زیستاز

دفترچه شماره ۳ | ۲۰ فروردین ماه ۱۴۰۴

دفترچه پاسخ آزمون الکترونیکی زیستاز

ماراتون شمارهٔ ۲۰

ویژه دانش آموزان پایه دوازدهم

نام درس	ریاضی	زمین
گزینشگر	سجاد عظمتی	-
ناظر علمی	عزیزالله علی اصغری	-
مسئول آزمون	گروه ریاضی فیثاغورس	-
پاسخنامه‌نویس	امیرمحمد فتاحی	-
طراحان	سجاد عظمتی- سامان سلامیان_ نریمان فتح الهی- بهروز دُرزاده - عزیزالله علی اصغری- میثم صمدی - علی احمدی قزلدشت - امیرحسام شکری	-
ویراستاران	مصطفی غلامی- آرش پورباقری	-

تولید فنی و گرافیک توسط نشر ویانو

چاپ، تکثیر، انتشار و یا استفاده از محتوای آزمون به هر نحوی و بدون اجازه «گروه آموزشی زیستاز» غیرقانونی، غیراخلاقی و خلاف شرع بوده و با متخلفان برابر مقررات رفتار خواهد شد.

سنجش کلاد
www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshClouds

پاسخنامه ریاضی
آزمون مرحله ۲۰ پایه دوازدهم
۲۰ فروردین ۱۴۰۴

۱۱۱. اگر نقطه‌ای به طول ۱ روی منحنی $y = x^3 + 1$ باشد، تبدیل یافته آن روی منحنی $y = x^3 - 6x^2 + 12x - 5$ چه نقطه‌ای است؟

۱) $(2,3)$ ۲) $(3,4)$ ۳) $(1,2)$ ۴) $(3,3)$

پاسخ: گزینه ۲

عرض نقطه‌ای به طول $x = 1$ روی نمودار $y = x^3 + 1$ برابر $y = 2$ است. پس نقطهٔ $(1,2)$ روی $y = x^3 + 1$ است.

ابتدا تابع f را با استفاده از اتحاد مکعب دوجمله‌ای به صورت زیر می‌نویسیم:

$$f(x) = x^3 - 6x^2 + 12x - 5 = (x-2)^3 + 3$$

نقطهٔ متناظر $(1,2)$ در تابع $y = x^3$، نقطه $(1,1)$ است.

حال برای یافتن نقطهٔ متناظر آن بر روی تابع $f(x)$، طول نقطه را دو واحد بیشتر و عرض نقطه را نیز سه واحد بیشتر می‌کنیم تا به نقطهٔ $(3,4)$ برسیم.

۱۱۲. تابع f اکیداً نزولی و دامنهٔ آن مجموعه‌ای از مقادیر مثبت است. مجموعه جواب نامعادلهٔ $f(x^3 - 3x^2 + 3x - 1) > f(x^2 - 2x + 1)$ کدام است؟

۱) $(1,2)$ ۲) $(-\infty,2)$ ۳) $(0,1)$ ۴) $(-\infty,1)$

پاسخ: گزینه ۱

چون تابع f اکیداً نزولی است، پس برای حل نامعادله، داریم:

$$f(x^3 - 3x^2 + 3x - 1) > f(x^2 - 2x + 1) \Rightarrow x^3 - 3x^2 + 3x - 1 < x^2 - 2x + 1$$
$$\Rightarrow (x-1)^3 < (x-1)^2 \Rightarrow (x-1)^3 - (x-1)^2 < 0 \Rightarrow (x-1)^2(x-2) < 0 \Rightarrow x - 2 < 0 \Rightarrow x < 2$$

در ضمن چون دامنهٔ تابع f مجموعه‌ای از مقادیر مثبت است، پس:

$$1)\ (x-1)^3 > 0 \Rightarrow x - 1 > 0 \Rightarrow x > 1$$
$$2)\ (x-1)^2 > 0 \Rightarrow x \in \mathbb{R} - \{1\}$$

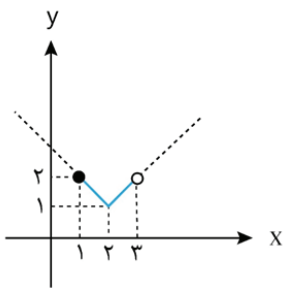
از اشتراک مقادیر به دست آمده، نتیجه می‌گیریم $1 < x < 2$ است.

۱۱۳. اگر $f(x) = |x-2| + 1$ و $g(x) = 2x - 2[x] + 1$ باشد، بُرد تابع $(fog)(x)$ کدام است؟

۱) $\{2\}$ ۲) $[1,2)$ ۳) $[1,3)$ ۴) $[1,2]$

پاسخ: گزینه ۴

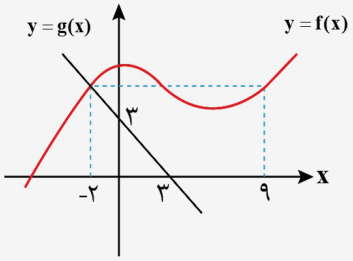
می‌دانیم $0 \le x - [x] < 1$ است، پس $0 \le 2x - 2[x] < 2$ است. بنابراین بُرد تابع g به صورت بازهٔ $[1,3)$ است. حالا برای تعیین بُرد تابع $(fog)(x)$، نمودار تابع $f(x) = |x-2| + 1$ را در دامنهٔ $[1,3)$ رسم می‌کنیم و بُرد آن را پیدا می‌کنیم:



$$\xrightarrow[\text{بردار تابع fog}]{} R_{fog} = [1,2]$$

سنجش کلاد
www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshClouds

۱۱۴. نمودار دو تابع $y=f(x)$ و $y=g(x)$ به صورت مقابل است. اگر $(g^{-1}of)(۹)=m$ باشد، مقدار $g(۱+m)$ کدام است؟



۱) ۱
۲) ۲
۳) ۳
۴) ۴

پاسخ: گزینه ۴

باتوجه به شـــکل صورت سؤال، $g(x)=-x+۳$ است. حالا سراغ رابطهٔ $g^{-۱}(f(۹))=m$ می‌رویم. باتوجه به نمودار، $f(۹)=g(-۲)=۵$ است، پس:

$$g^{-۱}(f(۹))=m \Rightarrow g^{-۱}(۵)=m \Rightarrow g(m)=۵ \xrightarrow{g(-۲)=۵} m=-۲$$

بنابراین $g(۱+m)$ برابر است با:

$$g(-۱)=۴$$

۱۱۵. اگر $\frac{\cos ۲x}{\sin x+\cos x}=\frac{۱}{\sqrt{۵}}$ باشد، مقدار $\sin ۲x$ کدام است؟

۱) $\frac{۲۴}{۲۵}$
۲) $\frac{۹}{۲۵}$
۳) $\frac{۴}{۵}$
۴) $\frac{۳}{۵}$

پاسخ: گزینه ۳

$$\frac{\cos ۲x}{\sin x+\cos x}=\frac{۱}{\sqrt{۵}} \Rightarrow \frac{\cos^۲ x-\sin^۲ x}{\sin x+\cos x}=\frac{۱}{\sqrt{۵}}$$

$$\Rightarrow \frac{(\cos x-\sin x)(\cos x+\sin x)}{\sin x+\cos x}=\frac{۱}{\sqrt{۵}} \Rightarrow \cos x-\sin x=\frac{۱}{\sqrt{۵}}$$

حالا طرفین تساوی $\cos x-\sin x=\frac{۱}{\sqrt{۵}}$ را به توان ۲ می‌رسانیم:

$$(\cos x-\sin x)^۲=\frac{۱}{۵} \Rightarrow \sin^۲ x+\cos^۲ x-۲\sin x\cos x=\frac{۱}{۵}$$

$$\Rightarrow ۱-\sin ۲x=\frac{۱}{۵} \Rightarrow \sin ۲x=\frac{۴}{۵}$$

۱۱۶. حاصل عبارت $\sqrt{۳}\sin\frac{\pi}{۱۲}-\sqrt{۳}\cos\frac{\pi}{۱۲}$ کدام است؟

۱) $\frac{-\sqrt{۲}}{۲}$
۲) $-\frac{\sqrt{۶}}{۲}$
۳) $\frac{\sqrt{۲}}{۲}$
۴) $\frac{\sqrt{۶}}{۲}$

پاسخ: گزینه ۲

فرض می‌کنیم $A=\sin\frac{\pi}{۱۲}-\cos\frac{\pi}{۱۲}$ است. توجه کنید $\sin\frac{\pi}{۱۲}<\cos\frac{\pi}{۱۲}$ است. پس $A<۰$ می‌باشد و داریم:

$$A^۲=(\sin\frac{\pi}{۱۲}-\cos\frac{\pi}{۱۲})^۲=\sin^۲\frac{\pi}{۱۲}+\cos^۲\frac{\pi}{۱۲}-۲\sin\frac{\pi}{۱۲}\cos\frac{\pi}{۱۲}$$

$$\Rightarrow A^۲=۱-\sin\frac{\pi}{۶}=۱-\frac{۱}{۲}=\frac{۱}{۲} \xrightarrow[A<۰]{\sqrt{\ }} A=-\frac{۱}{\sqrt{۲}}$$

پس حاصل عبارت موردنظر برابر است با:

$$\sqrt{۳}(\sin\frac{\pi}{۱۲}-\cos\frac{\pi}{۱۲})=\sqrt{۳}\times(-\frac{۱}{\sqrt{۲}})=-\frac{\sqrt{۶}}{۲}$$

سنجش کلاد
www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshClouds

۱۱۷. کوچک‌ترین جواب مثبت معادلهٔ $\sin(۲x-\frac{\pi}{۶})=\cos x$ کدام است؟

۱) $\frac{\pi}{۳}$ ۲) $\frac{۲\pi}{۹}$ ۳) $\frac{\pi}{۶}$ ۴) $\frac{\pi}{۹}$

پاسخ: گزینه ۲

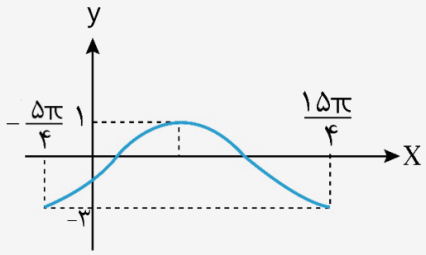
به جای $\cos x$ می‌نویسیم $\sin(\frac{\pi}{۲}-x)$ و داریم:

$$\sin(۲x-\frac{\pi}{۶})=\sin(\frac{\pi}{۲}-x)\Rightarrow\begin{cases}۲x-\frac{\pi}{۶}=۲k\pi+\frac{\pi}{۲}-x\\ ۲x-\frac{\pi}{۶}=۲k\pi+\pi-(\frac{\pi}{۲}-x)\end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}۳x=۲k\pi+\frac{۲\pi}{۳}\Rightarrow x=\frac{۲k\pi}{۳}+\frac{۲\pi}{۹}\\ x=۲k\pi+\frac{۲\pi}{۳}\end{cases}$$

کوچک‌ترین جواب مثبت معادله برابر $\frac{۲\pi}{۹}$ است.

۱۱۸. قسمتی از نمودار تابع $f(x)=a-۴\sin(\frac{bx+۲\pi}{۲})\cos(\frac{bx+۲\pi}{۲})$ به صورت زیر است. مقدار $a+b$ کدام است؟



۱) ۱/۴ ۲) -۱/۴ ۳) ۰/۷ ۴) -۰/۷

پاسخ: گزینه ۲

با کمک رابطهٔ $\sin ۲x=۲\sin x\cos x$ ضابطهٔ تابع f را ساده می‌کنیم:

$$f(x)=a-۴\sin(\frac{bx+۲\pi}{۲})\cos(\frac{bx+۲\pi}{۲})=a-۲\sin(۲\pi+bx)$$

$$\Rightarrow f(x)=a-۲\sin bx$$

از طرفی چون بیشترین مقدار تابع برابر ۱ و کمترین مقدار آن برابر -۳ است، پس:

$$a=\frac{\max+\min}{۲}=\frac{۱+(-۳)}{۲}=-۱$$

در ضمن دورهٔ تناوب تابع برابر ۵π است، پس:

$$T=\frac{۲\pi}{|b|}=۵\pi\Rightarrow|b|=\frac{۲}{۵}\xrightarrow{b<۰}b=-\frac{۲}{۵}$$

پس $a+b=-\frac{۷}{۵}$ است.

۱۱۹. اگر باقی‌ماندهٔ تقسیم چند جمله‌ای $p(x)$ بر $x^۲-۴$ و $x^۳+۸$ به ترتیب برابر $۲x-۳$ و r باشد، مقدار r کدام است؟

۱) ۱ ۲) -۲ ۳) -۵ ۴) -۷

پاسخ: گزینه ۴

باتوجه به اتحاد تقسیم داریم:

$$p(x)=(x^۲-۴)Q(x)+۲x-۳\xrightarrow{x=-۲}p(-۲)=-۷$$

حالا باقی ماندهٔ تقسیم چندجمله‌ای $p(x)$ بر $x^۳+۸$ را پیدا می‌کنیم:

سنجش کلاد
www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshClouds

$$p(x)=(x^{3}+8)q(x)+r \xrightarrow{x=-2} p(-2)=r=-7$$

۱۲۰. اگر حاصل $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x-\sqrt{x^{m}-1}}{x}$ یک عدد غیرصفر و متناهی باشد، m کدام می‌تواند باشد؟

۱) ۲ ۲) $\frac{3}{2}$ ۳) $\frac{5}{2}$ ۴) ۱-

پاسخ: گزینه ۲

می‌توان گزینه‌ها را کنترل کرد:

۱) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x-\sqrt{x^{2}-1}}{x}=\dfrac{x-|x|}{x}=0$

۲) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x-\sqrt{x^{\frac{3}{2}}-1}}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x-x^{\frac{3}{4}}}{x}=1$

۳) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x-\sqrt{x^{\frac{5}{2}}-1}}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x-x^{\frac{5}{4}}}{x}=\dfrac{-x^{\frac{5}{4}}}{x}=-\lim\limits_{x\to+\infty}x^{+\frac{1}{4}}=-\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt[4]{x}=-\infty$

۴) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x-\sqrt{\frac{1}{x}-1}}{x}$ (غ ق ق)

دامنهٔ رادیکال: $\frac{1}{x}-1\geq 0 \Rightarrow \frac{1-x}{x}\geq 0 \to 0<x\leq 1$

۱۲۱. اگر $f(x)=\dfrac{(x+1)(2x-3)-x|x|}{x^{2}-2|x-1|}$ باشد، حاصل $\lim\limits_{x\to 0^{-}} f(\frac{1}{x})$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

پاسخ: گزینه ۳

می‌دانیم وقتی $x\to 0^{-}$، آن‌گاه $\frac{1}{x}\to-\infty$ پس $\lim\limits_{x\to 0^{-}} f(\frac{1}{x})=\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ است. حالا حاصل $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ را پیدا می‌کنیم. با انتخاب پرتوان‌ها داریم:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{(x+1)(2x-3)-x|x|}{x^{2}-2|x-1|}$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{(x)(2x)-x(-x)}{x^{2}-2(-x)}=\lim_{x\to-\infty}\frac{3x^{2}}{x^{2}}=3$$

۱۲۲. اگر $\lim\limits_{x\to\frac{2\pi}{3}^{+}}\dfrac{a+bx}{1+a\cos x}=-\infty$ باشد، کوچکترین مقدار صحیح b کدام است؟

۱) ۱- ۲) صفر ۳) ۱ ۴) ۲

پاسخ: گزینه ۲

به بررسی گزینه‌ها می‌پردازیم:

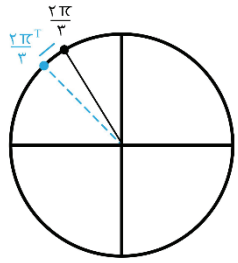
چون حاصل حد $-\infty$ است، پس با قرار دادن $x=\frac{2\pi}{3}$ در تابع f، مخرج کسر صفر می‌شود، بنابراین:

$$1+a\cos\frac{2\pi}{3}=0\Rightarrow 1-\frac{1}{2}a=0\Rightarrow a=2$$

در ضمن وقتی $x\to\frac{2\pi}{3}^{+}$ آن‌گاه عبارت مخرج کسر یعنی $1+2\cos x$ به 0^{-} میل می‌کند. پس برای اینکه حاصل حد $-\infty$ باشد، باید

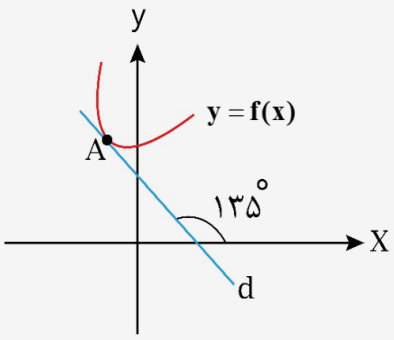
سنجش کلاد
www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshClouds

صورت کسر عددی مثبت باشد:



$$۲+b(\frac{۲\pi}{۳}^{+})>۰\Rightarrow ۲+b(۲/۱)>۰\xrightarrow{b\in\mathbb{Z}}\text{Min}(b)=۰$$

۱۲۳. در شکل مقابل، خط d در نقطهٔ $A(-۱,۴)$ بر نمودار تابع $y=f(x)$ مماس است. مشتق تابع $y=x^{۲}f(x)$ در $x=-۱$ کدام است؟



۱) -۷ ۲) -۹ ۳) ۷ ۴) -۸

پاسخ: گزینه ۲

شیب خط d برابر $\tan ۱۳۵^{\circ}=-۱$ است. در ضمن این خط در نقطه $A(-۱,۴)$ بر نمودار تابع $y=f(x)$ مماس است، پس $f'(-۱)=-۱$ است. حالا از تابع $y=x^{۲}f(x)$ مشتق می‌گیریم:

$$y'=۲xf(x)+x^{۲}f'(x)\xrightarrow{x=-۱}y'=-۲f(-۱)+f'(-۱)\Rightarrow y'=-۲(۴)+(-۱)=-۹$$

۱۲۴. خط مماس بر نمودار تابع $f(x)=x^{۲}-mx+۳$ از نقطه‌ای به طول $x=۱$ واقع بر آن، از نقطهٔ $A(۳,۱۴)$ می‌گذرد. مقدار m کدام است؟

۱) $-۱/۵$ ۲) -۲ ۳) $۱/۵$ ۴) ۴

پاسخ: گزینه ۲

ابتدا مختصات نقطهٔ تماس را پیدا می‌کنیم:

$$f(x)=x^{۲}-mx+۳\Rightarrow f(۱)=۴-m$$

حالا از تابع f مشتق می‌گیریم و شیب خط مماس بر نمودار را در نقطهٔ $x=۱$ پیدا می‌کنیم:

$$f'(x)=۲x-m\xrightarrow{x=۱}f'(۱)=۲-m$$

حالا معادلهٔ خط مماس را می‌نویسیم:

$$y-(۴-m)=(۲-m)(x-۱)$$

چون این خط از نقطهٔ $A(۳,۱۴)$ می‌گذرد، پس در این خط صدق می‌کند:

$$۱۴-(۴-m)=(۲-m)(۲)\Rightarrow ۱۰+m=۴-۲m$$

$$\Rightarrow ۳m=-۶\Rightarrow m=-۲$$

سنجش کلاد
www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshClouds

۱۲۵. اگر $f(x)=\frac{۳}{۲}-\sqrt{x+۲}$ و $g(x)=-\frac{x}{۴}$، آن‌گاه مشتق تابع $f(xg(x))$ در نقطه $x=۲$ کدام است؟

۱) -۱ ۲) $-\frac{۱}{۲}$ ۳) $\frac{۱}{۲}$ ۴) ۱

پاسخ: گزینه ۳

ابتدا مشتق تابع $y=f(xg(x))$ را پیدا می‌کنیم:

$$y'=(x.g(x))'.f'(x.g(x))$$

$$\xrightarrow{x=۲} y'=(۱\times g(x)+xg'(x)).f'(x.g(x))=(g(۲)+۲g'(۲)).f'(۲g(۲))$$

با توجه به این‌که $f(x)=\frac{۳}{۲}-\sqrt{x+۲}$ و $f'(x)=-\frac{۱}{۲\sqrt{x+۲}}$ است، پس داریم:

$$y'=(-\frac{۱}{۲}+۲\times-\frac{۱}{۴}).f'(۲\times-\frac{۱}{۲})$$

$$=-۱\times f'(-۱)=-۱\times-\frac{۱}{۲}=\frac{۱}{۲}$$

۱۲۶. مقدار مینیمم نسبی تابع $f(x)=x^۴-۶x^۲+۸x$ کدام است؟

۱) -۱۶ ۲) ۱۶ ۳) -۲۴ ۴) ۲۴

پاسخ: گزینه ۳

می‌دانیم ریشه‌های $f'(x)=۰$ طول نقاط بحرانی تابع هستند. پس، از تابع مشتق می‌گیریم و برابر صفر قرار می‌دهیم.

چون مجموع ضرایب این معادله برابر صفر است، پس $x=۱$ یکی از ریشه‌های f' است و با استفاده از تجزیه داریم:

$$\Rightarrow f'(x)=۴x^۳-۱۲x+۸=(x-۱)(۴x^۲+۴x-۸)=۰$$

$$\Rightarrow f'(x)=۴(x-۱)^۲(x+۲)=۰\Rightarrow\begin{cases}x=۱\\x=-۲\end{cases}$$

حال با کمک جدول تعیین علامت f'، نحوه تغییرات تابع f ر مشخص می‌کنیم تا نوع اکسترمم‌های نسبی مشخص شود. در نتیجه تابع f یک مینیمم نسبی با طول $x=-۲$ دارد:

x		-۲		۱	
f'	$-$	۰	$+$	۰	$+$

$$f(-۲)=۱۶-۲۴-۱۶=-۲۴$$

۱۲۷. هزینه سوخت یک قطار در هر ساعت برای حرکت با سرعت v کیلومتر بر ساعت برابر $۳۲۰v^۲$ تومان است. همچنین سایر هزینه‌ها برای هر ساعت، صرف‌نظر از سرعت قطار، برابر ۸۰۰۰۰۰ تومان است. قطار با چه سرعتی حرکت کند تا هزینه آن، در یک کیلومتر، کمترین مقدار ممکن باشد؟

۱) ۴۰ ۲) ۴۵ ۳) ۵۰ ۴) ۵۵

پاسخ: گزینه ۳

اگر قطار با سرعت ثابت v کیلومتر بر ساعت حرکت کند، هزینه t ساعت حرکت آن از رابطه $C=۸۰۰۰۰۰t+۳۲۰v^۲t$ به‌دست می‌آید.

از طرفی می‌دانیم $t=\frac{x}{v}$ است، پس هزینه x کیلومتر حرکت قطار برابر است با:

$$C=۸۰۰۰۰۰(\frac{x}{v})+(۳۲۰v^۲)(\frac{x}{v})$$

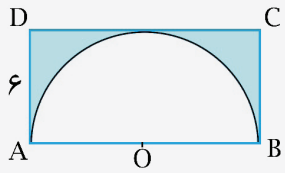
با جایگذاری $x=۱$ هزینه ۱ کیلومتر حرکت به‌دست می‌آید. پس برای به‌دست آوردن کمترین مقدار تابع، مشتق آن را برابر صفر می‌گذاریم:

$$C(v)=\frac{۸۰۰۰۰۰}{v}+۳۲۰v\xrightarrow{C'(v)}C'(v)=\frac{-۸۰۰۰۰۰}{v^۲}+۳۲۰=۰$$

$$\Rightarrow\frac{۸۰۰۰۰۰}{v^۲}=۳۲۰\Rightarrow v^۲=\frac{۸۰۰۰۰۰}{۳۲۰}=۲۵۰۰\Rightarrow v=۵۰$$

سنجش کلاد
www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshClouds

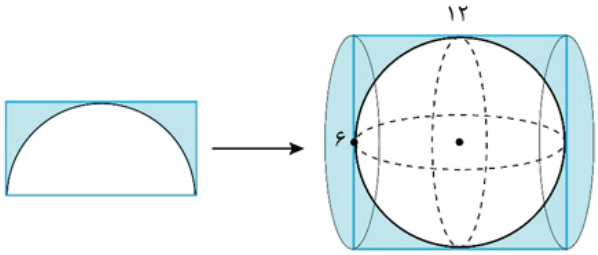
۱۲۸. مطابق شکل، از درون یک مستطیل، یک نیم‌دایره را کنار می‌گذاریم. سپس سطح باقی‌مانده را حول ضلع AB دوران می‌دهیم. حجم جسم حاصل از دوران چقدر است؟ (نقطهٔ O مرکز نیم دایره است.)



۱) ۳۶π ۲) ۷۲π ۳) ۱۴۴π ۴) ۲۸۸π

پاسخ: گزینه ۳

چون O مرکز نیم‌دایره است، پس $AB = ۲R = ۱۲$ است. یعنی $R = ۶$ است. حالا در اثر دوران، یک استوانه به شعاع قاعدهٔ ۶ و ارتفاع ۱۲ داریم که یک کره به شعاع $R = ۶$ از دوران آن خارج شده است. پس:



$$\Rightarrow V = V_{\text{استوانه}} - V_{\text{کره}} = \pi(۶)^۲ \times ۱۲ - \frac{۴}{۳}\pi \times ۶^۳ = (۲\pi - \frac{۴}{۳}\pi) \times ۶^۳ = \frac{۲}{۳}\pi \times ۲۱۶ = ۱۴۴\pi$$

۱۲۹. اگر دو دایرهٔ $(x+۱)^۲ + (y-۲r)^۲ = r^۲$ و $(x+۲)^۲ + (y-۲)^۲ = r^۲$ مماس خارج باشند، مقدار r کدام است؟

۱) ۱ ۲) $\frac{۳}{۸}$ ۳) $\frac{۵}{۸}$ ۴) $\frac{۲}{۳}$

پاسخ: گزینه ۳

مرکز و شعاع هر دایره را پیدا می‌کنیم:

$$(x+۱)^۲ + (y-۲r)^۲ = r^۲ \Rightarrow \begin{cases} \text{مرکز}: O_۱(-۱, ۲r) \\ \text{شعاع}: r \end{cases}$$

$$(x+۲)^۲ + (y-۲)^۲ = r^۲ \Rightarrow \begin{cases} \text{مرکز}: O_۲(-۲, ۲) \\ \text{شعاع}: r \end{cases}$$

چون این دو دایره مماس خارج هستند، پس فاصلهٔ دو مرکز آن‌ها برابر مجموع شعاع‌ها است:

$$O_۱O_۲ = \sqrt{(-۲+۱)^۲ + (۲r-۲)^۲} = r + r \xrightarrow{\text{توان ۲}} ۱ + (۲r-۲)^۲ = ۴r^۲ \Rightarrow ۱ + ۴r^۲ - ۸r + ۴ = ۴r^۲ \Rightarrow ۸r = ۵ \Rightarrow r = \frac{۵}{۸}$$

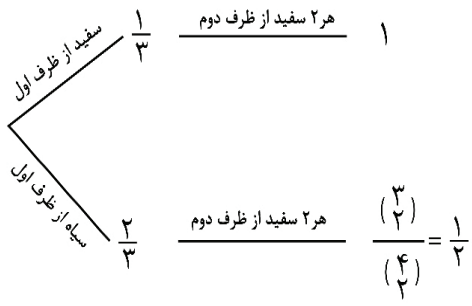
۱۳۰. دو ظرف یکسان در اختیار داریم. در ظرف اول، ۲ مهرهٔ سیاه و ۱ مهرهٔ سفید و در ظرف دوم ۳ مهرهٔ سفید وجود دارد. یک مهره به تصادف از ظرف اول خارج کرده و در ظرف دوم می‌اندازیم. سپس ۲ مهره از ظرف دوم خارج می‌کنیم. با چه احتمالی هر دو مهره سفید است؟

۱) $\frac{۵}{۶}$ ۲) $\frac{۲}{۳}$ ۳) $\frac{۱}{۲}$ ۴) $\frac{۱}{۶}$

پاسخ: گزینه ۲

سنجش کلاد
www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshClouds

مهرهٔ خارج شده از ظرف اول، با احتمال $\frac{۱}{۳}$ سفید و با احتمال $\frac{۲}{۳}$ سیاه است. پس:



$$\Rightarrow P=(\frac{۱}{۳}\times ۱)+(\frac{۲}{۳}\times\frac{۱}{۲})=\frac{۲}{۳}$$

سنجش کلاد
www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshClouds