دفترچه شمارهٔ ۳ | ۲۲ اسفندماه ۱۴۰۳

دفترچه پاسخ آزمون الکترونیکی زیستاز

آزمون شمارهٔ ۱۸

ویژه دانش آموزان پایه دوازدهم

نام درس	ریاضی	زمین
گزینشگر	سجاد عظمتی، عزیزالله علی اصغری	-
ناظر علمی	امید شیری‌نژاد	-
مسئول آزمون	گروه ریاضی فیثاغورس	-
پاسخنامه‌نویس	بهروز دُرزاده	-
طراحان	سجاد عظمتی ، نریمان فتح الهی	-
ویراستاران	مصطفی غلامی، آرش باقری‌پور، امیرحسین ابراهیم‌پور	-

تولید فنی و گرافیک توسط نشر ویانو

ویژه کنکور ۱۴۰۴

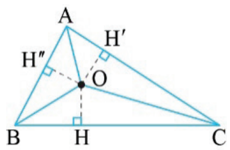
پاسخنامه ریاضی آزمون مرحله ۱۸ پایه دوازدهم
۲۲ اسفند ۱۴۰۳

۷۶. فاصلهٔ کدام نقطه از سه ضلع مثلث ABC، همواره یکسان است؟

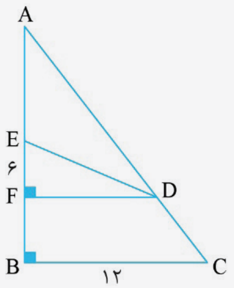
۱) تلاقی سه ارتفاع　　۲) تلاقی سه میانه　　۳) تلاقی سه نیمساز　　۴) تلاقی سه عمودمنصف

پاسخ: گزینه ۳

در هر مثلث، نیمسازهای داخلی همرس هستند و نقطهٔ همرسی آن‌ها از سه ضلع مثلث به یک فاصله است. [چون هر نقطه روی نیمساز، از دو ضلع زاویه به یک فاصله است] یعنی در مثلث مقابل $OH = OH' = OH''$ است.



۷۷. در مثلث مقابل، $\frac{AD}{DC} = ۲$ و $EF = ۶$ و $BC = ۱۲$ است. طول پاره خط ED کدام است؟



۱) ۹/۵

۲) ۹

۳) ۱۰

۴) ۸/۵

پاسخ: گزینه ۳

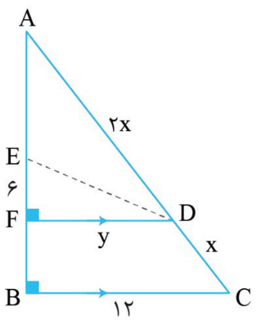
در مثلث ABC، دو ضلع BC و FD موازی‌اند. از آن‌جایی که $\frac{AD}{DC} = ۲$ است، پس با فرض $DC = x$ نتیجه می‌شود $AD = ۲x$ است.

حالا با کمک قضیه تالس (جزء به کل) داریم:

$$\frac{AD}{AC} = \frac{FD}{BC} \Rightarrow \frac{۲x}{۳x} = \frac{y}{۱۲} \Rightarrow y = ۸$$

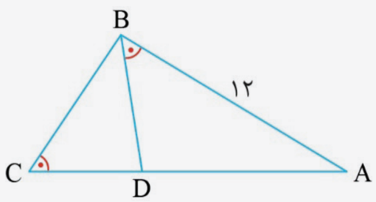
حالا به مثلث قائم‌الزاویهٔ EDF توجه کنید:

در این مثلث طبق قضیهٔ تالس داریم:



$$(ED)^۲ = (FD)^۲ + (EF)^۲ \Rightarrow (ED)^۲ = ۸^۲ + ۶^۲ = ۱۰۰ \Rightarrow ED = ۱۰$$

۷۸. در شکل مقابل، $A\hat{B}D = B\hat{C}A$ است و مساحت مثلث ABC، $\frac{۱۶}{۹}$ برابر مساحت مثلث ABD است. طول ضلع CD کدام است؟



۱) ۳

۲) ۴

۳) ۵

۴) ۶

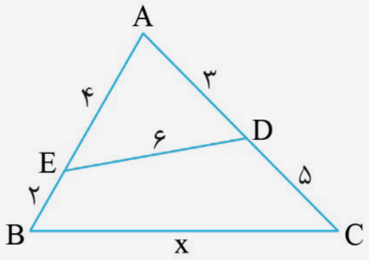
پاسخ: گزینه ۱

دو مثلث ABC و ABD در زاویهٔ $\hat{A}$ مشتـــرک‌اند و همچنین دارای ۲ زاویهٔ برابر $A\hat{B}D$ و $B\hat{C}A$ هســـتند؛ بنابراین دو مثلث به حالت تســـاوی ۲ زاویه، متشابه‌اند. در ضمن، از آن‌جایی که مساحت مثلث ABC، $\frac{۱۶}{۹}$ برابر مساحت مثلث ABD است، پس نسبت تشابه آن‌ها برابر $\sqrt{\frac{۱۶}{۹}}=\frac{۴}{۳}$ است. حالا با نوشتن نسبت تشابه برای اضلاع این دو مثلث طول CD را پیدا می‌کنیم:

$$\frac{AB}{AD}=\frac{AC}{AB}=\frac{۴}{۳}\Rightarrow\begin{cases}\frac{AB}{AD}=\frac{۴}{۳}\Rightarrow\frac{۱۲}{AD}=\frac{۴}{۳}\Rightarrow AD=۹\\ \frac{AC}{AB}=\frac{۴}{۳}\Rightarrow\frac{AC}{۱۲}=\frac{۴}{۳}\Rightarrow AC=۱۲\end{cases}$$

بنابراین CD برابر است با: $CD=AC-AD=۱۲-۹=۳$

۷۹. در شکل مقابل، دو مثلث ABC و ADE متشابه‌اند. مقدار x کدام است؟



۱) ۹

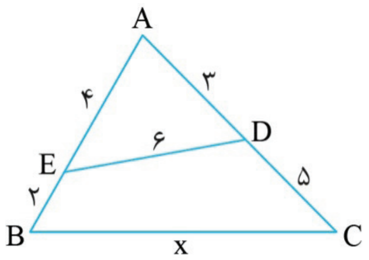
۲) ۱۰

۳) ۱۲

۴) ۱۵

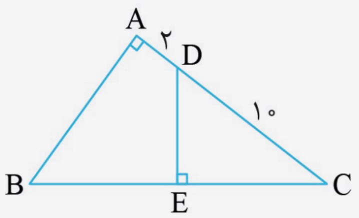
پاسخ: گزینه ۳

چون دو مثلث ABC و ADE متشابه‌اند، پس با نوشتن نسبت تشابه برای اضلاع دو مثلث داریم:



$$\frac{BC}{ED}=\frac{AC}{AE}=\frac{AB}{AD}\Rightarrow\frac{x}{۶}=\frac{۸}{۴}=\frac{۶}{۳}\Rightarrow x=۲$$

۸۰. در شکل مقابل، محیط مثلث ABC، ۱/۵ برابر محیط مثلث DEC است. طول پاره‌خط BE چقدر است؟



۱) ۶

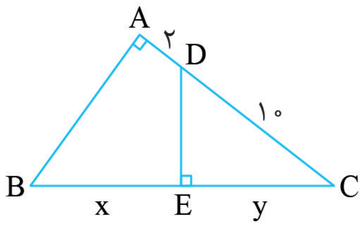
۲) ۶/۵

۳) ۷

۴) ۷/۵

پاسخ: گزینه ۳

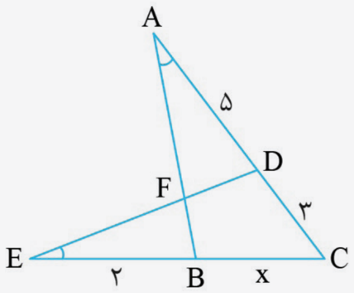
چون دو مثلث ABC و DEC در زاویهٔ $\hat{C}$ مشترک هستند و همچنین یک زاویهٔ قائمه نیز دارند، پس به حالت تساوی ۲ زاویه متشابه‌اند. از طرفی، محیط مثلث ABC، ۱/۵ برابر محیط مثلث DEC است، پس نسبت تشابه آن‌ها برابر ۱/۵ است. بنابراین با نوشتن نسبت تشابه برای اضلاع این دو مثلث، طول پاره‌خط BE را پیدا می‌کنیم:



$$\frac{BC}{DC}=\frac{AC}{EC}=۱/۵\Rightarrow\frac{x+y}{۱۰}=\frac{۱۲}{y}=۱/۵$$

$$\Rightarrow\begin{cases}\frac{۱۲}{y}=۱/۵\Rightarrow y=۸\\ \frac{x+y}{۱۰}=۱/۵\Rightarrow\frac{x+۸}{۱۰}=۱/۵\Rightarrow x=۷\end{cases}$$

۸۱. در شکل مقابل، $B\hat{A}C = D\hat{E}C$ است. مقدار x کدام است؟



۱) ۲/۸

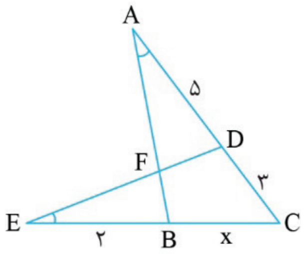
۲) ۳

۳) ۳/۵

۴) ۴

پاسخ: گزینه ۴

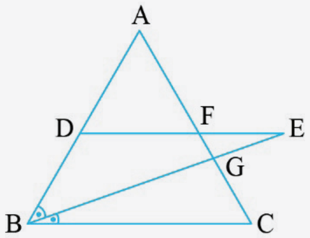
دو مثلث ABC و DEC در رأس $\hat{C}$ مشترک‌اند و دارای دو زاویهٔ برابر $B\hat{A}C$ و $D\hat{E}C$ هستند. بنابراین به حالت تساوی ۲ زاویه متشابه‌اند و داریم:



$$\frac{BC}{CD} = \frac{AC}{EC} \Rightarrow \frac{x}{۳} = \frac{۸}{۲+x} \Rightarrow x^{۲} + ۲x = ۲۴$$

$$\Rightarrow x^{۲} + ۲x - ۲۴ = ۰ \Rightarrow (x+۶)(x-۴) = ۰ \Rightarrow \begin{cases} x = ۴ \checkmark \\ x = -۶ \times \end{cases}$$

۸۲. در مثلث ABC مقابل، پاره‌خط‌های DE و BC موازی‌اند و BE نیمساز زاویهٔ B است. اگر $BD = ۸$ و $DF = ۴$ باشد و طول پاره‌خط CG دو برابر GF باشد، طول ضلع BC کدام است؟



۱) ۶

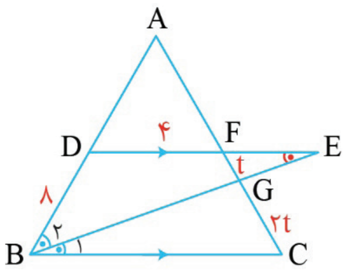
۲) ۷

۳) ۸

۴) ۹

پاسخ: گزینه ۳

چون DE و BC موازی‌اند و BE مورب است، پس $\hat{B}_۱ = \hat{E}$ است. بنابراین مثلث BDE متساوی‌الساقین است و در نتیجه $BD = DE = ۸$ است، پس:

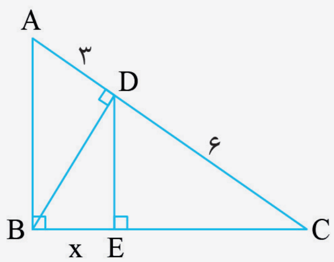


$$DE = ۸ \Rightarrow DF + FE = ۸ \Rightarrow ۴ + FE = ۸ \Rightarrow FE = ۴$$

حالا به دو مثلث BCG و EFG نگاه کنید. این دو مثلث در رأس G، متقابل به رأس هستند و $\hat{B}_۱ = \hat{E}$ است. پس به حالت تساوی دو زاویه متشابه‌اند. بنابراین:

$$\frac{BC}{FE} = \frac{CG}{FG} \Rightarrow \frac{BC}{۴} = \frac{۲t}{t} \Rightarrow BC = ۸$$

۸۳. مطابق شکل، ارتفاع وارد بر وتر در هر دو مثلث قائم‌الزاویه رسم شده است، مقدار x کدام است؟



۱) $\sqrt{۳}$

۲) ۲

۳) $\sqrt{۵}$

۴) $\sqrt{۶}$

پاسخ: گزینه ۴

باتوجه به روابط طولی در مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC داریم:

$$(BD)^۲ = AD \times CD = ۳ \times ۶ \Rightarrow BD = ۳\sqrt{۲}$$

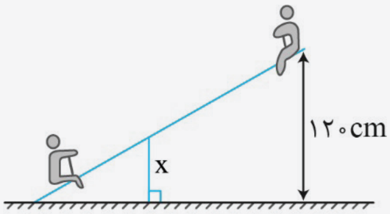
حالا در مثلث قائم‌الزاویهٔ BCD، طبق قضیهٔ فیثاغورس داریم:

$$(BC)^۲ = (BD)^۲ + (CD)^۲ \Rightarrow (BC)^۲ = (۳\sqrt{۲})^۲ + ۶^۲ = ۵۴ \Rightarrow BC = \sqrt{۵۴}$$

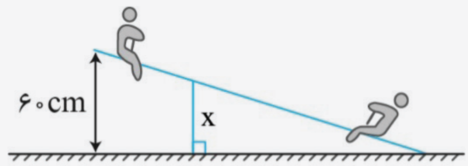
حالا به کمک روابط طولی در همین مثلث BCD داریم:

$$(BD)^۲ = BE \times BC \Rightarrow ۱۸ = x \times \sqrt{۵۴} \Rightarrow x = \frac{۱۸}{۳\sqrt{۶}} = \sqrt{۶}$$

۸۴. یک الاکلنگ با بازوهای نابرابر ساخته شده است. مطابق شکل (۱) وقتی انتهای سمت چپ این الاکلنگ روی زمین قرار می‌گیرد، ارتفاع انتهای سمت راست از سطح زمین برابر ۱۲۰ سانتی‌متر می‌شود و مطابق شکل (۲)، وقتی که انتهای سمت راست الاکلنگ روی زمین قرار می‌گیرد، ارتفاع انتهای سمت چپ از سطح زمین برابر ۶۰ سانتی‌متر می‌شود. طول تکیه‌گاه این الاکلنگ یعنی x، چقدر است؟



شکل (۱)

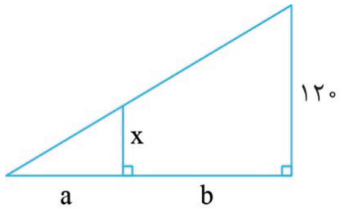


شکل (۲)

۱) ۵۰ ۲) ۴۵ ۳) ۴۰ ۴) ۳۸

پاسخ: گزینه ۳

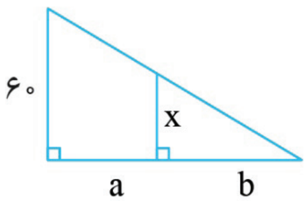
باتوجه به شکل‌های داده شده، کافی است دوبار از قضیهٔ تالس استفاده کنیم. باتوجه به شکل مقابل، داریم:



شکل (۱)

$$\frac{x}{۱۲۰} = \frac{a}{a+b}$$

همچنین در شکل مقابل، خواهیم داشت:



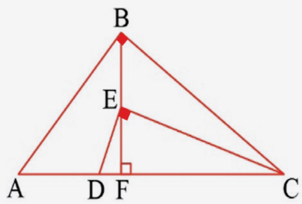
شکل (۲)

$$\frac{x}{۶۰} = \frac{b}{a+b}$$

حالا طرفین این دو رابطه را با هم جمع می‌کنیم:

$$\frac{x}{۱۲۰} + \frac{x}{۶۰} = \frac{a}{a+b} + \frac{b}{a+b} \Rightarrow \frac{۳x}{۱۲۰} = ۱ \Rightarrow x = ۴۰$$

۸۵. در شکل زیر، $A\hat{B}C = C\hat{E}D = ۹۰^\circ$ است. اگر $AD = ۳$ و $EF = ۴$ و $DF = ۱$ باشد، اندازهٔ BC کدام است؟



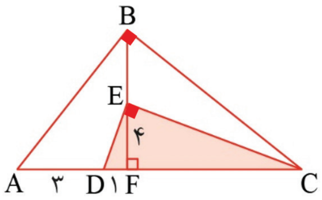
۱) $۴\sqrt{۶}$

۲) $۱۰\sqrt{۲}$

۳) $۶\sqrt{۳}$

۴) $۸\sqrt{۵}$

پاسخ: گزینه ۴



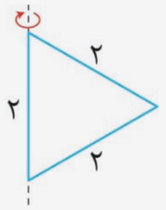
در مثلث قائم‌الزاویهٔ CED داریم:

$$EF^{۲} = DF \times FC \Rightarrow ۴^{۲} = ۱ \times FC \Rightarrow FC = ۱۶$$

حالا به مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC توجه کنید:

$$BC^{۲} = CF \times CA = ۱۶ \times ۲۰ \Rightarrow BC = ۸\sqrt{۵}$$

۸۶. مثلث متساوی‌الاضلاعی به ضلع ۲ را حول ضلع آن دوران می‌دهیم، حجم شکل حاصل چقدر است؟



۱) ۲π

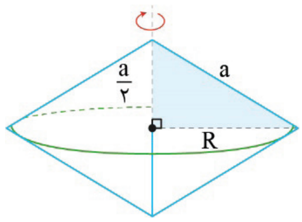
۲) ۳π

۳) ۴π

۴) ۵π

پاسخ: گزینه ۱

شکل حاصل دو مخروط یکسان است که از قاعده به هم چسبیده‌اند. ابتدا شعاع قاعده را با کمک قضیهٔ فیثاغورس پیدا می‌کنیم:



$$R^{۲} + (\frac{a}{۲})^{۲} = a^{۲} \Rightarrow R^{۲} = a^{۲} - \frac{a^{۲}}{۴} = \frac{۳a^{۲}}{۴} \Rightarrow R = \frac{a\sqrt{۳}}{۲}$$

بنابراین حجم شکل حاصل برابر است با:

$$V = ۲ \times (\frac{۱}{۳}\pi R^{۲} \times \frac{a}{۲}) = ۲ \times (\frac{۱}{۳}\pi(\frac{a\sqrt{۳}}{۲})^{۲} \times \frac{a}{۲})$$

$$\Rightarrow V = ۲ \times (\frac{۱}{۳}\pi \times \frac{۳a^{۲}}{۴} \times \frac{a}{۲}) = \frac{\pi a^{۳}}{۴} \xrightarrow{a=۲} V = \frac{\pi \times ۸}{۴} = ۲\pi$$

۸۷. دایره به معادلهٔ $(x+۲)^{۲} + (y-۳)^{۲} = ۱۰۰$ و خط $۳x - ۴y - ۱۲ = ۰$ در دو نقطهٔ A و B متقاطع‌اند. اگر O مرکز دایره باشد، مساحت مثلث OAB کدام است؟

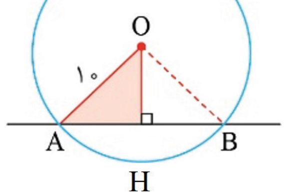
۱) ۱۶ ۲) ۲۴ ۳) ۳۶ ۴) ۴۸

پاسخ: گزینه ۴

مختصات مرکز دایرهٔ $(x+۲)^{۲} + (y-۳)^{۲} = ۱۰۰$ به صورت $O(-۲,۳)$ و شعاع آن برابر $R = ۱۰$ است. مطابق شکل، این دایره و خط $۳x - ۴y - ۱۲ = ۰$ در نقطهٔ A و B متقاطع‌اند. فاصلهٔ مرکز دایره از خط برابر است با:

$$OH = \frac{|۳(-۲) - ۴(۳) - ۱۲|}{\sqrt{۳^{۲} + (-۴)^{۲}}} = \frac{۳۰}{۵} = ۶$$

حالا به کمک رابطهٔ فیثاغورس داریم:



$$(OA)^{۲} = (AH)^{۲} + (OH)^{۲} \Rightarrow AH = \sqrt{۱۰^{۲} - ۶^{۲}} = \sqrt{۶۴} = ۸$$

بنابراین $AB = ۲ \times ۸ = ۱۶$ است و مساحت مثلث OAB برابر است با:

$$S_{OAB} = \frac{۱}{۲} \times AB \times OH = \frac{۱}{۲} \times ۱۶ \times ۶ = ۴۸$$

۸۸. کمترین فاصلهٔ نقاط دایره به معادلهٔ $(x+۵)^۲+(y-۱۲)^۲=۲۵$ از مبدأ مختصات کدام است؟

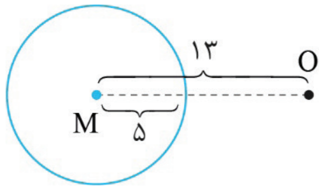
۱) ۵ ۲) ۶ ۳) ۷ ۴) ۸

پاسخ: گزینه ۴

در دایرهٔ $(x+۵)^۲+(y-۱۲)^۲=۲۵$ به صورت $M(-۵,۱۲)$ و شعاع دایره برابر $R=۵$ است. فاصلهٔ نقطهٔ مبدأ مختصات را از مرکز دایره پیدا می‌کنیم:

$$OM=\sqrt{(-۵-۰)^۲+(۱۲-۰)^۲}=\sqrt{۲۵+۱۴۴}=\sqrt{۱۶۹}=۱۳$$

چون $OM>R$ است، پس نقطهٔ O بیرون دایره قرار دارد و کمترین فاصلهٔ نقاط دایره از مبدأ برابر است با: $۱۳-۵=۸$



۸۹. خط d در نقطهٔ $A(-۱,-۲)$ بر دایره به معادلهٔ $x^۲+y^۲-۳x+۲y-۴=۰$ مماس است. معادلهٔ خط d کدام است؟

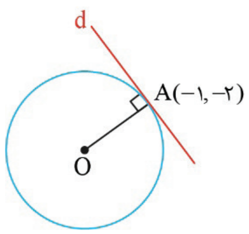
۱) $۵y-۳x+۷=۰$ ۲) $۵y-۳x-۷=۰$ ۳) $۲y+۵x+۹=۰$ ۴) $۲y+۵x-۹=۰$

پاسخ: گزینه ۳

مختصات مرکز دایرهٔ $x^۲+y^۲-۳x+۲y-۴=۰$ را پیدا می‌کنیم:

$$O(-\frac{a}{۲},-\frac{b}{۲})=(\frac{۳}{۲},-۱)$$

در ضمن، می‌دانیم شعاع دایره، در نقطهٔ تماس بر خط مماس عمود است. بنابراین:



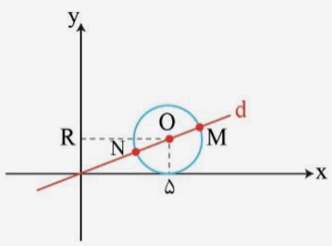
$$m_{OA}=\frac{y_O-y_A}{x_O-x_A}=\frac{-۱-(-۲)}{\frac{۳}{۲}-(-۱)}=\frac{۱}{\frac{۵}{۲}}=\frac{۲}{۵}$$

$$\Rightarrow m_d=-\frac{۱}{m_{OA}}=-\frac{۵}{۲}$$

حالا با داشتن شیب خط d و نقطهٔ $A(-۱,-۲)$ روی آن، معادلهٔ خط مماس را می‌نویسیم:

$$d:y-(-۲)=-\frac{۵}{۲}(x-(-۱))\Rightarrow y+۲=-\frac{۵}{۲}x-\frac{۵}{۲}\xrightarrow{\times ۲}۲y+۵x+۹=۰$$

۹۰. مطابق شکل، دایره‌ای در نقطهٔ $A(۵,۰)$ بر محور xها مماس است و مرکز آن روی خط d قرار دارد. اگر $M(۸,۶)$ باشد، مختصات نقطهٔ N کدام است؟



۱) $(۴,۲)$
۲) $(۳,۲/۵)$
۳) $(۲,۱/۵)$
۴) $(۲,۱)$

پاسخ: گزینه ۳

چون دایره در نقطهٔ $A(۵,۰)$ بر محور xها مماس است، پس مختصات مرکز آن به صورت $O(۵,R)$ است. در ضمن فاصلهٔ نقطهٔ O از M

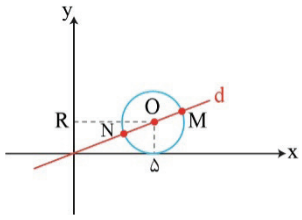
نیز برابر شعاع دایره است:

$$OM = R \Rightarrow \sqrt{(8-5)^2+(6-R)^2} = R \xrightarrow{\text{توان}\ 2} 9+36-12R+R^2 = R^2$$

$$\Rightarrow 12R = 45 \Rightarrow R = \frac{15}{4}$$

بنابراین مختصات مرکز دایره به صورت $O(5,\frac{15}{4})$ است. در ضمن چون نقاط M و N دو سر یک قطر دایره هستند، پس نقطهٔ O وسط آن‌ها قرار دارد.

$$\begin{cases} x_O = \dfrac{x_N + x_M}{2} \Rightarrow 5 = \dfrac{x_N + 8}{2} \Rightarrow x_N = 2 \\ y_O = \dfrac{y_N + y_M}{2} \Rightarrow \dfrac{15}{4} = \dfrac{y_N + 6}{2} \Rightarrow y_N = 1/5 \end{cases}$$



بنابراین $N(2,1/5)$ است.

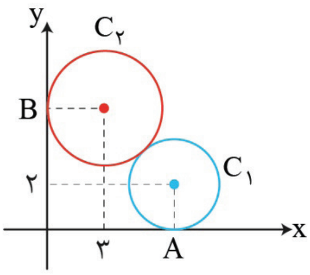
۹۱. در ناحیهٔ اول دستگاه مختصات، دایرهٔ C_1 به شعاع ۲ در دو نقطهٔ $A(a,0)$ و دایرهٔ C_2 به شعاع ۳ در نقطهٔ $B(0,a)$ بر محورهای مختصات مماس هستند. اگر این دو دایره، مماس خارج باشند، فاصلهٔ دو نقطهٔ A و B چقدر است؟

۱) $6\sqrt{2}$
۲) $\sqrt{6}$
۳) $2\sqrt{3}$
۴) $3\sqrt{2}$

پاسخ: گزینه ۱

باتوجه به صورت سوال، وضعیت دو دایره به صورت مقابل است:

مرکز دایرهٔ C_1 به صورت $O_1(a,2)$ و مرکز دایرهٔ C_2 به صورت $O_2(3,a)$ اســت. چون دو دایره مماس خارج هستند، پس:



$$O_1O_2 = R_1 + R_2 \Rightarrow \sqrt{(a-3)^2+(2-a)^2} = 2+3$$

$$\Rightarrow (a^2-6a+9)+(a^2-4a+4) = 25 \Rightarrow 2a^2-10a-12 = 0$$

$$\Rightarrow 2(a+1)(a-6) = 0 \Rightarrow \begin{cases} a = -1 \ \times \\ a = 6 \ \checkmark \end{cases}$$

باتوجه به صورت سوال $a > 0$ است، پس $a = 6$ قابل قبول است و فاصلهٔ دو نقطه A و B برابر است با: $AB = a\sqrt{2} = 6\sqrt{2}$

۹۲. شعاع دایرهٔ گذرا از مرکزهای سه دایرهٔ $x^2+(y-1)^2=1$ ، $(x+2)^2+y^2=4$ و $(x-1)^2+(y+1)^2=1$ کدام است؟

۱) $\frac{\sqrt{10}}{2}$
۲) $\frac{\sqrt{5}}{2}$
۳) $\sqrt{10}-1$
۴) $2\sqrt{5}-1$

پاسخ: گزینه ۱

مختصات مرکز هر دایره را پیدا می‌کنیم:

$$x^2+(y-1)^2 = 1 \ : \ O_1(0,1)$$

$$(x+2)^2+y^2 = 4 \ : \ O_2(-2,0)$$

$$(x-1)^2+(y+1)^2 = 1 \ : \ O_3(1,-1)$$

حالا معادلهٔ دایره‌ای را می‌خواهیم که از نقاط $O_1(0,1)$ و $O_2(-2,0)$ و $O_3(1,-1)$ بگذرد. این نقاط را در معادلهٔ $x^2+y^2+ax+by+c=0$ جایگذاری می‌کنیم:

$$O_1(0,1): 0+1+0+b+c = 0 \Rightarrow b+c = -1 \quad (1)$$

$$O_2(-2,0): 4+0-2a+0+c = 0 \Rightarrow -2a+c = -4 \quad (2)$$

$$O_3(1,-1): 1+1+a-b+c = 0 \Rightarrow a-b+c = -2 \quad (3)$$

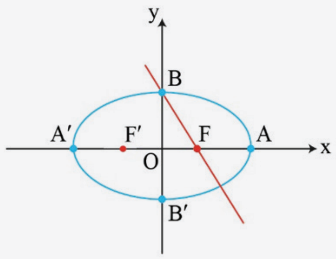
حالا با کمک معادلات به دست آمده داریم:

$$\left.\begin{array}{l}\xrightarrow{(1)-(2)} b+2a=3\\ \xrightarrow{(3)-(2)} 3a-b=2\end{array}\right. \Rightarrow a=1,\ b=1$$

با جایگذاری $b=1$ در معادلهٔ (۱) نتیجه می‌گیریم $c=-2$ است. پس معادلهٔ دایره به صورت مقابل است:

$$x^2+y^2+x+y-2=0 \Rightarrow R=\frac{1}{2}\sqrt{a^2+b^2-4c}=\frac{1}{2}\sqrt{1+1+8}=\frac{\sqrt{10}}{2}$$

۹۳. در شکل مقابل، F و F′ کانون‌های بیضی هستند و خط $y+2x=4$ از F و B می‌گذرد. طول بزرگ‌ترین قطر بیضی کدام است؟



۱) $1/5\sqrt{6}$

۲) $2\sqrt{5}$

۳) $3\sqrt{6}$

۴) $4\sqrt{5}$

پاسخ: گزینه ۴

خط $y+2x=4$ محور xها را در نقطه‌ای به طول ۲ و محور yها را در نقطه‌ای به عرض ۴ قطع می‌کند. پس $OF=c=2$ و $OB=b=4$ است. باتوجه به رابطهٔ $a^2=b^2+c^2$ داریم:

$$a^2=4^2+2^2=20 \Rightarrow a=\sqrt{20}=2\sqrt{5}$$

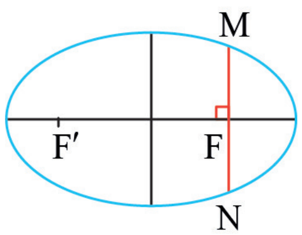
بنابراین طول بزرگ‌ترین قطر بیضی برابر $2a=4\sqrt{5}$ است.

۹۴. در یک بیضی، طول قطر بزرگ برابر $4\sqrt{2}$ و طول قطر کوچک برابر ۴ است. طول کوتاه‌ترین وتر که از کانون بیضی می‌گذرد، کدام است؟

۱) $\sqrt{7}$ ۲) $\sqrt{8}$ ۳) $2\sqrt{3}$ ۴) ۴

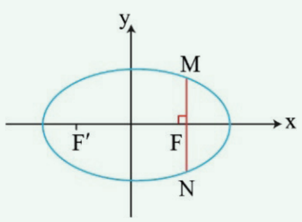
پاسخ: گزینه ۲

طول قطر بزرگ برابر $2a=4\sqrt{2}$ و طول قطر کوچک برابر $2b=4$ است. پس $a=2\sqrt{2}$ و $b=2$ است و طول کوتاه‌ترین وتری که از کانون بیضی می‌گذرد، برابر است با:



$$\Rightarrow MN=\frac{2b^2}{a}=\frac{2\times 2^2}{2\sqrt{2}}=\frac{4}{\sqrt{2}}=2\sqrt{2}$$

نکته مطابق شکل، وتر MN کوتاه‌ترین وتری است که از کانون بیضی می‌گذرد، این وتر بر قطر بزرگ بیضی عمود است و از رابطهٔ زیر به دست می‌آید:



$$MN=\frac{2b^2}{a}$$

۹۵. نقاط $(\sqrt{۵},۰)$ و $(-\sqrt{۵},۰)$ دو سر قطر بزرگ یک بیضی هستند و طول قطر کوچک آن برابر ۴ است. اگر این بیضی را در راستای افقی منبسط کنیم به طوری که دو سر قطر بزرگ روی نقاط $(۴,۰)$ و $(-۴,۰)$ قرار گیرند، خروج از مرکز بیضی چند برابر می‌شود؟

۱) $\frac{\sqrt{۵}}{\sqrt{۳}}$ ۲) $\frac{\sqrt{۱۵}}{۲}$ ۳) $۲\sqrt{۳}$ ۴) $۵\sqrt{۲}$

پاسخ: گزینه ۲

طول قطر کوچک بیضی برابر $۲b = ۴$ است، پس $b = ۲$ است. در حالت اول، چون نقاط $(\sqrt{۵},۰)$ و $(-\sqrt{۵},۰)$ دو سر قطر بزرگ بیضی هستند، پس $a_۱ = \sqrt{۵}$ است و داریم:

$$a_۱^۲ = b^۲ + c_۱^۲ \Rightarrow (\sqrt{۵})^۲ = ۲^۲ + c_۱^۲ \Rightarrow c_۱^۲ = ۱ \Rightarrow c_۱ = ۱$$

پس خروج از مرکز بیضی در حالت اول برابر است با: $e_۱ = \frac{c_۱}{a_۱} = \frac{۱}{\sqrt{۵}}$

در حالت دوم، بیضی را در راستای افقی منبسط می‌کنیم، پس در این حالت طول قطر کوچک تغییر نمی‌کند و در نتیجه $b = ۲$ است. چون دو سر قطر بزرگ روی نقاط $(۴,۰)$ و $(-۴,۰)$ قرار می‌گیرند، پس $a_۲ = ۴$ است و داریم:

$$a_۲^۲ = b^۲ + c_۲^۲ \Rightarrow ۴^۲ = ۲^۲ + c_۲^۲ \Rightarrow c_۲^۲ = ۱۶ - ۴ = ۱۲ \Rightarrow c_۲ = ۲\sqrt{۳}$$

$$\Rightarrow e_۲ = \frac{c_۲}{a_۲} = \frac{۲\sqrt{۳}}{۴} = \frac{\sqrt{۳}}{۲}$$

بنابراین نسبت خروج از مرکز در حالت جدید به حالت اولیه برابر است با:

$$\frac{e_۲}{e_۱} = \frac{\frac{\sqrt{۳}}{۲}}{\frac{۱}{\sqrt{۵}}} = \frac{\sqrt{۱۵}}{۲}$$