دفترچه اختیاری | ۱۰ بهمن‌ماه ۱۴۰۳

دفترچه پاسخ آزمون الکترونیکی زیستاز

ماراتن شمارهٔ ۱۵

ویژه دانش آموزان پایه دوازدهم

نام درس	ریاضی	زمین
گزینشگر	سجاد عظمتی	-
ناظر علمی	نریمان فتح‌الهی، نیما مهندس	-
مسئول آزمون	گروه ریاضی فیثاغورس	-
پاسخنامه‌نویس	سجاد عظمتی، داود بوالحسنی	-
طراحان	سجاد عظمتی، نریمان فتح‌الهی، امید شیری‌نژاد، شاهین پروازی، علی آزاد، فرید غلامی، محرم مهدی، قاسم عابدی	-
ویراستاران	احسان غنی‌زاده، علی فلاحی، فاطمه بهمن‌آبادی، محمدحسین کاربین	-

تولید فنی و گرافیک توسط نشر ویانو

ویژه کنکور ۱۴۰۴

پاسخنامه ریاضی ۱۰ بهمن ۱۴۰۳
آزمون مرحله ۱۵ پایه دوازدهم

۳۶. به ازای کدام مقادیر a تابع $f(x)=ax^3-x^2+3ax+a-1$ همواره نزولی است؟

۱) $-\frac{1}{3}<a<0$ ۲) $a\le -\frac{1}{3}$ ۳) $\mathbb{R}-\left[0,\frac{1}{3}\right]$ ۴) $-\frac{1}{3}\le a\le \frac{1}{3}$

پاسخ: گزینه ۲

برای این که تابع f همواره نزولی باشد، باید در تابع f'، ضریب x^2 منفی و $\Delta\le 0$ باشند:

$$f(x)=ax^3-x^2+3ax+a-1\Rightarrow f'(x)=3ax^2-2x+3a$$

$$\Rightarrow\begin{cases}3a<0\Rightarrow a<0\\ \Delta_{f'}\le 0\Rightarrow (-2)^2-4(3a)(3a)\le 0\Rightarrow 1-9a^2\le 0\end{cases}$$

$$\Rightarrow 1\le 9a^2\Rightarrow 1\le|3a|\Rightarrow \frac{1}{3}\le|a|\Rightarrow\begin{cases}a\ge\frac{1}{3}\\ \text{یا}\\ a\le-\frac{1}{3}\end{cases}$$

از اشتراک بازه‌های به‌دست آمده، نتیجه می‌گیریم $a\le-\frac{1}{3}$ است.

۳۷. اگر $f(x)=\frac{x+1}{x-1}$ و $(fog)(x)=x+2$ باشد، چه تعداد از عبارت‌های زیر در مورد تابع $y=|g(x)|$ درست است؟

الف) دارای ۲ نقطهٔ بحرانی است.

ب) نقطهٔ مینیمم نسبی تابع، نقطهٔ مینیمم مطلق نیز است.

پ) در بازهٔ $(-\infty,-3)$ اکیداً صعودی است.

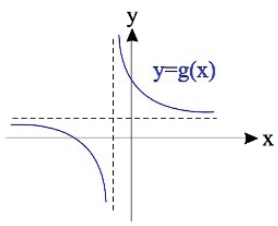
۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۰

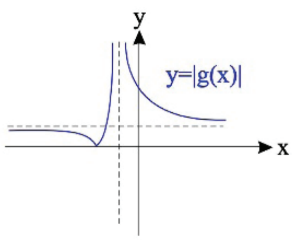
پاسخ: گزینه ۱

ابتدا ضابطهٔ تابع g را تعیین می‌کنیم:

$$\begin{cases}f(x)=\frac{x+1}{x-1}\Rightarrow f\big(g(x)\big)=\frac{g(x)+1}{g(x)-1}\\ f\big(g(x)\big)=x+2\end{cases}\Rightarrow\frac{g(x)+1}{g(x)-1}=x+2\to g(x)=\frac{x+3}{x+1}$$

حال نمودار تابع $y=|g(x)|$ را رسم می‌کنیم، با توجه به نمودار تابع $y=|g(x)|$ داریم:





الف) نادرست، تنها نقطهٔ بحرانی تابع، نقطهٔ A است.

ب) درست، نقطهٔ A مینیمم مطلق و نسبی تابع است.

پ) نادرست، تابع در بازهٔ $(-\infty,-3)$ اکیداً نزولی است.

درسنامه

نقاط بحرانی تابع

نقطه‌ای به طول c از دامنهٔ تابع f را یک نقطهٔ بحرانی برای این تابع می‌نامیم.
هرگاه یکی از دو شرط زیر برقرار باشد:

۱- $f'(c)$ برابر با صفر باشد.

۲- $f'(c)$ موجود نباشد.

۳۸. عرض از مبدأ خط گذرنده از نقاط بحرانی تابع $f(x)=\frac{x^۲+۲x+۱}{x^۲+۱}$ کدام است؟

۱) ۰/۵ ۲) ۱ ۳) ۱/۵ ۴) ۲

پاسخ: گزینه ۲

ابتدا ضابطهٔ f را ساده می‌کنیم:

$$f(x)=\frac{x^۲+۱+۲x}{x^۲+۱}=۱+\frac{۲x}{x^۲+۱}$$

حال برای به دست آوردن نقاط بحرانی تابع باید معادلهٔ $f'(x)=۰$ را حل کنیم:

$$f'(x)=۰+\frac{\overbrace{۲(x^۲+۱)-۲x(۲x)}^{۲(۱-x^۲)}}{(x^۲+۱)^۲}=۰\Rightarrow x=\pm۱$$

$$\Rightarrow\begin{cases}f(۱)=۱+۱=۲\Rightarrow A(۱,۲)\\ f(-۱)=۱-۱=۰\Rightarrow B(-۱,۰)\end{cases}\Rightarrow m_{AB}=\frac{۲-۰}{۱-(-۱)}=۱$$

B,A معادله خط گذرنده از نقاط $y-۰=۱\times(x+۱)\xrightarrow{x=۰}y=۱$

۳۹. اگر نقطهٔ $A(۱,۱)$ مینیمم نسبی تابع $f(x)=\frac{۲x-m}{۳x^۲-nx}$ باشد، مقدار m کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) $۲+\sqrt{۲}$ ۴) $۲\sqrt{۳}$

پاسخ: گزینه ۲

سرنخ مختصات نقطهٔ min نسبی در تابع f صدق می‌کند و همچنین طول نقطهٔ min نسبی ریشهٔ تابع f' است.

چون نقطهٔ $A(۱,۱)$ مینیمم نسبی تابع f می‌باشد، پس $f(۱)=۱$ و $f'(۱)=۰$ می‌باشد و داریم:

$$f(۱)=۱\Rightarrow\frac{۲-m}{۳-n}=۱\Rightarrow n-m=۱\Rightarrow n=m+۱$$

$$f'(x)=\frac{(۲)(۳x^۲-nx)-(۶x-n)(۲x-m)}{(۳x^۲-nx)^۲}$$

$$=\frac{-۶x^۲+۶mx-mn}{(۳x^۲-nx)^۲}$$

$$f'(1)=0 \Rightarrow \frac{-6+6m-mn}{(3-n)^2}=0 \Rightarrow -6+6m-mn=0$$

$$\xrightarrow{n=m+1} -6+6m-m(m+1)=0$$

$$\Rightarrow \underbrace{m^2-5m+6}_{(m-2)(m-3)}=0 \Rightarrow \begin{cases} m=2 \Rightarrow n=3 \\ m=3 \Rightarrow n=4 \end{cases}$$

اگر $m=2$ و $n=3$ باشد، تابع به شکل $f(x)=\frac{2x-2}{3x^2-3x}$ خواهد بود و $f(1)$ تعریف نشده می‌شود.پس نقطهٔ $A(1,1)$ در آن صدق نخواهد کرد و فقط $m=3$ قابل قبول است.

۴۰. **تابع با ضابطهٔ $f(x)=x^3-2mx$ را در نظر بگیرید.اگر مقدار ماکزیمم نسبی تابع $g(x)=x^2f''(x)+f'(x)$ برابر ۱ باشد، مقدار $\left[\frac{2}{m}\right]$ کدام است؟ ([ ] نماد جزء صحیح است)**

۱) -3 ۲) -4 ۳) -5 ۴) -6

پاسخ: گزینه ۳

ابتدا مشتق‌های اول و دوم تابع f را به‌دست می‌آوریم:

$$f'(x)=3x^2-2m, f''(x)=6x$$

حالا ضابطهٔ تابع g را پیدا میکنیم و از آن مشتق می‌گیریم:

$$g(x)=x^2(6x)+3x^2-2m=6x^3+3x^2-2m$$

$$\Rightarrow g'(x)=18x^2+6x$$

$$\Rightarrow g'(x)=0 \Rightarrow 18x^2+6x=0 \Rightarrow 6x(3x+1)=0 \Rightarrow x=0, x=-\frac{1}{3}$$

با توجه به جدول تعیین علامت g' متوجه می‌شویم که $x=-\frac{1}{3}$ طول نقطهٔ ماکزیمم نسبی است و چون مقدار ماکزیمم نسبی برابر ۱ است، پس:

x		$-\frac{1}{3}$		0	
g'	$+$	0	$-$	0	$+$
g	$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$

$$g\left(-\frac{1}{3}\right)=1 \Rightarrow 6\left(-\frac{1}{3}\right)^3+3\left(-\frac{1}{3}\right)^2-2m=1 \Rightarrow m=-\frac{4}{9}$$

$$\Rightarrow \left[\frac{2}{m}\right]=\left[\frac{2}{-\frac{4}{9}}\right]=-5$$

۴۱. **تابع با ضابطهٔ $f(x)=\begin{cases} x^4-4x & ;x\geq 0 \\ x^3+mx^2+mx+1 & ;x<0 \end{cases}$ دارای چهار نقطهٔ بحرانی است. حدود m کدام است؟**

۱) $0<m<3$ ۲) $m>3$ ۳) $m<0$ ۴) $m>3$ یا $m<0$

پاسخ: گزینه ۲

ابتدا نقاط بحرانی ضابطهٔ $x\geq 0$; $y=x^4-4x$ را تعیین می‌کنیم:

$$y'=4x^3-4=0 \Rightarrow 4(x-1)(x^2+x+1)=0 \Rightarrow x=1$$

در ضمن تابع f در نقطهٔ مرزی $x=0$ ناپیوسته است، چون $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=0$ و $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=1$ است. حالا برای این که تابع f دارای ۴

نقطۀ بحرانی باشد، باید ضابطۀ پایینی دارای دو نقطۀ بحرانی باشد، یعنی مشتق آن دارای ۲ ریشۀ متمایز باشد، در ضمن چون در محدودۀ $x<0$ هستیم،این دو ریشه باید دارای علامت منفی باشند.

$$x<0: y=x^3+mx^2+mx+1 \Rightarrow y'=3x^2+2mx+m$$

حالا باید در تابع y' سه شرط $\Delta>0$ و $P>0$ و $S<0$ برقرار باشد:

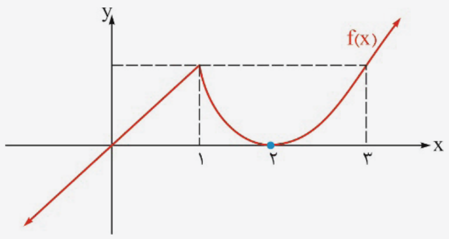
$$\Delta>0 \Rightarrow 4m^2-4(3)(m)>0 \Rightarrow 4m(m-3)>0 \Rightarrow \begin{cases} m<0 \\ m>3 \end{cases}$$

$$p>0 \Rightarrow \frac{m}{3}>0 \Rightarrow m>0$$

$$S<0 \Rightarrow -\frac{2m}{3}<0 \Rightarrow m>0$$

از اشتراک مقادیر m نتیجه می گیریم $m>3$ است.

۴۲. اگرنمودار $f(x)$ به شکل زیر باشد، مجموع طول نقاط بحرانی تابع $g(x)=\frac{1}{f^2(x)}$ کدام است؟



۱) ۱

۲) ۳

۳) ۲

۴) ۴

پاسخ: گزینه ۱

ابتدا دامنۀ $g(x)$ را مشخص می‌کنیم.

$$D_g=\mathbb{R}-\{x \mid f(x)=0\}$$

$$\Rightarrow D_g=\mathbb{R}-\{0,2\}$$

$$g'(x)=\frac{-2f'(x)}{f^3(x)}$$

با توجه به اینکه نقطه‌ای بحرانی است که در دامنۀ تابع، مشتق تابع صفر یا تعریف نشده باشد، پس:

$$g'(x)=0 \to f'(x)=0 \to x=2 \notin D_g$$

$$g'(x)=\text{تعریف نشده} \to \begin{cases} f(x)=0 \to x=0,2 \notin D_g \\ f'(x)=\text{تعریف نشده} \to x=1 \end{cases}$$

تنها نقطۀ بحرانی $x=1$ است.

۴۳. چه تعداد از عبارت‌های زیر در مورد تابع $f(x)=\frac{x^2+3}{x^2-2x+1}$ درست است؟

الف) دارای یک نقطۀ بحرانی مشتق پذیر است.

ب) بُرد تابع برابر بازۀ $(1,+\infty)$ است.

پ) دامنه تابع $f(x)$ با $f'(x)$ یکسان است.

۱) ۰ ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

پاسخ: گزینه ۳

می‌دانیم تابع $f(x)=\dfrac{x^{۲}+۳}{(x-۱)^{۲}}$ می‌باشد بنابراین $f'(x)$ آن برابر است با:

$$f'(x)=\frac{(۲x)(x-۱)^{۲}-(x^{۲}+۳)(۲)(x-۱)}{(x-۱)^{۴}}=۰\rightarrow\frac{-۲(x+۳)}{(x-۱)^{۳}}=۰$$

$\rightarrow x=-۳$ (نقطه بحرانی)

حال در تعیین علامت $f'(x)$ داریم:

		-۳		$+۱$	
$f'(x)$	$-$	۰	$+$	ت ن	$-$

$$\Rightarrow f(-۳)=\frac{۳}{۴}\rightarrow R_{f(x)}=\left[\frac{۳}{۴},+\infty\right)$$

حال می‌دانیم دامنه تابع $f(x)=\dfrac{x^{۲}+۳}{(x-۱)^{۲}}$ و $f'(x)=\dfrac{-۲(x+۳)}{(x-۱)^{۳}}$ برابر با $R-\{۱\}$ می‌باشد.

در نتیجه موارد «الف» و «پ» درست می‌باشند.

درسنامه

نقاط بحرانی

تعریف نقطه بحرانی: اگر $x_۰\in D_f$ باشد آنگاه نقطه‌ای به طول $x_۰$ را نقطه بحرانی برای تابع f می‌گوییم که:

در $f'(x_۰)$ برابر صفر باشد یا $f'(x_۰)$ موجود نباشد.

تذکر: طول و عرض هر نقطهٔ بحرانی در معادلهٔ تابع موردنظر صدق می‌کند. (فقط محض یادآوری گفتم ☺)

۴۴. نقطهٔ $A(۳,-۲)$ اکسترمم نسبی تابع $y=f(x)$ است. اگر $f'(۳)$ موجود و $h(x)=\dfrac{f^{۲}(x)}{x^{۲}+۳}$ باشد، مقدار $h'(۳)$ کدام است؟

۱) $-\dfrac{۱}{۶}$ ۲) $-\dfrac{۱}{۵}$ ۳) $\dfrac{۲}{۷}$ ۴) $-\dfrac{۳}{۷}$

پاسخ: گزینه ۱

$$y=f(x)\xrightarrow{A(۳,-۲)}f(۳)=-۲$$

مشتق در نقاط اکسترمم نسبی در صورت وجود برابر صفر است. $(f'(۳)=۰)$

$$h(x)=\frac{f^{۲}(x)}{x^{۲}+۳}\rightarrow h'(x)=\frac{۲f(x)f'(x)(x^{۲}+۳)-۲xf^{۲}(x)}{(x^{۲}+۳)^{۲}}$$

$$\xrightarrow{x=۳}h'(۳)=\frac{۲f(۳)f'(۳)(۱۲)-۶f^{۲}(۳)}{(۱۲)^{۲}}$$

$$h'(۳)=\frac{۰-۶(-۲)^{۲}}{۱۴۴}=-\frac{۱}{۶}$$

درسنامه

۱- تعریف اکسترمم نسبی

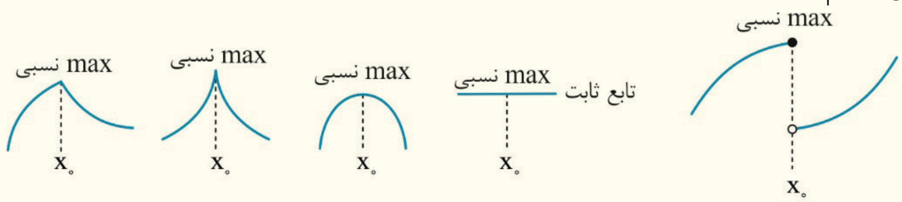
تعریف max نسبی: $x=x_۰$ ماکزیمم نسبی تابع $f(x)$ است در صورتی که ویژگی‌های زیر برقرار باشد:

۱- $x_۰\in D_f$ باشد.

۲- تابع $f(x)$ در همسایگی دو طرفهٔ نقطهٔ x_0 ، تعریف شده باشد.

۳- $f(x_0)$ از مقادیر تابع در همسایگی دو طرفهٔ آن، بزرگ‌تر یا مساوی باشد.

چند نمونه max نسبی ببینیم:



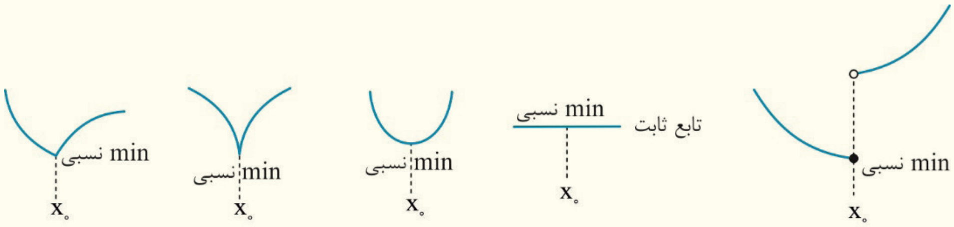
تعریف min نسبی: $x = x_0$ ، مینیمم نسبی تابع $f(x)$ است در صورتی که ویژگی های زیر برقرار باشد

۱- $x_0 \in D_f$ باشد

۲- تابع $f(x)$ در همسایگی دو طرفهٔ نقطهٔ x_0 ، تعریف شده باشد.

۳- $f(x_0)$ از مقادیر تابع در همسایگی دو طرفهٔ آن، کوچک تر یا مساوی باشد.

چند نمونه min نسبی ببینیم:



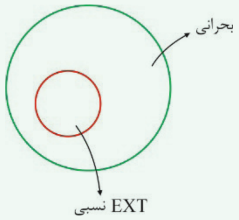
نکته چند نکته در مورد max و min نسبی :

۱- به max و min نسبی، اکسترمم نسبی می‌گویند.

۲- نقاط ابتدایی و انتهایی بازه ، جزء اکسترمم های نسبی محسوب نمی‌شوند.

۳- max و min نسبی جزو نقاط بحرانی هستند.

۴- اگر $x = x_0$ یکی از اکسترمم های نسبی تابع f باشد، نمی توان در مورد پیوستگی یا مشتق پذیری تابع f نظر دهیم چون فقط الزاماً f در همسایگی x_0 تعریف شده است.

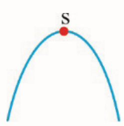


۲- بررسی اکسترمم‌ها در سهمی

معادلهٔ سهمی $y = ax^2 + bx + c$ را در نظر بگیرید.

۱- اگر $a > 0$ باشد، سهمی دارای min است.

۲- اگر $a < 0$ باشد، سهمی دارای max است.

اگر	نوع رأس	مختصات رأس	نمودار
$a > 0$	مینیمم (کمترین عرض)	$s\left(\frac{-b}{2a}, \frac{-\Delta}{4a}\right)$	
$a < 0$	ماکزیمم (بیشترین عرض)	$s\left(\frac{-b}{2a}, \frac{-\Delta}{4a}\right)$	

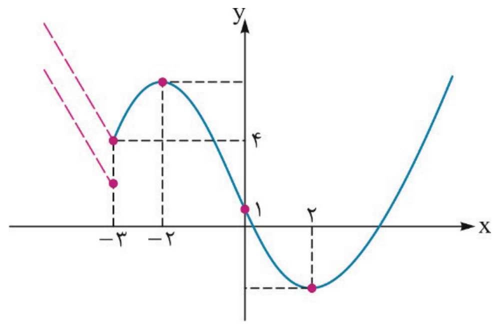
تذکر: در هر دو حالت ۱ و ۲، max و min همان رأس سهمی است.

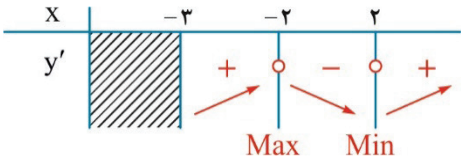
۴۵. اگر $f(x)=\begin{cases}\frac{۱}{۳}x^{۳}-۴x+۱ & x>-۳\\ \frac{۱}{۳}ax+a^{۲}+۲ & x\le -۳\end{cases}$ ، دارای یک max نسبی و دو min نسبی باشد، a شامل چند عدد صحیح است؟

۱) صفر ۲) یک ۳) دو ۴) سه

پاسخ: گزینه ۲

ابتدا نمودار تابع $f(x)$ را به ازای $x>-۳$ رسم می‌کنیم:





$$x>-۳\rightarrow y=\frac{۱}{۳}x^{۳}-۴x+۱$$

$$y'=x^{۲}-۴=۰\rightarrow x=\pm ۲$$

$$\max\left(-۲,\frac{۱۹}{۳}\right)$$

$$\min\left(۲,-\frac{۱۳}{۳}\right)$$

برای اینکه $f(x)$ دارای ۲ مینیمم نسبی باشد باید به ازای $x\le -۳$ ، خط دارای شیب منفی و همچنین $f(-۳)\le ۴$ باشد:

$$x\le -۳\rightarrow y=\frac{a}{۳}x+a^{۲}+۲\rightarrow f(-۳)=a^{۲}-a+۲$$

$$\begin{cases} f(-۳)\le ۴\rightarrow a^{۲}-a+۲\le ۴\rightarrow a^{۲}-a-۲\le ۰\rightarrow -۱\le a\le ۲ \qquad (۱)\\ \frac{a}{۳}<۰\rightarrow a<۰ \qquad (۲) \qquad \xrightarrow{(۱)\cap(۲)} -۱\le a<۰\end{cases}$$

پس a شامل یک عدد صحیح است.

درسنامه

آزمون مشتق اول

برای تعیین نوع اکسترمم های نسبی تابع f کافی است از تابع f مشتق گرفته و جدول تغییرات را رسم کنیم:

۱) min نسبی

x		$x_۰$	
f'	−		+
f	↘	$f(x_۰)$ min نسبی	↗

۲) max نسبی

x		$x_۰$	
f'	+		−
f	↗	$f(x_۰)$ max نسبی	↘