دفترچه اجباری | ۱۰ بهمن‌ماه ۱۴۰۳

دفترچه پاسخ آزمون الکترونیکی زیستاز

ماراتن شمارهٔ ۱۵

ویژه دانش آموزان پایه دوازدهم

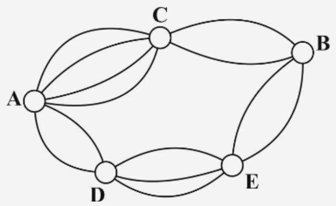
نام درس	ریاضی	زمین
گزینشگر	سجاد عظمتی	-
ناظر علمی	نریمان فتح‌الهی، نیما مهندس	-
مسئول آزمون	گروه ریاضی فیثاغورس	-
پاسخنامه‌نویس	سجاد عظمتی، داود بوالحسنی	-
طراحان	سجاد عظمتی، نریمان فتح‌الهی، امید شیری‌نژاد، شاهین پروازی، علی آزاد، فرید غلامی، محرم مهدی، قاسم عابدی	-
ویراستاران	احسان غنی‌زاده، علی فلاحی، فاطمه بهمن‌آبادی، محمدحسین کاربین	-

تولید فنی و گرافیک توسط نشر ویانو

ویژه کنکور ۱۴۰۴

پاسخنامه ریاضی ۱۰ بهمن ۱۴۰۳
آزمون مرحله ۱۵ پایه دوازدهم

۷۶. به چند طریق می‌توان از شهر A به شهر B رفت و برگشت، به‌طوریکه در مسیر برگشت هیچ‌کدام از راه‌های مسیر رفت، تکرار نشوند؟



۱) ۴۰

۲) ۱۹۲

۳) ۲۱۶

۴) ۲۴۰

پاسخ: گزینه ۴

$A \xrightarrow[\text{رفت}]{C} B \quad ۴\times۲=۸$

یا $B \xrightarrow{E\,،\,D} A \quad ۲\times۳\times۲=۱۲$

یا $B \xrightarrow{C} A \quad ۱\times۳=۳$

$\oplus$

$۸\times(۱۲+۳)=۸\times۱۵=۱۲۰ \quad (۱)$

$A \xrightarrow{D\,،\,E} B \quad ۲\times۳\times۲=۱۲$

یا $B \xrightarrow[E\,،\,D]{} A \quad ۱\times۲\times۱=۲$

یا $B \xrightarrow{C} A \quad ۲\times۴=۸$

$\oplus$

$۱۲\times(۲+۸)=۱۲\times۱۰=۱۲۰ \quad (۲)$

جواب نهایی $(۱)+(۲)=۱۲۰+۱۲۰=۲۴۰$

۷۷. با ارقام مجموعهٔ $\{۰,۱,۲,۳,۴,۵,۶\}$ چند عدد طبیعی ۳ رقمی بزرگ‌تر از ۲۰۵ و مضرب ۵، بدون تکرار ارقام می‌توان ساخت؟

۱) ۵۰ ۲) ۴۹ ۳) ۴۵ ۴) ۴۴

پاسخ: گزینه ۴

ابتدا اعداد سه رقمی با ارقام غیرتکراری بزرگ‌تر از ۲۰۰ و مضرب ۵ را به‌دست می‌آوریم. اگر رقم یکان برابر صفر باشد، رقم صدگان باید از ارقام $\{۲,۳,۴,۵,۶\}$ انتخاب شود، پس تعداد اعداد برابر $۲۵=۱\times۵\times۵$ است. اگر رقم یکان برابر ۵ باشد، رقم صدگان باید از ارقام $\{۲,۳,۴,۶\}$ انتخاب شود و تعداد اعداد برابر $۲۰=۱\times۵\times۴$ می‌باشد. از طرفی باید عدد ۲۰۵ را کنار بگذاریم. بنابراین تعداد اعداد برابر است با:

$۲۵+۲۰-۱=۴۴$

۷۸. با ارقام $۰,۱,۲,۳,b,b+۲$ می‌خواهیم اعدادی بدون تکرار ارقام بنویسیم. اگر نسبت تعداد عددهای چهار رقمی زوج به عددهای سه رقمی فردی که با این اعداد می‌توان نوشت برابر با $\frac{۵۱}{۸}$ باشد، مجموع ارقام بزرگ‌ترین عدد چهار رقمی فرد کدام خواهد بود؟ $(۳<b<۸)$

۱) ۱۵ ۲) ۱۸ ۳) ۱۹ ۴) ۱۶

پاسخ: گزینه ۳

برای حل مسأله ابتدا فرض می‌کنیم که b عددی فرد باشد در نتیجه $b+2$ نیز فرد خواهد بود:

$$\text{تعداد عددهای ۴ رقمی زوج} = \begin{cases} \underline{5}\ \underline{4}\ \underline{3}\ \underset{\text{صفر}}{\underline{1}} = 60 \\ \underline{4}\ \underline{4}\ \underline{3}\ \underset{2}{\underline{1}} = 48 \end{cases} \Longrightarrow \text{تعداد عددهای ۴ رقمی زوج} = 108$$

$$\text{تعداد عددهای ۳ رقمی فرد} = \underline{4}\ \underline{4}\ \underset{1,3,b,b+2}{\underline{4}} = 64 \Longrightarrow \text{تعداد عددهای ۳ رقمی فرد} = 64$$

که نسبت تعداد عددهای ۴ رقمی زوج به عددهای سه رقمی فرد برابر با $\frac{51}{8}$ نمی‌باشد بنابراین b و $b+2$ عددی زوج هستند، بنابراین:

$$\text{تعداد عددهای ۴ رقمی زوج} = \begin{cases} \underline{5}\ \underline{4}\ \underline{3}\ \underset{\text{صفر}}{\underline{1}} = 60 \\ \underline{4}\ \underline{4}\ \underline{3}\ \underset{2,b,b+2}{\underline{3}} = 144 \end{cases} \Longrightarrow \text{تعداد عددهای ۴ رقمی زوج} = 204$$

$$\text{تعداد عددهای ۳ رقمی فرد} = \underline{4}\ \underline{4}\ \underset{1,3}{\underline{2}} = 32 \Longrightarrow \text{تعداد عددهای ۳ رقمی فرد} = 32$$

بنابراین با در نظر گرفتن $b=6$ بزرگترین عدد چهار رقمی فرد به‌صورت ۸۶۲۳ خواهد بود که مجموع ارقام آن برابر با ۱۹ می‌باشد.

۷۹. با یک کلمهٔ n حرفی $(n \geq 4)$ که هیچ‌کدام از حروف آن تکراری نیستند، تعداد کلمات ۴ حرفی که با این n حرف می‌توان نوشت، ۱۲ برابر تعداد کلمات ۲ حرفی است. تعداد کلمات ۳ حرفی که با این حروف می‌توان نوشت، کدام است؟

۱) ۲۴ ۲) ۱۲۰ ۳) ۶۰ ۴) ۲۱۰

پاسخ: گزینه ۲

تعداد کلمات ۴ حرفی که با n حرف می‌توان نوشت به‌صورت زیر است:

$$\underline{n}\ \ \underline{n-1}\ \ \underline{n-2}\ \ \underline{n-3} = n(n-1)(n-2)(n-3)$$

تعداد کلمات ۲ حرفی نیز برابر است با:

$$\underline{n}\ \ \underline{n-1} = n(n-1)$$

$$\Rightarrow \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{n(n-1)} = 12 \Rightarrow (n-2)(n-3) = 12$$

$$\Rightarrow n^2 - 5n + 6 = 12 \Rightarrow n^2 - 5n - 6 = 0 \Rightarrow (n-6)(n+1) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} n = 6 & \text{قق} \\ n = -1 & \text{غقق} \end{cases}$$

$\text{تعداد کلمات سه حرفی} = 6 \times 5 \times 4 = 120$

۸۰. با ارقام $\{1,2,3,4,5\}$ چند عدد ۴ رقمی می‌توان ساخت که بر عدد ۴ بخش‌پذیر باشند؟

۱) ۱۲۵ ۲) ۲۱۵ ۳) ۲۵۱ ۴) ۵۱۲

پاسخ: گزینه ۱

اعدادی بر ۴ بخش‌پذیرند که دو رقم سمت راست آنها (یکان و دهگان آنها) بر ۴ بخش‌پذیر باشد، مثلاً سمت راست عدد ۱۲ یا ۲۴ یا... باشد، بنابراین ابتدا حالاتی که بخش‌پذیری بر ۴ را ایجاد می‌کنند، شمارش می‌کنیم، با توجه به ارقام داده شده در صورت مسأله دو رقم سمت راست می‌تواند ۱۲، ۲۴، ۳۲، ۴۴، ۵۲ باشد یعنی ۵ حالت. اکنون به‌ازای هر نتیجه از حالات گفته شده در هزارگان ۵ حالتا و به‌ازای

هر نتیجه از دو رقم اوّل و هزارگان مجدداً ۵ حالت در صدگان خواهیم داشت، بنابراین تعداد حالات به‌صورت مقابل است.

$$\underbrace{\begin{matrix}۱۲\\ ۲۴\\ ۳۲\\ ۴۴\\ ۵۲\end{matrix}}_{\text{دو رقم سمت راست}} \times \underset{\text{صدگان}}{۵} \times \underset{\text{هزارگان}}{۵}$$

۵ حالت $\Longrightarrow$ ۵×۵×۵=۱۲۵

۸۱. رمز سه رقمی یک کیف، به گونه‌ای است که ارقام تکراری ندارد و عدد زوج و فرد کنار هم قرار نمی‌گیرند. چند حالت برای رمز این کیف وجود دارد؟

۱) ۳۶ ۲) ۶۰ ۳) ۷۲ ۴) ۱۲۰

پاسخ: گزینه ۴

برای آن که اعداد زوج و فرد کنار هم قرار نگیرند، باید یکی از حالت‌های زیر اتفاق بیفتد:

زوج زوج زوج ⯮ ۵×۴×۳=۶۰

فرد فرد فرد ⯮ ۵×۴×۳=۶۰

⯮ ۶۰+۶۰=۱۲۰

۸۲. در یک آزمون ۹ سؤالی تعداد سؤالات چهار گزینه‌ای ۲ برابر تعداد سؤالات دو گزینه‌ای است. چند حالت مختلف برای پاسخنامه این آزمون وجود دارد؟ (پاسخ دادن به سؤالات الزامی نیست)

۱) ۲۷×۴^۶ ۲) $۵^۶\times ۳^۶$ ۳) $۷۵^۳$ ۴) $۲۵^۳$

پاسخ: گزینه ۳

$$\left.\begin{matrix}x=\text{تعداد سوالات چهارگزینه‌ای}\\ y=\text{تعداد سوالات دوگزینه‌ای}\end{matrix}\right\}\ x+y=۹\xrightarrow{x=۲y}۳y=۹\to y=۳\to x=۶$$

پس این آزمون ۶ سؤال چهار گزینه‌ای و ۳ سؤال دو گزینه‌ای دارد.

چون پاسخ دادن به سؤالات الزامی نیست، هر سؤال چهار گزینه‌ای ۵ حالت و هر سؤال دو گزینه‌ای، ۳ حالت دارد. پس:

$$۵^۶\times ۳^۳=۵^۳\times ۵^۳\times ۳^۳=۷۵^۳$$

۸۳. اگر تابع با ضابطهٔ $f(x)=\begin{cases}x^۳-x+۱ & x<-۳\\ ax^۲+bx+۱ & x\geq -۳\end{cases}$ همواره مشتق‌پذیر باشد، حاصل $\dfrac{f(۲)+۳}{b}$ کدام است؟

۱) ۴ ۲) ۲ ۳) ۲- ۴) ۴-

پاسخ: گزینه ۱

$$\lim_{x\to(-۳)^-} f(x)=(-۳)^۳-(-۳)+۱=-۲۷+۳+۱=-۲۳$$

$$\lim_{x\to(-۳)^+} f(x)=a(-۳)^۲+b(-۳)+۱=۹a-۳b+۱$$

$$۹a-۳b+۱=-۲۳$$

$$\underline{۹a-۳b=-۲۴}|$$

$$f'(x)=\begin{cases}3x^2-1 & x<-3 \to f'_-(-3)=3(-3)^2-1=26\\ 2ax+b & x>-3 \to f'_+(-3)=2a(-3)+b=-6a+b\end{cases}$$

$$\underline{-6a+b=26}|$$

$$\begin{cases}9a-3b=-24\\ -6a+b=26\end{cases}\quad \begin{cases}9a-3b=-24\\ \underline{-18a+3b=78}\end{cases}\quad \underline{a=-6}|\to \underline{b=-10}|$$
$$-9a=54$$

$$f(2)=-6(2)^2-10(2)+1=-24-20+1=-43\to \frac{-43+3}{-10}=\underline{4}|$$

۸۴. تابع f با ضابطهٔ $f(x)=[x[x]]$ در چند نقطه به طول صحیح در فاصلهٔ $[-1,2]$ ، مشتق‌پذیر است؟

۱) یک ۲) دو ۳) سه ۴) هیچ

پاسخ: گزینهٔ ۱

ابتدا پیوستگی تابع را در نقاط صحیح بررسی می‌کنیم:

$$f(x)=\begin{cases}4 & x=2\\ 1 & 1\le x<2\\ 0 & 0\le x<1\\ 0 & -1<x<0\\ 1 & x=-1\end{cases}$$

بنابراین تابع داده شده، تنها در نقطه صحیح صفر روی فاصلهٔ $[-1,2]$ پیوسته است و چون برای هر $x\in(-1,1)$، $f(x)=0$ است، در نتیجه: $f'(0)=0$.

۸۵. اگر $f(x)=\begin{cases}x^3 & x>1\\ 0 & x=1\\ (x-1)^2 & x<1\end{cases}$ آن‌گاه حاصل $A=\lim\limits_{t\to+\infty} tf\left(1-\frac{1}{t}\right)$ کدام است؟

۱) $A=-f'(1^-)=0$ ۲) $A=f'(1^+)=3$ ۳) $A=f'(1^-)=0$ ۴) $A=-f'(1^+)=-3$

پاسخ: گزینهٔ ۱

از تغییر متغیر $x=1-\frac{1}{t}$ استفاده می‌کنیم، در این صورت $\frac{1}{t}=1-x$ پس $t=\frac{1}{1-x}$ وقتی t به سمت $+\infty$ میل می‌کند، $\frac{1}{t}$ مقدار مثبتی دارد اما به صفر میل می‌کند. پس $x=1-\frac{1}{t}$ همواره کوچک‌تر از ۱ است اما به ۱ میل می‌کند. به عبارتی داریم $x\to 1^-$.

$$A=\lim_{t\to+\infty} tf\left(1-\frac{1}{t}\right)=\lim_{x\to1^-}\frac{f(x)}{1-x}=-\lim_{x\to1^-}\frac{f(x)}{x-1}$$

حالا با توجه به آن که $f(1)=0$ است، می‌توانیم در صورت کسر به جای $f(x)$ قرار دهیم $f(x)-f(1)$ و آن را به تعریف مشتق چپ تبدیل کنیم:

$$A=-\lim_{x\to1^-}\frac{f(x)}{x-1}=-\lim_{x\to1^-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=-f'(1^-)$$

و برای محاسبه مقدار این حد باید ضابطه تابع f را به‌ازای $x<1$ در آن قرار دهیم.

$$A=-\lim_{x\to1^-}\frac{f(x)}{x-1}=-\lim_{x\to1^-}\frac{(x-1)^2}{x-1}=-\lim_{x\to1^-}(x-1)=0$$

۸۶. معادلهٔ خط مماس بر نمودار تابع $f(x)=\begin{cases} x+۲ & x\le -۱ \\ ax^۲+bx-۲ & x>-۱ \end{cases}$ در نقطهٔ $(-۱,۱)$ موازی خط $y=x+۷$ می‌باشد. $a+b$ کدام است؟

۱) ۱۱ ۲) ۱۱- ۳) ۳ ۴) ۳-

پاسخ: گزینه ۲

دو خط موازی با هم دارای شیب یکسانی هستند بنابراین شیب (مشتق) تابع دو ضابطه‌ای $f(x)$ در نقطهٔ $x=-۱$ برابر با یک می‌باشد و برای این که تابعی مشتق‌پذیر باشد می‌بایست حتماً پیوسته باشد. بنابراین داریم:

$$f(x)=\begin{cases} x+۲ & x\le -۱ \\ ax^۲+bx-۲ & x>-۱ \end{cases}$$

$$f(-۱)=۱ \qquad \lim_{x\to(-۱)^-} f(x)=۱ \qquad \lim_{x\to(-۱)^+} f(x)=a(-۱)^۲+b(-۱)-۲$$

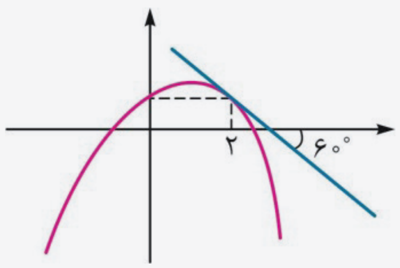
$$\Rightarrow a-b-۲=۱\Rightarrow \boxed{a-b=۳}\ (۱)$$

$$\Rightarrow f'(x)=\begin{cases} ۱ & x<-۱ \\ ۲ax+b & x>-۱ \end{cases} \qquad f'_-(-۱)=f'_+(-۱)$$

$$\Rightarrow ۱=۲a(-۱)+b\Rightarrow \boxed{-۲a+b=۱}\ (۲)$$

$$\xrightarrow{(۱),(۲)} a=-۴\,,\, b=-۷\Rightarrow a+b=-۱۱$$

۸۷. نمودار تابع $y=۲f(۲x+۱)$ به‌صورت مقابل است. مقدار مشتق تابع $f(x^۲-۲x+۵)$ در $x=۲$ کدام است؟



۱) $\frac{\sqrt{۳}}{۲}$

۲) $-\frac{\sqrt{۳}}{۲}$

۳) $\frac{۱}{۲}$

۴) $-\frac{۱}{۲}$

پاسخ: گزینه ۲

طبق نمودار شیب خط مماس بر تابع $y=۲f(۲x+۱)$ در $x=۲$ برابر $\tan(۱۸۰-۶۰)=-\tan۶۰=-\sqrt{۳}$ است، بنابراین:

$$y'=۲\times۲f'(۲x+۱)=۴f'(۲x+۱)\xrightarrow{x=۲}$$

$$۴f'(۵)=-\sqrt{۳}\to f'(۵)=-\frac{\sqrt{۳}}{۴}$$

حال مشتق $f(x^۲-۲x+۵)$ را به‌دست می‌آوریم.

$$y=f(x^۲-۲x+۵)\to y'=(۲x-۲)f'(x^۲-۲x+۵)$$

$$x=۲\to y'=(۴-۲)f'(۵)=۲f'(۵)=۲\left(-\frac{\sqrt{۳}}{۴}\right)=-\frac{\sqrt{۳}}{۲}$$

۸۸. اگر $y=-\frac{۱}{۴}x+\frac{۲۱}{۴}$ در نقطه‌ای به طول ۱ بر نمودار تابع f عمود باشد، $\lim\limits_{x\to ۱}\frac{f^{۲}(x)-۲۵}{x^{۲}-۱}$ کدام است؟

۱) ۴ ۲) ۲۰ ۳) ۵ ۴) ۴۰

پاسخ: گزینه ۲

با توجه به این که خط $y=-\frac{۱}{۴}x+\frac{۲۱}{۴}$ در نقطهٔ $x=۱$ بر نمودار تابع f عمود می‌باشد می‌توان دریافت:

$$f'(۱)=۴ \quad , \quad f(۱)=۵$$

$$\Rightarrow \lim\limits_{x\to ۱}\frac{f^{۲}(x)-۲۵}{x^{۲}-۱}=\lim\limits_{x\to ۱}\frac{f^{۲}(x)-f(۱)^{۲}}{(x-۱)(x+۱)}=\lim\limits_{x\to ۱}\frac{f(x)-f(۱)}{x-۱}\times\frac{f(x)+f(۱)}{x+۱}$$

$$=f'(۱)\times\frac{۲f(۱)}{۲}=f'(۱)\times f(۱)=۲۰$$

۸۹. به‌ازای چند مقدار برای a، تابع $f(x)=\left|x(x^{۲}-a)(x^{۲}-۳x+۲)\right|$ فقط در ۲ نقطه مشتق ندارد؟

۱) ۰ ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

پاسخ: گزینه ۲

می‌دانیم که توابع قدرمطلقی در ریشه‌های ساده تابع داخل قدرمطلق، مشتق ندارند. پس داریم:

$$f(x)=\left|x(x^{۲}-a)(x-۱)(x-۲)\right|\Rightarrow \text{ریشه‌های ساده}=x=۰\,,\,x=۱\,,\,x=۲$$

با توجه به این که تابع f دارای سه ریشهٔ ساده می‌باشد بنابراین یکی از ریشه‌ها می‌بایست تکراری باشد تا فقط در ۲ نقطه مشتق نداشته باشد.

$$x=۰\Rightarrow x^{۲}-a=۰\Rightarrow ۰-a=۰\Rightarrow a=۰ \quad \text{ق ق}$$

$$f(x)=\left|x(x^{۲})(x-۱)(x-۲)\right|=\left|x^{۳}(x-۱)(x-۲)\right|\Rightarrow\begin{cases}x=۱\\x=۲\end{cases} \text{نقاط مشتق‌ناپذیر}$$

$$x=۱\Rightarrow x^{۲}-a=۰\Rightarrow ۱-a=۰\Rightarrow a=۱\Rightarrow f(x)=\left|x(x^{۲}-۱)(x-۱)(x-۲)\right|\Rightarrow$$

$$f(x)=\left|x(x-۱)^{۲}(x+۱)(x-۲)\right|\Rightarrow x=۰,-۱,۲ \quad \text{نقاط مشتق‌ناپذیر}$$

$$x=۲\Rightarrow x^{۲}-a=۰\Rightarrow ۴-a=۰\Rightarrow a=۴\Rightarrow f(x)=\left|x(x^{۲}-۴)(x-۱)(x-۲)\right|\Rightarrow$$

$$f(x)=\left|x(x-۲)^{۲}(x+۲)(x-۱)\right|\Rightarrow x=۰,-۲,۱ \quad \text{نقاط مشتق‌ناپذیر}$$

بنابراین فقط به‌ازای $a=۰$ تابع f در ۲ نقطه مشتق نخواهد داشت.

۹۰. با فرض $f^{۲}(۲x-۱)=\sqrt{۲x+۲\sqrt{x^{۲}-۱}}$ مقدار $۱۶\left(f'(۵)\right)$ کدام است؟ ($f(x)$ تابعی همواره مثبت است)

۱) $\frac{\sqrt{۲}+۱}{\sqrt[۴]{۲}}$ ۲) $\frac{\sqrt[۴]{۲}+۱}{\sqrt{۲}}$ ۳) $\frac{\sqrt{\sqrt{۲}+۱}}{\sqrt[۴]{۲}}$ ۴) $\frac{\sqrt{\sqrt{۲}-۱}}{\sqrt[۴]{۲}}$

پاسخ: گزینه ۳

$$f^2(2x-1)=\sqrt{2x+2\sqrt{x^2-1}}=\sqrt{\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}\right)^2}=\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}$$

از طرفین مشتق می‌گیریم:

$$4f(2x-1)f'(2x-1)=\frac{1}{2\sqrt{x+1}}+\frac{1}{2\sqrt{x-1}}$$

$$\xrightarrow{x=3} 4f(5)f'(5)=\frac{1}{4}+\frac{1}{2\sqrt{2}}=\frac{1+\sqrt{2}}{4} \quad ※$$

برای محاسبهٔ $f(5)$ کافی است در فرض مسأله $x=3$ را جایگزین کنیم.

$$\xrightarrow{x=3} f^2(5)=2+\sqrt{2}\xrightarrow[\text{مثبت}]{f(x)\text{همواره}} f(5)=\sqrt{2+\sqrt{2}}$$

$$\xrightarrow{*} 4\left(\sqrt{2+\sqrt{2}}\right)f'(5)=\frac{\sqrt{2}+1}{4}\Rightarrow 16f'(5)=\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{\sqrt{2}(\sqrt{2}+1)}}=\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt[4]{2}\sqrt{\sqrt{2}+1}}=$$

$$\Rightarrow 16f'(5)=\frac{\sqrt{\sqrt{2}+1}}{\sqrt[4]{2}}$$

۹۱. خطوط $x=2$ و $3y-7x+k=0$ بر نمودار تابع $f(x)=x-1-2\sqrt[3]{2b-2x}$ مماس‌اند حاصل‌ضرب مقادیر ممکن برای k کدام است؟

۱) ۱۰۵ ۲) ۱۳۵ ۳) ۱۰۰ ۴) ۱۵

پاسخ: گزینه ۱

با توجه به این که $x=2$ بر نمودار $f(x)$ مماس است پس $x=2$ مماس قائم تابع است و ریشهٔ عبارت زیر رادیکال است.

$$2b-2(2)=0\to b=2$$

با توجه به این که $3y-7x+k=0$ بر f مماس است پس در نقطه‌ای به طول x_0:

$$f(x)=x-1-2\sqrt[3]{4-2x}\to f'(x_0)=\frac{7}{3}$$

$$f'(x)=1+\frac{4}{3\sqrt[3]{(4-2x)^2}}=\frac{7}{3}\to\sqrt[3]{(4-2x)^2}=1$$

$$\begin{cases}4-2x=1\to x=\frac{3}{2} & f(\frac{3}{2})=-\frac{3}{2}\\ 4-2x=-1\to x=\frac{5}{2} & f(\frac{5}{2})=\frac{7}{2}\end{cases}$$

$$(\frac{3}{2},-\frac{3}{2})\in\text{خط}\Rightarrow 3(-\frac{3}{2})-7(\frac{3}{2})+k=0\to k=15$$

$$(\frac{5}{2},\frac{7}{2})\in\text{خط}\Rightarrow 3(\frac{7}{2})-7(\frac{5}{2})+k=0\to k=7$$

$$k_1k_2=105$$

۹۲. با فرض $f(x)=\sqrt{x^{۳}+۴}$، $g(x)=\sqrt{f''(x)f(x)+(f'(x))^{۲}}$ مقدار $g(۱۲)$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۴ ۴) ۶

پاسخ: گزینه ۴

تابع $g(x)$ را به‌صورت زیر بازنویسی می‌کنیم:

$$g(x)=\sqrt{(f(x)f'(x))'}$$

$$f(x)=\sqrt{x^{۳}+۴}\to f'(x)=\frac{۳x^{۲}}{۲\sqrt{x^{۳}+۴}}=\frac{\frac{۳}{۲}x^{۲}}{f(x)}$$

$$\Rightarrow f(x)f'(x)=\frac{۳}{۲}x^{۲}\to (f(x)f'(x))'=۳x$$

$$\Rightarrow g(x)=\sqrt{۳x} \qquad g(۱۲)=۶$$

۹۳. اگر $f(x)=\sqrt{x+۷}$ باشد مشتق تابع $y=\left(\frac{f^{-۱}}{f}\right)(x)$ در $x=۲$ کدام است؟

۱) $\frac{۲۵}{۹}$ ۲) $\frac{۵}{۹}$ ۳) $\frac{۲۵}{۱۸}$ ۴) $\frac{۵}{۱۸}$

پاسخ: گزینه ۳

ابتدا وارون تابع $f(x)$ را محاسبه می‌کنیم:

$$f(x)=\sqrt{x+۷}\to f^{-۱}(x)=x^{۲}-۷ \quad ; \quad x\geq ۰$$

$$y=\left(\frac{f^{-۱}}{f}\right)(x)=\frac{x^{۲}-۷}{\sqrt{x+۷}}$$

حال مشتق تابع را در $x=۲$ به‌دست می‌آوریم.

$$y'=\frac{۲x\sqrt{x+۷}-\frac{x^{۲}-۷}{۲\sqrt{x+۷}}}{(x+۷)}$$

$$x=۲\to y'(۲)=\frac{۴(۳)-\frac{-۳}{۲(۳)}}{۹}=\frac{۲۵}{۱۸}$$

۹۴. اگر f و g دو تابع مشتق‌پذیر و $f(۳x+g(x))=x+g(۲x)$ و $g(۰)=۲$ و $g'(۰)=۳$ باشد، $f'(۲)$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) $\frac{۷}{۶}$ ۴) $\frac{۱}{۲}$

پاسخ: گزینه ۳

$$f(۳x+g(x))=x+g(۲x)\xrightarrow{\text{مشتق‌گیری}}(۳+g'(x))f'(۳x+g(x))=۱+۲g'(۲x)$$

$$\xrightarrow{x=۰}(۳+g'(۰))f'(g(۰))=۱+۲g'(۰)\Rightarrow ۶f'(۲)=۷\Rightarrow f'(۲)=\frac{۷}{۶}$$

۹۵. در تابع $f(x)=\begin{cases} 2x-3 & ; \ x\geq 0 \\ x^2-2x-3 & ; \ x<0 \end{cases}$، حاصل ضرب آهنگ لحظه‌ای تغییر تابع $fof(x)$ در نقطهٔ $x=1$ و آهنگ متوسط تابع $f(x)$ در بازهٔ $[-1,5]$ کدام است؟

۱) $\frac{20}{3}$ ۲) -12 ۳) -10 ۴) $-\frac{28}{3}$

پاسخ: گزینه ۴

آهنگ لحظه‌ای تغییر تابع fof در نقطهٔ $x=1$ همان مشتق تابع fof در $x=1$ است، پس ابتدا از تابع f مشتق می‌گیریم:

$$f(x)=\begin{cases} 2x-3 & ; \ x\geq 0 \\ x^2-2x-3 & ; \ x<0 \end{cases} \Rightarrow f'(x)=\begin{cases} 2 & ; \ x>0 \\ 2x-2 & ; \ x<0 \end{cases}$$

حالا مشتق تابع fof را در نقطهٔ $x=1$ پیدا می‌کنیم:

$$(fof)'(x)=f'(x)\times f'\big(f(x)\big)\xrightarrow{x=1} f'(1)\times f'\big(f(1)\big)$$

$$=f'(1)\times f'(-1)=2\times -4=-8$$

حالا آهنگ متوسط تغییر تابع f را در بازهٔ $[-1,5]$ پیدا می‌کنیم:

$$\frac{f(5)-f(-1)}{5-(-1)}=\frac{(2\times 5-3)-(1+2-3)}{6}=\frac{7}{6}$$

پس حاصل ضرب مقادیر خواسته شده برابر است با:

$$-8\times\frac{7}{6}=-\frac{28}{3}$$