# آزمون‌های آزمایشی

# ماراتون

## آزمون مرحله ۷ | ۹ بهمن ۱۴۰۴

## پاسخنامه دفترچه ۱ | پایه دوازدهم

رشتهٔ ریاضی

| درس | گزینشگر و مسئول آزمون | ناظر علمی | پاسخنامه نویس |
|---|---|---|---|
| حسابان | سجاد عظمتی، امید شیری‌نژاد | سامان سلامیان | امیرحسام شکری |
| هندسه | مهدی مجد آرا | - | مهدی مجد آرا |
| گسسته و آمار و احتمال | عزیزالله علی اصغری | محمدجواد محسنی | عزیزالله علی اصغری |

| | طراحان | ویراستاران |
|---|---|---|
| حسابان | سجاد عظمتی، سامان سلامیان، امید غلامی، علی آزاد، نریمان فتح الهی، امیر حسام شکری، امید شیری‌نژاد، علی احمدی قزلدشت، شاهین پروازی | مصطفی غلامی، منصور زرکش، آرش باقری‌پور، امیرحسین قنبری، علی فلاح، معین حسین‌نژاد، امیر زمانی دارانی، پارسا عمادی، البرز طهرانچی |
| هندسه | مهدی مجد آرا، سجاد عظمتی، امیرمحمد فتاحی | احسان کریمی، البرز طهرانچی، رومینا بختیاری |
| گسسته و آمار و احتمال | سجاد عظمتی، جواد ترکمن، علی احمدی قزلدشت، رضا توکلی، محمدجواد محسنی، نرگس کارگر، منوچهر زیرک، فرشاد دهقان، رضا ماجدی، عزیزاله علی‌اصغری | رضا ماجدی، البرز طهرانچی |

چاپ، تکثیر، انتشار و یا استفاده از محتوای آزمون به هر نحوی غیرقانونی، غیراخلاقی و خلاف شرع بوده و با متخلفان برابر مقررات رفتار خواهد شد.

ویژه کنکور ۱۴۰۵

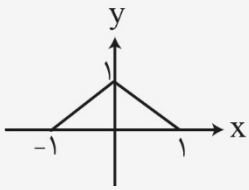
Mobtakeran.com Zistase.ir

سنجش کلاد
www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshCloud

# پاسخنامه دفترچه ۱ آزمون مرحله ۷

## حسابان | ۹ بهمن ماه ۱۴۰۴

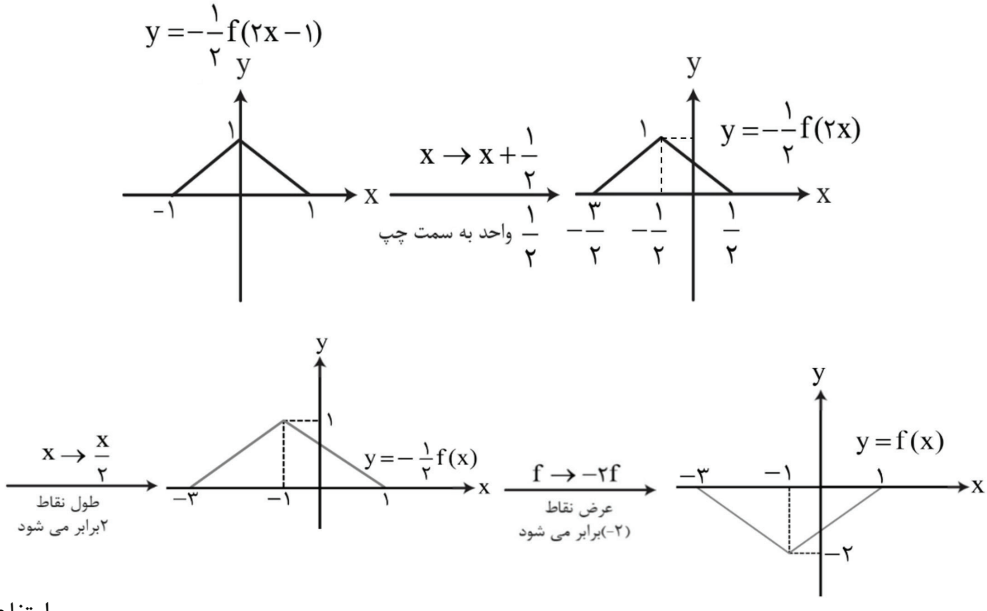
**۱. نمودار تابع $y=\frac{-۱}{۲}f(۲x-۱)$ به صورت مقابل است. مساحت ناحیهٔ محصور بین نمودار $y=f(x)$ و محور $x$ها کدام است؟**




۱) ۴
۲) ۶
۳) ۸
۴) ۲

**پاسخ: گزینه ۱** حسابان ۲ - فصل ۱

برای رسم نمودار تابع $y=f(x)$ از روی نمودار $y=\frac{-۱}{۲}f(۲x-۱)$، باید ابتدا جای $x$ عبارت $x+\frac{۱}{۲}$ و سپس جای $x$ عبارت $\frac{x}{۲}$ قرار دهیم و در نهایت تابع در $-۲$ ضرب شود.




$$\text{مساحت}=\frac{\text{ارتفاع}\times\text{قاعده}}{۲}=\frac{۴\times۲}{۲}=۴$$

**ترکیب حالات**

برای رسم $y=kf(ax+b)+c$ با داشتن $y=f(x)$، یک نسخه دائمی داریم:

۱) ابتدا $b$ واحد انتقال افقی
۲) $(\frac{۱}{a})$ برابر کردن طول‌ها
۳) $(k)$ برابر کردن عرض‌ها
۴) انتقال عمودی به اندازه واحد

ترتیب‌ها ← $y=\overset{۳}{k}f(\overset{۲}{a}x+\overset{۱}{b})+\overset{۴}{c}$

اگر نقطه $A(۲,-۱)$ روی نمودار تابع $y=f(x)$ باشد، نقطه متناظر آن روی نمودار $y=f(-x+۱)+۲$ به صورت $A'(-۱,۱)$ است.

**۲. نقطهٔ $A(m,n+۱)$ روی نمودار تابع $y=۱-f(x)$ قرار دارد و نقطهٔ نظیر $A$ روی تابع $y=f(\frac{x-۱}{۲})$ به صورت $A'(m,۳)$ است. اگر نقطهٔ $B(n,m)$ روی نمودار تابع $y=f(x)$ باشد، مختصات نقطهٔ نظیر $B$ روی تابع $y=۱+۲f(۲x)$ کدام است؟**

۱) $(-۱/۵,-۲)$
۲) $(-۱/۵,-۱)$
۳) $(-۰/۵,-۵)$
۴) $(-۰/۵,-۶)$

**پاسخ: گزینه ۲** حسابان ۲ - فصل ۱

www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshCloud

نقطهٔ $A(m,n+1)$ روی نمودار تابع $y=1-f(x)$ قرار دارد، پس:

$$1-f(m)=n+1\Rightarrow f(m)=-n$$

بنابراین نقطهٔ $(m,-n)$ روی تابع $y=f(x)$ قرار دارد.

حالا نظیر این نقطه روی تابع $y=f(\frac{x}{2}-\frac{1}{2})$ را می‌یابیم:

$$(m,-n)\in f \xrightarrow{\text{واحد به راست } \frac{1}{2}} (m+\frac{1}{2},-n)\in f(x-\frac{1}{2}) \xrightarrow{\text{xها را ۲ برابر می‌کنیم}} (2m+1,-n)\in f(\frac{x}{2}-\frac{1}{2})$$

بنابراین $A'(2m+1,-n)$ است و از طرفی با توجه به صورت سوال $A'(m,3)$ است، پس:

$$\begin{cases}2m+1=m \Rightarrow m=-1\\ -n=3 \Rightarrow n=-3\end{cases}$$

با توجه به سوال نقطهٔ $B(-3,-1)$ روی نمودار تابع $f$ قرار دارد. حالا نظیر این نقطه روی نمودار تابع $y=1+2f(2x)$ را می‌یابیم:

$$(-3,-1)\in f \xrightarrow{\text{xها تقسیم بر ۲}} (-\frac{3}{2},-1)\in f(2x) \xrightarrow{\text{yها ضرب در ۲}} (-\frac{3}{2},-2)\in 2f(2x) \xrightarrow{\text{yها به علاوهٔ ۱}} (-\frac{3}{2},-1)\in 2f(2x)+1$$

پس $B'(-\frac{3}{2},-1)$ است.

**۳. نمودار تابع $f(x)=\begin{cases}\sqrt{x} & ; x\geq 0\\ x^3 & ; x<0\end{cases}$ را ۲ واحد به طرف $x$های مثبت انتقال می‌دهیم و سپس آن را نسبت به مبدأ مختصات قرینه می‌کنیم. اگر نقطهٔ $A$، نقطهٔ برخورد نمودار حاصل با محور عرض‌ها باشد، کم‌ترین فاصلهٔ نقطهٔ $A$ از منحنی $y=x+|x|$ کدام است؟**

۱) $0/6\sqrt{5}$ ۲) $0/8\sqrt{5}$ ۳) $1/2\sqrt{5}$ ۴) $1/6\sqrt{5}$

**پاسخ: گزینه ۴** حسابان ۲ - فصل ۱

ابتدا با تبدیل کردن $x$ به $x-2$ نمودار را ۲ واحد به سمت راست انتقال می‌دهیم:

$$f(x-2)=\begin{cases}\sqrt{x-2} & ; x-2\geq 0\\ (x-2)^3 & ; x-2<0\end{cases}\Rightarrow f(x-2)=\begin{cases}\sqrt{x-2} & ; x\geq 2\\ (x-2)^3 & ; x<2\end{cases}$$

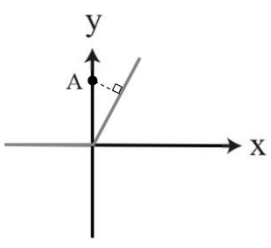
سپس با تبدیل کردن $x$ به $-x$ نمودار را نسبت به محور $y$ها و با تبدیل کردن $f$ به $-f$ نمودار را نسبت به محور $x$ها قرینه می‌کنیم تا نمودار نسبت به مبدأ مختصات قرینه شود:

$$y=\begin{cases}-\sqrt{-x-2} & ; -x\geq 2\\ -(-x-2)^3 & ; -x<2\end{cases}=\begin{cases}-\sqrt{-x-2} & ; x\leq -2\\ (x+2)^3 & ; x>-2\end{cases}$$

نقطهٔ $A$ محل برخورد نمودار با محور $y$ها است، پس:

$$y_A=y(0)=(0+2)^3=8\Rightarrow A(0,8)$$

حالا باید فاصلهٔ نقطهٔ $A(0,8)$ را از نمودار تابع $y=x+|x|=\begin{cases}2x & ; x\geq 0\\ 0 & ; x<0\end{cases}$ پیدا کنیم. واضح است که کم‌ترین فاصله از ضابطهٔ $y=2x$ می‌باشد، پس:




$$y-2x=0\ ,\ A(0,8)$$

$$AH=\frac{|8-2\times 0|}{\sqrt{1^2+2^2}}=\frac{8}{\sqrt{5}}=\frac{8\sqrt{5}}{5}=1/6\sqrt{5}$$

**۴. اگر دامنهٔ تابع $y=f(2x+3)$ به صورت بازهٔ $[-1,2)$ باشد، دامنهٔ تابع $y=\frac{2f(\frac{-x}{2}+1)}{3}$ کدام است؟**

۱) $[1,7)$ ۲) $(1,7]$ ۳) $[-12,0)$ ۴) $(-12,0]$

**پاسخ: گزینه ۳** حسابان ۲ - فصل ۱

سنجش کلاد
www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshCloud

**روش اول:**

$$\begin{cases} y=f(2x+3) \\ -1<x\le 2 \xrightarrow{\times 2} -2<2x\le 4 \xrightarrow{+3} 1<\underbrace{2x+3}_{\text{ورودی تابع f}}\le 7 \end{cases}$$

$$y=\frac{2}{3}f(-\frac{x}{2}+1) \xrightarrow[\text{ثابتی دارد}]{\text{ورودی تابع f محدوده}} 1<-\frac{x}{2}+1\le 7 \xrightarrow{-1} 0<-\frac{x}{2}\le 6 \xrightarrow{\times(-2)} -12\le x<0 \rightarrow \text{دامنه جدید}=[-12,0)$$

**روش دوم:**

$$y=f(2x+3) \xrightarrow[\times\frac{2}{3}]{x\to ax+b} y=\frac{2}{3}f(-\frac{x}{2}+1)$$

$$2(ax+b)+3=-\frac{x}{2}+1 \rightarrow 2ax+2b+3=-\frac{x}{2}+1 \rightarrow \begin{cases} a=-\frac{1}{4} \\ b=-1 \end{cases}$$

یعنی $x$ به $-\frac{1}{4}x-1$ تبدیل شده است. پس به لحاظ نموداری ابتدا نمودار تابع اولیه یک واحد به سمت راست و سپس طول نقاط $-4$ برابر شده است.

$$\text{دامنه اولیه}:(-1,2] \xrightarrow[\text{سمت راست}]{\text{۱ واحد به}} (0,3] \xrightarrow{\times(-4)} \underbrace{[-12,0)}_{\text{دامنه جدید}}$$

| | | | |
|---|---|---|---|
| **تغییرات دامنه و برد در انتقال نمودار** | دامنه و برد تابع $y=f(x)$ به ترتیب برابر $D_f=[A,B]$ و $R_f=[C,D]$ است. | | |
| | دامنه و برد $y=kf(ax+b)+c$ | **دامنه** | $D_f=\left[\frac{A-b}{a},\frac{B-b}{a}\right]$ |
| | | **برد** | $R_f=[kC+c,kD+c]$ |
| اگر دامنه و برد تابع $y=f(x)$ به ترتیب برابر $D_f=[3,7]$ و $R_f=[-1,4]$ باشد، دامنه و برد تابع $y=3f(-x+2)+1$ برابر $D_f=[-5,-1]$ و $R_f=[-2,13]$ است. | | | |

اگر $D_{f(ax+b)}=[m,n]$ باشد و بخواهیم دامنه $f(x)$ را محاسبه کنیم به صورت مقابل با داشتن حدود $x$، حدود $ax+b$ را حساب می‌کنیم.

$$m\le x\le n \Rightarrow am\le ax\le an \Rightarrow am+b\le ax+b\le an+b$$

اگر دامنه تابع $y=f(2x-1)+1$ برابر $[-2,4]$ باشد، دامنه تابع $y=f(x)$ برابر است با:

$$-2\le x\le 4 \Rightarrow -4\le 2x\le 8 \Rightarrow -5\le 2x-1\le 7 \Rightarrow D_f=[-5,7]$$

**۵. با فرض یکنوا بودن تابع $f(x)=\begin{cases} 1-2x & ; \ x\ge 3 \\ x^2-mx+2 & ; \ x<2 \end{cases}$، کوچک‌ترین ریشهٔ ممکن معادله $f(x)=3$ کدام است؟**

۱) $2+\sqrt{5}$ ۲) $2-\sqrt{5}$ ۳) $2-\sqrt{2}$ ۴) $2-2\sqrt{2}$

**پاسخ: گزینه ۲** حسابان ۲ - فصل ۱

با توجه به یکنوا بودن تابع $f(x)$ در ضابطه دوم باید $x_s\ge 2$ و $y_1(2)\ge y_1(3)$ پس:

$$\begin{cases} x_s=-\frac{b}{2a}=\frac{m}{2}\ge 2 \rightarrow m\ge 4 \\ 4-2m+2\ge -5 \rightarrow 2m\le 11 \rightarrow m\le 5/5 \end{cases} \Rightarrow m\in[4,5/5]$$

اگر $m=4$ را در نظر بگیریم سهمی $y=x^2-mx+2$ کم‌تر به محور $y$ها متمایل خواهد شد و در نتیجه نقطهٔ برخورد $f(x)=3$ منفی‌تر (کوچک‌تر) خواهد بود.

$$x^2-4x+2=3 \rightarrow x^2-4x-1=0 \rightarrow x=2\pm\sqrt{5} \xrightarrow{x<0} x=2-\sqrt{5}$$

سنجش کلاد
www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshCloud

**۶. با توجه به ماشین شکل مقابل، اگر $g(x)=\frac{۲x+۱}{x+۱}$ باشد، کدام گزینه در مورد تابع f درست است؟**

$$x \longrightarrow \boxed{f} \longrightarrow \boxed{g} \longrightarrow \frac{۲x}{x+۱}$$

۱) یک‌به‌یک - اکیداً صعودی

۲) یک‌به‌یک - اکیداً نزولی

۳) غیر یک‌به‌یک - غیریکنوا

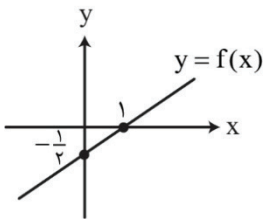
۴) یک‌به‌یک - غیریکنوا

**پاسخ: گزینه ۱** حسابان ۱ - فصل ۲

با توجه به ماشین تابع داده شده درمی‌یابیم که $g(f(x))=\frac{۲x}{x+۱}$ است. از طرفی $g(x)=\frac{۲x+۱}{x+۱}$ است. پس $g(f(x))$ برابر است با:

$$g(x)=\frac{۲x+۱}{x+۱} \Rightarrow g(f(x))=\frac{۲f(x)+۱}{f(x)+۱}$$

در ضمن از قبل می‌دانیم $g(f(x))=\frac{۲x}{x+۱}$ است، پس:




$$\frac{۲f(x)+۱}{f(x)+۱}=\frac{۲x}{x+۱} \Rightarrow ۲xf(x)+۲f(x)+x+۱=۲xf(x)+۲x$$
$$\Rightarrow ۲f(x)=x-۱ \Rightarrow f(x)=\frac{x-۱}{۲}$$

بنابراین با توجه به نمودار تابع $y=f(x)$ تابعی یک‌به‌یک و اکیداً صعودی است.

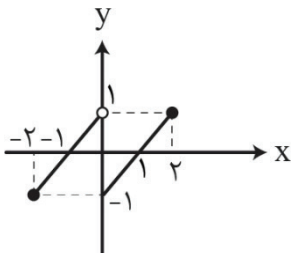
| | |
|---|---|
| **ضابطه مجهول در ترکیب توابع** | اگر $fog(x)$ و $f(x)$ را بدهند و $g(x)$ را بخواهند، کافی است مجدد $f(g(x))$ را ساخته و آن را با $fog(x)$ که در صورت سوال داده شده، مساوی قرار دهیم تا به ضابطه $g(x)$ برسیم.<br>اگر $f(x)=x+۱$ و $(fog)(x)=x^۲+x$ باشد، ضابطه تابع $g(x)$ چیست؟<br>$(fog)(x)=f(g(x))=g(x)+۱=x^۲+x \Rightarrow g(x)=x^۲+x-۱$ |
| **نکته** | در برخی از تست‌ها، می‌توانیم جای x یک عدد دلخواه قرار دهیم و به ازای آن، مقدار تابع را محاسبه کنیم. سپس در گزینه‌ها، دنبال همان عدد می‌گردیم. |

**۷. اگر $f(x)=\begin{cases} x-۱ & ; \ ۰\le x\le ۲ \\ x+۱ & ; \ -۲\le x<۰ \end{cases}$ باشد، مجموعه جواب نامعادلهٔ $(fof)(x)<۰$ شامل چند عدد صحیح است؟**

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

**پاسخ: گزینه ۳** حسابان ۱ - فصل ۲

ابتدا نمودار $y=f(x)$ را به صورت مقابل رسم می‌کنیم. با تو جه به نمودار واضح است که به ازای $۰\le x<۱$ و $-۲\le x<-۱$، نمودار تابع زیر محور x ها بوده و $f(x)<۰$ است، پس:




$$f(f(x))<۰ \Rightarrow \begin{cases} ۰\le f(x)<۱ \Rightarrow x\in[-۱,۰)\cup[۱,۲) \\ -۲\le f(x)<-۱ \Rightarrow \text{تابع f در هیچ دامنه‌ای دارای برد } [-۲,-۱) \text{ نیست} \end{cases}$$

پس جواب نامعادله برابر بازهٔ $[-۱,۰)\cup[۱,۲)$ است که شامل ۲ عدد صحیح است.

**۸. تابع $f(x)=x^۲-۴x-۶ \ ; \ x>۲$، تابع وارون خود را در نقطهٔ $x=a$ قطع می‌کند، $f(a)$ کدام است؟**

۱) ۶ ۲) ۷ ۳) ۱۳ ۴) ۱۵

**پاسخ: گزینه ۱** حسابان ۱ - فصل ۲

ابتدا تابع درجه دوم $f(x)$ را به صورت مربع کامل می‌نویسیم:

$$y=x^۲-۴x-۶=(x-۲)^۲-۱۰ \rightarrow \begin{cases} D_f: x>۲ \\ R_f=D_{f^{-۱}}: y>-۱۰ \end{cases}$$

سنجش کلاد
www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshCloud

این تابع در دامنه $x>۲$ اکیداً صعودی است. بنابراین محل تلاقی تابع $f$ و $f^{-۱}$ روی خط $y=x$ قرار دارد. پس:

$$f(x)=x \rightarrow x^{۲}-۴x-۶=x \rightarrow x^{۲}-۵x-۶=۰ \rightarrow (x-۶)(x+۱)=۰ \xrightarrow{x>۲} \begin{cases} x-۶=۰ \rightarrow x=۶ \checkmark \\ x+۱=۰ \rightarrow x=-۱ \times \end{cases} \rightarrow a=۶$$

حالا مقدار $f(a)$ را محاسبه می‌کنیم:

$$f(a)=f(۶)=(۶)^{۲}-۴(۶)-۶=۶$$

| برخورد $f$ و $f^{-۱}$ | |
|---|---|
| **۱) در توابع اکیداً صعودی یا هموگرافیک** | در این توابع نقاط برخورد دو نمودار روی نیمساز ربع اول و سوم است، بنابراین برای یافتن نقاط تلاقی آنها، معادله $f(x)=x$ را حل می‌کنیم. |
| **۲) اکیدا نزولی** | باید ضابطه وارون تابع را پیدا کنیم؛ سپس با حل معادله $f(x)=f^{-۱}(x)$ ، به مختصات نقاط تلاقی برسیم. |
| تابع $f(x)=\sqrt{x-۱}+۱$ یک تابع اکیداً صعودی است. برای پیدا کردن نقاط تلاقی این نمودار با وارون آن، می‌توانیم معادله $f(x)=x$ را حل کنیم. $f(x)=x \Rightarrow \sqrt{x-۱}+۱=x \Rightarrow \sqrt{x-۱}=x-۱ \Rightarrow x-۱=(x-۱)^{۲} \Rightarrow x=۲,۱$ | |

**۹. اگر $f(x)=\sqrt{۳-x}$ و $g(x)=(fof^{-۱})(x)+(f^{-۱}of)(x)$ باشد، حداکثر مقدار تابع $g(x)$ کدام است؟**

۱) ۳ ۲) ۶ ۳) ۹ ۴) صفر

**پاسخ: گزینه ۲** حسابان ۲ - فصل ۱

ابتدا دامنه و برد تابع $f(x)$ را می‌یابیم:

$$f(x)=\sqrt{۳-x} \rightarrow \begin{cases} ۳-x\geq ۰ \rightarrow x\leq ۳ \rightarrow D_f=(-\infty,۳] \\ \sqrt{۳-x}\geq ۰ \rightarrow y\geq ۰ \rightarrow R_f=D_{f^{-۱}}=[۰,+\infty) \end{cases}$$

حال به بررسی توابع $(fof^{-۱})(x)$ و $(f^{-۱}of)$ می‌پردازیم:

$$\begin{cases} (fof^{-۱})(x)=x \ , \ x\in D_{f^{-۱}} \\ (f^{-۱}of)(x)=x \ , \ x\in D_f \end{cases} \rightarrow D_g=D_f\cap D_{f^{-۱}}=(-\infty,۳]\cap[۰,+\infty)=[۰,۳]$$

بنابراین:

$$g(x)=x+x=۲x \ , \ D_g=[۰,۳]$$

$$\text{حداکثر مقدار تابع } g=g(۳)=۲(۳)=۶$$

| ترکیب تابع با وارونش | |
|---|---|
| اگر تابع $f$ وارون پذیر باشد، ضابطه ترکیب توابع $f$ و $f^{-۱}$ همواره برابر تابع همانی $(y=x)$ است. $(f^{-۱}of)(x)=x \qquad D=D_f$ $(fof^{-۱})(x)=x \qquad D=D_{f^{-۱}}$ با توجه به تفاوت دامنه دو تابع بالا، درحالت کلی $fof^{-۱}(x)$ و $f^{-۱}of(x)$ باهم مساوی نیستند؛ مگر داشته باشیم: $D_f=R_f$ | |

**۱۰. اگر دوره تناوب $y=۴\sin(\frac{x}{a}+۳\pi)-۱$ دو برابر دورهٔ تناوب $y=۲-۵\cos(\frac{ax}{۲}-\frac{\pi}{۲})$ باشد، $a$ ریشه چهارم کدام عدد زیر است؟**

۱) ۱۶ ۲) ۶۴ ۳) ۳۲ ۴) ۴

**پاسخ: گزینه ۱** حسابان ۲ - فصل ۲

www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshCloud

دورهٔ تناوب توابع $y=a\sin(bx+c)+d$ و $y=a\cos(bx+c)+d$ به صورت $T=\frac{2\pi}{|b|}$ است. بنابراین:

$$\begin{cases} y=4\sin(\frac{x}{a}+3\pi)-1 \rightarrow T_1=\frac{2\pi}{|\frac{1}{a}|}=2|a|\pi \\ y=2-5\cos(\frac{a}{2}x-\frac{\pi}{2}) \rightarrow T_2=\frac{2\pi}{|\frac{a}{2}|}=\frac{4\pi}{|a|} \end{cases}$$

$$T_1=2T_2 \rightarrow 2|a|\pi=2(\frac{4\pi}{|a|}) \rightarrow |a|^2=4 \rightarrow |a|=2$$

$$\rightarrow a=\pm 2 \rightarrow ۱۶ \text{ عدد چهارم ریشه} = \pm\sqrt[4]{16}=\pm 2$$

**محاسبه دوره تناوب**

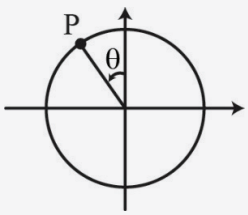
برای محاسبه دوره تناوب، تابع را تا حد امکان ساده می‌کنیم؛ سپس از روابط زیر استفاده می‌کنیم:

$f(x)=\sin ax \Rightarrow T=\frac{2\pi}{|a|}$ $\quad f(x)=\cos ax \Rightarrow T=\frac{2\pi}{|a|}$ $\quad f(x)=\tan ax \Rightarrow T=\frac{\pi}{|a|}$

دوره تناوب تابع با ضابطه $f(x)=3\sin\frac{x}{2}-\frac{\pi}{6}$ برابر است با:

$$T=\frac{2\pi}{\frac{1}{2}}=4\pi$$

**۱۱. در شکل مقابل، نقطهٔ $P(a,\frac{1}{2})$ روی دایرهٔ مثلثاتی قرار دارد. مقدار $\frac{2a}{\sin\theta+\cos\theta}$ کدام است؟**




۱) $3-\sqrt{3}$

۲) $\sqrt{3}-3$

۳) $1-\sqrt{3}$

۴) $\sqrt{3}-1$

**پاسخ: گزینه ۲** حسابان ۱ - فصل ۴

مختصات نقطهٔ P برابر $(a,\frac{1}{2})$ است. پس با توجه به دایرهٔ مثلثاتی داریم:

$$\sin(\frac{\pi}{2}+\theta)=\frac{1}{2} \Rightarrow \cos\theta=\frac{1}{2}$$

$$\sin^2\theta=1-\cos^2\theta=1-(\frac{1}{2})^2=\frac{3}{4} \xrightarrow[\sin\theta>0]{\theta \text{ حاده است}} \sin\theta=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$a=\cos(\frac{\pi}{2}+\theta)=-\sin\theta=-\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{2a}{\sin\theta+\cos\theta}=\frac{2\times-\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}}=\frac{-2\sqrt{3}}{\sqrt{3}+1}\times\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}-1}=\frac{-2(3-\sqrt{3})}{2}=\sqrt{3}-3$$

**۱۲. اگر $\sin(\frac{\pi}{2}-x)-\cos(\pi+x)=\frac{2}{5}$ باشد، حاصل $\frac{\sin(3\pi-x)\cos(\frac{\pi}{2}+x)}{1+2\cos(\pi-x)}$ کدام است؟**

۱) $-0/96$ ۲) $0/96$ ۳) $-1/6$ ۴) $1/6$

**پاسخ: گزینه ۳** حسابان ۱ - فصل ۴

از تساوی داده شده در صورت سوال داریم:

$$\sin(\frac{\pi}{2}-x)-\cos(\pi+x)=\frac{2}{5} \Rightarrow \cos x+\cos x=\frac{2}{5} \Rightarrow \cos x=\frac{1}{5}$$

سنجش کلاد
www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshCloud

سپس مقدار $\sin^۲ x$ را نیز به دست می‌آوریم:

$$\sin^۲ x = ۱ - \cos^۲ x = ۱ - (\frac{۱}{۵})^۲ = \frac{۲۴}{۲۵}$$

حال به سراغ محاسبهٔ عبارت خواسته شده می‌رویم:

$$\frac{\sin(۳\pi - x)\cos(\frac{\pi}{۲} + x)}{۱ + ۲\cos(\pi - x)} = \frac{(\sin x)(-\sin x)}{۱ - ۲\cos x} = \frac{-\sin^۲ x}{۱ - ۲\cos x} = \frac{-\frac{۲۴}{۲۵}}{۱ - ۲(\frac{۱}{۵})} = \frac{-\frac{۲۴}{۲۵}}{\frac{۳}{۵}} = -\frac{۸}{۵} = -۱/۶$$

**زوایای $(k\pi \pm \theta)$ و $(\frac{k\pi}{۲} \pm \theta)$**

برای محاسبه نسبت مثلثاتی زوایای $(k\pi \pm \theta); k \in \mathbb{Z}$ مراحل زیر را طی می‌کنیم:

۱) ابتدا معلوم می‌کنیم زاویه در کدام ربع قرار دارد؛ علامت نسبت مثلثاتی خواسته شده را در آن ربع به دست می‌آوریم و به عنوان ضریب، پشت نسبت مثلثاتی قرار می‌دهیم.

۲) $k\pi$ را حذف می‌کنیم.

برای محاسبه $\cos\frac{۳\pi}{۴}$ داریم:

$$\cos\frac{۳\pi}{۴} = \cos(\pi - \frac{\pi}{۴}) = -\cos\frac{\pi}{۴} = \frac{-\sqrt{۲}}{۲}$$

برای محاسبه نسبت مثلثاتی زوایای $\left(\frac{k\pi}{۲} \pm \theta\right); k \in \mathbb{Z}$ مراحل زیر را طی می‌کنیم.

اگر $k$ عددی فرد باشد:

۱) ابتدا معلوم می‌کنیم زاویه در کدام ربع قرار دارد؛ علامت نسبت مثلثاتی خواسته شده را در آن ربع به دست می‌آوریم و به عنوان ضریب، پشت نسبت مثلثاتی قرار می‌دهیم.

۲) $\frac{k\pi}{۲}$ را حذف می‌کنیم.

۳) نسبت مثلثاتی را می‌چرخانیم. یعنی $\sin\theta \leftrightarrow \cos\theta$ و $\tan\theta \leftrightarrow \cot\theta$ تبدیل میشود.

اگر $k$ عددی زوج باشد: مشابه حالت $(k\pi \pm \theta)$ می‌شود.

برای محاسبه $\cos\frac{۴\pi}{۳}$ داریم:

$$\cos\frac{۴\pi}{۳} = \cos\left(\frac{۳\pi}{۲} - \frac{\pi}{۶}\right) = -\sin\frac{\pi}{۶} = \frac{-۱}{۲}$$

**۱۳. اگر $\frac{\pi}{۴} < x < \frac{\pi}{۲}$ و $\frac{\sqrt{۱ - \cos ۲x}}{\sqrt{۱ - \sin ۲x}} = ۳\sqrt{۲}$ باشد، مقدار $\tan ۲x$ کدام است؟**

۱) $\frac{۲۴}{۵}$ ۲) $\frac{-۱۲}{۵}$ ۳) $-\frac{۶}{۵}$ ۴) $-\frac{۸}{۵}$

**پاسخ: گزینه ۲** حسابان ۲ - فصل ۲

می‌دانیم $۱ - \sin ۲x = (\sin x - \cos x)^۲$ و $۱ - \cos ۲x = ۲\sin^۲ x$ است. با جای‌گذاری روابط بالا داریم:

$$\frac{\sqrt{۲\sin^۲ x}}{\sqrt{(\sin x - \cos x)^۲}} = ۳\sqrt{۲} \rightarrow \frac{\sqrt{۲}|\sin x|}{|\sin x - \cos x|} = ۳\sqrt{۲}$$

$$\frac{\pi}{۴} < x < \frac{\pi}{۲} \rightarrow \begin{cases} |\sin x| = \sin x \\ \sin x > \cos x \rightarrow \sin x - \cos x > ۰ \end{cases} \xrightarrow{\div\sqrt{۲}} \frac{\sin x}{\sin x - \cos x} = ۳ \rightarrow \sin x = ۳\sin x - ۳\cos x$$

$$\rightarrow ۲\sin x = ۳\cos x \xrightarrow{\div\cos x} \tan x = \frac{۳}{۲}$$

حال $\tan ۲x$ برابر است با:

$$\tan ۲x = \frac{۲\tan x}{۱ - \tan^۲ x} = \frac{۲(\frac{۳}{۲})}{۱ - (\frac{۳}{۲})^۲} = \frac{۳}{۱ - \frac{۹}{۴}} = \frac{۳}{-\frac{۵}{۴}} = \frac{-۱۲}{۵}$$

سنجش کلاد
www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshCloud

| | | |
|---|---|---|
| اتحادهای مثلثاتی | ۱ | $\sin ۲\alpha = ۲\sin\alpha.\cos\alpha \Rightarrow \begin{cases} \sin\alpha.\cos\alpha = \frac{۱}{۲}\sin ۲\alpha \\ \sin\alpha = ۲\sin\frac{\alpha}{۲}.\cos\frac{\alpha}{۲} \end{cases}$<br>کاربرد اصلی این فرمول، رسیدن از سینوس و کسینوس یک زاویه، به سینوس دو برابر کمان است. |
| | ۲ | $\cos ۲\alpha = \cos^۲\alpha - \sin^۲\alpha \Rightarrow \begin{cases} \cos ۲\alpha = ۲\cos^۲\alpha - ۱ \\ \cos ۲\alpha = ۱ - ۲\sin^۲\alpha \\ \cos ۲\alpha = \cos^۴\alpha - \sin^۴\alpha \end{cases}$<br>کاربرد اصلی این فرمول، رسیدن از سینوس و کسینوس یک زاویه، به کسینوس دو برابر کمان است. |
| | ۳ | $(\sin\alpha \pm \cos\alpha)^۲ = ۱ \pm \sin ۲\alpha$ |

**۱۴. اگر $\tan ۲x = \frac{۳\tan^۲ x}{۱-\tan^۲ x}$، مقدار $\sin ۲x$ کدام است؟ $(x \neq k\pi)$**

۱) $\frac{۸}{۱۷}$ ۲) $\frac{۷}{۲۵}$ ۳) $\frac{۱۲}{۱۳}$ ۴) $\frac{۴}{۵}$

**پاسخ: گزینه ۳** حسابان ۲ - فصل ۲

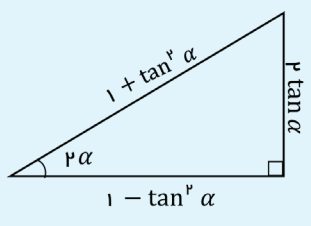
می‌دانیم $\tan ۲x = \frac{۲\tan x}{۱-\tan^۲ x}$ است. بنابراین:

$$\frac{۲\tan x}{۱-\tan^۲ x} = \frac{۳\tan^۲ x}{۱-\tan^۲ x} \Rightarrow ۳\tan^۲ x = ۲\tan x \Rightarrow \tan x(۳\tan x - ۲) = ۰ \Rightarrow \begin{cases} \tan x = ۰ \xrightarrow{x \neq k\pi} \times \\ \tan x = \frac{۲}{۳} \checkmark \end{cases}$$

از طرفی $\sin ۲x = \frac{۲\tan x}{۱+\tan^۲ x}$ است. بنابراین:

$$\sin ۲x = \frac{۲(\frac{۲}{۳})}{۱+(\frac{۲}{۳})^۲} = \frac{\frac{۴}{۳}}{۱+\frac{۴}{۹}} = \frac{\frac{۴}{۳}}{\frac{۱۳}{۹}} = \frac{۱۲}{۱۳}$$

**میتوانیم به صورت زیر به خاطر بسپاریم:**




$$\tan ۲\alpha = \frac{۲\tan\alpha}{۱-\tan^۲\alpha}$$
$$\sin ۲\alpha = \frac{۲\tan\alpha}{۱+\tan^۲\alpha}$$
$$\cos ۲\alpha = \frac{۱-\tan^۲\alpha}{۱+\tan^۲\alpha}$$

**۱۵. اگر $\log(\sin x)+\log(\cos x) = \log ۱۲ - \log ۲۵$ و $\log(\sin x+\cos x) = -۱+\log(m)$ باشد، $m$ کدام است؟**

۱) ۱۲ ۲) ۱۰ ۳) ۱۴ ۴) ۱۶

**پاسخ: گزینه ۳** حسابان ۲ - فصل ۲

طبق ویژگی‌های لگاریتم داریم:

$$\log(\sin x)+\log(\cos x) = \log ۱۲ - \log ۲۵$$
$$\log(\sin x \cos x) = \log\frac{۱۲}{۲۵} \Rightarrow \sin x\cos x = \frac{۱}{۲}\sin ۲x = \frac{۱۲}{۲۵}$$
$$\Rightarrow \sin ۲x = \frac{۲۴}{۲۵}$$

سنجش کلاد
www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshCloud

از طرفی می‌دانیم $(\sin x+\cos x)^۲=۱+\sin ۲x$ است. بنابراین:

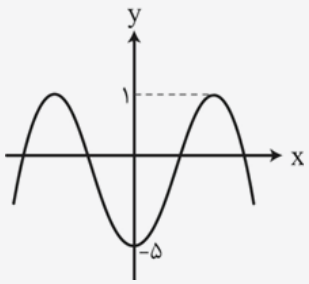
$$(\sin x+\cos x)^۲=۱+\frac{۲۴}{۲۵}=\frac{۴۹}{۲۵}\xrightarrow{\sin x+\cos x>۰}\sin x+\cos x=\frac{۷}{۵}$$

$$\log(\sin x+\cos x)=-۱+\log(m)=\log\frac{۷}{۵}$$

$$\rightarrow \log m=\log\frac{۷}{۵}+۱=\log\frac{۷}{۵}+\log ۱۰=\log\frac{۷۰}{۵}$$

$$\rightarrow m=\frac{۷۰}{۵}=۱۴$$

**۱۶. بخشی از نمودار تابع $y=b+c\sin(x+\frac{\pi}{۲})$ به صورت مقابل است. مقدار $f(\frac{۱۹\pi}{۴})$ کدام است؟**




۱) $\frac{۳\sqrt{۲}-۴}{۲}$

۲) $\frac{-۳}{۲}$

۳) $\frac{\sqrt{۲}-۲}{۴}$

۴) $\frac{۲\sqrt{۲}+۳}{۴}$

**پاسخ: گزینه ۱** حسابان ۲ - فصل ۲

$$y=b+c\sin(x+\frac{\pi}{۲})=b+c\cos x$$

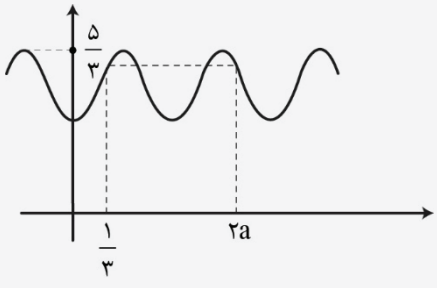
با توجه به نمودار تابع، $\max=۱$ و $\min=-۵$ است. بنابراین:

$$\begin{cases} b=\frac{\max+\min}{۲}=\frac{۱+(-۵)}{۲}=-۲ \\ |c|=\frac{\max-\min}{۲}=\frac{۱-(-۵)}{۲}=۳\xrightarrow[\text{محور y‌ها}]{\text{روی min}} c<۰\rightarrow c=-۳ \end{cases}$$

پس ضابطهٔ تابع به صورت $f(x)=-۲-۳\cos x$ است و $f(\frac{۱۹\pi}{۴})$ برابر است با:

$$f(\frac{۱۹\pi}{۴})=-۲-۳\cos\frac{۱۹\pi}{۴}=-۲-۳\cos(۵\pi-\frac{\pi}{۴})=-۲-۳(-\cos\frac{\pi}{۴})=-۲+۳\cos\frac{\pi}{۴}=-۲+\frac{۳\sqrt{۲}}{۲}=\frac{۳\sqrt{۲}-۴}{۲}$$

**۱۷. اگر نمودار $f(x)=a+b\cos(a\pi x)$ به صورت زیر باشد حاصل $f(\frac{۱۳}{۴})$ کدام است؟**




۱) $\frac{۵}{۳}$

۲) $\frac{۳}{۲}$

۳) ۱

۴) $\frac{۷}{۶}$

**پاسخ: گزینه ۴** حسابان ۲ - فصل ۲

ابتدا دوره تناوب را پیدا می‌کنیم

$$\frac{۱}{۳}+۲a=۲T(\text{تناوب})\ ,\ T=\frac{۲\pi}{|a\pi|}\xrightarrow{a>۰}T=\frac{۲}{a}$$

$$\rightarrow \frac{۱}{۳}+۲a=\frac{۴}{a}\rightarrow \frac{۱}{۳}a+۲a^۲-۴=۰\rightarrow ۶a^۲+a-۱۲=۰\xrightarrow{\Delta=۱-۴(۶)(-۱۲)=۲۸۹}a=\frac{-۱(\pm\sqrt{۲۸۹})}{۱۲}=\frac{-۱\pm۱۷}{۱۲}\Rightarrow\begin{cases} a=-\frac{۱۸}{۱۲}=-\frac{۳}{۲}\times \\ a=\frac{۱۶}{۱۲}=-\frac{۴}{۳}\checkmark \end{cases}$$

توجه کنید مطابق نمودار صورت سوال، $a$ مقداری مثبت است.

www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshCloud

با توجه به شکل نمودار cos توجه می‌شویم که ضریب پشت cos نیز منفی است. پس از ماکزیمم تابع برای یافتن مقدار b استفاده می‌کنیم:

$$\frac{۴}{۳}-b=\frac{۵}{۳}\rightarrow b=-\frac{۱}{۳}$$

حالا ضابطه صورت سوال را بازنویسی می‌کنیم و سپس در آن $x=\frac{۱۳}{۴}$ قرار می‌دهیم:

$$f(x)=\frac{۴}{۳}-\frac{۱}{۳}\cos(\frac{۴\pi}{۳}x)\xrightarrow{x=\frac{۱۳}{۴}}f(\frac{۱۳}{۴})=\frac{۴}{۳}-\frac{۱}{۳}(\frac{۱}{۲})=\frac{۸-۱}{۶}=\frac{۷}{۶}$$

**۱۸. یکی از جواب‌های معادلهٔ $\sin(x-\frac{\pi}{۳})=\cos(۳x+\frac{\pi}{۴})$ به صورت $x=\frac{k\pi}{۲}+\frac{a\pi}{b}$ نوشته شده است. کم‌ترین مقدار a+b کدام است؟ $(a,b\in\mathbb{N})$**

۱) ۲۹ ۲) ۴۹ ۳) ۳۷ ۴) ۵۵

**پاسخ: گزینه ۴** حسابان ۲ - فصل ۲

می‌دانیم $\cos(\frac{\pi}{۲}-\alpha)=\sin\alpha$ است. بنابراین:

$$\sin(x-\frac{\pi}{۳})=\cos(\frac{\pi}{۲}-(x-\frac{\pi}{۳}))=\cos(۳x+\frac{\pi}{۴})\rightarrow\cos(\frac{\pi}{۲}-x+\frac{\pi}{۳})=\cos(۳x+\frac{\pi}{۴})\rightarrow\cos(۳x+\frac{\pi}{۴})=\cos(\frac{۵\pi}{۶}-x)$$

حال با توجه به این‌که $\cos x=\cos\alpha\rightarrow x=۲k\pi\pm\alpha$ است، داریم:

$$\rightarrow\begin{cases}۳x+\frac{\pi}{۴}=۲k\pi-۵\frac{\pi}{۶}+x\rightarrow ۲x=۲k\pi-\frac{۱۳\pi}{۱۲}\rightarrow x=k\pi-\frac{۱۳\pi}{۲۴}\\ ۳x+\frac{\pi}{۴}=۲k\pi+\frac{۵\pi}{۶}-x\rightarrow ۴x=۲k\pi+\frac{۷\pi}{۱۲}\rightarrow x=\frac{k\pi}{۲}+\frac{۷\pi}{۴۸}\end{cases}$$

پس $a=۷$ و $b=۴۸$ است. در نتیجه $a+b=۵۵$

**۱۹. باقیمانده و خارج‌قسمت تقسیم چندجمله‌ای $p(x)$ بر $x^۲+۲x$ به ترتیب $۳x+۱$ و $Q(x)$ است. اگر $Q(-۲)=۳$ باشد، آن‌گاه مقدار باقیماندهٔ $p'(x)$ بر $x+۲$ کدام است؟**

۱) ۶- ۲) ۵- ۳) ۴- ۴) ۳-

**پاسخ: گزینه ۴** حسابان ۲ - فصل ۱

با توجه به داده‌های سوال اتحاد تقسیم را به صورت روبه‌رو می‌نویسیم: $p(x)=(x^۲+۲x)Q(x)+(۳x+۱)$

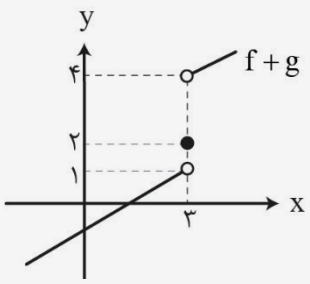
حالا از طرفین تساوی فوق مشتق می گیریم و داریم:

$$p'(x)=(۲x+۲)Q(x)+(x^۲+۲x)Q'(x)+۳$$

در ضمن می‌دانیم باقیماندهٔ تقسیم $p'(x)$ بر $x+۲$ برابر $p'(-۲)$ است. حالا با جای‌گذاری $x=-۲$ در رابطهٔ فوق $p'(-۲)$ را به دست می‌آوریم:

$$p'(-۲)=(\overbrace{۲\times-۲+۲}^{-۲})Q(-۲)+(۴-۴)Q'(-۲)+۳\xrightarrow{Q(-۲)=۳}p'(-۲)=-۲(۳)+۰+۳=-۳$$

**۲۰. دو تابع f و g را در نظر بگیرید. اگر $(f-g)(x)=\begin{cases}\frac{۱}{۳}x+۴ & ;x\le۳\\ ۲ & ;x>۳\end{cases}$ و نمودار تابع $y=(f+g)(x)$ به صورت مقابل باشد، حاصل $\lim\limits_{x\to۳^-}g(x)+\lim\limits_{x\to۳^+}f(x)$ کدام است؟**




۱) ۱
۲) ۱-
۳) ۵
۴) ۵-

**پاسخ: گزینه ۱** حسابان ۱ - فصل ۵

سنجش کلاد
www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshCloud

با توجه به ضابطهٔ $f-g$ در صورت سوال داریم:

$$\lim_{x\to ۳^-}(f-g)(x)=\lim_{x\to ۳^-}(\frac{۱}{۳}x+۴)=۵$$

$$\lim_{x\to ۳^+}(f-g)(x)=۲$$

در ضمن با توجه به نمودار $f+g$ ، $\lim_{x\to ۳^-}(f+g)(x)=۱$ است و داریم: $\lim_{x\to ۳^+}(f+g)=۴$

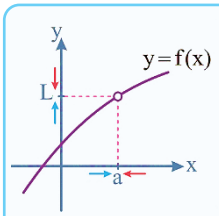
$$\begin{cases}\lim_{x\to ۳^-}(f+g)(x)=۱\\ \lim_{x\to ۳^-}(f-g)(x)=۵\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\lim_{x\to ۳^-}f(x)+\lim_{x\to ۳^-}g(x)=۱\\ \lim_{x\to ۳^-}f(x)-\lim_{x\to ۳^-}g(x)=۵\end{cases}\Rightarrow\lim_{x\to ۳^-}g(x)=-۲$$

$$\begin{cases}\lim_{x\to ۳^+}(f+g)(x)=۴\\ \lim_{x\to ۳^+}(f-g)(x)=۲\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\lim_{x\to ۳^+}f(x)+\lim_{x\to ۳^+}g(x)=۴\\ \lim_{x\to ۳^+}f(x)-\lim_{x\to ۳^+}g(x)=۲\end{cases}\Rightarrow\lim_{x\to ۳^+}f(x)=۳$$

$$\Rightarrow\lim_{x\to ۳^+}f(x)+\lim_{x\to ۳^-}g(x)=۳-۲=۱$$

**محاسبه حد از روی نمودار**

وقتی می‌گوییم تابع $f(x)$ در $x=a$ حد دارد که اگر از سمت چپ و راست به نقطه نزدیک شویم، مقدار تابع به $L$ نزدیک شود و می‌نویسیم:

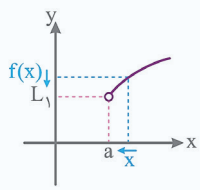



$$\lim_{x\to a}f(x)=L$$

**حد راست**

اگر از سمت راست به نقطه $a$ نزدیک شویم و مقدار تابع به $L$ نزدیک شود.

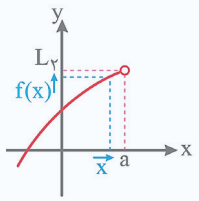
$$\lim_{x\to a^+}f(x)=L$$




**حد چپ**

اگر از سمت چپ به نقطه $a$ نزدیک شویم و مقدار تابع به $L$ نزدیک شود.

$$\lim_{x\to a^-}f(x)=L$$




**۲۱. اگر $\lim_{x\to ۳}\frac{x^۲+mx+n}{\sqrt{x+۶}-۳}=۶$ باشد، حاصل حد $\lim_{x\to n}\frac{۲x+۵}{x-۳}$ کدام است؟**

۱) $\frac{-۱}{۵}$ ۲) $\frac{۱۷}{۳}$ ۳) $\frac{۱۲}{۷}$ ۴) $\frac{-۵}{۱۳}$

**پاسخ: گزینه ۲** حسابان ۲ - فصل ۳

چون به ازای $x=۳$ مخرج حد داده شده برابر صفر می‌شود، اما حاصل حد برابر با عددی حقیقی است، پس $x=۳$ ریشهٔ صورت کسر نیز می‌باشد و با ابهام $\frac{۰}{۰}$ روبه‌رو هستیم. ابتدا با کمک قاعدهٔ هوپیتال به رفع ابهام حد داده شده می‌پردازیم:

$$\lim_{x\to ۳}\frac{x^۲+mx+n}{\sqrt{x+۶}-۳}=۶\xrightarrow{HOP}\lim_{x\to ۳}\frac{۲x+m}{\frac{۱}{۲\sqrt{x+۶}}}=۶\Rightarrow\frac{۶+m}{\frac{۱}{۶}}=۶\Rightarrow m+۶=۱\Rightarrow m=-۵$$

$$x^۲+mx+n=۰\xrightarrow[m=-۵]{x=۳}۳^۲-۵(۳)+n=۰\Rightarrow n=۶$$

حالا به محاسبهٔ حد خواسته شده می‌پردازیم:

$$\lim_{x\to ۶}\frac{۲x+۵}{x-۳}=\frac{۲\times ۶+۵}{۶-۳}=\frac{۱۷}{۳}$$

سنجش کلاد
www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshCloud

**نکته**

| | |
|---|---|
| **صفر صفرم مخفی** | اگر با حالتی مواجه شویم که حد صورت یا مخرج کسر برابر صفر است، اما حاصل، عدد حقیقی غیر صفر است، حتما کسر دارای ابهام صفر صفرم بوده است. |
| | اگر $\lim\limits_{x\to(-۳)}\frac{ax+۳a}{۱-\sqrt{۵x+۱۶}}=۲$ باشد. چون مخرج برابر صفر می‌شود. بنابر این صورت هم صفر بوده و با حد صفر صفرم مواجهیم. |

**۲۲. حاصل حد $\lim\limits_{x\to\frac{\pi^-}{۴}}\frac{\sqrt{۱-\sin ۲x}}{۵\cos ۲x}$ کدام است؟**

۱) $\frac{۱}{۵\sqrt{۲}}$ ۲) $\frac{۲\sqrt{۲}}{۳}$ ۳) $\frac{\sqrt{۲}}{۵}$ ۴) $\frac{\sqrt{۵}}{۳}$

**پاسخ: گزینه ۱** حسابان ۲ - فصل ۳

با جای‌گذاری $x=\frac{\pi}{۴}$ در حد داده شده به ابهام $\frac{۰}{۰}$ می‌رسیم. با استفاده از اتحاد مزدوج به رفع ابهام می‌پردازیم:

$$\lim_{x\to(\frac{\pi}{۴})^-}\left(\frac{\sqrt{۱-\sin ۲x}}{۵\cos ۲x}\times\frac{\sqrt{۱+\sin ۲x}}{\sqrt{۱+\sin ۲x}}\right)=\lim_{x\to(\frac{\pi}{۴})^-}\frac{\sqrt{۱-\sin^۲ ۲x}}{(۵\cos ۲x)\sqrt{۱+\sin ۲x}}$$

$$\lim_{x\to(\frac{\pi}{۴})^-}\frac{\sqrt{\cos^۲ ۲x}}{(۵\cos ۲x)\sqrt{۱+\sin ۲x}}=\lim_{x\to(\frac{\pi}{۴})^-}\frac{\overbrace{|\cos ۲x|}^{+}}{۵\cos ۲x\sqrt{۱+\sin ۲x}}$$

$$\lim_{x\to(\frac{\pi}{۴})^-}\frac{\cos ۲x}{(۵\cos ۲x)\sqrt{۱+\sin ۲x}}=\lim_{x\to(\frac{\pi}{۴})^-}\frac{۱}{۵\sqrt{۱+\sin ۲x}}=\frac{۱}{۵\sqrt{۱+۱}}=\frac{۱}{۵\sqrt{۲}}$$

**۲۳. حاصل $\lim\limits_{x\to ۱}\frac{\sqrt{۲x-x^۴}-\sqrt[۳]{x}}{۱-\sqrt{x^۳}}$ کدام است؟**

۱) $\frac{۸}{۹}$ ۲) $-\frac{۸}{۹}$ ۳) $\frac{۴}{۹}$ ۴) $-\frac{۴}{۹}$

**پاسخ: گزینه ۱** حسابان ۱ - فصل ۵

با جای‌گذاری $x=۱$ به ابهام $\frac{۰}{۰}$ می‌رسیم. پس با استفاده از قانون هوپیتال داریم:

$$\lim_{x\to ۱}\frac{\sqrt{۲x-x^۴}-\sqrt[۳]{x}}{۱-\sqrt{x^۳}}\overset{HOP}{=\!=}\lim_{x\to ۱}\frac{\frac{۲-۴x^۳}{۲\sqrt{۲x-x^۴}}-\frac{۱}{۳\sqrt[۳]{x^۲}}}{۰-\frac{۳}{۲}\sqrt{x}}=\frac{\frac{-۲}{۲}-\frac{۱}{۳}}{-\frac{۳}{۲}}=\frac{-\frac{۴}{۳}}{-\frac{۳}{۲}}=\frac{۸}{۹}$$

**۲۴. حاصل $\lim\limits_{x\to ۱^+}\frac{\cos ۲x}{-x^۳+۳x^۲+x-۳}$ کدام است؟**

۱) $+\infty$ ۲) $-\infty$ ۳) ۱ ۴) $-۱$

**پاسخ: گزینه ۲** حسابان ۲ - فصل ۳

ابتدا مخرج حد داده شده را تجزیه می‌کنیم:

$$\lim_{x\to ۱^+}\frac{\cos ۲x}{-x^۳+۳x^۲+x-۳}=\lim_{x\to ۱^+}\frac{\cos ۲x}{-x^۲(x-۳)+(x-۳)}=\lim_{x\to ۱^+}\frac{\cos ۲x}{(x-۳)(-x^۲+۱)}=\frac{\cos ۲}{۰^+}=-\infty$$

توجه کنید که $\cos ۲$ مقداری منفی است، چرا که می‌دانیم هر رادیان به‌طور تقریبی برابر $۵۷^\circ$ است، پس $۲\text{Rad}=۲\times ۵۷^\circ=۱۱۴^\circ$ است:

$$\cos ۲\simeq\cos ۱۱۴^\circ<۰$$

سنجش کلاد
www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshCloud

| | | |
|---|---|---|
| **حد بی‌نهایت** | حد بی‌نهایت (حد نامتناهی) حدی است که جواب آن $+\infty$ یا $-\infty$ می‌شود. چالش اصلی این نوع حدها، تعیین علامت $\infty$ است. این نوع از حد، در توابع کسری و لگاریتمی و مثلثاتی رخ می‌دهد. | |
| | **محاسبه حد** | در کسرهای گویا، به یکی از چهار حالت زیر بر می‌خوریم:<br>۱) $\frac{\text{عدد}^+}{\circ^+}=+\infty$ ۲) $\frac{\text{عدد}^+}{\circ^-}=-\infty$ ۳) $\frac{\text{عدد}^-}{\circ^+}=-\infty$ ۴) $\frac{\text{عدد}^-}{\circ^-}=+\infty$ |

**۲۵.** حاصل حد $\lim\limits_{x\to(-۱)^-}\frac{|۲x^۲+۵x+۳|}{x^۲-[\frac{۴}{x-۳}]}$ کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۴}$ ۲) $-\frac{۱}{۲}$ ۳) $\frac{۱}{۲}$ ۴) صفر

**پاسخ: گزینه ۳** حسابان ۱ - فصل ۵

ابتدا تابع درون قدرمطلق را تعیین علامت می‌کنیم و از قدرمطلق خارج می‌کنیم، سپس حاصل براکت را به دست می‌آوریم:

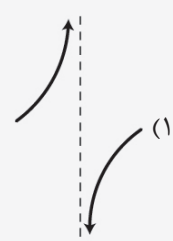
$$\lim_{x\to(-۱)^-}\frac{|۲x^۲+۵x+۳|}{x^۲-[\frac{۴}{x-۳}]}=\lim_{x\to(-۱)^-}\frac{|\overbrace{(x+۱)(۲x+۳)}^{-}|}{x^۲-[\frac{۴}{(-۴)^-}]}$$

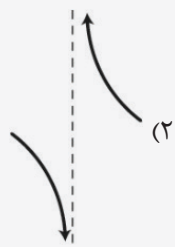
$$\lim_{x\to(-۱)^-}\frac{-(۲x^۲+۵x+۳)}{x^۲+[(-۱)^+]}=\lim_{x\to(-۱)^-}\frac{-۲x^۲-۵x-۳}{x^۲-۱}$$

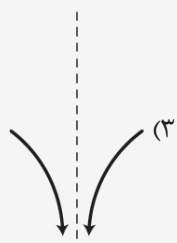
با جای‌گذاری $x=-۱$ در حد فوق به ابهام $\frac{\circ}{\circ}$ می‌رسیم و با کمک قاعدهٔ هوپیتال داریم:

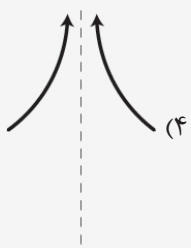
$$\text{HOP}:\lim_{x\to(-۱)^-}\frac{-۴x-۵}{۲x}=\frac{۴-۵}{-۲}=\frac{-۱}{-۲}=\frac{۱}{۲}$$

**۲۶.** نمودار تابع $f(x)=\frac{۲[x]+x^۲}{x^۲-۳x+۲}$ در اطراف $x=۱$ به کدام صورت است؟

۱) 

۲) 

۳) 

۴) 

**پاسخ: گزینه ۱** حسابان ۲ - فصل ۳

باید $\lim\limits_{x\to۱^-}f(x)$ و $\lim\limits_{x\to۱^+}f(x)$ را محاسبه می‌کنیم:

$$\lim_{x\to۱^-}f(x)=\lim_{x\to۱^-}\frac{۲[x]+x^۲}{x^۲-۳x+۲}=\lim_{x\to۱^-}\frac{۲[۱^-]+x^۲}{(x-۱)(x-۲)}$$

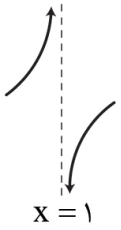
$$\lim_{x\to۱^-}\frac{x^۲}{(x-۱)(x-۲)}=\frac{۱}{\circ^+}=+\infty$$

$$\lim_{x\to۱^+}f(x)=\lim_{x\to۱^+}\frac{۲[x]+x^۲}{x^۲-۳x+۲}=\lim_{x\to۱^+}\frac{۲[۱^+]+x^۲}{(x-۱)(x-۲)}$$

$$\lim_{x\to۱^+}\frac{x^۲+۲}{(x-۱)(x-۲)}=\frac{۳}{\circ^-}=-\infty$$

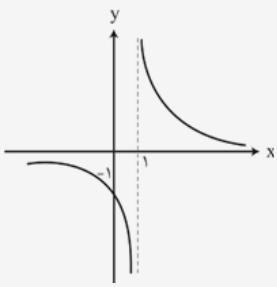
www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshCloud

بنابراین تابع در اطراف $x=۱$ به شکل مقابل است:




**نکته** نمودار حد بینهایت:

**۲۷.** نمودار تابع $y=f(x)$ به صورت مقابل است. حاصل $\lim\limits_{x\to ۱^+}\frac{x+f(x)}{۳f(x)}+\lim\limits_{x\to ۱^-}۲^{f(x)}$ کدام است؟




۱) $+\infty$

۲) $\frac{۱}{۳}$

۳) $\frac{۷}{۳}$

۴) صفر

**پاسخ: گزینه ۲** ریاضی ۳ - فصل ۳

ابتدا حاصل $\lim\limits_{x\to ۱^+}\frac{x+f(x)}{۳f(x)}$ را محاسبه می‌کنیم. در ضمن با توجه به نمودار $\lim\limits_{x\to ۱^+}f(x)=+\infty$، پس:

$$\lim_{x\to ۱^+}\frac{x+f(x)}{۳f(x)}=\lim_{x\to ۱^+}\frac{x}{۳f(x)}+\lim_{x\to ۱^+}\frac{f(x)}{۳f(x)}=\lim_{x\to ۱^+}\frac{x}{۳f(x)}+\frac{۱}{۳}=\frac{۱}{+\infty}+\frac{۱}{۳}=۰+\frac{۱}{۳}=\frac{۱}{۳}$$

از طرفی با توجه به نمودار $\lim\limits_{x\to ۱^-}f(x)=-\infty$ است. حالا برای محاسبهٔ $\lim\limits_{x\to ۱^-}۲^{f(x)}$ داریم:

$$\lim_{x\to ۱^-}۲^{f(x)}=۲^{\lim\limits_{x\to ۱^-}f(x)}=۲^{-\infty}=۰\Rightarrow\lim_{x\to ۱^+}\frac{x+f(x)}{۳f(x)}+\lim_{x\to ۱^-}۲^{f(x)}=\frac{۱}{۳}+۰=\frac{۱}{۳}$$

**۲۸.** تابع $f(x)=\begin{cases}۲ax+۱ & ; x^۲\geq ۹\\ x-b & ; x^۲<۹\end{cases}$ در $\mathbb{R}$ پیوسته است. حاصل $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{ax+۴}{bx-۵}$ کدام است؟

۱) $-\frac{۳}{۴}$ ۲) $\frac{۳}{۴}$ ۳) $\frac{۱}{۲}$ ۴) $-\frac{۱}{۲}$

**پاسخ: گزینه ۴** ریاضی ۳ - فصل ۳

ابتدا تابع را به صورت زیر بازنویسی می‌کنیم:

$$f(x)=\begin{cases}۲ax+۱ & ; x\leq -۳ \text{ یا } x\geq ۳\\ x-b & ; -۳<x<۳\end{cases}$$

حالا برای آن‌که تابع $f$ بر روی مجموعهٔ اعداد حقیقی پیوسته باشد، باید در $x=۳$ و $x=-۳$ نیز پیوسته باشد، بنابراین:

$$\begin{cases}f(۳)=\lim\limits_{x\to ۳^+}f(x)=\lim\limits_{x\to ۳^+}(۲ax+۱)=۶a+۱\\ \lim\limits_{x\to ۳^-}f(x)=\lim\limits_{x\to ۳^-}(x-b)=۳-b\end{cases}\Rightarrow ۶a+۱=۳-b\Rightarrow ۶a+b=۲\qquad (۱)$$

سنجش کلاد
www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshCloud

$$\begin{cases} f(-۳)=\lim\limits_{x\to(-۳)^-} f(x)=\lim\limits_{x\to(-۳)^-}(۲ax+۱)=-۶a+۱ \\ \lim\limits_{x\to(-۳)^+} f(x)=\lim\limits_{x\to(-۳)^+}(x-b)=-۳-b \end{cases} \Rightarrow -۶a+۱=-۳-b \Rightarrow -۶a+b=-۴ \qquad (۲)$$

از معادلات (۱) و (۲) مقادیر $b=-۱$ و $a=\frac{۱}{۲}$ را به دست می‌آوریم و داریم:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{ax+۴}{bx-۵}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{۱}{۲}x+۴}{-x-۵}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{۱}{۲}x}{-x}=-\frac{۱}{۲}$$

| | |
|---|---|
| **حد در بینهایت** | در این نوع حد، مقادیر $x$ به سمت نقطه‌ای خاص مثل $a$ نمی‌روند، بلکه به $\pm\infty$ میل می‌کنند. |
| | در کسرها سه حالت داریم:<br>۱) درجه صورت $>$ درجه مخرج ← جواب حد بی‌نهایت است.<br>۲) درجه صورت $=$ درجه مخرج ← جواب حد عدد غیر ۰ است.<br>۳) درجه صورت $<$ درجه مخرج ← جواب حد عدد ۰ است. |
| | از آنجایی که در محاسبه حد در بینهایت، مقادیر $x$ باید به $\pm\infty$ میل کند، حتما باید حواسمان به دامنه تابع باشد. |
| **نکته** | در تابع $\frac{\sqrt{۱-x^۲}}{x}$ اصلا امکان حدگیری در $\pm\infty$ وجود ندارد چون دامنه‌اش $[-۱,۱]-\{۰\}$ است. |

**۲۹. اگر تابع $f(x)=\begin{cases} x-۲a & ; \ x<-۱ \\ ۲x+a & ; \ -۱\le x\le ۳ \\ (x+a)^۲-۹ & ; \ x>۳ \end{cases}$ فقط یک نقطه ناپیوسته داشته باشد، مجموع مقادیر قابل‌قبول برای $f(۰)$ کدام است؟**

۱) $-۵$ ۲) $\frac{۱}{۳}$ ۳) $-\frac{۱۴}{۳}$ ۴) $-۴$

**پاسخ: گزینه ۳** ریاضی ۳ - فصل ۶

چون هر ۳ ضابطهٔ تابع $f$ چندجمله‌ای هستند، پس هریک از ضابطه‌ها در دامنهٔ خود پیوسته می‌باشند. حالا برای آن‌که تابع فقط در یک نقطه ناپیوسته باشد، باید فقط در $x=-۱$ یا فقط در $x=۳$ پیوسته باشد. حالا ابتدا تابع را در $x=-۱$ پیوسته می‌کنیم:

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to(-۱)^-} f(x)=\lim\limits_{x\to(-۱)^-}(x-۲a)=-۱-۲a \\ f(-۱)=\lim\limits_{x\to(-۱)^+} f(x)=\lim\limits_{x\to(-۱)^+}(۲x+a)=-۲+a \end{cases} \Rightarrow -۱-۲a=-۲+a \Rightarrow a=\frac{۱}{۳} \Rightarrow f(x)=\begin{cases} x-\frac{۲}{۳} & ; \ x<-۱ \\ ۲x+\frac{۱}{۳} & ; \ -۱\le x\le ۳ \\ (x+\frac{۱}{۳})^۲-۹ & ; \ x>۳ \end{cases}$$

بنابراین به ازای $a=\frac{۱}{۳}$ مقدار $f(۰)$ برابر است با:

$$f(۰)=۲(۰)+\frac{۱}{۳}=\frac{۱}{۳}$$

حالا تابع را در $x=۳$ پیوسته می‌کنیم:

$$\begin{cases} f(۳)=\lim\limits_{x\to۳^-} f(x)=\lim\limits_{x\to۳^-}(۲x+a)=۶+a \\ \lim\limits_{x\to۳^+} f(x)=(۳+a)^۲-۹ \end{cases} \Rightarrow (۳+a)^۲-۹=۶+a \Rightarrow a^۲+۵a-۶=۰ \Rightarrow (a-۱)(a+۶)=۰ \Rightarrow \begin{cases} a=-۶ \\ a=۱ \end{cases}$$

در ضمن با توجه به ضابطهٔ تابع $f$ می‌دانیم $f(۰)=a$ است، پس مجموع مقادیر ممکن برای $f(۰)$، مجموع مقادیر $a$ است.

پس مجموع مقادیر $f(۰)$ برابر است با:

$$-۶+۱+\frac{۱}{۳}=-\frac{۱۴}{۳}$$

www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshCloud

**۳۰.** اگر $\lim\limits_{x\to ۲}\frac{۲x^۳-۲۰}{x^۲+ax+b}=-\infty$ باشد، مقدار $۲a-b^۲$ کدام است؟

۱) ۲۴ ۲) $-۲۴$ ۳) ۸ ۴) $-۸$

**پاسخ: گزینه ۲** حسابان ۲ - فصل ۳

حد صورت وقتی $x\to ۲$ برابر با ۱۶ منهای ۲۰ یعنی $-۴$ است. برای آن‌که حد تابع برابر با $-\infty$ شود، باید مخرج به ازای $x=۲$ صفر شود و در همسایگی راست و چپ آن با مقادیر مثبت به صفر نزدیک شود، یعنی علامت مخرج تغییر نکند. بنابراین $x=۲$ باید ریشه مضاعف مخرج باشد و عبارت مخرج به صورت $(x-۲)^۲$ درآید. در نتیجه داریم:

$$x^۲+ax+b=(x-۲)^۲ \Rightarrow x^۲+ax+b=x^۲-۴x+۴$$

بنابراین:

$$a=-۴\ ,\ b=۴ \Rightarrow ۲a-b^۲=-۲۴$$

پس گزینهٔ (۲) درست است.

سنجش کلاد
www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshCloud

# پاسخنامه دفترچه ۱ آزمون مرحله ۷

## هندسه | ۹ بهمن ماه ۱۴۰۴

**۳۱.** اگر $A=\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix}۳\\ ۴\end{bmatrix}$ و $C=\begin{bmatrix}-۱\\ ۴\end{bmatrix}$ و $A.B=\begin{bmatrix}-۹\\ -۱۰\end{bmatrix}$ و $A.C=\begin{bmatrix}۳\\ ۲\end{bmatrix}$ باشد، مقدار $a+b+c+d$ کدام است؟

۱) $-۱۰$ ۲) $-۷/۵$ ۳) $-۶/۲۵$ ۴) $-۵/۵$

**پاسخ: گزینه ۳** محاسباتی - ساده | تعریف ضرب ماتریس‌ها

ضرب ماتریس ۲×۲ در ماتریس ۲×۱ به صورت روبه‌رو انجام می‌شود:

$$\begin{bmatrix}x & y\\ z & f\end{bmatrix}\begin{bmatrix}g\\ h\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}xg+yh\\ zg+fh\end{bmatrix}$$

**گام اول:** با توجه به تعریف ضرب ماتریس که در بالا گفته شد، مقادیر گفته شده در سوال را محاسبه می‌کنیم:

$$A.B=\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۳\\ ۴\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۳a+۴b\\ ۳c+۴d\end{bmatrix}\Rightarrow\begin{bmatrix}۳a+۴b\\ ۳c+۴d\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-۹\\ -۱۰\end{bmatrix}\quad(۱)$$

$$A.C=\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-۱\\ ۴\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-a+۴b\\ -c+۴d\end{bmatrix}\Rightarrow\begin{bmatrix}-a+۴b\\ -c+۴d\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۳\\ ۲\end{bmatrix}\quad(۲)$$

**نکته** در صورتی که دو ماتریس برابر باشند، درایه‌های نظیر آن‌ها با هم برابرند.

**گام دوم:**

$$(۱),(۲):\begin{cases}۳a+۴b=-۹\\ -a+۴b=۳\end{cases}\xrightarrow[\text{از یکدیگر}]{\text{کم کردن دو رابطه}}\begin{array}{l}۴a=-۱۲\Rightarrow a=-۳\\ \text{قرار دادن } a \text{ در رابطه دوم}\Rightarrow ۳+۴b=۳\Rightarrow b=۰\end{array}$$

$$(۱),(۲):\begin{cases}۳c+۴d=-۱۰\\ -c+۴d=۲\end{cases}\xrightarrow[\text{از یکدیگر}]{\text{کم کردن دو رابطه}}\begin{array}{l}۴c=-۱۲\Rightarrow c=-۳\\ \text{قرار دادن } c \text{ در رابطه دوم}\Rightarrow ۳+۴d=۲\Rightarrow d=-\frac{۱}{۴}\end{array}$$

**گام سوم:** حال مقادیر به دست آمده را در عبارت خواسته شده جای‌گذاری می‌کنیم:

$$a+b+c+d=-۳+۰+(-۳)+(-\frac{۱}{۴})=\frac{-۱۲-۱۲-۱}{۴}=\frac{-۲۵}{۴}=-۶/۲۵$$

**۳۲.** اگر $M=\begin{bmatrix}-۳ & ۱\\ ۳ & ۰\end{bmatrix}$ و $N=\begin{bmatrix}۳ & ۲\\ -۱ & ۰\end{bmatrix}$ باشد، حاصل $|M^{۳}.N^{۴}|$ کدام است؟

۱) $-۳۰۱$ ۲) $-۴۳۲$ ۳) $-۴۵۲$ ۴) $-۵۳۲$

**پاسخ: گزینه ۲** کاربردی - محاسباتی، متوسط

می‌دانیم دترمینان ماتریس ۲×۲ مطابق رابطه روبه‌رو محاسبه می‌شود.

$$A=\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}\Rightarrow |A|=ad-bc$$

**گام اول:** بنابراین ابتدا دترمینان ماتریس‌های $M$ و $N$ را محاسبه می‌کنیم.

$$|M|=-۳\times۰-۳\times۱=-۳$$

$$|N|=۳\times۰-۲\times(-۱)=۲$$

**نکته** در محاسبه توان در مبحث دترمینان، مطابق روبه‌رو عمل می‌کنیم:

$$|A^{n}|=|A|^{n}$$

سنجش کلاد
www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshCloud

**نکته** درضرب دترمینان، نکته روبه‌رو باید در نظر گرفته شود:

$$|AB|=|A||B|$$

**گام دوم:** پس داریم:

$$|M^{۳}.N^{۴}|=|M^{۳}||N^{۴}|=|M|^{۳}|N|^{۴}=(-۳)^{۳}\times ۲^{۴}=(-۲۷)\times ۱۶=-۴۳۲$$

**۳۳.** اگر $\begin{vmatrix} xy & x & ۳ \\ m & y & ۳ \\ yz & z & ۳ \end{vmatrix}=۰$ باشد، $M$ کدام است؟

۱) $x$ ۲) $y^{۲}$ ۳) $x^{۲}$ ۴) $y$

**پاسخ: گزینه ۲** حفظی/ساده | محاسبه دترمینان ۳×۳

برای محاسبه دترمینان ۳×۳ دو روش وجود دارد. استفاده از فرمول و استفاده از روش ساروس.

**نکته** **روش ساروس:** دترمینان را کنار هم نوشته سپس از قطر اصلی ماتریس چپ، مطابق شکل، مقادیر درایه‌ها را درهم ضرب کرده و حاصل هر کدام را باهم جمع می‌کنیم. سپس از ماتریس سمت راست به ترتیب قطر فرعی را در هم ضرب کرده و حاصل جمع سه عبارت را از عبارت قبلی کم می‌کنیم.

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix}\begin{matrix} a & b \\ d & e \\ g & h \end{matrix}=(aei+bfg+cdh)-(ceg+bdi+afh)$$

**نکته** روش استفاده از فرمول و دترمینان ۲×۲ نیز به صورت زیر است:

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix}=a\begin{vmatrix} e & f \\ h & i \end{vmatrix}-b\begin{vmatrix} d & f \\ g & i \end{vmatrix}+c\begin{vmatrix} d & e \\ g & h \end{vmatrix}$$

**یادآوری:** دترمینان ماتریس ۲×۲ به صورت روبه‌رو محاسبه می‌شود.

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}=ad-bc$$

حال به روش دوم مسئله را حل می‌کنیم: (انتخاب طراح سوال)

$$xy(۳y-۳z)-x(۳m-۳yz)+۳(mz-y^{۲}z)=۰$$

مقادیر را در پرانتزها ضرب می‌کنیم و عبارت را ساده می‌کنیم:

$$۳xy^{۲}-۳\cancel{xyz}-۳xm+۳\cancel{xyz}+۳mz-۳y^{۲}z=۰$$

$$۳(xy^{۲}-mx+mz-y^{۲}z)=۰ \xrightarrow[\text{داخل پرانتز}]{\text{فاکتورگیری}} y^{۲}(x-z)-m(x-z)=۰$$

$$\Rightarrow (x-z)(y^{۲}-m)=۰ \Rightarrow y^{۲}-m=۰\Rightarrow m=y^{۲}$$

**۳۴.** دستگاه معادلات $\begin{cases} m(x-۱)=۳(x-y) \\ ۴x+(m+۱)y=۲ \end{cases}$ به ازای کدام مقدار $m$ بی‌شمار جواب دارد؟

۱) ۵ ۲) ۳ ۳) $-۵$ ۴) $-۳$

**پاسخ: گزینه ۴** کاربردی / محاسباتی - متوسط | مفهوم دستگاه معادلات

**گام اول:** ابتدا دستگاه را مرتب می‌کنیم.

$$\begin{cases} mx-m=۳x-۳y \\ ۴x+(m+۱)y=۲ \end{cases}\Rightarrow \begin{cases} (m-۳)x+۳y=m \\ ۴x+(m+۱)y=۲ \end{cases}$$

سنجش کلاد
www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshCloud

می‌دانیم در حل و بحث یک دستگاه دو معادله دو مجهول، سه حالت وجود دارد. لازم به ذکر است که هر کدام از معادلات فوق در حقیقت معادله یک خط هستند و ما در هنگام حل دستگاه، شرایط این دو خط را بررسی می‌کنیم. حالات شرایط دو خط نسبت به هم، به صورت زیر است:

$$\begin{cases} ax+by=c \\ a'x+b'y=c' \end{cases}$$

۱) $\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}=\frac{c}{c'}$ دو خط برهم منطبق هستند و مسئله بی‌شمار جواب دارد.

۲) $\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}\neq\frac{c}{c'}$ دو خط با هم موازی هستند و مسئله جواب ندارد.

۳) $\frac{a}{a'}\neq\frac{b}{b'}$ دو خط متقاطعند و مسئله یک جواب منحصربه‌فرد دارد.

این مسئله قرار است بی‌شمار جواب داشته باشد.

$$\begin{cases} (m-۳)x+۳y=m \\ ۴x+(m+۱)y=۲ \end{cases}$$

لذا داریم:

$$\frac{m-۳}{۴}=\underbrace{\frac{۳}{m+۱}=\frac{m}{۲}}_{m^۲+m-۶=۰\ \text{(طرفین‌و وسطین)}} \Rightarrow (m+۳)(m-۲)=۰ \Rightarrow \begin{cases} m+۳=۰\Rightarrow m=-۳ \\ m-۲=۰\Rightarrow m=۲ \end{cases}$$

حال باید دو جواب به دست آمده را با کسر سوم نیز امتحان کنیم.

$$m=-۳ \Rightarrow \frac{-۶}{۴}=\frac{۳}{-۲}=\frac{-۳}{۲}$$

$$m=۲ \Rightarrow \frac{-۱}{۴}\neq\frac{۳}{۳}\neq\frac{۲}{۲}$$

لذا $m=-۳$ جواب است.

**۳۵. اگر $A$ ماتریس وارون‌پذیر و $|A+B|=۲$ و $|C|=\frac{۱}{۳}$ باشد، مقدار $|C+CBA^{-۱}|$ کدام است؟**

۱) $\frac{۲}{|A|}$ ۲) $\frac{۲}{۳|A|}$ ۳) $\frac{۳}{|A|}$ ۴) $\frac{۲}{۳}|A|$

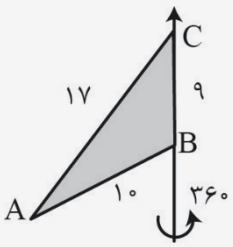
**پاسخ: گزینه ۲** سخت/کاربردی | مفهوم دترمینان و خواص آن

ابتدا از ماتریس $C$ فاکتور می‌گیریم. می‌دانیم که $|AB|=|A||B|$. لذا می‌توانیم $|C|$ را از داخل دترمینان بیرون بیاوریم.

**نکته** می‌دانیم $AA^{-۱}=I$

$$|C+CBA^{-۱}|=|C(I+BA^{-۱})|=|C||AA^{-۱}+BA^{-۱}|=|C||(A+B)A^{-۱}|=\frac{۱}{۳}|A+B|\times\frac{۱}{|A|}=\frac{۲}{۳|A|}$$

**۳۶. مطابق شکل، مثلث $ABC$ با اضلاع $AB=۱۰$ و $AC=۱۷$ و $BC=۹$ را حول ضلع $BC$ به اندازهٔ $۳۶۰^\circ$ دوران می‌دهیم. حجم شکل حاصل از دوران چقدر است؟**




۱) $۱۹۲\pi$

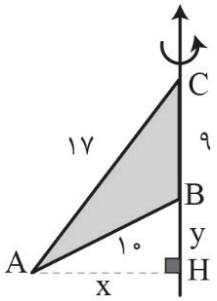
۲) $۱۸۰\pi$

۳) $۱۳۶\pi$

۴) $۲۱۶\pi$

**پاسخ: گزینه ۱** کاربردی / متوسط

www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshCloud

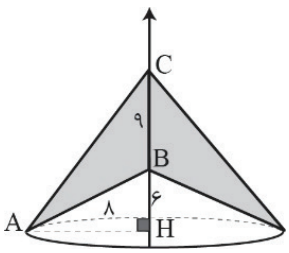



اگر یه شکل ناقص، دوران کنه، باید با خودتون بگید اگر کامل بود چی می‌شد؟ بعد بگید حالا این قسمتی که حذف شده چه شکلی ایجاد می‌کنه؟ بنابراین برای به دست آوردن حجم ایجاد شده، حجم شکل کامل رو حساب می‌کنیم و سپس حجم قسمت حذف شده رو ازش کم می‌کنیم.

با استفاده از رابطهٔ فیثاغورث در مثلث ABH و ACH داریم:

$$\overset{\Delta}{ABH}: x^۲+y^۲=۱۰^۲=۱۰۰$$

$$\overset{\Delta}{ACH}: x^۲+(y+۹)^۲=۱۷^۲ \Rightarrow \underbrace{x^۲+y^۲}_{۱۰۰}+۱۸y+۸۱=۲۸۹ \Rightarrow ۱۸y=۱۰۸ \Rightarrow y=۶$$



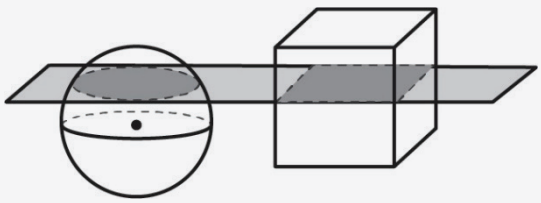

بنابراین $x=۸$ است و مطابق شکل، حجم حاصل از دوران برابر است با:

$$\Rightarrow V=\frac{۱}{۳}\pi\times۸^۲\times۱۵-\frac{۱}{۳}\pi\times۸^۲\times۶=\frac{۱}{۳}\pi\times۶۴\times\underbrace{(۱۵-۶)}_{۹}=۱۹۲\pi$$

**نکته** **حجم یک مخروط به ارتفاع h و شعاع سطح مقطع r برابر است با:**

$$V=\frac{۱}{۳}\pi r^۲ h$$

**۳۷. مطابق شکل، یک صفحهٔ افقی، کره‌ای به شعاع ۵ واحد و مکعبی به ضلع $۳\sqrt{\pi}$ واحد را برش زده است، فاصلهٔ این صفحه از مرکز کره چقدر باشد تا مساحت سطح مقطع‌های ایجاد شده برابر باشند؟**



۱) ۳

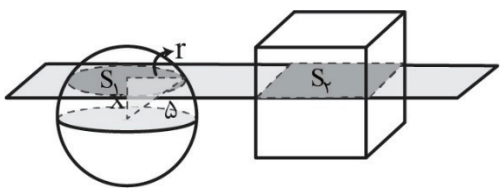
۲) $۳\sqrt{\pi}$

۳) ۴

۴) $۴\sqrt{\pi}$

**پاسخ: گزینه ۳** کاربردی - متوسط

مطابق شکل داریم:




$$S_۱=S_۲ \Rightarrow \pi r^۲=(۳\sqrt{\pi})^۲ \Rightarrow r^۲=۹ \Rightarrow r=۳$$

بنابراین فاصلهٔ مرکز کره از صفحه برابر است با:

$$x^۲=۵^۲-۳^۲ \Rightarrow x^۲=۲۵-۹=۱۶ \Rightarrow x=۴$$

**نکته** از برخورد یک صفحه با کره، یک دایره بوجود می‌آید. همچنین از برخورد یک صفحه با یک مکعب به طوری‌که صفحه مذکور موازی یکی از قاعده‌ها باشد، مربع ایجاد می‌شود.

**۳۸. اگر نقاط $A(۰,۶)$ و $B(-۴,۰)$ و $C(۱,۵)$ سه نقطه از یک شهر باشند، دکل مخابراتی را در کدام نقطه باید نصب کرد که سرویس‌دهی یکسانی به هر سه نقطه انجام شود؟**

۱) $(۳,-۴)$ ۲) $(۳,-۲)$ ۳) $(-۲,۳)$ ۴) $(-۳,۴)$

**پاسخ: گزینه ۳** مفهومی - متوسط

سنجش کلاد
www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshCloud

چون قرار است که دکل از هر سه نقطه به یک فاصله باشد، لذا دکل مخابراتی باید در مرکز دایره‌ی گذرنده از نقاط $A(۰,۶)$، $B(-۴,۰)$، $C(۱,۵)$ قرار بگیرد. حال معادلهٔ دایره را به صورت $x^۲+y^۲+ax+by+c=۰$ فرض می‌کنیم سپس نقطه‌های A و B را در معادله جای‌گذاری می‌کنیم:

$$۱)\ A(۰,۶):۳۶+۶b+c=۰\Rightarrow ۶b+c=-۳۶ \quad (۱)$$
$$۲)\ B(-۴,۰):۱۶-۴a+c=۰\Rightarrow ۴a-c=۱۶ \quad (۲)$$
$$۳)\ C(۱,۵):۱+۲۵+a+۵b+C=۰\Rightarrow a+۵b+C=-۲۶ \quad (۳)$$
$$(۱)+(۲):۴a+۶b=-۲۰\xrightarrow{\times ۵}$$
$$(۲)+(۳):۵a+۵b=-۱۰\xrightarrow{\times -۶}$$
$$\begin{cases}۲۰a+۳۰b=-۱۰۰\\-۳۰a-۳۰b=۶۰\end{cases}\xrightarrow{\text{جمع دو رابطه}}-۱۰a=-۴۰\Rightarrow a=۴$$

بنابراین $a=۴$، $b=-۶$ و $c=۰$ به دست می‌آید. پس معادلهٔ دایره $x^۲+y^۲+۴x-۶y=۰$ و مرکز آن $M(-۲,۳)$ است.

**تذکر** با داشتن معادله دایره، می‌توانیم مختصات مرکز و شعاع را با استفاده از روابط زیر به دست آوریم.

$$x^۲+y^۲+ax+by+c=۰\ \Rightarrow\ O\left(\frac{-a}{۲},\frac{-b}{۲}\right)\ ,\ r=\frac{۱}{۲}\sqrt{a^۲+b^۲-۴c}$$

**۳۹. دایرهٔ C بر خط‌های $y=۲$ و $y=۱۴$ و محور y‌ها مماس است. طول وتری که خط $x=۱۰$ از این دایره جدا می‌کند، چقدر است؟**

۱) $۴\sqrt{۵}$ ۲) $۶\sqrt{۲}$ ۳) $۴\sqrt{۳}$ ۴) ۶

**پاسخ: گزینه ۱** سخت - کاربردی

با توجه به این‌که دایره بر دو خط $y=۲$ و $y=۱۴$ مماس است، پس قطر دایره برابر فاصله این دو خط می‌باشد. یعنی $۲r=۱۴-۲=۱۲$.

از آن‌جا که دایره بر محور y‌ها نیز مماس است، مرکز دایره جایی است که از هر سه خط یعنی $y=۱۴$، $y=۲$ و محور y‌ها به یک فاصله است. چون $r=۶$ است، بنابراین روی خط $y=۸$، ۶ واحد به سمت راست (از محل تماس دایره با محور y‌ها) حرکت می‌کنیم تا مختصات مرکز دایره به دست آید. $O(۶,۸)$.

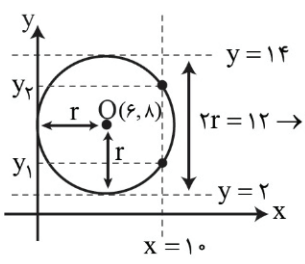
**نکته** **با داشتن مختصات مرکز دایره $O(\alpha,\beta)$ و شعاع r معادله دایره به صورت زیر است:**

$$(x-\alpha)^۲+(y-\beta)^۲=r^۲$$

با توجه به این نکته، معادله دایره ها به صورت $(x-۶)^۲+(y-۸)^۲=۳۶$ است. حال این معادله را با خط $x=۱۰$ قطع می‌دهیم:

$$x=۱۰\ \Rightarrow\ (۱۰-۶)^۲+(y-۸)^۲=۳۶\ \Rightarrow\ (y-۸)^۲=۲۰\ \Rightarrow\ \begin{cases}y_۲=۸+۲\sqrt{۵}\\y_۱=۸-۲\sqrt{۵}\end{cases}$$

پس طول وتر ایجاد شده توسط خط $x=۱۰$ برابر است با:




$$y_۲-y_۱=(۸+۲\sqrt{۵})-(۸-۲\sqrt{۵})=۴\sqrt{۵}$$

**۴۰. خط $۳x+۴y+۵=۰$ دایرهٔ $x^۲+y^۲-۴x-۲y-۲۰=۰$ را در دو نقطهٔ A و B قطع می‌کند. اگر C یک نقطه روی این دایره باشد، بیشترین مساحت مثلث ABC کدام است؟**

۱) ۲۰ ۲) ۲۷ ۳) ۳۲ ۴) ۶۴

**پاسخ: گزینه ۳** مفهومی - سخت

www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshCloud

**تذکر** با داشتن معادله دایره، می‌توانیم مختصات مرکز و شعاع را با استفاده از روابط زیر به دست آوریم.

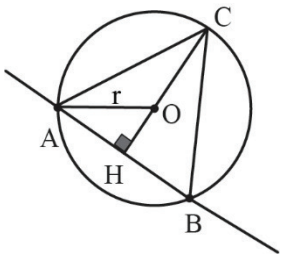
$x^۲+y^۲+ax+by+c=۰ \Rightarrow O(\frac{-a}{۲},\frac{-b}{۲}) \quad , \quad r=\frac{۱}{۲}\sqrt{a^۲+b^۲-۴c}$

$x^۲+y^۲-۴x-۲y-۲۰=۰ \rightarrow$ مرکز دایره $O(-\frac{a}{۲},-\frac{b}{۲})=(۲,۱)$

$r=\frac{۱}{۲}\sqrt{a^۲+b^۲-۴c}=\frac{۱}{۲}\sqrt{۱۶+۴+۸۰}=\frac{۱}{۲}\sqrt{۱۰۰}=۵$

**نکته** فاصله نقطه $O(x', y')$ از خط $ax+by+c$، از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$OH=\frac{|ax'+by'+c|}{\sqrt{a^۲+b^۲}}$$




$۳x+۴y+۵=۰$

$OH=\frac{|۳(۲)+۴(۱)+۵|}{\sqrt{۳^۲+۴^۲}}=\frac{۱۵}{۵}=۳$

$AH=\sqrt{r^۲-OH^۲}=\sqrt{۲۵-۹}=۴ \rightarrow AB=۲AH=۸$

**نکته** با توجه به ثابت بودن نقاط A و B، بیشترین مساحت زمانی به دست می‌آید که ارتفاع از مرکز دایره بگذرد.

$S=\frac{۱}{۲}AB\times CH=\frac{۱}{۲}(AB)(OC+OH)=\frac{۱}{۲}\times۸(۵+۳)=۳۲$

سنجش کلاد
www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshCloud

# پاسخنامه دفترچه ۱ آزمون مرحله ۷

## ریاضیات گسسته | ۹ بهمن ماه ۱۴۰۴

**۴۱. اگر a عددی صحیح باشد، عدد $a^۲+۲$ بر چه تعداد از اعضای مجموعهٔ $A=\{۱,۲,۳,۴,۵,۶\}$، هیچ‌گاه بخش‌پذیر نیست؟**

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

**پاسخ: گزینه ۲** محاسباتی - آسان | باقی‌مانده مربع کامل

اگر $a=۴$ باشد، حاصل $a^۲+۲$ برابر ۱۸ می‌شود که بر اعداد ۱، ۲، ۳ و ۶ بخش‌پذیر است. ثابت می‌کنیم عدد $a^۲+۲$ به ازای تمامی مقادیر صحیح a مضرب ۴ نیست.

**اثبات به روش اشباع:**

$a=۴k \xrightarrow{\text{به توان ۲}} a^۲=۴k' \to a^۲+۲=۴k'+۲$ ×

$a=۴k+۱ \xrightarrow{\text{به توان ۲}} a^۲=۴k'+۱ \to a^۲+۲=۴k'+۳$ ×

$a=۴k+۲ \xrightarrow{\text{به توان ۲}} a^۲=۴k' \to a^۲+۲=۴k'+۲$ ×

$a=۴k+۳ \xrightarrow{\text{به توان ۲}} a^۲=۴k'+۱ \to a^۲+۲=۴k'+۳$ ×

به همین شیوه ثابت می‌کنیم عدد $a^۲+۲$ نمی‌تواند مضرب ۵ باشد:

$a=۵k \xrightarrow{\text{به توان ۲}} a^۲=۵k' \to a^۲+۲=۵k'+۲$ ×

$a=۵k+۱ \xrightarrow{\text{به توان ۲}} a^۲=۵k'+۱ \to a^۲+۲=۵k'+۳$ ×

$a=۵k+۲ \xrightarrow{\text{به توان ۲}} a^۲=۵k'+۴ \to a^۲+۲=۵k'+۱$ ×

$a=۵k+۳ \xrightarrow{\text{به توان ۲}} a^۲=۵k'+۴ \to a^۲+۲=۵k'+۱$ ×

$a=۵k+۴ \xrightarrow{\text{به توان ۲}} a^۲=۵k'+۱ \to a^۲+۲=۵k'+۳$ ×

بنابراین گزینهٔ (۲) صحیح است.

**۴۲. به ازای چند مقدار طبیعی n، رابطهٔ $(n!)^۲-۱ \mid (n+۱)!+n+۱$ برقرار است؟**

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

**پاسخ: گزینه ۲** محاسباتی - متوسط | رابطه بخش‌پذیری

توجه داشته باشید که:

$$(n+۱)!+n+۱=n!(n+۱)+n+۱=(n+۱)(n!+۱)$$

از طرفی با استفاده از اتحاد مزدوج داریم:

$$(n!)^۲-۱=(n!-۱)(n!+۱)$$

در نتیجه:

$$(n!-۱)(n!+۱) \mid (n+۱)(n!+۱) \xrightarrow{\div(n!+۱)} n!-۱ \mid n+۱$$

این رابطهٔ تنها به ازای $n=۲$ برقرار است؛ زیرا برای n های بزرگ‌تر از ۲، عدد $n!-۱$ از $n+۱$ بزرگ‌تر خواهد شد و رابطهٔ عاد کردن برقرار نخواهد شد. دقت کنید به ازای $n=۱$ داریم $۰ \mid ۲$ که برقرار نیست.

بنابراین گزینهٔ (۲) صحیح است.

www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshCloud

**۴۳. اگر $b$ عددی فرد باشد و $a^5 | b^3$، آن‌گاه در صورتی که حاصل عبارت $[(a^2,b^3),(12a^2,30ab)]$ مضرب ۴۰۵۰ باشد، آن‌گاه مجموع ارقام بزرگ‌ترین مقدار سه رقمی و طبیعی $a$ کدام است؟**

۱) ۱۸ ۲) ۱۹ ۳) ۲۰ ۴) ۲۱

**پاسخ: گزینه ۱** محاسباتی - متوسط | ب.م.م و ک.م.م

واضح است که اگر $a^5 | b^3$، آن‌گاه $a|b$ و چون $b$ عددی فرد است، داریم:

$$a|b \xrightarrow{q\in\mathbb{Z}} \underbrace{b}_{\text{فرد}} = a.q \Rightarrow \begin{cases} a = \text{فرد} \\ q = \text{فرد} \end{cases}$$

از طرفی می‌دانیم:

$$a|b \Rightarrow a^2|b^3 \Rightarrow (a^2,b^3)=a^2$$

$$(12a^2,30ab)=6a(2a,5b)=6a(2a,5aq)=6a^2(2,\underbrace{5q}_{\text{فرد}})=6a^2$$

بنابراین:

$$[(a^2,b^3),(12a^2,30ab)]=[a^2,6a^2]=6a^2$$

طبق فرض داریم:

$$4050|6a^2 \xrightarrow{\div 6} 675|a^2 \xrightarrow{\text{تجزیه}} 3^2\times 5^2|a^2 \longrightarrow 3^2\times 5^1|a \xrightarrow{q\in\mathbb{Z}} a=45q$$

به ازای $q=22$، بزرگ‌ترین مقدار سه رقمی $a$، که عددی فرد نیز می‌باشد، برابر با ۹۹۰ به دست می‌آید که مجموع ارقام آن ۱۸ است.

**۴۴. اگر $a\in[2]_{13}$ و باقیماندهٔ تقسیم سه برابر عدد طبیعی $a$ بر ۱۷ برابر با ۸ باشد آن‌گاه رقم دهگان بزرگ‌ترین عدد سه رقمی مانند $a$ کدام است؟**

۱) ۷ ۲) ۶ ۳) ۳ ۴) ۴

**پاسخ: گزینه ۴** محاسباتی - دشوار | کلاس هم‌نهشتی و پیمانه‌گیری

از فرض داریم:

$$3a \overset{17}{\equiv} 8 \overset{17}{\equiv} -9 \Rightarrow a \overset{17}{\equiv} -3 \Rightarrow a=17q-3 \qquad (*)$$

از طرفی:

$$a\in[2]_{13} \Rightarrow a \overset{13}{\equiv} 2 \xrightarrow{(*)} 17q-3 \overset{13}{\equiv} 2 \Rightarrow 4q \overset{13}{\equiv} 5 \overset{13}{\equiv} -8 \Rightarrow q \overset{13}{\equiv} -2 \overset{13}{\equiv} 11$$

$$\Rightarrow q=13k+11 \Rightarrow a=17(13k+11)-3=221k+187-3$$

$$\Rightarrow a=221k+184 \xrightarrow{\text{مقداردهی}} \begin{array}{c|ccccc} k & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ \hline a & 184 & 405 & 626 & 847 & 1068 \end{array}$$

بزرگ‌ترین عدد سه رقمی مانند $a$ برابر ۸۴۷ و رقم دهگان برابر ۴ است.

**روش دوم:**

$$\begin{cases} a\in[2]_{13} \Rightarrow a \overset{13}{\equiv} 2 \Rightarrow a \overset{13}{\equiv} \underbrace{2-3\times 13}_{-37} \\ 3a \overset{17}{\equiv} \cancel{-9} \xrightarrow[(17,3)=1]{\div 3} a \overset{17}{\equiv} -3 \Rightarrow a \overset{17}{\equiv} \underbrace{-3-2\times 17}_{-37} \end{cases}$$

$$\xrightarrow{[13,17]=221} a \overset{221}{\equiv} -37 \xrightarrow{\text{تعریف}} a=221k-37 \ , \ k\in\mathbb{Z}$$

که به ازای $k=4$، بزرگ‌ترین مقدار طبیعی $a$ برابر با ۸۴۷ به دست می‌آید و رقم دهگان آن ۴ است.

**۴۵. اگر عدد $\overline{ab22a}$ مضرب ۴۵ باشد، آن‌گاه عدد $b^a$ به کدام کلاس هم‌نهشتی به پیمانهٔ ۱۷ تعلق دارد؟**

۱) [۱] ۲) [۴] ۳) [۵] ۴) [۱۶]

**پاسخ: گزینه ۲** محاسباتی - متوسط | بخش‌پذیری بر اعداد خاص

سنجش کلاد
www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshCloud

عددی مضرب ۴۵ است که هم مضرب ۵ باشد و هم مضرب ۹.

$$\overline{ab۲۲a} \overset{۵}{\equiv} ۰ \to a \overset{۵}{\equiv} ۰ \xrightarrow[a\neq ۰]{a\text{ رقم است}} a=۵$$

بنابراین:

$$\overline{۵b۲۲۵} \overset{۹}{\equiv} ۰ \to ۵+b+۲+۲+۵ \overset{۹}{\equiv} ۰ \to b \overset{۹}{\equiv} -۱۴ \to b \overset{۹}{\equiv} ۴ \xrightarrow{b\text{ رقم است}} b=۴$$

حال باید باقی‌ماندهٔ $۴^{۵}$ بر ۱۷ را بیابیم:

$$۴^{۵} \overset{۱۷}{\equiv} ۴ \xrightarrow{\times ۴} ۴^{۵} \overset{۱۷}{\equiv} ۱ \xrightarrow{\text{به توان ۲}} ۴^{۴} \overset{۱۷}{\equiv} -۱ \to ۴^{۲} \overset{۱۷}{\equiv} ۱۶ \text{ :می‌دانیم } ۴^{۲} \overset{۱۷}{\equiv} ۱۶ \to ۴^{۲} \overset{۱۷}{\equiv} -۱ \xrightarrow{\text{به توان ۲}} ۴^{۴} \overset{۱۷}{\equiv} ۱ \xrightarrow{\times ۴} ۴^{۵} \overset{۱۷}{\equiv} ۴$$

پس عدد $۴^{۵}$ به کلاس هم‌نهشتی $[۴]_{۱۷}$ تعلق دارد.

---

**تست‌درتست** تعداد اعداد شش‌رقمی به صورت $\overline{abaaba}$ که مضرب ۸۸ باشند، کدام است؟ (خارج ۱۴۰۰)

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

**پاسخ: گزینه ؟**

این عدد باید بر ۸ و ۱۱ بخش‌پذیر باشد:

$$a-b+a-a+b-a \overset{۱۱}{\equiv} ۰$$

سه رقم راست این عدد نیز باید بر ۸ بخش‌پذیر باشد:

$$aba \overset{۸}{\equiv} ۰ \Rightarrow a+۱۰b+۱۰۰a \overset{۸}{\equiv} ۰ \Rightarrow ۱۰۱a+۱۰b \overset{۸}{\equiv} ۰ \Rightarrow ۵a+۲b \overset{۸}{\equiv} ۰$$

بدیهی است که $a$ نمی‌تواند فرد باشد؛ زیرا در این صورت معادلهٔ فوق جواب نخواهد داشت. پس اعداد زوج $a$ را بررسی می‌کنیم:

$$a=۲:۲b \overset{۸}{\equiv} -۱۰ \xrightarrow[(۲,۸)=۲]{\div ۲} b \overset{۴}{\equiv} -۵ \overset{۴}{\equiv} ۳ \overset{۴}{\equiv} ۷ \qquad b=\{۳,۷\}$$

$$a=۴:۲b \overset{۸}{\equiv} -۲۰ \xrightarrow[(۲,۸)=۲]{\div ۲} b \overset{۴}{\equiv} -۱۰ \overset{۴}{\equiv} ۲ \overset{۴}{\equiv} ۶ \qquad b=\{۲,۶\}$$

$$a=۶:۲b \overset{۸}{\equiv} -۳۰ \xrightarrow[(۲,۸)=۲]{\div ۲} b \overset{۴}{\equiv} -۱۵ \overset{۴}{\equiv} ۱ \overset{۴}{\equiv} ۵ \overset{۴}{\equiv} ۹ \qquad b=\{۱,۵,۹\}$$

$$a=۸:۲b \overset{۸}{\equiv} -۴۰ \xrightarrow[(۲,۸)=۲]{\div ۲} b \overset{۴}{\equiv} -۲۰ \overset{۴}{\equiv} ۰ \overset{۴}{\equiv} ۴ \overset{۴}{\equiv} ۸ \qquad b=\{۰,۴,۸\}$$

پس زوج اعداد به صورت $(a,b)$ به شرح زیر هستند:

$$\{(۲,۳),(۲,۷),(۴,۲),(۴,۶),(۶,۱),(۶,۵),(۶,۹),(۸,۰),(۸,۴),(۸,۸)\}$$

پس ۱۰ عدد به صورت $\overline{abaaba}$ مضرب ۸۸ وجود دارد.

همان‌طور که ملاحظه می‌کنید، پاسخ «۱۰» در بین گزینه‌ها نیست.

---

**۴۶. به ازای چند مقدار $c$ معادلهٔ سیالهٔ $۷x+۱۴y=c$ تنها دارای ۶ جفت جواب نامنفی است؟**

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۵

**پاسخ: گزینه ۱** محاسباتی - دشوار | معادله سیاله

برای این‌که معادلهٔ سیالهٔ $۷x+۱۴y=c$ دارای جواب باشد، باید $(۷,۱۴)|c$ برقرار باشد؛ یعنی $۷|c$.

بنابراین $c=۷k$. معادلهٔ سیاله به صورت زیر درمی‌آید:

$$۷x+۱۴y=۷k \xrightarrow{\div ۷} x+۲y=k$$

با توجه به شرط مسئله باید $x\geq ۰$ و $y\geq ۰$ باشد، پس:

$$x\geq ۰ \Rightarrow k-۲y\geq ۰ \Rightarrow y\leq \frac{k}{۲} \Rightarrow ۰\leq y\leq \frac{k}{۲}$$

با توجه به شرط به دست آمده برای $y$، تعداد جواب‌های معادله برابر $[\frac{k}{۲}]+۱$ است.

معادله ۶ جواب نامنفی دارد، پس:

$$[\frac{k}{۲}]+۱=۶ \Rightarrow [\frac{k}{۲}]=۵ \Rightarrow ۵\leq \frac{k}{۲}<۶ \Rightarrow ۱۰\leq k<۱۲ \Rightarrow k=۱۰,۱۱$$

$$c=۷k \Rightarrow c=۷\times ۱۰=۷۰ \quad \text{یا} \quad c=۷\times ۱۱=۷۷$$

پس دو مقدار برای $c$ وجود دارد.

سنجش کلاد
www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshCloud

**تست‌درتست** به ازای کدام مقدار زیر برای a، معادله سیاله $51x+85y=7a-1$ دارای جواب است؟ (خارج ۱۴۰۳)

۱) ۳۴ ۲) ۳۹ ۳) ۴۴ ۴) ۴۹

**پاسخ: گزینه ۲**

$$(51,85)|7a-1 \Leftrightarrow (3\times17,17\times5)=17|7a-1 \Rightarrow 7a \overset{17}{\equiv} 1 \Rightarrow 35a \overset{17}{\equiv} 5 \Rightarrow a \overset{17}{\equiv} 5 \Rightarrow a=17k+5 \Rightarrow a\in\{5,22,39,...\}$$

بنابراین جواب سوال گزینهٔ (۲) است.

**۴۷. در گراف سادهٔ G از مرتبهٔ ۱۲، دقیقاً چهار رأس $\Delta=8$ و یک رأس $\delta=2$ دارد. اختلاف حداقل و حداکثر اندازهٔ این گراف کدام است؟**

۱) ۱۰ ۲) ۱۱ ۳) ۱۲ ۴) ۱۳

**پاسخ: گزینه ۴** مفهومی / محاسباتی - آسان | حداقل و حداکثر درجه گراف

در وهله اول چون گراف دقیقاً چهار رأس $\Delta=8$ و یک رأس $\delta=2$ دارد، پس $12-4-1=7$ رأس کوچک‌تر از درجهٔ ۸ و بزرگ‌تر از درجهٔ ۲ خواهد داشت.

همچنین با توجه به این‌که تعداد رئوس فرد باید زوج باشد، نمی‌توان همهٔ ۷ رأس را درجهٔ ۷ یا درجهٔ ۳ در نظر گرفت. پس برای یافتن حداکثر اندازه، یک رأس را درجهٔ ۶ و شش رأس دیگر را درجهٔ ۷ در نظر می‌گیریم. بنابراین:

$$2q_{max}=4\times8+1\times2+1\times6+6\times7=82 \Rightarrow q_{max}=41$$

برای یافتن حداقل اندازهٔ گراف موردنظر نیز، یکی از آن ۷ رأس را درجه ۴ و ۶ رأس دیگر را درجهٔ ۳ قرار می‌دهیم. بنابراین:

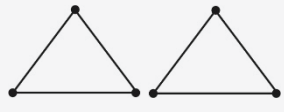
$$2q_{min}=4\times8+1\times2+1\times4+6\times3=56 \Rightarrow q_{min}=28 \Rightarrow q_{max}-q_{min}=41-28=13$$

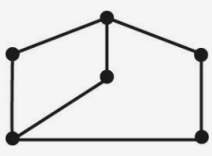
**یادآوری:**

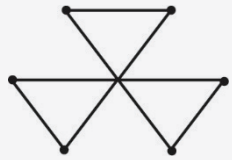
**بزرگ‌ترین و کوچک‌ترین درجهٔ یک گراف:** بزرگ‌ترین عدد در بین درجات رئوس گراف G را با $\Delta(G)$ و کوچک‌ترین آن‌ها را با $\delta(G)$ نمایش می‌دهیم و به ترتیب آن‌ها را ماکزیمم و مینیمم درجهٔ گراف می‌نامیم.

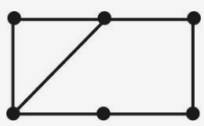
تعداد رأس‌های فرد هر گراف، عددی زوج است.

**۴۸. فرض کنید $V(G)=\{a,b,c,d,e,f\}$، $N_G(a)=N_G(b)=N_G(c)$ و $N_G(d)=N_G(e)=N_G(f)$ باشد، کدام گزینه می‌تواند زیرگراف G باشد؟**

۱) 

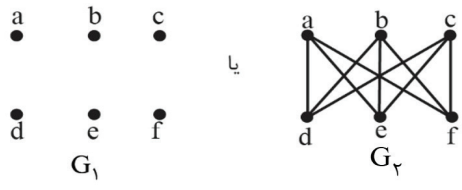
۲) 

۳) 

۴) 

**پاسخ: گزینه ۳** مفهومی - متوسط | تشکیل گراف

می‌دانیم اگر $N_G(a)=N_G(b)$ باشد، حتماً $ab\notin E(G)$، پس دو گراف قابل رسم است.




سنجش کلاد
www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshCloud

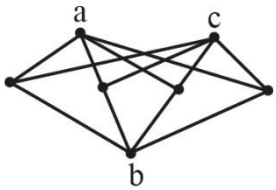
$G_۲$ دور به طول ۳ و دور به طول ۵ ندارد؛ پس گزینهٔ (۱)، (۲) و (۴) حذف می‌شود و گزینهٔ (۳) جواب تست است.

**۴۹. اگر درجهٔ رأس‌های یک گراف ۴، ۴، ۴، ۳، ۳، ۳، ۳ باشد، تعداد تمام دورهای موجود به طول ۴، کدام است؟**

۱) ۶ ۲) ۱۲ ۳) ۱۸ ۴) ۲۴

**پاسخ: گزینه ۳** مفهومی - متوسط | دور در گراف

اگر رأس a و یال‌های متصل به آن را در نظر نگیریم، همهٔ دورهای این گراف دور به طول ۴ هستند:




هر دو رأس که از وسط انتخاب کنیم، با b و c دور به طول ۴ خواهیم داشت: $\binom{۴}{۲}=۶$

بدین‌ترتیب اگر رأس b و یال‌های متصل به آن را در نظر نگیریم ۶ دور به طول ۴ و اگر رأس c و یال‌های متصل به آن را در نظر نگیریم ۶ دور به طول ۴ داریم. بنابراین در حالت کلی ۶×۳=۱۸ دور به طول ۴ داریم.

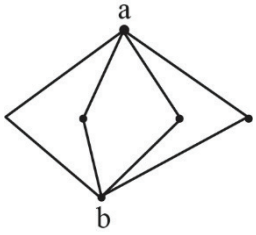
- **درجهٔ یک رأس:** درجهٔ رأس v در گراف G برابر است با تعداد یال‌هایی از گراف G که به رأس v متصل‌اند و آن را با $\deg_G(v)$ یا به‌طور ساده با $\deg(v)$ یا $d(v)$ نمایش می‌دهیم. اگر درجهٔ یک رأس فرد باشد آن را رأس فرد و اگر زوج باشد آن را رأس زوج می‌نامیم.
- **دور:** دنبالهٔ $v_۱ v_۲ v_۳ \dots v_n v_۱ \ (n \geq ۳)$ از رئوس دو به دو متمایز که در ان هر رأس با رأس بعدی مجاور است را یک دور به طول n می‌نامیم.

**تست‌درتست** **اگر درجهٔ رأس‌های یک گراف ، ۴، ۴، ۴، ۲، ۲، ۲ و۲ باشد، تعداد تمام دورهای موجود، کدام است؟** (سراسری ریاضی ۹۹)

۱) ۳ ۲) ۴ ۳) ۵ ۴) ۶

**پاسخ: گزینه ۴**

همه دوره‌های این گراف دور به طول ۴ هستند.




$\Rightarrow \binom{۴}{۲}=۶$

هر دو رأس که از وسط برداریم، با a و b دور ۴ خواهیم داشت. بنابراین کلاً ۶ دور داریم.

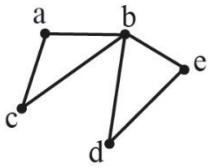
**۵۰. گراف G با مجموعهٔ رئوس $V=\{a,b,c,d\}$ مفروض است. اگر $N_G(a)=\{b,c\}$ و $N_G[b]=V_G$ و مجموعهٔ همسایگی‌های باز رئوس c، d و e هر کدام دارای دو عضو باشند، آن‌گاه در این گراف چند مسیر از رأس c به رأس d وجود دارد؟**

۱) ۳ ۲) ۴ ۳) ۵ ۴) ۶

**پاسخ: گزینه ۲** محاسباتی - آسان | مسیر در گراف

گراف موردنظر را رسم می‌کنیم. می‌دانیم رأس b به همهٔ رئوس متصل است.

چون رئوس e و d باید درجهٔ ۲ باشند، پس به اجبار مجاورند.




مسیرهای رئوس c به d را می‌نویسیم:

$cbd - cabd - cbed - cabed$

بنابراین گزینهٔ (۲) صحیح است.

**۵۱. اگر $P(A\cap B)=\frac{۱}{۶}$ و $P(B'-A)=\frac{۱}{۳}$ باشد، بیشترین مقدار $\frac{P(B)}{P(A)}$ کدام است؟**

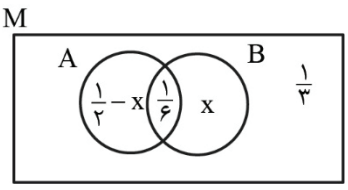
۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۶

**پاسخ: گزینه ۳** محاسباتی - متوسط | احتمال و جبر مجموعه

سنجش کلاد
www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshCloud

$$P(B'-A)=P(B'\cap A')=1-P(A\cup B)=\frac{1}{3} \Rightarrow P(A\cup B)=\frac{2}{3}$$

با استفاده از نمودار ون روبه‌رو داریم:




$$\frac{P(B)}{P(A)}=\frac{x+\frac{1}{6}}{\frac{1}{2}-x+\frac{1}{6}}=\frac{x+\frac{1}{6}}{\frac{2}{3}-x}=\frac{6x+1}{4-6x}=-(1+\frac{5}{6x-4}) \qquad (*)$$

عبارت (*) زمانی بیشترین مقدار را دارد که کسر $\frac{5}{6x-4}$ کم‌ترین مقدار را داشته باشد، پس باید مخرج کسر یعنی $6x-4$ حداکثر شود. از آن‌جایی که $0\le x\le\frac{1}{2}$ است، پس حداکثر مقدار $6x-4$ به ازای $x=\frac{1}{2}$ برابر $-1$ است و داریم:

$$(\frac{P(B)}{P(A)})_{max}=-1-(\frac{5}{6x-4})_{min}=-1-\frac{5}{6(\frac{1}{2})-4}=-1-\frac{5}{3-4}=-1+5=4$$

## یادآوری:

$$P(A')=1-P(A)$$
$$P(A-B)=P(A\cap B')=1-P(A'\cup B)$$

## درسنامه:

**نکته**

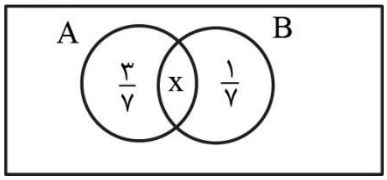
$$P(A')=1-P(A)$$
$$P(A-B)=P(A\cap B')=1-P(A'\cup B)$$

این تیپ مسائل، یکی از سوالات پرتکرار سال‌های اخیر است که یکی از ساده و روان‌ترین روش حل آن‌ها استفاده از نمودار ون است. به طوری‌که مقادیر معلوم و مجهول را در آن نمایش داده و خواسته مسئله را طبق آن می‌یابیم.

**تست‌درتست** اگر $P(A-B)=\frac{3}{7}$ و $P(B-A)=\frac{1}{7}$ باشد، کم‌ترین مقدار $\frac{P(A)}{P(B)}$ کدام است؟ (خارج ۱۴۰۲)

۱) $\frac{3}{2}$ ۲) $\frac{2}{3}$ ۳) $\frac{5}{4}$ ۴) $\frac{4}{5}$

**پاسخ: گزینه ۱**




$$\frac{P(A)}{P(B)}=\frac{x+\frac{3}{7}}{x+\frac{1}{7}}=\frac{7x+3}{7x+1}=1+\frac{2}{7x+1} \qquad (*)$$

عبارت (*) زمانی کم‌ترین مقدار را دارد که کسر $\frac{2}{7x+1}$ کم‌ترین مقدار را داشته باشد، پس باید مخرج کسر یعنی $7x+1$ حداکثر شود. از این‌رو مقدار $x$ که اشتراک دو مجموعه است باید حداکثر شود، بنابراین داریم:

$$x=1-(\frac{3}{7}+\frac{1}{7})=\frac{3}{7}$$

پس:

$$(\frac{P(A)}{P(B)})_{min}=1+(\frac{2}{7x+1})_{min}=1+\frac{2}{7(\frac{3}{7})+1}=1+\frac{2}{4}=\frac{3}{2} \Rightarrow (\frac{P(A)}{P(B)})_{min}=\frac{3}{2}$$

سنجش کلاد
www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshCloud

**۵۲. اگر $A=\{x\mid -۳<۲x-۱<۷\}$ و $B=\{x\mid x\in\mathbb{Z},|x|\le a\}$ و مجموعهٔ $(A\times B)\cap(B\times A)$، ۱۶ عضوی باشد، کم‌ترین مقدار a کدام است؟**

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

**پاسخ: گزینه ۳** مفهومی / محاسباتی - دشوار | ضرب دکارتی

ابتدا اعضای مجموعهٔ A را می‌نویسیم:

$$-۳<۲x-۱<۷ \Rightarrow -۲<۲x<۸ \Rightarrow -۱<x<۴$$

بنابراین مجموعهٔ A به صورت بازهٔ مقابل است: $A=(-۱,۴)$

می‌دانیم:

$$(A\times B)\cap(B\times A)=(A\cap B)\times(B\cap A) \Rightarrow n((A\times B)\cap(B\times A))=n((A\cap B))^۲$$

اشتراک مجموعه‌های A و B حتماً عضوهایی صحیح دارد، زیرا اعضای B همگی عضو $\mathbb{Z}$ هستند. داریم:

$$(n(A\cap B))^۲=۱۶ \Rightarrow n(A\cap B)=۴$$

بنابراین باید ۴ عدد صحیح مشترک وجود داشته باشد.

حال اگر $a\ge ۳$ باشد، اشتراک دو مجموعهٔ A و B به صورت $\{۰,۱,۲,۳\}$ خواهد بود.

از آن‌جا که کم‌ترین مقدار a را می‌خواهیم، گزینهٔ «۳» صحیح است.

**۵۳. چند مورد از گزاره‌های زیر، در خصوص گزارهٔ مرکب $[(p \Rightarrow \sim(q\vee r)) \Rightarrow \sim(q \Rightarrow (\sim r\wedge p))]\wedge(q \Rightarrow r)$ صحیح است؟**

**آ) فقط در حالتی درست است که q و p درست باشند.**

**ب) فقط در حالتی نادرست است که r نادرست باشد.**

**پ) همواره درست است.**

**ت) همواره نادرست است.**

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

**پاسخ: گزینه ۱** مفهومی / محاسباتی - دشوار | ترکیب گزاره‌ها

$$[p \Rightarrow \sim(q\vee r) \Rightarrow \sim(q \Rightarrow (\sim r\wedge p))]\wedge(q \Rightarrow r)$$

$$\equiv[(\sim p\vee(\sim q\wedge\sim r)) \Rightarrow \sim(\sim q\vee(\sim r\wedge p))]\wedge(\sim q\vee r)$$

$$\equiv[(\sim p\vee\sim q)\wedge(\sim p\vee\sim r) \Rightarrow (q\wedge(r\vee\sim p))]\wedge(\sim q\vee r)$$

$$\equiv[(p\wedge q)\vee(p\wedge r)\vee(q\wedge r)\vee(q\wedge\sim p)]\wedge(\sim q\vee r)$$

$$\equiv[\underbrace{(p\wedge q)\vee(q\wedge\sim p)}_{q\wedge(p\vee\sim p)}\vee\underbrace{(p\wedge r)\vee(q\wedge r)}_{r\wedge(p\vee q)}]\wedge(\sim q\vee r)$$

$$\equiv[\underbrace{q\vee(r\wedge q)}_{q}\vee(r\wedge p)]\wedge(\sim q\vee r)\equiv(q\vee r)\wedge(\sim q\vee r)\wedge(q\vee p)$$

$$\equiv(r\vee(q\wedge\sim q))\wedge(p\vee q)\equiv r\wedge(p\vee q)$$

بنابراین گزارهٔ مرکب موردنظر در حالتی که q و p درست باشند، همواره درست است، همچنین درست بودن r نیز به تنهایی برای اثبات درستی گزاره موردنظر کفایت می‌کند.

پس گزارهٔ مرکب موردنظر در حالتی نادرست است که p و q نادرست باشند. همچنین نادرست بودن گزارهٔ r به تنهایی برای اثبات نادرستی گزارهٔ موردنظر کافی است.

در نتیجه هیچ‌یک از موارد موردنظر صحیح نمی‌باشد.

سنجش کلاد
www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshCloud

## درسنامه

• **قوانین جذب گزاره‌ها:**

$p\vee(p\wedge q)\equiv p$

$p\wedge(p\vee q)\equiv p$

• **قوانین دمورگان:**

$\sim(p\vee q)\equiv\sim p\wedge\sim q$

$\sim(p\wedge q)\equiv\sim p\vee\sim q$

• **قوانین توزیع‌پذیری گزاره‌ها:**

$p\vee(q\wedge r)\equiv(p\vee q)\wedge(p\vee r)$

$p\wedge(q\vee r)\equiv(p\wedge q)\vee(p\wedge r)$

**تست‌درتست** در خصوص گزارهٔ مرکب $[(p\wedge q)\Rightarrow r]\Rightarrow(\sim p\vee\sim q\vee r)$ کدام مورد صحیح است؟ (خارج ۱۴۰۳)

۱) فقط در حالتی که p و q نادرست باشند، گزاره نادرست است.

۲) فقط در حالتی که p و q درست باشند، گزاره درست است.

۳) همواره نادرست است.

۴) همواره درست است.

**پاسخ: گزینه ۴**

$[(p\wedge q)\Rightarrow r]\Rightarrow(\sim p\vee\sim q\vee r)\equiv(\sim p\vee\sim q\vee r)\Rightarrow(\sim p\vee\sim q\vee r)$

و می‌دانیم $(p\Rightarrow p)\equiv T$؛ در نتیجه گزارهٔ بالا نیز همواره درست خواهد بود.

**۵۴. بر روی یک تاس اعداد ۳، ۲، ۱، ۱، ۱ نوشته شده است. در دو بار پرتاب این تاس با کدام احتمال اعداد ظاهر شده برابر نیستند؟**

۱) $\frac{۷}{۱۸}$ ۲) $\frac{۱}{۲}$ ۳) $\frac{۱۱}{۱۸}$ ۴) $\frac{۲}{۳}$

**پاسخ: گزینه ۳** محاسباتی - آسان | احتمال غیرهم‌شانس

در هر بار پرتاب می‌دانیم احتمال ۱ آمدن برابر $\frac{۱}{۲}$، احتمال ۲ آمدن برابر $\frac{۱}{۳}$ و احتمال ۳ آمدن برابر $\frac{۱}{۶}$ است. حالاتی که اعداد متفاوت ظاهر می‌شوند را نوشته و احتمال هریک را محاسبه می‌کنیم:

$(۲,۳)$ , $(۱,۳)$ , $(۱,۲)$

$\frac{۱}{۳}\times\frac{۱}{۶}=\frac{۱}{۱۸}$ $\frac{۱}{۲}\times\frac{۱}{۶}=\frac{۱}{۱۲}$ $\frac{۱}{۲}\times\frac{۱}{۳}=\frac{۱}{۶}$

برعکس حالات بالا $((۲,۱),(۳,۱),(۳,۲))$ نیز صحیح هستند، پس داریم:

$۲\times(\frac{۱}{۶}+\frac{۱}{۱۲}+\frac{۱}{۱۸})=\frac{۱۱}{۱۸}$

**۵۵. در یک تجربه تصادفی، $S=\{a,b,c\}$ فضای نمونه‌ای است. اگر $P(a)$، $P(b)$ و $P(c)$، جملات متوالی یک دنباله هندسی با واسطه هندسی $\frac{۱}{۴}$ باشند، مقدار $P(c)$ کدام می‌تواند باشد؟**

۱) $\frac{۵-\sqrt{۳}}{۴}$ ۲) $\frac{۳-\sqrt{۵}}{۴}$ ۳) $\frac{۵+\sqrt{۳}}{۸}$ ۴) $\frac{۳+\sqrt{۵}}{۸}$

**پاسخ: گزینه ۴** محاسباتی - دشوار | احتمال غیرهم‌شانس

سنجش کلاد
www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshCloud

$$P(b)=\frac{۱}{۴} \qquad (*)$$

$$P(a)+P(b)+P(c)=۱ \xrightarrow{(*)} P(a)+P(c)=\frac{۳}{۴}$$

$$P(a).P(c)=(P(b))^{۲} \Rightarrow P(a).P(c)=\frac{۱}{۱۶}$$

$$x^{۲}-Sx+P=۰ \Rightarrow x^{۲}-\frac{۳}{۴}x+\frac{۱}{۱۶}=۰ \Rightarrow x=\frac{\frac{۳}{۴}\pm\sqrt{(\frac{۳}{۴})^{۲}-۴(\frac{۱}{۱۶})}}{۲}=\frac{۳\pm\sqrt{۵}}{۸}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} P(a)=\frac{۳-\sqrt{۵}}{۸} \\ P(b)=\frac{۱}{۴} \\ P(c)=\frac{۳+\sqrt{۵}}{۸} \end{cases}$$

www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshCloud

زیستاز
مبتکران

# آزمون‌های آزمایشی
# ماراتون

## آزمون مرحله ۷ | ۹ بهمن ۱۴۰۴

## پاسخنامه دفترچه ۲ | پایه دوازدهم

رشتهٔ ریاضی

| درس | گزینشگر و مسئول آزمون | ناظر علمی | پاسخنامه نویس |
|---|---|---|---|
| فیزیک | مجید ساکی | پدرام قلعه شاخانی | علیرضا گونه، احسان محمدی |
| شیمی | پویا الفتی | امیر علی برخورداریون، شهرام شاه‌پرویزی | آرمین عظیمی |

| | طراحان | ویراستاران |
|---|---|---|
| فیزیک | مجید ساکی، علی نعیمی، محمدرضا یاری، جمال خم‌خاجی، بهمن قمری، احمدرضوانی، نیما نوروزی، زهره اقامحمدی | احسان محمدی، محمدرضا طاهری‌نژاد، مهدی داوری، علیرضا بادی، علی اکبر مظفری |
| شیمی | پویا الفتی، شهرام شاه پرویزی، امیرعلی برخورداریون، حسین ایروانی، سروش عبادی، میلاد قاسمی، آرمین عظیمی | امیرمحمد شکوهی، محمدرضا طاهری‌نژاد، ایمان زارعی |

چاپ، تکثیر، انتشار و یا استفاده از محتوای آزمون به هر نحوی غیرقانونی، غیراخلاقی و خلاف شرع بوده و با متخلفان برابر مقررات رفتار خواهد شد.

Mobtakeran.com Zistase.ir

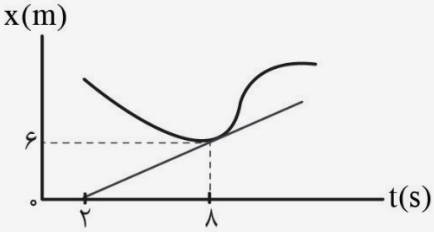
ویژه کنکور ۱۴۰۵

سنجش کلاد
www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshCloud

# پاسخنامه دفترچه ۲ آزمون مرحله ۷

## فیزیک دوازدهم | ۹بهمن ماه ۱۴۰۴

**۱. شکل زیر نمودار مکان - زمان متحرکی را که روی محور x حرکت می‌کند، نشان می‌دهد و خط مماس بر منحنی در لحظه‌ی $t=۸s$ رسم شده است. سرعت متحرک در این لحظه در SI کدام است؟**




۱) $\frac{۲}{۳}\vec{i}$

۲) $-\frac{۲}{۳}\vec{i}$

۳) $+\vec{i}$

۴) $-\vec{i}$

**پاسخ: گزینه ۳** ساده | محاسباتی

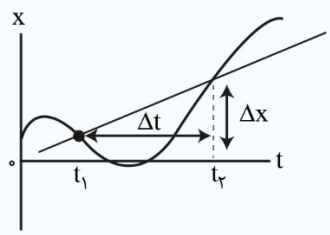
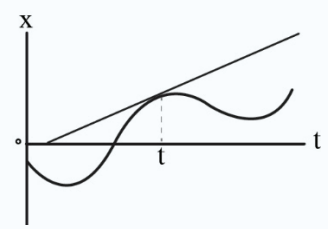
شیب خط مماس بر منحنی در لحظه $t=۸s$، همان سرعت متحرک در این لحظه است.

چون شیب خط مثبت است، قطعاً سرعت در این لحظه مثبت است، پس گزینه‌های (۲) و (۴) حذف.

پس سرعت در این لحظه برابر است با:

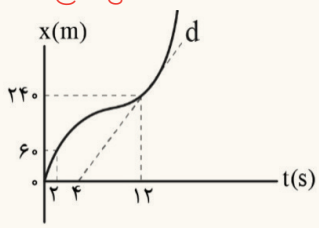
$$v=\text{شیب خط مماس}=\frac{۶-۰}{۸-۲}=\frac{۶}{۶}=۱\frac{m}{s}\Rightarrow \vec{v}=(+۱)\vec{i}$$

**درسنامه:**

| | |
|---|---|
| **سرعت متوسط در نمودار مکان - زمان** | شیب خطی که نمودار را در دو لحظه موردنظر قطع می‌کند.<br>  <br><br>$v_{av(t_۱-t_۲)}=\frac{\Delta x}{\Delta t}$ |
| **سرعت لحظه‌ای در نمودار مکان - زمان** | شیب خط مماس بر نمودار در لحظه موردنظر<br>  <br><br>شیب خط: $m=v_{(t)}$ |

www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshCloud

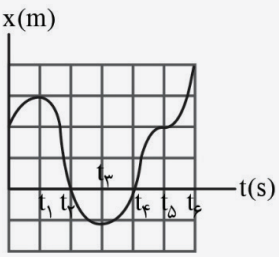
**تست‌درتست** نمودار مکان - زمان متحرکی مطابق شکل زیر است. اگر تندی در لحظهٔ $t=12s$ برابر تندی متوسط در بازهٔ $t_1=2s$ تا $t_2=14s$ باشد، سرعت متوسط ۲ ثانیه اول چند برابر سرعت متوسط ۲ ثانیهٔ هفتم است؟ (خط d مماس بر نمودار در لحظهٔ $t=12s$ است.) (تجربی خارج ۱۴۰۰)




۱) $\frac{1}{3}$
۲) $\frac{1}{2}$
۳) $\frac{3}{5}$
۴) $\frac{2}{3}$

**پاسخ: گزینه ۱**

**۲.** نمودار مکان - زمان متحرکی که در امتداد محور x حرکت می‌کند، به شکل زیر است. به ترتیب از راست به چپ، چند مرتبه جهت حرکت متحرک و چند مرتبه جهت بردار مکان متحرک تغییر کرده است؟




۱) ۳، ۲
۲) ۳، ۳
۳) ۲، ۲
۴) ۲، ۳

**پاسخ: گزینه ۳** ساده | مفهومی

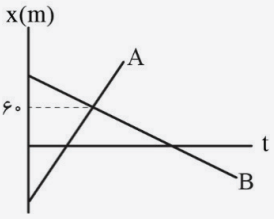
در لحظات متناظر با قله و دره‌های نمودار مکان - زمان (نقاط اکسترمم نسبی)، یعنی لحظات $t_1$ و $t_3$ جهت حرکت متحرک تغییر می‌کند. (۲ مرتبه)
در لحظاتی که نمودار $x-t$، محور زمان را قطع می‌کند، یعنی لحظات $t_2$ و $t_4$ جهت بردار مکان تغییر می‌کند. (۲ مرتبه)

**درسنامه:**

**بررسی متغیرهای حرکت در نمودار مکان - زمان**

| کمیت | مشخصه | لحظه تغییر جهت کمیت |
|---|---|---|
| بردار مکان | مؤلفه عمودی نمودار در هر لحظه | تقاطع نمودار با محور t |
| سرعت | شیب خط مماس بر نمودار | لحظه متناظر با اکسترمم (قله یا دره) |
| شتاب | تقعر نمودار:<br>رو به بالا ∪ ← شتاب مثبت<br>رو به پایین ∩ ← شتاب منفی | تغییر تقعر نمودار |

**۳.** نمودار مکان - زمان دو متحرک A و B که روی محور x حرکت می‌کنند به صورت زیر است. اگر تندی متحرک A، ۴ برابر تندی متحرک B و بردارهای مکان دو متحرک در لحظه‌های ۴s و ۹s تغییر جهت داده باشند، فاصله‌ی دو متحرک در $t=0$ چند متر است؟




۱) ۲۲۵
۲) ۳۷۵
۳) ۴۲۵
۴) ۳۰۰

**پاسخ: گزینه ۲** متوسط | محاسباتی

سنجش کلاد
www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshCloud

معادله حرکت A و B را با توجه به این‌که هر دو به صورت یکنواخت حرکت می‌کنند می‌نویسیم:

$$x=vt+x_{\circ} \Rightarrow x_A=v_A t+x_{\circ A} \ , \ x_B=v_B t+x_{\circ B}$$

در $t=۴s$، متحرک A و در $t=۹s$، متحرک B از مبدأ مکان عبور می‌کنند.

پس:

$$v_A(۴)+x_{\circ A}=۰ \Rightarrow x_{\circ A}=-۴v_A$$

$$v_B(۹)+x_{\circ B}=۰ \Rightarrow x_{\circ B}=-۹v_B \xrightarrow{v_B=-\frac{v_A}{۴}} x_{\circ B}=۹(\frac{v_A}{۴})$$

حال معادلات مکان - زمان آن‌ها را بر حسب $v_A$ می‌نویسیم:

$$x_A=v_A t-۴v_A$$

$$x_B=\frac{v_A}{۴}t-\frac{۹}{۴}v_A$$

لحظه‌ای که دو متحرک به هم می‌رسند، را تعیین می‌کنیم:

$$x_A=x_B \Rightarrow v_A t-۴v_A=-\frac{v_A}{۴}t+\frac{۹}{۴}v_A \Rightarrow t-۴=-\frac{t}{۴}+\frac{۹}{۴}$$

$$\Rightarrow \frac{۵t}{۴}=۴+\frac{۹}{۴} \Rightarrow ۵t=۲۵ \Rightarrow t=۵s$$

و چون در مکان $x=۶۰m$ به هم می‌رسند:

$$۶۰=v_A(۵)-۴v_A \Rightarrow v_A=۶۰\frac{m}{s}$$

و مکان اولیه آن‌ها:

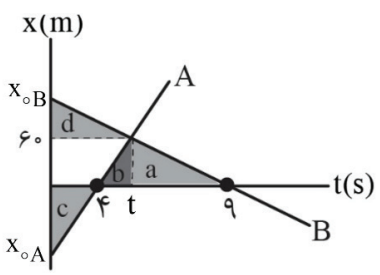
$$x_{\circ A}=-۴v_A=-۲۴۰m \ , \ x_{\circ B}=\frac{۹}{۴}v_A=\frac{۹}{۴}\times ۶۰=۱۳۵m$$

و فاصله آن‌ها در $t=۰$:

$$|x_{\circ B}-x_{\circ A}|=|۱۳۵-(-۲۴۰)|=۳۷۵m$$

**روش دوم:**

**گام اول:** به کمک صورت سوال، محل تقاطع نمودارها با محور زمان را تعیین می‌کنیم.




**گام دوم:** پس از تشابه دو مثلث هاشورخورده a و b، لحظه t را تعیین می‌کنیم.

چون تندی A، ۴ برابر تندی B است، اندازهٔ شیب نمودار A، ۴ برابر اندازهٔ شیب نمودار B است

پس:

$$\frac{۶۰}{t-۴}=۴\times\frac{۶۰}{۹-t} \Rightarrow ۹-t=۴t-۱۶ \Rightarrow ۵t=۲۵ \Rightarrow t=۵s$$

**گام سوم:** از تشابه مثلث‌های b و c، مکان اولیه A $(x_{\circ A})$ و از تشابه a و d، مکان اولیه B، یعنی $x_{\circ B}$ را معین می‌کنیم:

$$\frac{|x_{\circ A}|}{۴}=\frac{۶۰}{۵-۴} \Rightarrow |x_{\circ A}|=۲۴۰ \Rightarrow x_{\circ A}=-۲۴۰m$$

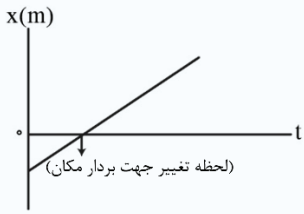
$$\frac{x_{\circ B}-۶۰}{۵}=\frac{۶۰}{۹-۵} \Rightarrow \frac{x_{\circ B}-۶۰}{۵}=۱۵ \Rightarrow x_{\circ B}=۱۳۵$$

پس فاصله دو متحرک در $t=۰$ برابر است با:

$$x_{\circ B}-x_{\circ A}=۱۳۵-(-۲۴۰)=۳۷۵m$$

www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshCloud

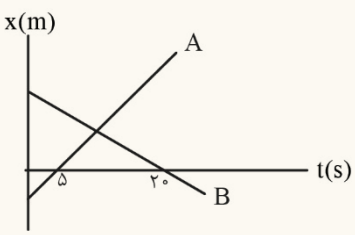
## درسنامه:

| حرکت با سرعت ثابت | |
|---|---|
| معادله حرکت | $x = vt + x_0$ <br> $v$: سرعت $(\frac{m}{s})$ <br> $x_0$: مکان اولیه $(m)$ |
| نمودار مکان - زمان |   <br> $x_0$: عرض از مبدا <br> $v$: شیب خط |

**نکته** در حرکت با سرعت ثابت:

- سرعت متوسط در هر بازه زمانی دلخواه، برابر سرعت لحظه‌ای است.
- جابه‌جایی در بازه‌های زمانی مساوی، یکسان است.

**تست‌درتست** نمودار مکان - زمان دو متحرک A و B مطابق شکل زیر است. اگر در لحظهٔ $t=0$ فاصلهٔ دو متحرک ۱۵۰ متر باشد و تندی حرکت A، ۲ برابر تندی متحرک B باشد، فاصلهٔ دو متحرک در لحظهٔ $t=20s$ چند متر است؟ (سراسری تجربی ۱۴۰۰)




۱) ۵۰
۲) ۱۰۰
۳) ۱۵۰
۴) ۲۰۰

**پاسخ: گزینه ۳**

**۴.** اتومبیلی با شتاب ثابت و از حال سکون روی محور x و از مبدأ مکان شروع به حرکت می‌کند. اگر اندازه‌ی سرعت متوسط متحرک در دو ثانیه‌ی پنجم حرکت برابر $۳۶\frac{m}{s}$ باشد، تندی حرکت در لحظه‌ای که از فاصله‌ی ۳۲ متری مبدأ عبور می‌کند، چند متر بر ثانیه است؟

۱) ۸ ۲) ۱۲ ۳) ۱۶ ۴) ۳۲

**پاسخ: گزینه ۳** متوسط | محاسباتی

دو ثانیه پنجم حرکت یعنی از $t=8s$ تا $t=10s$.

و سرعت متوسط در این بازه زمانی، با سرعت در لحظهٔ وسط این بازه برابر است پس:

$$v_{av(t_1-t_2)} = v_{(\frac{t_1+t_2}{2})} \Rightarrow v_{9s} = ۳۶\frac{m}{s}$$

حالا شتاب حرکت را محاسبه می‌کنیم:

$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t} \Rightarrow a = \frac{۳۶-۰}{۹-۰} = ۴\frac{m}{s^2}$$

در پایان به کمک رابطه سرعت - جابه‌جایی یا مستقل از زمان، تندی را پس از ۳۲ متر جابه‌جایی به دست می‌آوریم:

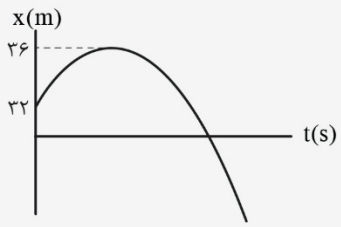
$$v^2 - v_0^2 = 2a\Delta x \Rightarrow v^2 - ۰ = ۲\times۴\times۳۲ \Rightarrow v = ۸\times۲ = ۱۶\frac{m}{s}$$

سنجش کلاد
www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshCloud

## درسنامه:

| روابط حرکت با شتاب ثابت روی خط راست | | |
|---|---|---|
| معادله مکان - زمان | $x=\frac{1}{2}at^2+v_0t+x_0$ | $a$: شتاب $\frac{m}{s^2}$<br>$v_0$: سرعت اولیه $\frac{m}{s}$<br>$x_0$: مکان اولیه $m$ |
| معادله سرعت - زمان | $v=at+v_0$ | |
| معادله مستقل از زمان یا سرعت - جابه‌جایی | $v_2^2-v_1^2=2a(x_2-x_1)$ | $v_2$: سرعت در مکان $x_2$<br>$v_1$: سرعت در مکان $x_1$ |

**۵. نمودار مکان - زمان متحرکی که روی محور x حرکت می‌کند به صورت سهمی شکل زیر است. اگر جهت بردار مکان متحرک در لحظه‌ی $t=8s$ تغییر کرده باشد، تندی متوسط متحرک در ۱۰ ثانیه‌ی نخست حرکت چند متر بر ثانیه است؟**




۱) ۶
۲) ۶/۴
۳) ۶/۶
۴) ۶/۸

**پاسخ: گزینه ۴** سخت | محاسباتی

با توجه به نمودار، مکان اولیه متحرک برابر $x_0=32m$ است.

پس معادله حرکت متحرک به صورت مقابل خواهد بود.

$$x=\frac{1}{2}at^2+v_0t+x_0 \Rightarrow x=\frac{1}{2}at^2+v_0t+32$$

چون در لحظه $t=8s$، جهت بردار مکان تغییر می‌کند، داریم:

$$0=\frac{1}{2}a(8^2)+v_0(8)+32 \Rightarrow 32a+8v_0+32=0$$

$$\Rightarrow 4a+v_0=-4 \quad (I)$$

از طرفی پس از طی $36-32=4m$، تندی متحرک صفر شده است، پس طبق رابطه مستقل از زمان داریم:

$$v_2^2-v_1^2=2a\Delta x \Rightarrow 0^2-v_0^2=2a(4) \Rightarrow a=-\frac{v_0^2}{8} \quad (II)$$

با قرار دادن رابطه (II) در (I) داریم:

$$4(-\frac{v_0^2}{8})+v_0=-4 \Rightarrow -\frac{v_0}{2}+v_0=-4 \Rightarrow v_0^2-2v_0-8=0$$

$$(v_0-4)(v_0+2)=0 \Rightarrow \begin{cases} v_0=4\frac{m}{s} \checkmark \\ v_0=-2\frac{m}{s} \times \end{cases}$$

چون سرعت اولیه، مثبت است مقدار $v_0=-2\frac{m}{s}$ برای سرعت قابل‌قبول نیست!

پس شتاب حرکت نیز برابر است با:

$$a=-\frac{v_0^2}{8}=-\frac{16}{8}=-2\frac{m}{s^2}$$

و معادله مکان - زمان به صورت مقابل خواهد بود:

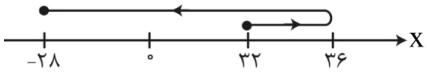
$$x=-t^2+4t+32$$

حال مکان متحرک در $t=10s$ را تعیین می‌کنیم:

$$x_{10}=-(10)^2+4(10)+32=-28m$$

www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshCloud

به این ترتیب مسافت طی شده تا $t=۱۰s$ برابر است با:

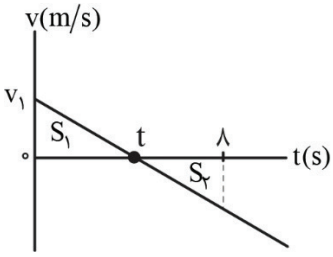



$\ell = ۴+۳۶+۲۸ = ۶۸m$

و تندی متوسط برابر است با:

$$S_{av} = \frac{\ell}{\Delta t} = \frac{۶۸}{۱۰} = ۶/۸ \frac{m}{s}$$

**روش دوم:** طبق نمودار مکان - زمان، این متحرک ابتدا $۴m$ در جهت مثبت حرکت کرد. و سپس تا لحظه $t=۸s$، خلاف جهت محور $x$ حرکت می‌کند و $-۳۶m$ جابه‌جا می‌شود. پس نمودار سرعت - زمان آن به صورت زیر است:



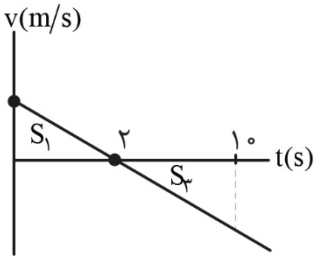

پس مساحت $S_۱$ و $S_۲$ برابر است با:

$$S_۱ = ۴m \ , \ S_۲ = ۳۶m$$

و چون هر دو مثلث متشابه هستند:

$$\frac{۳۶}{۴} = (\frac{۸-t}{t})^۲ \Rightarrow ۳ = \frac{۸-t}{t} \Rightarrow t = ۲s$$

حالا مساحت $S_۳$ را به کمک تشابه حساب می‌کنیم.




$$\frac{S_۳}{۴} = (\frac{۱۰-۲}{۲})^۲ \Rightarrow \frac{S_۳}{۴} = ۱۶ \Rightarrow S_۳ = ۶۴m$$

به این ترتیب، مسافت طی شده توسط متحرک تا $t=۱۰s$ برابر است با:

$$\ell = ۴+۶۴ = ۶۸m$$

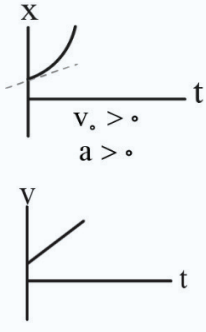
و تندی متوسط در این مدت برابر است با:

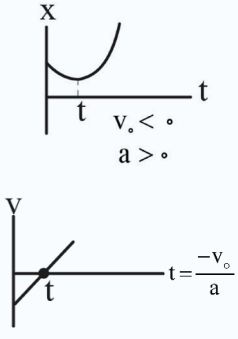
$$s_{av} = \frac{\ell}{\Delta t} = \frac{۶۸}{۱۰} = ۶/۸ \frac{m}{s}$$

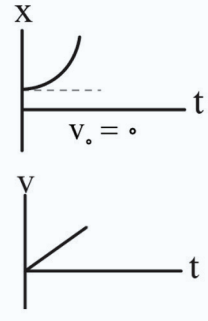
## درسنامه:

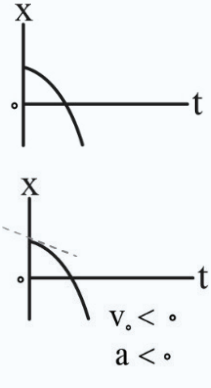
### نمودارهای مکان - زمان و سرعت - زمان در حرکت با شتاب ثابت

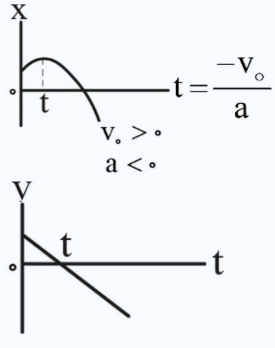
**نمودار مکان - زمان در حرکت با شتاب ثابت روی خط راست به صورت یک سهمی است.**

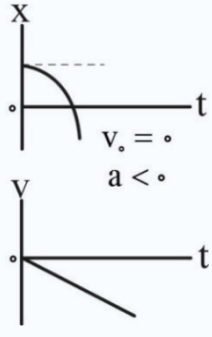


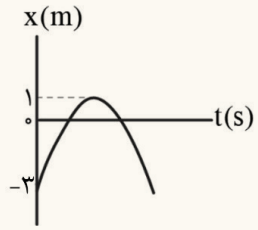




سنجش کلاد
www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshCloud

**تست‌درتست** نمودار مکان - زمان متحرکی که با شتاب ثابت روی محور x حرکت می‌کند، مطابق شکل است. اگر بزرگی شتاب $۲\frac{m}{s^۲}$ باشد، تندی متوسط متحرک در بازهٔ زمانی که اولین بار جهت بردار مکان عوض می‌شود تا لحظهٔ $t=۴s$ چند متر بر ثانیه است؟ (تجربی خارج ۱۴۰۳)




۱) ۱

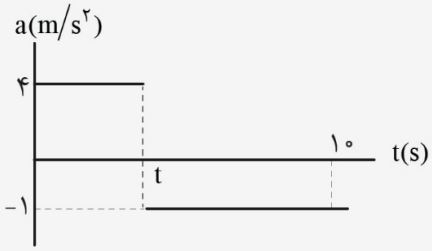
۲) ۲

۳) $\frac{۲}{۳}$

۴) $\frac{۵}{۳}$

**پاسخ: گزینه ۴**

**۶.** نمودار شتاب - زمان متحرکی که روی محور x حرکت می‌کند، مطابق شکل زیر است. اگر شتاب متوسط متحرک در ۱۰ ثانیه‌ی نخست حرکت $+۲\frac{m}{s^۲}$ و سرعت متحرک در لحظه‌ی $t=۰$ برابر $-۸\frac{m}{s}$ باشد، مسافت طی شده توسط متحرک در ۱۰ ثانیه‌ی نخست حرکت چند متر است؟




۱) ۸۰

۲) ۸۴

۳) ۹۶

۴) ۱۰۶

**پاسخ: گزینه ۳** متوسط | محاسباتی

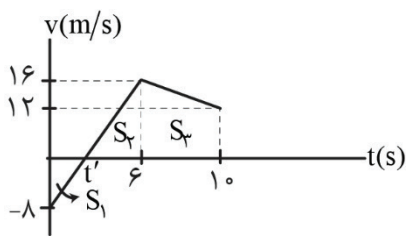
شتاب متوسط در ۱۰s اول برابر $۲\frac{m}{s^۲}$ است. سرعت متحرک در $t=۱۰s$ را به دست می‌آوریم:

$$a=\frac{v_۲-v_۱}{t_۲-t_۱} \Rightarrow ۲=\frac{v_{۱۰}-(-۸)}{۱۰} \Rightarrow v_{۱۰}+۸=۲۰ \Rightarrow v_{۱۰}=۱۲\frac{m}{s}$$

از طرفی، سطح محصور بین نمودار شتاب و محور زمان، تغییرات سرعت را نشان می‌دهد. پس:

$$\Delta v=۴t+(-۱)(۱۰-t) \Rightarrow ۱۲-(-۸)=۴t-۱۰+t \Rightarrow ۵t=۳۰ \Rightarrow t=۶s$$

حال نمودار سرعت -زمان را برای این متحرک رسم می‌کنیم:




برای محاسبه مسافت طی شده توسط متحرک ابتدا لحظه $t'$ را محاسبه کرده و سپس سطح بین نمودار سرعت و محور زمان را محاسبه می‌کنیم:

$$a=\frac{\Delta v}{\Delta t} \Rightarrow ۴=\frac{۰-(-۸)}{t'} \Rightarrow t'=۲s$$

به این ترتیب مسافت طی شده را در ۱۰ ثانیه نخست برابر است با:

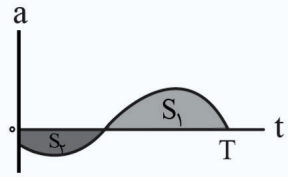
$$\left.\begin{aligned} S_۱&=\frac{۸\times۲}{۲}=۸ \\ S_۲&=\frac{۱۶\times(۶-۲)}{۲}=۳۲ \\ S_۳&=\frac{(۱۶+۱۲)\times(۱۰-۶)}{۲}=۵۶ \end{aligned}\right\} \rightarrow \ell=S_۱+S_۲+S_۳=۹۶m$$

www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshCloud

## درسنامه:

### نمودار شتاب - زمان

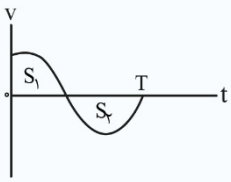
به کمک سطح محصور بین نمودار شتاب و محور زمان، تغییرات سرعت محاسبه می‌شود.




$$\Delta v_{(0-T)} = S_1 - S_2$$

### نمودار سرعت - زمان

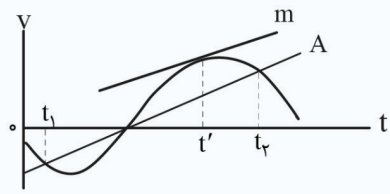
از سطح محصور بین نمودار سرعت و محور زمان می‌توان مسافت طی شده و جابه‌جایی را محاسبه کرد.




$$\Delta x_{(0-T)} = S_1 - S_2$$

$$\ell_{(0-T)} = S_1 + S_2$$

از شیب نمودار سرعت - زمان، شتاب متوسط و شتاب لحظه‌ای را می‌توان محاسبه کرد.

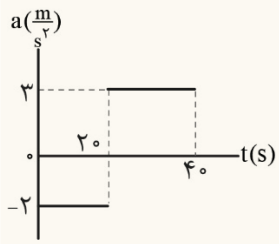



$$a_{av(t_1-t_2)} = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \text{شیب خط } A$$

$$a_{(t')} = \text{شیب خط } m$$

---

**تست‌درتست** نمودار شتاب - زمان متحرکی که روی خط راست حرکت می‌کند، مطابق شکل زیر است. اگر در لحظهٔ $t = 0s$ سرعت متحرک $\vec{v} = (20\frac{m}{s})\vec{i}$ باشد، مسافتی که در ۲۰ ثانیهٔ دوم طی می‌کند، چند متر است؟ (تجربی ۱۴۰۴)




۱) ۴۰۰

۲) ۲۰۰

۳) $\frac{1000}{3}$

۴) $\frac{2000}{3}$

**پاسخ:** گزینه ۳

---

**۷.** اتومبیلی با سرعت ثابت $72\frac{km}{h}$ روی جادهٔ مستقیمی در حال حرکت است. ناگهان راننده مانعی را در فاصلهٔ ۵۸ متری می‌بیند و ترمز می‌گیرد. اگر زمان واکنش راننده ۰/۵ ثانیه باشد و ۳ ثانیه پس از دیده شدن مانع توسط راننده، فاصلهٔ اتومبیل با مانع به ۱۰/۵m برسد، کدام اتفاق رخ می‌دهد؟

۱) اتومبیل در فاصلهٔ ۲ متری مانع متوقف می‌شود.

۲) اتومبیل با تندی $2\frac{m}{s}$ به مانع برخورد می‌کند.

۳) اتومبیل با تندی $4\frac{m}{s}$ به مانع برخورد می‌کند.

۴) اتومبیل در فاصلهٔ ۴ متری مانع متوقف می‌شود.

**پاسخ:** گزینه ۳ متوسط | محاسباتی

سنجش کلاد
www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshCloud

ابتدا تندی حرکت اتومبیل را بر حسب متر بر ثانیه محاسبه می‌کنیم: $۷۲\frac{km}{h}=\frac{۷۲}{۳/۶}\frac{m}{s}=۲۰\frac{m}{s}$

در مدت واکنش، اتومبیل حرکت یکنواخت دارد و فاصله آن تا مانع به اندازه $\ell$ کاهش می‌یابد: $\ell=v\Delta t \Rightarrow \ell=۲۰\times ۰/۵=۱۰m$

بنابراین در لحظه ترمز، فاصله تا مانع برابر است با: $\ell'=۵۸-۱۰=۴۸m$

به این ترتیب، طبق صورت سوال، متحرک در مدت $۲/۵s$ (۳ ثانیه پس از دیده شدن) مسافتی معادل $۴۸-۱۰/۵=۳۷/۵m$ طی کرده است.

مسافت معادل $۴۸-۱۰/۵=۳۷/۵$ طی کرده است.

شتاب حرکت را بر این اساس محاسبه می‌کنیم: $\Delta x=\frac{۱}{۲}at^۲+v_۰t \Rightarrow ۳۷/۵=\frac{۱}{۲}a(۲/۵)^۲+۲۰(۲/۵)$

$$\Rightarrow -۱۲/۵=\frac{۱}{۲}a(۶/۲۵) \Rightarrow a=\frac{-۲۵}{۶/۲۵}=-۴\frac{m}{s^۲}$$

سپس تندی اتومبیل را پس از طی $۴۸m$ بررسی می‌کنیم. $v_۲^۲-v_۱^۲=۲a\Delta x \Rightarrow v_۲^۲-۲۰^۲=۲\times(-۴)(۴۸)$

$$\Rightarrow v_۲^۲=۴۰۰-۳۸۴=۱۶ \Rightarrow v_۲=۴\frac{m}{s}$$

پس با تندی $۴\frac{m}{s}$ به مانع برخورد می‌کند. (توجه کنید اگر $v^۲$ مقداری منفی به دست می‌آمد، اتومبیل قبل از برخورد به مانع متوقف شده است.)

## درسنامه:

| حرکت روی خط راست | |
|---|---|
| نوع حرکت | معادلات |
| حرکت با سرعت ثابت | $x=vt+x_۰$<br>$\Delta x=v\Delta t$ |
| حرکت با شتاب ثابت | معادله مکان - زمان $x=\frac{۱}{۲}at^۲+v_۰t+x_۰$<br>معادله سرعت - زمان $v=at+v_۰$<br>معادله سرعت - جابه‌جایی $v_۲^۲-v_۱^۲=۲a\Delta x$ |

**تست‌درتست** هواپیمایی با سرعت $۶۰\frac{m}{s}$ روی باند فرودگاه می‌نشیند و با شتاب ثابت، سرعت خود را کاهش می‌دهد تا متوقف شود. اگر هواپیما، ۳۲ متر پایانی مسیر مستقیم خود را در مدت ۴ ثانیه طی کرده باشد، مسافتی که هواپیما روی باند پیموده، چند متر است؟ (ریاضی ۱۴۰۲)

۱) ۴۵۰ ۲) ۶۰۰ ۳) ۷۵۰ ۴) ۸۰۰

**پاسخ: گزینه ۱**

**۸.** متحرک A در $t=۰$ با سرعت ثابت $(+۲۰\frac{m}{s})\vec{i}$ از مبدأ مکان عبور می‌کند. متحرک B در $t=۱۰s$ از حال سکون از مبدأ مکان با شتاب ثابت $(+۵\frac{m}{s^۲})\vec{i}$ شروع به حرکت می‌کند و پس از این‌که سرعتش به $(+۳۰\frac{m}{s})\vec{i}$ می‌رسد، با سرعت ثابت به حرکت خود ادامه می‌دهد. دو متحرک در چه فاصله‌ای از مبدأ مکان به یک‌دیگر می‌رسند؟

۱) ۹۶۰ ۲) ۶۶۰ ۳) ۷۸۰ ۴) ۸۴۰

**پاسخ: گزینه ۳** متوسط | محاسباتی

سنجش کلاد
www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshCloud

**گام اول:**

جابه‌جایی B را تا لحظه‌ای که سرعت آن به $۳۰\frac{m}{s}$ می‌رسد محاسبه می‌کنیم:

$$v_۲^۲ - v_۱^۲ = ۲a\Delta x \Rightarrow ۳۰^۲ - ۰^۲ = ۲\times ۵\times \Delta x \Rightarrow \Delta x = \frac{۹۰۰}{۱۰} = ۹۰m$$

**گام دوم:**

بر اساس زمان رسیدن متحرک B به سرعت $۳۰\frac{m}{s}$، جابه‌جایی A را نیز به دست می‌آوریم:

$$v = at + v_۰ \xrightarrow[a_B = ۵\frac{m}{s^۲}]{v_B = ۳۰\frac{m}{s}, v_۰ = ۰} ۳۰ = ۵t + ۰ \Rightarrow t = ۶s$$

مکان A را در $t=۱۶$، یعنی لحظه‌ای که B به سرعت $۳۰\frac{m}{s}$ رسیده است، محاسبه می‌کنیم:

$$\Delta x = v\Delta t \Rightarrow \Delta x_A = ۲۰\times ۱۶ = ۳۲۰m$$

**گام سوم:**

معادله حرکت آن‌ها را از این لحظه به بعد می‌نویسیم و برابر قرار می‌دهیم:

$$x = vt + x_۰ \Rightarrow \begin{cases} x_A = ۲۰t' + ۳۲۰ \\ x_B = ۳۰t' + ۹۰ \end{cases} \rightarrow x_A = x_B \Rightarrow ۲۰t' + ۳۲۰ = ۳۰t' + ۹۰ \Rightarrow ۱۰t' = ۲۳۰ \Rightarrow t' = ۲۳s$$

پس لحظه به هم رسیدن آن‌ها برابر است با:

$$t = ۲۳ + ۱۶ = ۳۹s$$

و مکان به هم رسیدن آن‌ها برابر است با::

$$x_A = v_A\, t = ۲۰\times ۳۹ = ۷۸۰m$$

**تست‌درتست** **خودرو A با سرعت ثابت $۸\frac{m}{s}$ در مسیر مستقیم در حرکت است و پشت سر آن خودرو B با سرعت ثابت $۲۰\frac{m}{s}$ در همان جهت حرکت می‌کند. وقتی فاصلهٔ بین آن‌ها به ۴۶ متر کاهش می‌یابد، خودرو A با شتاب ثابت $۲\frac{m}{s^۲}$ سرعت خود را کم می‌کند و یک ثانیهٔ بعد خودرو B نیز با شتاب ثابت $۴\frac{m}{s^۲}$ سرعت خود را کم می‌کند. سرعت خودرو B در لحظهٔ رسیدن به خودرو A چند متر بر ثانیه است؟** (ریاضی ۱۴۰۲)

۱) ۲ ۲) ۸ ۳) ۴ ۴) ۶

**پاسخ: گزینه ۲**

**۹. مطابق شکل شخصی یک جعبه بسیار بزرگ سنگین را روی سطح افقی هل می‌دهد. اگر جعبه شروع به حرکت کند، در حین حرکت جعبه کدام مقایسه بین اندازه‌ی نیرویی که شخص به جعبه وارد می‌کند ($F_۱$) و اندازه‌ی نیرویی که جعبه به شخص وارد می‌کند ($F_۲$) درست است؟**

۱) $F_۱ > F_۲$

۲) $F_۱ < F_۲$

۳) $F_۱ = F_۲$

۴) گزینه‌های (۱) و (۳) می‌توانند درست باشند.

**پاسخ: گزینه ۳** ساده | مفهومی

بر اساس قانون سوم نیوتون، نیرویی که شخص به جعبه وارد می‌کند هم‌اندازه با نیرویی است که جعبه به شخص وارد می‌کند.

سنجش کلاد
www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshCloud

## درسنامه:

| | قوانین نیوتون | نکات مهم |
|---|---|---|
| قانون اول | اگر به جسمی نیروی خالصی وارد نشود، جسم حالت سکون یا حرکت با سرعت ثابت خود راحفظ می‌کند. | لختی: تمایل جسم به حفظ وضعیت حرکت خود. |
| قانون دوم | اگر به جسمی نیرویی وارد شود، جسم در جهت برآیند نیروها شتاب می‌گیرد. $\vec{F}_{net} = m\vec{a}$ | نیروی خالص و شتاب هم‌جهت هستند. اما الزاماً نیرو و شتاب با سرعت هم‌جهت نیستند. |
| قانون سوم | اگر جسمی به جسم دیگر نیرویی وارد کند، جسم دوم نیز نیرویی در همان راستا، به همان اندازه ولی در خلاف جهت به جسم اول وارد می‌کند. این دو نیرو هم‌جنس هستند. | این دو نیرو برآیند ندارند و اثر هم‌دیگر را خنثی نمی‌کنند. |

**تست‌درتست** **دو شخص به جرم‌های $m_1$ و $m_2 > m_1$ با کفش‌های چرخ‌دار در یک سالن مسطح و صاف روبه‌روی هم ایستاده‌اند. شخص اول با نیروی $\vec{F}$، شخص دوم را به طرف چپ هل می‌دهد و شخص دوم با نیروی $\vec{F}'$، شخص اول را به طرف راست هُل می‌دهد. اگر شتاب حرکت دو شخص $\vec{a}_1$ و $\vec{a}_2$ باشد، کدام رابطه درست است؟** (تجربی خارج ۱۴۰۱)

۱) $a_1 < a_2 ، \vec{F} = \vec{F}'$

۲) $\vec{a}_1 = \vec{a}_2 ، \vec{F} = \vec{F}'$

۳) $\vec{a}_1 = -\vec{a}_2 ، \vec{F} = -\vec{F}'$

۴) $a_1 > a_2 ، \vec{F} = -\vec{F}'$

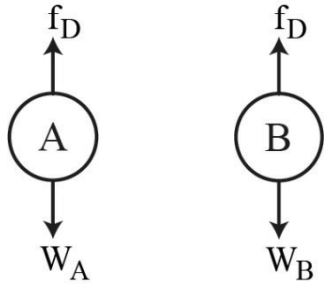
**پاسخ: گزینه ۴**

**۱۰. دو گوی هم‌اندازه A و B را که جرم A دو برابر B است، از ارتفاع نسبتاً زیاد رها می‌کنیم به گونه‌ای که در مسیر سقوط به تندی حدی می‌رسند و سپس با زمین برخورد می‌کنند. با فرض این‌که نیروی مقاومت هوا در حرکت گوی‌ها در تندی‌های یکسان، برابر است، در تندی یکسان و کوچک‌تر از تندی حدی گلوله‌ها، بزرگی شتاب کدام گوی بیشتر است و کدام گوی با تندی بیشتری به سطح زمین برخورد می‌کند؟**

۱) A ، A　　۲) B ، A　　۳) A ، B　　۴) B ، B

**پاسخ: گزینه ۱** متوسط | مفهومی

دو گوی را مطابق شکل زیر در نظر می‌گیریم و نیروهای وارد بر آن ها را رسم می‌کنیم.




سنجش کلاد
www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshCloud

قانون دوم نیوتون را برای هر کدام می‌نویسیم، اگر جرم گلوله B را $m$ در نظر بگیریم، جرم گوی A را بایستی $۲m$ لحاظ کنیم، پس:

$$A: W_A - f_D = m_A a_A \Rightarrow ۲mg - f_D = ۲ma_A \Rightarrow a_A = g - \frac{f_D}{۲m}$$

$$B: W_B - f_D = m_B a_B \Rightarrow mg - f_D = ma_B \Rightarrow a_B = g - \frac{f_D}{m}$$

به این ترتیب در تندی یکسان، شتاب گوی A از شتاب گوی B بیشتر است.

چون گلوله‌ها با تندی حدی به زمین می‌رسند، تندی حدی آن‌ها را مقایسه می‌کنیم. هنگامی که گلوله به تندی حدی می‌رسد، نیروی مقاومت هوا با وزن گلوله برابر است. چون وزن A بیشتر از B است. پس مقاومت هوا وارد بر آن باید بیشتر باشد، پس تندی حدی آن نیز بیشتر است و با تندی بیشتری به زمین برخورد می‌کند.

**درسنامه:**

| | |
|---|---|
| **نیروی مقاومت شاره** | نیرویی که به علت برخورد جسم با ذرات شاره، در خلاف جهت حرکت جسم به آن وارد می‌شود. |
| **نیروی مقاومت هوا** | به نیروی مقاومت شاره برای جسمی که در هوا حرکت می‌کند، گفته می‌شود. |
| **عوامل موثر بر نیروی مقاومت هوا** | تندی و اندازه جسم |
| **تندی حدی** | پس از رها شدن جسم، تندی آن افزایش می‌یابد و با افزایش تندی، مقاومت هوا نیز افزایش می‌یابد تا این‌که مقاومت هوا با وزن جسم برابر شوند و دیگر تندی ثابت می‌ماند.<br>در این حالت جسم با تندی موسوم به تندی حدی حرکت می‌کند. |

**تست‌درتست** **در شکل زیر، چتربازی مدتی پس از یک پرش آزاد، چترش را باز می‌کند و ناگهان مقاومت هوا افزایش می‌یابد. از این لحظه به بعد، تا قبل از رسیدن به چترباز به تندی حدی، کدام مورد، دربارهٔ حرکت چترباز درست است؟** (تجربی خارج ۱۴۰۰)

۱) تندی و شتاب افزایش می‌یابند.

۲) تندی و شتاب کاهش می‌یابند.

۳) تندی افزایش و شتاب ثابت می‌ماند.

۴) تندی افزایش و شتاب کاهش می‌یابد.

**پاسخ: گزینه ۲**

**۱۱. جعبه‌ای به جرم $m$ درون آسانسوری که با شتاب بالاسوی $۲\frac{m}{s^۲}$ در حال حرکت به سمت پایین است، بر روی یک ترازو قرار دارد. اگر اندازه‌ی اختلاف عدد ترازو و وزن جعبه ۱۶N باشد، جرم جعبه چند کیلوگرم است؟ $(g = ۱۰\frac{m}{s^۲})$**

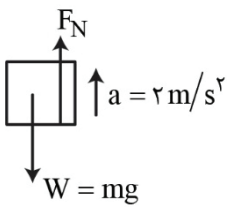
۱) ۸ ۲) ۱۶ ۳) ۶۴ ۴) ۸۰

**پاسخ: گزینه ۱** ساده | محاسباتی

عدد ترازو $F_N$ و وزن جعبه $W = mg$ است.

شتاب آسانسور روبه بالا و برابر $a = ۲\frac{m}{s^۲}$ است.

پس نیروهای وارد برجعبه در آسانسور به شکل مقابل است:




سنجش کلاد
www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshCloud

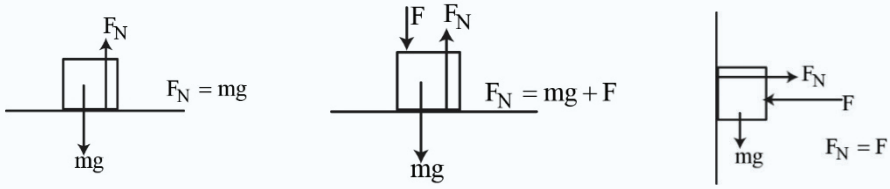
طبق قانون دوم نیوتون:

$$F_{net}=ma \Rightarrow F_N-mg=ma \Rightarrow ۱۶=m(۲) \Rightarrow m=۸kg$$

**درسنامه:**

نیروی عمودی سطح

در سطح تماس دو جسم با یک‌دیگر، به علت تغییر شکل دو جسم، نیرویی عمود بر سطح تماس به اجسام وارد می‌شود. این نیرو عمود بر سطح به جسم وارد می‌شود.




| | | |
|---|---|---|
| نیروی عمودی سطح در آسانسور | اگر شتاب آسانسور به بالا باشد، یعنی حرکت تندشونده به بالا یا کندشونده روبه پایین | $F_N=m(g+a)$ |
| | اگر شتاب آسانسور به پایین باشد، یعنی حرکت تندشونده به پایین یا کندشونده به بالا | $F_N=m(g-a)$ |

**تست‌درتست** **شخصی به جرم ۶۰kg درون آسانسور روی ترازوی فنری قرار دارد. در حالت اول آسانسور با شتاب ثابت ۲a رو به پایین شروع به حرکت می‌کند. اختلاف عددی که ترازوی فنری در این حالت نشان می‌دهد، ۲۷۰N است. a چند متر بر مربع ثانیه است؟ $(g=۱۰\frac{m}{s^۲})$** (ریاضی خارج ۱۴۰۰)

۱) ۳ ۲) ۲ ۳) $\frac{۳}{۲}$ ۴) $\frac{۳}{۴}$

**پاسخ: گزینه ۳**

**۱۲. فنری سبک به طول ۴۰cm و ثابت $۴\frac{N}{cm}$ از سقف یک آسانسور آویزان است. وزنه‌ای به جرم m را به فنر وصل می‌کنیم تا وزنه به تعادل برسد. اگر آسانسور با شتاب پایین‌سوی $۲\frac{m}{s^۲}$ شروع به حرکت کند، طول فنر ۳cm تغییر می‌کند. آسانسور با چه شتابی حرکت کند تا طول فنر به ۴۴cm برسد؟ $(g=۱۰\frac{m}{s^۲})$**

۱) $\frac{۲}{۳}\vec{j}$ ۲) $-\frac{۲}{۳}\vec{j}$ ۳) $-\frac{۲۲}{۳}\vec{j}$ ۴) $+\frac{۲۲}{۳}\vec{j}$

**پاسخ: گزینه ۳** متوسط | محاسباتی

در حالت تعادل، نیروی فنر و نیروی وزن به جسم وارد می‌شوند:

$$F_e=W \Rightarrow K\Delta L=mg \Rightarrow ۴(L-۴۰)=۱۰m \quad (I)$$

در حالتی که آسانسور با شتاب $۲\frac{m}{s^۲}$ به پایین حرکت می‌کند:

$$F_T=ma \Rightarrow mg-k\Delta L'=ma \Rightarrow ۱۰m-۴(L'-۴۰)=۲m$$

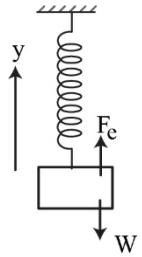
$$\Rightarrow ۴(L'-۴۰)=۸m \quad (II)$$

با کم کردن طرفین دو معادله (I) و (II) داریم:

$$۴(L-L')=۲m \Rightarrow ۴\times۳=۲m \Rightarrow m=۶kg$$

سنجش کلاد
www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshCloud

در حالتی که طول فنر به ۴۴cm می‌رسد، نیروهای وارد بر جسم به شکل مقابل است:




$$F_e - W = ma \Rightarrow K(\Delta x) - mg = ma$$

$$\Rightarrow ۴(۴۴-۴۰) - ۶۰ = ۶a \Rightarrow -۴۴ = ۶a \Rightarrow a = -\frac{۲۲}{۳}\frac{m}{s^۲}$$

و بردار شتاب به شکل مقابل بیان می‌شود:

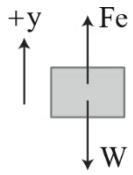
$$\vec{a} = -\frac{۲۲}{۳}\frac{m}{s^۲}\vec{j}$$

**روش دوم:** بین تغییرات طول فنر و تغییرات نیروی فنر رابطه مقابل برقرار است:

$$\Delta F = k\Delta L \Rightarrow \Delta F = ۴\times ۳ = ۱۲N$$

$$\Rightarrow ۱۲ = ma \Rightarrow ۱۲ = m\times ۲ \Rightarrow m = ۶kg$$

در حالی‌که طول فنر به ۴۴cm رسیده است.

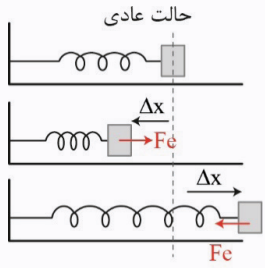



$$F_e - W = ma \Rightarrow k\Delta L - mg = ma$$

$$\Rightarrow ۴(۴) - ۶۰ = ۶a \Rightarrow a = -\frac{۴۴}{۶} = -\frac{۲۲}{۳}\frac{m}{s^۲} \rightarrow \vec{a} = -\frac{۲۲}{۳}\vec{j}$$

## درسنامه:

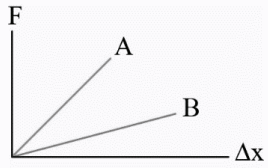
**نیروی کشسانی فنر:** اگر طول فنر نسبت به حالت عادی آن تغییر کند، نیروی کشسانی در فنر برابر است با:




$$F_e = k\Delta x$$

- جهت نیروی فنر مخالف تغییر طول فنر است.

- نمودار نیروی فنر بر حسب تغییر طول آن:




k: شیب خط

**تست‌درتست** وزنه‌ای به جرم m را به یک فنر که ثابت آن $k = ۲۰۰\frac{N}{m}$ و طول آن ۵۰cm است، می‌بندیم و از سقف یک آسانسور ساکن آویزان می‌کنیم. وقتی وزنه ساکن می‌شود، طول فنر به ۶۵cm می‌رسد. آسانسور با چه شتابی بر حسب متر بر مربع ثانیه حرکت می‌کند که طول فنر به ۶۰cm برسد؟ $(g = ۱۰\frac{m}{s^۲})$ (تجربی ۱۴۰۱)

۱) $\vec{a} = -\frac{۱۰}{۳}\vec{j}$ ۲) $\vec{a} = \frac{۱۰}{۳}\vec{j}$ ۳) $\vec{a} = \frac{۲۰}{۳}\vec{j}$ ۴) $\vec{a} = \frac{۲۰}{۳}\vec{j}$

**پاسخ: گزینه ۱**

**۱۳.** حداکثر نیروی کشش قابل تحمل یک طناب بسیار سبک برابر ۲۴N است. با این طناب وزنه‌ای به جرم ۳kg را در راستای قائم چگونه جابه‌جا کنیم تا طناب پاره نشود؟ $(g = ۱۰\frac{m}{s^۲})$

۱) با شتابی بالاسو و حداقل $۲\frac{m}{s^۲}$

۲) با شتابی پایین‌سو و حداقل $۲\frac{m}{s^۲}$

۳) با شتابی بالاسو و حداکثر $۲\frac{m}{s^۲}$

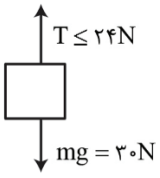
۴) با شتابی پایین‌سو و حداکثر $۲\frac{m}{s^۲}$

**پاسخ: گزینه ۲** متوسط | محاسباتی

سنجش کلاد
www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshCloud

وضعیت نیروهای وارد بر جسم به شکل روبه‌رو است:

پس طبق قانون دوم نیوتون، شتاب حرکت قطعاً به سمت پایین است و گزینه‌های (۱) و (۳) حذف:




$$F_T = ma \Rightarrow mg - T = ma \Rightarrow T = mg - ma \xrightarrow{T \le ۲۴N} mg - ma \le ۲۴$$

$$\Rightarrow ma \ge mg - ۲۴ \Rightarrow ۳a \ge ۳۰ - ۲۴ \Rightarrow a \ge ۲ \frac{m}{s^۲}$$

پس شتاب جسم حداقل بایستی $۲ \frac{m}{s^۲}$ باشد.

---

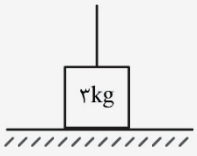
**تست‌درتست** **جسمی به جرم ۵۰kg را می‌خواهیم با طنابی پایین بیاوریم. بیشینهٔ نیروی کششی که طناب می‌تواند تحمل کند، ۴۳۰N است. جسم را در راستای قائم با شتاب چند متر بر مربع ثانیه پایین بیاوریم تا طناب در آستانهٔ پاره شدن باشد؟** $(g = ۹/۸ \frac{m}{s^۲})$ (ریاضی ۱۴۰۴)

۱) ۸/۶ ۲) ۴/۳ ۳) ۲/۴ ۴) ۱/۲

**پاسخ: گزینه ۴**

---

**۱۴. توسط طناب سبکی با نیروی قائم ۴۰N یک وزنهٔ ۳ کیلوگرمی ازسطح زمین در راستای قائم بالا برده می‌شود. طناب ۴/۵ ثانیه پس از جدا شدن وزنه از سطح زمین پاره می‌شود. تندی متوسط وزنه از لحظهٔ جدا شدن آن از سطح زمین تا برگشت دوبارهٔ آن به سطح زمین چند متر بر ثانیه است؟** $(g = ۱۰ \frac{m}{s^۲})$ **و از مقاومت هوا صرف‌نظر شود.)**




۱) ۵

۲) ۷/۵

۳) ۱۰

۴) ۴

**پاسخ: گزینه ۳** سخت | محاسباتی

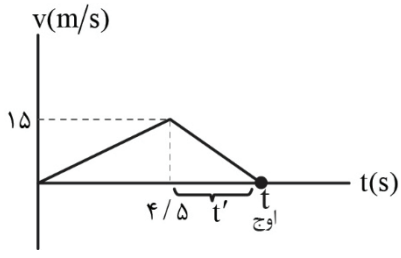
ابتدا شتاب حرکت وزنه را قبل و بعد از قطع نیروی طناب محاسبه می‌کنیم:

قبل از قطع طناب: $F_{net} = ma \Rightarrow T - mg = ma \Rightarrow ۴۰ - ۳۰ = ۳a \Rightarrow a = \frac{۱۰}{۳} \frac{m}{s^۲}$

بعد از قطع طناب: $F_{net} = ma' \Rightarrow -mg = ma' \Rightarrow a' = -g$

به مدت ۴/۵s، وزنه با $a = \frac{۱۰}{۳} \frac{m}{s^۲}$ این شتاب حرکت می‌کند و سپس با حذف نیروی نخ، شتاب حرکت آن برابر $-g$ خواهد شد.

پس نمودار سرعت زمان آن تا لحظه توقف و رسیدن به ارتفاع اوج به شکل زیر است:




$$v = at \Rightarrow v_m = \frac{۱۰}{۳} \times ۴/۵ = ۱۵ \frac{m}{s}$$

پس از حذف نیروی نخ، به مدت $t'$، جعبه رو به بالا حرکت می‌کند که $t'$ برابر است با:

$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t} \Rightarrow -۱۰ = \frac{۰ - ۱۵}{t'} \Rightarrow t' = ۱/۵s \Rightarrow t_{اوج} = ۶s$$

حال حداکثر ارتفاع جعبه نسبت به زمین را به دست می‌آوریم:

$$\Delta x = S = \frac{۱۵ \times ۶}{۲} = ۴۵m$$

در ادامه، متحرک با شتاب $g$ رو به پایین حرکت می‌کند و ۴۵m پایین می‌آید.

سنجش کلاد
www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshCloud

زمان رسیدن به زمین را از معادله زیر به دست می‌آوریم:

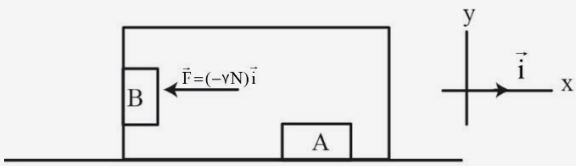
$$\Delta x=\frac{۱}{۲}at^۲ \Rightarrow ۴۵=\frac{۱}{۲}\times ۱۰t^۲ \Rightarrow t=۳s$$

به این ترتیب، جعبه در مدت ۹s، ۴۵ متر به بالا رفته و بازمی‌گردد پس:

$$\ell=۴۵+۴۵=۹۰m \quad , \quad \Delta t_{کل}=۹s$$

$$s_{av}=\frac{\ell}{\Delta t}=\frac{۹۰}{۹}=۱۰\frac{m}{s}$$

**۱۵. دو جسم A و B به جرم‌های $m_A=۰/۸kg$ و $m_B=۱/۲kg$ مطابق شکل درون واگنی که با شتاب ثابت در راستای محور x حال حرکت است، نسبت به واگن ساکن‌اند. اگر بزرگی نیرویی که واگن به جسم B وارد می‌کند برابر ۲۰N باشد، بردار نیروی اصطکاک وارد بر جسم A در SI کدام است؟ $(g=۱۰\frac{m}{s^۲})$**




۱) $+\frac{۲۶}{۳}\vec{i}$

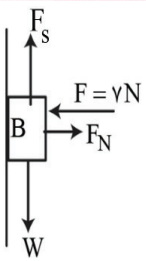
۲) $-\frac{۲۶}{۳}\vec{i}$

۳) $+۶\vec{i}$

۴) $-۶\vec{i}$

**پاسخ: گزینه ۳** متوسط | محاسباتی، مفهومی

نیروهای وارد بر جسم B به شکل مقابل هستند.




چون جسم B نسبت به واگن ساکن است:

$$f_s=W \Rightarrow f_s=mg=۱۲N$$

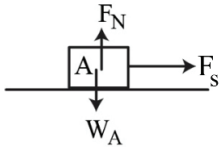
حال به کمک نیروی واگن بر جسم B، $F_N$ وارد بر آن را محاسبه می‌کنیم:

$$R=\sqrt{F_N^۲+f_s^۲} \Rightarrow ۲۰=\sqrt{F_N^۲+۱۲^۲} \Rightarrow F_N=۱۶N$$

به این ترتیب، شتاب حرکت واگن که با شتاب جسم B برابر است محاسبه می‌شود:

$$F_T=ma \Rightarrow F_N-F=m_B a_B \Rightarrow ۱۶-۷=۱/۲a \Rightarrow a=\frac{۹}{۱/۲}=۷/۵\frac{m}{s^۲}$$

جسم A نیز، به علت نیروی اصطکاک وارد بر آن، همراه واگن حرکت می‌کند پس نیروی اصطکاک وارد بر A برابر است با:




$$f_{sA}=m_A a_A \Rightarrow f_{sA}=۰/۸\times ۷/۵=۶N$$

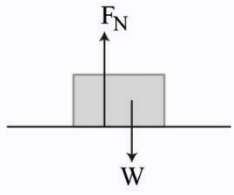
و بردار نیروی اصطکاک وارد بر A به صورت $\vec{f}_s=۶N\vec{i}$ است.

**درسنامه:**

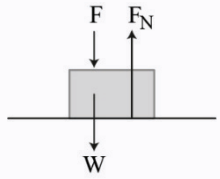
نیروی عمودی سطح $F_N$ :

نیرویی است که در سطح تماس دو جسم و عمود بر سطح تماس به آن‌ها وارد می‌شود.

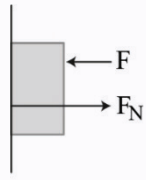
بزرگی $F_N$ با توجه به شرایط مسأله تعیین می‌شود.




$F_N = W$




$F_N = W + F$




$F_N = F$

سنجش کلاد
www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshCloud

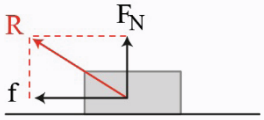
**نیروی اصطکاک ایستایی:** نیروی اصطکاک بین دو جسم که نسبت به هم لغزش ندارند. ($f_s$)
در آستانه حرکت جسم نسبت به سطح، نیروی اصطکاک ایستایی به بیشینه خود می‌رسد.

$$f_{s,max} = \mu_s F_N \rightarrow 0 \le f_s \le \mu_s f_N$$

**نیروی اصطکاک جنبشی:** نیروی اصطکاک بین دو جسم که نسبت به هم می‌لغزند.

$$f_k = \mu_k F_N$$

نیروی سطح: برآیند نیروی اصطکاک و نیروی عمودی سطح:




$$R = \sqrt{F_N^2 + f_{k\text{یا}s}^2}$$

**۱۶. معادله‌ی تکانه-زمان جسمی در SI به صورت $\vec{p} = (t^3 - 2t + 4)\vec{i}$ است. بردار نیروی متوسط خالص وارد بر جسم در دو ثانیه‌ی دوم در SI کدام است؟**

۱) $+26\vec{i}$ ۲) $+52\vec{i}$ ۳) $-26\vec{i}$ ۴) $-52\vec{i}$

**پاسخ: گزینه ۱** ساده | محاسباتی

نیروی خالص وارد بر جسم برابر نسبت تغییرات تکانه به زمان است:

$$F_{av} = \frac{\Delta \vec{p}}{\Delta t}$$

تکانه جسم را در لحظات $t_1 = 2s$ و $t_2 = 4s$ محاسبه می‌کنیم:

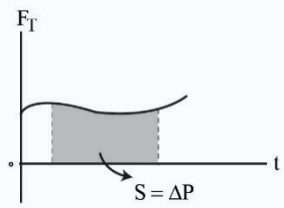
$$\vec{p}_{2s} = (2^3 - 2(2) + 4)\vec{i} = 8\vec{i}$$

$$\vec{p}_{4s} = (4^3 - 2(4) + 4)\vec{i} = 60\vec{i}$$

پس نیروی خالص متوسط برابر است با:

$$\vec{F}_{av} = \frac{\vec{p}_{4s} - \vec{p}_{2s}}{\Delta t} = \frac{60\vec{i} - 8\vec{i}}{2} = 26\vec{i}$$

**درسنامه:**

| تکانه | حاصل‌ضرب جرم در سرعت جسم | $\vec{p} = m\vec{v}$ |
|---|---|---|
| **رابطه تکانه و نیروی خالص** | آهنگ تغییرات تکانه برابر نیروی خالص وارد بر جسم است. | $\vec{F}_{av} = \frac{\Delta \vec{p}}{\Delta t}$ |
| **نمودار نیروی خالص بر حسب زمان** | سطح بین نمودار و محور زمان برابر تغییر تکانه جسم است. |  |



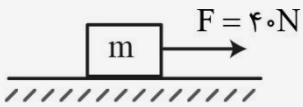
**تست‌درتست** معادلهٔ تکانهٔ متحرکی به جرم ۵۰۰ گرم که روی محور x حرکت می‌کند، در SI به صورت $\vec{p} = (3t - 6)\vec{i}$ است. نیروی خالص متوسطی که در بازهٔ زمانی $t_1 = 1s$ تا $t_2 = 3s$ بر این متحرک وارد می‌شود، بر حسب نیوتون، کدام است؟ (ریاضی ۱۴۰۲)

۱) $3\vec{i}$ ۲) $-3\vec{i}$ ۳) $6\vec{i}$ ۴) $-6\vec{i}$

**پاسخ: گزینه ۱**

سنجش کلاد
www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshCloud

**۱۷.** مطابق شکل جسمی توسط نیروی افقی $F=۴۰N$ روی سطح افقی از حال سکون شروع به حرکت می‌کند. اگر تکانهٔ جسم در لحظهٔ $t=۵s$ برابر $+۴۰\frac{kg.m}{s}\vec{i}$ باشد، بزرگی نیروی اصطکاک جنبشی وارد بر جسم چند نیوتون است؟



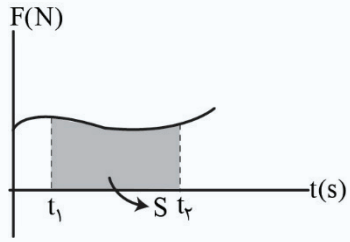

۱) ۲۸
۲) ۳۰
۳) ۳۲
۴) ۳۶

**پاسخ: گزینه ۳** متوسط | محاسباتی

به کمک تغییرات تکانه جسم، می‌توان نیروی خالص وارد بر آن را محاسبه کرد پس:

$$F_T=\frac{\Delta P}{\Delta t} \Rightarrow F-f_k=\frac{\Delta P}{\Delta t} \Rightarrow ۴۰-f_k=\frac{۴۰}{۵} \Rightarrow f_k=۳۲N$$

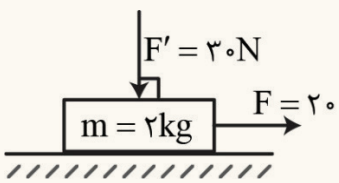
**درسنامه:**

| تکانه | حاصل‌ضرب جرم در سرعت جسم | $\vec{P}=m\vec{v}$ |
|---|---|---|
| تکانه و قانون دوم نیوتون | آهنگ تغییرات تکانه برابر نیروی خالص وارد بر جسم است. | $\vec{F}_T=\frac{\Delta\vec{P}}{\Delta t}$ |
| نمودار نیرو بر حسب زمان | سطح محصور بین نمودار $(F-t)$ و محور زمان برابر تغییرات تکانه جسم است. |  |



$S=\Delta P_{(t_۱-t_۲)}$

**تست‌درتست** در شکل زیر، به جسمی که روی سطح افقی در حال سکون بوده، نیروهایی مطابق شکل وارد می‌شود. اگر ضریب اصطکاک ایستایی و جنبش بین جسم و سطح افقی ۰/۵ و ۰/۳ باشد، تغییر تکانهٔ جسم در مدت ۲ ثانیه چند کیلوگرم متر بر ثانیه است؟ $(g=۱۰N/kg)$ (ریاضی ۹۸)




۱) صفر
۲) ۹
۳) ۱۰
۴) ۲۸

**پاسخ: گزینه ۱**

**۱۸.** شتاب گرانش در چه ارتفاعی از سطح زمین ۳۶ درصد کم‌تر از شتاب گرانشی زمین در سطح زمین است؟ (شعاع زمین ۶۴۰۰km است.)

۱) ۳۲۰۰
۲) $\frac{۱۶۸۰۰}{۳}$
۳) $\frac{۸۴۰۰}{۳}$
۴) ۱۶۰۰

**پاسخ: گزینه ۴** متوسط | محاسباتی

سنجش کلاد
www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshCloud

با توجه به رابطه شتاب گرانشی، نسبت شتاب گرانشی در ارتفاع $h$ را به شتاب گرانشی در سطح زمین می‌نویسیم:

$$g=\frac{GM}{R^2} \Rightarrow \frac{g'}{g}=(\frac{R_e}{R_e+h})^2$$

طبق صورت سوال، $g'$ برابر است با:

$$g'=g-0/36g=0/64g$$

پس:

$$\frac{64}{100}=(\frac{R_e}{R_e+h})^2 \Rightarrow \frac{8}{10}=\frac{R_e}{R_e+h}$$

$$\Rightarrow 4R_e+4h=5R_e \Rightarrow h=\frac{R_e}{4}=\frac{6400}{4}=1600km$$

## درسنامه:

| | | |
|---|---|---|
| **نیروی گرانشی** | نیروی گرانشی بین دو جرم $m_1$ و $m_2$ در فاصله $r$ با حاصل‌ضرب جرم‌ها نسبت مستقیم و با مربع فاصله رابطه عکس دارد. $F=G\frac{m_1m_2}{r^2}$ $G=6/67\times10^{-11}\frac{N.m^2}{kg^2}$ | |
| **شتاب گرانشی** | شتاب گرانشی یک سیاره در نقطه‌ای به فاصلهٔ $r$ از مرکز سیاره: | $g=\frac{GM}{r^2}$ |
| | نسبت شتاب گرانشی در ارتفاع $h$ به شتاب گرانشی سطح سیاره: | $\frac{g'}{g}=(\frac{R}{R+h})^2$ |
| | نسبت شتاب گرانشی دو سیاره در سطح آن‌ها: | $\frac{g_2}{g_1}=\frac{M_2}{M_1}\times(\frac{R_1}{R_2})^2$ |

**تست‌درتست** **در کدام فاصله از سطح زمین، شتاب گرانش در مقایسه با سطح زمین، ۹۹ درصد کاهش می‌یابد؟ ($R_e$ شعاع زمین است.)** (تجربی ۱۴۰۱)

۱) $100R_e$ ۲) $99R_e$ ۳) $10R_e$ ۴) $9R_e$

**پاسخ: گزینه ۴**

**۱۹. نمودار مکان - زمان حرکت هماهنگ ساده‌ی یک آونگ ساده مطابق شکل زیر است. طول نخ آونگ چند سانتی متر است؟** $(g=\pi^2\frac{m}{s^2})$

۱) ۳۶
۲) ۲۰
۳) ۶۴
۴) ۱۶

**پاسخ: گزینه ۱** متوسط | محاسباتی

بازه زمانی معین شده برابر است با:

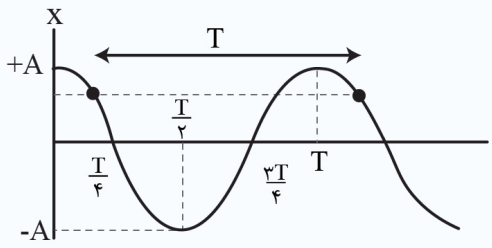
$$\Delta t=1/5T \Rightarrow 1/8=1/5T \Rightarrow T=1/2s$$

www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshCloud

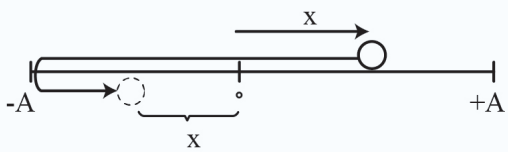
حال به کمک رابطه دوره تناوب آونگ، طول آن را محاسبه می‌کنیم:

$$T=2\pi\sqrt{\frac{L}{g}} \Rightarrow 1/2=2\pi\sqrt{\frac{L}{\pi^2}} \Rightarrow 0/6=\sqrt{L} \Rightarrow L=0/36\,m=36\,cm$$

**درسنامه:**

| | |
|---|---|
| نمودار مکان - زمان نوسانگر هماهنگ ساده |   |

در حرکت هماهنگ ساده، زمان لازم برای این‌که نوسانگر از یک مکان به قرینه آن مکان با یک بار تغییر جهت برسد، برابر $\frac{T}{2}$ است.




| | | |
|---|---|---|
| آونگ ساده | اگر آونگی را کمی از وضع تعادل خارج کنیم، حرکت هماهنگ ساده خواهد داشت. | $T=2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$<br>$f=\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{g}{L}}$<br>$\omega=\sqrt{\frac{g}{L}}$ |

**تست‌درتست** **طول آونگ ساده‌ای را ۱۷ سانتی‌متر تغییر می‌دهیم، دورهٔ آن ۱۲/۵ درصد افزایش می‌یابد. دورهٔ آونگ (قبل از تغییر طول) چند ثانیه است؟ $(g=\pi^2\frac{m}{s^2})$** (ریاضی ۱۴۰۲)

۱) ۱/۲ ۲) ۱/۴ ۳) ۱/۶ ۴) ۱/۸

**پاسخ: گزینه ۳**

**۲۰. معادلهٔ حرکت هماهنگ ساده‌ای در SI به صورت $x=0/02\cos(50\pi t)$ است. در بازهٔ زمانی $t_1=\frac{3}{200}s$ تا $t_2=\frac{49}{400}s$، چند ثانیه بردارهای سرعت و شتاب هردو در خلاف جهت محور x هستند؟**

۱) $\frac{1}{16}$ ۲) $\frac{1}{32}$ ۳) $\frac{9}{400}$ ۴) $\frac{9}{200}$

**پاسخ: گزینه ۳** متوسط | محاسباتی

اگر سرعت و شتاب، هر دو در خلاف جهت محور x باشند، یعنی متحرک در حال حرکت از A+ تا مرکز نوسان است.

به این منظور، ابتدا دوره تناوب متحرک را محاسبه می‌کنیم:

$$\omega=\frac{2\pi}{T} \Rightarrow 50\pi=\frac{2\pi}{T} \Rightarrow T=\frac{1}{25}s=\frac{4}{100}s$$

سپس مکان متحرک را در لحظات $t_1=\frac{3}{200}s$ و $t_2=\frac{49}{400}s$ معین می‌کنیم و با توجه به بازه زمانی، مسیر حرکت نوسانگر را تعیین می‌کنیم:

$$\frac{t_1}{T}=\frac{\frac{3}{200}}{\frac{4}{100}}=\frac{3}{8} \Rightarrow t_1=\frac{3}{8}T$$

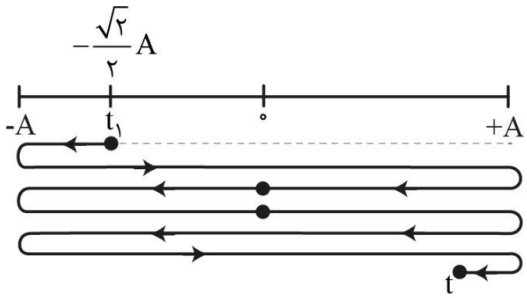
سنجش کلاد
www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshCloud

در این لحظه، متحرک در $x=-\frac{\sqrt{۲}}{۲}A$ قرار دارد و در حال حرکت به سمت $-A$ است و در لحظه $t_۲$ باتوجه به زمان آن برحسب دوره که زیر نوشته شده است، متحرک پس از سه نوسان کامل، در حال حرکت به سمت مرکز نوسان است.

$$x=۰/۰۲\cos(۵۰\pi\times\frac{۳}{۸})\Rightarrow x=-\frac{\sqrt{۲}}{۲}A$$

$$\frac{t_۲}{T}=\frac{\frac{۴۹}{۴۰۰}}{\frac{۴}{۱۰۰}}=\frac{۴۹}{۱۶}T=۳T+\frac{T}{۱۶}$$

پس مسیر حرکت نوسان‌گر در این مدت به شکل زیر است.




در مدت زمان‌های معین شده، شتاب و سرعت در خلاف جهت محور هستند که کل این زمان‌ها برابر است با:

$$\Delta t=\frac{T}{۴}+\frac{T}{۴}+\frac{T}{۱۶}=\frac{۹T}{۱۶}=\frac{۹}{۱۶}\times\frac{۴}{۱۰۰}=\frac{۹}{۴۰۰}s$$

**تست‌درتست** **معادلهٔ مکان - زمان نوسانگر هماهنگ ساده‌ای در SI به صورت $x=۰/۰۳\cos۵\pi t$ است. در کدام بازهٔ زمانی مشخص شده بر حسب ثانیه، بردارهای سرعت و شتاب نوسانگر، هردو در جهت محور x است؟** (ریاضی ۱۴۰۲)

۱) $۰<t<۰/۰۱$ ۲) $۰/۰۱<t<۰/۰۲$ ۳) $۰/۰۲<t<۰/۰۳$ ۴) $۰/۰۳<t<۰/۰۴$

**پاسخ: گزینه ۳**

**۲۱. رابطه‌ی شتاب - مکان نوسانگر هماهنگ ساده‌ای در SI به صورت $a=-۱۰\pi^۲x$ است. اگر تندی متوسط نوسانگر در مدت یک دوره برابر $۱\frac{m}{s}$ باشد، حداقل تندی متوسط نوسانگر در یک بازه‌ی زمانی $\frac{۱}{۳۰}$ ثانیه‌ای چند متر بر ثانیه است؟ $(\sqrt{۲}=۱/۴,\sqrt{۳}=۱/۷)$**

۱) ۰/۹ ۲) ۰/۴۵ ۳) ۰/۷۵ ۴) ۱/۵

**پاسخ: گزینه ۲** سخت | محاسباتی

ابتدا بر اساس رابطه شتاب - مکان دوره تناوب نوسانگر را محاسبه می‌کنیم:

$$a=-\omega^۲x\Rightarrow\omega^۲=۱۰۰\pi^۲\Rightarrow\omega=۱۰\pi\frac{Rad}{s}$$

به این ترتیب:

$$\omega=\frac{۲\pi}{T}\Rightarrow ۱۰\pi=\frac{۲\pi}{T}\Rightarrow T=۰/۲s$$

سپس بر اساس تندی متوسط در یک دوره متناوب، دامنه نوسانات را محاسبه می‌کنیم:

$$s_{av}=\frac{\ell}{T}\Rightarrow ۱=\frac{\ell}{۰/۲}\Rightarrow\ell=۰/۲m$$

در یک دوره تناوب، مسافت طی شده برابر $۴A$ است پس:

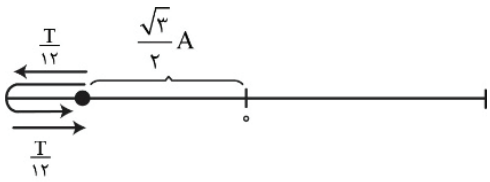
$$۴A=۰/۲\Rightarrow A=۰/۰۵m$$

حداقل تندی متوسط در یک بازه زمانی معین، هنگامی است که بیشترین زمان ممکن را در حوالی انتهای مسیر داشته باشیم. پس $\Delta t=\frac{۱}{۳۰}s$ را به دو قسمت تقسیم می‌کنیم و نصف این زمان را قبل از A و نصف دیگر را بعد از A درنظر می‌گیریم.

$$\frac{\Delta t}{r}=\frac{۱}{۲}\times\frac{۱}{۳۰}=\frac{۱}{۶۰}\rightarrow\frac{\frac{\Delta t}{r}}{T}=\frac{\frac{۱}{۶۰}}{\frac{۲}{۱۰}}=\frac{۱}{۱۲}\Rightarrow\frac{\Delta t}{r}=\frac{T}{۱۲}$$

www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshCloud

که هر کدام معادل $\frac{T}{12}$ هستند. مسافت طی شده در این بازه زمانی برابر است با:




$$\ell = 2\times(A-\frac{\sqrt{3}}{2}A) = 2\times 0/05(1-0/85) = 0/3\times 0/05 = 15\times 10^{-3}\ m$$

و تندی متوسط برابر است با:

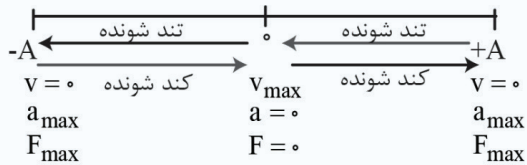
$$s_{av} = \frac{\ell}{\Delta t} = \frac{15\times 10^{-3}}{\frac{1}{30}} = 45\times 10^{-2}\frac{m}{s} = 0/45\frac{m}{s}$$

## درسنامه:

### حرکت هماهنگ ساده

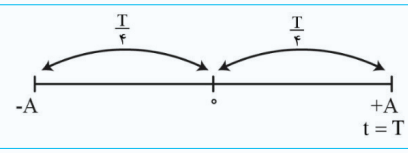
**ویژگی‌ها**

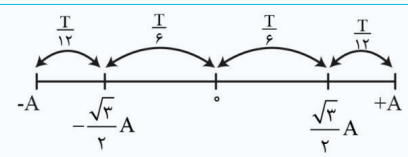
- حرکت رفت و برگشتی روی یک پاره‌خط حول مرکز پاره‌خط
- شتاب و نیروی وارد بر آن متناسب با فاصله از مرکز و به سمت مرکز نوسان است.
- در دو انتهای مسیر سرعت صفر و شتاب و نیرو بیشینه است.
- در مرکز نوسان، تندی بیشینه و شتاب و نیرو صفر است.
- مدت زمان یک نوسان کامل را دوره تناوب $(T)$ می‌نامیم.
- تعداد نوسانات در هر ثانیه را بسامد نوسان $(f)$ می‌گویند.
- حداکثر فاصله نوسانگر از مرکز نوسان، دامنه نوسان $(A)$ است.
- در هر دوره تناوب، نوسانگر مسافتی معادل $L=4A$ طی می‌کند.

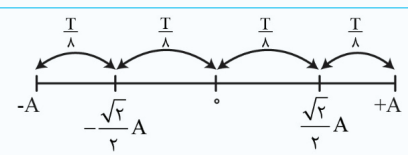


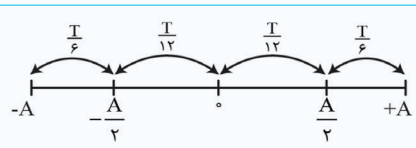

معادله حرکت هماهنگ ساده: $x = A\cos\omega t \quad , \quad \omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f$

زمان چند جابه‌جایی خاص در حرکت هماهنگ ساده




سنجش کلاد
www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshCloud

**تست‌درتست** متحرکی روی محور x حرکت نوسانی ساده انجام می‌دهد و معادلهٔ حرکت آن در SI به صورت $x=۰/۰۶\cos(\frac{۵۰}{۳}\pi t)$ است. بیشترین مقدار سرعت متوسط این نوسانگر در یک بازهٔ زمانی دلخواه ۰/۰۲ ثانیه‌ای، چند متر بر ثانیه است؟

۱) ۰/۳ ۲) ۳ ۳) $۰/۲\sqrt{۳}$ ۴) $۲\sqrt{۳}$

**پاسخ: گزینه ۲**

**۲۲.** فنری به طول ۲۰cm با ثابت $۴\frac{N}{cm}$ از سقف آویزان است. وزنه‌ای به جرم ۱kg به آن آویزان می‌کنیم و وزنه را پایین می‌کشیم تا طول فنر به ۲۹cm برسد، سپس وزنه را رها می‌کنیم. چند ثانیه پس از رها شدن وزنه تندی آن به بیشترین مقدار می‌رسد و بیشینه‌ی تندی وزنه چند متر بر ثانیه است؟ $(g=۱۰\frac{m}{s^۲})$

۱) $\frac{\pi}{۴۰}$ ، ۱/۳ ۲) $\frac{\pi}{۲۰}$ ، ۱/۳ ۳) $\frac{\pi}{۴۰}$ ، ۲/۶ ۴) $\frac{\pi}{۲۰}$ ، ۲/۶

**پاسخ: گزینه ۱** متوسط | محاسباتی

هنگامی‌که وزنه به مرکز نوسان می‌رسد، تندی آن بیشینه است.

زمان لازم برای حرکت از انتهای مسیر تا مرکز نوسان برابر $\frac{T}{۴}$ است پس ابتدا دوره تناوب نوسانات فنر را به دست می‌آوریم:

$$k=۴\frac{N}{cm}=۴۰۰\frac{N}{m}$$

$$T=۲\pi\sqrt{\frac{m}{k}} \Rightarrow T=۲\pi\sqrt{\frac{۱}{۴۰۰}}=\frac{۲\pi}{۲۰}=\frac{\pi}{۱۰}s$$

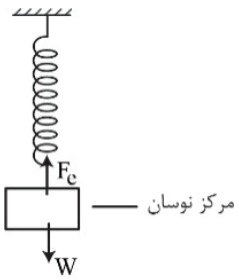
پس زمان لازم برای رسیدن به تندی بیشینه برابر است با:

$$\Delta t=\frac{T}{۴}=\frac{\pi}{۴۰}s$$

برای محاسبه تندی بیشینه به دامنه $(A)$ و بسامد زاویه‌ای $\omega$ نیاز داریم.

دامنه برابر حداکثر فاصله جسم تا مرکز نوسان است.

در مرکز نوسان، نیروی خالص وارد بر وزنه برابر صفر است. تغییر طول فنر از طول آزادش را تا رسیدن به نقطهٔ تعادل به دست می‌آوریم:




$$F_e=W \Rightarrow kx=mg \Rightarrow ۴x=۱۰ \Rightarrow x=\frac{۱۰}{۴}=۲/۵cm$$

در مرکز نوسان طول فنر برابر $L=۲۲/۵cm$ است و در انتهای مسیر طول فنر برابر $L'=۲۹cm$ به این ترتیب دامنه حرکت برابر است با:

$$A=۲۹-۲۲/۵=۶/۵cm=۶/۵\times۱۰^{-۲}\,m$$

و بیشینه تندی جسم برابر است با:

$$v_{max}=A\omega=۶/۵\times۱۰^{-۲}\times\frac{۲\pi}{\frac{\pi}{۱۰}}=۱/۳\frac{m}{s}$$

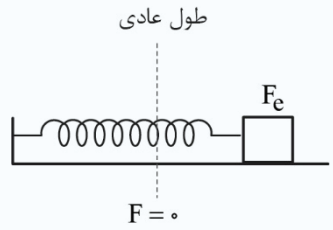
**درسنامه:**

**نوسان جرم - فنر**

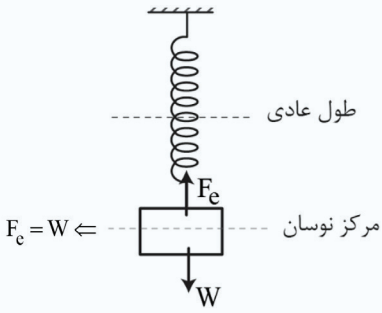
| دوره تناوب | بسامد | بسامد زاویه‌ای |
|---|---|---|
| $T=۲\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$ | $f=\frac{۱}{۲\pi}\sqrt{\frac{k}{m}}$ | $w=\sqrt{\frac{k}{m}}$ |

سنجش کلاد
www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshCloud

اگر فنر در سطح افقی بدون اصطکاک به نوسان درآید، مرکز نوسان همان طول عادی فنر است.




اگر فنر را راستای قائم نوسان کند، مرکز نوسان نقطه‌ای است که وزن جسم با نیروی فنر برابر شود.




تندی بیشینه نوسانگر یا تندی نوسانگر در مرکز نوسان برابر است با:

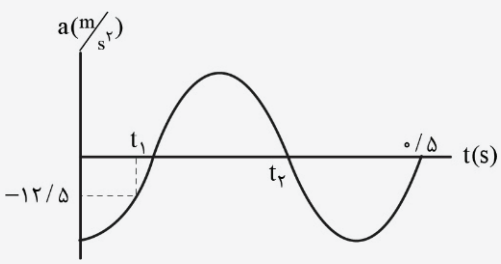
$$v_{max}=A\omega$$

**تست‌درتست** **نوسانگری روی پاره‌خطی، به طول ۸cm روی سطح افقی بدون اصطکاک، حرکت هماهنگ ساده انجام می‌دهد. اگر در لحظه‌ای که فاصلهٔ نوسانگر از نقطهٔ تعادل برابر ۲cm است، بزرگی شتاب برابر $\frac{\pi^2}{2}(\frac{m}{s^2})$ باشد، تندی نوسانگر در لحظهٔ عبور از نقطهٔ تعادل چند متر بر ثانیه است؟** (تجربی ۱۴۰۲)

۱) $\frac{\pi}{10}$ ۲) $\frac{\pi}{5}$ ۳) $10\pi$ ۴) $20\pi$

**پاسخ: گزینه ۲**

**۲۳.** **نمودار شتاب - زمان نوسانگری که روی پاره‌خطی منطبق بر محور x به طول ۲۰cm حرکت هماهنگ ساده انجام می‌دهد به صورت زیر است. سرعت متوسط نوسانگر در بازهٔ زمانی $t_1$ تا $t_2$ چند متر بر ثانیه است؟ $(\pi^2=10)$**




۱) $+\frac{3}{7}$

۲) $+\frac{3}{14}$

۳) $-\frac{3}{8}$

۴) $-\frac{3}{14}$

**پاسخ: گزینه ۴** متوسط | محاسباتی

دامنه حرکت متحرک برابر نصف طول پاره‌خط است:

$$A=\frac{L}{2}=\frac{20}{2}=10\,cm$$

دوره تناوب متحرک را نیز به کمک اعداد روی نمودار محاسبه می‌کنیم:

$$\frac{5}{4}T=0/5 \Rightarrow T=0/4\,s$$

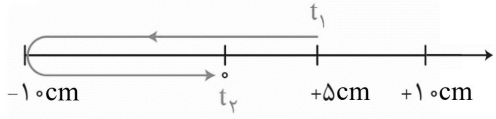
و بسامد زاویه‌ای آن برابر است با:

$$\omega=\frac{2\pi}{T}=\frac{2\pi}{0/4}=5\pi\,\frac{Rad}{s}$$

حال مکان متحرک را در لحظه $t_1$ به دست می‌آوریم:

$$a=-\omega^2 x \Rightarrow -12/5=-(5\pi)^2 x \Rightarrow x=\frac{12/5}{250}=\frac{1}{20}m=0/05m=5cm$$

پس در لحظه $t_1$، متحرک در $x=5cm$ است و در لحظه $t_2$، برای دومین بار در $x=0$ قرار دارد. پس مسیر حرکت نوسانگر به صورت زیر است:




www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshCloud

پس بازه زمانی $\Delta t = t_2 - t_1$ برابر است با:

$$\Delta t = \frac{T}{2} + \frac{T}{12} = \frac{7T}{12} = \frac{7}{12} \times \frac{4}{10} = \frac{7}{30} s$$

جابه‌جایی جسم برابر است با:

$$\Delta x = x_2 - x_1 = 0 - 5 = -5 cm = -0/05 m$$

به این ترتیب، سرعت متوسط برابر است با:

$$v_{av} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{-\frac{5}{100}}{\frac{7}{30}} = -\frac{15}{70} = -\frac{3}{14} \frac{m}{s}$$

**۲۴. وزنه‌ای به انتهای یک فنر بسته شده است و روی سطح افقی بدون اصطکاک حرکت هماهنگ ساده انجام می‌دهد. اگر در یک لحظه انرژی‌های جنبشی و پتانسیل مجموعه به ترتیب ۲J و ۲/۵J باشد و نوسانگر در هر دوره مسافت ۲۰cm را طی کند، ثابت فنر چند نیوتون بر سانتی‌متر است؟**

۱) ۹ ۲) ۲۴ ۳) ۳۶ ۴) ۴۵

**پاسخ: گزینه ۳** متوسط | محاسباتی

انرژی مکانیکی جسم برابر است با:

$$E = K + U \Rightarrow E = 2 + 2/5 = 4/5 J$$

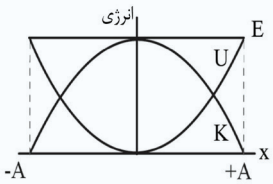
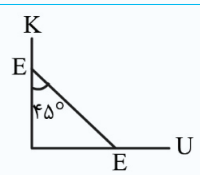
با توجه به این‌که در هر دوره، مسافت طی شده برابر $4A$ است:

$$20 = 4A \Rightarrow A = 5 cm = 5 \times 10^{-2} m$$

به این ترتیب، به کمک رابطه انرژی مکانیکی، ثابت فنر محاسبه می‌شود:

$$E = \frac{1}{2} k A^2 \Rightarrow 4/5 = \frac{1}{2} k \times (5 \times 10^{-2})^2 \Rightarrow k = \frac{9}{25 \times 10^{-4}} = \frac{36}{100} \times 10^4 \frac{N}{m} = 36 \frac{N}{cm}$$

**درسنامه:**

| انرژی نوسانگر | |
|---|---|
| انرژی مکانیکی نوسانگر ساده | مجموع انرژی‌های جنبشی و پتانسیل نوسانگر $E = K + U = \frac{1}{2} k A^2$ |
| نمودار انرژی بر حسب مکان |   |
| نمودار انرژی جنبشی بر حسب پتانسیل |   |

**۲۵. یک نوسانگر وزنه و فنر با دامنه‌ی A حرکت هماهنگ ساده انجام می‌دهد. اگر جرم وزنه‌ی متصل به فنر را ۴ برابر کنیم و با دامنه‌ی ۳A به نوسان دربیاوریم، کدام موارد زیر درست است؟**

**الف: بیشینه‌ی انرژی پتانسیل نوسانگر، ۹ برابر می‌شود.**

**ب: دوره‌ی نوسان، ۶ برابر می‌شود.**

**پ: بیشینه‌ی تندی نوسانگر، ۳ برابر می‌شود.**

**ت: اندازهٔ بیشینه‌ی شتاب نوسانگر، $\frac{3}{4}$ برابر می‌شود.**

۱) الف و پ ۲) ب و ت ۳) الف و ت ۴) ب و پ

**پاسخ: گزینه ۳** متوسط | مفهومی

www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshCloud

**جملات را بررسی کنیم:**

**جمله (الف):** درست است. با سه برابر شدن دامنه، طبق رابطه $E=\frac{1}{2}kA^2$، انرژی مکانیکی ۹ برابر می‌شود. پس حداکثر انرژی پتانسیل و حداکثر انرژی جنبشی نوسانگر نیز ۹ برابر می‌شوند.

**جمله (ب):** نادرست است. دوره تناوب نوسانگر جرم - فنر از رابطه $T=2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$ محاسبه می‌شود. با ۴ برابر شدن جرم وزنه، دوره تناوب آن دو برابر می‌شود.

$$\frac{T_2}{T_1}=\sqrt{\frac{m_2}{m_1}}=\sqrt{4}=2$$

جمله (پ) نادرست است.

اگر از رابطه $v_{max}=A\omega$ کمک بگیریم، چون دوره تناوب ۲ برابر و دامنه ۳ برابر شده است، پس:

$$\frac{v'_{max}}{v_{max}}=\frac{A'}{A}\times\frac{\omega'}{\omega}=\frac{A'}{A}\times\frac{T}{T'}=3\times\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$$

جمله (ت) درست است.

حداکثر شتاب نوسانگر برابر است با $a_{max}=A\omega^2$ و $\omega^2=\frac{k}{m}$.

پس:

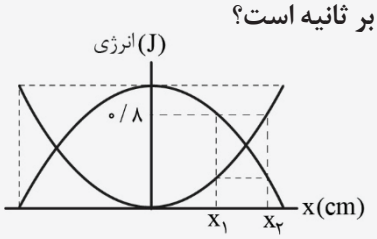
$$\frac{a'_{max}}{a_{max}}=(\frac{\omega'}{\omega})^2\times\frac{A'}{A}=\frac{m}{m'}\times\frac{A'}{A}=\frac{1}{4}\times3=\frac{3}{4}$$

**تست‌درتست** **وزنهٔ m به فنری بسته شده است و این سیستم با دامنهٔ A حرکت هماهنگ ساده انجام می‌دهد و انرژی مکانیکی آن ۸J است. اگر وزنهٔ $\frac{m}{2}$ را به همان فنر ببندیم و با همان دامنهٔ A به نوسان درآوریم، انرژی مکانیکی این سیستم چند ژول می‌شود؟** (ریاضی ۱۴۰۳)

۱) ۴ ۲) ۸ ۳) $2\sqrt{2}$ ۴) $4\sqrt{2}$

**پاسخ: گزینه ۲**

**۲۶. نمودار انرژی‌های پتانسیل و جنبشی نوسانگر هماهنگ ساده‌ای به جرم ۱۰۰g بر حسب مکان مطابق شکل زیر است. اگر اختلاف تندی نوسانگر در دو مکان $x_1$ و $x_2$ برابر $2\frac{m}{s}$ باشد، بیشینهٔ تندی نوسانگر چند متر بر ثانیه است؟**




۱) $\sqrt{5}$
۲) $2\sqrt{5}$
۳) ۶
۴) ۱۲

**پاسخ: گزینه ۲** متوسط | محاسباتی

در مکان $x_0$، انرژی جنبشی نوسانگر برابر ۰/۸J است. پس تندی آن را محاسبه می‌کنیم:

$$K=\frac{1}{2}mv^2\Rightarrow\frac{8}{10}=\frac{1}{2}\times\frac{1}{10}v_1^2\Rightarrow v_1^2=16\Rightarrow v_1=4\frac{m}{s}$$

با توجه به این‌که در مکان $x_2$، تندی نوسانگر کم‌تر است، تندی در مکان $x_2$ برابر است با:

$$v_2=v_1-2=2\frac{m}{s}$$

انرژی جنبشی نوسانگر در مکان $x_2$ برابر است با:

$$K_2=\frac{1}{2}mv_2^2=\frac{1}{2}\times\frac{1}{10}\times2^2=\frac{2}{10}J$$

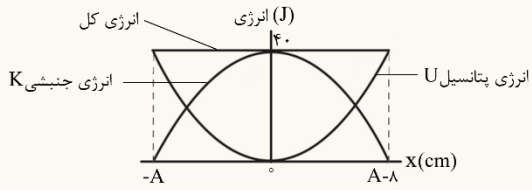
با توجه به این‌که حداکثر انرژی جنبشی، برابر انرژی مکانیکی است، تندی بیشینه را محاسبه می‌کنیم:

$$E=U_2+K_2\xrightarrow{U_2=k_2}E=0/8+0/2=1J$$

$$\Rightarrow K_{max}=1J\Rightarrow\frac{1}{2}\times\frac{1}{10}\times v_m^2=1\Rightarrow v_m=\sqrt{20}=2\sqrt{5}\frac{m}{s}$$

سنجش کلاد
www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshCloud

**تست‌درتست** نمودار تغییرات انرژی پتانسیل و انرژی جنبشی یک نوسان‌کننده به جرم ۵۰۰ گرم که در راستای محور x حرکت هماهنگ ساده انجام می‌دهد، به صورت شکل زیر است. بسامد نوسان چند هرتز است؟ $(\pi=\sqrt{10})$ (ریاضی ۹۸)




۱) ۵۰
۲) ۴۰
۳) ۲۵
۴) ۱۰

**پاسخ: گزینه ۳**

**۲۷.** گلوله‌ای از ارتفاع h از حال سکون رها می‌شود. اگر تندی متوسط گلوله در ۳ ثانیهٔ آخر حرکت آن تا رسیدن به سطح زمین $40\frac{m}{s}$ باشد، تندی متوسط گلوله در ۵۰ متر پایانی مسیر تا رسیدن به سطح زمین چند متر بر ثانیه است؟ ($g=10\frac{m}{s^2}$ و از مقاومت هوا صرف‌نظر کنید.)

۱) ۴۵
۲) ۵۰
۳) ۵۵
۴) ۶۰

**پاسخ: گزینه ۲** متوسط | محاسباتی

اگر زمان سقوط را T در نظر بگیریم، تندی جسم در لحظه رسیدن به زمین و سه ثانیه قبل از برخورد به زمین برابر است با:

$$|v|=gt \Rightarrow |v_T|=10T \ , \ |v_{(T-3)}|=10(T-3)$$

تندی متوسط گلوله، با سرعت متوسط آن در این بازه زمانی هم‌اندازه است پس:

$$|v_{av}|=\frac{|v_1|+|v_2|}{2} \Rightarrow 40=\frac{10T+10T+30}{2} \Rightarrow 20T-30=80 \Rightarrow T=5/5s$$

حالا تندی گلوله را در لحظه برخورد به زمین محاسبه می‌کنیم:

$$|v|=gt \Rightarrow v_2=10\times5/5=55\frac{m}{s}$$

برای محاسبه تندی گلوله، ۵۰m قبل برخورد به زمین نیز از رابطه مستقل از زمان استفاده می‌کنیم:

$$v_2^2-v_1^2=-2g\Delta y \Rightarrow 55^2-v_1^2=-2\times10\times(-50)$$

$$\Rightarrow v_1^2=55^2-50(20)=3025-1000=2025 \Rightarrow |v_1|=\sqrt{2025}=45\frac{m}{s}$$

در پایان تندی متوسط در مدت طی مسافت ۵۰m پایانی تا رسیدن به سطح زمین را به دست می‌آوریم:

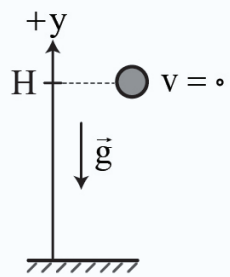
$$s_{av}=|v_{av}|=\frac{45+55}{2}=50\frac{m}{s}$$

**درسنامه:**

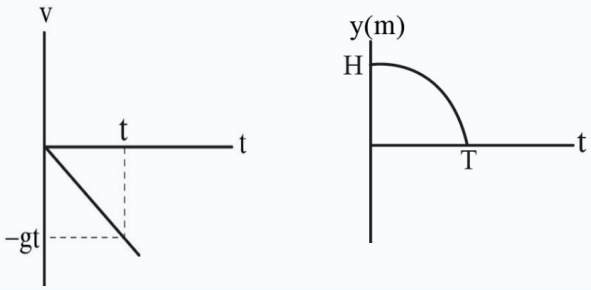
**سقوط آزاد**

**جسمی که در شرایط خلأ از ارتفاع معینی رها می‌شود، با شتاب ثابت g سقوط می‌کند.**

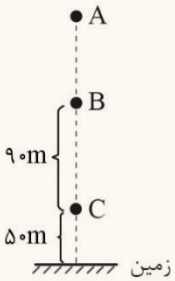
| | |
|---|---|
| معادله مکان - زمان | $y=-\frac{1}{2}gt^2+H$ <br> $\Delta y=-\frac{1}{2}gt^2$ |
| معادله سرعت - زمان | $v=-gt$ |
| معادله مستقل از زمان نسبت به لحظه رها شدن جسم | $v^2=-2g\Delta h$ |
| سرعت متوسط بین دو لحظه $t_1$ و $t_2$ | $v_{av}=\frac{v_1+v_2}{2}$ |




سنجش کلاد
www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshCloud

| | |
|---|---|
| نمودارهای حرکت‌شناسی |   |

**تست‌درتست** گلوله‌ای در شرایط خلأ، از نقطه **A** رها می‌شود و ۳ ثانیه طول می‌کشد تا فاصلهٔ بین دو نقطهٔ **B** و **C** را طی کند. گلوله ۳ ثانیه قبل از رسیدن به زمین، از ارتفاع چند متری عبور می‌کند؟ $(g=10\frac{m}{s^2})$ (ریاضی ۱۴۰۲)




۱) ۴۵

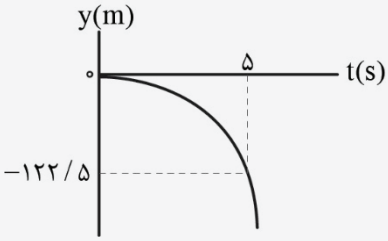
۲) ۹۰

۳) ۱۲۰

۴) ۱۵۰

**پاسخ: گزینه ۳** متوسط | محاسباتی

**۲۸.** نمودار مکان - زمان سقوط گلوله‌ای از بالای ساختمانی از حال سکون به صورت شکل زیر است. بزرگی شتاب گرانش در محل سقوط گلوله چند متر بر مربع ثانیه است؟ (از مقاومت هوا صرف‌نظر شود.)




۱) ۹/۸

۲) ۹/۹

۳) ۱۰

۴) ۹/۷

**پاسخ: گزینه ۱** ساده | محاسباتی

طبق نمودار، گلوله ۱۲۲/۵ متر را در مدت ۵s سقوط کرده است پس:

$$\Delta y=-\frac{1}{2}gt^2 \Rightarrow -122/5=-\frac{1}{2}\times g\times 5^2 \Rightarrow g=\frac{122/5}{12/5}=\frac{245}{25}=9/8\frac{m}{s^2}$$

**۲۹.** دو ماهوارهٔ **A** و **B** با تندی‌های $v_A=v$ و $v_B=2v$ حول کرهٔ زمین در مدارهای دایره‌ای در حال گردش هستند. اگر وزن ماهواره‌ها باهم برابر باشد، جرم ماهوارهٔ **A** چند برابر جرم ماهوارهٔ **B** است؟

۱) $\frac{1}{16}$ ۲) $\frac{1}{4}$ ۳) ۴ ۴) ۱۶

**پاسخ: گزینه ۴** متوسط | محاسباتی

به کمک رابطه تندی حرکت ماهواره، نسبت فاصله آن‌ها را از مرکز زمین به دست می‌آوریم:

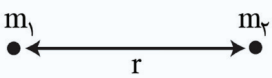
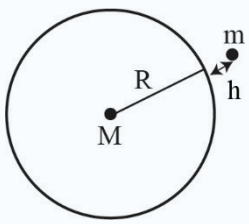
$$\frac{v_B}{v_A}=\sqrt{\frac{r_A}{r_B}} \Rightarrow 2=\sqrt{\frac{r_A}{r_B}} \Rightarrow r_A=4r_B$$

حال نسبت جرم ماهواره‌ها را به دست می‌آوریم:

$$W_A=W_B \Rightarrow \frac{GMm_A}{r_A^2}=\frac{GMm_B}{r_B^2} \Rightarrow \frac{m_A}{m_B}=(\frac{r_A}{r_B})^2=4^2=16$$

سنجش کلاد
www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshCloud

## درسنامه:

| | | |
|---|---|---|
| **نیروی گرانشی** | نیروی گرانشی و حرکت ماهواره‌ها<br>نیروی گرانشی بین دو جرم $m_1$ و $m_2$ که در فاصله $r$ از هم قرار دارند، متناسب با حاصل‌ضرب جرم‌ها و مجذور فاصله آن‌ها است. | $F_g = \frac{Gm_1m_2}{r^2}$<br>$G = 6/67\times10^{-11}\ \frac{N.m^2}{kg^2}$<br>  |
| **نیروی وزن** | نیروی گرانشی که یک سیاره به اجسام نزدیک سطح سیاره وارد می‌کند، وزن جسم نام دارد. | نزدیک سطح سیاره $W = \frac{GMm}{R^2}$<br>دور از سطح : $W = \frac{GMm}{(R+h)^2}$<br>  |
| **شتاب گرانشی** | نسبت وزن جسم به جرم آن شتاب گرانشی در محل جسم نام دارد. | در سطح سیاره : $g = \frac{GM}{R^2}$<br>فاصله دور : $g' = \frac{GM}{(R+h)^2}$ |
| **حرکت ماهواره در ارتفاع h** | • ماهواره‌ها حرکت دایره‌ای یکنواخت دارند و نیروی مرکزگرای آن‌ها همان نیروی وزن آن‌هاست. | $m\frac{v^2}{R+h} = \frac{GMm}{(R+h)^2}$<br>$\Rightarrow v = \sqrt{\frac{GM}{R+h}}$ |
| | • مربع دوره حرکت ماهواره با مکعب فاصله آن از مرکز زمین (شعاع چرخش) متناسب است. | $T^2 \propto r^3$ |

**تست‌درتست** دو ماهواره **A** و **B**، هریک به جرم **m** به دور زمین می‌چرخند. فاصله ماهواره **A** تا سطح زمین $R_e$ و فاصله ماهواره **B** تا سطح زمین $R_e$ است. بزرگی تکانهٔ ماهواره **A** چند برابر بزرگی تکانهٔ ماهواره **B** است؟ ($R_e$ شعاع کره زمین است.)

۱) $\sqrt{2}$ ۲) $\sqrt{3}$ ۳) ۲ ۴) ۳

**پاسخ: گزینه ۱**

**۳۰.** متحرکی با تندی ثابت $20\frac{m}{s}$ روی محیط دایره‌ای به شعاع ۲۰m حرکت می‌کند. بزرگی شتاب متوسط متحرک در یک بازهٔ زمانی ۱/۵ ثانیه‌ای چند برابر بزرگی شتاب مرکزگرای متحرک است؟

۱) $\frac{2\sqrt{2}}{3}$ ۲) $\frac{\sqrt{2}}{3}$ ۳) ۱ ۴) ؟

**پاسخ: گزینه ۱** متوسط | محاسباتی

شتاب مرکزگرای متحرک برابر است با:

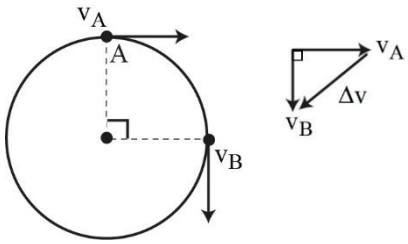
$$a_c = \frac{v^2}{R} = \frac{20^2}{20} = 20\frac{m}{s^2}$$

سنجش کلاد
www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshCloud

دوره تناوب حرکت برابر است با:

$$T=\frac{۲\pi R}{v}=\frac{۲\times ۳\times ۲۰}{۲۰}=۶s$$

در یک بازه زمانی $۱/۵s$، بردار سرعت متحرک $۹۰^\circ$ تغییر جهت می‌دهد:




$$\Delta v=\sqrt{v_A^۲+v_B^۲}=\sqrt{۲۰^۲+۲۰^۲}=۲۰\sqrt{۲}\,\frac{m}{s}$$

به این ترتیب شتاب متوسط برابر است با:

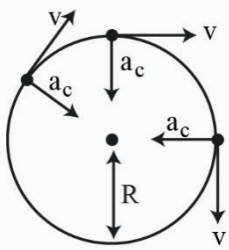
$$a_{av}=\frac{\Delta v}{\Delta t}=\frac{۲۰\sqrt{۲}}{۱/۵}\,\frac{m}{s^۲}$$

و نسبت شتاب متوسط به شتاب مرکزگرا را به دست می‌آوریم:

$$\frac{a_{av}}{a_c}=\frac{\frac{۲۰\sqrt{۲}}{۱/۵}}{۲۰}=\frac{\sqrt{۲}}{۱/۵}=\frac{۲\sqrt{۲}}{۳}$$

## درسنامه:

| | |
|---|---|
| **حرکت دایره‌ای یکنواخت** | حرکتی با تندی ثابت در مسیری دایره‌ای به شعاع $R$ است.<br>حرکت دایره‌ای یکنواخت، یک حرکت شتابدار است. |
| **دوره تناوب $(T)$** | مدت زمان یک دور کامل:<br>$T=\frac{۲\pi R}{v}$ |
| **شتاب مرکزگرا** | شتاب حرکت در هر لحظه به سمت مرکز دایره مسیر است.<br>$a_c=\frac{v^۲}{R}=\frac{۴\pi^۲ R}{T^۲}$ |
| **نیروی مرکزگرا** | برآیند نیروهای در راستای شعاع مسیر که به سمت مرکز دایره است.<br>$F_c=\frac{mv^۲}{R}$ |




**تست‌درتست** متحرکی با تندی ثابت $v=۱۰\pi\,\frac{m}{s}$ روی دایره‌ای به شعاع ۲۰ متر حرکت می‌کند. شتاب متوسط این متحرک در هر ثانیه چند برابر شتاب مرکزگرای آن است؟ (ریاضی ۱۴۰۰)

۱) $\frac{۲\sqrt{۲}}{\pi}$ ۲) $\frac{۵}{\pi}$ ۳) $۵\sqrt{۲}$ ۴) $\sqrt{۲}$

**پاسخ: گزینه ۱** متوسط | محاسباتی

سنجش کلاد
www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshCloud

# پاسخنامه دفترچه ۲ آزمون مرحله ۷

## شیمی دوازدهم | ۹ بهمن‌ماه ۱۴۰۴

**۳۱. کدام‌یک از مطالب زیر در ارتباط با اوره و اتیلن گلیکول نادرست است؟**

۱) گروه عاملی اکسیژن‌دار موجود در اتیلن گلیکول، در ساختار مولکول‌های سازندهٔ عسل نیز وجود دارد.

۲) هر دو ترکیب از طریق تشکیل پیوندهای هیدروژنی در آّب حل می‌شوند.

۳) ترتیب «اتیلن گلیکول > اوره > آب» را می‌توان به نقطهٔ انجماد این ترکیب‌ها نسبت داد.

۴) نسبت شمار جفت الکترون‌های پیوندی به شمار جفت الکترون‌های ناپیوندی در اتیلن گلیکول، بزرگ‌تر از همین نسبت در اوره است.

**پاسخ: گزینه ۳** ساده | مفهومی

اتیلن گلیکول به عنوان ضد یخ کاربرد دارد، بنابراین نسبت به آب نقطهٔ انجماد پایین‌تری خواهد داشت. $(-OH)$

**بررسی سایر گزینه‌ها:**

۱ اتیلن گلیکول یک الکل دوعاملی بوده و دارای دو گروه عاملی هیدروکسیل $(-OH)$ است. عسل نیز حاوی مولکول‌های قطبی است که در ساختار خود شمار قابل توجهی گروه هیدروکسیل $(-OH)$ دارند.

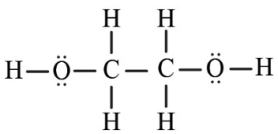
اتیلن گلیکول: $HO-CH_2-CH_2-OH$

۲ در ساختار مولکول‌های اتیلن گلیکول و اوره به ترتیب پیوندهای $O-H$ و $N-H$ دیده می‌شود، از این‌رو هر ترکیب توانایی برقراری پیوند هیدروژنی با مولکول‌های خود و با مولکول‌های آب را دارند و از این طریق در آّب حل می‌شوند.

**ترکیب** مولکول‌هایی که در ساختار آن‌ها اتم هیدروژن به یکی از اتم‌های نیتروژن، اکسیژن و یا فلوئور متصل باشد، توانایی برقراری پیوند هیدروژنی با مولکول‌های خود و با مولکول‌های آب را دارند و به این صورت در آب حل می‌شوند.

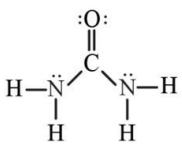
۳ ساختار مولکول‌های اتیلن گلیکول و اوره به صورت زیر است:

اتیلن گلیکول:



$\rightarrow \frac{\text{شمار جفت الکترون‌های پیوندی}}{\text{شمار جفت الکترون‌های ناپیوندی}} = \frac{۹}{۴} = ۲/۲۵$

اوره:



$\rightarrow \frac{\text{شمار جفت الکترون‌های پیوندی}}{\text{شمار جفت الکترون‌های ناپیوندی}} = \frac{۸}{۴} = ۲$

به این ترتیب، نسبت موردنظر در اتیلن گلیکول، بزرگ‌تر از اوره است.

**جمع‌بندی:**

| نام ماده | فرمول شیمیایی | قطبیت | نیروی بین‌مولکولی غالب | محلول در آب یا هگزان |
|---|---|---|---|---|
| اتیلن گلیکول (ضد یخ) | $C_2H_4(OH)_2$ | قطبی | هیدروژنی | آب |
| نمک خوراکی | $NaCl$ | - | یون - دوقطبی | آب |
| بنزین | $C_8H_{18}$ | ناقطبی | واندروالسی | هگزان |
| اوره | $CO(NH_2)_2$ | قطبی | هیدروژنی | آب |
| روغن زیتون | $C_{57}H_{104}O_6$ | ناقطبی | واندروالسی | هگزان |
| وازلین | $C_{25}H_{52}$ | ناقطبی | واندروالسی | هگزان |

سنجش کلاد
www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshCloud

**۳۲. کدام مورد نادرست است؟**

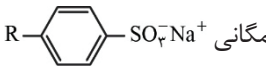
۱) در اثر واکنش جوش‌شیرین با اسید معده، سه نوع فراورده تولید می‌شود.

۲) برای تهیهٔ پاک‌کنندهٔ غیرصابونی، به مواد اولیه در صنایع پتروشیمی، بنزن و مقداری چربی حیوانی نیاز است.

۳) یکی از فراورده‌های واکنش محلول لوله‌بازکن با اسید چرب، خاصیت پاک‌کنندگی دارد.

۴) اگر مخلوطی نور را پخش کند، می‌توان نتیجه گرفت که آن مخلوط ناهمگن است.

**پاسخ: گزینه ۲** ساده | حفظی

شیمی‌دان‌ها از بنزن و دیگر مواد اولیه در صنایع پتروشیمی طی واکنش‌های پیچیده مواد پاک‌کننده‌ای با فرمول همگانی  تولید کردند که به پاک‌کننده‌های غیرصابونی مشهور هستند. برای تهیهٔ پاک‌کننده‌های غیرصابونی به چربی حیوانی نیاز نیست.

**بررسی سایر گزینه‌ها:**

۱ معادلهٔ واکنش جوش شیرین ($NaHCO_3$) و اسید معده ($HCl$) به صورت زیر است:

$$NaHCO_3(aq) + HCl(aq) \rightarrow NaCl(aq) + CO_2(g) + H_2O(l)$$

مطابق معادلهٔ بالا، در این واکنش سه نوع فراورده تولید می‌شود.

۳ برای باز کردن مسیر لوله‌ای که با مخلوطی از اسیدهای چرب مسدود شده است، می‌توان از محلول غلیظ سدیم هیدروکسید ($NaOH$) استفاده کرد. معادلهٔ کلی این واکنش به صورت زیر است:

$$RCOOH(s) + NaOH(aq) \rightarrow RCOONa(aq) + H_2O(l)$$

فراوردهٔ چنین واکنش‌هایی، خود نوعی پاک‌کننده است که در آب حل می‌شود و می‌تواند چربی‌های اضافی را بزداید.

۴ سوسپانسیون‌ها و کلوئیدها نوعی از مخلوط‌ها هستند که نور را پخش می‌کنند. هر دو این مخلوط‌ها ناهمگن به حساب می‌آیند.

**جمع‌بندی:** مقایسهٔ ویژگی انواع مخلوط‌ها:

| ویژگی / نوع مخلوط | سوسپانسیون | کلوئید | محلول |
|---|---|---|---|
| **رفتار در برابر نور** | نور را پخش می‌کند | نور را پخش می‌کند | نور را پخش نمی‌کند (عبور می‌دهد) |
| **همگن بودن** | ناهمگن | ناهمگن | همگن |
| **پایداری** | ناپایدار / ته‌نشین می‌شود | پایدار / ته‌نشین نمی‌شود | پایدار / ته‌نشین نمی‌شود |
| **ذره‌های سازنده** | ذره‌های ریز ماده | توده‌های مولکولی و یونی | یون‌ها یا مولکول‌ها |
| **شفاف بودن** | غیرشفاف (کدر یا مات) | غیرشفاف (کدر یا مات) | شفاف |

**۳۳. در صابونی که زنجیرهیدروکربنی آن شامل ۱۷ اتم کربن است، حداکثر درصد جرمی هیدروژن به تقریب کدام است؟**

$$(H=1, C=12, N=14, O=16, Na=23, K=39 : g.mol^{-1})$$

۱) ۱۱/۹۵ ۲) ۱۲/۹۵ ۳) ۱۳/۹۵ ۴) ۱۴/۹۵

**پاسخ: گزینه ۲** ساده | محاسباتی

**سرنخ** حداکثر درصد جرمی هیدروژن، هنگامی است که صابون سیرشده و زنجیری باشد و بیشترین تعداد هیدروژن را داشته باشد.

**گام اول:** فرمول کلی صابون موردنظر باید به صورت $RCOONH_4$ باشد، برای به دست آوردن حداکثر درصد جرمی هیدروژن گروه R باید سیرشده باشد، بنابراین فرمول صابون به صورت $C_nH_{2n+1}COONH_4$ است. با توجه به این‌که زنجیر هیدروکربنی این صابون ۱۷ کربن دارد، فرمول آن به صورت $C_{17}H_{35}COONH_4$ خواهد بود.

سنجش کلاد
www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshCloud

**گام دوم:** درصد جرمی اتم هیدروژن را در صابون با فرمول $C_{۱۷}H_{۳۵}COONH_۴$ محاسبه می‌کنیم:

$$\text{درصد جرمی H}=\frac{\text{جرم H}}{\text{جرم صابون}}\times ۱۰۰=\frac{۳۹}{۳۰۱}\times ۱۰۰\simeq ۱۲/۹۵٪$$

$$\left.\begin{array}{l}\text{جرم اتم‌های هیدروژن}=۳۵+۴=۳۹\,g\\ \text{جرم مولی صابون}=\underbrace{(۱۸\times ۱۲)}_{C}+\underbrace{(۳۹\times ۱)}_{H}+\underbrace{(۲\times ۱۶)}_{O}+\underbrace{(۱\times ۱۴)}_{N}=۳۰۱\,g\end{array}\right\}$$

**جمع‌بندی:**

| | | |
|---|---|---|
| انواع پاک‌کننده‌ها | صابونی | جامد ← (فرمول کلی) $RCOONa$ |
| | | مایع ← (فرمول کلی) $RCOOK$ یا $RCOONH_۴$ |
| | غیرصابونی ← (فرمول کلی) | $R-C_۶H_۴-SO_۳Na$ یا $RC_۶H_۴SO_۳Na$ |
| | خورنده ← (مانند) | سدیم هیدروکسید $(NaOH)$، هیدروکلریک اسید $(HCl)$ و ... |

**کنکورچی‌میگه؟** **با توجه به مطالب کتاب درسی، اگر اتم‌های هیدروژن حلقهٔ بنزنی در یک پاک‌کنندهٔ دارای ۱۸ اتم کربن و با زنجیر هیدروکربنی سیرشده، با گروه متیل جایگزین شود، جرم مولی آن، به تقریب چند درصد افزایش می‌یابد؟** (کنکور تجربی نوبت دوم ۱۴۰۳)

**$(H=۱, C=۱۲, O=۱۶, Na=۲۳: g.mol^{-۱})$**

۱) ۱۲ ۲) ۱۶ ۳) ۱۸ ۴) ۳۴

**پاسخ: گزینه ۲**

**۳۴. کدام مطلب در ارتباط با مدل آرنیوس درست است؟**

۱) این مدل در نتیجهٔ پژوهش‌های علمی آرنیوس در زمینهٔ بررسی pH انواع محلول‌ها ارائه شد.

۲) هر کدام از ترکیب‌هایی که جزو اسید یا باز آرنیوس محسوب می‌شوند، در ساختار خود اتم هیدروژن یا یون هیدروکسید دارند.

۳) هر کدام از ترکیب‌هایی که اسید آرنیوس در نظر گرفته می‌شوند، در آب یونش یافته و غلظت یون هیدرونیوم را افزایش می‌دهند.

۴) با ارائه این مدل، شیمی‌دان‌ها پی‌بردند که اسیدها و بازها با یکدیگر واکنش می‌دهند.

**پاسخ: گزینه ۳** ساده | حفظی

اسید آرنیوس به ماده‌ای گفته می‌شود که پس از حل شدن و یونش در آب، غلظت یون هیدرونیوم $(H_۳O^+)$ را افزایش می‌دهد. در مقابل، باز آرنیوس ماده‌ای است که با حل شدن در آب غلظت یون هیدروکسید $(OH^-)$ را زیاد می‌کند.

**بررسی سایر گزینه‌ها:**

۱ سوانت آرنیوس بر روی رسانایی الکتریکی (نه pH) محلول‌های آبی کار می‌کرد و نخستین کسی بود که توانست اسیدها و بازها را بر یک مبنای علمی توصیف کند.

۲ این گزینه در رابطه با همهٔ اسیدها و بازهای آرنیوس درست نیست. به‌طور مثال گاز گوگرد تری‌اکسید $(SO_۳)$ یک اسید آرنیوس محسوب می‌شود، در حالی‌که در ساختار خود اتم هیدروژن ندارد، همچنین آمونیاک $(NH_۳)$ یک باز آرنیوس بوده و یک ترکیب مولکولی است که در ساختار خود یون هیدروکسید $(OH^-)$ ندارد.

۴ واکنش میان اسیدها و بازها ارتباطی به مدل آرنیوس ندارد.

سنجش کلاد
www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshCloud

**جمع‌بندی:**

| | | |
|---|---|---|
| مدل آرنیوس | قبل از ارائه مدل آرنیوس، ویژگی‌های اسیدها و بازها و برخی واکنش‌های آن‌ها شناخته شده بود. | |
| | یافته‌های تجربی آرنیوس نشان داد که محلول اسیدها و بازها رسانایی الکتریسیته هستند اما رسانایی آن‌ها یکسان نیست. | |
| | اسید و باز آرنیوس | اسید: ماده‌ای که در آب حل می‌شود و غلظت یون هیدرونیوم $(H_3O^+)$ را افزایش می‌دهد. مانند $SO_3$، $N_2O_5$ و ... |
| | | باز: ماده‌ای که در آب حل می‌شود و غلظت یون هیدروکسید $(OH^-)$ را افزایش می‌دهد. مانند $NaOH$، $NH_3$ و ... |

**۳۵. ثابت یونش اسید $HBrO_3$ برابر با $10^{-4}$ است. pH محلول ۰/۲ مولار این اسید، به تقریب، چند برابر pH محلول هیدروکلریک اسید با غلظت $0/365 g.L^{-1}$ است؟ $(H=1, Cl=35/5 : g.mol^{-1})$**

۱) ۰/۷۰ ۲) ۰/۶۰ ۳) ۰/۴۵ ۴) ۰/۳۵

**پاسخ: گزینه ۴** متوسط | محاسباتی

**سرنخ** هر دو اسید $HBrO_3$ و $HCl$ قوی هستند، بنابراین در آن‌ها غلظت اولیه محلول تقریباً با غلظت یون $H^+$ حاصل از یونش برابر است.

**گام اول:** با توجه به ثابت یونش $(K_a)$ اسید $HBrO_3$، می‌فهمیم که این اسید یک اسید قوی است و $[H^+]$ در محلول آن به تقریب با غلظت اولیه محلول برابر است. بنابراین داریم:

$$[H^+]=[HBrO_3]=0/2\,mol.L^{-1}$$

$$\rightarrow pH=-\log[H^+]=-\log 2\times 10^{-1}=1-0/3=0/7$$

**گام دوم:** غلظت مولی محلول هیدروکلریک اسید $(HCl)$ که یک اسید قوی است را به دست آورده و pH محلول آن را محاسبه می‌کنیم:

$$\text{غلظت مولی محلول HCl}=0/365 g.L^{-1}\times\frac{1 mol\,HCl}{36/5 g\,HCl}=0/01 mol.L^{-1}\rightarrow[H^+]=[HCl]=0/01 mol$$

$$\rightarrow pH=-\log 10^{-2}=2$$

**گام سوم:** در نهایت نسبت pH دو محلول را به دست می‌آوریم:

$$\frac{\text{pH محلول } HBrO_3}{\text{pH محلول HCl}}=\frac{0/7}{2}=0/35$$

**۳۶. کدام مطالب در ارتباط با آمونیاک درست است؟**

**آ) مطابق مدل آرنیوس، آمونیاک باز بوده و رسانایی الکتریکی محلول ۰/۱ مولار آن بیشتر از محلول ۰/۱ مولار اتیلن گلیکول است.**

**ب) از انحلال هر مول آمونیاک در آب، دو مول یون تولید می‌شود.**

**پ) معادلهٔ واکنش یونش آمونیاک در آب، از نوع برگشت‌پذیر است.**

**ت) یکی از کاربردهای آمونیاک، تولید محلول شیشه پاک‌کن است که در محلولی از آن با $pH=10/7$، نسبت غلظت مولی یون هیدروکسید به غلظت مولی هیدرونیوم برابر $2/5\times 10^5$ است.**

۱) آ، ب ۲) آ، پ ۳) پ، ت ۴) ب، ت

**پاسخ: گزینه ۲** متوسط | مفهومی

عبارت‌های (آ) و (پ) درست هستند.

**بررسی همهٔ عبارت‌ها:**

آ) آمونیاک یک باز آرنیوس محسوب شده زیرا با حل شدن در آب غلظت یون هیدروکسید را افزایش می‌دهد. آمونیاک یک باز ضعیف بوده و به

سنجش کلاد
www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshCloud

مقدار جزئی یونش می‌یابد و به‌طور عمده به صورت مولکولی حل می‌شود. اما اتیلن گلیکول کاملاً به صورت مولکولی در آب حل شده و در محلول آن هیچ یونی دیده نمی‌شود، از این‌رو رسانایی الکتریکی محلول ۰/۱ مولار آمونیاک از محلول ۰/۱ مولار اتیلن گلیکول بیشتر است.

**نکته**

| | |
|---|---|
| **انواع مواد** | الکترولیت قوی: اسید و باز قوی + نمک‌ها $(\alpha \simeq 1)$ ← مثل $HCl$ ، $NaOH$ ، $NaCl$ و ... |
| | الکترولیت ضعیف: اسید و باز ضعیف $(0 < \alpha < 1)$ ← مثل $HF$ ، $HNO_2$ ، $NH_3$ ، اسیدهای آلی... |
| | غیرالکترولیت: کاملاً به صورت مولکولی در آب حل شده و یون تولید نمی‌کنند ← مثل شکر، اتانول، اتیلن گلیکول و ... |

ب آمونیاک یک باز ضعیف به حساب می‌آید و به صورت جزئی یونش پیدا کرده و یون تولید می‌کند. بنابراین از انحلال یک مول از آن کم‌تر از یک مول یون تولید خواهد شد.

پ آمونیاک یک باز ضعیف بوده و معادلهٔ واکنش یونش آن در آب تعادلی و برگشت‌پذیر است:

$$NH_3(g) + H_2O(l) \rightleftharpoons NH_4^+(aq) + OH^-(aq)$$

ت محلول شیشه‌پاک‌کن با استفاده از آمونیاک تهیه می‌شود و pH آن برابر ۱۰/۷ است. نسبت غلظت مولی یون هیدروکسید به یون هیدرونیوم را در این محلول به دست می‌آوریم:

$$[H^+] = 10^{-pH} = 10^{-10/7} = 10^{0/3} \times 10^{-11} = 2 \times 10^{-11}\ mol.L^{-1}$$

$$[H^+][OH^-] = 10^{-14} \rightarrow 2 \times 10^{-11}[OH^-] = 10^{-14} \rightarrow [OH^-] = 5 \times 10^{-4}\ mol.L^{-1}$$

$$\Rightarrow \frac{[OH^-]}{[H^+]} = \frac{5 \times 10^{-4}}{2 \times 10^{-11}} = 2/5 \times 10^{7}$$

**آفرود** pH شماری از محیط‌ها را که در کتاب درسی ذکر شده بهتر است که به یاد داشته باشید:

| | |
|---|---|
| آب دریاچه‌های اسیدی: ۴/۵ | پرتقال: ۲/۳ |
| دهان: ۷/۱ – ۵/۲ | خون: ۷/۴ |
| معده در زمان فعالیت: ۱/۵ | معده در زمان استراحت: ۷/۳ |
| روده: ۸/۵ | شیشه‌پاک‌کن: ۱۰/۷ |

**۳۷. افزایش کربن دی‌اکسید در آب دریا باعث سفیدشدگی و مرگ مرجان‌ها می‌شود. علت اصلی کاهش رشد و تخریب اسکلت‌های آهکی مرجان‌ها که از کلسیم‌کربنات تشکیل شده است، چیست؟**

۱) $CO_2$ باعث واکنش مستقیم با کلسیم موجود در اسکلت مرجان‌ها می‌شود.

۲) $CO_2$ موجب افزایش غلظت یون هیدرونیوم و کاهش غلظت یون کربنات می‌شود.

۳) $CO_2$ باعث گرم شدن آب و در نتیجه افزایش شدید pH آب می‌شود.

۴) $CO_2$ موجب افزایش فشار اسمزی آب شده و آب از سلول‌های مرجان‌ها خارج می‌شود.

**پاسخ: گزینه ۲** ساده | مفهومی

مرجان‌ها گروهی از کیسه‌تنان هستند که با افزایش مقدار کربن دی‌اکسید محلول در آب از بین می‌روند. زیرا با حل شدن $CO_2$ در آب دریا، خاصیت اسیدی آب افزایش می‌یابد. در واقع با حل شدن $CO_2$ در آب و انجام واکنش شیمیایی، کربونیک اسید $(H_2CO_3)$ تولید می‌شود. یون $H^+$ باقی‌مانده با یون کربنات $(CO_3^{2-})$ واکنش می‌دهد و غلظت یون کربنات کاهش می‌یابد. با کمبود یون کربنات، مرجان‌ها نمی‌توانند کلسیم کربنات $(CaCO_3)$ که اساس اسکلت آن‌ها است را تولید کنند و بدین ترتیب اسکلت آن‌ها سست شده و می‌میرند.

سنجش کلاد
www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshCloud

**۳۸. در دمای $25^\circ C$، مقدار pH دو محلول اسید ضعیف HA برابر با ۳/۱ و ۲/۴ است. اگر غلظت مولی محلول اول ۰/۱ مولار باشد، غلظت مولی محلول دوم چند مولار است؟**

۱) ۳/۲۰ ۲) ۱/۲۵ ۳) ۲/۵۰ ۴) ۱/۶۰

**پاسخ: گزینه ۳** متوسط | محاسباتی

**استراتژی** دراین نوع سوالات که اطلاعات یک نوع اسید در شرایط مختلف و دمای ثابت داده شده است، ابتدا ثابت یونش ($K_a$) اسید را به دست آورده و سپس با توجه به شرایط محلول‌های دیگر مورد مجهول را محاسبه کنید.

**گام اول:** با توجه به pH و غلظت مولی محلول اول، ثابت یونش ($K_a$) اسید HA را در دمای $25^\circ C$ به دست می‌آوریم:

$$[H^+]=10^{-pH}=10^{-3/1}=10^{-4}\times(10^{0/3})^3=8\times10^{-4}\,mol.L^{-1} \Rightarrow [H^+]=[A^-]=8\times10^{-4}\,mol.L^{-1}$$

$$K_a=\frac{[H^+]\times[A^-]}{[HA]}=\frac{(8\times10^{-4})^2}{10^{-1}}=64\times10^{-7}\,mol.L^{-1}$$

**آفرود** برای محاسبه ثابت یونش ($K_a$) یک اسید علاوه بر رابطهٔ گفته شده در کتاب درسی می‌توان از روابط زیر نیز استفاده کرد:

$$K_a=\frac{[H^+]\times[A^-]}{[HA]_{\text{تعادلی}}}\begin{cases}\xrightarrow{\text{اگر }[H^+]\text{و غلظت اولیه اسید (M) را داشتیم}} K_a=\dfrac{[H^+]^2}{M-[H^+]} \xrightarrow{\text{اسید خیلی ضعیف}} K_a=\dfrac{[H^+]^2}{M} \\ \xrightarrow{\text{اگر }\alpha\text{ و M را داشتیم}} K_a=\dfrac{M.\alpha^2}{1-\alpha} \xrightarrow{\text{اسید خیلی ضعیف}} K_a=M.\alpha^2 \\ \xrightarrow{\text{اگر }[H^+]\text{ و }\alpha\text{ را داشتیم}} K_a=\dfrac{[H^+]\times\alpha}{1-\alpha} \xrightarrow{\text{اسید خیلی ضعیف}} K_a=[H^+].\alpha\end{cases}$$

**توجه:** اسید خیلی ضعیف به اسیدی گفته می‌شود که در آن حداقل یکی از دو شرط $\alpha<0/05$ و یا $\frac{K_a}{M}<0/0025$ برقرار باشد.

بنابراین طبق توضیحات بالا، ثابت یونش ($K_a$) اسید HA را از رابطهٔ زیر نیز می‌توان به دست آورد:

$$K_a=\frac{[H^+]^2}{M}=\frac{(8\times10^{-4})^2}{10^{-1}}=64\times10^{-7}\,mol.L^{-1}$$

**گام دوم:** با توجه به این‌که دما ثابت است، ثابت یونش ($K_a$) در محلول دوم نیز برابر $64\times10^{-7}$ است، بنابراین خواهیم داشت:

$$[H^+]=10^{-pH}=10^{-2/4}=(10^{0/3})^2\times10^{-3}=4\times10^{-3}\,mol.L^{-1}$$

$$K_a=\frac{[H^+]^2}{M} \Rightarrow 64\times10^{-7}=\frac{(4\times10^{-3})^2}{M} \rightarrow M=2/5\,mol.L^{-1}$$

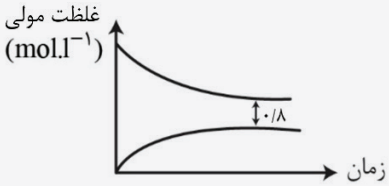
**کنکورچی‌میگه؟** **در دمای ثابت، درصد یونش اسید HA، نصف درصد یونش اسید HX با pH برابر ۴/۳ و غلظت آغازین $2\times10^{-4}$ مولار است. اگر ثابت یونش HA برابر $4\times10^{-5}$ باشد، غلظت مولی آغازین HA کدام است؟** (کنکور تجربی خارج از کشور ۱۴۰۲)

۱) $1/96\times10^{-3}$ ۲) $2/24\times10^{-3}$ ۳) $2/56\times10^{-3}$ ۴) $6/40\times10^{-3}$

**پاسخ: گزینه ۲**

سنجش کلاد
www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshCloud

**۳۹. نمودار مقابل مربوط به یونش اسید ضعیف HX در محلول آبی است. اگر pH این محلول برابر ۱/۰ باشد، درجهٔ یونش اسید در شرایط آزمایش کدام است؟**




۱) ۲۵

۲) ۳۳/۳

۳) ۵۰

۴) ۶۶/۷

**پاسخ: گزینه ۲** متوسط | محاسباتی

**سرنخ** ابتدا با توجه به pH محلول و نمودار داده شده، غلظت اولیه اسید HX را به دست می‌آوریم و سپس درصد یونش اسید را در شرایط آزمایش محاسبه می‌کنیم.

**گام اول:** معادلهٔ واکنش یونش اسید ضعیف HX در آب به صورت زیر است:

$$HX(aq) \rightleftharpoons H^+(aq) + X^-(aq)$$

**گام دوم:** با توجه به pH محلول غلظت یون $H^+$ را به دست می‌آوریم:

$$[H^+] = ۱۰^{-pH} = ۱۰^{-۰/۱} = ۱۰^{-۱} \times ۱۰^{۰/۹} = ۱۰^{-۱} \times \underbrace{(۱۰^{۰/۳})}_{۲}{}^{۳} = ۰/۸\ mol.L^{-۱}$$

**گام سوم:** اگر غلظت اولیه محلول را M و مقدار تغییر غلظت هریک از گونه‌ها را x مول بر لیتر فرض کنیم، خواهیم داشت:

| گونه | HX | $H^+$ | $X^-$ |
|---|---|---|---|
| غلظت اولیه | M | ۰ | ۰ |
| مقدار تغییر غلظت | −x | +x | +x |
| غلظت تعادلی | M−x | x | x |

**گام چهارم:** با توجه به نمودار تفاوت غلظت هریک از یون‌ها ($H^+$ یا $X^-$) و غلظت تعادلی اسید HX برابر ۰/۸ است، بنابراین خواهیم داشت:

$$(\text{غلظت تعادلی } HX) - (\text{غلظت } H^+ \text{ یا } X^-) = ۰/۸\ mol.L^{-۱} \Rightarrow (M-x)-(x) = M-۲x = ۰/۸$$

$$\xrightarrow{[H^+]=x=۰/۸\ mol.L^{-۱}} M - ۱/۶ = ۰/۸ \Rightarrow M = ۲/۴\ mol.L^{-۱}$$

**گام پنجم:** با توجه به این‌که مقدار غلظت اولیه محلول برابر ۲/۴ و غلظت یون $H^+$ برابر ۰/۸ است، درصد یونش اسید برابر است با:

$$٪\alpha = \frac{[H^+]}{M} \times ۱۰۰ = \frac{۰/۸}{۲/۴} \times ۱۰۰ = ۳۳/۳٪$$

**کنکورچی‌میگه؟** **با توجه به داده‌های جدول و برای حجم معینی از دو محلول، غلظت مولکول‌ها در محلول (I)، چند برابر مجموع غلظت یون‌ها در محلول (II) است؟** (کنکور ریاضی نوبت اول ۱۴۰۴)

| | محلول اسیدی | غلظت (مولار) | α (درصد یونش) |
|---|---|---|---|
| I | HF | ۰/۲ | ۲/۴ |
| II | HCOOH | ۰/۱ | ۲ |

۱) ۴۸/۸

۲) ۲۴/۴

۳) ۹۷/۶

۴) ۱۲/۲

**پاسخ: گزینه ۱**

سنجش کلاد
www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshCloud

**۴۰. کدام مطلب در ارتباط با واکنش خنثی شدن اسیدها و بازها، درست است؟**

**آ) معادلهٔ واکنش خنثی شدن را می‌توان به صورت $H^+(aq)+OH^-(aq) \rightleftharpoons H_2O(l)$ نمایش داد.**

**ب) این واکنش مبنایی برای کاربرد پاک‌کننده‌های غیرصابونی در زدودن چربی‌ها است.**

**پ) در واکنش خنثی شدن محلول جوهرنمک با محلول سود سوزآور، یون‌های کلرید و سدیم، دست‌نخورده باقی می‌مانند.**

**ت) برای خنثی شدن هر مول اسید قوی تک‌پروتون‌دار، به یک مول باز قوی تک‌ظرفیتی نیاز است.**

۱) آ، پ ۲) پ، ت ۳) ب، ت ۴) آ، ت

**پاسخ: گزینه ۲** ساده | حفظی

عبارت‌های (پ) و (ت) درست هستند.

**بررسی همهٔ عبارت‌ها:**

آ معادلهٔ واکنش خنثی شدن اسید و باز را می‌توان به صورت $H^+(aq)+OH^-(aq) \rightarrow H_2O(l)$ نشان داد.

**تله‌تستی** دقت کنید که معادلهٔ واکنش خنثی شدن اسید و باز به صورت **یک‌طرفه و برگشت‌ناپذیر** است.

ب واکنش خنثی شدن اسید و باز مبنایی برای کاربرد شوینده‌ها و پاک‌کننده‌های **خورنده** مثل هیدروکلریک اسید $(HCl)$، سدیم هیدروکسید $(NaOH)$ و ... است.

**نکته** پاک‌کننده‌های صابونی و غیرصابونی بر اساس برهم‌کنش میان ذره‌ها عمل می‌کنند در حالی که پاک‌کننده‌های خورنده علاوه بر برهم‌کنش بین ذره‌ای، با آلاینده‌ها واکنش نیز می‌دهند.

پ معادلهٔ واکنش میان محلول‌های هیدروکلریک اسید و سدیم هیدروکسید به صورت زیر است:

$$HCl(aq)+NaOH(aq) \rightarrow NaCl(aq)+H_2O(l)$$

با دقت در معادله درمی‌یابیم که یون‌های هیدرونیوم در واکنش با یون‌های هیدروکسید به مولکول‌های آب تبدیل می‌شوند در حالی‌که یون‌های $Na^+(aq)$ و $Cl^-(aq)$ دست‌نخورده باقی می‌مانند و به اصطلاح یون‌های ناظر هستند.

ت معادلهٔ واکنش خنثی شدن فرضی اسید قوی تک‌پروتون‌دار $HA$ و باز قوی تک‌ظرفیتی $BOH$ به صورت زیر است:

$$HA(aq)+BOH(aq) \rightarrow BA(aq)+H_2O(l)$$

مطابق معادلهٔ این واکنش برای خنثی شدن هر مول اسید به یک مول باز نیاز است.

**۴۱. اگر ۴۰ میلی‌لیتر محلول هیدروبرمیک اسید با $pH=2/50$ با ۳۰ میلی‌لیتر محلول نیتریک اسید ۰/۰۰۲۰ مولار و ۲۰ میلی‌لیتر محلول سود سوزآور با $pH=12$ مخلوط شود، pH محلول حاصل کدام است؟ (از تغییر حجم چشم‌پوشی کنید.) $(\log 3 \simeq 0/5)$**

۱) ۱۱/۷ ۲) ۱۱/۳ ۳) ۱۰/۷ ۴) ۱۰/۳

**پاسخ: گزینه ۴** سخت | محاسباتی

**سرنخ** ابتدا مقدار مول هریک از اسیدها و باز را به دست می‌آوریم. سپس محاسبه می‌کنیم که از کدام‌یک اضافی می‌ماند و در نهایت با توجه به حجم محلول نهایی و مقدار مول باقی‌مانده، غلظت یون‌های $H^+$ یا $OH^-$ را حساب می‌کنیم و pH را به دست می‌آوریم.

**گام اول:** مقدار مول هریک از ترکیب‌های $HBr$، $HNO_3$ و $NaOH$ را به دست می‌آوریم:

$$HBr: [H^+]=10^{-pH}=10^{-2/5}=3\times10^{-3}\ mol.L^{-1} \rightarrow [H^+]=[HBr] \rightarrow HBr\ \text{مول}=3\times10^{-3}\ mol.L^{-1}\times4\times10^{-2}\ L=12\times10^{-5}\ mol$$

$$HNO_3: HNO_3\ \text{مول}=2\times10^{-3}\ mol.L^{-1}\times3\times10^{-2}\ L=6\times10^{-5}\ mol$$

$$NaOH: [H^+]=10^{-12}\ mol.L^{-1} \rightarrow 10^{-12}\times[OH^-]=10^{-14} \rightarrow [OH^-]=[NaOH]=10^{-2}\ mol.L^{-1}$$

$$NaOH\ \text{مول}=10^{-2}\ mol.L^{-1}\times2\times10^{-2}\ L=2\times10^{-4}\ mol$$

سنجش کلاد
www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshCloud

**گام دوم:** اسیدها و باز داه شده همگی قوی و تک‌ظرفیتی هستند، بنابراین طبق معادلهٔ زیر با یک‌دیگر واکنش می‌دهند:

$$NaOH(aq)+\underbrace{HA(aq)}_{\text{مجموع دو اسید HBr و } HNO_3}\rightarrow NaA(aq)+H_2O(l)$$

در مجموع $18\times10^{-5}$ مول اسید داریم که $18\times10^{-5}$ مول از NaOH را خنثی کرده و در نهایت $2\times10^{-4}-18\times10^{-5}=2\times10^{-5}$ مول از NaOH باقی می‌ماند. بنابراین محلول نهایی خاصیت بازی خواهد داشت و pH آن بزرگ‌تر از ۷ است.

**گام سوم:** با توجه به مقدار باقی‌مانده از NaOH، pH محلول نهایی را به دست می‌آوریم:

$$\text{حجم محلول نهایی}=40+30+20=90mL\times\frac{1L}{1000mL}=0/09L$$

$$[NaOH]_{\text{نهایی}}=[OH^-]=\frac{2\times10^{-5}\,mol}{9\times10^{-2}\,L}=\frac{2}{9}\times10^{-3}\,mol.L^{-1}$$

$$[H^+]\times[OH^-]=10^{-14}\rightarrow[H^+]\times\frac{2}{9}\times10^{-3}=10^{-14}\rightarrow[H^+]=\frac{9}{2}\times10^{-11}mol.L^{-1}$$

$$pH=-\log[H^+]=-\log\frac{9}{2}\times10^{-11}=-(1-0/3-11)=10/3$$

**آفرود** گاهی ممکن است اسیدها و بازها را روی هم بریزیم اما به‌طور کلی هم‌دیگر را خنثی نکنند، یعنی یکی به‌طور کامل مصرف شده و مقداری از دیگری باقی بماند. در این موارد می‌توان غلظت $H^+$ یا $OH^-$ باقی‌مانده در محلول را با فرمول زیر به دست آورد:

$$[OH^-]\text{ یا }[H^+]=\frac{|\overbrace{n_a.M_a.V_a}^{\text{اسید}}-\overbrace{n_b.M_b.V_b}^{\text{باز}}|}{V_a+V_b}=\frac{|\text{تعداد مول }OH^-\text{اولیه}-\text{تعداد مول }H^+\text{اولیه}|}{\text{حجم محلول باز}+\text{حجم محلول اسید}}$$

اگر مقدار مربوط به اسید بیشتر از باز باشد، محلول اسیدی خواهد بود و مقدار به دست امده از این رابطه، $[H^+]$ رانشان می‌دهد و اگر برعکس باشد، محلول بازی خواهد بود و مقدار به دست آمده، $[OH^-]$ را نشان می‌دهد. بنابراین خواهیم داشت:

$$[OH^-]\text{ یا }[H^+]=\frac{\overbrace{(1\times3\times10^{-3}\times40+1\times2\times10^{-3}\times30)}^{\text{اسید}}-\overbrace{(1\times10^{-2}\times20)}^{\text{باز}}}{40+30+20}=\frac{2}{9}\times10^{-3}\,mol.L^{-1}$$

چون مقدار مربوط به باز بیشتر از اسید است، پس غلظت به دست آمده نشان‌دهنده، $[OH^-]$ است.

$$[OH^-]=\frac{2}{9}\times10^{-3}\,mol.L^{-1}\rightarrow pOH=-\log[OH^-]=-\log\frac{2}{9}\times10^{-3}=-(0/3-1-3)=3/7$$

$$pH=14-pOH=14-3/7=10/3$$

---

**کنکورچی‌میگه؟** **۲۵۰ میلی‌لیتر محلول هیدروکلریک اسید ۰/۲ مولار، ۱۰۰ میلی‌لیتر محلول پتاسیم هیدروکسید ۰/۱ مولار و ۱۵۰ میلی‌لیتر محلول NaOH که در هر لیتر از آن، ۴ گرم حل شونده وجود دارد، با یک‌دیگر مخلوط می‌شوند. به این محلول، چند میلی‌لیتر آب مقطر اضافه شود تا pH محلول حاصل، برابر ۱/۷ شود؟ (حجم محلول‌ها جمع‌پذیر در نظر گرفته شود، $H=1,O=16,Na=23:g.mol^{-1}$)** (کنکور ریاضی نوبت دوم ۱۴۰۳)

۱) ۱۵۰۰ ۲) ۱۲۵۰ ۳) ۷۵۰ ۴) ۵۰۰

**پاسخ: گزینه ۳**

سنجش کلاد
www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshCloud

**۴۲. کدام ماده با ویژگی‌های توصیف شده به عنوان ضد اسید در داروها کاربرد دارد؟**

۱) اکسید فلزی از دورهٔ سوم جدول تناوبی عنصرها که عدد اتمی آن برابر با شمارهٔ گروه آن در جدول تناوبی است.

۲) هیدروکسید فلزی از دورهٔ چهارم جدول تناوبی عنصرها که بیشترین فعالیت شیمیایی را میان فلزهای این دوره دارد.

۳) کربنات فلزی از دورهٔ سوم جدول دوره‌ای که جلای نقره‌ای دارد و به آسانی با چاقو بریده می‌شود.

۴) هیدروژن کربنات فلزی از دورهٔ سوم جدول دوره‌ای که شمار الکترون‌های با $l=1$ اتم فلز آن بیشتر از شمار الکترون‌های با $l=0$ است.

**پاسخ: گزینه ۴** متوسط | مفهومی

در اتم فلزات $_{11}Na$ و $_{13}Al$، شمار الکترون‌ها در زیرلایهٔ $(l=1)$ بیشتر از شمار الکترون‌ها در زیرلایه $s(l=0)$ است:

$$_{11}Na: 1s^2\ 2s^2\ 2p^6\ 3s^1 \qquad _{13}Al: 1s^2\ 2s^2\ 2p^6\ 3s^2\ 3p^1$$

فرمول شیمیایی هیدروژن کربنات این دو فلز به صورت $NaHCO_3$ و $Al(HCO_3)_3$ است. سدیم هیدروژن کربنات $(NaHCO_3)$ با نام تجاری جوش‌شیرین به عنوان ضد اسید در داروها کاربرد دارد.

**بررسی سایر گزینه‌ها:**

۱ در دورهٔ سوم در گروه‌های ۱، ۲ و ۱۳ به ترتیب فلزات $_{11}Na$، $_{12}Mg$ و $_{13}Al$ قرار دارند که عدد اتمی آلومینیم $(_{13}Al)$ با شماره گروه آن برابر است.

**تله‌تستی** دقت کنید که آلومینیم هیدروکسید $(Al(OH)_3)$ به عنوان ضد اسید در داروها کاربرد دارد و نه آلومینیم اکسید $(Al_2O_3)$!

۲

**نکته** در میان فلزات یک دوره از جدول دوره‌ای، بیشترین فعالیت شیمیایی و واکنش‌پذیری مربوط به فلزات گروه اول (فلزات قلیایی) است.

طبق نکته بالا در میان فلزات دورهٔ چهارم، پتاسیم $(_{19}K)$ بیشترین فعالیت شیمیایی را دارد و فرمول شیمیایی هیدروکسید آن به صورت KOH است. هیدروکسید فلزات منیزیم و آلومینیم به عنوان ضد اسید در داروها کاربرد دارند، نه فلز پتاسیم!

۳ فلز سدیم $(_{11}Na)$ از دورهٔ سوم جدول دوره‌ای، دارای جلای نقره‌ای است و به آسانی با چاقو بریده می‌شود. دقت کنید که سدیم هیدروژن کربنات $(NaHCO_3)$ به عنوان ضد اسید در داروها کاربرد دارد و نه سدیم کربنات $(Na_2CO_3)$!

**جمع‌بندی:**

| | | |
|---|---|---|
| **ضد اسیدها** | داروهایی حاوی ترکیبات با خاصیت بازی هستند که با اسید معده واکنش داده و آن را خنثی می‌کنند و سبب کاهش اسید معده می‌شوند. | |
| | ترکیباتی که به عنوان ضد اسید کاربرد دارند. | منیزیم هیدروکسید $(Mg(OH)_2)$: $Mg(OH)_2(s)+2HCl(aq)\rightarrow MgCl_2(aq)+2H_2O(l)$ |
| | | آلومینیم هیدروکسید $(Al(OH)_3)$: $Al(OH)_3(s)+3HCl(aq)\rightarrow AlCl_3(aq)+3H_2O(l)$ |
| | | سدیم هیدروژن کربنات ($NaHCO_3$ یا جوش‌شیرین): $NaHCO_3(aq)+HCl(aq)\rightarrow NaCl(aq)+CO_2(g)+H_2O(l)$ |
| | شیر منیزی یکی از رایج‌ترین داده‌های ضد اسید است که به شکل سوسپانسیون مصرف می‌شود و شامل منیزیم هیدروکسید است. | |

**۴۳. در دمای ثابت ۲ لیتر محلول اسید HA با درجهٔ یونش ۰/۵ را با ۳ لیتر از همین اسید با درجهٔ یونش ۰/۲ مخلوط می‌کنیم. در محلول حاصل به ازای هر ۲۵۶۰ مولکول HA، به تقریب چند مولکول یونش‌نیافتهٔ این اسید در محلول وجود دارد؟ (از تغییر حجم محلول چشم‌پوشی کنید.)**

۱) ۱۹۳۸ ۲) ۱۷۲۱ ۳) ۱۵۸۹ ۴) ۱۳۵۴

**پاسخ: گزینه ۱** سخت | محاسباتی

سنجش کلاد
www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshCloud

**سرنخ** با توجه به این‌که دما ثابت است، ثابت یونش ($K_a$) دو محلول یکسان و برابر با ثابت یونش محلول حاصل از اختلاط است. با برابر قرار دادن ثابت یونش این سه محلول می‌توان درجه یونش ($\alpha$) را در محلول نهایی محاسبه کرد و مقدار مولکول‌های یونش‌نیافته از HA را به دست آورد.

**گام اول:** غلظت محلول اول را $M_1$ و غلظت محلول دوم را $M_2$ فرض می‌کنیم، بنابراین خواهیم داشت:

$$K_a=\frac{M\alpha^2}{1-\alpha} \Rightarrow K_{a_1}=K_{a_2} \rightarrow \frac{M_1\times(0/5)^2}{1-0/5}=\frac{M_2\times(0/2)^2}{1-0/2} \Rightarrow M_2=10M_1$$

**گام دوم:**

**نکته** برای به دست آوردن غلظت مولی محلول حاصل از مخلوط کردن چند محلول دیگر می‌توان از رابطهٔ زیر استفاده کرد:

$$M_{\text{نهایی}}=\frac{M_1V_1+M_2V_2+\dots}{V_1+V_2+\dots}$$

با توجه به رابطه بالا، غلظت مولی محلول نهایی را به دست می‌آوریم:

$$M_{\text{نهایی}}=\frac{(M_1\times2)+(M_2\times3)}{2+3} \xrightarrow{M_2=10M_1} M_{\text{نهایی}}=\frac{32M_1}{5}=6/4M_1\ \text{mol.L}^{-1}$$

**گام سوم:** با توجه به این‌که دما ثابت است، ثابت یونش محلول نهایی و محلول اول برابر است، بنابراین داریم:

$$K_{a_{\text{نهایی}}}=K_{a_1} \rightarrow \frac{M_{\text{نهایی}}\times(\alpha_{\text{نهایی}})^2}{1-\alpha_{\text{نهایی}}}=\frac{M_1\times(\alpha_1)^2}{1-\alpha_1} \xrightarrow{M_{\text{نهایی}}=6/4M_1} \frac{6/4M_1\times\alpha^2}{1-\alpha}=\frac{M_1\times(0/5)^2}{1-0/5} \rightarrow 12/8\alpha^2=1-\alpha$$

$$\Rightarrow 64\alpha^2+5\alpha-5=0 \xrightarrow{\text{حل با روش دلتا}} \alpha=\frac{-5+\sqrt{1305}}{128}\simeq0/243$$

**گام چهارم:** در نهایت محاسبه می‌کنیم که به ازای حل شدن ۲۵۶۰ مولکول HA، چند مولکول به صورت یونش نیافته باقی می‌ماند:

**نکته** اگر درجه یونش یک محلول را برابر $\alpha$ فرض کنیم، خواهیم داشت:

$$\begin{cases}\text{شمار مولکول‌های یونش‌یافته}=\alpha\times\text{شمار مولکول‌های اولیه}\\ \text{شمار مولکول‌های یونش‌نیافته}=\text{شمار مولکول‌های اولیه}-\underbrace{\text{شمار مولکول‌های یونش‌یافته}}_{\alpha\times\text{شمار مولکول‌های اولیه}}=(1-\alpha)\text{شمار مولکول‌های اولیه}\end{cases}$$

با توجه به نکتهٔ بالا خواهیم داشت:

$$\text{شمار مولکول‌های یونش‌نیافته}=2560\times(1-0/243)\simeq1938$$

**آفرود** برای این‌که محاسبات را آسان و سریع‌تر انجام دهیم، می‌توانستیم، مقدار درجه یونش را به صورت $\alpha=\frac{-5+\sqrt{1305}}{128}$ قرار دهیم:

$$\text{شمار مولکول‌های یونش‌نیافته}=2560\times(1-\frac{-5+\sqrt{1305}}{128})=\overset{20}{\cancel{2560}}\times\frac{133-\sqrt{1305}}{\underset{1}{\cancel{128}}} \xrightarrow{\sqrt{1305}\simeq36}$$

$$\text{شمار مولکول‌های یونش‌نیافته}=20\times97=1940\simeq1938$$

**۴۴. کدام مورد درست است؟**

۱) نقطهٔ ذوب $C_{17}H_{33}COOK$ بالاتر از نقطهٔ $NaHCO_3$ است.

۲) در شرایط یکسان دما و غلظت، قوی‌ترین اسید آلی، ساده‌ترین آن‌ها (فورمیک اسید) است.

۳) در زمان استراحت، pH معده بیشتر از ۳ است.

۴) هر اندازه غلظت یکی از یون‌های هیدرونیوم یا هیدروکسید در محلولی بیشتر شود به همان مقدار از دیگری کاسته خواهد شد.

**پاسخ: گزینه ۳** ساده | مفهومی

سنجش کلاد
www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshCloud

در زمان استراحت pH معده برابر ۳/۷ است. همچنین در حالت فعالیت، غلظت یون هیدرونیوم در معده برابر $0/03\,mol.L^{-1}$ است، از این‌رو pH آن برابر ۱/۵۲ خواهد بود:

$$pH = -\log 3\times10^{-2} = 1/52$$

**بررسی سایر گزینه‌ها:**

۱ ترکیب $C_{17}H_{33}COOK$ نشان‌دهنده یک پاک‌کنندهٔ صابونی مایع بوده، در حالی‌که حالت فیزیکی سدیم هیدروژن کربنات (جوش شیرین یا $NaHCO_3$) جامد است، بنابراین نقطهٔ ذوب $NaHCO_3$ بالاتر از $C_{17}H_{33}COOK$ خواهد بود.

۲ در شرایط یکسان دما و غلظت، قوی‌ترین اسید آلی **یک‌عاملی**، فورمیک اسید ($HCOOH$) است. فورمیک اسید ساده‌ترین اسید آلی محسوب می‌شود.

**نکته** در کربوکسیلیک اسیدها، با افزایش شمار اتم‌های کربن، از قدرت اسیدی و ثابت یونش ($K_a$) اسیدهای آلی کاسته می‌شود. از این‌رو فورمیک اسید (متانوئیک اسید یا $HCOOH$) قوی‌ترین اسید آلی یک‌عاملی است.

۴ در دمای اتاق میان غلظت یون‌های هیدرونیوم و هیدروکسید، رابطهٔ $[H^+]\times[OH^-]=10^{-14}$ برقرار است. مطابق با این رابطه با افزایش غلظت هریک از یون‌های $H^+$ یا $OH^-$، به همان **نسبت (نه مقدار)** از مقدار یون دیگر کاسته می‌شود.

**نکته** در یک دمای معین، مقدار حاصل‌ضرب یون‌های $H^+$ و $OH^-$ مقدار ثابتی است. از این‌رو اگر غلظت یکی از آن‌ها افزایش یابد به همان **نسبت** از غلظت دیگری کم می‌شود. به‌طور مثال اگر غلظت یون $H^+$، ۱۰ برابر شود برای این‌که حاصل $[H^+]\times[OH^-]$ ثابت بماند، غلظت یون $OH^-$، $\frac{1}{10}$ برابر می‌شود.

**۴۵. دو لیتر اسید معده در زمان استراحت، با a گرم فلز روی واکنش می‌دهد. اگر همین مقدار اسید معده در حالت گوارش غذا، با b گرم فلز روی واکنش دهد، تفاوت b و a برابر چند گرم است؟( pH معده در زمان استراحت و فعالیت به‌ترتیب برابر ۳/۷ و ۱/۵ است، $Zn = 65\,g.mol^{-1}$ )**

۱) ۱/۹۳۷ ۲) ۱/۸۸۵ ۳) ۱/۸۲۰ ۴) ۱/۶۹۰

**پاسخ: گزینه ۱** متوسط | محاسباتی

**سرنخ** pH معده در زمان استراحت و فعالیت به‌ترتیب برابر ۳/۷ و ۱/۵ است. با توجه به pH معده و معادلهٔ واکنش فلز روی و هیدروکلریک اسید، می‌توان جرم فلز روی و تفاوت a و b را به دست آورد.

**گام اول:** معادلهٔ موازنه شده واکنش فلز روی و اسید معده ($HCl$) به صورت زیر است:

$$Zn + 2HCl(aq) \rightarrow ZnCl_2(aq) + H_2(g)$$

**گام دوم:** pH معده در زمان استراحت برابر ۳/۷ است، بنابراین مقدار مول $HCl$ در دو لیتر اسید معده برابر است با:

$$[H^+]=10^{-pH}=10^{-3/7}=10^{-4}\times10^{0/3}=2\times10^{-4}\,mol.L^{-1} \xrightarrow[\text{HCl اسید قوی است}]{[H^+]=[HCl]} \text{مول HCl} = M\times V = 2\times10^{-4}\times2 = 4\times10^{-4}\,mol$$

**گام سوم:** با توجه به معادلهٔ واکنش، جرم فلز روی (a) واکنش داده در حال استراحت را به دست می‌آوریم:

**روش اول)** کسر تبدیل:

$$4\times10^{-4}\,mol\,HCl\times\frac{1\,mol\,Zn}{2\,mol\,HCl}\times\frac{65\,g\,Zn}{1\,mol\,Zn}=1/3\times10^{-2}\,g\,Zn$$

**روش دوم)** تناسب:

$$\frac{\text{مول}}{\text{ضریب}}_{HCl}=\frac{\text{جرم}}{\underbrace{\text{جرم مولی}\times\text{ضریب}}_{Zn}} \rightarrow \frac{4\times10^{-4}}{2}=\frac{a}{1\times65} \rightarrow a=1/3\times10^{-2}\,g\,Zn$$

سنجش کلاد
www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshCloud

**گام چهارم:** غلظت یون هیدرونیوم در زمان گوارش غذا برابر $0/03\,mol.L^{-1}$ است، بنابراین داریم:

$$[H^+]=[HCl]=0/03\ mol.L^{-1}\rightarrow \text{مول HCl}=M\times V=0/03\times 2=0/06\,mol$$

**گام پنجم:** با توجه به معادلهٔ واکنش، جرم فلز روی (b) واکنش داده در حالت گوارش غذا را محاسبه می‌کنیم:

**روش اول)** کسر تبدیل:

$$0/06\,mol\,HCl\times\frac{1\,mol\,Zn}{2\,mol\,HCl}\times\frac{65\,g\,Zn}{1\,mol\,Zn}=1/95\,g\,Zn$$

**روش دوم)** کسر تناسب:

$$\frac{\text{مول}}{\underbrace{\text{ضریب}}_{HCl}}=\frac{\text{جرم}}{\underbrace{\text{جرم مولی}\times\text{ضریب}}_{Zn}}\rightarrow\frac{0/06}{2}=\frac{b}{1\times 65}\rightarrow b=1/95\,g\,Zn$$

**گام ششم:** در نهایت تفاوت مقدار a و b را به دست می‌آوریم:

$$\begin{cases}a=0/03\,g\\ b=1/95\,g\end{cases}\Rightarrow b-a=1/95-0/03=1/937\,g$$

**کنکورچی‌میگه؟** **اگر پس از واکنش ۱/۲ گرم فلز کلسیم با ۲ لیتر محلول هیدروکلریک اسید، pH محلول نهایی، برابر ۱/۷ شود، غلظت مولی یون کلرید در محلول کدام است و چند گرم گاز هیدروژن تشکیل می‌شود؟ $(H=1, Ca=40: g.mol^{-1})$**

$$2HCl(aq)+Ca(s)\rightarrow CaCl_2(aq)+H_2(g)$$

۱) ۰/۰۵، ۰/۰۶ ۲) ۰/۰۵، ۰/۱۲ ۳) ۰/۰۳، ۰/۱۲ ۴) ۰/۰۳، ۰/۰۶ (کنکور ریاضی نوبت دوم ۱۴۰۴)

**پاسخ: گزینه ۱**

**۴۶. با توجه به داده‌های زیر در ارتباط با فلزهای A، B، C و D، کدام مورد درست است؟ (هر کدام از فلزها کاتیون «+۲» تشکیل می‌دهند.)**

- **مجموع پتانسیل کاهشی استاندارد فلزهای A و B برابر ۰/۲۰+ ولت است.**
- **ترتیب $A<B<C<D$ را می‌توان به قدرت کاهندگی این فلزها نسبت داد.**

۱) برای نگه‌داری محلول ۰/۱ مولار هیدروکلریک اسید نمی‌توان از ظرفی از جنس فلز A استفاده کرد.

۲) اگر تیغهٔ فلز C را در محلول شامل یون $D^{2+}$ قرار دهیم، فلز D تشکیل می‌شود.

۳) در شرایط استاندارد، تمایل به الکترون‌گیری $B^{2+}$، بیشتر از $A^{2+}$ است.

۴) اکسنده‌ترین یون در بین کاتیون‌های حاصل از این فلزها، می‌تواند به طور طبیعی با فلز لیتیم واکنش دهد.

**پاسخ: گزینه ۴** متوسط | مفهومی

ترتیب اکسندگی کاتیون فلزها، دقیقاً برعکس کاهندگی فلزها بوده و به صورت $D^{2+}<C^{2+}<B^{2+}<A^{2+}$ است. همچنین فلز لیتیم (Li) در میان فلزها کم‌ترین $E^\circ$ و بیشترین قدرت کاهندگی را دارد، بنابراین واکنش Li با کاتیون $A^{2+}$ قطعاً به‌طور طبیعی انجام خواهد شد:

$$2Li+A^{2+}\rightarrow 2Li^++A$$

**بررسی سایر گزینه‌ها:**

۱ مجموع پتانسیل کاهشی استاندارد $(E^\circ)$ فلزهای A و B برابر ۰/۲+ ولت است، بنابراین $E^\circ$ حداقل یکی از آن‌ها مثبت است. از آن‌جایی که قدرت کاهندگی فلز A از B کم‌تر است، به‌طور حتم $E^\circ$ فلز A مثبت بوده است. پتانسیل کاهشی استاندارد $(2H^+/H_2)$ برابر صفر است، از این‌رو یون‌های $H^+$ نمی‌توانند باعث اکسایش فلز A شوند و برای نگه‌داری محلول HCl می‌توان از ظرفی از جنس فلز A استفاده کرد.

۲ قدرت کاهندگی فلز C کم‌تر از D است، بنابراین یون $D^{2+}$ نمی‌تواند فلز C را اکسید کند و واکنشی میان فلز C و یون $D^{2+}$ به‌طور طبیعی رخ نمی‌دهد.

سنجش کلاد
www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshCloud

**نکته** بـــرای این‌که یک فلز (به‌طور مثال X) با کاتیون یک فلز دیگر (به‌طور مثال $Y^{n+}$) واکنش دهد، باید قدرت کاهندگی فلز X از فلز Y بیشتر باشد و یا به بیان دیگر پتانسیل کاهشی استاندارد فلز X کوچک‌تر از فلز Y باشد.

۳ ترتیب قدرت اکسندگی کاتیون این فلزها به صورت $D^{2+} < C^{2+} < B^{2+} < A^{2+}$ است، بنابراین تمایل به کاهش یافتن و الکترون‌گیری کاتیون $A^{2+}$ بیشتر از کاتیون $B^{2+}$ است.

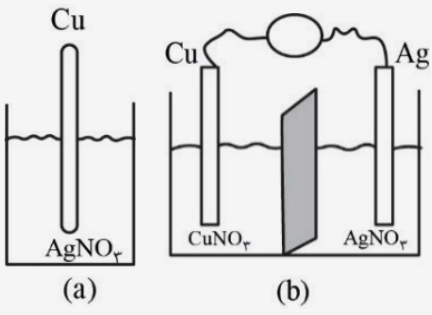
**کنکورچی‌میگه؟** **اگر قدرت اکسندگی چند یون به صورت $A^{2+} > B^{3+} > M^{+} > Y^{2+}$ و پتانسیل کاهشی استاندارد آن‌ها بزرگ‌تر از صفر باشد، چند مورد از مطالب زیر نادرست است؟** (کنکور تجربی ۹۹)

- **واکنش $B + YSO_4 \rightarrow$ ... انجام‌پذیر است.**
- **برای حفاظت از فلز آهن در برابر خوردگی، فلز A مناسب‌تر از فلز Y است.**
- **emf سلول گالوانی «Mg – A» از emf سلول گالوانی «Mg – B» بیشتر خواهد بود.**
- **اگر واکنش $M + XCl_2 \rightarrow$ ... انجام‌پذیر باشد واکنش $B + XCl_2 \rightarrow$ ... نیز انجام‌پذیر است.**

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

**پاسخ: گزینه ۳**

**۴۷. اگر در هر کدام از شکل‌های زیر، ۰/۱ مول یون نقره کاهش یابد، تفاوت میان تغییر جرم تیغه‌های مسی چند گرم است؟ $(Cu = 64, Ag = 108 : g.mol^{-1})$ (در هیچکدام از ظرف‌ها، رسوب فلزی تشکیل نمی‌شود.)**




۱) ۵/۴

۲) ۶/۴

۳) ۱۰/۸

۴) تغییر جرم هر دو تیغهٔ مسی یکسان است.

**پاسخ: گزینه ۳** متوسط | محاسباتی

**سرنخ** معادلهٔ واکنش‌های انجام شده در فرایندهای a و b را بنویسید و سپس با انجام محاسبات لازم تغییر جرم تیغهٔ مسی در هر فرایند را محاسبه کنید.

**گام اول:** مقدار $E^{\circ}$ فلز مس (Cu) کم‌تر از فلز نقره (Ag) است، بنابراین در شکل a واکنش زیر انجام خواهد شد:

$$Cu(s) + 2AgNO_3(aq) \rightarrow Cu(NO_3)_2(aq) + 2Ag(s)$$

**گام دوم:** مقدار فلز مس مصرف شده (اکسایش یافته) و فلز نقره تولید شده را محاسبه می‌کنیم:

**روش اول)** کسر تبدیل:

$$0/1\,mol\,Ag^{+} \times \frac{2\,mol\,Ag}{2\,mol\,Ag^{+}} \times \frac{108\,g\,Ag}{1\,mol\,Ag} = 10/8\,g\,Ag$$

$$0/1\,mol\,Ag^{+} \times \frac{1\,mol\,Cu}{2\,mol\,Ag^{+}} \times \frac{64\,g\,Cu}{1\,mol\,Cu} = 3/2\,g\,Cu$$

**روش دوم)** تناسب:

$$\frac{\text{مول}}{\underbrace{\text{ضریب}}_{Ag^{+}}} = \frac{\text{جرم}}{\underbrace{\text{جرم مولی} \times \text{ضریب}}_{Ag}} = \frac{\text{جرم}}{\underbrace{\text{جرم مولی} \times \text{ضریب}}_{Cu}} \rightarrow \frac{0/1}{2} = \frac{x}{2 \times 108} = \frac{y}{1 \times 64} \rightarrow \begin{cases} x = 10/8\,g\,Ag \\ y = 3/2\,g\,Cu \end{cases}$$

سنجش کلاد
www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshCloud

**گام سوم:** در شکل a، فلز Cu مصرف شده و از جرم تیغه کم می‌شود، اما در مقابل فلز Ag تولید شده روی آن رسوب می‌کند، بنابراین داریم:

$$\text{مقدار تغییر جرم تیغهٔ مسی} = \text{جرم Ag تولیدی} - \text{جرم Cu مصرفی} = ۱۰/۸ - ۳/۲ = ۷/۶\,g$$

**گام چهارم:** شکل b نشان‌دهنده سلول گالوانی مس - نقره است که در آن واکنش کلی زیر انجام می‌شود:

$$Cu(s) + ۲Ag^{+}(aq) \rightarrow Cu^{۲+}(aq) + ۲Ag$$

**گام پنجم:** مقدار فلز مس مصرف شده (اکسایش‌یافته) در این سلول گالوانی را به دست می‌آوریم:

**روش اول)** کسر تبدیل:

$$۰/۱\,mol\,Ag^{+} \times \frac{۱\,mol\,Cu}{۲\,mol\,Ag^{+}} \times \frac{۶۴\,g\,Cu}{۱\,mol\,Cu} = ۳/۲\,g\,Cu$$

**روش دوم)** تناسب:

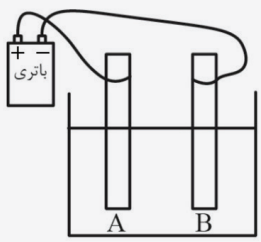
$$\frac{\text{مول}}{\underbrace{\text{ضریب}}_{Ag^{+}}} = \frac{\text{جرم}}{\underbrace{\text{جرم مولی} \times \text{ضریب}}_{Cu}} \rightarrow \frac{۰/۱}{۲} = \frac{a}{۱ \times ۶۴} \rightarrow a = ۳/۲\,g\,Cu$$

بنابراین در شکل b، جرم تیغهٔ مسی به اندازهٔ ۳/۲ گرم کاهش می‌یابد.

**گام ششم:** تفاوت میان تغییر جرم تیغه‌های مسی در دو شکل a و b برابر است با:

$$\text{تفاوت تغییر جرم تیغه‌های مسی} = ۷/۶ + ۳/۲ = ۱۰/۸\,g$$

**۴۸. با توجه به شکل زیر که برقکافت یک مول سدیم کلرید مذاب و خالص را در یک سلول الکترولیتی نشان می‌دهد، کدام مطالب نادرست است؟**




**آ) چگالی فراوردهٔ حاصل در اطراف الکترود A، کم‌تر از چگالی فراوردهٔ حاصل در اطراف الکترود B است.**

**ب) اگر پس از ۸۰ ثانیه، ۸۰٪ از آنیون موجود در سلول اکسید شود، سرعت متوسط تولید گاز در این مدت $۰/۳\,mol.min^{-۱}$ خواهد بود.**

**پ) فراوردهٔ حاصل در اطراف الکترود B، پایدارتر از یون مربوطهٔ آن است.**

**ت) برای برقکافت کامل سدیم کلرید اولیه، باید $۶/۰۲ \times ۱۰^{۲۳}$ الکترون از باتری به الکترود A وارد شود.**

۱) آ، ب ۲) آ، ت ۳) ب، پ ۴) پ، ت

**پاسخ: گزینه ۴** متوسط | مفهومی

در یک سلول الکترولیتی، آند قطب مثبت و کاتد قطب منفی است. بنابراین در این سلول الکترود A آند و الکترود B کاتد است. نیم‌واکنش‌های اکسایش (نیم‌واکنش آندی) و کاهش (نیم‌واکنش کاتدی) در این سلول الکترولیتی به صورت زیر است:

$$\left.\begin{array}{l} \text{نیم‌واکنش آندی: } ۲Cl^{-}(l) \rightarrow Cl_{۲}(g) + ۲e^{-} \\ \text{نیم‌واکنش کاتدی: } Na^{+}(l) + e^{-} \rightarrow Na(l) \end{array}\right\} \rightarrow \text{واکنش کلی: } ۲NaCl(l) \rightarrow ۲Na(l) + Cl_{۲}(g)$$

عبارت‌های (پ) و (ت) نادرست هستند.

**بررسی همهٔ موارد:**

آ) الکترود A، آند است و در اطراف آن گاز کلر تولید می‌شود. همچنین الکترود B کاتد است و در اطراف آن فلز سدیم حاصل می‌شود. واضح است که چگالی گاز کلر از فلز سدیم کم‌تر است.

ب) مقدار گاز کلر تولید شده، در اثر مصرف ۰/۸ مول سدیم کلرید مذاب (حاوی ۸۰٪ از یون $Cl^{-}$) را محاسبه می‌کنیم:

$$۰/۸\,mol\,NaCl \times \frac{۱\,mol\,Cl_{۲}}{۲\,mol\,NaCl} = ۰/۴\,mol\,Cl_{۲}$$

حال سرعت متوسط تولید گاز $Cl_{۲}$ را به دست می‌آوریم:

$$\bar{R}_{Cl_{۲}} = \frac{\Delta n\,Cl_{۲}}{\Delta t} = \frac{۰/۴\,mol}{\frac{۸۰}{۶۰}\,min} = ۰/۳\,mol.min^{-۱}$$

سنجش کلاد
www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshCloud

**ترکیب** سرعت متوسط تولید یا مصرف هر ماده در یک بازه معین برابر است با مقدار تغییرات آن تقسیم بر مدت زمان:

$$\text{سرعت ماده} = \frac{\text{تغییرات ماده}}{\Delta t}$$

تغییرات ماده می‌تواند بر حسب مول، غلظت، جرم و حجم باشد.

**پ** الکترود B کاتد است و در اطراف آن فلز سدیم تولید می‌شود. پایداری کاتیون فلز سدیم $(Na^+)$ از فلز سدیم $(Na)$ بیشتر است.

**ترکیب** به‌طور کلی، پایداری ترکیبات یک فلز از خود فلز بیشتر است. به‌طور مثال کاتیون $Na^+$ در ترکیب‌های یونی مربوط به فلز سدیم دیده می‌شود، از این‌رو پایداری آن بیشتر از فلز Na است.

**ت** مطابق معادلهٔ موازنه شده واکنش در اثر برقکافت ۲ مول NaCl، ۲ مول الکترون مبادله می‌شود، بنابراین داریم:

$$1\,mol\,NaCl \times \frac{2\,mol\,e^-}{2\,mol\,NaCl} \times \frac{6/02\times10^{23}\,e^-}{1\,mole^-} = 6/02\times10^{23}\,e^-$$

**تله‌تستی** دقت کنید که جهت حرکت الکترون در سلول‌های الکتروشیمیایی از آند به کاتد است. بنابراین الکترون‌ها از الکترود A (آند) وارد باتری و از باتری وارد الکترود B (کاتد) می‌شود.

## درسنامه:

برقکافت $NaCl(l)$ و تهیه فلز سدیم

۱) فلز سدیم یک کاهنده قوی است که در طبیعت به حالت آزاد یافت نمی‌شود.

۲) سدیم در ترکیب‌های طبیعی و گوناگون خود تنها به شکل یون سدیم $(Na^+)$ وجود دارد . این واقعیت نشان می‌دهد که یون‌های سدیم بسیار پایدارتر از اتم‌های آن هستند، به همین دلیل برای تهیهٔ سدیم باید انرژی زیادی مصرف کرد.

۳) تهیه فلز سدیم از برقکافت سدیم کلرید مذاب در یک سلول الکترولیتی:

الف) نیم‌واکنش‌های آندی، کاتدی و واکنش کلی این فرایند به صورت زیر است:

$$\text{نیم‌واکنش آندی: } 2Cl^-(l) \rightarrow Cl_2(g) + 2e^-$$

$$\text{نیم‌واکنش کاتدی: } Na^+(l) + e^- \rightarrow Na(l)$$

$$\text{واکنش کلی: } 2NaCl(l) \rightarrow 2Na(l) + Cl_2(g)$$

سدیم به عنوان فراوردهٔ اصلی این فرایند در اطراف کاتد (قطب منفی) و گاز کلر به عنوان فراوردهٔ جانبی در اطراف آند (قطب مثب) تولید می‌شود.

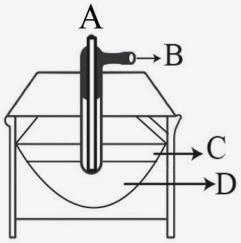
ب) نیروی الکتروموتوری (emf) این فرایند همانند سایر سلول‌های الکترولیتی، منفی است که نشان می‌دهد واکنش انجام شده در این سلول به صورت غیرخودبه‌خودی و به کمک منبع جریان برق (باتری) است.

پ) سدیم کلرید خالص در دمای $801^\circ C$ ذوب می‌شود. با افزودن مقداری کلسیم کلرید به آن، دمای ذوب تا حدود $587^\circ C$ پایین می‌آید و موجب مصرف کم‌تر انرژی می‌شود.

تذکر: برای تهیهٔ فلز سدیم، نمی‌توان از محلول آبی سدیم کلرید استفاده کرد. زیرا $E^\circ$ کاهش مولکول‌های آب، بزرگ‌تر از $E^\circ$ کاهش یون‌های سدیم است، از این‌رو در کاتد به جای تولید فلز سدیم، گاز هیدروژن تولید می‌شود.

سنجش کلاد
www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshCloud

**۴۹. با توجه به شکل مقابل که برقکافت منیزیم کلرید را نشان می‌دهد، کدام مطالب در ارتباط با این سلول و فرایند استخراج منیزیم از آب دریا درست است؟**




**آ) پس از افزودن یون هیدروکسید به آبی که از دریا جمع‌آوری شده، یک ترکیب یونی نامحلول تشکیل می‌شود که شمار کاتیون‌های آن، دو برابر شمار آنیون‌ها است.**

**ب) پیش از وارد کردن منیزیم کلرید به سلول، ابتدا آن را خشک و سپس ذوب می‌کنند.**

**پ) قطب منفی باتری به بخش A متصل شده و مادهٔ مولکولی B در واکنش با فلز آلومینیم، نقش اکسنده را ایفا می‌کند.**

**ت) C و D به ترتیب فراوردهٔ کاتدی و الکترولیت مذاب سلول الکترولیتی را نشان می‌دهد.**

۱) آ، ب ۲) آ، پ ۳) ب، ت ۴) پ، ت

**پاسخ: گزینه ۳** سخت | مفهومی

عبارت‌های (ب) و (ت) درست هستند.

**بررسی همهٔ موارد:**

آ و ب

**نکته** فرایند تهیهٔ منیزیم از آب دریا به صورت نمودار زیر است:

$$\text{آب دریا} \xrightarrow{+OH^-(aq)} Mg(OH)_2(s) \rightarrow \text{رد کردن از صافی} \xrightarrow{+HCl(aq)} MgCl_2(aq) \xrightarrow{\text{خشک کردن}} MgCl_2(s) \xrightarrow{\text{ذوب کردن}} MgCl_2(l)$$

$$\rightarrow \text{ورود به سلول الکترولیتی و برقکافت } MgCl_2(l) \xrightarrow{\text{تولید}} Mg(l) \text{ (فراوردهٔ اصلی) و } Cl_2(g) \text{ (فراوردهٔ جانبی)}$$

$$Mg(s) \xleftarrow{\text{قالب‌گیری و کاهش دما}}$$

مطابق نکته بالا، پس از افزودن یون هیدروکسید $[OH^-]$ به آب، ترکیب یونی $Mg(OH)_2$ تولید شده که شمار آنیون‌ها $(OH^-)$ در آن ۲ برابر شمار کاتیون‌ها $(Mg^{2+})$ است. همچنین پیش از وارد کردن منیزیم کلرید $(MgCl_2)$ به سلول الکترولیتی ابتدا آن را خشک و سپس ذوب می‌شود.

**ترکیب** نمک $Mg(OH)_2$ یک ترکیب رسوب و نامحلول در آب بوده و انحلال‌پذیری آن کم‌تر از ۰/۰۱ گرم در ۱۰۰ گرم آب است.

پ نیم‌واکنش‌های اکسایش (آندی) و کاهش (کاتدی) در برقکافت منیزیم کلرید مذاب به صورت زیر است:

$$\left.\begin{array}{l} \text{نیم‌واکنش آندی: } 2Cl^-(l) \rightarrow Cl_2(g) + 2e^- \\ \text{نیم‌واکنش کاتدی: } Mg^{2+}(l) + 2e^- \rightarrow Mg(l) \end{array}\right\} \rightarrow \text{واکنش کلی: } MgCl_2(l) \rightarrow Mg(l) + Cl_2(g)$$

بخش A، نشان‌دهنده الکترود آند است که در اطراف آن گاز کلر (B) تولید می‌شود. در سلول‌های الکترولیتی آند به قطب مثبت باتری وصل می‌شود. در واکنش گاز کلر با فلز آلومینیم، کلر اکسنده و آلومینیم کاهنده است.

ت C و D به ترتیب نشان‌دهندهٔ منیزیم مذاب و منیزیم کلرید مذاب هستند. منیزیم در کاتد این سلول تولید می‌شود، همچنین منیزیم کلرید مذاب به عنوان الکترولیت در این سلول قرار دارد.

**نکته** چگالی منیزیم مذاب از منیزیم کلرید مذاب کم‌تر است، بنابراین $Mg(l)$ روی $MgCl_2(l)$ قرار می‌گیرد.

www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshCloud

**کنکورچی‌میگه؟** **با توجه به فرایند تهیهٔ فلز منیزیم از آب دریا، چند مورد از مطالب زیر، نادرست است؟** (کنکور ریاضی خارج از کشور ۱۴۰۱)

- **در این روش، فلز منیزیم در کاتد و گاز کلر در آند به دست می‌آید.**
- **در این فرایند، تنها حالت‌های مایع و جامد از مواد مختلف دخالت دارد.**
- **در سلول برقکافت، با اعمال ولتاژ بیرونی معین، محلول $MgCl_2$ تجزیه می‌شود.**
- **هیدروکلریک اسید لازم را از واکنش گاز کلر آزاد شده با گاز هیدروژن، تأمین می‌کنند.**
- **نخست، فلز منیزیم موجود در حوضچه‌ای از آب دریا را به صورت هیدروکسید رسوب می‌دهند.**

۱) یک ۲) دو ۳) سه ۴) چهار

**پاسخ: گزینه ۳**

**۵۰. با توجه به فرایند تولید آلومینیم به روش هال، کدام مورد نادرست است؟**

۱) در آند این سلول برقکافت، فراوان‌ترین گاز گلخانه‌ای هواکره تولید می‌شود.

۲) بدنهٔ سلول به قطب منفی جریان برق متصل شده و جدارهٔ داخلی سلول، نقش کاتد را دارد.

۳) در معادلهٔ کلی این فرایند، ضریب استوکیومتری گونهٔ کاهنده، ۱/۵ برابر ضریب استوکیومتری گونهٔ اکسنده است.

۴) در این واکنش فلزی تولید می‌شود که در مقابل اکسایش مقاوم است و نسبت به سایر فلزهای هم‌دورهٔ خود، قدرت کاهندگی کم‌تری دارد.

**پاسخ: گزینه ۴** متوسط | مفهومی

در این فرایند، فلز آلومینیم تولید می‌شود که یک فلز فعال است ($E^\circ$ آن کوچک و منفی است) **و به سرعت در هوا اکسایش یافته** و به آلومینیم اکسید ($Al_2O_3$) تبدیل می‌شود. قدرت کاهندگی فلز آلومینیم نسبت به فلزات سدیم و منیزیم کم‌تر است، زیرا $E^\circ$ آن بزرگ‌تر است.

**تله‌تستی** آلومینیم فلزی فعال است که به سرعت در هوا اکسید شده و با تشکیل لایه چسبنده و متراکم آلومینیم اکسید ($Al_2O_3$) از ادامه اکسایش جلوگیری می‌کند و دچار خوردگی نمی‌شود، بنابراین این فلز در برابر **خوردگی (نه اکسایش)** مقاوم است.

**بررسی سایر گزینه‌ها:**

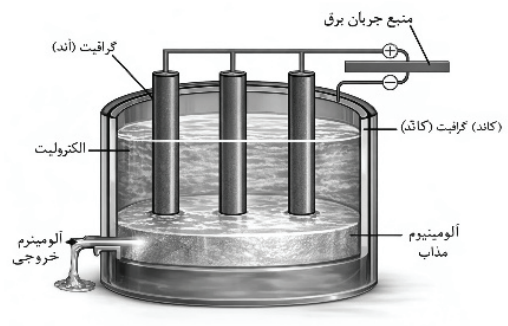
۱ معادلهٔ نیم‌واکنش‌های آندی و کاتدی و معادلهٔ واکنش کلی انجام شده در سلول هال به صورت زیر است:

$$\left.\begin{array}{l} \text{نیم‌واکنش کاتدی: } Al^{3+}(l)+3e^- \rightarrow Al(l) \\ \text{نیم‌واکنش آندی: } \begin{cases} 2O^{2-}(l) \rightarrow O_2(g)+4e^- \\ C(s)+O_2(g) \rightarrow CO_2(g) \end{cases} \end{array}\right\} \rightarrow \text{واکنش کلی: } 2Al_2O_3(l)+3C(s) \rightarrow 4Al(l)+3CO_2(g)$$

همان‌طور که مشخص است در آند این سلول گاز کربن دی‌اکسید ($CO_2$) تولید می‌شود.

**ترکیب** گازهای کربن دی‌اکسید ($CO_2$)، متان ($CH_4$)، بخار آب ($H_2O$) و... جزو گازهای گلخانه‌ای هستند که فراوان‌ترین آن‌ها $CO_2$ است.

۲ آند و کاتد این سلول هر دو از جنس گرافیت هستند. در این سلول، دیواره‌ها و کف ظرف به قطب منفی باتری متصل هستند و نقش کاتد را دارند و میله‌های گرافیتی در بالای دستگاه به قطب مثبت باتری متصل بوده و نقش آند را ایفا می‌کند.




۳ در واکنش مربوط به فرایند هال، گرافیت ($C(s)$) در نقش کاهنده و آلومینیم اکسید ($Al_2O_3$) در نقش اکسنده است، بنابراین داریم:

$$\frac{\text{ضریب استوکیومتری کاهنده (C)}}{\text{ضریب استوکیومتری اکسنده } (Al_2O_3)} = \frac{3}{2} = 1/5$$

سنجش کلاد
www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshCloud

## درسنامه:

**تهیهٔ فلز آلومینیم و فرایند هال:**

۱) آلومینیم یکی از فلزهایی است که اکسید می‌شود ولی خورده نمی‌شود. از این فلزها می‌توان برای ساخت وسایل گوناگون بهره برد که برای مدت طولانی‌تری استحکام خود را حفظ می‌کنند.

۲) آلومینیم به دلیل پتانسیل کاهشی کوچک ($E^\circ(Al^{3+}/Al) = -1/66V$) فلزی فعال است. این فلز اگرچه به سرعت در هوا اکسید می‌شود ولی با تشکیل لایهٔ چسبنده و متراکم آلومینیم اکسید ($Al_2O_3$) از ادامهٔ اکسایش خود جلوگیری می‌کند به طوری‌که لایه‌های زیرین برای مدت طولانی دست‌نخورده باقی مانده و استحکام خود را حفظ می‌کنند. به همین دلیل از آلومینیم در ساخت لوازم خانگی، هواپیما و کشتی استفاده می‌شود.

۳) آلومینیم همانند دیگر فلزهای فعال، در طبیعت به شکل ترکیب یافت می‌شود. از این‌رو این فلز از برقکافت نمک‌های مذاب آن به دست می‌آید.

۴) آلومینیم در طبیعت به شکل بوکسیت( $Al_2O_3$ ، همراه ناخالصی) یافت می‌شود و از آن در فرایند هال برای تهیهٔ فلز آلومینیم استفاده می‌شود.

۵) رایج‌ترین روش تهیهٔ فلز آلومینیم، **فرایند هال** است:

الف) در فرایند هال، آند و کاتد هردو از جنس **گرافیت** هستند. در این سلول الکترولیتی، دیواره‌ها و کف ظرف، نقش کاتد (قطب منفی) و میله‌های گرافیتی بالای سلول نقش آند (قطب مثبت) دارند.

ب) الکترولیت مورد استفاده در این سلول حاوی **آلومینیم اکسید** ($Al_2O_3$) **مذاب** است.

پ) در این سلول الکترولیتی، نیم‌واکنش کاتدی در سطح گرافیت انجام می‌شود (الکترود کاتدی از جنس گرافیت بوده و بی‌اثر است):

نیم‌واکنش کاتدی (قطب منفی): $Al^{3+}(l) + 3e^- \rightarrow Al(l)$

**تذکر:** چگالی آلومینیم مذاب تولیدی از چگالی الکترولیت بیشتر است، از این‌رو در ته سلول قرار گرفته و از ظرف واکنش خارج می‌شود.

ت) در این سلول، نیم‌واکنش آندی در سطح تیغه‌های گرافیتی بالای سلول انجام می‌شود:

نیم‌واکنش آندی (قطب مثبت): $2O^{2-}(l) \rightarrow O_2(g) + 4e^-$

ث) از آن‌جا که گاز اکسیژن یک اکسنده قوی است، در دمای بالا با الکترود آند (گرافیت) واکنش داده و گاز $CO_2$ تولید می‌کند و بدین ترتیب از جرم الکترود آندی کاسته می‌شود:

$$C(s,\text{گرافیت}) + O_2(g) \rightarrow CO_2(g)$$

**تذکر:** در فرایند هال، الکترود گرافیتی که نقش آند ایفا می‌کند بی‌اثر نیست و در واکنش شرکت می‌کند.

ج) معادلهٔ کلی واکنش انجام شده در فرایند هال به صورت زیر است:

واکنش کلی: $\underbrace{4Al^{3+}(l) + 6O^{2-}(l)}_{2Al_2O_3(l)} + 3C(s,\text{گرافیت}) \rightarrow 4Al(l) + 3CO_2(g)$

۶) فرایند هال به علت مصرف مقدار زیادی انرژی هزینهٔ بالایی دارد، بنابراین بازیافت آلومینیم می‌تواند برخی از هزینه‌های تولیدی این فلز را کاهش دهد. به‌طور مثال، تولید قوطی‌های آلومینیمی از قوطی‌های کهنه، فقط به **۷ درصد** از انرژی لازم برای تهیهٔ همان تعداد قوطی از فرایند هال نیاز دارد.

**۵۱. در تهیهٔ حلبی، لایه نازکی از فلز A و در تهیهٔ آهن سفید، لایهٔ نازکی از فلز B استفاده شده است. کدام عبارت‌ها در ارتباط با فلزهای A و B درست است؟**

**آ) در اتم هر دو عنصر، سه لایه به‌طور کامل از الکترون پر شده است و شمار الکترون‌های آخرین زیرلایه اتم دو عنصر باهم برابر است.**

**ب) در سلول گالوانی حاصل از A و B، با گذشت زمان، مقدار emf و $\frac{[A^{2+}]}{[B^{2+}]}$ کاهش می‌یابد.**

**پ) با ایجاد خراش در سطح حلبی و آهن سفید، به ازای مصرف هر مول گونهٔ اکسنده، دو مول از هیدروکسیدهای A و B تولید می‌شود.**

**ت) با توجه به کاهنده‌تر بودن A و B در مقایسه با گاز هیدروژن، از آهن سفید و حلبی در صنایع غذایی استفاده نمی‌شود.**

۱) آ، ب ۲) پ، ت ۳) آ، ت ۴) ب، پ

**پاسخ: گزینه ۱** سخت | مفهومی

سنجش کلاد
www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshCloud

در حلبی، فلز آهن با لایهٔ نازکی از فلز قلع (Sn) و در آهن سفید (آهن گالوانیزه)، فلز آهن با لایهٔ نازکی از فلز روی (Zn) پوشیده می‌شود. بنابراین A و B به ترتیب قلع ($_{۵۰}Sn$) و روی ($_{۳۰}Zn$) هستند. عبارت‌های (آ) و (ب) درست هستند.

**بررسی همهٔ موارد:**

آ) آرایش الکترونی فشردهٔ فلزات روی و قلع به صورت زیر است:

$$_{۳۰}Zn:[Ar]\,۳d^{۱۰}\,۴s^{۲} \qquad _{۵۰}Sn:[Kr]\,۴d^{۱۰}\,۵s^{۲}\,۵p^{۲}$$

در هر دو عنصر، سه لایه اول کاملاً از الکترون پر شده‌اند و زیرلایه آخر آن‌ها دارای ۲ الکترون است.

ب) پتانسیل کاهشی استاندارد ($E^\circ$) فلز روی کم‌تر از فلز قلع است، بنابراین در سلول گالوانی روی - قلع، روی آند و قلع کاتد است. در آند کاتیون $Zn^{۲+}$ تولید و در کاتد کاتیون $Sn^{۲+}$ مصرف می‌شود، از این‌رو نسبت $\frac{[Sn^{۲+}]}{[Zn^{۲+}]}$ کاهش می‌یابد. با گذشت زمان، emf سلول‌های گالوانی کاهش می‌یابد.

پ) با ایجاد خراش در سطح آهن سفید، چون $E^\circ$ فلز روی از آهن کم‌تر است، فلز روی اکسید شده و در نهایت روی هیدروکسید ($Zn(OH)_۲$) تولید می‌شود. اما با ایجاد خراش در سطح حلبی، چون $E^\circ$ فلز آهن از قلع کم‌تر است، فلز آهن اکسید شده و در نهایت آهن (III) هیدروکسید ($Fe(OH)_۳$) تولید می‌شود.

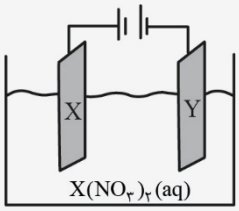
ت) پتانسیل کاهشی استاندارد هر دو فلز قلع و روی منفی و در مقایسه با هیدروژن کم‌تر است. از حلبی برای ساختن قوطی‌های روغن‌نباتی و کنسرو و از آهن گالوانیزه در ساخت تانکر آب و کانال کولر استفاده می‌شود.

**جمع‌بندی:** مقایسهٔ ویژگی‌های ورقه حلبی و آهن گالوانیزه:

| | | آهن گالوانیزه (آهن سفید) | حلبی |
|---|---|---|---|
| **پوشش محافظ** | | فلز Zn | فلز Sn |
| **نوع حفاظت** | | پوششی + حفاظت کاتدی | فقط پوششی |
| **کاربرد** | | تانکر آب - کانال کولر | قوطی روغن - کنسرو - بستهٔ نگهداری مواد غذایی |
| **پس از خراش** | آند | Zn | Fe |
| | کاتد | Fe | Sn |
| | گونه کاهنده | Zn | Fe |
| | گونه اکسنده | $O_۲$ | $O_۲$ |
| | نیم‌واکنش آندی | $Zn(s) \rightarrow Zn^{۲+}(aq) + ۲e^-$ | $Fe(s) \rightarrow Fe^{۲+}(aq) + ۲e^-$ |
| | نیم‌واکنش کاتدی | $O_۲(g) + ۲H_۲O(l) + ۴e^- \rightarrow ۴OH^-(aq)$ | $O_۲(g) + ۲H_۲O(l) + ۴e^- \rightarrow ۴OH^-(aq)$ |
| | جهت حرکت کاتیون‌ها | از آند به سمت کاتد (از Zn به سمت Fe) | از آند به سمت کاتد (از Fe به سمت Sn) |
| | جهت حرکت الکترون‌ها | از آند به سمت کاتد (از Zn به سمت Fe) | از آند به سمت کاتد (از Fe به سمت Sn) |

سنجش کلاد
www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshCloud

**۵۲. شکل مقابل، طرح ساده‌ای از یک سلول الکترولیتی را نشان می‌دهد. با توجه به این شکل، کدام مطلب به یقین درست است؟**




۱) در اثر انجام این فرایند، قطعهٔ X با روکش نازکی از فلز Y آبکاری می‌شود.

۲) پتانسیل کاهشی استاندارد فلز X باید منفی‌تر از پتانسیل کاهشی استاندارد فلز Y باشد.

۳) اگر مدار بیرونی قطع شود، هیچ واکنشی در سلول رخ نمی‌دهد.

۴) جهت حرکت الکترون‌ها در مدار بیرونی از سمت X به Y است.

**پاسخ: گزینه ۴** متوسط | مفهومی

جهت حرکت الکترون‌ها در مدار بیرونی، هم در سلول‌های گالوانی و هم در سلول‌های الکترولیتی، از آند به سمت کاتد است. در سلول الکترولیتی، آند قطب مثبت بوده و به قطب مثبت باتری متصل می‌شود.

توجه: در نماد باتری، (⊖⊕)، خط کوتاه نشان‌دهندهٔ قطبی منفی و خط بلند، نشان دهندهٔ قطب مثبت است.

**بررسی سایر گزینه‌ها:**

۱ دقت کنید که در اثر انجام این فرایند، آبکاری قطعهٔ Y با روکش از فلز X حاصل می‌شود.

۲ در فرایند آبکاری، پتانسیل کاهشی استاندارد الکترودها مهم نبوده و هر الکترودی که به قطب مثبت باتری متصل است را آند می‌نامند؛ بنابراین لزوماً نمی‌توان گفت که پتانسیل کاهشی استاندارد فلز X باید منفی‌تر از پتانسیل کاهشی استاندارد فلز Y باشد.

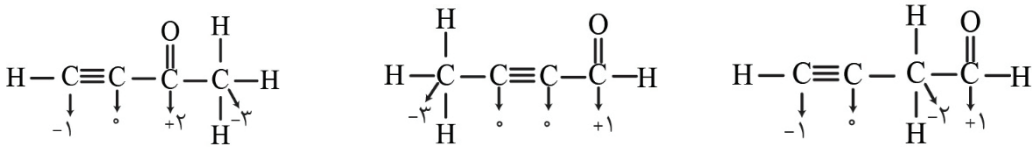
۳ در صورتی‌که پتانسیل کاهشی استاندارد فلز Y منفی‌تر از فلز X باشد، با قطع مدار بیرونی میان تیغهٔ Y و محلول $A^{2+}$ واکنش رخ خواهد داد.

**۵۳. ترکیبی با فرمول مولکولی $C_4H_4O$ دارای پیوند سه‌گانه و گروه کربونیل $(-\overset{\overset{O}{\|}}{C}-)$ است. با توجه به تمام ساختارهای ممکن برای این فرمول مولکولی، عدد اکسایش چه تعداد از اتم‌های کربن برابر با صفر است؟**

۱) ۳ ۲) ۲ ۳) ۵ ۴) ۴

**پاسخ: گزینه ۴** متوسط | مفهومی

تمام ساختارهای ممکن برای ترکیبی با فرمول مولکولی $C_4H_4O$ به صورت زیر است:




همان‌طور که مشخص است در مجموع عدد اکسایش چهار مورد از اتم‌های کربن برابر صفر است.

آفرود در ترکیب‌های آلی، برای تعیین عدد اکسایش می‌توانیم به صورت زیر عمل کنیم:

به ازای هر پیوند اتم کربن با اتمی که خصلت نافلزی کم‌تری از آن دارد، به کربن عدد $(-1)$ و به ازای هر پیوند اتم کربن با اتمی که خصلت نافلزی بیشتری از آن دارد، به کربن عدد $(+1)$ نسبت می‌دهیم. همچنین پیوندهای کربن - کربن تأثیری در عدد اکسایش کربن نمی‌گذارند و اگر اتم کربنی فقط با کربن پیوند داشت، عدد اکسایش آن برابر صفر خواهد بود.

**۵۴. کدام عبارت درست است؟**

۱) قدرت کاهندگی هر کدام از فلزهای واسطه، کم‌تر از قدرت کاهندگی هر فلز اصلی است.

۲) هرچه پتانسیل کاهشی یک فلز بیشتر باشد، اتم آن فلز در هوای مرطوب با شدت بیشتری با اکسیژن واکنش می‌دهد.

۳) هرچه فعالیت شیمیایی یک فلز قلیایی بیشتر باشد، جایگاه آن در سری الکتروشیمیایی در موقعیت پایین‌تری است.

۴) اگر کاتد یک سلول گالوانی الکترود ناخالص یک فلز باشد، با گذشت زمان، درصد خلوص فلز افزایش می‌یابد.

**پاسخ: گزینه ۴** متوسط | مفهومی

سنجش کلاد
www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshCloud

در یک سلول گالوانی در کاتد، نیم‌واکنش کاهش رخ می‌دهد به طوری‌که کاتیون های فلز کاهش یافته و به صورت اتم فلزی بر روی تیغه رسوب می‌کنند. بنابراین با گذشت زمان مقدار فلز در تیغه بیشتر شده و درصد خلوص آن افزایش می‌یابد.

**بررسی سایر گزینه‌ها:**

۱ به‌طور مثال پتانسیل کاهشی استاندارد ($E^\circ$) فلز اصلی قلع ($_{50}Sn$) از برخی فلزات واسطه مثل آهن، روی، منگنز و ... بزرگ‌تر است و در نتیجه کاهندگی کم‌تری دارد.

۲ هرچه پتانسیل کاهشی استاندارد ($E^\circ$) یک فلز کم‌تر باشد، اتم آن فلز در هوای مرطوب تمایل بیشتری به اکسید شدن و واکنش با اکسیژن دارد.

۳ فلزات قلیایی شامل لیتیم ($_3Li$)، سدیم ($_{11}Na$)، پتاسیم ($_{19}K$)، روبیدیم ($_{37}Rb$)، سزیم ($_{55}Cs$) و فرانسیم ($_{87}Fr$) هستند. $E^\circ$ فلز لیتیم از سایر فلزات کوچک‌تر است، بنابراین در سری الکتروشیمیایی نسبت به همهٔ فلزات در موقعیت پایین‌تری قرار دارد. فعالیت شیمیایی و واکنش‌پذیری فلز لیتیم از سایر فلزات قلیایی کم‌تر است.

**ترکیب** دریک گروه شامل عناصر فلزی، از بالا به پایین با افزایش شعاع اتمی، واکنش‌پذیری فلزات افزایش می‌یابد.

**۵۵. اگر دو جسم فولادی مشابه را برای آبکاری، یک بار در سلول A که حاوی محلول مس (II) سولفات است و بار دیگر در سلول B که حاوی محلول کروم (III) سولفات است، قرار دهیم و پس از انجام فرایند، جرم دو جسم آبکاری شده، همچنان برابر باشد، تعداد الکترون‌های مبادله شده در سلول A، به تقریب چند برابر سلول B است؟ $(Cr=52, Cu=64: g.mol^{-1})$**

۱) ۰/۷۸ ۲) ۱/۸۴ ۳) ۰/۴۸ ۴) ۰/۵۴

**پاسخ: گزینه ۴** سخت | محاسباتی

قبل و بعد از آبکاری جرم هر دو جسم برابر است؛ بنابراین جرم اضافه شده به هر دو جسم نیز برابر خواهد بود. این مقدار جرم اضافه شده را m گرم در نظر می‌گیریم و شمار الکترون‌های مبادله شده در هر سلول را به دست می‌آوریم:

نیم‌واکنش انجام شده در الکترود کاتد سلول A: $Cu^{2+}(aq)+2e^- \rightarrow Cu(s)$

نیم‌واکنش انجام شده در الکترود آند سلول B: $Cr^{3+}(aq)+3e^- \rightarrow Cr(s)$

بنابراین داریم:

$$\text{سلول A}: m\,g\,Cu \times \frac{1\,mol\,Cu}{63\,g\,Cu} \times \frac{2\,mol\,e^-}{1\,mol\,Cu} = \frac{m}{32}\,mol\,e^-$$

$$\text{سلول B}: m\,g\,Cr \times \frac{1\,mol\,Cr}{52\,g\,Cr} \times \frac{3\,mol\,e^-}{1\,mol\,Cr} = \frac{3m}{52}\,mol\,e^-$$

نسبت شمار الکترون‌های مبادله شده در سلول A به سلول B را به دست می‌آوریم:

$$\frac{\frac{m}{32}}{\frac{3m}{52}} = \frac{52}{96} \simeq 0/54$$

**درسنامه:**

**آبکاری فلزها:**

۱) در زندگی روزانه از وسایل گوناگونی استفاده می‌شود که فلز اصلی سازندهٔ آن‌ها آهن و مس است. خوردگی این فلزها از یک‌سو سبب از بین رفتن زیبایی وسیله می‌شود و از سوی دیگر به سلامتی بدن آسیب می‌رساند. به همین دلیل، سطح اغلب این وسایل فلزی را با فلزهایی مانند نقره، کروم، نیکل و طلا می‌پوشانند.

**تعریف آبکاری:** به پوشاندن سطح یک فلز با لایه نازکی از فلزهای ارزشمند و مقاوم در برابر خوردگی، آبکاری گفته می‌شود. فرایند آبکاری در سلول الکترولیتی انجام می‌شود.

سنجش کلاد
www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshCloud

۲) در مورد فرایند آبکاری، به سه نکتهٔ زیر توجه کنید:

الف) جسمی که قرار است روکش فلزی روی آن ایجاد شود، باید **رسانای جریان برق** باشد. این جسم را به عنوان **کاتد سلول الکترولیتی** به **قطب منفی باتری** متصل می‌کنند.

ب) فلزی که اتم‌های آن قرار است روی جسم موردنظر بنشیند، باید به عنوان **آند سلول الکترولیتی** به **قطب مثبت باتری** متصل شود.

پ) الکترولیت مورد استفاده در آبکاری باید دارای کاتیون‌های فلزی باشد که قرار است لایهٔ نازکی از آن روی جسم موردنظر بنشیند. در واقع الکترولیت باید دارای **کاتیون‌های فلز آند** باشد.

۳) در فرایند آبکاری، با برقراری جریان الکتریسیته در الکترود آند (فلزی که قرار است روی جسم بنشیند)، نیم‌واکنش اکسایش رخ می‌دهد و اتم‌های آن به صورت کاتیون وارد محلول الکترولیت می‌شوند؛ از این‌رو به تدریج از جرم تیغهٔ آندی کاسته شده و تیغه باریک می‌شود.

نیم‌واکنش آندی (قطب مثبت): $M(s) \rightarrow M^{n+}(aq) + ne^-$

۴) در الکترود کاتد (فلزی که قرار است آبکاری شود)، کاتیون‌های حاصل از اکسایش تیغهٔ آندی با گرفتن الکترون از سطح کاتد، کاهش یافته و به صورت یک لایهٔ نازک، سطح کاتد را می‌پوشاند. از این‌رو جرم تیغهٔ کاتدی افزایش یافته و تیغه ضخیم می‌شود.

نیم‌واکنش کاتدی (قطب منفی): $M^{n+}(aq) + ne^- \rightarrow M(s)$

۵) در فرایند آبکاری، نیم‌واکنش‌ها هر دو مربوط به فلز پوشاننده (فلزی که نقش آند دارد) بوده و معادلهٔ کلی فرایند آبکاری به صورت زیر است:

$M(s, \text{آند}) \rightarrow M(s, \text{کاتد})$

**تذکر:** با توجه به معادلهٔ کلی فرایند آبکاری، طی واکنش، از جرم تیغهٔ آندی کاسته و به جرم تیغهٔ کاتدی افزوده می‌شود و غلظت یون‌ها در محلول الکترولیت ثابت می‌ماند.

**تله‌تستی** در همهٔ سلول‌های الکترولیتی، الکترودها بی‌اثر نیستند. برای نمونه در فرایند آبکاری، الکترود آند بی‌اثر نیست و در واکنش شرکت می‌کند.

**نکته** در انتخاب فلز پوشاننده در فرایند آبکاری باید به این نکته توجه داشت که $E^\circ$ کاتیون‌های فلز پوشاننده باید بزرگ‌تر از $E^\circ$ مولکول‌های آب باشد؛ زیرا در غیر این صورت در سطح کاتد به جای نیم‌واکنش تبدیل $M^{n+}$ به $M$، نیم‌واکنش کاهش مولکول‌های آب رخ می‌دهد و به جای نشستن لایهٔ نازکی از فلز بر روی سطح، گاز هیدروژن تولید می‌شود و آبکاری با موفقیت انجام نمی‌شود.

نیم‌واکنش کاهش مولکول‌های آب: $2H_2O(l) + 2e^- \rightarrow H_2(g) + 2OH^-(aq)$

**کنکورچی‌میگه؟** **اگر از انرژی الکتریکی حاصل از سلول سوختی هیدروژن، برای آبکاری ۵۰۰ قاشق فولادی با نقره استفاده شود و برای آبکاری هر قاشق، $1/204 \times 10^{22}$ الکترون مبادله شود، چند گرم گاز هیدروژن در سلول سوختی با بازدهی ۸۰ درصد مصرف می‌شود؟ $(H = 1 : g.mol^{-1})$** (کنکور تجربی خارج از کشور ۱۴۰۳)

۱) ۵۰ ۲) ۲۵ ۳) ۱۲/۵ ۴) ۶/۲۵

**پاسخ: گزینه ۳**

**۵۶.** **اگر $E^\circ(Cu^{2+}/Cu^+) = 0/16V$ و $E^\circ(Cu^+/Cu) = 0/52V$ باشد، آیا نمک $Cu^+$ در آب پایدار است؟ (فرض کنید $E^\circ(O_2/H_2O) = 1/23V$ و $E^\circ(H^+/H_2) = 0V$)**

۱) بله، زیرا اکسندهٔ ضعیفی است.

۲) خیر، زیرا به Cu و $Cu^{2+}$ تبدیل می‌شود.

۳) خیر، زیرا به Cu تبدیل می‌شود.

۴) خیر، زیرا به $Cu^{2+}$ تبدیل می‌شود.

**پاسخ: گزینه ۲** سخت | مفهومی

سنجش کلاد
www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshCloud

با توجه به این‌که $E^\circ$ نیم‌واکنش کاهش $Cu^+$ به اتم Cu و اکسایش $Cu^+$ به $Cu^{2+}$، بزرگ‌تر از صفر است، این دو واکنش به‌طور خودبه‌خودی انجام شده و در نتیجه نمک حاوی کاتیون $Cu^+$ در آب پایدار نبوده و به اتم Cu و کاتیون $Cu^{2+}$ تبدیل می‌شود.

**کنکورچی میگه؟** **با توجه به پتانسیل کاهشی استاندارد نیم‌سلول‌های داده شده، کدام مورد درست است؟** (کنکور تجربی نوبت اول ۱۴۰۳)

$$E^\circ(Fe^{2+}/Fe) = -0/41V \quad , \quad E^\circ(Fe^{3+}/Fe^{2+}) = +0/77V \quad , \quad E^\circ(Br_2/2Br^-) = +1/09V$$

$$E^\circ(Fe^{3+}/Fe) = -0/04V \quad , \quad E^\circ(Cl_2/2Cl^-) = +1/35V \quad , \quad E^\circ(I_2/2I^-) = +0/54V$$

۱) مجموع ضرایب استوکیومتری مواد در واکنش: $Fe^{3+}(aq) + Fe(s) \rightarrow Fe^{2+}(aq)$، پس از موازنهٔ معادلهٔ آن برابر ۶ است و به‌طور طبیعی انجام می‌شود.

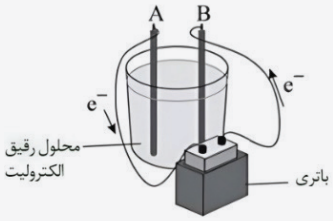
۲) مجموع ضرایب استوکیومتری مواد در واکنش: $Fe^{2+}(aq) + I_2(s) \rightarrow FeI_3(aq)$، پس از موازنهٔ معادلهٔ آن، برابر ۷ است و به‌طور طبیعی انجام می‌شود.

۳) ید، برم و محلول آهن (II) کلرید را می‌توان در ظرفی از جنس آهن نگهداری کرد.

۴) قدرت کاهندگی یون ید، کم‌تر از قدرت کاهندگی فلز آهن و یون برمید است.

**پاسخ: گزینه ۱**

**۵۷. با توجه به شکل مقابل که مربوط به برقکافت آب است، کدام مطلب نادرست است؟**




۱) در اطراف الکترود A، محیط اسیدی و در اطراف الکترود B، محیط بازی است.

۲) اتم‌های سازندهٔ گازهای تولید شده در الکترودهای A و B، همانند کربن، در ساختار سوخت‌های سبز وجود دارند.

۳) از واکنش گاز تولید شده در برقکافت سدیم کلرید مذاب با گاز تولید شده در بخش A این سلول، می‌توان هیدروکلریک اسید تهیه کرد.

۴) در شرایط یکسان حجم گاز تولید شده در الکترود B، دو برابر حجم گاز تولید شده در الکترود A است.

**پاسخ: گزینه ۳** متوسط | مفهومی

**درسنامه:**

| سلول برقکافت آب | | |
|---|---|---|
| **الکترود** | **آند** | **کاتد** |
| **نیم‌واکنش** | $2H_2O(l) \rightarrow O_2(g) + 4H^+(aq) + 4e^-$ | $2H_2O(l) + 2e^- \rightarrow H_2(g) + 2OH^-(aq)$ |
| **pH محیط اطراف** | اسیدی (کاغذ pH قرمزرنگ) | بازی (کاغذ pH آبی‌رنگ) |
| **گاز تولید شده** | اکسیژن ($O_2$) | هیدروژن ($H_2$) |
| **قطب** | مثبت | منفی |

**نکته** با توجه به این که جهت حرکت الکترون‌ها در مدار بیرونی هر دو نوع سلول الکترولیتی و گالوانی، از آند به کاتد است، می‌توان نتیجه گرفت که در سلول‌های الکترولیتی، جهت حرکت الکترون‌ها از قطب مثبت به سمت قطب منفی و در سلول‌های گالوانی، جهت حرکت الکترون‌ها از قطب منفی به سمت قطب مثبت می‌باشد:

| | | | |
|---|---|---|---|
| **جهت حرکت الکترون‌ها در مدار بیرونی** ← | از آند به کاتد | در سلول گالوانی ← | از قطب منفی به قطب مثبت سلول |
| | | در سلول الکترولیتی ← | از قطب مثبت به قطب منفی سلول |

سنجش کلاد
www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshCloud

با توجه به نکتهٔ بالا می‌توان نتیجه گرفت که در سلول الکترولیتی داده شدهٔ مربوط به برقکافت آب، الکترود A، قطب مثبت (آند) و الکترود B قطب منفی (کاتد) سلول را تشکیل می‌دهد. نیم‌واکنش انجام شده در بخش‌های آندی (قطب مثبت) و کاتدی (قطب منفی) این سلول، به صورت زیر است:

$$\text{نیم‌واکنش کاهش در کاتد (قطب منفی)}: 4H_2O(l) + 4e^- \rightarrow 2H_2(g) + 4OH^-(aq)$$

$$\text{نیم‌واکنش اکسایش در آند (قطب مثبت)}: 2H_2O(l) \rightarrow O_2(g) + 4H^+(aq) + 4e^-$$

بنابراین گاز تولید شده در بخش آندی این سلول، گاز اکسیژن $(O_2(g))$ است. حواستان باشد که در بخش کاتدی این سلول (نه بخش آندی آن!) گاز هیدروژن $(H_2(g))$ تولید می‌شود که می‌تواند در واکنش با گاز کلر تولیدشده در فرایند برقکافت سدیم کلرید مذاب، گاز هیدروژن کلرید تهیه کرد که با انحلال در آب، هیدروکلریک اسید را تولید می‌کند.

**بررسی سایر گزینه‌ها:**

۱ در سلول برقکافت آب، در کاتد (الکترود B)، یون هیدروکسید $(OH^-)$ و در آند (الکترود A)، یون هیدرونیوم $(H^+)$ تولید می‌شود؛ پس محیط پیرامون کاتد، بازی $(pH > 7)$ و محیط پیرامون آند، اسیدی $(pH < 7)$ می‌شود.

۲ در الکترودهای A (آند) و B (کاتد) این سلول، به ترتیب گازهای اکسیژن $(O_2)$ و هیدروژن $(H_2)$ تولید می‌شوند که اتم‌های سازندهٔ این گازها به ترتیب O و H هستند. همان‌طور که می‌دانیم، در ساختار سوخت‌های سبز، افزون بر کربن و هیدروژن، اکسیژن نیز وجود دارد.

۴ با توجه به ضرایب استوکیومتری مواد در معادلهٔ واکنش کلی، حجم گاز هیدروژن تولید شده در کاتد، دو برابر حجم گاز اکسیژن تولید شده در آند است:

$$2H_2O(l) \rightarrow \underbrace{2\,H_2(g)}_{\text{در کاتد}(-)\ ۲\text{ مول}} + \underbrace{O_2(g)}_{\text{در آند}(+)\ ۱\text{ مول}}$$

**کنکورچی‌میگه؟** کدام مورد دربارهٔ «سلول برقکافت آب» و «سلول سوختی هیدروژن - اکسیژن»، نادرست است؟ (کنکور ریاضی نوبت دوم ۱۴۰۴)

۱) در کاتد سلول برقکافت، گاز هیدروژن و در کاتد سلول سوختی، آب تشکیل می‌شود.

۲) جهت جریان در سلول برقکافت، از آند به کاتد و در سلول سوختی، از قطب منفی به قطب مثبت است.

۳) از واکنش یکی از فراورده‌های نیم‌واکنش آندی سلول برقکافت و گاز ورودی به آند در سلول سوختی، آب تشکیل می‌شود.

۴) شمار الکترون‌های نیم‌واکنش آندی سلول برقکافت، ۲ برابر شمار الکترون‌های نیم‌واکنش کاتدی سلول سوختی است.

**پاسخ: گزینه ۴**

**۵۸. کدام مورد درست است؟**

۱) روش‌هایی مانند قیراندود کردن و رنگ زدن می‌توانند به‌طور کامل از خوردگی فلزها پیشگیری کنند.

۲) فداکاری یک یا چند فلز برای حفاظت آهن، ساده‌ترین راه برای جلوگیری از خوردگی آهن است.

۳) برای حفاظت از آهن در بدنهٔ کشتی و لوله‌های نفتی، می‌توان از فراوان‌ترین فلز قلیایی خاکی حل شده در آب دریا استفاده کرد.

۴) با توجه به ترتیب $H^+ < B^{2+} < A^{2+}$ که مربوط به قدرت اکسندگی گونه‌ها است، برای حفاظت از آهن در برابر خوردگی، فلز B مناسب‌تر از فلز A است.

**پاسخ: گزینه ۳** ساده | حفظی

برای حفاظت از آهن در بدنه کشتی و لوله‌های نفتی می‌توان از فلز منیزیم استفاده کرد. زیرا $E^\circ$ منیزیم از آهن کم‌تر بوده و در رقابت آندی با آهن پیروز شده و اکسید می‌شود و بدین‌ترتیب فلز آهن از خوردگی حفظ می‌شود.

**ترکیب** یون $Mg^{2+}$، فراوان‌ترین کاتیون حاصل از فلزات قلیایی خاکی در آب دریاها است.

www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshCloud

**بررسی سایر گزینه‌ها:**

۱ و ۲ وسایل آهنی در هوای مرطوب دچار خوردگی می‌شوند. واکنش ناخواسته‌ای که در شهرهای بندری و ساحلی بیشتر خودنمایی می‌کند. بدیهی است که **ساده‌ترین** راه برای جلوگیری از خوردگی آهن، ایجاد یک پوشش محافظ است تا از رسیدن اکسیژن و رطوبت به آهن جلوگیری کند. (نادرستی گزینهٔ (۲)) پوششی که با روش‌هایی مانند رنگ زدن، قیراندود کردن و روکش دادن ایجاد می‌شود. باید توجه داشت که چنین روش‌هایی **نمی‌توانند** به‌طور کامل از خوردگی پیشگیری کنند (نادرستی گزینهٔ (۱))، زیرا به تدریج رطوبت و اکسیژن از روزنه‌های این پوشش‌ها به درون نفوذ کرده و به سطح آهن می‌رسند و خوردگی دوباره آغاز می‌شود.

۴ با توجه به ترتیب قدرت اکسندگی یون‌ها و این‌که $E^\circ$ هیدروژن برابر صفر است. می‌توان پی برد که $E^\circ$ فلزات A و B بزرگ‌تر از صفر است و از هیچ‌کدام از آن دو **نمی‌توان** برای حفاظت از آهن در برابر خوردگی استفاده کرد.

**درسنامه:**

**راه‌های جلوگیری از خوردگی آهن:** برای جلوگیری از خوردگی آهن دو روش کلی وجود دارد:

الف) حفاظت فیزیکی

ب) حفاظت کاتدی

**حفاظت فیزیکی:**

ساده‌ترین راه برای جلوگیری از خوردگی آهن، ایجاد یک پوشش محافظ بر روی سطح آهن است تا از رسیدن اکسیژن و رطوبت به آهن جلوگیری کند. رنگ زدن، قیراندود کردن و روکش دادن نمونه‌هایی از روش‌های **حفاظت فیزیکی** است.

**تذکر:** به کمک روش‌های فیزیکی نمی‌توان به‌طور کامل از خوردگی پیشگیری کرد؛ زیرا به تدریج، رطوبت و اکسیژن از روزنه‌های این پوشش‌ها به درون نفوذ کرده و به سطح آهن می‌رسد و خوردگی آهن آغاز می‌شود. *پس خیلی رو این روش حساب نکنید.*

**حفاظت کاتدی (شیمیایی)**

۱) همان‌طور که می‌دانید، هنگامی‌که دو فلز در هوای مرطوب با هم در تماس باشند، برای اکسایش با یکدیگر رقابت می‌کنند که در این رقابت فلز کاهنده‌تر که $E^\circ$ کوچک‌تری دارد، برنده شده و اکسید می‌شود. به این ترتیب با اکسید شدن فلز کاهنده‌تر که $E^\circ$ کوچک‌تری دارد، فلز دیگر که $E^\circ$ بزرگ‌تری دارد، اکسید نشده و دست‌نخورده باقی می‌ماند و به اصطلاح محافظت می‌شود.

| نیم‌واکنش کاهشی | $E^\circ(V)$ |
|---|---|
| $Cu^{2+}(aq)+2e^- \rightarrow Cu(s)$ | +۰/۳۴ |
| $Fe^{2+}(aq)+2e^- \rightarrow Fe(s)$ | −۰/۴۴ |
| $Zn^{2+}(aq)+2e^- \rightarrow Zn(s)$ | −۰/۷۶ |
| $Mg^{2+}(aq)+2e^- \rightarrow Mg(s)$ | −۲/۳۷ |

کاهندهٔ قوی‌تر ↓

به‌طور مثال: اگر فلز منیزیم یا روی در هوای مرطوب با آهن در تماس باشند، با توجه به $E^\circ$ آن‌ها، قطعاً منیزیم یا روی در رقابت با آهن برای از دست دادن الکترون (اکسایش یافتن) برنده شده و اکسید می‌شوند و به این ترتیب، در این شرایط از اکسایش و در نتیجه خوردگی آهن جلوگیری خواهد شد. این در حالی است که اگر فلز مس در تماس با آهن باشد، چون آهن $E^\circ$ کوچک‌تری دارد، در این رقابت، آهن دچار خوردگی می‌شود.

۲) مهندسین با تکیه بر دانش الکتروشیمی توانسته‌اند روش‌های علمی و موثرتری را برای حفاظت از آهن در محیط‌های گوناگون به کار گیرند. برای نمونه برای حفاظت از آهن در بدنهٔ کشتی‌ها و لوله‌های نفتی، از **قطعات منیزیم** استفاده می‌کنند.

**تذکر:** به‌طور کلی در حفاظت کاتدی، با تشکیل یک سلول گالوانی، فلز با $E^\circ$ کوچک‌تر به عنوان آند، اکسید می‌شود و فلز با $E^\circ$ بزرگ‌تر به عنوان کاتد در برابر خوردگی محافظت می‌شود ولی خود کاهش نمی‌یابد.

**۵۹. اگر دامنهٔ تغییرات عدد اکسایش عنصرهای اکسیژن، فلوئور، کروم، منگنز و نیتروژن را به ترتیب با a، b، c، d و e نشان دهیم، کدام رابطه درست است؟**

۱) $c = d = e$ ۲) $c = 2b + a$ ۳) $e = d + a$ ۴) $e - c = b$

**پاسخ: گزینه ۲** ساده | مفهومی

سنجش کلاد
www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshCloud

دامنهٔ تغییرات عدد اکسایش هریک از عنصرهای داده شده به صورت زیر است:

اکسیژن $\begin{cases} \text{بیشترین عدد اکسایش} = +2 \\ \text{کم‌ترین عدد اکسایش} = -2 \end{cases} \rightarrow$ دامنهٔ تغییرات $= a = 2-(-2) = 4$

فلوئور $\begin{cases} \text{بیشترین عدد اکسایش} = 0 \\ \text{کم‌ترین عدد اکسایش} = -1 \end{cases} \rightarrow$ دامنهٔ تغییرات $= b = 0-(-1) = 1$

کروم $\begin{cases} \text{بیشترین عدد اکسایش} = +6 \\ \text{کم‌ترین عدد اکسایش} = 0 \end{cases} \rightarrow$ دامنهٔ تغییرات $= c = 6-0 = 6$

منگنز $\begin{cases} \text{بیشترین عدد اکسایش} = +7 \\ \text{کم‌ترین عدد اکسایش} = 0 \end{cases} \rightarrow$ دامنهٔ تغییرات $= d = 7-0 = 7$

نیتروژن $\begin{cases} \text{بیشترین عدد اکسایش} = +5 \\ \text{کم‌ترین عدد اکسایش} = -3 \end{cases} \rightarrow$ دامنهٔ تغییرات $= e = +5-(-3) = 8$

از بین گزینه‌ها فقط رابطهٔ $c = 2b + a$ برقرار است: $6 = 2(1) + 4 = 6$

## درسنامه:

۱) بهتر است دامنهٔ تغییرات عدد اکسایش برخی عنصرها را بلد باشید:

| شمارهٔ گروه | ۱ | ۲ | ۱۳ | ۱۴ | ۱۵ | ۱۶ | ۱۷ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| پایین‌ترین عدد اکسایش | ۰ | ۰ | ۰ | −۴ | −۳ | −۲ | −۱ |
| بالاترین عدد اکسایش | +۱ | +۲ | +۳ | +۴ | +۵ | +۶ | +۷ |

به‌طور کلی در همهٔ فلزها، پایین‌ترین عدد اکسایش برابر با صفر است (در حالت آزاد). برای عنصرهای گروه ۱۴ تا ۱۷ (به جز اکسیژن و فلوئور)، پایین‌ترین و بالاترین عدد اکسایش از رابطه‌های زیر به دست می‌آید:

پایین‌ترین عدد اکسایش = شمارهٔ گروه − ۱۸

بالاترین عدد اکسایش = شمارهٔ گروه − ۱۰ = یکان شمارهٔ گروه

۲) در مورد دامنهٔ تغییرات عدد اکسایش، استثناهایی هم به چشم می‌خورد:

آ) دامنهٔ تغییرات عدد اکسایش اکسیژن از −۲ تا +۲ است.

ب) عدد اکسایش فلوئور تنها می‌تواند اعداد صفر (در $F_2$) و −۱ (در بقیهٔ گونه‌ها) باشد.

پ) عدد اکسایش هیدروژن می‌تواند صفر، −۱ و +۱ باشد.

۳) برخی فلزهای واسطه هم عددهای اکسایش متنوعی دارند.

| فلز واسطه | وانادیم (۲۳ V) | کروم (۲۴ Cr) | منگنز (۲۵ Mn) | آهن (۲۶ Fe) | مس (۲۹ Cu) |
|---|---|---|---|---|---|
| بالاترین عدد اکسایش | +۵ | +۶ | +۷ | +۳ | +۲ |

دامنه عدد اکسایش برای عناصر فلزی و نافلزی به صورت زیر است.

| | |
|---|---|
| نافلز | Max ← یکان شمارهٔ گروه (به جز O و F) |
| | Min ← Max − ۸ |
| فلز | Max ← یکان شمارهٔ گروه (به جز گروه‌های ۹، ۱۰ و ۱۱) |
| | Min ← صفر |

سنجش کلاد
www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshCloud

**کنکورچی‌میگه؟** جمع جبری بار یون‌های نیترات، سیلیکات، فسفات و هیدروژن کربنات و عدد اکسایش اتم مرکزی آن‌ها کدام است؟ (کنکور تجربی خارج از کشور ۱۴۰۱)

۱) ۱۰ ۲) ۹ ۳) −۱ ۴) −۲

**پاسخ: گزینه ۲**

**۶۰. در فرایند خوردگی آهن، در صورتی‌که محیط ..... باشد، نیم‌واکنش کاتدی، عکس نیم‌واکنشی است که در قطب ..... سلول برقکافت آب انجام می‌شود.**

۱) اسیدی - مثبت ۲) اسیدی - منفی ۳) خنثی - مثبت ۴) خنثی - منفی

**پاسخ: گزینه ۱** ساده | حفظی

فرایند خوردگی آهن نیم‌واکنش‌ها به صورت زیر است:

$$\text{نیم‌واکنش آندی}\begin{cases}Fe(s)\rightarrow Fe^{2+}(aq)+2e^-\\ Fe^{2+}(aq)\rightarrow Fe^{3+}(aq)+e^-\end{cases}$$

$$\text{نیم‌واکنش کاتدی}\begin{cases}\text{در محیط خنثی: } O_2(g)+2H_2O(l)+4e^-\rightarrow 4OH^-(aq)\\ \text{در محیط اسیدی: } O_2(g)+4H^+(aq)+4e^-\rightarrow 2H_2O(l)\end{cases}$$

در فرایند برقکافت آب، نیم‌واکنش‌ها به صورت زیر است:

$$\text{نیم‌واکنش آندی: } 2H_2O(l)\rightarrow O_2(g)+4H^+(aq)+4e^-$$

$$\text{نیم‌واکنش کاتدی: } 2H_2O(l)+2e^-\rightarrow H_2(g)+2OH^-(aq)$$

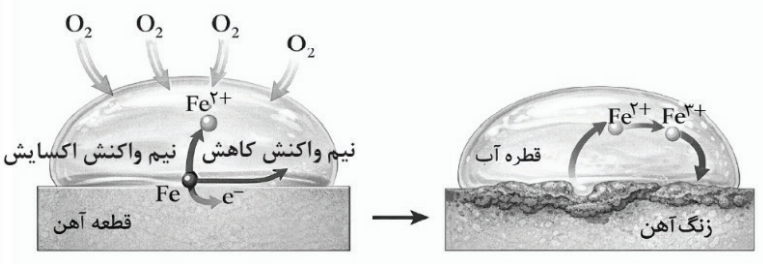
با توجه به نیم‌واکنش‌ها مشخص است که نیم‌واکنش کاتدی در محیط اسیدی در فرایند خوردگی آهن، برعکس نیم‌واکنش آندی در فرایند برقکافت آب است. برقکافت آب در یک سلول الکترولیتی انجام می‌شود، بنابراین آند قطب مثبت و کاتد قطب منفی سلول است.

**درسنامه:**

**خوردگی آهن:**

۱) آهن پرمصرف‌ترین فلز در جهان است، از این‌رو خوردگی آن خسارت‌های هنگفتی به اقتصاد کشورها وارد می‌کند، به طوری‌که سالانه حدود ۲۰ درصد از آهن تولیدی جایگزین قطعه‌های خورده شده می‌شود.

۲) هنگامی‌که وسایل آهنی در هوای مرطوب قرار می‌گیرند، یک واکنش اکسایش - کاهش انجام می‌شود. این واکنش به‌طور طبیعی باعث اکسایش آهن می‌شود و از زیبایی و استحکام آن می‌کاهد. در زیر، نکات مربوط به فرایند زنگ زدن آهن در هوای مرطوب ارائه شده است.




الف) اگرچه اکسیژن نافلزی فعال با پتانسیل کاهشی مثبت است ولی نمی‌تواند به‌طور مستقیم و در غیاب رطوبت هوا سبب خوردگی قطعات آهنی شود. پس زنگ زدن یک قطعهٔ آهنی در هوای خشک صورت نمی‌گیرد.

ب) در فرایند زنگ زدن یک قطعه آهن، سطح آهن و یک قطرهٔ آب، یک سلول گالوانی تشکیل می‌دهند؛ به‌طوری که قسمت‌های مختلف سطح آهن، بخش‌های آندی و کاتدی و قطرهٔ آب، محلول الکترولیت این سلول را تشکیل می‌دهد.

سنجش کلاد
www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshCloud

پ) خوردگی آهن را می‌توان شامل **چهار مرحله** در نظر گرفت:

**مرحلهٔ ۱:** بخشی از سطح آهن که به عنوان آند عمل می‌کند. مطابق نیم‌واکنش اکسایش زیر به یون $Fe^{2+}$ تبدیل می‌شود.

نیم‌واکنش اکسایش در بخش آندی : $Fe(s) \rightarrow Fe^{2+}(aq) + 2e^-$

**مرحلهٔ ۲:** در بخش کاتدی سطح آهن، الکترون‌های حاصل از اکسایش آهن در حضور مولکول‌های آب، سبب کاهش اکسیژن هوا شده و مطابق نیم‌واکنش کاهش مقابل به یون هیدروکسید تبدیل می‌شود.

نیم‌واکنش کاهش در بخش کاتدی : $O_2(g) + 2H_2O(l) + 4e^- \rightarrow 4OH^-(aq)$

**مرحلهٔ ۳:** یون‌های $Fe^{2+}$ تولید شده در بخش آندی وارد قطرهٔ آب شده و به سمت بخش کاتدی حرکت کرده و در آن‌جا با یون‌های هیدروکسید وارد واکنش شده و $Fe(OH)_2$ تشکیل می‌شود و در بخش کاتدی رسوب می‌کند.

$$Fe^{2+}(aq) + 2OH^-(aq) \rightarrow Fe(OH)_2(s)$$

**مرحلهٔ ۴:** رسوب $Fe(OH)_2$ تولید شده در بخش کاتدی، دوباره توسط اکسیژن و آب مطابق واکنش زیر اکسید شده و به زنگ آهن $Fe(OH)_3$ تبدیل می‌شود.

$$4Fe(OH)_2(s) + O_2(g) + 2H_2O(l) \rightarrow 4Fe(OH)_3(s)$$

رنگ رسوب $Fe(OH)_3$، قرمز مایل به قهوه‌ای است.

ت) معادلهٔ کلی فرایند خوردگی آهن توسط گاز اکسیژن در هوای مرطوب به صورت زیر می‌باشد: *(این واکنش رو می‌تونین به کمک واکنش‌ها و نیم‌واکنش‌های بالا به دست بیارید.)*

$$4Fe(s) + 3O_2(g) + 6H_2O(l) \rightarrow 4Fe(OH)_3(s)$$

بخشی از آهن که زیر قطره قرار دارد، بخش آندی و بخشی از آهن که در اطراف قطرهٔ آب قرار دارد، بخش کاتدی به حساب می‌آید.

ث) آهن در آب‌های فاقد اکسیژن و در مناطق خشک معمولاً زنگ نمی‌زند ولی در مناطقی که دارای هوای مرطوب هستند، مانند شهرهای بندری و ساحلی، سرعت زنگ زدن آهن بالا بوده و در نتیجه سرعت خوردگی آن زیاد است.

**عوامل موثر بر سرعت خوردگی آهن:**

۱) محیط اسیدی، سرعت زنگ زدن آهن را افزایش می‌دهد.

در فرایند زنگ زدن آهن، گاز اکسیژن عامل اکسنده است و نیم‌واکنش کاتدی در محیط غیراسیدی به صورت $O_2(g) + 2H_2O(l) + 4e \rightarrow 4OH^-(aq)$ , $E^\circ = 0/4V$ انجام می‌شود، حال اگر محیط اسیدی باشد، به جای انجام این نیم‌واکنش، نیم‌واکنش $O_2(g) + 4H^+(aq) + 4e \rightarrow 2H_2O(l)$ , $E^\circ = 1/23V$ رخ می‌دهد که در این صورت به علت بزرگ‌تر بودن $E^\circ$ نیم‌واکنش دوم، در محیط اسیدی، گاز اکسیژن از اتم‌های آهن راحت‌تر الکترون می‌گیرد و قدرت اکسندگی آن افزایش می‌یابد؛ از این‌رو سرعت زنگ زدن آهن در محیط‌های اسیدی بیشتر از محیط‌های غیراسیدی است.

**تذکر:** باران‌های اسیدی حاوی سولفوریک اسید ($H_2SO_4$) و نیتریک اسید ($HNO_3$) هستند و سرعت زنگ زدن قطعات آهن را افزایش می‌دهند.

۲) محیط بازی، سرعت زنگ زدن آهن را کاهش می‌دهند.

زیرا در محیط های بازی غلظت $OH^-$ زیاد است و نیم‌واکنش کاتدی: $O_2(g) + 2H_2O(l) + 4e \rightarrow 4OH^-(aq)$ با سرعت کم‌تری انجام می‌شود؛ از این‌رو سرعت زنگ زدن آهن کاهش می‌یابد. *بعد از آموختن فصل آخر، دلیلش رو دقیق‌تر متوجه می‌شید.*

۳) وجود نمک‌های محلول مانند سدیم کلرید ($NaCl$)، سدیم نیترات ($NaNO_3$) و ... سرعت زنگ زدن آهن را افزایش می‌دهند.

زیرا وجود این نمک‌ها در قطرهٔ آب سبب می‌شود در محلول الکترولیت (قطرهٔ آب)، مبادلهٔ الکترون بین آهن، اکسیژن و آب با سرعت بیشتری انجام شود و سرعت زنگ زدن آهن افزایش یابد.

۴) افزایش غلظت اکسیژن در محیط، سبب افزایش سرعت زنگ زدن آهن می‌شود.

زیرا با افزایش غلظت واکنش‌دهنده‌ها، سرعت واکنش‌های شیمیایی افزایش می‌یابد.

۵) اگر آهن در مجاورت فلزی قرار گیرد که $E^\circ$ آن کوچک‌تر از $E^\circ$ آهن است، آهن موردنظر زنگ نمی‌زند.

سنجش کلاد
www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshCloud

زیرا فلز مجاور که $E^\circ$ کوچک‌تری دارد به جای آهن الکترون از دست داده و اکسید می‌شود؛ از این‌رو آهن زنگ نمی‌زند.

۶) اگر آهن در مجاورت فلزی قرار گیرد که $E^\circ$ آن بزرگ‌تر از $E^\circ$ آهن است، آهن با سرعت بیشتری زنگ می‌زند.

آهن نقش آند ایفا می‌کند و با شدت بیشتری اکسایش می‌یابد و دچار خوردگی می‌شود.

**کنکورچی‌میگه؟** **دربارهٔ فرایند خوردگی آهن، کدام مورد درست است؟** (کنکور تجربی خارج از کشور ۱۴۰۲)

۱) مولکول آب در واکنش کلی فرایند شرکت دارد و برای تشکیل یون هیدروکسید ضروری است.

۲) به‌طور طبیعی پیشرفت می‌کند و نگهداری آهن در محفظهٔ خلأ، فرایند را تسریع می‌کند.

۳) فراوردهٔ نهایی، آهن (III) اکسید است که از اکسایش تک‌مرحله‌ای فلز تشکیل می‌شود.

۴) تفاوت مجموع ضرایب استوکیومتری فراورده(ها) و واکنش‌دهنده(ها) در معادلهٔ موازنه شدهٔ نیم‌واکنش کاهش، برابر ۲ است.

**پاسخ: گزینه ۱**

**۶۱. در یک باغچه، گل‌های ادریسی به رنگ آبی پررنگ دیده می‌شوند. باغبان تصمیم می‌گیرد بدون تعویض گونهٔ گیاه، رنگ گل‌ها را به صورتی تغییر دهد. کدام اقدام مؤثرتر است؟**

۱) افزودن آلومینیم سولفات به خاک

۲) افزودن آهک به خاک

۳) آبیاری با آب باران

۴) استفاده از کود نیتروژن‌دار

**پاسخ: گزینه ۲** ساده | مفهومی

گل‌های ادریسی در خاک‌هایی که خاصیت اسیدی دارند به رنگ آبی شکوفا می‌شوند. برای تغییر رنگ گیاه می‌توان خاصیت اسیدی خاک را تغییر داد و یا کم کرد، بدین منظور می‌توان از کلسیم اکسید (آهک یا $CaO$) استفاده کرد. آهک یک اکسید فلزی بوده و خاصیت بازی دارد، با افزودن آن به خاک به مرور از خاصیت اسیدی خاک کم شده و گل‌ها تغییر رنگ می‌دهند. (درستی گزینهٔ (۲))

افزودن آلومینیم سولفات به خاک و استفاده از کود نیتروژن‌دار تأثیر بسزایی در تغییر خاصیت اسیدی خاک نمی‌گذارند و نمی‌توانند موجب تغییر رنگ گیاه شوند. (نادرستی گزینه‌های (۱) و (۴)) همچنین باران حاوی کربنیک اسید است و آبیاری خاک با آن موجب افزایش خاصیت اسیدی خاک شده و باعث می‌شود که گل‌ها همچنان آبی بمانند. (نادرستی گزینهٔ (۳))

**نکته**

| رنگ گل اردیسی | رنگ کاغذ pH | مقایسهٔ $[H^+]$ و $[OH^-]$ | محدود pH | خاصیت خاک |
|---|---|---|---|---|
| آبی | سرخ | $[H^+] > [OH^-]$ | $pH < ۷$ | اسیدی |
| سرخ | آبی | $[H^+] < [OH^-]$ | $pH > ۷$ | بازی |

**۶۲. هر کدام از واکنش‌های زیر را می‌توان در یک سلول گالوانی انجام داد، به جز .....**

۱) واکنش $Cu^{۲+}(aq)$ با $Zn(s)$

۲) واکنش $Ag^+(aq)$ با $Al(s)$

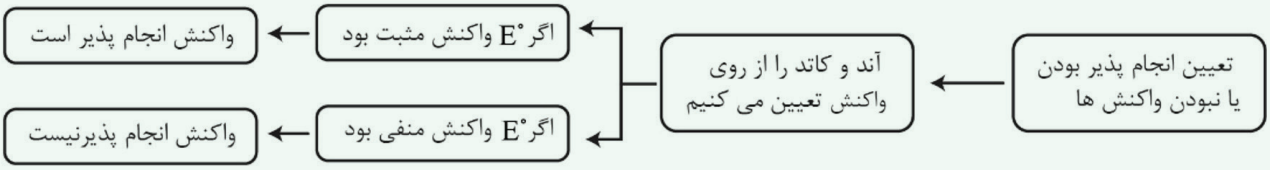
۳) واکنش $H^+(aq)$ با $Fe(s)$

۴) واکنش $Mg^{۲+}(aq)$ با $Mn(s)$

**پاسخ: گزینه ۴** ساده | مفهومی

**نکته** برای پیش‌بینی انجام‌پذیر بودن یا نبودن واکنش‌های اکسایش - کاهش می‌توان $E^\circ$ واکنش را به کمک رابطهٔ $E^\circ_{\text{واکنش}} = E^\circ_{\text{کاتد}} - E^\circ_{\text{آند}}$ محاسبه کرد، در صورتی که $E^\circ$ واکنش مثبت بوده، یعنی واکنش انجام‌پذیر است ولی اگر $E^\circ$ واکنش منفی بود یعنی واکنش انجام‌پذیر نیست.

سنجش کلاد
www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshCloud




برای پیش‌بینی انجام‌پذیر بودن یا نبودن واکنش‌های اکسایش - کاهش به روش تستی و سریع‌تر، باید نیم‌واکنش را بر اساس مقادیر $E^\circ$ آن‌ها از بزرگ به کوچک مرتب کرد و سپس با دانستن این‌که واکنش میان گونه سمت چپ نیم‌واکنش بالاتر با گونهٔ سمت راست نیم‌واکنش پایین‌تر، انجام‌پذیر است، انجام‌پذیر بودن یا نبودن آن را تعیین کرد.

ترتیب $E^\circ$ گونه‌های داده شده، در گزینه‌ها به صورت مقابل است:

| |
|---|
| $Ag^+(aq)+e^- \rightarrow Ag(s)$ |
| $Cu^{2+}(aq)+2e^- \rightarrow Cu(s)$ |
| $2H^+(aq)+2e^- \rightarrow H_2(s)$ |
| $Fe^{2+}(aq)+2e^- \rightarrow Fe(s)$ |
| $Zn^{2+}(aq)+2e^- \rightarrow Zn(s)$ |
| $Mn^{2+}(aq)+2e^- \rightarrow Mn(s)$ |
| $Al^{3+}(aq)+3e^- \rightarrow Al(s)$ |
| $Mg^{2+}(aq)+2e^- \rightarrow Mg(s)$ |

$E^\circ$ افزایش

طبق نکتهٔ بالا، واکنش میان گونه سمت چپ نیم‌واکنش بالاتر با گونهٔ سمت راست نیم‌واکنش پایین‌تر در یک سلول گالوانی ($E^\circ > 0$) و به صورت خودبه‌خودی انجام‌پذیر است. بنابراین همهٔ واکنش‌های داده شده به جز واکنش $Mg^{2+}(aq)$ با $Mn(s)$ در یک سلول گالوانی انجام‌پذیر هستند.

دقت کنید که واکنش میان $Mg^{2+}(aq)$ و $Mn(s)$ با اعمال نیروی خارجی و به صورت غیرخودبه‌خودی در یک سلول الکترولیتی ($E^\circ < 0$) می‌تواند انجام شود.

تذکر: نیازی به حفظ عناصر مختلف که در کتاب درسی مطرح شده است، نیست، اما باید مقایسهٔ آنها با یک‌دیگر و موقعیت آن‌ها در سری الکتروشیمیایی نسبت به یکدیگر را بلد باشید.

**کنکورچی‌میگه؟** **با توجه به پتانسیل کاهشی استاندارد نیم‌سلول‌های زیر، کدام واکنش در جهت طبیعی انجام کدام واکنش در جهت طبیعی انجام نمی‌شود؟** (ریاضی نوبت دوم ۱۴۰۳)

$E^\circ(V^{2+}/V) = -1/20\,V$ $\quad$ $E^\circ(V^{3+}/V^{2+}) = -0/26\,V$

$E^\circ(Mn^{2+}/Mn) = -1/18\,V$ $\quad$ $E^\circ(Fe^{3+}/Fe) = -0/04\,V$

۱) $V(s)+Fe^{3+}(aq) \rightarrow V^{2+}(aq)+Fe(s)$

۲) $Mn(s)+Fe^{3+}(aq) \rightarrow Mn^{2+}(aq)+Fe(s)$

۳) $Mn(s)+V^{3+}(aq) \rightarrow V^{2+}(aq)+Mn^{2+}(aq)$

۴) $V^{3+}(aq)+Fe(s) \rightarrow V^{2+}(aq)+Fe^{3+}(aq)$

**پاسخ: گزینه ۴**

**۶۳. نیم‌واکنش‌های نوعی باتری لیتیمی که در تلفن همراه به کار می‌رود به شکل زیر است:**

$Li(s) \rightarrow Li^+(s)+e^-$

$MnO_2(s)+Li^+(s)+e^- \rightarrow LiMnO_2(s)$

**هنگامی که تلفن همراه ..... است، ..... .**

۱) روشن - الکترود حاوی Li، در نقش کاتد ظاهر می‌شود.

۲) روشن - الکترودی که قطب منفی به‌شمار می‌رود، در حالت شارژ شدن به مثبت تغییر پیدا می‌کند.

۳) در حال شارژ شدن - یون‌های $Li^+$ به سمت قطب مثبت سلول حرکت می‌کنند.

۴) در حال شارژ شدن - در آند یون‌های $Mn^{3+}$ به $Mn^{4+}$ تبدیل می‌شوند.

**پاسخ: گزینه ۴** متوسط | مفهومی

**سرنخ** هنگامی‌که تلفن همراه روشن است، باتری نقش سلول گالوانی و هنگامی‌که در حال شارژ شدن است، باتری نقش سلول الکترولیتی را دارد.

هنگامی که تلفن همراه روشن است، باتری نقش سلول گالوانی را دارد و نیم‌واکنش‌ها به صورت زیر است:

سنجش کلاد
www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshCloud

نیم‌واکنش آندی (قطب منفی): $Li(s) \rightarrow Li^{+}(s) + e^{-}$

نیم‌واکنش کاتدی (قطب مثبت): $MnO_2(s) + Li^{+}(s) + e^{-} \rightarrow LiMnO_2(s)$

هنگامی که تلفن همراه در حال شارژ شدن است، باتری نقش سلول الکترولیتی را دارد و جهت حرکت الکترون دو نیم‌واکنش برعکس حالت قبلی شده و نیم‌واکنش‌ها به صورت زیر است:

نیم‌واکنش آندی (قطب مثبت): $LiMnO_2(s) \rightarrow MnO_2(s) + Li^{+}(s) + e^{-}$

نیم‌واکنش کاتدی (قطب منفی): $Li^{+}(s) + e^{-} \rightarrow Li(s)$

**بررسی همهٔ گزینه‌ها:**

۱ در حالت روشن، باتری نقش سلول گالوانی را دارد و الکترود حاوی لیتیم $(Li)$ در نقش آند (نه کاتد) ظاهر می‌شود.

۲ در حالت روشن، باتری نقش سلول گالوانی را دارد و الکترود حاوی لیتیم $(Li)$، آند (قطب منفی) است. در حالت شارژ شدن این الکترود نقش کاتد را دارد و قطب منفی سلول الکترولیتی ایجاد شده محسوب می‌شود.

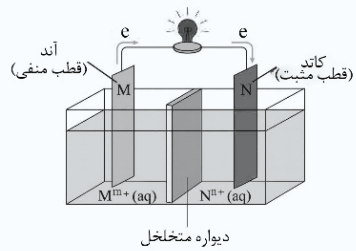
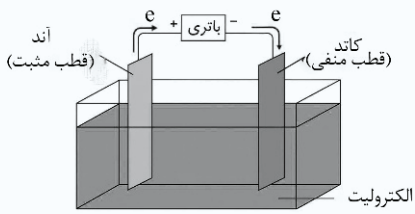
۳ در هر دو نوع سلول گالوانی و الکترولیتی، کاتیون‌های تولید شده در آند (در اینجا کاتیون $Li^{+}$) به سمت کاتد مهاجرت می‌کنند. در یک سلول الکترولیتی، کاتد، قطب منفی است.

۴ در حالت شارژ شدن، باتری نقش سلول الکترولیتی را دارد و نیم‌واکنش زیر در آند آن انجام می‌شود:

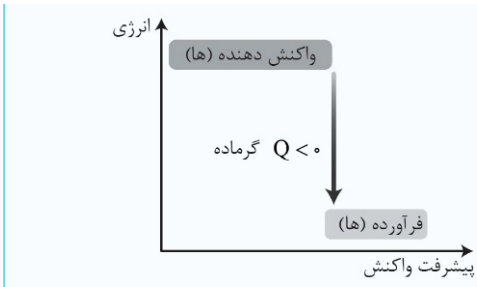
$$\underset{\text{عدد اکسایش}=+3}{Li\,\underset{\downarrow}{Mn}\,O_2(s)} \rightarrow \underset{\text{عدد اکسایش}=+4}{\underset{\downarrow}{Mn}O_2(s)} + Li^{+}(s) + e^{-}$$

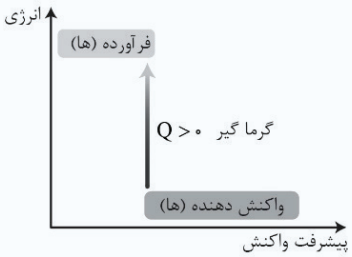
همان‌طور که می‌بینید عدد اکسایش منگنز $(Mn)$ از $+3$ به $+4$ تغییر می‌کند.

**جمع‌بندی:** مقایسهٔ سلول‌های گالوانی و الکترولیتی

| | سلول‌های گالوانی: | سلول‌های الکترولیتی: |
|---|---|---|
| |  |  |
| **تفاوت‌ها:** | ۱- هدف تولید برق است.<br>۲- بخشی از انرژی شیمیایی به انرژی الکتریکی تبدیل می‌شود.<br>۳- الکترود آند قطب منفی و الکترود کاتد قطب مثبت سلول است.<br>۴- جهت حرکت الکترون‌ها از قطب منفی (آند) به قطب مثبت (کاتد) است.<br>۵- واکنش در جهت طبیعی و به‌طور خودبه‌خودی انجام می‌شود.<br>۶- سطح انرژی واکنش‌دهنده‌ها بالاتر از فراورده‌ها است.<br>۷- فراورده‌ها پایدارتر از واکنش‌دهنده‌ها هستند.<br>۸- نمودار انرژی - پیشرفت واکنش به صورت زیر است: | ۱- هدف، انجام واکنش در خلاف جهت طبیعی به کمک جریان برق است.<br>۲- انرژی الکتریکی به انرژی شیمیایی تبدیل می‌شود.<br>۳- الکترود آند قطب مثبت و الکترود کاتد قطب منفی سلول است.<br>۴- جهت حرکت الکترون‌ها از قطب مثبت (آند) به قطب منفی (کاتد) است.<br>۵- واکنش در خلاف جهت طبیعی و به‌طور غیرخودبه‌خودی انجام می‌شود.<br>۶- سطح انرژی واکنش‌دهنده پایین‌تر از فراورده‌ها اس ت.<br>۷- فراورده‌ها ناپایدارتر از واکنش‌دهنده‌ها هستند.<br>۸- نمودار انرژی - پیشرفت واکنش به صورت زیر است: |

سنجش کلاد
www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshCloud




**شباهت‌ها:**

۱- واکنش انجام شده در هر نوع سلول، از نوع اکسایش - کاهش است.

۲- در هر دو نوع سلول، نیم‌واکنش اکسایش در آند و نیم‌واکنش کاهش در کاتد رخ می‌دهد.

۳- در الکترولیت هر دو نوع سلول، جهت حرکت آنیون‌ها به سمت آند و کاتیون‌ها به سمت کاتد است.

۴- در هر دو نوع سلول، جهت حرکت الکترون‌ها در مدار بیرونی (رسانای الکترونی) از آند به کاتد است.

**۶۴. کدام عبارت در ارتباط با پاک‌کننده‌های خورنده درست است؟**

۱) این پاک‌کننده‌ها تنها به دلیل خاصیت اسیدی که دارند، باعث خوردگی سطوح می‌شوند.

۲) استفاده از این پاک‌کننده‌ها روی سطوح فلزی بی‌خطر است، زیرا فلزها در برابر مواد شیمیایی موجود در این پاک‌کننده‌ها، مقاوم هستند.

۳) این پاک‌کننده‌ها علاوه بر برهم‌کنش با ذره‌های آلاینده، با آن‌ها واکنش شیمیایی انجام می‌دهند.

۴) از ویژگی‌های مشترک پاک‌کننده‌های خورنده، داشتن بوی تند است.

**پاسخ: گزینه ۳** ساده | حفظی

پاک‌کننده‌های خورنده برای زدودن آلاینده‌ها از محیط، افزون بر ایجاد برهم‌کنش، با آن‌ها واکنش نیز می‌دهند.

**بررسی سایر گزینه‌ها:**

۱ پاک‌کننده‌های خورنده ممکن است خاصیت اسیدی یا بازی داشته باشند. به‌طور مثال هیدروکلریک اسید (جوهر نمک)، دارای خاصیت اسیدی و سدیم هیدروکسید (سود سوزآور)، دارای خاصیت بازی است.

۲ پاک‌کننده‌های خورنده از نظر شیمیایی فعال هستند و خاصیت خورندگی دارند و می‌توانند با فلزات مختلف از جمله آهن، روی و ... واکنش دهند. از این‌رو استفاده از آن‌ها خطرناک است و باید موارد ایمنی رعایت شود.

۴ همهٔ پاک‌کننده‌های خورنده،بوی تند ندارند.

**نکته**

| | |
|---|---|
| **انواع پاک‌کننده‌ها** | پاک‌کننده‌های صابونی و غیرصابونی ← برهم‌کنش بین ذره‌ای |
| | پاک‌کننده‌های خورنده ← برهم‌کنش بین ذره‌ای + واکنش با آلاینده‌ها |

**۶۵. اگر در یک پاک‌کنندهٔ غیرصابونی، جرم کربن موجود در آن، ۴/۵۰۰ برابر جرم اکسیژن و جرم اکسیژن موجود در آن، ۱/۷۷۷ برابر جرم هیدروژن باشد، تفاوت شمار پیوندهای $C=C$ و $C-C$ در ساختار این پاک‌کننده کدام است؟ $(H=۱, C=۱۲, O=۱۶ : g.mol^{-۱})$**

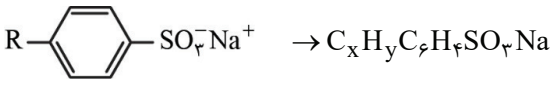
۱) ۱۰ ۲) ۹ ۳) ۱۲ ۴) ۱۱

**پاسخ: گزینه ۱** متوسط | محاسباتی

**سرنخ** ابتدا فرمول کلی پاک‌کننده‌های غیرصابونی را بنویسید. سپس با توجه به نسبت جرم اتم‌ها، تعداد اتم‌های کربن و هیدروژن را به دست آورید. در نهایت شمار پیوندهای $C-C$ و $C=C$ را به دست آورده و تفاوت شمار آن‌ها را محاسبه کنید.

www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshCloud

**گام اول:** فرمول کلی پاک‌کننده‌های غیرصابونی به صورت زیر است:



تذکر: با توجه به این‌که برای حل سوال باید تعداد پیوندهای $C=C$ را به دست بیاوریم و نمی‌دانیم که در گروه $R$ پیوند $C=C$ وجود دارد یا وجود ندارد، فرمول گروه $R$ را به صورت $C_xH_y$ در نظر می‌گیریم. (اگر گروه $R$ را به صورت $C_nH_{2n+1}$ و سیرشده فرض کنید، سوال را به صورت اشتباه حل خواهید کرد.)

**گام دوم:** با توجه به نسبت جرم اتم‌ها، مقدار $x$ و $y$ را به دست می‌آوریم:

$$\frac{C_{\text{جرم}}}{O_{\text{جرم}}}=\frac{(x+6)\times 12}{3\times 16}=4/5\rightarrow x=12$$

$$\frac{O_{\text{جرم}}}{H_{\text{جرم}}}=\frac{3\times 16}{(y+4)\times 1}=1/77\rightarrow y=23$$

بنابراین فرمول شیمیایی صابون به صورت $C_{12}H_{23}C_6H_4SO_3Na$ خواهد بود.

**گام سوم:** فرمول گروه $R$ با ۱۲ اتم کربن در حالت سیرشده به صورت $C_{12}H_{25}$ است، اما در این حالت گروه $R$، ۲۳ اتم هیدروژن دارد، بنابراین می‌توان نتیجه گرفت که در گروه $R$، یک پیوند $C=C$ وجود دارد.

**نکته** ۱) در ترکیب‌های مختلف به ازای هر پیوند $C=C$ و $C\equiv C$ به ترتیب ۲ و ۴ عدد از تعداد اتم‌های هیدروژن کاسته می‌شود.

۲) در پاک‌کننده‌های صابونی و غیرصابونی با زنجیره هیدروکربنی (گروه $R$) $n$ کربنه و سیرشده، $n$ پیوند $C-C$ وجود دارد.

**گام چهارم:** با توجه به نکته بالا در این پاک‌کننده با فرمول $C_{12}H_{23}C_6H_4SO_3Na$، انتظار می‌رود که گروه $R$، ۱۲ پیوند $C-C$ داشته باشد اما چون گروه $R$، یک پیوند $C=C$ دارد، تعداد پیوندهای $C-C$ آن برابر ۱۱ عدد خواهد بود.

**گام پنجم:** تفاوت شمار پیوندهای $C-C$ و $C=C$ را محاسبه می‌کنیم:

$$\left.\begin{array}{l} C-C\text{ شمار پیوندهای }=11+3=14 \\ \qquad\qquad\qquad\qquad \text{در حلقهٔ بنزنی}\ \ \text{در گروه R} \\ C=C\text{ شمار پیوندهای }=1+3=4 \\ \qquad\qquad\qquad\qquad \text{در حلقهٔ بنزنی}\ \ \text{در گروه R} \end{array}\right\}\Rightarrow \text{تفاوت شمار پیوندهای } C-C \text{ و } C=C=14-4=10$$

**کنکورچی‌میگه؟** **با توجه به مطالب کتاب درسی، اگر تفاوت شمار اتم‌های هیدروژن و کربن در یک پاک‌کنندهٔ غیرصابونی با زنجیر هیدروکربنی سیرشده، برابر ۱۱ باشد، جرم مولی آن، برابر چند گرم است؟** (تجربی خارج ۱۴۰۳)

$(H=1, C=12, O=16, Na=23, S=32 : g.mol^{-1})$

۱) ۳۴۶ ۲) ۳۴۸ ۳) ۳۵۰ ۴) ۳۵۲

**پاسخ: گزینه ۲**

سنجش کلاد
www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshCloud