آزمون‌های آزمایشی

ماراتون

آزمون مرحله ۱ — ۱ آبان ۱۴۰۴

پاسخنامه دفترچه ۱ — پایه دوازدهم

رشتهٔ ریاضی

درس	گزینشگر و مسئول آزمون	ناظر علمی	پاسخنامه نویس
حسابان	سجاد عظمتی، محمد کلوئی	نریمان فتح الهی، شاهین پروازی	مصطفی غلامی، آرش پور باقری
هندسه	حسین حاجیلو	-	حسین حاجیلو
گسسته	عزیزالله علی اصغری	علی احمدی قزلدشت	عزیزالله علی اصغری

	طراحان	ویراستاران
حسابان	سجاد عظمتی، نریمان فتح الهی، شاهین پروازی، امیرحسام شکری، امید شیری‌نژاد، میثم صمدی، عزیزالله علی اصغری، محمدامین کریمی، مصطفی غلامی	مصطفی غلامی، سبحان شعبانی
هندسه	امیرحسین فتاحی، حسین حاجیلو	البرز طهرانچی
گسسته	عزیزالله علی‌اصغری، سجاد عظمتی، علی احمدی قزلدشت، جواد ترکمن، نرگس کارگر، رضا توکلی، رضا ماجدی، محمدجواد محسنی	مسعود درویشی، البرز طهرانچی

ویژه کنکور ۱۴۰۵

Mobtakeran.com Zistase.ir

www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshCloud

پاسخنامه دفترچه ۱ آزمون مرحله ۲

حسابان | ۱ آبان ماه ۱۴۰۴

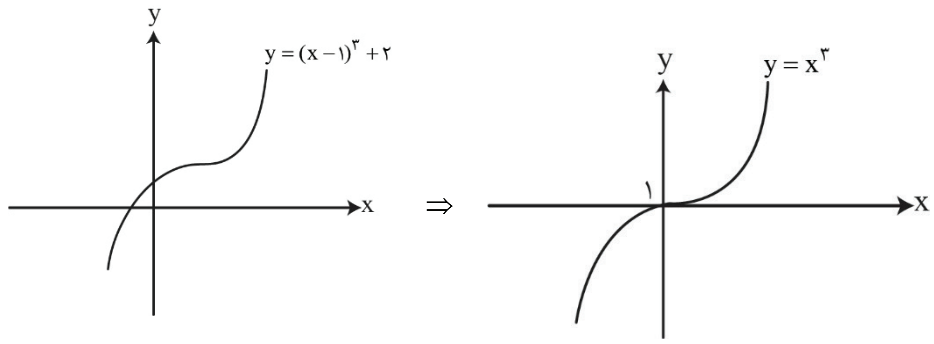
۱. نمودار تابع چندجمله‌ای $f(x)=x^3-nx^{\frac{n}{3}+1}+3x^{\frac{3}{n}}+1$ از کدام ناحیه‌ی دستگاه مختصات نمی‌گذرد؟

۱) اول ۲) دوم ۳) سوم ۴) چهارم

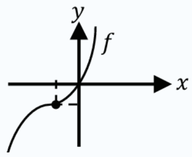
پاسخ: گزینه ۴

در تابع چندجمله‌ای توان x ها باید عددی حسابی باشند. بنابراین:

$$\begin{cases}\frac{n}{3}+1\in W\\ \frac{3}{n}\in W\end{cases}\to n=3\to f(x)=x^3-3x^2+3x+1\to f(x)=x^3-3x^2+3x-1+2=(x-1)^3+2$$



نمودار تابع f از ناحیه‌ی چهارم نمی‌گذرد.

تابع درجه سوم	
	در تابع با ضابطه $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d\,,(a\neq 0)$، اگر $\Delta'_{f'}=0$ باشد، آنگاه این تابع به صورت $f(x)=k(x-\alpha)^3+\beta$ قابل نمایش است. (با مشتق در فصل چهارم ریاضی۳ آشنا خواهید شد.)
	تـابع $f(x)=2x^3+6x^2+6x$ را می‌تـوانیم به صورت $f(x)=2(x+1)^3-2$ نشان دهیم. نمودار آن به صورت مقابل است. 

۲. تابع پیوسته $y=f(x)$ روی مجموعه اعداد حقیقی اکیداً صعودی است و $f(3)=0$ است. دامنه تابع $y=\sqrt{f(x)f(-3x)}$ کدام است؟

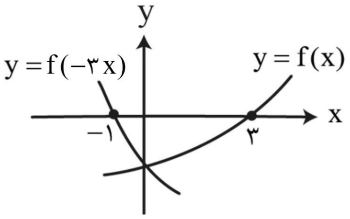
۱) $[-3,-1]$ ۲) $[1,3]$ ۳) $[-3,1]$ ۴) $[-1,3]$

پاسخ: گزینه ۴

ابتدا باید عبارت زیر رادیکال، بزرگ‌تر یا مساوی صفر باشد:

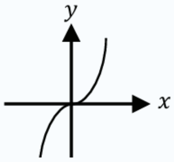
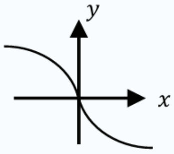
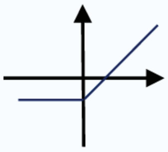
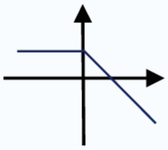
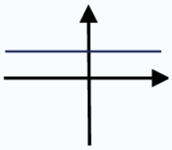
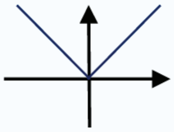
$$f(x)f(-3x)\geq 0\to\begin{cases}f(x)=0\to x=3\\ f(-3x)=0\to -3x=3\to x=-1\end{cases}$$

تابع $f(x)$ اکیداً صعودی است. برای رسم نمودار تابع $y=f(-3x)$ کافی است نمودار تابع $y=f(x)$ را نسبت به محور y ها قرینه کرده و طول نقاط تابع $f(x)$ را $\frac{1}{3}$ کنیم.

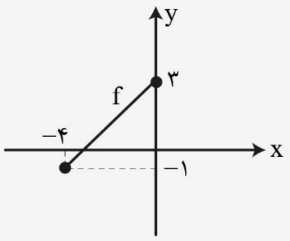


x		-1		3	
$f(x)$	−		−	0	+
$f(-3x)$	+	0	−		−
کل	−	0	+	0	−

$\to -1\leq x\leq 3$

توابع صعودی و نزولی	انواع یکنوایی		تعریف	مثال نموداری
	اکیدا یکنوا	اکیدا صعودی	اگر $x_۱ > x_۲$ باشد، آنگاه $f(x_۱) > f(x_۲)$ باشد. تابع زیر، یک تابع اکیدا صعودی است. $f=\{(-۱,-۲),(۱,۰),(۳,۳)\}$	$f(x)=x^۳$ 
		اکیدا نزولی	اگر $x_۱ > x_۲$ باشد، آنگاه $f(x_۱) < f(x_۲)$ باشد. تابع زیر، یک تابع اکیدا نزولی است. $f=\{(-۲,-۲),(۰,-۳),(۲,-۵)\}$	$f(x)=-\sqrt[۳]{x}$ 
	یکنوا	صعودی	اگر $x_۱ > x_۲$ باشد، آنگاه $f(x_۱) \geq f(x_۲)$ باشد. تابع زیر، یک تابع صعودی است. $f=\{(-۱,-۲),(۰,۰),(۱,۳),(۳,۳)\}$	$f(x)=x+\|x\|-۱$ 
		نزولی	اگر $x_۱ > x_۲$ باشد، آنگاه $f(x_۱) \leq f(x_۲)$ باشد. تابع زیر، یک تابع نزولی است. $f=\{(-۳,-۲),(-۲,-۳),(-۱,-۳),(۲,-۵)\}$	$f(x)=-x-\|x\|+۱$ 
		هم صعودی هم نزولی	اگر $x_۱ > x_۲$ باشد، آنگاه $f(x_۱) = f(x_۲)$ باشد. تابع زیر، هم صعودی و هم نزولی است. $f=\{(-۳,-۲),(-۲,-۲),(-۱,-۲),(۲,-۲)\}$	$f(x)=۲$ 
	غیریکنوا	نه صعودی نه نزولی	بخشی از آن صعودی و بخشی نزولی است. تابع زیر، نه صعودی و نه نزولی است. $f=\{(-۳,-۲),(-۲,-۱),(-۱,-۴),(۲,۴)\}$	$f(x)=\|x\|$ 
	نکات		توابع اکیداً یکنوا حتما یک به یک اند، اما عکس این مطلب همیشه صحیح نیست؛ مثل $f(x)=\frac{۱}{x}$ که یک تابع یک به یک است اما اکیداً یکنوا نیست.	
			توابع اکیداً یکنوا، یکنوا هم محسوب می‌شوند اما عکس این مطلب همیشه صحیح نیست.	
			وارون کردن تابع یکنوایی را عوض نمی‌کند.	
			دو تابع $f(x)=۲^x$ و $f^{-۱}(x)=\log_۲ x$ اکیداً صعودی اند.	
			تابع $f(x)=x+\sqrt{x}+۱$ روی دامنه‌اش اکیداً صعودی است اما تابع $g(x)=\frac{۱}{f(x)}=\frac{۱}{x+\sqrt{x}+۱}$ یک تابع اکیداً نزولی است.	
	اثر اعمال جبری	f + g	صعودی اکید + صعودی اکید = صعودی اکید	صعودی اکید + صعودی = صعودی اکید
			نزولی اکید + نزولی اکید = نزولی اکید	نزولی اکید + نزولی = نزولی اکید
			دو تابع $f(x)=x$ و $g(x)=\sqrt{x}$ اکیداً صعودی اند؛ پس مجموع آنها نیز اکیداً صعودی است.	
		fog	ترکیب دو تابع صعودی = تابع صعودی	ترکیب دو تابع نزولی = تابع صعودی
			ترکیب یک صعودی و نزولی = تابع نزولی	
			دو تابع $f(x)=x+۱$ و $g(x)=\sqrt{x}$ اکیداً صعودی اند؛ پس $(fog)(x)=\sqrt{x}+۱$ نیز اکیداً صعودی است.	

. با توجه به نمودار تابع $y=f(x)$ در شکل مقابل، مساحت محدود به نمودار تابع $y=f(\frac{x}{۲})$ و $y=f(-۲x)$ و محور xها کدام است؟



۱) $\frac{۲۱}{۲}$

۲) $\frac{۲۱}{۴}$

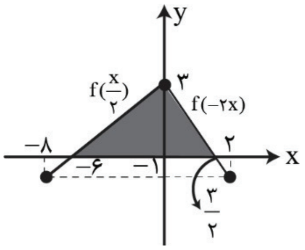
۳) $\frac{۴۵}{۲}$

۴) $\frac{۴۵}{۴}$

پاسخ: گزینه ۴

ضابطه‌ی تابع f به صورت $f(x)=x+۳$ است و $x=-۳$ محل تلاقی نمودار f با محور xهاست.

برای رسم نمودار $f(\frac{x}{۲})$ کافی است طول نقاط تابع $f(x)$ را در ۲ ضرب کنیم و برای رسم نمودار $f(-۲x)$ کافی است طول نقاط تابع $f(x)$ را بر ۲- تقسیم کنیم.



ارتفاع مثلث$=۳$

قاعده‌ی مثلث$=\frac{۳}{۲}+۶=\frac{۱۵}{۲}$

مساحت مثلث$=\frac{۱}{۲}\times۳\times\frac{۱۵}{۲}=\frac{۴۵}{۴}$

. با فرض $f(x)=\log_۲(۳-x)+\log_{\frac{۱}{۲}}(۲x-۱)$ و $g=\{(-۱,۲),(۱,[a]),(\frac{۷}{۴},۴),(\frac{۷}{۹},۳)\}$ تابع $f+g$ اکیداً نزولی است. محدوده‌ی a کدام است؟

۱) $(۳,۴)$ ۲) $[۳,۴)$ ۳) $[۲,۴]$ ۴) $(۲,۴)$

پاسخ: گزینه ۲

تابع $f(x)$ تابعی اکیداً نزولی با دامنه‌ی $(\frac{۱}{۲},۳)$ است، دقت کنید اگرچه مجموع دو تابع اکیداً نزولی، اکیداً نزولی است اما اگر مجموع دو تابع اکیداً نزولی باشد با این‌که $f(x)$ اکیداً نزولی است نمی‌توان به قطعیت اکیداً نزولی بودن g را نتیجه گرفت.

زوج‌مرتب $h(x)=f+g$ را تشکیل می‌دهیم:

$$D_{h(x)}=\{۱,\frac{۷}{۴},\frac{۷}{۹}\} \quad , \quad f(x)=\log_۲\frac{۳-x}{۲x-۱}$$

$$h=\{(\frac{۷}{۹},۲+۳),(۱,[a]+۱),(\frac{۷}{۴},-۱+۴)\}$$

با توجه به اکیداً نزولی بودن $h(x)$:

$$۵>[a]+۱>۳\rightarrow\begin{cases}۲<[a]<۴\\ ۳\le a<۴\end{cases}$$

$$۳<[a]+۱<۵ \Rightarrow ۲<[a]<۴ \Rightarrow ۳\le a<۴$$

دام تستی: توجه کنید چون $[a]$ مقداری صحیح است، پس از $۲<[a]<۴$ نتیجه می‌گیریم $[a]=۳$ است.

۵. نمودار تابع $y=\begin{cases}\sqrt{x-۱} & ;x>۱\\ ۱-x^۲ & ;x<۱\end{cases}$ را ۲ واحد به طرف xهای منفی منتقل می‌کنیم، سپس طول تمام نقاط را نصف می‌کنیم و در نهایت نسبت به محور yها قرینه می‌کنیم تا تابع $y=\begin{cases}f(x); x>a\\ g(x); x<a\end{cases}$ دست آید. مقدار $f(۲a)+g(-۳a)$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

پاسخ: گزینه ۳

تغییرات را مرحله به مرحله اعمال می‌کنیم:

$$y=\begin{cases}\sqrt{x-۱} & ;x>۱\\ ۱-x^۲ & ;x<۱\end{cases}\xrightarrow[\text{چپ}]{\text{۲ واحد}} y=\begin{cases}\sqrt{x+۱} & ;\ x>-۱\\ ۱-(x+۲)^۲ & ;\ x<-۱\end{cases}$$

$$\xrightarrow{x\to ۲x} y=\begin{cases}\sqrt{۲x+۱} & ;\quad x>-\frac{۱}{۲}\\ ۱-(۲x+۲)^۲ & ;\quad x<-\frac{۱}{۲}\end{cases}\xrightarrow[\text{محور}\ y\text{ها}]{\text{قرینه نسبت به}} y=\begin{cases}\sqrt{-۲x+۱} & ;\quad x<\frac{۱}{۲}\\ ۱-(-۲x+۲)^۲ & ;\quad x>\frac{۱}{۲}\end{cases}$$

حال با مقایسه‌ی تابع $y=\begin{cases}f(x) & ;\ x>a\\ g(x) & ;\ x<a\end{cases}$ و تابع انتقال داده شده نتیجه می‌گیریم $a=\frac{۱}{۲}$ و $f(x)=۱-(۲x-۲)^۲$ و $g(x)=\sqrt{-۲x+۱}$ است. پس:

$$f(۲a)+g(-۳a)=f(۱)+g(-\frac{۳}{۲})=(۱-۰)+\sqrt{۳+۱}=۱+۲=۳$$

۶. نمودار تابع پیوسته و اکیداً صعودی $y=f(x)$ با دامنه $\mathbb{R}$ از دو نقطه $A(-۱,۱)$ و $B(۳,۶)$ می‌گذرد. مجموعه جواب نامعادله $\frac{f^۲(x)-۷f(x)+۶}{x-۱}\geq ۰$ کدام است؟

۱) $[-۱,۱)\cup[۳,+\infty)$ ۲) $[۳,+\infty)$ ۳) $(۱,۳]$ ۴) $(-\infty,-۱]\cup[۳,+\infty)$

پاسخ: گزینه ۱

تابع f از نقاط A و B می‌گذرد، بنابراین:

$A(-۱,۱)\to f(-۱)=۱$

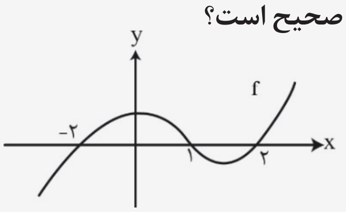
$B(۳,۶)\to f(۳)=۶$

$$\frac{f^۲(x)-۷f(x)+۶}{x-۱}\geq ۰\to\frac{(f(x)-۶)(f(x)-۱)}{x-۱}\geq ۰\to\begin{cases}f(x)-۶=۰\to f(x)=۶\to x=۳\\ f(x)-۱=۰\to f(x)=۱\to x=-۱\\ x-۱=۰\to x=۱\end{cases}$$

x		-۱		۱		۳	
$f(x)-۶$	−		−		−	۰	+
$f(x)-۱$	−	۰	+		+		+
$x-۱$	−		−	۰	+		+
کل	−	۰	+	ت ن	−	۰	+

جواب: $[-۱,۱)\cup[۳,+\infty)$

۷. نمودار زیر، تابع $y=f(x)$ را نشان می‌دهد. دامنه تابع $y=\sqrt{\frac{xf(x)-۲f(x)}{f(x+۱)}}$ شامل چند عدد صحیح است؟



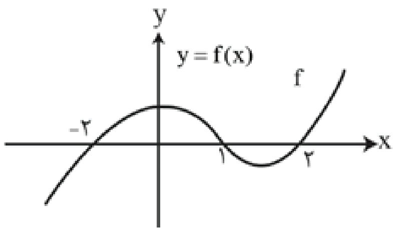
۱) ۱

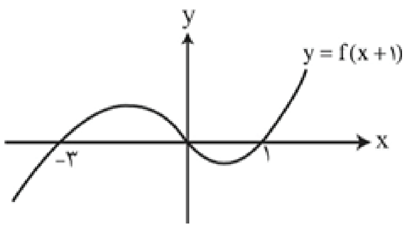
۲) ۲

۳) ۳

۴) بی‌شمار

پاسخ: گزینه ۴





$f(x)=۰ \to x=-۲,۱,۲$

$f(x+۱)=۰ \to x=-۳,۰,۱$

$y=\sqrt{\dfrac{(x-۲)f(x)}{f(x+۱)}} \to \dfrac{(x-۲)f(x)}{f(x+۱)}\geq ۰$

x		-۳		-۲		۰		۱		۲	
$x-۲$	$-$		$-$		$-$		$-$		$-$	۰	$+$
$f(x)$	$-$		$-$	۰	$+$		$+$	۰	$-$	۰	$+$
$f(x+۱)$	$-$	۰	$+$		$+$	۰	$-$	۰	$+$		$+$
کل	$-$	ت ن	$+$	۰	$-$	ت ن	$+$	ت ن	$+$	۰	$+$

بنابراین دامنه‌ی تابع به صورت $(-۳,-۲]\cup(۰,۱)\cup(۱,+\infty)$ است که شامل بی‌شمار عدد صحیح است.

۸. اگر تابع با ضابطه‌ی $f(x)=\begin{cases} x^۳-۲ & ; x\leq ۲ \\ ۲x-۴ & ; x>a \end{cases}$ تابعی اکیداً صعودی باشد، مقدار $(fof)(۲a)$ به ازای حداقل مقدار a کدام است؟

۱) ۱۶ ۲) ۲۰ ۳) ۲۸ ۴) ۱۸

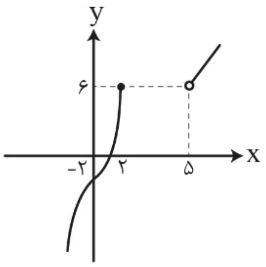
پاسخ: گزینه ۳

چون f تابعی اکیداً صعودی است، پس باید برد ضابطه $y=۲x-۴$ بزرگ‌تر از ۶ باشد، یعنی:

$۲x-۴>۶ \Rightarrow x>۵$

بنابراین حداقل مقدار a برابر ۵ است و برای به دست آوردن $f(f(۲a))=f(f(۱۰))$ باید از ضابطه‌ی پایین استفاده کنیم:

$f(f(۱۰))=f(۱۶)=۲۸$



۹. تابع f اکیداً نزولی و دامنه‌ی آن مجموعه‌ی از مقادیر مثبت است. اگر مجموعه جواب نامعادله‌ی $f(x|x|)<f(|x^۳+۱|-۱)$ به صورت (a,b) باشد، حاصل $b-a$ کدام است؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

پاسخ: گزینه ۲

چون $x>۰$ است، پس $x^۳>۰$ و در نتیجه $x^۳+۱>۱$ است، یعنی:

$f(|x^۳+۱|-۱)=f(x^۳+۱-۱)=f(x^۳)$

حالا سراغ حل نامعادله می‌رویم:

$f(x|x|)<f(|x^۳+۱|-۱)=f(x^۲)<f(x^۳)$

$\xrightarrow{\text{اکیدا نزولی}} x^۲>x^۳ \Rightarrow x^۲-x^۳>۰$

$\to x^۲(۱-x)>۰ \Rightarrow ۱-x>۰ \Rightarrow x<۱$

از طرفی به دلیل شرط دامنه، نتیجه گرفتیم $x>۰$ است. از اشتراک جواب‌های به دست آمده نتیجه می‌گیریم مجموعه جواب نامعادله $۰<x<۱$ است. یعنی بازهٔ (a,b) همان بازهٔ $(۰,۱)$ است و $b-a=۱$ می‌باشد.

۱۰. بُرد تابع $f(x)=\dfrac{[x]|x|}{\sqrt{x-x^۲}}$ شامل چند عدد صحیح است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) بی‌شمار

پاسخ: گزینه ۱

ابتدا دامنهٔ تابع f را می‌یابیم. $x-x^2>0 \to x(1-x)>0 \to 0<x<1$

حال ضابطهٔ تابع f را بازنویسی می‌کنیم: $0<x<1 \to [x]=0 \to f(x)=0$

بنابراین مجموعهٔ برد این تابع برابر $\{0\}$ است.

۱۱. دو عدد حقیقی a و b را در نظر بگیرید. اگر $f(x)=ax+b$ و $g(x)=bx-6$ و $(f+g)(2)=f(2)$ و $(f+g)(-1)=g(-1)$ باشد، مقدار ab کدام است؟

۱) ۳ ۲) ۶ ۳) ۹ ۴) ۱۲

پاسخ: گزینه ۳

از تساوی $(f+g)(2)=f(2)$ داریم: $f(2)+g(2)=f(2) \Rightarrow g(2)=0$

در ضمن می‌دانیم $g(x)=bx-6$ است، پس: $g(2)=2b-6=0 \Rightarrow b=3$

حالا از تساوی $(f+g)(-1)=g(-1)$ داریم: $f(-1)+g(-1)=g(-1) \Rightarrow f(-1)=0$

از طرفی $f(x)=ax+3$ است، پس: $f(-1)=-a+3=0 \Rightarrow a=3 \Rightarrow ab=9$

عمل جبری	دامنه تابع	ضابطه تابع
مجموع دو تابع	$D_{f+g}=D_f\cap D_g$	$(f+g)(x)=f(x)+g(x)$
تفاضل دو تابع	$D_{f-g}=D_f\cap D_g$	$(f-g)(x)=f(x)-g(x)$
ضرب دو تابع	$D_{f\times g}=D_f\cap D_g$	$(f\times g)(x)=f(x)\times g(x)$
تقسیم دو تابع	$D_{\frac{f}{g}}=D_f\cap D_g-\{x \mid g(x)=0\}$	$(\frac{f}{g})(x)=\frac{f(x)}{g(x)}$

اعمال جبری روی توابع

دو تابع $f(x)=\frac{1}{x-1}$ و $g(x)=\sqrt{x}$ را در نظر بگیرید. دامنه اعمال جبری بین این دو تابع برابر است با:

$$D_{f+g}=D_{f-g}=D_{f\times g}=D_f\cap D_g=(\mathbb{R}-\{1\})\cap[0,+\infty)=[0,+\infty)-\{1\}$$

$$D_{\frac{f}{g}}=D_f\cap D_g-\{x|g(x)=0\}=(\mathbb{R}-\{1\})\cap([0,+\infty))-\{0\}=(0,+\infty)-\{1\}$$

اکنون ضابطه‌های این توابع را به دست می‌آوریم:

$(f+g)(x)=f(x)+g(x)=\frac{1}{x-1}+\sqrt{x}$ $\quad$ $(f-g)(x)=f(x)-g(x)=\frac{1}{x-1}-\sqrt{x}$

$(f\times g)(x)=f(x)\times g(x)=\frac{\sqrt{x}}{x-1}$ $\quad$ $(\frac{f}{g})(x)=\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\frac{1}{x-1}}{\sqrt{x}}$

می‌توانیم از روی ضابطه جدید، دامنه را حساب کنیم، به شرطی که اصلا ساده سازی انجام نشود.

در اعمال جبری روی توابع زوج مرتبی، باید در دامنه مشترک، عملیات جبری را روی برد (مولفه دوم) انجام دهیم.

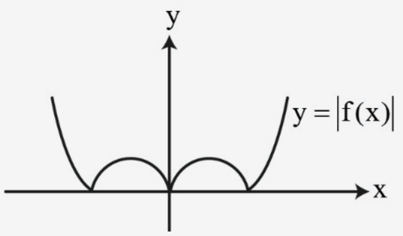
دو تابع $f=\{(1,3),(3,3),(-1,1)\}$ و $g=\{(1,0),(2,1),(3,4)\}$ را در نظر بگیرید، داریم:

$f+g=\{(1,3),(3,7)\}$ $\quad$ $f-g=\{(1,3),(3,-1)\}$

$f\times g=\{(1,0),(3,12)\}$ $\quad$ $\frac{f}{g}=\left\{\left(3,\frac{3}{4}\right)\right\}$

نمودار: در رسم نمودار حاصل از عمل جبری روی توابع، پس از ساده کردن ضابطه، باید حواسمان به دامنه باشد. معمولا اختلاف اصلی گزینه‌ها در دامنه است که البته امکان استفاده از گزینه‌ها نیز فراهم است.

۱۲. نمودار تابع $y=f(x)$ بر روی مجموعه اعداد حقیقی پیوسته است و نمودار تابع $y=|f(x)|$ به صورت مقابل است. نمودار تابع $y=f(x)$ چند حالت مختلف می‌تواند داشته باشد؟



۱) ۴

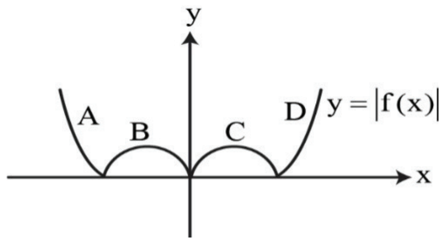
۲) ۶

۳) ۸

۴) ۱۶

پاسخ: گزینه ۴

هر قسمت از منحنی را به صورت زیر نام‌گذاری می‌کنیم.



هریک از قسمت‌های A,B,C و D می‌تواند دو حالت بالای محور x و زیر محور x (قرینه نسبت به محور x) داشته باشد. بنابر اصل ضرب داریم:

$2\times2\times2\times2=16$

۱۳. اگر $f(x)=\sqrt{x+2\sqrt{x-1}}$ و $g(x)=x^2+2x+2$ باشند، مساحت محدود به نمودار تابع fog و خط $y=3$ کدام است؟

۱) ۴   ۲) ۸   ۳) ۲   ۴) ۱۰

پاسخ: گزینه ۱

ابتدا تابع f و g را بازنویسی کرده و fog را تشکیل می‌دهیم.

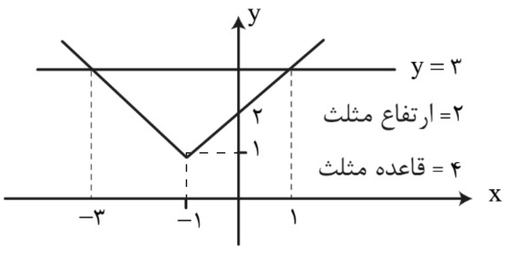
$$f(x)=\sqrt{x+2\sqrt{x-1}}=\sqrt{(\sqrt{x-1}+1)^2}=\sqrt{x-1}+1$$

$$g(x)=x^2+2x+2=(x+1)^2+1$$

$$(fog)(x)=\sqrt{(x+1)^2+1-1}+1=|x+1|+1$$

$$|x+1|+1=3\rightarrow|x+1|=2\rightarrow x=1,-3$$

$$\text{مساحت مثلث}=\frac{2\times4}{2}=4$$



ترکیب توابع	ضابطه	معنی $fog(x)=f(g(x))$ این است که جای x های تابع $f(x)$، تابع $g(x)$ را قرار دهیم و سپس ضابطه حاصل را ساده کنیم.
		دو تابع $f(x)=\sqrt{x+1}$ و $g(x)=\frac{1}{x-1}$ را در نظر بگیرید؛ ضابطه $(fog)(x)$ برابر است با: $(fog)(x)=f(g(x))=\sqrt{g(x)+1}=\sqrt{\frac{1}{x-1}+1}$
		اگر در گزینه ضابطه تابع مرکب را داده باشند، کافی است در یک عدد دلخواه، مقدار تابع مرکب را محاسبه کنیم و بعد در گزینه ها صدق دهیم.

ترکیب توابع	زوج مرتب	اگر نمایش دو تابع به صورت زوج مرتبی باشد، برای ترکیب آنها به صورت مقابل عمل می‌کنیم. در ساخت $f(g(x))$ داریم: $(a,b)\in g$ و $(b,c)\in f \Rightarrow (a,c)\in f(g(x))$
		دو تابع $f=\{(-1,2),(3,4),(2,1)\}$ و $g=\{(5,-1),(0,3),(1,1)\}$ را در نظر بگیرید؛ fog برابر است با: $fog=\{(5,2),(0,4)\}$
	مقدار $f(g(a))$	ابتدا مقدار تابع درونی را به ازای x داده شده محاسبه کرده و سپس این مقدار را به عنوان ورودی در تابع بیرونی قرار می‌دهیم.
		دو تابع $f(x)=\sqrt{x+1}$ و $g(x)=\frac{1}{x-1}$ را در نظر بگیرید؛ مقدار $(fog)(x)$ در نقطه $x=0$ برابر است با: $g(0)=\frac{1}{0-1}=-1 \rightarrow f(-1)=\sqrt{-1+1}=0 \Rightarrow (fog)(0)=0$

۱۴. اگر $f(x)=3x+8$ و $(gof)(x)=(fog)(x)-3g(x)+6x$ باشد، ضابطه‌ی تابع $g(x)$ کدام است؟

۱) $2x-8$ ۲) $-2x+8$ ۳) $6x+8$ ۴) $6x-8$

پاسخ: گزینه ۱

$$(gof)(x)=f(g(x))-3g(x)+6x=3g(x)+8-3g(x)+6x$$
$$\rightarrow (gof)(x)=6x+8 \rightarrow g(3x+8)=6x+8$$
$$\rightarrow 3x+8=t \rightarrow x=\frac{t-8}{3} \rightarrow g(t)=6(\frac{t-8}{3})+8$$
$$g(t)=2(t-8)+8=2t-8 \rightarrow g(x)=2x-8$$

ترکیب توابع	ضابطه	معنی $fog(x)=f(g(x))$ این است که جای x های تابع $f(x)$، تابع $g(x)$ را قرار دهیم و سپس ضابطه حاصل را ساده کنیم.
		دو تابع $f(x)=\sqrt{x+1}$ و $g(x)=\frac{1}{x-1}$ را در نظر بگیرید؛ ضابطه $(fog)(x)$ برابر است با: $(fog)(x)=f(g(x))=\sqrt{g(x)+1}=\sqrt{\frac{1}{x-1}+1}$
		اگر در گزینه ضابطه تابع مرکب را داده باشند، کافی است در یک عدد دلخواه، مقدار تابع مرکب را محاسبه کنیم و بعد در گزینه ها صادق خائن کنیم.
	زوج مرتب	اگر نمایش دو تابع به صورت زوج مرتبی باشد، برای ترکیب آنها به صورت مقابل عمل می‌کنیم. در ساخت $f(g(x))$ داریم: $(a,b)\in g$ و $(b,c)\in f \Rightarrow (a,c)\in f(g(x))$
		دو تابع $f=\{(-1,2),(3,4),(2,1)\}$ و $g=\{(5,-1),(0,3),(1,1)\}$ را در نظر بگیرید؛ fog برابر است با: $fog=\{(5,2),(0,4)\}$
	مقدار $f(g(a))$	ابتدا مقدار تابع درونی را به ازای x داده شده محاسبه کرده و سپس این مقدار را به عنوان ورودی در تابع بیرونی قرار می‌دهیم.
		دو تابع $f(x)=\sqrt{x+1}$ و $g(x)=\frac{1}{x-1}$ را در نظر بگیرید؛ مقدار $(fog)(x)$ در نقطه $x=0$ برابر است با: $g(0)=\frac{1}{0-1}=-1 \rightarrow f(-1)=\sqrt{-1+1}=0 \Rightarrow (fog)(0)=0$

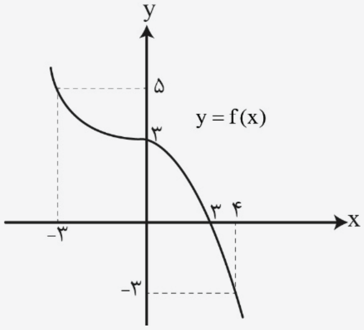
۱۵. نمودار دو تابع $y=f(x)$ و $y=g(x)$ به صورت زیر است. مجموعه جواب نامعادله‌ی $|(fog)(x)|\le ۳$ کدام است؟

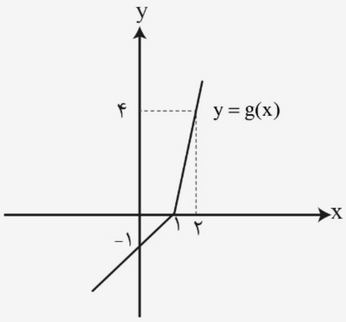
۱) $[-۳,۳]$

۲) $[۱,۲]$

۳) $[۰,۴]$

۴) $[-۳,۴]$





پاسخ: گزینه ۲

$$|(fog)(x)|\le ۳ \to -۳\le f(g(x))\le ۳$$

با توجه به نمودار تابع f، برای این‌که مقدار تابع f در بازه‌ی $[-۳,۳]$ قرار بگیرد، باید $۰\le g(x)\le ۴$ باشد. حال با توجه به نمودار تابع g، برای این‌که مقدار تابع g در بازه‌ی $[۰,۴]$ قرار بگیرد، باید $۱\le x\le ۲$ باشد:

$$-۳\le f(g(x))\le ۳ \to ۰\le g(x)\le ۴ \to ۱\le x\le ۲$$

۱۶. اگر $f(x)=\dfrac{a}{x^۲+۲x+۲}$ و $g(x)=\sqrt{x-۴}$ و دامنه تابع gof به صورت $[b,۴]$ باشد، حاصل a+b کدام است؟

۱) ۱۰۴ ۲) ۱۰۰ ۳) ۹۸ ۴) ۱۱۰

پاسخ: گزینه ۳

$$f(x)=\frac{a}{x^۲+۲x+۲} \to x^۲+۲x+۲=۰ \to \Delta<۰ \xrightarrow{a>۰} \text{همواره مثبت} \to D_f=\mathbb{R}$$

$$g(x)=\sqrt{x-۴} \to x-۴\ge ۰ \to x\ge ۴ \to D_g=[۴,+\infty)$$

$$D_{gof}=\{x\in D_f \mid f(x)\in D_g\}=\{x\in\mathbb{R} \mid \frac{a}{x^۲+۲x+۲}\in[۰,+\infty)$$

$$\to \frac{a}{x^۲+۲x+۲}\ge ۴ \to \frac{a}{(x+۱)^۲+۱}\ge ۴ \to \frac{a}{(x+۱)^۲+۱}-۴\ge ۰ \to \frac{a-۴((x+۱)^۲+۱)}{(x+۱)^۲+۱}\ge ۰$$

مجموعه جواب نامعادله به صورت $[b,۴]$ است. بنابراین می‌توان نتیجه گرفت $x=b,۴$ ریشه‌های عبارت صورت کسر هستند. بنابراین:

$$a-۴((x+۱)^۲+۱)=۰ \to x=۴ \xrightarrow{\text{صدق}} a-۴(۲۶)=۰ \to a=۱۰۴$$

$$\xrightarrow{a=۱۰۴} ۱۰۴-۴((x+۱)^۲+۱)=۰ \to ۲۶=(x+۱)^۲+۱ \to x^۲+۲x-۲۴=۰$$

$$\to (x+۶)(x-۴)=۰ \to \begin{cases} x=-۶=b \\ x=۴ \end{cases} \to a+b=۱۰۴-۶=۹۸$$

دامنه ترکیب توابع	روش ۱	دامنه $fog(x)$ به صورت مقابل محاسبه می‌شود: $D_{fog}=\{\underbrace{x\in D_g}_{۱} \mid \overbrace{g(x)\in D_f}^{۲}\}$ به همین ترتیب، برای $gof(x)$ داریم: $D_{gof}=\{\underbrace{x\in D_f}_{۱} \mid \overbrace{f(x)\in D_g}^{۲}\}$ باید دو بخش را جداگانه محاسبه و جواب نهایی را اشتراک بگیریم.
		دو تابع $f(x)=x^۲+۱$ و $g(x)=\sqrt{x}$ را در نظر بگیرید. دامنه تابع $(fog)(x)$ برابر است با: $D_{fog}=\{x\in D_g \mid g(x)\in D_f\}=[۰,+\infty)\cap[۰,+\infty)=[۰,+\infty)$

دامنهٔ ترکیب توابع	روش ۲	می‌توانیم ضابطه تابع مرکب را به دست آوریم و بعد دامنه آن را حساب کنیم. اما دقت کنید که ضابطه به دست آمده را نباید ساده کنیم.
	توجه	علاوه بر موارد گفته شده، اگر گزینه‌ها به صورت بازه‌ای باشند، می‌توانیم نقاطی از بازه‌ها انتخاب کرده و صدق دهیم.

۱۷. اگر $f(x)=x+\sqrt{x}-\sqrt{۸-x}-a$ باشد، به ازای چند مقدار صحیح a معادله‌ی $fof(x)=x$ دقیقاً دارای یک جواب است؟

۱) ۳ ۲) ۴ ۳) ۵ ۴) ۶

پاسخ: گزینه ۳

f تابعی اکیداً صعودی است. از $(fof)(x)=x$ می‌توان نتیجه گرفت $f=f^{-۱}$ است. محل برخورد تابع f و $f^{-۱}$ را می‌توان از حل معادلهٔ $f(x)=x$ به دست آورد.

$$x+\sqrt{x}-\sqrt{۸-x}-a=x \to \sqrt{x}-\sqrt{۸-x}=a$$

$$g(x)=\sqrt{x}-\sqrt{۸-x} \to D_g=[۰,۸] \quad (\text{اکیداً صعودی است.}\ g)$$

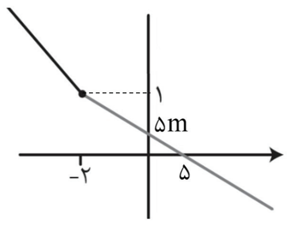
$$R_g=[g(۰),g(۸)]=[-۲\sqrt{۲},۲\sqrt{۲}] \to -۲\sqrt{۲}\le a\le ۲\sqrt{۲}$$

$$a\in\mathbb{Z} \to a=\{-۲,-۱,۰,۱,۲\}$$

۱۸. تابع $f(x)=\begin{cases}-x-۱ & ;\ x\le -۲\\ ۵m-mx; & x>-۲\end{cases}$ روی $\mathbb{R}$ وارون‌پذیر است. اگر $f^{-۱}$، وارون تابع f به ازای بیشترین مقدار m باشد، مقدار $f^{-۱}(-۱)$ کدام است؟

۱) ۱۲ ۲) ۱ ۳) -۱ ۴) -۱۲

پاسخ: گزینه ۱



نمودار تابع f را رسم می‌کنیم، برای وارون‌پذیری تابع f باید $m>۰$ باشد و اشتراک بردهای دو ضابطه برابر تهی باشد.

طبق نمودار باید $f(-۲)$ضابطه‌ی بالایی $\le f(-۲)$ضابطه‌ی پایینی باشد:

$$۷m\le ۱ \to m\le \frac{۱}{۷} \to \max(m)=\frac{۱}{۷}$$

$$f^{-۱}(-۱)=a \to f(a)=-۱ \to ۵m-am=-۱ \to \frac{۵}{۷}-\frac{a}{۷}=-۱ \to a=۱۲=f^{-۱}(-۱)$$

وارون تابع	تعریف	اگر جای مولفه های اول و دوم تابع f را در نمایش زوج مرتبی عوض کنیم، وارون تابع را ساخته‌ایم. وارون تابع را با $f^{-۱}$ نشان می‌دهیم.
		تابع $f=\{(۱,۳),(۳,-۱),(۴,۲),(۰,۵)\}$ را در نظر بگیرید. وارون آن برابر است با: $f^{-۱}=\{(۳,۱),(۲,۳),(-۱,۴),(۵,۰)\}$
	وارون‌پذیری	وارون تابع ممکن است تابع باشد یا نباشد. اگر f تابعی یک به یک باشد، $f^{-۱}$ تابع است.
	دامنه و برد تابع وارون	دامنه تابع f برابر با برد تابع وارون یعنی $f^{-۱}$ است و برد f برابر دامنه $f^{-۱}$ است. $D_{f^{-۱}}=R_f$ و $D_f=R_{f^{-۱}}$
		تابع $f=\{(۱,۳),(-۱,۴),(۴,۰)\}$ و وارون آن یعنی $f^{-۱}=\{(۳,۱),(۴,-۱),(۰,۴)\}$ را در نظر بگیرید، داریم: $D_f=R_{f^{-۱}}=\{۱,-۱,۴\}$ ، $D_{f^{-۱}}=R_f=\{۳,۴,۰\}$

وارون تابع	ترکیب تابع با وارونش	اگر تابع f وارون پذیر باشد، ضابطه ترکیب توابع f و f^{-1} همواره برابر تابع همانی $(y=x)$ است. $(f^{-1}of)(x)=x \qquad D=D_f$ $(fof^{-1})(x)=x \qquad D=D_{f^{-1}}$ با توجه به تفاوت دامنه دو تابع بالا، درحالت کلی $fof^{-1}(x)$ و $f^{-1}of(x)$ باهم مساوی نیستند؛ مگر داشته باشیم: $D_f=R_f$
		نتیجه اگر $gof(x)=x$ و $fog(x)=x$ باشد، آنگاه $g(x)$ و $f(x)$ وارون یکدیگر اند.

۱۹. تابع $f(x)=\sqrt{x^2+4x+4}-\sqrt{x^2-2x+1}$ در بازه‌ای وارون‌پذیر است. ضابطه وارون آن، در این بازه کدام است؟

۱) $\frac{x+1}{2}\ ;\ x\ge 1$
۲) $\frac{x-1}{2}\ ;\ -3\le x\le 3$
۳) $2x+1\ ;\ x\ge 1$
۴) $2x+1\ ;\ -3\le x\le 3$

پاسخ: گزینه ۲

$$f(x)=\sqrt{(x+2)^2}-\sqrt{(x-1)^2}=|x+2|-|x-1|\to f(x)=\begin{cases}-3 & x<-2\\ 2x+1 & -2\le x\le 1\\ 3 & x>1\end{cases}$$

تابع $f(x)$ در بازه‌ی $[-2,1]$ اکیداً صعودی و وارون‌پذیر است.

$$f(x)=2x+1\to f^{-1}(x)=\frac{x-1}{2}$$

$$D_f=[-2,1]\to R_f=D_{f^{-1}}=[f(-2),f(1)]=[-3,3]$$

۲۰. اگر $f(x)=2^{x-1}$ باشد، ضابطه تابع $g(x)=(fof^{-1})(x)+(f^{-1}of)(x)$ کدام است؟

۱) $2x\ ;\ x>0$
۲) $2^x\ ;\ x\in\mathbb{R}$
۳) $2x\ ;\ x\in\mathbb{R}$
۴) $2^x\ ;\ x>0$

پاسخ: گزینه ۱

$$f(x)=2^{x-1}\to\begin{cases}D_f=\mathbb{R}\\ R_f=(0,+\infty)\end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{l}D_{fof^{-1}}=D_{f^{-1}}=R_f=(0,+\infty)\\ D_{f^{-1}of}=D_f=\mathbb{R}\end{array}\right\}\to D_g=(0,+\infty)\cap\mathbb{R}=(0,+\infty)$$

$$\begin{cases}(fof^{-1})(x)=x\\ (f^{-1}of)(x)=x\end{cases}\to g(x)=x+x=2x \qquad ,x>0$$

پاسخنامه دفترچه ۱ آزمون مرحله ۲

هندسه | ۱ آبان ماه ۱۴۰۴

.۲۱ اگر $A=\begin{bmatrix} ۴ & a \\ b & -۱ \end{bmatrix}$ ، $B=\begin{bmatrix} ۱ & -۲ \\ ۳ & ۲ \end{bmatrix}$ و AB ماتریسی قطری باشد، آن‌گاه حاصل $a-b$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

پاسخ: گزینه ۱

درسنامه:

هر ماتریس مربعی که درایه‌های غیرواقع بر قطر اصلی آن صفر باشند، قطری نامیده می‌شود.

ماتریس AB را محاسبه کرده، درایه‌های غیرواقع بر قطر اصلی آن را برابر با صفر قرار می‌دهیم.

$$AB=\begin{bmatrix} ۴ & a \\ b & -۱ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۱ & -۲ \\ ۳ & ۲ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۴+۳a & -۸+۲a \\ b-۳ & -۲b-۲ \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} -۸+۲a=۰ \Rightarrow a=۴ \\ b-۳=۰ \Rightarrow b=۳ \end{cases} \Rightarrow a-b=۱$$

.۲۲ اگر A و B دو ماتریس مربعی از مرتبهٔ ۲ و $AB=\begin{bmatrix} -۱ & ۰ \\ ۳ & ۲ \end{bmatrix}$ و $BA=\begin{bmatrix} ۱ & ۲ \\ ۰ & ۳ \end{bmatrix}$ باشند، مجموعه درایه‌های واقع بر قطر اصلی ماتریس $A\begin{bmatrix} -۲ & ۱ \\ ۰ & ۵ \end{bmatrix}B+\frac{۱}{۲}A\begin{bmatrix} ۶ & ۲ \\ ۰ & -۴ \end{bmatrix}B$ کدام است؟

۱) ۵- ۲) ۲ ۳) ۳- ۴) ۵

پاسخ: گزینه ۴

ابتدا خواسته سوال را ساده می‌کنیم:

$$A\begin{bmatrix} -۲ & ۱ \\ ۰ & ۵ \end{bmatrix}B+\frac{۱}{۲}A\begin{bmatrix} ۶ & ۲ \\ ۰ & -۴ \end{bmatrix}B=A\left(\begin{bmatrix} -۲ & ۱ \\ ۰ & ۵ \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} ۶ & ۲ \\ ۰ & -۴ \end{bmatrix}\right)B$$

$$=A\left(\underbrace{\begin{bmatrix} ۱ & ۲ \\ ۰ & ۳ \end{bmatrix}}_{BA}\right)B=ABAB=(AB)(AB)=(AB)^۲$$

بنابراین ماتریس حاصل برابر است با:

$$(AB)^۲=\begin{bmatrix} -۱ & ۰ \\ ۳ & ۲ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -۱ & ۰ \\ ۳ & ۲ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۳ & ۴ \end{bmatrix}$$

پس مجموع درایه‌های واقع بر قطر اصلی برابر است با $۱+۴=۵$

.۲۳ اگر $A=[a_{ij}]_{۳\times۳}$ به طوری‌که $a_{ij}=\begin{cases} ij-a_{ij} & ; i+j=۴ \\ i+j & ; i+j\neq ۴ \end{cases}$ ، آن‌گاه مجموع درایه‌های قطر اصلی ماتریس A کدام است؟

۱) ۷ ۲) ۹ ۳) ۱۰ ۴) ۱۲

پاسخ: گزینه ۳

در ماتریس‌های مربعی، درایه‌هایی که شماره‌ی سطر و شماره‌ی ستون آن‌ها باهم برابر است، بر قطر اصلی واقع‌اند، پس باید حاصل $a_{۱۱}+a_{۲۲}+a_{۳۳}$ را محاسبه کنیم:

$$a_{۱۱}\xrightarrow[\text{رابطه‌ی دوم}]{۱+۱\neq۴}a_{۱۱}=۱+۱=۲$$

$$a_{۲۲}\xrightarrow[\text{رابطه‌ی اول}]{۲+۲=۴} a_{۲۲}=۲\times۲-a_{۲۲} \Rightarrow ۲a_{۲۲}=۴ \Rightarrow a_{۲۲}=۲$$

$$a_{۳۳}\xrightarrow[\text{رابطه‌ی دوم}]{۳+۳\neq۴} a_{۳۳}=۳+۳=۶$$

پس خواستهٔ سوال برابر است با $a_{۱۱}+a_{۲۲}+a_{۳۳}=۲+۲+۶=۱۰$.

۲۴. اگر $A=\begin{bmatrix} ۰/۱ & ۱ & ۰ \\ ۰ & ۲ & ۱ \\ ۱ & ۰ & -۱ \end{bmatrix}$، آن‌گاه مجموع درایه‌های ستون اول ماتریس $A^۳$ کدام است؟

۱) ۴/۹ ۲) ۴/۸۱ ۳) ۴/۸۱- ۴) ۴/۹-

پاسخ: گزینه ۱

درسنامه:

اگر $D=ABC$، آن‌گاه درایه‌ی سطر i اُم و ستون j اُم ماتریس D به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$d_{ij}=[A\text{سطر } i\text{اُم}].B.\begin{bmatrix}\text{ستون}\\ j\text{اُم}\\ C\end{bmatrix}$$

از این مطلب می‌توان نتیجه گرفت:

الف) سطر i اُم ماتریس D برابر است با:

$$d_{ij}=[A\text{سطر } i\text{اُم}].B.C$$

ب) ستون j اُم D برابر است با:

$$A.B.\begin{bmatrix}\text{ستون}\\ j\text{اُم}\\ C\end{bmatrix}$$

برای آن‌که بتوانیم از آن‌چه در درسنامه گفتیم استفاده کنیم، ماتریس $A^۳$ را به صورت $D=A.A.A$ در نظر می‌گیریم. ستون اول ماتریس D برابر است با:

$$A.A.\begin{bmatrix}\text{ستون}\\ j\text{اُم}\\ A\end{bmatrix}$$

ابتدا ماتریس $A.\begin{bmatrix}\text{ستون}\\ j\text{اُم}\\ A\end{bmatrix}$ را محاسبه می‌کنیم:

$$\begin{bmatrix} ۰ & ۱ & ۰/۱ \\ ۱ & ۲ & ۰ \\ -۱ & ۰ & ۱ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۰ \\ ۱ \\ -۱ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۰/۹ \\ ۲ \\ -۱ \end{bmatrix}$$

حالا ماتریس A را از سمت چپ، در ماتریس بدست آمده ضرب می‌کنیم:

$$\begin{bmatrix} ۰ & ۱ & ۰/۱ \\ ۱ & ۲ & ۰ \\ -۱ & ۰ & ۱ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۰/۹ \\ ۲ \\ -۱ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۱/۹ \\ ۴/۹ \\ -۱/۹ \end{bmatrix}$$

پس مجموع درایه‌های ستون اول ماتریس $A^۳$ برابر است با:

$$۱/۹+۴/۹-۱/۹=۴/۹$$

۲. اگر $A=\begin{bmatrix} ۱ & ۱ & ۱ \\ -۱ & -۱ & -۱ \\ ۲ & ۲ & ۲ \end{bmatrix}$، آن‌گاه به ازای کدام مقدار k، مجموع درایه‌های ماتریس $A^۹-kI$ برابر ۷۵۰ است؟

۱) ۱۵۴ ۲) ۱۵۳ ۳) ۲۶۳ ۴) ۲۶۲

پاسخ: گزینه ۴

نکته اگر ماتریس مربعی A به گونه‌ای باشد که $A^{۲}=kA$، آن‌گاه $A^{n}=k^{n-۱}A$.

ابتدا ماتریس $A^{۲}$ را محاسبه می‌کنیم:

$$A^{۲}=\begin{bmatrix}۱&۱&۱\\-۱&-۱&-۱\\۲&۲&۲\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۱&۱&۱\\-۱&-۱&-۱\\۲&۲&۲\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۲&۲&۲\\-۲&-۲&-۲\\۴&۴&۴\end{bmatrix}=۲A$$

پس $A^{۲}=۲A$ و بنا به آن‌چه در درسنامه گفتیم $A^{۹}=۲^{۸}A$، پس داریم:

$$A^{۹}-kI=\begin{bmatrix}۲^{۸}&۲^{۸}&۲^{۸}\\-۲^{۸}&-۲^{۸}&-۲^{۸}\\۲^{۹}&۲^{۹}&۲^{۹}\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}k&۰&۰\\۰&k&۰\\۰&۰&k\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۲^{۸}-k&۲^{۸}&۲^{۸}\\-۲^{۸}&-۲^{۸}-k&-۲^{۸}\\۲^{۹}&۲^{۹}&۲^{۹}-k\end{bmatrix}$$

پس مجموع درایه‌های ماتریس $A^{۹}-kI$ برابر است با $۳\times۲^{۹}-۳k$ که بنا به فرض سوال، باید ۷۵۰ باشد:

$$۳\times۲^{۹}-۳k=۷۵۰\xrightarrow{\times\frac{۱}{۳}}۲^{۹}-k=۲۵۰\Rightarrow k=۵۱۲-۲۵۰=۲۶۲$$

۲۶. اگر $A=\begin{bmatrix}۳&-۲\\-۴&۲\end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix}۲&-۱\\۱&x\end{bmatrix}$، آن‌گاه به ازای کدام مقدار x، تساوی $|A+B|=|A|+|B|$ برقرار است؟

۱) همه‌ی مقادیر x
۲) $x=-\frac{۲}{۳}$
۳) $x=\frac{۵}{۲}$
۴) هیچ مقدار x

پاسخ: گزینهٔ ۲

نکته می‌دانیم $A=\begin{bmatrix}a&b\\c&d\end{bmatrix}$، آن‌گاه $|A|=ad-bc$.

داریم:

$$A=\begin{bmatrix}۳&-۲\\-۴&۲\end{bmatrix}\Rightarrow|A|=۳\times۲-(-۲)\times(-۴)=-۲$$

$$B=\begin{bmatrix}۲&-۱\\۱&x\end{bmatrix}\Rightarrow|B|=۲x+۱$$

$$A+B=\begin{bmatrix}۵&-۳\\-۳&۲+x\end{bmatrix}\Rightarrow|A+B|=۵(۲+x)-۹=۵x+۱$$

بنابراین، $|A+B|=|A|+|B|$ نتیجه می‌دهد:

$$۵x+۱=۲x-۱\Rightarrow ۳x=-۲\Rightarrow x=-\frac{۲}{۳}$$

۲. اگر $A=\begin{bmatrix}۱&۰\\-۲&۲\end{bmatrix}$ و $AB=BC=I$، آن‌گاه دترمینان ماتریس $۲A+B-C$ کدام است؟

۱) ۱
۲) ۲
۳) ۵
۴) صفر

پاسخ: گزینه ۳

درسنامه:

۱) اگر A یک ماتریس مربعی با دترمینان غیرصفر باشد، وارون A را با نماد $A^{-۱}$ نمایش می‌دهیم. خاصیت ماتریس $A^{-۱}$ آن است که $AA^{-۱}=A^{-۱}A=I$.

۲) ماتریس $A^{-۱}$ در حالتی موجود است که $|A|\neq۰$ و ماتریس $A^{-۱}$ در صورت وجود یکتا است.

۳) اگر بدانیم X و Y دو ماتریس مربعی هم‌مرتبه هستند، به طوری که $XY=I$، آن‌گاه نتیجه می‌گیریم X و Y هر دو وارون‌پذیر هستند و داریم: $X^{-۱}=Y$ و $Y^{-۱}=X$.

۴ اگر $A=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$، آن‌گاه $A^{-1}=\frac{1}{ad-bc}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$.

از $AB=BC=I$ نتیجه می‌گیریم:

$$\begin{cases} \text{الف) } AB=I \text{ پس } B^{-1}=A \\ \text{ب) } BC=I \text{ پس } B^{-1}=C \end{cases} \text{ پس } \underbrace{C=A}_{(1)}.$$

ضمن آن‌که از $AB=I$ نتیجه می‌شود $\underbrace{B=A^{-1}}_{(2)}$.

از تساوی‌های (۱) و (۲) نتیجه می‌گیریم:

$$2A+B-C=2A+A^{-1}-A=A+A^{-1}$$

داریم $A=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}$، پس:

$$A^{-1}=\frac{1}{2-0}\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow A+A^{-1}=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -1 & \frac{5}{2} \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow |A+A^{-1}|=2\times\frac{5}{2}-0\times(-1)=5$$

۲۸. اگر $A=\begin{bmatrix} -\sqrt{2} & -4 \\ 2 & 2\sqrt{2} \end{bmatrix}$، آن‌گاه $\frac{1}{2}A^2+2A^{-1}=\alpha A+\beta I$. حاصل $\frac{\beta}{\alpha}$ کدام است؟

۱) -6 ۲) 6 ۳) 3 ۴) -3

پاسخ: گزینه ۱

درسنامه:

اگر $A=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$، آن‌گاه $A^2=(a+d)A-|A|I$.

داریم $A=\begin{bmatrix} -\sqrt{2} & -4 \\ 2 & 2\sqrt{2} \end{bmatrix}$، پس: $|A|=-4\times2+\sqrt{2}\times2\sqrt{2}=-4$.

پس بنا به رابطه‌ای که در درسنامه گفتیم، داریم: $A^2=-2A+4I$.

حالا اگر طرفین این تساوی را (راست یا چپ فرقی ندارد) در A^{-1} ضرب کنیم، داریم:

$$A^2.A^{-1}=-2A.A^{-1}+4I.A^{-1} \Rightarrow A=-2I+4A^{-1}$$

بنابراین:

$$4A^{-1}=A+2I \Rightarrow A^{-1}=\frac{1}{4}(A+2I)$$

پس داریم:

$$\frac{1}{2}A^2+2A^{-1}=\frac{1}{2}(-2A+4I)+2(\frac{1}{4}(A+2I))=-A+2I+\frac{1}{2}A+I=-\frac{1}{2}A+3I$$

از مقایسه‌ی $\frac{1}{2}A^2+2A^{-1}=-\frac{1}{2}A+3I$ با $\frac{1}{2}A^2+2A^{-1}=\alpha A+\beta I$ نتیجه می‌گیریم $\alpha=-\frac{1}{2}$ و $\beta=3$ پس $\frac{\beta}{\alpha}=-6$.

۲. اگر $A=\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$، آن‌گاه درایه‌ی سطر دوم و ستون دوم ماتریس $(BAB^{-1})^{81}$ کدام است؟

۱) ۷ ۲) ۶ ۳) ۵ ۴) ۴

پاسخ: گزینه ۱

درسنامه:

اگر ماتریس‌های مربعی A و B هم‌مرتبه و B وارون‌پذیر باشد، آن‌گاه به ازای همه‌ی nهای طبیعی داریم:

$$(BAB^{-1})^n = BA^n B^{-1}$$

زیرا مثلاً برای $n=2$ داریم:

$$(BAB^{-1})^2 = BA\underbrace{B^{-1}B}_{I}AB^{-1} = BAIAB^{-1} = BA^2B^{-1}$$

بنا به آن‌چه در درسنامه گفتیم داریم:

$$(BAB^{-1})^{81} = BA^{81}B^{-1} \qquad (*)$$

از طرفی داریم:

$$A^2 = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I$$

پس:

$$A^{81} = (A^2)^{40}A = I^{40}A = IA = A$$

ماتریس B^{-1} را به دست می‌آوریم:

$$B^{-1} = \frac{1}{1\times 2 + 3\times 0}\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{3}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

با توجه به (*)، درایه‌ی سطر دوم و ستون دوم ماتریس BAB^{-1} را می‌خواهیم که به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$[\text{سطر دوم } B]\, A \begin{bmatrix} \text{ستون} \\ \text{دوم} \\ B^{-1} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}}_{\begin{bmatrix} 6 & -4 \end{bmatrix}}\begin{bmatrix} \frac{3}{2} \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix} = 9 - 2 = 7$$

۳۰. اگر A یک ماتریس ۳×۳ باشد، به طوری که $A^3 = 2I$، آن‌گاه وارون ماتریس $(A+I)^3$ برابر با کدام است؟

۱) $3(A-I)$ ۲) $\frac{1}{3}(A-I)$ ۳) $\frac{1}{3}(A+I)$ ۴) $3(A+I)$

پاسخ: گزینه ۲

به طرفین تساوی $A^3 = 2I$، ماتریس $-I^3$ را اضافه می‌کنیم، داریم:

$$A^3 - I^3 = 2I - I^3 \Rightarrow (A-I)(A^2 + A + I^2) = 2I - I^3$$

می‌دانیم $I = I^2 = I^3$، پس:

$$(A-I)(A^2 + A + I) = I \qquad (*)$$

از طرفی داریم:

$$(A+I)^3 = A^3 + 3A^2I + 3AI^2 + I^3 \Rightarrow (A+I)^3 = A^3 + 3A^2 + 3A + I$$

$$\xrightarrow{A^3 = 2I} (A+I)^3 = 2I + 3A^2 + 3A + I \Rightarrow (A+I)^3 = 3A^2 + 3A + 3I \Rightarrow A^2 + A + I = \frac{1}{3}(A+I)^3$$

با در نظر گرفتن تساوی اخیر و تساوی (*)، داریم:

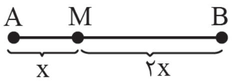
$$(A-I).\frac{1}{3}(A+I)^3 = I \Rightarrow \frac{1}{3}(A-I).(A+I)^3 = I \Rightarrow ((A+I)^3)^{-1} = \frac{1}{3}(A-I)$$

۳۱. پاره‌خط AB، نقطه M بر این پاره خط و نقطه N واقع بر امتداد آن مفروض‌اند. اگر $\frac{MA}{MB} = \frac{NA}{NB} = \frac{1}{2}$ و طول پاره خط MN برابر با ۶ واحد باشد، طول پاره‌خط AB کدام است؟

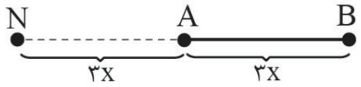
۱) ۳ ۲) ۷/۵ ۳) ۴ ۴) ۴/۵

پاسخ: گزینه ۴

با توجه به شکل داریم:

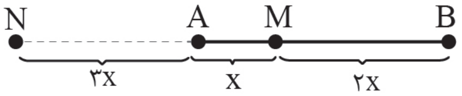


$$\frac{MA}{MB}=\frac{1}{2} \Rightarrow \begin{cases} MA=x \\ MB=2x \end{cases}$$



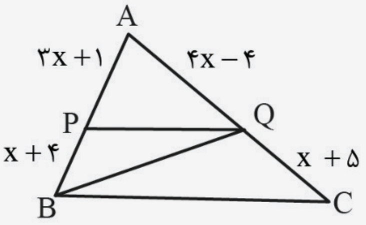
$$\frac{NA}{NB}=\frac{1}{2} \Rightarrow \frac{NA}{NA+AB}=\frac{1}{2} \Rightarrow \frac{NA}{NA+3x}=\frac{1}{2} \Rightarrow NA=3x$$

حالا با ترکیب شکل‌های بالا خواهیم داشت:



$$MN=6 \Rightarrow NA+AM=3x+x=4x=6 \Rightarrow x=\frac{3}{2} \Rightarrow AB=3x=\frac{9}{2}=4/5$$

۳۲. در شکل مقابل PQ با BC موازی است. نسبت مساحت مثلث BPQ به مساحت مثلث BCQ کدام است؟



۱) $\frac{1}{2}$

۲) $\frac{2}{3}$

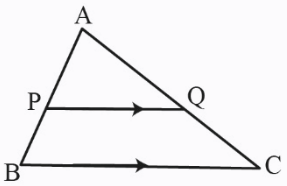
۳) $\frac{3}{4}$

۴) $\frac{4}{5}$

پاسخ: گزینه ۲

درسنامه:

۱ در شکل مقابل PQ با BC موازی است، داریم:

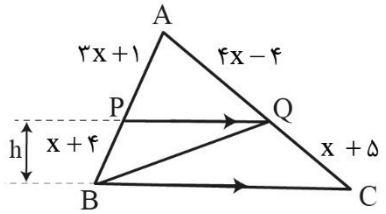


$$\frac{AP}{PB}=\frac{AQ}{QC} \quad \text{(قضیه‌ی تالس)}$$

$$\frac{AB}{AB}=\frac{AQ}{AC}=\frac{PQ}{BC} \quad \text{(تعمیم قضیه‌ی تالس)}$$

۲ اگر دو مثلث دارای یک ارتفاع برابر باشند، مساحت‌های آن‌ها برابر است با نسبت قاعده‌های نظیر آن ارتفاع برابر.

با توجه به شکل، بنا به قضیه‌ی تالس در مثلث ABC، داریم:



$$\frac{AP}{PB}=\frac{AQ}{QC} \Rightarrow \frac{3x+1}{x+4}=\frac{4x-4}{x+5} \Rightarrow (3x+1)(x+5)=(4x-4)(x+4)$$

$$\Rightarrow 3x^2+15x+x+5=4x^2+16x-4x-16 \Rightarrow x^2-4x-21=0$$

$$\Rightarrow (x+3)(x-7)=0 \Rightarrow \begin{cases} x=-3 & \text{(غیر قابل قبول)} \\ x=7 \end{cases}$$

از طرفی بنا به تعمیم قضیه‌ی تالس در مثلث ABC، داریم:

$$\frac{PQ}{BC}=\frac{AP}{AB}=\frac{3x+1}{4x+5} \xrightarrow{x=7} \frac{PQ}{BC}=\frac{22}{33}=\frac{2}{3} \quad (*)$$

در نهایت داریم:

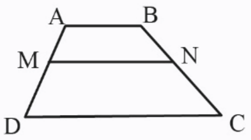
$$\frac{S_{BPQ}}{S_{BCQ}}=\frac{\frac{1}{2}h.PQ}{\frac{1}{2}h.BC}=\frac{PQ}{BC}\overset{(*)}{=\!=}\frac{2}{3}$$

۳۳. در ذوزنقه‌ی ABCD، AB قاعده‌ی کوچک‌تر است. نقطه‌ی M را روی ساق AD و نقطه‌ی N را روی ساق BC طوری در نظر می‌گیریم که $\frac{AM}{MD}=\frac{BN}{NC}=\frac{۴}{۹}$. اگر پاره‌خط MN توسط قطرهای ذوزنقه به سه قسمت مساوی تقسیم شود، آن‌گاه حاصل $\frac{CD}{AB}$ کدام است؟

۱) ۳ ۲) ۳/۵ ۳) ۴ ۴) ۴/۵

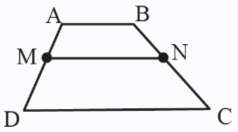
پاسخ: گزینه ۴

درسنامه:

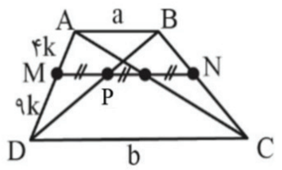


۱ مطابق شکل، اگر دو نقطه‌ی M و N را روی ساق‌های ذوزنقه‌ی ABCD در نظر بگیریم که MN با قاعده‌ها موازی باشد، آن‌گاه:

$$\frac{AM}{MD}=\frac{BN}{NC}=\frac{MN-AB}{CD-MN}$$



۲ عکس قضیه‌ی تالس در ذوزنقه: مطابق شکل در ذوزنقه‌ی ABCD اگر دو نقطه‌ی M و N را به ترتیب روی ساق‌های AD و BC طوری در نظر بگیریم که $\frac{AM}{MD}=\frac{BN}{NC}$، آن‌گاه MN با قاعده‌های ذوزنقه موازی است.



شکل مناسب را رسم می‌کنیم. از آن‌جا که $\frac{AM}{MD}=\frac{BN}{NC}$، پاره‌خط MN با قاعده‌های ذوزنقه موازی است.

از آن‌جا که $\frac{AM}{MD}=\frac{۴}{۹}$، در نظر می‌گیریم $AM=۴k$ و $MD=۹k$.

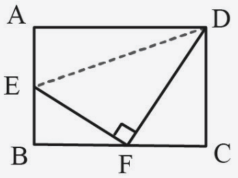
در مثلث ABD بنا به تعمیم قضیه‌ی تالس، داریم:

$$\frac{MP}{AB}=\frac{DM}{DA} \Rightarrow \frac{MP}{a}=\frac{۹k}{۹k+۴k} \Rightarrow MP=\frac{۹}{۱۳}a$$

پس $MN=۳MP=\frac{۲۷}{۱۳}a$ و داریم:

$$\frac{MN-AB}{CD-MN}=\frac{AM}{MD} \Rightarrow \frac{\frac{۲۷}{۱۳}a-a}{b-\frac{۲۷}{۱۳}a}=\frac{۴}{۹} \Rightarrow \frac{\frac{۱۴}{۱۳}a}{b-\frac{۲۷}{۱۳}a}=\frac{۴}{۹} \Rightarrow \frac{۱۲۶}{۱۳}a=۴b-\frac{۱۰۸}{۱۳}a \Rightarrow \frac{۲۳۴}{۱۳}a=۴b \Rightarrow \frac{b}{a}=\frac{۱۸\times۱۳}{۴\times۱۳}=۴/۵$$

۳. مطابق شکل، E و F وسط‌های دو ضلع مستطیل ABCD هستند. نسبت $\frac{DE}{AD}$ برابر با کدام است؟

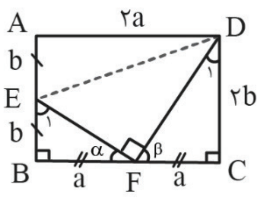


۱) $\frac{\sqrt{۶}}{۲}$ ۲) $\frac{۲\sqrt{۳}}{۳}$

۳) $\frac{۲\sqrt{۶}}{۳}$ ۴) $\frac{۳\sqrt{۲}}{۴}$

پاسخ: گزینه ۴

طول اضلاع مستطیل را ۲a و ۲b در نظر می‌گیریم. با توجه به شکل، داریم:



$$B\hat{F}C=۱۸۰^\circ \Rightarrow \alpha+۹۰^\circ+\beta=۱۸۰^\circ \Rightarrow \alpha+\beta=۹۰^\circ \quad (*)$$

از طرفی در مثلث $\overset{\Delta}{BEF}$ داریم $\alpha+\hat{E}_۱=۹۰^\circ$ و در مثلث $\overset{\Delta}{CDF}$ داریم $\hat{D}_۱+\beta=۹۰^\circ$ پس بنا به (*)، داریم $\hat{E}_۱=\beta$ و $\hat{D}_۱=\alpha$. پس زاویه‌های دو مثلث $\overset{\Delta}{BEF}$ و $\overset{\Delta}{CFD}$ با هم برابر و در نتیجه این دو مثلث متشابه‌اند و داریم:

$$\frac{BF}{CD}=\frac{BE}{CF} \Rightarrow \frac{a}{۲b}=\frac{b}{a} \Rightarrow a^۲=۲b^۲ \Rightarrow b^۲=\frac{۱}{۲}a^۲ \quad (*)$$

از طرفی بنا به قضیه‌ی فیثاغورس، داریم:

$$\overset{\Delta}{BEF}:EF^۲=a^۲+b^۲ \overset{(*)}{=\!=} \frac{۳}{۲}a^۲ \quad , \quad \overset{\Delta}{CFD}:FD^۲=a^۲+۴b^۲ \overset{(*)}{=\!=} ۳a^۲$$

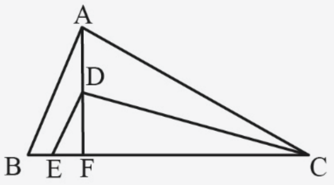
$$\overset{\Delta}{DEF}:DE^۲=EF^۲+FD^۲ \Rightarrow DE^۲=\frac{۳}{۲}a^۲+۳a^۲=\frac{۹}{۲}a^۲$$

از $DE^2=\frac{9}{2}a^2$ نتیجه می‌گیریم:

$$DE^2=\frac{9}{2}(\frac{1}{2}AD)^2 \Rightarrow DE^2=\frac{9}{8}AD^2 \Rightarrow \frac{DE^2}{AD^2}=\frac{9}{8}$$

$$\Rightarrow \frac{DE}{AD}=\sqrt{\frac{9}{8}}=\frac{3}{2\sqrt{2}}\times\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}=\frac{3\sqrt{2}}{4}$$

۳۵. در شکل مقابل، زاویه‌های BAC، CDE و AFC قائمه‌اند. اگر E وسط BF و DF = BF آن‌گاه حاصل $\frac{AC}{DC}$ کدام است؟



۱) $\sqrt{1/2}$

۲) $\sqrt{1/3}$

۳) $\sqrt{1/4}$

۴) $\sqrt{1/5}$

پاسخ: گزینه ۱

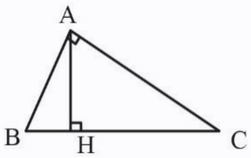
درسنامه:

مطابق شکل، اگر در مثلث قائم‌الزاویه‌ی ABC، AH ارتفاع وارد بر وتر باشد، آن‌گاه:

۱) $AH^2=BH.CH$

۲) $AB^2=BH.BC$

۳) $AC^2=CH.BC$



مطابق شکل، از آن‌جا که E وسط BF است، در نظر می‌گیریم $BE=EF=x$ که در این‌صورت، از $DF=BF$ نتیجه می‌گیریم $DF=2x$.

در مثلث قائم‌الزاویه‌ی DEF، DF ارتفاع وارد بر وتر است، پس:

$$DF^2=EF.CF \Rightarrow (2x)^2=x.CF \Rightarrow CF=\frac{4x^2}{x}=4x$$

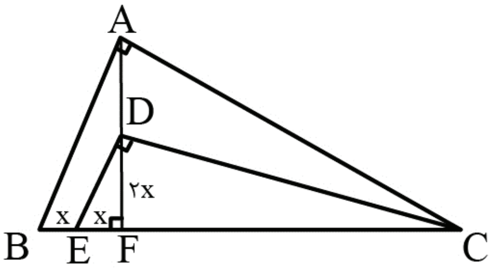
$$DC^2=CF.CE \Rightarrow DC^2=(4x)(5x)=20x^2$$

در مثلث قائم‌الزاویه‌ی ABC، AF ارتفاع وارد بر وتر است، پس:

$$AC^2=CF.BC \Rightarrow AC^2=(4x)(6x)=24x^2$$

پس:

$$\frac{AC^2}{DC^2}=\frac{24\times x^2}{20x^2}=1/2 \Rightarrow \frac{AC}{DC}=\sqrt{1/2}$$



پاسخنامه دفترچه ۱ آزمون مرحله ۲

ریاضیات گسسته و آمار و احتمال | ۱ آبان ماه ۱۴۰۴

۳۶. کدام گزینه مثال نقضی برای گزاره‌ی «اگر P عددی اول باشد، آنگاه عدد 2^P-1 اول است.» می‌باشد؟

۱) ۵ ۲) ۶ ۳) ۷ ۴) ۱۱

پاسخ: گزینه ۴

توجه داشته باشید برای یافتن مثال نقض، باید P عددی اول باشد. یعنی با این‌که 2^6-1 اول نیست اما نمی‌توانیم $P=6$ را در نظر بگیریم. چون در فرض مسئله صدق نمی‌کند، برای اعداد اول مختلف P خواهیم داشت:

$P=2 \rightarrow 2^2-1=3$ اول است

$P=3 \rightarrow 2^3-1=7$ اول است

$P=5 \rightarrow 2^5-1=31$ اول است

$P=7 \rightarrow 2^7-1=127$ اول است

$P=11 \rightarrow 2^{11}-1=2047$ اول نیست

دقت داشته باشید که $2047=23\times 89$ و عددی مرکب است.

بنابراین گزینه‌ی (۴) صحیح است.

۳۷. اگر α و β دو عدد گنگ و $\alpha+\beta$ گویا باشد، اعداد $3\alpha-\beta$ و $\beta-\alpha$ به ترتیب از راست به چپ چگونه‌اند؟

۱) گویا - گویا ۲) گویا - گنگ ۳) گنگ - گویا ۴) گنگ - گنگ

پاسخ: گزینه ۴

درسنامه:

برای مسائل مربوط به گویا و گنگ بودن اعداد بهتر است از برهان خلف استفاده کنیم. به این صورت که حکم مسئله را نقیض کرده و آن را فرض خلف می‌گوییم. حال با رسیدن به تناقض با فرضیات مسئله متوجه می‌شویم که فرض خلف باطل و حکم ثابت می‌شود.

فرض خلف: $3\alpha-\beta$ گویاست. در این صورت داریم:

$$\begin{matrix} 3\alpha-\beta=\text{گویا} \\ \alpha+\beta=\text{گویا} \end{matrix} \xrightarrow{(+)} 4\alpha=\text{گویا} \rightarrow \alpha=\text{گویا} \times$$

اما می‌دانیم که α عددی گنگ است. پس فرض خلف باطل است و $3\alpha-\beta$ گویا نیست؛ پس $3\alpha-\beta$ گنگ است.

همچنین برای $\beta-\alpha$ هم داریم:

فرض خلف: $\beta-\alpha$ گویاست.

$$\begin{matrix} \beta-\alpha=\text{گویا} \\ \alpha+\beta=\text{گویا} \end{matrix} \xrightarrow{(+)} 2\beta=\text{گویا} \rightarrow \beta=\text{گویا} \times$$

بنابراین $\beta-\alpha$ نیز گنگ است.

۳۸. فرض کنید $a_1,a_2,\dots,a_n$ اعداد صحیح و $b_1,b_2,\dots,b_n$ همان اعداد با ترتیبی دیگر باشند. به ازای چند عضو از مجموعه‌ی $\{3,4,\dots,90\}$ برای n، با اطمینان می‌توان گفت که عدد $(a_1-b_1)(a_2-b_2)\dots(a_n-b_n)$ عددی زوج است؟

۱) ۴۳ ۲) ۴۴ ۳) ۴۵ ۴) ۴۶

پاسخ: گزینه ۲

درسنامه:

به این مثال مهم از صفحه‌ی (۶) کتاب درسی در مبحث برهان خلف توجه کنید:

مثال: $a_۱, a_۲$ و $a_۳$ عددهایی صحیح هستند و $b_۱, b_۲$ و $b_۳$ هم همان اعداد ولی به ترتیب دیگری قرار گرفته‌اند. ثابت کنید $(a_۱-b_۱)(a_۲-b_۲)(a_۳-b_۳)$ عددی زوج است.

حل: برای درک بهتر مسئله، مثالی ارائه می‌کنیم. $a_۱, a_۲$ و $a_۳$ را به ترتیب، ۵، ۸ و ۱ در نظر می‌گیریم و $b_۱, b_۲$ و $b_۳$ را ۸، ۱ و ۵ در نظر می‌گیریم، داریم:

$$(a_۱-b_۱)(a_۲-b_۲)(a_۳-b_۳)=(۵-۸)(۸-۱)(۱-۵)=(-۳)(۷)(-۴)=۸۴$$

اگر $(a_۱-b_۱)(a_۲-b_۲)(a_۳-b_۳)$ زوج نباشد (فرض خلف) پس عددی فرد است. پس هر سه عامل $a_۱-b_۱$, $a_۲-b_۲$ و $a_۳-b_۳$ هم باید فرد باشند (چرا؟) و در نتیجه مجموع آن‌ها هم باید عددی فرد باشد، یعنی $(a_۱-b_۱)+(a_۲-b_۲)+(a_۳-b_۳)$ باید عددی فرد باشد. اما مجموع این سه عبارت صفر است!

در حالت کلی‌تر ثابت می‌کنیم که اگر n فرد باشد، $(a_۱-b_۱)(a_۲-b_۲)...(a_n-b_n)$ عددی زوج است.

فرض خلف: فرض کنیم $A=(a_۱-b_۱)(a_۲-b_۲)...(a_n-b_n)$ عددی زوج نیست، پس فرد است. پس هر n عامل $(a_۱-b_۱), (a_۲-b_۲)$ ... و (a_n-b_n) باید عددی فرد باشد، اما مجموع این n عبارت برابر صفر است! پس فرض خلف باطل و حکم ثابت می‌شود.

nهای فرد در مجموعه‌ی $\{۳,۴,...,۹۰\}$ تعداد موردنظر ما هستند که۴۴ تا هستند.

توجه کنید برای nهای زوج می‌توان با یک مثال نقض نشان داد که A عددی فرد است.

۳۹. اگر عدد طبیعی $a>۳$ اعداد $۴m+۲$ و $۱۳m+۵$ را عاد کند، کدام گزینه نمی‌تواند عدد اول بزرگ‌تر از ۳ باشد؟

۱) $ak+۲$ ۲) $ak+۱$ ۳) $ak-۱$ ۴) $ak+۵$

پاسخ: گزینه ۱

درسنامه:

از دیدگاه ما رابطه‌ی عاد کردن همانند یک ترازوی دوکفه‌ای است. سمت چپ ضعیف و سمت راست قوی است. هر عملی که این توازن را بهم نزند، قابل‌قبول است!

بنابراین قوی را می‌توانیم در هر عدد صحیح دلخواهی ضرب کنیم. مثال:

$$\begin{cases} a\,|\,۳x+۵ \xrightarrow{\times ۵} a\,|\,۱۵x+۲۵ \\ a\,|\,۵x+۲ \xrightarrow{\times ۳} a\,|\,۱۵x+۶ \end{cases} \xrightarrow{(-)} a\,|\,۱۹ \rightarrow a=\pm۱,\pm۱۹$$

برای حل این‌گونه سوالات از روش دترمینان می‌توان استفاده کرد:

$$\begin{cases} a\,|\,bn+c \\ a\,|\,dn+e \end{cases} \rightarrow a\,|\,be-cd$$

درسنامه:

اعداد اول بزرگ‌تر از ۳ به فرم $۶k+۱$ یا $۶k+۵$ هستند.

اثبات: می‌دانیم هر عدد صحیح به ۶ حالت زیر است. در هر حالت بررسی می‌کنیم که این عدد می‌تواند اول باشد یا خیر!

$a=۶k$ مضرب ۶ است ✗

$a=۶k+۱$ می‌تواند اول باشد. ✓

$a=۶k+۲$ زوج است ✗

$a=۶k+۳$ مضرب ۳ است ✗

$a=۶k+۴$ زوج است ✗

$a=۶k+۵$ می‌تواند اول باشد. ✓

حال به حل تست می‌پردازیم:

$$\left.\begin{array}{l} a\,|\,۱۳m+۵ \\ a\,|\,۴m+۲ \end{array}\right. \xrightarrow{\text{دترمینان}} a\,|\,۲۶-۲۰ \rightarrow a\,|\,۶ \rightarrow a=\pm۱,\pm۲,\pm۳,\pm۶$$

اما از آن‌جا که $a>۳$ است، مقدار $a=۶$ قابل‌قبول است. پس گزینه‌ها به شکل زیر درمی‌آیند:

۱) $۶k+۲$ ۲) $۶k+۱$ ۳) $۶k-۱$ ۴) $۶k+۵$

با توجه به درسنامه‌ی بالا گزینه‌ی (۱) زوج است و نمی‌تواند یک عدد اول بزرگ‌تر از ۳ باشد. توجه داشته باشید که $۶k-۱$ همان $۶k+۵$ است! بنابراین گزینه‌ی (۱) صحیح است.

۴۰. **چند نقطه با مختصات طبیعی روی منحنی $۲x^۳-xy+۲y=۱$ وجود دارد؟**

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

پاسخ: گزینه ۴

درسنامه:

نکته گاهی ممکن اســـت مسائل عاد کردن را در قالب معادله‌ی یک منحنی مطرح کنند و بپرسند منحنی از چند نقطه با مختصات صحیح یا طبیعی عبور می‌کند. در این موارد معادله‌ی منحنی را مرتب و y را تنها می‌کنیم. سپس از این نکته استفاده می‌کنیم که: «مخرج ضعیفه است!»

در رابطه‌ی عاد کردن، هرگاه ضعیف عبارتی درجه‌ی اول باشد، می‌توان ریشه آن را در عبارت قوی قرار داد.

حال به حل تست بپردازیم:

$$۲x^۳-xy+۲y=۱ \rightarrow -xy+۲y=۱-۲x^۳ \rightarrow y(-x+۲)=۱-۲x^۳$$

$$\rightarrow y=\frac{۱-۲x^۳}{-x+۲} \rightarrow y=\frac{۲x^۳-۱}{x-۲} \xrightarrow[\text{است}]{\text{مخرج ضعیفه}} x-۲\,|\,۲x^۳-۱$$

$$\xrightarrow[\text{داخل قوی}]{\text{ریشه‌ی ضعیف}} x-۲\,|\,۲(۲)^۳-۱ \rightarrow x-۲\,|\,۱۵ \rightarrow$$

$$x-۲=\pm۱ \rightarrow \begin{cases} x=۱ \rightarrow y=-۱ \quad (۱,-۱)\ \text{غ ق ق} \ \times \\ x=۳ \rightarrow y=۵۳ \quad (۳,۵۳)\ \checkmark \end{cases}$$

$$x-۲=\pm۳ \rightarrow \begin{cases} x=-۱\ \text{غ ق ق} \ \times \\ x=۵ \rightarrow y=۸۳ \quad (۵,۸۳)\ \checkmark \end{cases}$$

$$x-۲=\pm۵ \rightarrow \begin{cases} x=-۳\ \text{غ ق ق} \ \times \\ x=۷ \rightarrow y=۱۳۷ \quad (۷,۱۳۷)\ \checkmark \end{cases}$$

$$x-۲=\pm۱۵ \rightarrow \begin{cases} x=-۱۳\ \text{غ ق ق} \ \times \\ x=۱۷ \rightarrow y=۱۹۶۵ \quad (۱۷,۱۹۶۵)\ \checkmark \end{cases}$$

پس گزینه‌ی (۴) صحیح است.

۴۱. **باقی‌مانده‌ی تقسیم عدد $۳^{۳۹}+۴^{۳۹}$ بر ۹۱ کدام است؟**

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۹۰

پاسخ: گزینه ۱

درسنامه:

اتحادهای زیر را بلد هستیم:

$$\text{طبیعی}\ n: a^n-b^n=(a-b)(a^{n-۱}+a^{n-۲}b+\cdots+b^{n-۱}) \qquad \text{همه جملات}+$$

n زوج: $a^n - b^n = (a+b)(a^{n-1} - a^{n-2}b + \dots - b^{n-1})$ یک در میان + و −

n فرد: $a^n + b^n = (a+b)(a^{n-1} - a^{n-2}b + \dots - b^{n-1})$ یک در میان + و −

از طرفی $a^n + b^n$ هیچ‌گاه بر $a-b$ بخش‌پذیر نمی‌باشد.

با توجه به کادر بالا می‌توان نوشت:

$$۴^{۳۹} + ۳^{۳۹} = (۴^۳)^{۱۳} + (۳^۳)^{۱۳} = ۶۴^{۱۳} + ۲۷^{۱۳}$$

$$\xrightarrow{\text{توان فرد}} ۶۴^{۱۳} + ۲۷^{۱۳} = (۶۴+۲۷)(۶۴^{۱۲} - ۶۴^{۱۱} \times ۲۷ + \dots - ۲۷^{۱۲})$$

پس می‌توان گفت:

$$۶۴+۲۷ \mid ۶۴^{۱۳} + ۲۷^{۱۳} \rightarrow ۹۱ \mid ۶۴^{۱۳} + ۲۷^{۱۳} \rightarrow ۹۱ \mid ۴^{۳۹} + ۳^{۳۹}$$

یعنی عدد $۴^{۳۹} + ۳^{۳۹}$ بر عدد ۹۱ بخش‌پذیر است.

بنابراین گزینه‌ی (۱) صحیح است.

۴۲. به ازای چند عدد طبیعی دورقمی n، دو عدد $۴n+۷$ و $۶n+۱۱$ نسبت به هم اول‌اند؟

۱) صفر ۲) ۴۵ ۳) ۸۹ ۴) ۹۰

پاسخ: گزینه ۴

فرض کنیم $d = (۶n+۱۱, ۴n+۷)$ آن‌گاه داریم:

$$\begin{matrix} d \mid ۴n+۷ \xrightarrow{\times ۶} d \mid ۲۴n+۴۲ \\ d \mid ۶n+۱۱ \xrightarrow{\times ۴} d \mid ۲۴n+۴۴ \end{matrix} \xrightarrow{(-)} d \mid ۲ \Rightarrow d=۱ \text{ یا } d=۲$$

می‌دانیم اعداد $۴n+۷$ و $۶n+۱۱$ فرد هستند، بنابراین ب.م.م آن‌ها نمی‌تواند ۲ باشد. پس $d=۲$ غیرقابل‌قبول است. بنابراین همواره داریم $d=۱$، در نتیجه این دو عدد همواره نسبت به هم اول‌اند و تمامی اعداد دورقمی n جواب مسئله است، بنابراین گزینه‌ی (۴) صحیح است.

درسنامه:

اگر a و b دو عدد صحیح ناصفر باشند؛ در این صورت $d \geq ۱$ را بزرگ‌ترین مقسوم‌علیه مشترک (ب.م.م) a و b گوییم هرگاه:

$$۱)\ d \mid a\ ,\ d \mid b$$

$$۲)\ \forall m > ۰\ ;\ m \mid a , m \mid b \Rightarrow m \leq d$$

یعنی d باید هر دو عدد a و b را عاد کند و در عین حال بزرگ‌ترین عدد ممکن باشد.

ب.م.م دو عدد a و b را به صورت (a,b) نشان می‌دهیم. پرانتز به معنای ب.م.م است.

نکته ب.م.م ضعیفه است!

نکته علامت تأثیری در ب.م.م ندارد.

هرگاه ب.م.م دو عدد یک باشد، آن دو عدد نسبت به هم اول (متباین)اند.

مثلاً دو عدد ۲۵ و ۸ نسبت به هم اول‌اند.

هر دو عدد صحیح متوالی، نسبت به هم اول‌اند پس ب.م.م آن‌ها یک است. یعنی: $(n, n+۱) = ۱$

همچنین هر دو عدد صحیح و فرد متوالی نیز نسبت به هم اول‌اند. یعنی: $(۲k+۱, ۲k+۳) = ۱$

۴۳. m و n اعدادی صحیح هستند به گونه‌ای که $۱ = (۴m^۲, ۴n^۲) - ۳(m,n)$، حاصل $(۲n^۳, ۲m^۳)$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۸ ۴) ۶۴

پاسخ: گزینه ۲

فرض می‌کنیم $(m,n)=d$ داریم:

$$(۴m^۲,۴n^۲)=۴(m^۲,n^۲)=۴d^۲ \Rightarrow ۴d^۲-۳d-۱=۰ \Rightarrow \begin{cases} d=۱ \\ d=-\frac{۱}{۴} \quad \text{غ ق ق} \times \end{cases}$$

$$(۲n^۳,۲m^۳)=۲(n^۳,m^۳)=۲d^۳=۲$$

توجه داشته باشید ب.م.م دو عدد نمی‌تواند غیرصحیح باشد.

۴۴. اگر $(a,b)=d$ و $d \mid a^۳-۲b+۱۱$، آن‌گاه $a+b$ کدام گزینه می‌تواند باشد؟ (a و b نسبت به هم غیراول‌اند.)

۱) ۱۳۱ ۲) ۱۳۲ ۳) ۱۳۳ ۴) ۱۳۴

پاسخ: گزینه ۲

$$(a,b)=d \Rightarrow \begin{cases} d \mid a \Rightarrow d \mid a^۳ \\ d \mid b \Rightarrow d \mid -۲b \end{cases} \xrightarrow{(+)} d \mid a^۳-۲b$$

$$\left.\begin{matrix} d \mid a^۳-۲b+۱۱ \\ d \mid a^۳-۲b \end{matrix}\right\} \xrightarrow{(-)} d \mid ۱۱ \xrightarrow{d>۱} d=۱۱$$

ب.م.م دو عدد a و b برابر با ۱۱ است، یعنی هر دو عدد مضرب ۱۱ هستند؛ بنابراین مجموع آن‌ها نیز باید مضرب ۱۱ باشد؛ پس گزینه‌ی (۲) صحیح است.

۴۵. اگر $[a,۱۰۰]=۲۴۰۰$، آن‌گاه حاصل $[a,۳۵۰۰]$ برابر کدام است؟

۱) ۱۰۵۰۰ ۲) ۳۱۵۰۰ ۳) ۸۴۰۰۰ ۴) ۹۶۰۰۰

پاسخ: گزینه ۳

درسنامه:

عدد طبیعی c را کوچک‌ترین مضرب مشترک دو عدد صحیح و ناصفر a و b می‌نامیم و با $[a,b]=c$ نشان می‌دهیم؛ هرگاه:

$$۱)\ a \mid c, b \mid c$$

$$۲)\ \forall m>۰, a \mid m, b \mid m \Rightarrow c \le m$$

ک.م.م قوی است.

نکته رابطه‌ی مقابل را به خاطر بسپارید: $(a,b)[a,b]=|ab|$

علامت تأثیری در ک.م.م ندارد.

نکته اگر دو عدد که یکی بر دیگری بخش‌پذیر است داشته باشیم؛ ب.م.م آن‌ها برابر عدد کوچک‌تر و ک.م.م آن‌ها برابر عدد بزرگ‌تر است. مثلاً $[۱۸,۶]=۱۸$، $(۱۸,۶)=۶$.

نکته اگر ب.م.م و ک.م.م دو عدد باهم برابر باشند، اندازه‌ی آن دو عدد یکسان است.

ک.م.م یعنی عوامل مشترک با توان بیشتر ضرب‌در عوامل غیرمشترک!

$$[a,۲^۲\times ۵^۲]=۲^۵\times ۳^۱\times ۵^۲ \to a=۲^۵\times ۳^۱\times ۵^x \ ,\ x\in\{۰,۱,۲\}$$

$$[a,۳۵۰۰]=[۲^۵\times ۳^۱\times ۵^x, ۲^۲\times ۵^۳\times ۷^۱]=۲^۵\times ۵^۳\times ۳^۱\times ۷^۱=۸۴۰۰۰$$

دقت کنید توان ۵ در عدد $a(x)$ کوچک‌تر از ۳ است، پس در ک.م.م توان بزرگ‌تر (۳) انتخاب می‌شود.

۴۶. با توجه به گزاره‌های زیر، کدام نتیجه‌گیری الزاماً درست است؟

آ) اگر معدل کوکب بالای ۱۹ شود، از پدرش جایزه می‌گیرد.

ب) برای این‌که معدل کوکب بالای ۱۹ شود، باید ریاضی ۲۰ بگیرد.

پ) اگر معلم ریاضی کوکب به او ارفاق کند، ریاضی ۲۰ می‌شود.

ت) کوکب از پدرش جایزه نگرفت.

۱) معدل کوکب بالای ۱۹ شده است. ۲) نمره ریاضی کوکب ۲۰ شده است.

۳) نمره ریاضی کوکب بالای ۱۹ شده است. ۴) معلم ریاضی کوکب به او ارفاق نکرده است.

پاسخ: گزینه ۴

چون کوکب جایزه نگرفته است پس معدلش بالای ۱۹ نشده است. چون معدل کوکب بالای ۱۹ نشده است، ریاضی ۲۰ نگرفته است. چون ریاضی ۲۰ نگرفته است، پس معلم ریاضی او به وی ارفاق نکرده است.

بنابراین گزینه‌ی (۴) صحیح است.

۴۷. نقیض گزاره $(p\vee\sim q)\Rightarrow(\sim p\vee\sim q)$ با کدام گزینه هم‌ارز است؟

۱) $p\vee q$ ۲) $p\wedge q$ ۳) $p\Rightarrow q$ ۴) $q\Rightarrow p$

پاسخ: گزینه ۲

درسنامه:

نقیض گزاره‌ی شرطی:

نقیض ترکیب شرطی $p\Rightarrow q$ عبارت است از $p\wedge\sim q$. زیرا:

$$\sim(p\Rightarrow q)\equiv\sim(\sim p\vee q)\equiv p\wedge\sim q$$

$$\sim[(p\vee\sim q)\Rightarrow(\sim p\vee\sim q)]\equiv(p\vee\sim q)\wedge\sim(\sim p\vee\sim q)\equiv(p\vee\sim q)\wedge(p\wedge q)$$

حال جدول ارزش گزاره به دست آمده را رسم می‌کنیم:

p	q	$\sim q$	$p\vee\sim q$	$p\wedge q$	عبارت
د	د	ن	د	د	د
د	ن	د	د	ن	ن
ن	د	ن	ن	ن	ن
ن	ن	د	د	ن	ن

چون ستون به دست آمده با ستون $p\wedge q$ یکسان است پس گزینه‌ی (۲) صحیح است.

۴۸. ارزش گزاره‌ی $p\Leftrightarrow(q\wedge r)$ نادرست است. احتمال این که ارزش گزاره‌ی p درست باشد، کدام است؟

۱) ۰/۲۵ ۲) ۰/۵ ۳) ۰/۷۵ ۴) ۱

پاسخ: گزینه ۳

جدول ارزش گزاره:

حالت‌هایی که ارزش گزاره صورت سوال نادرست هستند، مدنظر است. یعنی ۴ حالت داریم. در ۳ حالت از این ۴ حالت ارزش گزاره‌ی p درست است.

بنابراین احتمال موردنظر برابر $\frac{۳}{۴}$ است.

p	q	r	$q\wedge r$	$p\Leftrightarrow(q\wedge r)$	
د	د	د	د	د	×
د	د	ن	ن	ن	✓
د	ن	د	ن	ن	✓
د	ن	ن	ن	ن	✓
ن	د	د	د	ن	✓
ن	د	ن	ن	د	×
ن	ن	د	ن	د	×
ن	ن	ن	ن	د	×

۴۹. اگر $p\vee q\equiv T$ باشد، گزاره‌ی $(p\Leftrightarrow q)\wedge\sim(\sim p\Rightarrow q)$ با کدام گزینه هم‌ارز است؟

۱) p ۲) $\sim q$ ۳) F ۴) T

پاسخ: گزینه ۳

اگر $p\vee q$ درست باشد، حداقل یکی از دو گزاره‌ی p و q درست هستند. اگر فقط یکی از آن‌ها درست و دیگری نادرست باشد، $p\Leftrightarrow q$ نادرست خواهد بود که در نتیجه گزاره‌ی کلی نادرست خواهد بود (تا همین‌جا گزینه‌ی «۴» حذف می‌شود.) اما اگر $p\equiv T$ و $q\equiv T$ آن‌گاه $p\Leftrightarrow q\equiv T$ ولی برای $\sim(\sim p\Rightarrow q)$ داریم:

$$\sim(\sim T\Rightarrow T)\equiv\sim T\equiv F$$

و باز هم گزاره‌ی کلی نادرست است. بنابراین گزینه‌ی (۳) صحیح است.

۵۰. نقیض گزاره‌ی سوری $(\exists x;x=۳)\Rightarrow(\forall x;x^۲=۹)$ کدام است؟ $(x\in\mathbb{R})$

۱) $(\forall x;x\neq ۳)\Rightarrow(\exists x;x^۲\neq ۹)$

۲) $(\forall x;x^۲=۹)\wedge(\forall x;x\neq ۳)$

۳) $(\exists x;x^۲\neq ۹)\wedge(\exists x;x=۳)$

۴) $(\exists x;x^۲\neq ۹)\Rightarrow(\forall x;x\neq ۳)$

پاسخ: گزینه ۲

درسنامه:

نقیض گزاره‌های سوری: برای نقیض کردن گزاره‌های سوری، ابتدا سور را عوض می‌کنیم. یعنی اگر سور عمومی داشتیم $(\forall)$، آن را به سور وجودی $(\exists)$ تبدیل می‌کنیم و بالعکس اگر سور وجودی داشتیم به جای آن سور عمومی قرار می‌دهیم، سپس گزاره را نقیض می‌کنیم. خلاصه:

$$\begin{cases}\sim(\forall x;p)=\exists x;\sim p\\ \sim(\exists x;p)=\forall x;\sim p\end{cases}$$

گزاره این تست یک گزاره شرطی است. می‌دانیم $\sim(p\Rightarrow q)\equiv p\wedge\sim q$. پس مقدم را بدون تغییر گذاشته و تالی را نقیض می‌کنیم. بین آن‌ها هم باید عطف قرار گیرد.

بنابراین گزینه‌ی (۲) صحیح است.