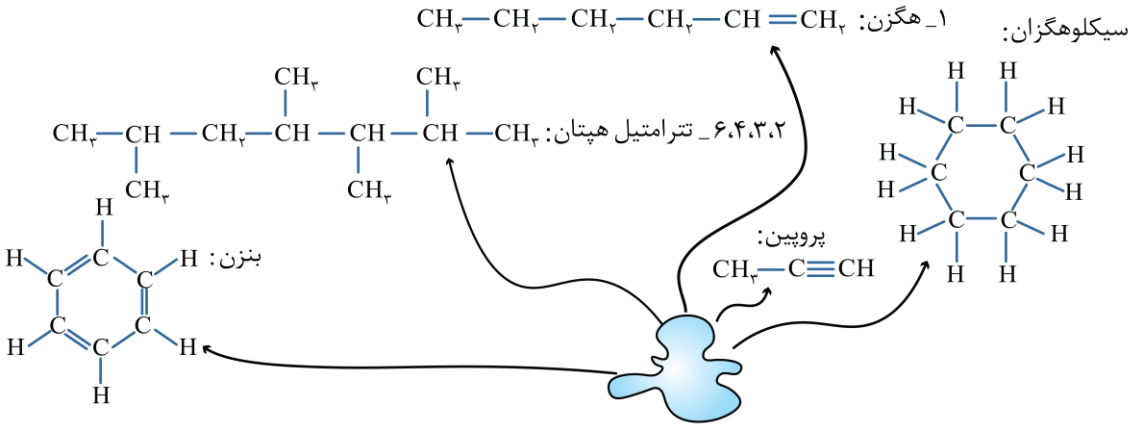
۲) روزانه بیش از ۸۰ میلیون بشکه نفت خام (هر بشکه معادل با ۱۵۹ لیتر است) در دنیا به شکل‌های گوناگون مصرف می‌شود. کاربردهای اساسی این ماده در جهان امروز به شرح زیر هستند:



با توجه به نمودار داده شده، حدود نیمی از نفتی که از چاه‌های نفت بیرون کشیده می‌شود، به‌عنوان سوخت در وسایل نقلیه و در حدود ۴۰٪ آن در نیروگاه‌ها استفاده می‌شود. همان‌طور که مشخص است، کمتر از ۱۰٪ نفت استخراج شده در صنایع پتروشیمی مصرف می‌شود.

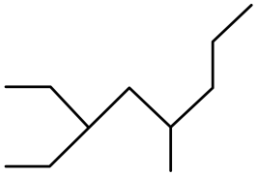
سنجش کلاد
www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshCloud

۴) در تصویر زیر، بعضی از هیدروکربن‌های موجود در نفت خام را مشاهده می‌کنید:



با توجه به تصویر نشان داده شده، در یک نمونه از نفت خام، هیدروکربن‌های حلقوی مثل بنزن پیدا می‌شوند که همانند گاز اتن، سیرنشده هستند.

۸۰- نوعی آلکان با ساختار مقابل، بر اساس قواعد آیوپاک چه نام داشته و این ماده، نسبت به کدام ترکیب ایزومر است؟

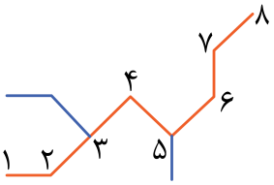


۱) ۳-اتیل-۵-متیل اوکتان | هگزامتیل پنتان
۲) ۳-اتیل-۵-متیل اوکتان | ۳،۳-دی‌اتیل هگزان
۳) ۶-اتیل-۴-متیل اوکتان | هگزامتیل پنتان
۴) ۶-اتیل-۴-متیل اوکتان | ۳،۳-دی‌اتیل هگزان

پاسخ: گزینهٔ ۱ (آسان ـ مفهومی ـ استاندارد ـ صفحهٔ ۳۴ ـ ۱۱۰۱)

ابتدا زنجیرهٔ اصلی آلکان را مشخص می‌کنیم. با توجه به این اصل که زنجیرهٔ اصلی را باید به نحوی انتخاب کنیم که بیشترین تعداد کربن ممکن در آن جا داده شود، زنجیرهٔ اصلی این آلکان به‌صورت زیر به رنگ نارنجی درآمده است:

در مرحلهٔ بعد، زنجیرهٔ اصلی هیدروکربن مورد نظر را شماره‌گذاری می‌کنیم. این فرایند را باید از سمتی آغاز کنیم که به اولین شاخه فرعی نزدیک‌تر باشد. شماره‌گذاری شاخه اصلی این آلکان به‌صورت زیر انجام می‌گردد:



به علت تقدم اتیل نسبت به متیل، در نام آلکان ابتدا شاخه جانبی اتیل و پس از آن شاخه‌های جانبی متیل می‌آیند؛ پس نام درست آلکان مورد نظر به‌صورت ۳ـ اتیل ـ ۵ ـ متیل اوکتان است. این آلکان، دارای ۱۱ اتم کربن بوده و نسبت به هر آلکان ۱۱ کربنه دیگر ایزومر است. هگزامتیل پنتان (نوعی آلکان که دارای یک زنجیره اصلی ۵ کربنه به همراه ۶ گروه متیل است) نیز دارای ۱۱ اتم کربن بوده و نسبت به ۳ـ اتیل ـ ۵ ـ متیل اوکتان ایزومر است.

ایزومر

شیمی‌دان‌ها به موادی که فرمول مولکولی یکسانی دارند اما ساختار آن‌ها نسبت به یکدیگر متفاوت است، ایزومر یا همپار می‌گویند. ایزومرها با توجه به ساختار متفاوت خود، خواص فیزیکی (دمای جوش، دمای ذوب و ...) و شیمیایی متفاوتی نسبت به یکدیگر دارند. توجه داریم که آلکان‌ها در شرایطی که تعداد اتم‌های کربن برابری داشته باشند، نسبت به یکدیگر ایزومر هستند. به‌عنوان مثال، مولکول ۲-متیل هپتان و مولکول ۳-اتیل هگزان (یا همان اتیل هگزان)، دارای ۸ کربن بوده و نسبت به هم ایزومر محسوب می‌شوند. تعداد ساختارهای متفاوتی که می‌توان برای آلکان‌های ۴ تا ۷ کربنه رسم کرد، با توجه به تعداد اتم‌های کربن موجود در آن ترکیب (n)، از رابطه $2^{n-4}+1$ به‌دست می‌آید. به‌عنوان مثال، برای ترکیب C_5H_{10} می‌توان $2^{5-4}+1=3$ ساختار متفاوت رسم کرد.

سنجش کلاد
www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshCloud

۸۱- بر اثر سوزاندن کامل ۰/۲ مول از نوعی هیدروکربن غیرحلقوی، ۴۴/۸ لیتر گاز کربن دی‌اکسید و ۲۸/۸ گرم آب در شرایط استاندارد تولید شده است. هر مول از این هیدروکربن، با چند گرم گاز هیدروژن به‌طور کامل واکنش داده و سیر می‌شود؟

$(O = ۱۶ , C = ۱۲ , H = ۱ : g.mol^{-۱})$

۱) ۴ ۲) ۶ ۳) ۸ ۴) ۱۰

پاسخ: گزینهٔ ۲ (سخت ـ محاسباتی و مفهومی ـ زمان‌بر ـ صفحهٔ ۳۶ ـ ۱۱۰۱)

طبق فرض سؤال، بر اثر سوزاندن کامل ۰/۲ مول از این هیدروکربن غیر حلقوی (خطی)، ۴۴/۸ لیتر گاز کربن دی‌اکسید و ۲۸/۸ گرم آب در شرایط استاندارد تولید شده است. مقدار مول هر ماده تولید شده را محاسبه می‌کنیم:

$$?\,mol\,CO_۲ = ۴۴/۸\,L\,CO_۲ \times \frac{۱\,mol\,CO_۲}{۲۲/۴\,L\,CO_۲} = ۲\,mol$$

$$?\,mol\,H_۲O = ۲۸/۸\,g\,H_۲O \times \frac{۱\,mol\,H_۲O}{۱۸\,g\,H_۲O} = ۱/۶\,mol$$

با سوزاندن ۰/۲ مول از این ماده، ۲ مول $CO_۲$ و ۱/۶ مول آب تولید شده است، پس می‌توان گفت با سوزاندن یک مول از این ماده، ۱۰ مول گاز $CO_۲$ و ۸ مول بخار آب تولید شده است. هیدروکربن‌ها بر اثر سوختن کامل، گاز $CO_۲$ و آب تولید می‌کنند. بر این اساس، می‌توان گفت اتم‌های کربن هیدروکربن مورد نظر وارد ساختار $CO_۲$ و اتم‌های هیدروژن آن وارد ساختار آب شده است. فرمول شیمیایی این ماده را به‌صورت C_xH_y در نظر گرفته و بر این اساس، معادله سوختن آن را می‌نویسیم:

$$C_xH_y + \left(x + \frac{y}{۴}\right)O_۲ \longrightarrow xCO_۲ + \frac{y}{۲}H_۲O$$

از آنجا که با سوزاندن یک مول از این ماده، ۱۰ مول گاز $CO_۲$ و ۸ مول بخار آب تولید شده است، پس می‌توان گفت مقدار مؤلفه x برابر با ۱۰ بوده و مقدار مؤلفه $\frac{y}{۲}$ نیز برابر با ۸ است، پس مقدار خود مؤلفه y برابر با ۱۶ می‌شود. بر این اساس، فرمول هیدروکربن مورد نظر به‌صورت $C_{۱۰}H_{۱۶}$ است این ماده، یک ترکیب غیرحلقوی است، پس بر اساس معادله زیر با گاز هیدروژن واکنش داده و به یک آلکان سیرشده تبدیل می‌شود:

$$C_{۱۰}H_{۱۶} + ۳H_۲ \rightarrow C_{۱۰}H_{۲۲}$$

با توجه به معادلهٔ بالا، هر مول از ترکیب مورد نظر در واکنش با ۳ مول گاز هیدروژن (معادل با ۶ گرم گاز هیدروژن) به‌طور کامل واکنش داده و سیر می‌شود.

سوختن آلکان‌ها

آلکان‌ها از جمله ترکیب‌های آلی سیرشده هستند و تمایل چندانی به انجام واکنش‌های شیمیایی ندارند. واکنش سوختن، یکی از معدود واکنش‌هایی است که آلکان‌ها در آن شرکت می‌کنند. معادلهٔ واکنش سوختن این مواد به‌صورت زیر است:

$$C_nH_{۲n+۲} + \frac{۳n+۱}{۲}O_۲ \rightarrow (n+۱)H_۲O + nCO_۲$$

با توجه به معادلهٔ این واکنش، بر اثر سوختن کامل آلکان‌ها مولکول‌های آب و کربن دی‌اکسید تولید می‌شوند. البته، نوع فراورده‌ها در واکنش سوختن آلکان‌ها، به مقدار اکسیژن در دسترس بستگی دارد. در واقع، اگر اکسیژن موجود در محیط کافی باشد، واکنش سوختن به‌طور کامل انجام شده و گاز کربن دی‌اکسید ($CO_۲$) به همراه بخار آب تولید می‌شود. این در حالی است که اگر مقدار اکسیژن موجود در محیط کم باشد، واکنش سوختن به‌طور ناقص انجام شده و گاز کربن مونوکسید (CO) به همراه دیگر فراورده‌ها تولید می‌شود.

ماز

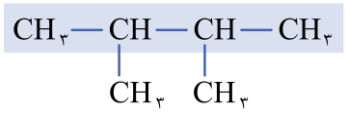
۸۲- یک نمونه از ۳،۲-دی‌متیل بوتان با خلوص ۲۰٪ را در واکنش با ۷۶ گرم گاز اکسیژن، به‌طور کامل می‌سوزانیم. جرم آلکان مصرف شده در این فرایند برابر با چند گرم بوده و با انجام این فرایند در شرایط استاندارد، مجموع حجم گازهای موجود در ظرف واکنش به چه صورت تغییر می‌کند؟ $(O = ۱۶ , C = ۱۲ , H = ۱ : g.mol^{-۱})$

۱) ۱۰۷/۵ ـ افزایش می‌یابد ۲) ۱۰۷/۵ ـ کاهش می‌یابد
۳) ۲۱۵ ـ افزایش می‌یابد ۴) ۲۱۵ ـ کاهش می‌یابد

سنجش کلاد
www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshCloud

پاسخ: گزینهٔ ۲ (متوسط ـ محاسباتی ـ استاندارد ـ صفحهٔ ۳۶ ـ ۱۱۰۱)

ترکیبی با نام ۳،۲-دی‌متیل بوتان، نوعی آلکان شش‌کربنه با فرمول شیمیایی C_6H_{14} است. ساختار این ماده به‌صورت زیر است:



این ماده، بر اساس معادله زیر و در حضور مقدار اکسیژن کافی به‌طور کامل می‌سوزد:

$$2C_6H_{14}(l) + 19O_2(g) \rightarrow 12CO_2(g) + 14H_2O(l)$$

جرم گاز اکسیژن مصرف شده در این واکنش، برابر با ۷۶ گرم است. بر این اساس، جرم آلکان مصرف شده که خلوص ۲۰٪ دارد را محاسبه می‌کنیم:

$$?\ g\ C_6H_{14}\ \text{ناخالص} = 76\ g\ O_2 \times \frac{1\ mol\ O_2}{32\ g\ O_2} \times \frac{2\ mol\ C_6H_{14}}{19\ mol\ O_2} \times \frac{86\ g\ C_6H_{14}}{1\ mol\ C_6H_{14}} \times \frac{100\ g\ C_6H_{14}\ \text{ناخالص}}{20\ g\ C_6H_{14}} = 107/5\ g$$

با هر بار انجام شدن این واکنش، ۱۹ مول گاز اکسیژن مصرف شده و ۱۲ مول گاز کربن دی‌اکسید تولید می‌شود. چون مقدار مول گاز مصرف شده در این واکنش بیشتر از مقدار مول گاز تولید شده در آن است، پس می‌توان گفت با انجام این واکنش در یک ظرف، مجموع حجم گازها کاهش پیدا می‌کند.

ماز

۸۳- کدام موارد از عبارت‌های زیر درست هستند؟

الف ـ دی‌متیل پروپان، ساده‌ترین آلکانی است که در آن یک اتم کربن، به هیچ اتم هیدروژنی متصل نشده است.

ب ـ نیمی از اتم‌های کربن موجود در ساختار بوتان، دارای عدد اکسایش ۲- بوده و به ۲ اتم H متصل شده‌اند.

ج ـ کربوهیدرات‌ها، بخش عمده نفت خام را تشکیل داده و در ساختار آن‌ها، فقط اتم C و H وجود دارد.

د ـ گریس، نسبت به وازلین چسبنده‌تر بوده و نوع نیروهای بین‌مولکولی در آن، وان‌دروالسی است.

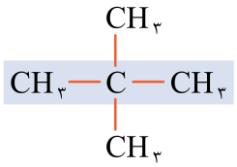
۱) «الف» و «ب» ۲) «ب» و «ج» ۳) «ج» و «د» ۴) «الف» و «د»

پاسخ: گزینهٔ ۱ (آسان ـ مفهومی ـ سریع ـ صفحهٔ ۴۰ ـ ۱۱۰۱)

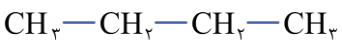
عبارت‌های (الف) و (ب) درست هستند.

بررسی موارد:

الف) ترکیبی با نام ۲،۲-دی‌متیل پروپان یا دی‌متیل پروپان با فرمول شیمیایی C_5H_{12}، ساده‌ترین آلکانی است که در ساختار آن دو شاخهٔ فرعی به یک اتم کربن واحد از زنجیره کربنی اصلی متصل شده و بر این اساس، در ساختار آن اتم کربنی وجود دارد که به هیچ اتم هیدروژنی متصل نشده است. ساختار این ماده به‌صورت زیر است:



ب) ساختار مولکول بوتان به‌صورت زیر است:

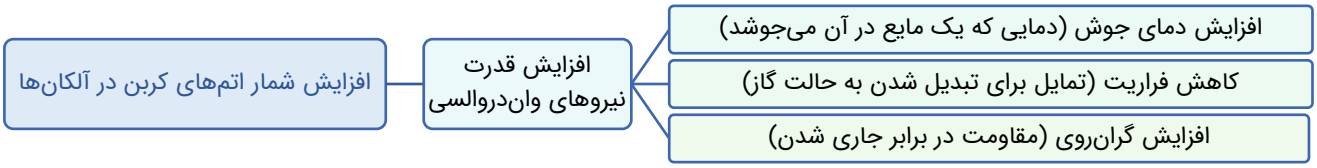


در ساختار این ماده، ۲ اتم کربن در وسط زنجیره وجود دارند. این ۲ اتم کربن، به دو اتم هیدروژن متصل بوده و عدد اکسایش ۲- دارند. در ساختار بوتان، ۲ اتم کربن در دو انتهای زنجیره وجود دارند. این ۲ اتم کربن، به سه اتم هیدروژن متصل بوده و عدد اکسایش ۳- دارند.

ج) کربوهیدرات‌ها از جمله گلوکز، مالتوز و ...، انواعی از قندها بوده و در ساختار آن‌ها اتم‌های هیدروژن، اکسیژن و کربن وجود دارند. این مواد در نفت خام یافت نمی‌شوند. این در حالی است که هیدروکربن‌ها بخش عمده نفت خام را تشکیل داده و در ساختار آن‌ها، فقط اتم C و H وجود دارد.

سنجش کلاد
www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshCloud

د) گریس، مخلوطی از هیدروکربن‌های سیرشده با فرمول شیمیایی تقریبی $C_{18}H_{38}$ و وازلین نیز مخلوطی از هیدروکربن‌های سیرشده با فرمول شیمیایی تقریبی $C_{25}H_{52}$ است. با توجه به بیشتر بودن شمار اتم‌های کربن در مولکول‌های سازندهٔ وازلین، قدرت نیروهای وان‌دروالسی در این ماده قوی‌تر بوده و یک نمونه از آن در مقایسه با یک نمونه از گریس چسبنده‌تر است. نمودار زیر، رابطه خواص مختلف آلکان‌های راست‌زنجیر با شمار اتم‌های کربن موجود در ساختار این ترکیب‌ها را نشان می‌دهد:



۸۴- کدام‌یک از مطالب زیر درست است؟

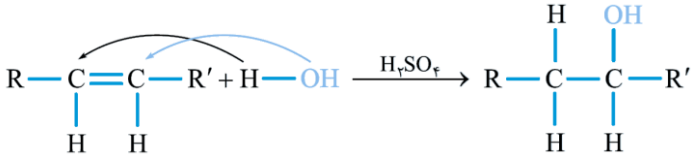
۱) آلکان‌ها، از جمله مواد غیرسمی بوده و با انداختن نفتالن در یک نمونه مایع از آن‌ها، نفتالن در این مواد حل می‌شود.
۲) فراورده واکنش اتن با آب، زرد رنگ بوده و از آن به‌عنوان مادهٔ ضدعفونی‌کننده و یا حلال صنعتی استفاده می‌شود.
۳) اتن، در اغلب گیاهان وجود داشته و در ساختار آن، برخلاف بنزن، هر اتم کربن به ۳ اتم دیگر متصل شده است.
۴) در ساختار هیچ مدل از هیدروکربن‌های غیرحلقوی، شمار اتم‌های هیدروژن کمتر از شمار اتم‌های کربن نیست.

پاسخ: گزینهٔ ۱ (متوسط ـ مفهومی ـ استاندارد ـ صفحهٔ ۴۱ ـ ۱۱۰۱)

با توجه به سیرشده بودن مولکول‌های سازندهٔ آلکان‌ها، این مواد تمایل چندانی به انجام واکنش‌های شیمیایی با مواد دیگر ندارند. این ویژگی سبب می‌شود تا میزان سمی بودن آلکان‌ها کمتر شده و استنشاق آن‌ها بر شش‌ها و بدن تأثیر چندانی نداشته باشد. البته، استنشاق آلکان‌ها سبب کاهش مقدار اکسیژن در هوای دمی شده و از انتقال گازهای تنفسی در شش‌ها جلوگیری می‌کند و به همین خاطر، نفس کشیدن دشوار می‌شود. بر این اساس، اگر میزان بخارهای وارد شده به شش‌ها زیاد باشد، حتی می‌تواند سبب مرگ فرد شود. توجه داریم که آلکان‌ها، همانند یک نمونه نفتالن، نوعی هیدروکربن بوده و از ذرات ناقطبی ساخته شده‌اند. بر این اساس، با انداختن نفتالن در یک نمونه مایع از آلکان‌ها، نفتالن در این مواد حل می‌شود.

بررسی سایر گزینه‌ها:

۲) طی واکنش ترکیب‌های آلکنی با آب، مولکول‌های آب به یک اتم هیدروژن ($-H$) و یک گروه $-OH$ شکسته شده و به پیوند دوگانه موجود در ساختار آلکن‌ها افزوده می‌شوند. معادلهٔ این واکنش به‌صورت زیر است:



همان‌طور که مشخص است، سولفوریک اسید (H_2SO_4) کاتالیزگر این واکنش بوده و فراورده تولید شده در آن یک الکل سیرشده است. با توجه به معادلهٔ بالا، از واکنش اتن با آب، اتانول تولید می‌شود. اتانول یک ماده بی‌رنگ است.

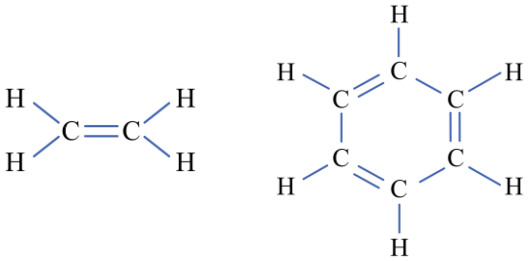
اتانول

در رابطه با اتانول، به مطالب زیر توجه کنید:

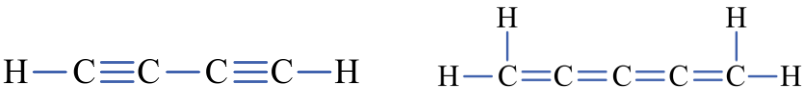
- اتانول، الکلی دو کربنه، بی‌رنگ، سیرشده و فرار است.
- جز سوخت‌های سبز به شمار می‌رود و از تخمیر بی‌هوازی گلوکز نیز حاصل می‌شود. از واکنش گاز اتن با آب نیز قابل تولید است.
- تعداد ۸ پیوند اشتراکی و ۲ جفت الکترون ناپیوندی در ساختار خود دارد.
- مولکولی قطبی و حلالی صنعتی است که به هر نسبتی در آب حل می‌شود؛ بنابراین نمی‌توان محلول سیرشده‌ای از آن را در آب ایجاد کرد.
- در تهیه مواد دارویی، بهداشتی و آرایشی کاربرد دارد و در بیمارستان‌ها به‌عنوان ضدعفونی‌کننده استفاده می‌شود.

سنجش کلاد
www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshCloud

۳) اتن (C_2H_4)، در بیشتر گیاهان وجود دارد. برای مثال، موز و گوجه‌فرنگی رسیده گاز اتن آزاد می‌کنند. گاز اتن آزاد شده از یک موز یا گوجه‌فرنگی رسیده به نوبه خود موجب رسیدن سریع‌تر سایر میوه‌های نارس می‌شود. به همین خاطر، در کشاورزی از گاز اتن به‌عنوان «عمل آورنده» استفاده می‌شود. در ساختار اتن، همانند مولکول بنزن، هر اتم کربن به ۳ اتم دیگر متصل شده است. ساختار مولکول اتن و بنزن به‌صورت زیر است:



۴) در ساختار برخی از هیدروکربن‌های غیرحلقوی (خطی) که تعداد زیادی پیوند دوگانه و سه‌گانه دارند، شمار اتم‌های هیدروژن کمتر از شمار اتم‌های کربن است. برای مثال، در دو ترکیب زیر شمار اتم‌های هیدروژن کمتر از شمار اتم‌های کربن است:

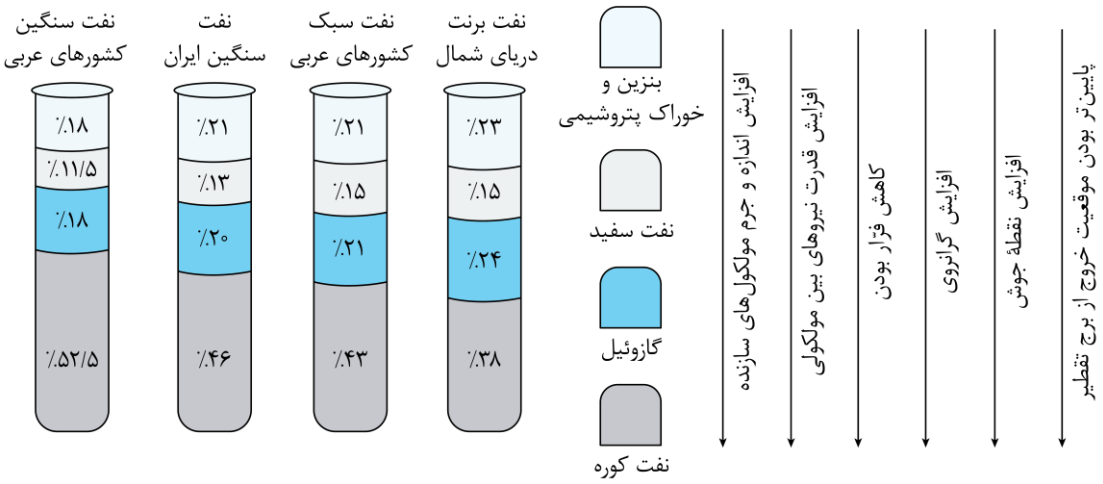


۸۵- کدام‌یک از مطالب زیر نادرست است؟

۱) گازوئیل، جزئی از نفت خام بوده و اندازه ذرات سازنده آن، نسبت به ذرات سازنده بنزین بزرگ‌تر است.
۲) در یک نمونه نفت برنت دریای شمال، درصد نفت کوره کمتر از درصد بنزین و خوراک پتروشیمی است.
۳) زغال سنگ، گاز متان از خود آزاد کرده و بر اثر سوزاندن آن، گاز نیتروژن دی‌اکسید نیز تولید می‌شود.
۴) در پالایشگاه، هیدروکربن‌های داغ از قسمت پایین به برج تقطیر وارد شده و دمای آن‌ها به‌تدریج کاهش می‌یابد.

پاسخ: گزینهٔ ۲ (متوسط ـ مفهومی ـ استاندارد ـ صفحهٔ ۴۶ ـ ۱۱۰۱)

بنزین، نفت سفید، گازوئیل و نفت کوره، از جمله اجزای سازندهٔ نفت خام هستند که درصد فراوانی آن‌ها در نفت خام خارج شده از سکوهای نفتی مختلف، متفاوت از یکدیگر است. تصویر زیر، اجزای سازنده نفت خام حاصل از مناطق مختلف را نشان می‌دهد:



در هر چهار نوع نفت معرفی شده در این تصویر، نفت سفید کمترین میزان فراوانی و نفت کوره بالاترین فراوانی را دارد. نفت کوره از مولکول‌هایی با جرم مولی بالا تشکیل شده و با توجه به نقطهٔ جوش بالاتر، نسبت به بنزین سخت‌تر تبخیر می‌شود.

بررسی سایر گزینه‌ها:

۱) گازوئیل، جزئی از نفت خام بوده و اندازه ذرات سازنده آن، نسبت به ذرات سازنده بنزین بزرگ‌تر است. به همین خاطر است که گازوئیل دمای جوش بالاتر و میزان گرانروی بیشتری دارد.

سنجش کلاد
www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshCloud

۳ زغال‌سنگ، همانند نفت خام و بنزین، از جمله سوخت‌های فسیلی است. برآوردها نشان می‌دهد که ذخایر زغال سنگ تا ۵۰۰ سال آینده توانایی رفع نیازهای بشر را دارند؛ در حالی که طبق برآوردهای انجام شده برای نفت خام، منابع این سوخت فسیلی تا ۱۰۰ سال آینده به پایان می‌رسند. بر این اساس، زغال‌سنگ می‌تواند به‌عنوان سوخت، جایگزین نفت خام شود. جدول زیر، اطلاعات مختلف زغال‌سنگ را در مقایسه با بنزین نشان می‌دهد:

نام سوخت	گرمای آزاد شده (kJ/g)	فراورده‌های سوختن	مقدار به‌ازای هر کیلوژول انرژی تولید شده (g)
بنزین	۴۸	CO_2, CO, H_2O	۰/۰۶۵
زغال سنگ	۳۰	$SO_2, CO_2, NO_2, CO, H_2O$	۰/۱۰۴

زغال سنگ در معادن خود، گاز متان آزاد می‌کند.

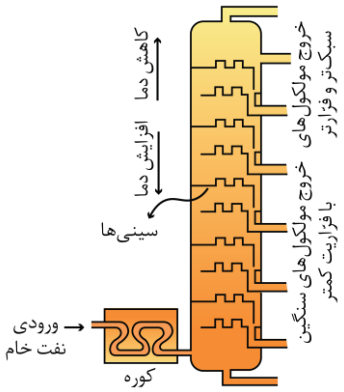
زغال سنگ

چون بر اثر سوختن زغال‌سنگ آلاینده‌های متنوع‌تر و بیشتری تولید می‌شوند، در صورت جایگزینی نفت با زغال‌سنگ، مقدار بیشتری از انواع آلاینده‌ها به هواکره وارد شده و این امر، باعث تشدید اثر گلخانه‌ای می‌شود. علاوه بر این، آلاینده‌های مورد نظر منجر به تولید باران‌های اسیدی شده و به محیط زیست آسیب می‌رسانند. مشکل دیگر زغال‌سنگ، شرایط دشوار استخراج آن است؛ به‌طوری‌که در صد سال اخیر، بیش از ۵۰۰۰۰۰ نفر در سطح جهان بر اثر انفجار یا فروریختن معدن جان خود را از دست داده‌اند. این انفجارها اغلب به دلیل تجمع گاز متان(CH_4) آزاد شده از زغال سنگ در معدن رخ می‌دهد. برای کاهش آلایندگی زغال‌سنگ، از روش‌های زیر استفاده می‌شود:

- شست‌وشوی زغال سنگ به منظور حذف گوگرد و ناخالصی‌های دیگر از آن.
- به دام انداختن گاز SO_2 خارج شده از نیروگاه‌ها با عبور گازهای خروجی از روی کلسیم اکسید و با استفاده از واکنش زیر:

$$SO_2(g) + CaO(s) \rightarrow CaSO_3(s)$$

۴ در پالایشگاه، با استفاده از فرایند تقطیر جزءبه‌جزء، هیدروکربن‌های موجود در نفت خام را به‌صورت مخلوط‌هایی با نقطهٔ جوش نزدیک به هم جدا می‌کنند. برای انجام فرایند تقطیر جزءبه‌جزء، مطابق با تصویر مقابل، نفت خام را ابتدا درون محفظهٔ بزرگی (کوره) گرما داده و آن را به سمت برج تقطیر هدایت می‌کنند:



در برج تقطیر، دما با حرکت از سمت پایین به سمت بالا کاهش پیدا می‌کند. هنگامی که نفت خام داغ به قسمت پایین برج وارد می‌شود، مولکول‌های سبک‌تر و فرّارتر (موادی که نقطه جوش پایین‌تری دارند) از جمله مواد پتروشیمیایی، از مایع بیرون آمده و به‌سوی بالای برج حرکت می‌کنند. به‌تدریج که این مولکول‌ها بالاتر می‌روند، سرد شده و به مایع تبدیل می‌شوند و در سینی‌هایی که در فاصله‌های گوناگون برج قرار دارند وارد شده و از برج خارج می‌شوند. با انجام این فرایند، مخلوط‌هایی با نقطه جوش نزدیک به هم از نفت خام جداسازی می‌شوند. برای مثال، بنزین، نفت سفید، گازوئیل و نفت کوره، از جمله اجزای سازنده نفت خام هستند که به کمک برج تقطیر از یکدیگر جدا می‌شوند.

ماز

۸۶- درصد جرمی اتم‌های کربن در نوعی آلکین، برابر با ۸۶/۴ درصد است. شمار اتم‌های هیدروژن موجود در ساختار این ماده، چند برابر شمار اتم‌های هیدروژن در ساختار بوتان است؟ $(C = ۱۲, H = ۱ : g.mol^{-1})$

۱) ۲/۶ ۲) ۲/۴ ۳) ۳/۶ ۴) ۳/۴

پاسخ: گزینهٔ ۴ (متوسط ـ محاسباتی ـ زمان‌بر ـ صفحهٔ ۴۲ ـ ۱۱۰۱)

ویژگی‌های هیدروکربن‌ها

در جدول زیر برخی از ویژگی‌های هیدروکربن‌ها را مشاهده می‌کنید:

هیدروکربن	فرمول مولکولی	تعداد پیوند اشتراکی	تعداد پیوند $C-C$	درصد جرمی هیدروژن	درصد جرمی کربن
آلکان	C_nH_{2n+2}	$3n+1$	$n-1$	$\frac{2n+2}{14n+2} \times 100$	$\frac{12n}{14n+2} \times 100$
آلکن	C_nH_{2n}	$3n$	$n-2$	$\frac{2n}{14n} \times 10 \simeq 14/3$	$\frac{12n}{14n} \times 1 \simeq 85/7$
آلکین	C_nH_{2n-2}	$3n-1$	$n-2$	$\frac{2n-2}{14n-2} \times 100$	$\frac{12n}{14n-2} \times 100$
سیکلوآلکان	C_nH_{2n}	$3n$	n	$\frac{2n}{14n} \times 1 \simeq 14/3$	$\frac{12n}{14n} \times 10 \simeq 85/7$

سنجش کلاد
www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshCloud

درصد جرمی کربن در اعضای خانواده آلکین‌ها (C_nH_{2n-2})، از رابطه زیر به‌دست می‌آید:

$$\text{درصد جرمی کربن} = \frac{\text{جرم کربن}}{\text{جرم آلکین}} \times ۱۰۰ = \frac{۱۲n}{۱۴n-۲} \times ۱۰۰ \Rightarrow \frac{۱۲n}{۱۴n-۲} \times ۱۰۰ = ۸۶/۴ \Rightarrow n = ۱۸$$

با توجه به محاسبات بالا، آلکین مورد نظر دارای ۱۸ اتم کربن بوده و فرمول شیمیایی آن به‌صورت $C_{۱۸}H_{۳۴}$ است. در ساختار مولکولی این ماده، ۳۴ اتم هیدروژن وجود دارد و در ساختار بوتان نیز ۱۰ اتم هیدروژن یافت می‌شود. بر این اساس، می‌توان گفت شمار اتم‌های هیدروژن موجود در ساختار آلکین مورد نظر، ۳/۴ برابر شمار اتم‌های هیدروژن در ساختار بوتان است.

۸۷- چه تعداد از عبارت‌های زیر درست است؟

الف ـ نقطه جوش یک نمونه هگزان، کمتر از آب بوده و از این ماده برای حفاظت از آهن در برابر خوردگی استفاده می‌شود.

ب ـ مولکول اتان، از ذرات ناقطبی تشکیل شده و برخلاف مولکول کربن مونوکسید، به هموگلوبین خون متصل نمی‌شود.

ج ـ یک نمونه از هگزان، بی‌رنگ بوده و در مقایسه با یک نمونه مایع از اوکتان، تمایل کمتری به جاری شدن دارد.

د ـ هپتان، در هر مولکول خود دارای ۱۶ اتم هیدروژن بوده و از مواد موجود در نفت سفید به شمار می‌رود.

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

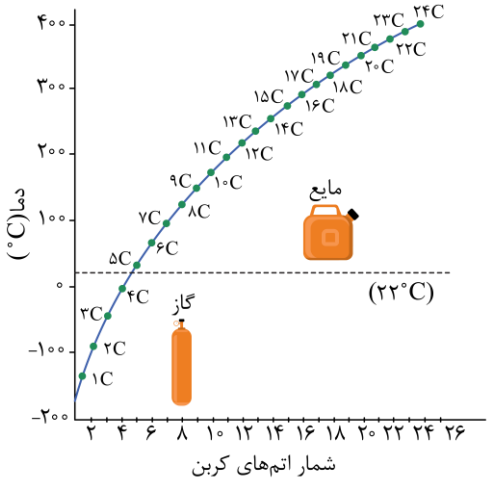
پاسخ: گزینهٔ ۲ (متوسط ـ مفهومی و حفظی ـ استاندارد ـ صفحهٔ ۴۷ ـ ۱۱۰۱)

عبارت‌های (الف) و (ب) درست هستند.

بررسی موارد:

الف) در دما و فشار اتاق، نقطه جوش هگزان ($C_۶H_{۱۴}$)، کمتر از نقطه جوش آب ($۱۰۰^\circ C$) است. هگزان مولکولی ناقطبی بوده و حلال مواد ناقطبی و رقیق‌کننده رنگ (تینر) است. از آلکان‌های مایع (مانند هگزان)، می‌توان برای حفاظت فلزات در برابر خوردگی استفاده کرد.

نمودار مقابل، دمای جوش انواع آلکان‌ها را نشان می‌دهد:



در رابطه با این نمودار، داریم:

- بر اساس نمودار، با افزایش شمار اتم‌های کربن در آلکان‌ها، نقطه جوش آلکان‌های راست زنجیر افزایش می‌یابد.
- دمای جوش ۴ عضو اول خانواده آلکان‌ها (متان، اتان، پروپان و بوتان) که به حالت گاز هستند، کمتر از $۰^\circ C$ است.
- نقطه جوش آلکان‌های مایع بیشتر از $۲۲^\circ C$ است. خط‌چین افقی در نمودار، دمای اتاق را نشان می‌دهد.
- نمودار مورد نظر خطی نیست و شیب آن رو به کاهش است؛ درنتیجه با افزایش شمار اتم‌های کربن، تفاوت نقطه جوش دو آلکان متوالی کاهش می‌یابد.

ب) اتان با فرمول مولکولی $C_۲H_۶$، یک ترکیب ناقطبی بوده و دومین عضو خانواده آلکان‌ها به شمار می‌رود. با توجه به سیرشده بودن مولکول‌های سازنده آلکان‌ها، این مواد تمایل چندانی به انجام واکنش‌های شیمیایی با مواد دیگر ندارند. این ویژگی سبب می‌شود تا میزان سمی بودن آلکان‌ها کمتر شود. در واقع ذرات سازنده آلکان‌ها، با هموگلوبین خون ترکیب نشده و وارد جریان خون نمی‌شوند. این در حالی است که گاز کربن مونوکسید، با میل خیلی زیادی با هموگلوبین ترکیب می‌شود.

ج) به مقاومتی که یک مایع در برابر جاری شدن از خود نشان می‌دهد، گرانروی گفته می‌شود. با افزایش شمار اتم‌های کربن موجود در آلکان‌ها (n)، مولکول‌های سازنده این مواد با نیروی بیشتری یکدیگر را جذب کرده و به همین خاطر، میزان گران‌روی آن‌ها افزایش پیدا می‌کند. در واقع، گرانروی آلکان‌ها با شمار اتم‌های کربن موجود در ساختار آن‌ها رابطه مستقیم دارد. بر این اساس، می‌توان گفت گرانروی یک آلکان ۸ کربنه (اوکتان)، بیشتر از گرانروی یک آلکان ۶ کربنه (هگزان) است.

سنجش کلاد
www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshCloud

د) مولکول هپتان در ساختار خود دارای ۷ اتم کربن و ۱۶ اتم هیدروژن است. توجه داریم که مواد موجود در نفت سفید، در ساختار خود دارای ۱۰ تا ۱۵ اتم کربن هستند.

نفت سفید

حمل و نقل هوایی، سریع‌ترین حالت حمل و نقل بوده و مزایای آن شامل عدم نیاز به جاده‌سازی و تعمیرات آن، مسافرت آسان و خدمات‌رسانی خوب در مواقع اضطراری می‌شود. سوخت هواپیما طی پالایش نفت خام در برج‌های تقطیر پالایشگاه‌ها تولید می‌شود. این سوخت به‌طور عمده از نفت سفید تهیه می‌شود. نفت سفید، شامل آلکان‌هایی می‌شود که در ساختار آن‌ها ۱۰ الی ۱۵ عدد اتم کربن وجود دارد. توجه داریم که یکی از مسائل مهم در تأمین سوخت، انتقال آن به مراکز توزیع و استفاده آن است. در حدود ۶۶ درصد از فرایند انتقال سوخت به کمک خطوط لوله و بقیهٔ آن با استفاده از راه آهن، نفتکش جاده‌پیما و کشتی‌های نفتی انجام می‌شود.

ماز

۸۸- کدام‌یک از مطالب زیر در رابطه با اعضای خانواده سیکلوآلکان‌ها نادرست است؟

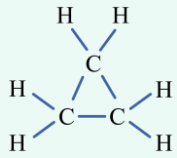
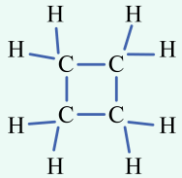
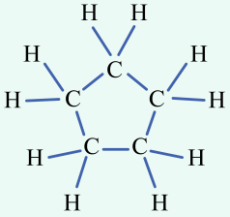
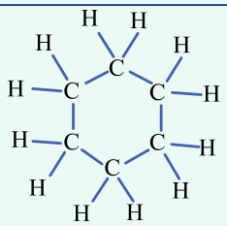
۱) شمار اتم‌های هیدروژن در ساده‌ترین عضو این خانواده، نصف شمار اتم‌های هیدروژن در ۲-هپتین است.
۲) درصد جرمی هیدروژن در دومین عضو این خانواده، با درصد جرمی هیدروژن در ۲-هگزن برابر است.
۳) یکی از اعضای این خانواده را می‌توان طی واکنش بنزن با مقدار کافی از گاز هیدروژن، به‌دست آورد.
۴) برای تشخیص یک نمونه سیکلوپنتان از ۲ـ متیل بوتان، می‌توان از واکنش آن‌ها با برم استفاده کرد.

پاسخ: گزینهٔ ۴ (متوسط ـ مفهومی ـ استاندارد ـ صفحهٔ ۴۳ ـ ۱۱۰۱)

از واکنش ترکیب‌های سیرنشده با بخار برم برای تشخیص این دسته مواد از ترکیب‌های سیرشده استفاده می‌شود. در این واکنش پیوند دوگانه یا سه‌گانه موجود در ترکیب سیرنشده به پیوند یگانه تبدیل می‌شود و الکترون‌های جفت‌نشده حاصل از پیوند دوگانه به اتم برم متصل می‌شوند. نشانه انجام این واکنش بی‌رنگ شدن بخار قرمزرنگ برم است. چون سیکلوپنتان و ۲ـ متیل بوتان، هر دو سیرشده هستند، هیچ‌کدام از آن‌ها با بخار برم واکنش نمی‌دهند.

سیکلوآلکان‌ها

در ساختار سیکلوآلکان‌ها، اتم‌های کربن توسط پیوندهای یگانه به یکدیگر متصل شده و حلقه‌های کربنی با اندازه‌های متفاوت را می‌سازند. فرمول کلی اعضای خانواده سیکلوآلکان به‌صورت C_nH_{2n} بوده و حداقل مقدار n مورد نیاز برای تشکیل یک سیکلوآلکان، برابر با ۳ است. جدول زیر، ساختار برخی از اعضای خانوادهٔ سیکلوآلکان‌ها را نشان می‌دهد:

فرمول مولکولی	C_3H_6	C_4H_8	C_5H_{10}	C_6H_{12}
نام	سیلکوپروپان	سیکلوبوتان	سیلکوپنتان	سیکلوهگزان
ساختار				

با توجه به ساختار سیکلوآلکان‌ها، این مواد از جمله هیدروکربن‌های سیرشده بوده و در آن‌ها هیچ پیوند دوگانه‌ای وجود ندارد.

بررسی سایر گزینه‌ها:

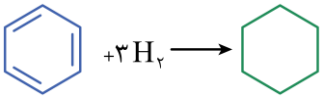
۱) اولین عضو خانواده سیکلوآلکان‌ها، سیکلوپروپان بوده و در ساختار این ماده، ۶ اتم هیدروژن وجود دارد. هپتین نیز نوعی آلکین با ۷ اتم کربن بوده و در ساختار آن ۱۲ اتم هیدروژن وجود دارد.

۲) در ساختار سیکلوآلکان‌ها و آلکن‌ها، شمار اتم‌های هیدروژن ۲ برابر شمار اتم‌های کربن است. چون نسبت شمار اتم‌های هیدروژن به کربن در این مواد برابر است، درصد جرمی کربن و هیدروژن در همه آن‌ها ثابت و یکسان است. در این رابطه، داریم:

$$\text{درصد جرمی کربن} = \frac{\text{جرم کربن}}{\text{جرم ترکیب}} \times ۱۰۰ = \frac{۱۲n}{۱۴n} \times ۱۰۰ \simeq ۸۵/۷$$

سنجش کلاد
www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshCloud

۳) چهارمین عضو خانواده سیکلوآلکان‌ها، سیکلوهگزان است. این ماده طی واکنش بنزن با مقدار کافی گاز هیدروژن تولید می‌شود. این واکنش شیمیایی به‌صورت زیر انجام می‌شود:



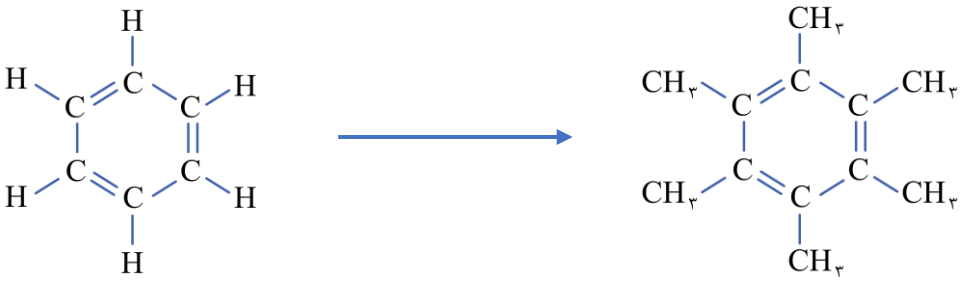
ماز

۸۹- اگر اتم‌های هیدروژن موجود در ساختار بنزن را با گروه متیل جایگزین کنیم، مجموع عدد اکسایش اتم‌های کربن در ساختار این ماده به اندازه ..... واحد تغییر کرده و برای سوزاندن ۰/۵ مول از ترکیب ایجاد شده، به ..... گرم گاز اکسیژن نیاز خواهیم داشت. ($O = ۱۶ , C = ۱۲ , H = ۱ : g.mol^{-1}$)

۱) ۱۲ ـ ۲۶۴ ۲) ۱۸ ـ ۲۶۴ ۳) ۱۲ ـ ۲۳۲ ۴) ۱۸ ـ ۲۳۲

پاسخ: گزینهٔ ۱ (متوسط ـ محاسباتی و مفهومی ـ استاندارد ـ صفحهٔ ۴۳ ـ ۱۱۰۱)

بنزن، سرگروه خانواده هیدروکربن‌های آروماتیک است. فرایند انجام شده، به‌صورت زیر است:



در این فرایند، یک ترکیب شیمیایی با فرمول شیمیایی $C_۶H_۶$ به ترکیب جدیدی با فرمول شیمیایی $C_{۱۲}H_{۱۸}$ تبدیل شده است. در ترکیب اولیه، مجموع عدد اکسایش اتم‌های کربن برابر با ۶- بوده و در ترکیب جدید ایجاد شده، مجموع عدد اکسایش اتم‌های کربن برابر با ۱۸- است. بر این اساس، می‌توان گفت طی این فرایند مجموع عدد اکسایش اتم‌های کربن ۱۲ واحد تغییر کرده است. معادله واکنش سوختن این ماده به‌صورت زیر است:

$$۲C_{۱۲}H_{۱۸} + ۳۳O_۲ \rightarrow ۲۴CO_۲ + ۱۸H_۲O$$

بر این اساس، مقدار اکسیژن لازم برای سوزاندن ۰/۵ مول از ترکیب داده شده را محاسبه می‌کنیم:

$$?\,g\,O_۲ = ۰/۵\,mol\,C_{۱۲}H_{۱۸} \times \frac{۳۳\,mol\,O_۲}{۲\,mol\,C_{۱۲}H_{۱۸}} \times \frac{۳۲\,g\,O_۲}{۱\,mol\,O_۲} = ۲۶۴\,g$$

ماز

۹۰- مخلوطی از ۲-پنتن و پروپین به جرم ۱۸ گرم، با ۶۴ گرم بخار برم به‌طور کامل واکنش داده و سیر می‌شود. جرم ۲-پنتن موجود در مخلوط اولیه، چند برابر جرم پروپین موجود در آن بوده و طی این فرایند، مجموعاً چند گرم فراورده تولید می‌شود؟

($Br = ۸۰ , C = ۱۲ , H = ۱ : g.mol^{-1}$)

۱) ۳/۵ ـ ۶۶ ۲) ۲/۵ ـ ۶۶ ۳) ۳/۵ ـ ۸۲ ۴) ۲/۵ ـ ۸۲

پاسخ: گزینهٔ ۳ (سخت ـ محاسباتی ـ زمان‌بر ـ صفحهٔ ۴۲ ـ ۱۱۰۱)

آلکن‌ها و آلکین‌ها، با بخار برم واکنش داده و به مواد سیرشده تبدیل می‌شوند. هر مول آلکن با ۱ مول بخار برم و هر مول آلکین نیز با ۲ مول بخار برم به‌طور کامل واکنش می‌دهد. معادله واکنش پروپین (نوعی آلکین با جرم مولی ۴۰ گرم بر مول) با بخار برم، به‌صورت زیر است:

$$C_۳H_۴ + ۲Br_۲ \rightarrow C_۳H_۴Br_۴$$

اگر در مخلوط اولیه x مول پروپین داشته باشیم، جرم این ماده برابر با $۴۰x$ گرم شده و نمونه مورد نظر با $۲x$ مول بخار برم (معادل با $۳۲۰x$ گرم بخار برم) نیز وارد واکنش می‌شود. معادله واکنش ۲-پنتن (نوعی آلکن با جرم مولی ۷۰ گرم بر مول) با بخار برم، به‌صورت زیر است:

$$C_۵H_{۱۰} + Br_۲ \rightarrow C_۵H_{۱۰}Br_۲$$

سنجش کلاد
www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshCloud

اگر در مخلوط اولیه y مول ۲-پنتن داشته باشیم، جرم این ماده برابر با $۷۰y$ گرم شده و نمونه مورد نظر با y مول بخار برم (معادل با $۱۶۰y$ گرم بخار برم) نیز وارد واکنش می‌شود. در صورت سؤال، ذکر شده که جرم مخلوط اولیه از ۲-پنتن و پروپین برابر با ۱۸ گرم بوده است. بر این اساس، داریم:

$$۴۰x + ۷۰y = ۱۸\ g$$

از طرفی، مخلوط هیدروکربن‌ها مجموعاً با ۶۴ گرم برم واکنش داده است. بر این اساس، داریم:

$$۳۲۰x + ۱۶۰y = ۶۴\ g$$

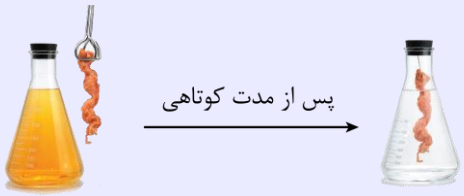
تا به اینجای کار، دو معادله و دو مجهول داریم. با حل دستگاه دو معادله و دو مجهول، می‌توانیم مقدار مؤلفه‌های x و y را محاسبه کنیم. در این رابطه، داریم:

$$\begin{cases} ۴۰x + ۷۰y = ۱۸\ g \\ ۳۲۰x + ۱۶۰y = ۶۴\ g \end{cases} \longrightarrow x = ۰/۱\ mol \quad , \quad y = ۰/۲\ mol$$

با توجه به مقدار مول اولیه هر ماده، می‌توان گفت در مخلوط اولیه ۱۴ گرم ۲-پنتن و ۴ گرم پروپین وجود داشته است، پس جرم ۲-پنتن معادل با ۳/۵ برابر جرم پروپین بوده است. مخلوط اولیه از دو هیدروکربن، ۱۸ گرم جرم داشته که با ۶۴ گرم برم واکنش داده است، پس طبق قانون پایستگی جرم می‌توان گفت جرم مخلوط نهایی برابر با $۶۴ + ۱۸ = ۸۲$ گرم خواهد بود.

واکنش هیدروکربن‌ها با برم

برم ($Br_۲$)، عضوی از خانواده هالوژن‌ها است که به رنگ قرمز دیده می‌شود. در صورت مجاورت آلکن‌ها با برم، این ماده به‌تدریج با آلکن مورد نظر واکنش داده و چون در این فرایند، برم مصرف می‌شود، از شدت رنگ قرمز موجود در محیط مورد نظر کاسته خواهد شد. از این فرایند، برای تشخیص این آلکن‌ها از هیدروکربن‌های سیرشده استفاده می‌شود. علاوه بر این، از واکنش مورد نظر برای تشخیص سیرشده بودن و یا نبودن ترکیب‌های آلی موجود در سایر مواد نیز می‌توان استفاده کرد. به‌عنوان مثال، تصویر زیر نمایی از واکنش یک تکه گوشت چرب با بخار برم را نشان می‌دهد:



از آنجا که با گذشت زمان، رنگ مخلوط گازی موجود در ظرف واکنش از بین رفته است، می‌توان گفت مولکول‌های چربی موجود در گوشت سیرنشده بوده و دارای پیوندهای $C = C$ در ساختار مولکولی خود هستند.

سنجش کلاد
www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshCloud

بسته شبیه‌ساز کنکور
مارکوپولو منتشر شد!

- **۱۷ دوره کنکور سراسری** از ۹۸ تا ۱۴۰۴؛ آپدیت شده و منطبق با تغییرات کنکور ۱۴۰۵
- **پاسخنامه به سبک ماز:** شامل بررسی دقیق گزینه‌ها، نکته‌ها، جداول و کادرهای جمع‌بندی
- **قابلیت تخمین رتبه و تراز کنکور سراسری:** براساس نمرات نهایی و درصدهای کنکور
- **آزمون پیش‌بینی** کنکور سراسری ۱۴۰۵ از نگاه طراحان ماز
- **تحلیل پاسخنامهٔ ویدیویی سؤالات کنکور** توسط اساتید ماز
- **بستهٔ جامع آمادگی امتحانات نهایی** خرداد ۱۴۰۵
- بانک کنکور به تفکیک درس به درس و مبحث به مبحث مناسب دوران جمع‌بندی
- بانک کامل سؤالات شیمی و فیزیک کنکور تجربی مشترک با رشتهٔ ریاضی

ثبت سفارش
از سایت مازمارکت
mazemarket.ir

اسکن کن!

سنجش کلاد
www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshCloud