دفترچه شماره ۳ — ۱۹ دی ۱۴۰۳

دفترچه پاسخ آزمون الکترونیکی زیستاز

آزمون شمارهٔ ۱۴

ویژه دانش آموزان پایه دوازدهم

نام درس	ریاضی	زمین
گزینشگر	سجاد عظمتی	-
ناظر علمی	مجید رفعتی	-
مسئول آزمون	گروه ریاضی فیثاغورس	-
پاسخنامه‌نویس	نریمان فتح الهی- داوود بوالحسنی	-
طراحان	سجاد عظمتی-مهرداد کیوان -حسین شفیع زاده- امید شیری نژاد -علی آزاد -فرید غلامی - شاهین پروازی - بهرام جباری - محرم مهدی - احسان غیاثی -آرش باقری پور- نریمان فتح اللهی-فرشاد حسن زاده- آرش باقری پور	-
ویراستاران	علی فلاح- مصطفی غلامی- جلیل احمد میربلوچ-احسان غنی زاده -فاطمه بهمن آبادی- محمد حسین کاربین	-

تولید فنی و گرافیک توسط نشر ویانو

ویژه کنکور ۱۴۰۴

پاسخنامه ریاضی آزمون مرحله ۱۴ پایه دوازدهم

۱۹ دی ماه ۱۴۰۳

۹۶. اگر $f(x)=\sqrt{x-2}$ و $g(x)=\sqrt{5-x}$ باشد، در این صورت دامنه‌ی تعریف $(f+g)of(x)$ کدام است؟

۱) $[4,25]$ ۲) $[6,27]$ ۳) $[2,27]$ ۴) $[6,25]$

پاسخ: گزینه ۲

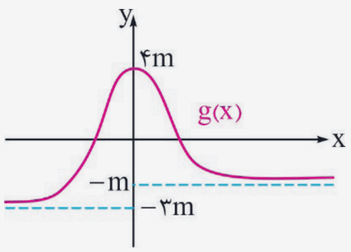
ابتدا دامنه‌ی هر کدام از توابع را به‌دست می‌آوریم:

$$\left.\begin{array}{l} f(x)=\sqrt{x-2}\Rightarrow x-2\geq 0\Rightarrow x\geq 2\Rightarrow D_{f(x)}=[2,+\infty) \\ g(x)=\sqrt{5-x}\Rightarrow 5-x\geq 0\Rightarrow x\leq 5\Rightarrow D_{g(x)}=(-\infty,5] \end{array}\right\} D_{f+g}=[2,5]$$

$$D_{(f+g)of}=\left\{x\in D_f \,\middle|\, f(x)\in D_{f+g}\right\}=\left\{x\in[2,\infty) \,\middle|\, \sqrt{x-2}\in[2,5]\right\} \quad *$$

$$2\leq\sqrt{x-2}\leq 5\xrightarrow{\text{توان ۲}}4\leq x-2\leq 25\Rightarrow 6\leq x\leq 27\xrightarrow{*}D_{(f+g)of}=[6,27]$$

۹۷. اگر $f(x)$ تابعی خطی و $fof(x)=(m-1)x^2+x+4$ بوده و نمودار تابع (g) به صورت زیر باشد، بُرد تابع $fog(x)$ کدام است؟



۱) $[-2,6]$

۲) $[-3,4]$

۳) $(-1,6]$

۴) $[-1,5]$

پاسخ: گزینه ۳

با توجه به اینکه تابع $f(x)$ به‌صورت خطی می‌باشد، بنابراین خواهیم داشت:

$$f(x)=ax+b\Rightarrow fof(x)=f(f(x))=f(ax+b)=a(ax+b)+b$$

$$\Rightarrow a^2x+ab+b=(m-1)x^2+x+4\Rightarrow m-1=0\Rightarrow m=1$$

$$a^2=1\Rightarrow\begin{cases} a=1\Rightarrow b+b=4\Rightarrow b=2 \\ a=-1\Rightarrow -b+b=4 \text{ غ ق ق} \end{cases}\Rightarrow f(x)=x+2$$

با توجه به اینکه برد تابع g به‌صورت بازهٔ $(-3,4]$ می‌باشد، بنابراین ورودی تابع $f(x)$ برابر با $(-3,4]$ خواهد بود. پس داریم:

$$f(x)=x+2\Rightarrow\begin{cases} x=-3\Rightarrow f(-3)=-1 \\ x=4\Rightarrow f(4)=6 \end{cases}\Rightarrow R_{fog(x)}=(-1,6]$$

۹۸. اگر f تابعی یک به یک و g تابعی خطی و نزولی باشد و بدانیم $f(x+gog(x))=f(3x-7+g(x))$ ، حاصل $g(3)$ کدام است؟

۱) ۷ ۲) ۶ ۳) ۴ ۴) ۲

پاسخ: گزینه ۳

در تابع یک به یک می‌دانیم: $f(x_1)=f(x_2)\Rightarrow x_1=x_2$

$$\Rightarrow f(x+gog(x))=f(3x-7+g(x))\Rightarrow x+gog(x)=3x-7+g(x)\ (*)$$

$$\xrightarrow{\text{g تابع خطی}} g(x)=ax+b \to gog(x)=g\big(g(x)\big)=g(ax+b)=a(ax+b)+b$$

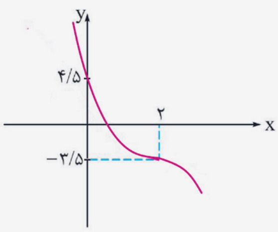
$$(*)\Rightarrow x+a^2x+ab+\cancel{b}=3x-7+ax+\cancel{b}\Rightarrow a^2x+ab=(2+a)x-7 \qquad (**)$$

$$\Rightarrow a^2=2+a\Rightarrow a^2-a-2=0\Rightarrow (a-2)(a+1)=0\Rightarrow\begin{cases}a=2\\ a=-1\end{cases}$$

با توجه به اینکه تابع g نزولی می‌باشد بنابراین $a=-1$ قابل قبول است.

$$\left.\begin{aligned}&\Rightarrow g(x)=-x+b\\ &(**)\Rightarrow ab=-7\xrightarrow{a=-1}b=7\end{aligned}\right\}\Rightarrow g(x)=-x+7\to g(3)=4$$

۹۹. اگر f و g دو تابع خطی و نمودار تابع $y=(fg)(x)-x^3$ به شکل داده شده باشد، آنگاه نمودار تابع $(f.g)$ در چه بازه‌ای صعودی است؟



۱) $[-2,+\infty)$

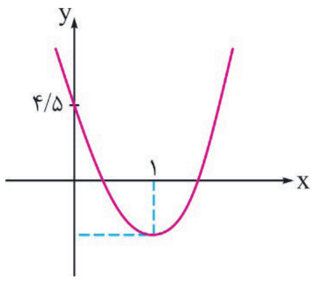
۲) $(-\infty,2]$

۳) $[1,+\infty)$

۴) $(-\infty,1]$

پاسخ: گزینه ۳

با توجه به شکل داده شده، معادله‌ی تابع y را می‌توان به‌صورت زیر به دست آورد.



$$y=a(x-\alpha)^3+\beta\Rightarrow y=a(x-2)^3-3/5\xrightarrow{(0,4/5)}a=-1$$

$$\Rightarrow y=-(x-2)^3-3/5=-(x^3-6x^2+12x-8)-3/5=(f.g)_{(x)}-x^3$$

$$\Rightarrow (f.g)_{(x)}=6x^2-12x+4/5$$

تابع $(f.g)$ در بازه‌ی $[1,\infty)$ صعودی است.

۱۰۰. توابع $f(x)=-x^3-\sqrt{x-2}$ و $g(x)=2\log\left(f(x^2)-f(x+6)\right)$ مفروض‌اند. کدام تابع روی دامنه‌ی تابع $g(x)$ اکیداً یکنوا است؟

۱) $y=2|x-1|$ ۲) $y=\sqrt{x}+\sqrt{x+3}$ ۳) $y=(x-3)^2+1$ ۴) $y=x+|x|$

پاسخ: گزینه ۳

تابع $f(x)$ تشکیل شده از دو تابع اکیداً نزولی است. $(y=-x^3, y=-\sqrt{x-2})$ پس خود تابع $f(x)$ تابعی اکیداً نزولی خواهد بود.

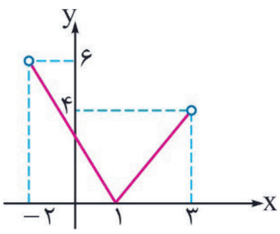
برای یافتن دامنه تابع g خواهیم داشت:

$$f(x^2)-f(x+6)>0\Rightarrow f(x^2)>f(x+6)\xrightarrow[f(x_1)>f(x_2)\Rightarrow x_1<x_2]{\text{چون تابع f اکیداً نزولی است}}x^2<x+6$$

$$x^2-x-6<0\Rightarrow x\in(-2,3)$$

به بررسی گزینه‌ها می‌پردازیم:

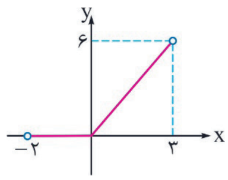
۱) $y=2|x-1|$



غیر یکنوا

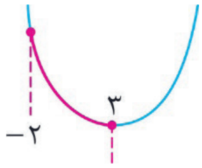
۲) $y=\sqrt{x}$ در بازه $(-2,0)$ تعریف نشده

یکنوا



$۴)\ y = x + |x|$

اکیداً یکنوا



$۳)\ y = (x-۳)^۲ + ۱$

۱۰۱. تابع $f = \{(۱,۴)(-۱,۳)(۰,۲)(-۵,۰)(۲,۶)\}$ مفروض است. اگر $fo\left(\frac{۲}{f}\right)^{-۱}(a) = \frac{۹}{۲}a$ باشد، مقدار a کدام است؟

۱) $\frac{۲}{۳}$ ۲) $\frac{۱}{۲}$ ۳) ۱ ۴) $\frac{۱}{۳}$

پاسخ: گزینه ۱

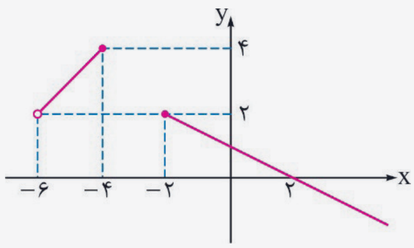
$$f = \{(۱,۴)(-۱,۳)(۰,۲)(-۵,۰)(۲,۶)\}$$

$$\frac{۱}{f} = \left\{\left(۱,\frac{۱}{۴}\right)\left(-۱,\frac{۱}{۳}\right)\left(۰,\frac{۱}{۲}\right)\left(۲,\frac{۱}{۶}\right)\right\} \Rightarrow \frac{۲}{f} = \left\{\left(۱,\frac{۱}{۲}\right)\left(-۱,\frac{۲}{۳}\right)(۰,۱)\left(۲,\frac{۱}{۳}\right)\right\}$$

$$\left(\frac{۲}{f}\right)^{-۱} = \left\{\left(\frac{۱}{۲},۱\right)\left(\frac{۲}{۳},-۱\right)(۱,۰)\left(\frac{۱}{۳},۲\right)\right\}$$

$$fo\left(\frac{۲}{f}\right)^{-۱} = \left\{\left(\frac{۱}{۲},۴\right)\left(\frac{۲}{۳},۳\right)(۱,۲)\left(\frac{۱}{۳},۶\right)\right\} \Rightarrow fo\left(\frac{۲}{f}\right)^{-۱}\left(\frac{۲}{۳}\right) = \frac{۹}{۲}\times\frac{۲}{۳} = ۳ \Rightarrow a = \frac{۲}{۳}$$

۱۰۲. اگر نمودار تابع $y = f^{-۱}(x+۲)$ به‌صورت زیر باشد و $x = a$ تنها عضو طبیعی دامنهٔ تابع $y = f^{-۱}of(۴x)$ باشد، حاصل $f(a+۳)$ کدام است؟



۱) ۱
۲) ۲
۳) −۱
۴) −۲

پاسخ: گزینه ۴

در تابع $y = f^{-۱}of(۴x)$ باید $۴x \in D_{f(x)}$ باشد یا به عبارتی $۴x \in R_{f^{-۱}(x)}$ است. با توجه به اینکه انتقال افقی تأثیری در برد تابع ندارد، بنابراین داریم:

$$R_{f^{-۱}(x+۲)} = R_{f^{-۱}(x)} = (-\infty,۴] \qquad ۴x \in (-\infty,۴] \to x \in (-\infty,۱]$$

بنابراین دامنهٔ تابع $y = f^{-۱}of(۴x)$ ، بازهٔ $(-\infty,۱]$ می‌باشد که شامل عدد طبیعی $x=۱$ است. پس $a=۱$ و داریم:

$$f(a+۳) = f(۴) \to f(۴) = m \to f^{-۱}(m) = ۴$$

$$y = f^{-۱}(x+۲) \xrightarrow[\text{نمودار}]{\text{باتوجه‌به}} x = -۴ \to y = f^{-۱}(-۴+۲) = ۴ \to f^{-۱}(-۲) = ۴ \to f(۴) = -۲$$

۱۰۳. اگر $f^{-۱}(x) = \frac{۲x-۱}{x-۲}$ و $g^{-۱}(x) = h(۴x-۲)$ باشد، حاصل $\frac{g(h(f(f(-۳))))}{f(-۲)}$ کدام است؟

۱) $-\frac{۱}{۴}$ ۲) $-\frac{۴}{۵}$ ۳) $-\frac{۳}{۴}$ ۴) $-\frac{۱}{۵}$

پاسخ: گزینه ۴

در تابع هموگرافیک $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$ اگر $a+d=۰$ باشد، تابع f با $f^{-۱}$ یکسان خواهد بود، بنابراین داریم:

$$g\left(h\left(f\left(f(-۳)\right)\right)\right)=g\left(h\left(f\left(f^{-۱}(-۳)\right)\right)\right)=g\left(h(-۳)\right)\quad (*)$$

$$g^{-۱}(x)=h(۴x-۲)\xrightarrow[x=-\frac{۱}{۴}]{۴x-۲=-۳}g^{-۱}\left(-\frac{۱}{۴}\right)=h(-۳)\xrightarrow{(*)}g\left(h(-۳)\right)=g\left(g^{-۱}\left(-\frac{۱}{۴}\right)\right)=-\frac{۱}{۴}$$

$$f(-۲)=f^{-۱}(-۲)=\frac{-۵}{-۴}=\frac{۵}{۴}\Rightarrow\frac{g\left(h\left(f\left(f(-۳)\right)\right)\right)}{f(-۲)}=\frac{-\frac{۱}{۴}}{\frac{۵}{۴}}=-\frac{۱}{۵}$$

۱۰۴. اگر $f(x)=-۳+\sqrt{۲-x}$ باشد و داشته باشیم $f^{-۱}og(x)+۲g(x)=-x^{۲}+۴x-۷$ ، کمترین مقدار حاصل $(f+g)(۱)$ کدام است؟

۱) -۳ ۲) -۴ ۳) -۵ ۴) -۶

پاسخ: گزینه ۳

$$f(x)=-۳+\sqrt{۲-x}\xrightarrow{x\to y}x=-۳+\sqrt{۲-y}$$

$$\to x+۳=\sqrt{۲-y}\xrightarrow{\text{توان ۲}}x^{۲}+۶x+۹=۲-y\Rightarrow y=f^{-۱}(x)=-x^{۲}-۶x-۷\to f^{-۱}og(x)=-g^{۲}(x)-۶g(x)-۷$$

$$\Rightarrow f^{-۱}og(x)+۲g(x)=-g^{۲}(x)-۴g(x)\cancel{-۷}=-x^{۲}+۴x\cancel{-۷}$$

$$g^{۲}(x)+۴g(x)=x^{۲}-۴x\Rightarrow\left(g(x)+۲\right)^{۲}\cancel{-۴}=(x-۲)^{۲}\cancel{-۴}$$

$$\Rightarrow\left(g(x)+۲\right)^{۲}=(x-۲)^{۲}\xrightarrow{\text{جذر}}g(x)+۲=\pm(x-۲)\Rightarrow\begin{cases}g(x)=x-۴\\ g(x)=-x\end{cases}$$

$$\begin{cases}g(۱)=-۳\\ g(۱)=-۱\end{cases}\Rightarrow (f+g)_{(۱)}\ \text{کمترین مقدار}=f(۱)+g(۱)=-۲-۳=-۵$$

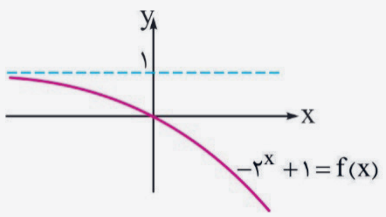
۱۰۵. اگر $f(x)=-۲^{x}+۱$، ریشه‌ی معادله‌ی $x^{۲}-۲-۳\left(fof^{-۱}(x)\right)=f^{-۱}of(x)$ کدام است؟

۱) $۲+\sqrt{۶}$

۲) $۱+\sqrt{۶}$

۳) $۱-\sqrt{۶}$

۴) $۲-\sqrt{۶}$



پاسخ: گزینه ۴

می‌دانیم
$$\begin{cases}fof^{-۱}(x)=x\to x\in D_{f^{-۱}}\ \text{یا}\ x\in R_{f}\\ f^{-۱}of(x)=x\to x\in D_{f}\end{cases}$$

$$\begin{cases}D_{f}=R\\ R_{f}=(-\infty,۱)\end{cases}\Rightarrow x^{۲}-۲-۳fof^{-۱}(x)=f^{-۱}of(x)\Rightarrow x^{۲}-۲-۳x=x\Rightarrow x^{۲}-۴x-۲=۰$$

$$\Delta=۱۶+۸=۲۴\Rightarrow x=\frac{۴\pm ۲\sqrt{۶}}{۲}=۲\pm\sqrt{۶}\xrightarrow{(-\infty,۱)}x=۲-\sqrt{۶}$$

۱۰۶. اگر تابع f با ضابطه‌ی $f(x)=\frac{k^2x+6}{8x+(k-1)}$ روی دامنه‌اش غیر یک به یک باشد، حاصل $\lim\limits_{x\to k^-}\frac{[x^2-kx]}{4-x}$ کدام است؟

۱) $-\infty$ ۲) $+\infty$ ۳) 0 ۴) 1

پاسخ: گزینه ۱

تابع با ضابطه‌ی $f(x)=\frac{ax+b}{cx+d}$، اگر $\frac{a}{c}=\frac{b}{d}$ باشد همواره روی دامنه‌اش غیر یک به یک است، پس این شرط را اعمال می‌کنیم:

$$\frac{a}{c}=\frac{b}{d}\to\frac{k^2}{8}=\frac{6}{k-1}\Rightarrow k^2(k-1)=48\Rightarrow k^3-k^2-48=0\Rightarrow k^3-64-k^2+16=0$$

$$\to(k-4)(k^2+4k+16)-(k-4)(k+4)=0\Rightarrow(k-4)(\underbrace{k^2+3k+12}_{\Delta<0})=0\Rightarrow k=4$$

$$\lim_{x\to k^-}\frac{[x^2-kx]}{4-x}=\lim_{x\to 4^-}\frac{[x^2-4x]}{4-x}=\frac{[0^-]}{0^+}=\frac{-1}{0^+}=-\infty$$

x		0		4	
x^2-4x	+	0	−	0	+

توجه: برای محاسبه‌ی حد $[x^2-4x]$ در $x=4$ از جدول تعیین علامت استفاده می‌کنیم.

۱۰۷. حاصل $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^3-8+\sqrt[3]{x^2-4}}{x^2-4+\sqrt[3]{x-2}}$ کدام است؟

۱) $\sqrt[3]{4}$ ۲) $\frac{1}{\sqrt[3]{4}}$ ۳) $\frac{\sqrt[3]{16}}{4}$ ۴) $\frac{\sqrt[3]{4}}{2}$

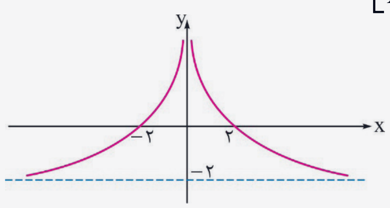
پاسخ: گزینه ۱

با جایگزاری $x=2$ به حالت مبهم $\frac{0}{0}$ می‌رسیم، بنابراین با ساده کردن کسر داریم:

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^3-8+\sqrt[3]{x^2-4}}{x^2-4+\sqrt[3]{x-2}}=\frac{0}{0}=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x^2+2x+4)+\sqrt[3]{(x-2)(x+2)}}{(x-2)(x+2)+\sqrt[3]{x-2}}$$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt[3]{x-2}\left(\sqrt[3]{(x-2)^2}(x^2+2x+4)+\sqrt[3]{x+2}\right)}{\sqrt[3]{x-2}\left((x+2)\sqrt[3]{(x-2)^2}+1\right)}=\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt[3]{(x-2)^2}(x^2+2x+4)+\sqrt[3]{x+2}}{(x+2)\sqrt[3]{(x-2)^2}+1}=\frac{\sqrt[3]{4}}{1}=\sqrt[3]{4}$$

۱۰۸. با توجه به نمودار تابع $y=f(x)$، حاصل $\left[\lim\limits_{x\to+\infty}f\left(f\left(\frac{2}{x}\right)\right)\right]-\lim\limits_{x\to-\infty}\left[f(f(x))\right]$ کدام است؟



۱) ۲
۲) ۱
۳) −۲
۴) −۱

پاسخ: گزینه ۳

حاصل هر یک از حدها را به صورت مجزا به‌دست می‌آوریم:

$$\left[\lim_{x\to+\infty}f\left(f\left(\frac{2}{x}\right)\right)\right]=\left[\lim_{x\to 0^+}f(f(x))\right]=[-2]=-2$$

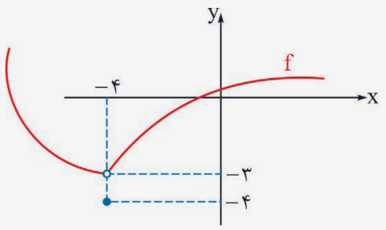
حاصل حد عددی مطلق است نه حدی .

$$\lim_{x\to-\infty}\left[f(f(x))\right]=\lim_{x\to(-2)^+}\left[f(x)\right]=\left[0^+\right]=0$$

بنابراین حاصل حد داده شده برابر است با:

$$\left[\lim_{x\to+\infty} f\left(f\left(\frac{۲}{x}\right)\right)\right]-\lim_{x\to-\infty}\left[f\left(f(x)\right)\right]=-۲-۰=-۲ \quad \lim_{t\to-۳}$$

۱۰۹. نمودار تابع $f(x)$ به صورت مقابل است. حاصل $\lim_{x\to-۴}\frac{\sqrt{-۱۲f(x)}-۶}{۳+f(x)}$ کدام است؟



۱) -۱

۲) -۴

۳) ۱

۴) ۴

پاسخ: گزینه ۱

$$\lim_{x\to-۴} f(x)=-۳ \to \lim_{x\to-۴} f(x)=t \to t=-۳$$

حد موردنظر : $\lim_{t\to-۳}\frac{\sqrt{-۱۲t}-۶}{۳+t}=\frac{۰}{۰}$

$$:\lim_{t\to-۳}\frac{\left(\sqrt{-۱۲t}-۶\right)}{(۳+t)}\times\frac{\sqrt{-۱۲t}+۶}{\sqrt{-۱۲t}+۶}=\lim_{t\to-۳}\frac{\overbrace{-۱۲t-۳۶}^{-۱۲\cancel{(t+۳)}}}{\cancel{(t+۳)}\underbrace{\left(\sqrt{-۱۲t}+۶\right)}_{۱۲}}=-۱$$

۱۱۰. اگر $f(x)=\frac{x+۳}{۳x-۱}$ و $g(x)=\frac{۳x+۱}{x+۲}$ باشد . حاصل $\lim_{x\to-\infty}(gof)^{-۱}(x)$ در کدام گزینه است؟

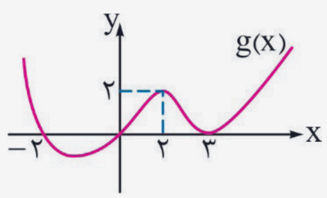
۱) ۱ ۲) -۱ ۳) $\frac{۱}{۷}$ ۴) $\frac{-۱}{۷}$

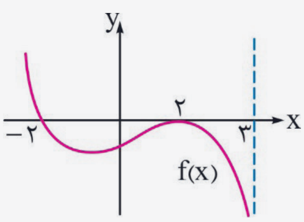
پاسخ: گزینه ۴

$$(gof)(x)=g\left(f(x)\right)=g\left(\frac{x+۳}{۳x-۱}\right)=\frac{۳\left(\frac{x+۳}{۳x-۱}\right)+۱}{\frac{x+۳}{۳x-۱}+۲}=\frac{۶x+۸}{۷x+۱}\to(gof)(x)=\frac{۶x+۸}{۷x+۱}$$

$$(gof)^{-۱}(x)=\frac{-x+۸}{۷x-۶} \qquad \lim_{x\to-\infty}(gof)^{-۱}=\frac{-x}{۷x}=-\frac{۱}{۷}$$

۱۱۱. اگر نمودار توابع $f(x)$ و $g(x)$ به صورت زیر باشند، حاصل $\lim_{x\to۲}\frac{\log(-gof(x))}{\left[\left(\frac{۱}{۲}g^{۲}(x)-۲g(x)+۲\right)f(x)\right]}$ برابر با کدام گزینه است؟ ([ ] نماد جزء صحیح است.)





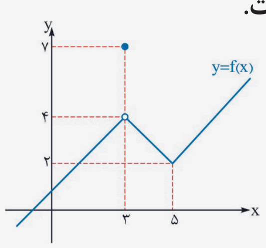
۱) صفر ۲) ۱ ۳) $-\infty$ ۴) $+\infty$

پاسخ: گزینه ۴

$$\lim_{x\to ۲}\frac{\log(-gof(x))}{\left[\left(\frac{۱}{۲}g^{۲}(x)-۲g(x)+۲\right)f(x)\right]}=\lim_{x\to ۲}\frac{\log(-g(f(x)))}{\left[\frac{۱}{۲}(g(x)-۲)^{۲}f(x)\right]}$$

$$=\lim_{x\to ۲}\frac{\log\left(-g(۰^-)\right)}{\left[\frac{۱}{۲}\cancel{(۰^+)(۰^-)}\right]}=\lim_{x\to ۲}\frac{\log\left(-(۰^-)\right)}{[۰]^-}=\lim_{x\to ۲}\frac{\log(۰^+)}{-۱}==\frac{-\infty}{-۱}=+\infty$$

۱۱۲. نمودار تابع $y=f(x)$ به‌صورت مقابل است و تابع $y=g(x)$ بر روی مجموعهٔ اعداد حقیقی دارای حد است. اگر $\lim\limits_{x\to ۳}g(x)=۱۴$ باشد و تابع $f\times g$ روی مجموعهٔ اعداد حقیقی پیوسته باشد، مقدار $g(۳)$ کدام است.



۱) ۸

۲) ۴۷

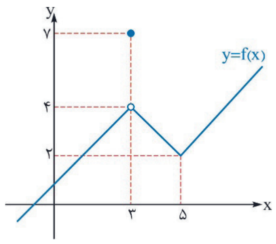
۳) ۷

۴) ۱۴

پاسخ: گزینه ۱

چون تابع $f\times g$ روی مجموعهٔ اعداد حقیقی پیوسته است، پس در $x=۳$ داریم:

$$\lim_{x\to ۳}(f\times g)(x)=(f\times g)(۳)$$



با توجه به نمودار تابع f در شکل مقابل $\lim\limits_{x\to ۳}f(x)=۴$ و $f(۳)=۷$ است، پس:

$$\lim_{x\to ۳}f(x)\times\lim_{x\to ۳}g(x)=f(۳)\times g(۳)\Rightarrow ۴\times ۱۴=۷\times g(۳)\Rightarrow g(۳)=۸$$

۱۱۳. اگر $f(x)=\frac{\pi}{۳x-۱}$ و $g(x)=\log_{\frac{۱}{۲}}\tan x$ باشد، حاصل $\lim\limits_{x\to ۱^+}g(f(x))$ کدام است؟

۱) $+\infty$ ۲) $-\infty$ ۳) $\frac{\pi}{۲}$ ۴) وجود ندارد

پاسخ: گزینه ۲

ابتدا $\lim\limits_{x\to ۱^+}f(x)$ را محاسبه می‌کنیم:

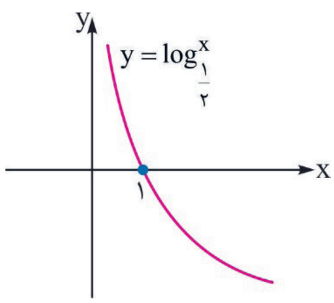
$$\lim_{x\to ۱^+}\frac{\pi}{۳x-۱}=\frac{\pi}{۲^+}=\left(\frac{\pi}{۲}\right)^-$$

حالا به سراغ محاسبه $\lim\limits_{x\to ۱^+}g(f(x))$ می‌رویم:

$$\lim_{x\to ۱^+}g(f(x))=\lim_{x\to\left(\frac{\pi}{۲}\right)^-}g(x)=\lim_{x\to\left(\frac{\pi}{۲}\right)^-}\left(\log_{\frac{۱}{۲}}\tan x\right)$$

در ضمن می دانیم وقتی که $x\to\left(\frac{\pi}{۲}\right)^-$ آنگاه $\tan x\to+\infty$ ، پس:

$$\lim_{x\to\left(\frac{\pi}{۲}\right)^-}\left(\log_{\frac{۱}{۲}}\tan x\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(\log_{\frac{۱}{۲}}x\right)$$



حالا با توجه به نمودار $y=\log_{\frac{۱}{۲}}x$ داریم:

$$\Rightarrow\lim_{x\to+\infty}(\log_{\frac{۱}{۲}}x)=-\infty$$

۱۱۴. تابع $f(x)=\dfrac{(3x-2)^n-6x^2+5}{6x^2-9x+3}$ را در نظر بگیرید. اگر $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\dfrac{1}{2}$ باشد، حاصل $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$ کدام است؟ $(n\in\mathbb{N})$

۱) ۴ ۲) -4 ۳) ۲ ۴) -2

پاسخ: گزینه ۴

چون حد تابع در بی‌نهایت برابر $\dfrac{1}{2}$ است، پس درجهٔ عبارت پرتوان صورت و مخرج باید برابر باشد. از طرفی چون $n\in\mathbb{N}$ است فقط به‌ازای $n=1$ و $n=2$ حاصل حد برابر عدد می‌شود. در ضمن می‌دانیم $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\dfrac{1}{2}$ است و داریم:

$$n=1\Rightarrow \lim_{x\to+\infty}\frac{(3x-2)-6x^2+5}{6x^2-9x+3}=\lim_{x\to+\infty}\frac{-6x^2+3x+3}{6x^2-9x+3}=-1 \quad ✗$$

$$n=2\Rightarrow \lim_{x\to+\infty}\frac{(3x-2)^2-6x^2+5}{6x^2-9x+3}=\lim_{x\to+\infty}\frac{3x^2-12x+9}{6x^2-9x+3}=\frac{1}{2} \quad ✓$$

پس $n=2$ است، حالا به سراغ محاسبه $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$ می‌رویم:

$$\lim_{x\to 1}\frac{3x^2-12x+9}{6x^2-9x+3}\overset{HOP}{=}\lim_{x\to 1}\frac{6x-12}{12x-9}=-2$$

۱۱۵. دامنه‌ی تابع $f(x)=\dfrac{\tan\left(\dfrac{\pi+\pi x}{2}\right)}{\sqrt{4-x^2}}$ شامل a بازه به طول b است. دوره تناوب تابع $g(x)=\cos ax-2b\cos x+3$ کدام است؟

۱) π ۲) 2π ۳) $\dfrac{\pi}{2}$ ۴) 4π

پاسخ: گزینه ۲

برای دامنه تابع $f(x)$ خواهیم داشت: $\left(\tan x, x\neq k\pi+\dfrac{\pi}{2}\right)$

$$\frac{\pi+\pi x}{2}\neq k\pi+\frac{\pi}{2}\Rightarrow \cancel{\frac{\pi}{2}}+\frac{\pi x}{2}\neq k\pi+\cancel{\frac{\pi}{2}}\Rightarrow x\neq 2k \quad (1)$$

از طرفی داریم:

$$4-x^2>0\Rightarrow x\in(-2,2) \qquad (2)$$

$(1)\cap(2)\Rightarrow(-2,2)-\{0\}\Rightarrow(-2,0)\cup(0,2)$ (۲بازه به طول ۲)

پس $b=a=2$ خواهند بود. در تابع $g(x)$ جایگذاری خواهیم کرد.

$$\underbrace{\cos 2x}_{2\cos^2 x-1}-4\cos x+3=2\cos^2 2x-4\cos x+2=2(\underbrace{\cos x-1}_{-(1-\cos x)})^2$$

$$\underline{\underline{1-\cos 2\alpha=2\sin^2\alpha}} \quad 2\left(-2\sin^2\frac{x}{2}\right)^2=8\sin^4\frac{x}{2} \qquad T=\frac{\pi}{\frac{1}{2}}=2\pi$$

۱۱۶. مجموع جواب‌های معادلهٔ مثلثاتی $\sin^2 x+\sin^2 2x=\cos^2 x+\cos^2 2x$ در بازهٔ $(0,\pi)$ کدام است؟

۱) $\dfrac{\pi}{2}$ ۲) π ۳) $\dfrac{3\pi}{2}$ ۴) 2π

پاسخ: گزینه ۳

می‌دانیم $\cos 2x=\cos^2 x-\sin^2 x$ است، بنابراین داریم:

$$\sin^2 x+\sin^2 2x=\cos^2 x+\cos^2 2x$$

$$\sin^2 x - \cos^2 x = \cos^2 2x - \sin^2 2x \qquad -\cos 2x = \cos 4x \Rightarrow \cos 4x = \cos(\pi - 2x)$$

$$4x = 2k\pi \pm (\pi - 2x) \to \begin{cases} 4x = 2k\pi + \pi - 2x \\ 4x = 2k\pi - \pi + 2x \end{cases} \to \begin{cases} 6x = (2k+1)\pi \to x = \left(\dfrac{2k+1}{6}\right)\pi \xrightarrow{x\in(0,\pi)} x = \dfrac{\pi}{6}, \dfrac{\pi}{2}, \dfrac{5\pi}{6} \\ 2x = (2k-1)\pi \to x = \left(\dfrac{2k-1}{2}\right)\pi \xrightarrow{x\in(0,\pi)} x = \dfrac{\pi}{2} \end{cases}$$

بنابراین این معادله دارای سه جواب $\left\{\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{6}\right\}$ است و مجموع جواب‌ها برابر است با:

$$\text{مجموع جواب‌ها} = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{2} + \frac{5\pi}{6} = \frac{3\pi}{2}$$

۱۱۷. کوچک‌ترین جواب مثبت معادله مثلثاتی $\sin^2\left(x - \frac{\pi}{8}\right) + 2\cos\left(\frac{5\pi}{8} - x\right) = 3$ چند برابر بزرگ‌ترین جواب منفی این معادله است؟

۱) $-\frac{5}{11}$ ۲) $\frac{-1}{11}$ ۳) $\frac{-1}{7}$ ۴) $-\frac{5}{7}$

پاسخ: گزینه ۲

می‌دانیم اگر $\alpha + \beta = \frac{\pi}{2}$ باشد، آنگاه $\sin\alpha = \cos\beta$ است.

بنابراین:

$$\sin\left(x - \frac{\pi}{8}\right) = \cos\left(\frac{5\pi}{8} - x\right) \qquad \sin^2\left(x - \frac{\pi}{8}\right) + 2\cos\left(\frac{5\pi}{8} - x\right) = 3 \to \sin^2\left(x - \frac{\pi}{8}\right) + 2\sin\left(x - \frac{\pi}{8}\right) - 3 = 0$$

$$\to \begin{cases} \sin\left(x - \frac{\pi}{8}\right) = -3 \quad \text{غ ق ق} \\ \sin\left(x - \frac{\pi}{8}\right) = 1 \to x - \frac{\pi}{8} = 2k\pi + \frac{\pi}{2} \to x = 2k\pi + \frac{5\pi}{8} \to -2\pi + \frac{5\pi}{8}, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

کوچک ترین جواب مثبت: $x = \frac{5\pi}{8}$ بزرگ ترین جواب منفی: $x = \frac{-11\pi}{8}$

$$\frac{\text{کوچک ترین جواب مثبت}}{\text{بزرگ ترین جواب منفی}} = \frac{5\frac{\pi}{8}}{-11\frac{\pi}{8}} = \frac{-5}{11}$$

۱۱۸. محیط شکل حاصل از وصل کردن انتهای جواب‌های معادلهٔ $\sin 2x + \sin\left(\frac{5\pi}{2} + x\right) = 0$ روی دایرهٔ مثلثاتی کدام است؟

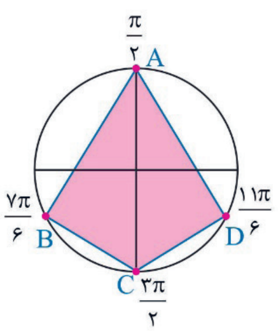
۱) $2\sqrt{3}$ ۲) $2\sqrt{3} - 2$ ۳) $2\sqrt{3} + 2$ ۴) $\sqrt{3} - 2$

پاسخ: گزینه ۳

می‌دانیم $\sin\left(\frac{5\pi}{2} + x\right) = \cos x$ است.

$$\sin 2x + \cos x = 0 \to 2\sin x\cos x + \cos x = 0 \to \cos x(2\sin x + 1) = 0$$

$$\to \begin{cases} \cos x = 0 \xrightarrow{0\le x\le 2\pi} x = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2} \\ 2\sin x + 1 = 0 \to \sin x = -\frac{1}{2} \xrightarrow{0\le x\le 2\pi} x = \frac{7\pi}{6}, \frac{11\pi}{6} \end{cases}$$



$A\left(\cos\frac{\pi}{۲},\sin\frac{\pi}{۲}\right)=(۰,۱)$ $B\left(\cos\frac{۷\pi}{۶},\sin ۷\frac{\pi}{۶}\right)=\left(-\frac{\sqrt{۳}}{۲},-\frac{۱}{۲}\right)$

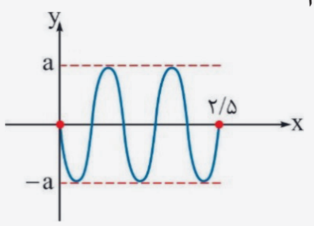
$C(\cos\frac{۳\pi}{۲},\sin\frac{۳\pi}{۲})=(۰,-۱)$ $D\left(\cos\frac{۱۱\pi}{۶},\sin\frac{۱۱\pi}{۶}\right)=\left(\frac{\sqrt{۳}}{۲},\frac{-۱}{۲}\right)$

$AB=AD=\sqrt{۳}\quad ,BC=CD=۱$

بنابراین محیط این شکل برابر است با:

$\text{محیط } ABCD=AB+BC+CD+AD=۲AB+۲BC=۲\sqrt{۳}+۲$

۱۱۹. قسمتی از نمودار تابع $f(x)=c+۳\cos\pi\left(\frac{۱}{۲}-bx\right)$ به صورت مقابل است. مقدار ab کدام است؟



۱) -۶

۲) -۳

۳) $۴/۵$

۴) ۶

پاسخ: گزینه ۱

با توجه به نمودار بیشترین و کمترین مقدار تابع به ترتیب برابر a و a- است. بنابراین:

$f(x)=c+۳\cos\left(\frac{\pi}{۲}-\pi bx\right)=c+۳\sin(\pi bx)$ $c=\frac{\max+\min}{۲}=\frac{a-a}{۲}=۰\to c=۰$

با توجه به نمودار $\frac{۵}{۲}=۱۰\frac{T}{۴}$ است، پس $T=۱$.

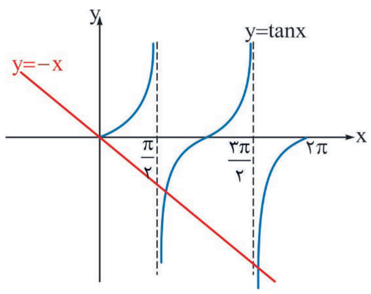
$T=\frac{۲\pi}{|\pi b|}=۱\to|\pi b|=۲\pi\to|b|=۲\xrightarrow{\text{نمودار در مبدا نزولی}}b=-۲$

بنابراین ضابطهٔ تابع به صورت $f(x)=۳\sin(-۲\pi x)$ می‌باشد که بیشترین مقدار آن برابر $a=۳$ است. پس: $ab=۳(-۲)=-۶$

۱۲۰. معادلهٔ $\sin x+x\cos x=۰$ در بازهٔ $[۰,۲\pi]$ دارای چند جواب است؟

۱) ۱   ۲) ۲   ۳) ۳   ۴) ۴

پاسخ: گزینه ۳



$\sin x+x\cos x=۰\to\sin x=-x\cos x\xrightarrow{\div\cos x}\tan x=-x$

حال معادله را به روش هندسی بررسی می‌کنیم:

با توجه به نمودار مشخص است که معادله $\tan x=-x$ در بازهٔ $[۰,۲\pi]$ دارای ۳ جواب است.

۱۲۱. نمودار $f(x)=[a]^۲\sin ۲x-۳[a]+۲$ از ناحیه اول مختصاتی عبور نمی‌کند. اگر کمترین مقدار a برابر m باشد، حاصل $۴\sin(mx)\cos(mx)\cos((m+۱)x)$ به‌ازای $x=۷/۵^\circ$ کدام است؟

۱) ۱   ۲) $\frac{۱}{۲}$ ۳) $\frac{\sqrt{۲}}{۲}$ ۴) $\frac{\sqrt{۳}}{۲}$

پاسخ: گزینه ۲

برای اینکه نمودار تابع $f(x)$ از ناحیه اول عبور نکند باید تابعی نامثبت باشد بنابراین باید $\max(f(x))\le۰$ باشد.

$$f(x)=[a]^{۲}\sin ۲x-۳[a]+۲\xrightarrow{\sin ۲x=۱}\max(f(x))=[a]^{۲}-۳[a]+۲$$

$$[a]^{۲}-۳[a]+۲\le ۰\xrightarrow{[a]=t}t^{۲}-۳t+۲\le ۰\to (t-۲)(t-۱)\le ۰\to ۱\le t\le ۲$$

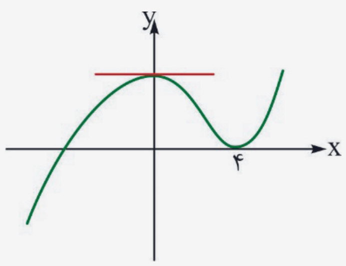
$$\to ۱\le [a]\le ۲\to ۱\le a<۳\to \min(a)=۱=m$$

بنابراین با جایگزاری $m=۱$ داریم:

$$۴\sin(mx)\cos(mx)\cos((m+۱)x)=۴\sin x\cos x\cos ۲x$$

$$۲\sin ۲x\cos ۲x=\sin ۴x\xrightarrow{x=۷/۵^{\circ}}\sin ۴(۷/۵^{\circ})=\sin ۳۰^{\circ}=\frac{۱}{۲}$$

۱۲۲. با توجه به نمودار تابع f کدام گزینه درست است؟



۱) $f'(۴).f'(۵)>۰$

۲) $\dfrac{f'(-۲)}{f'(۲)}>۰$

۳) $f'(۳).f'(۶)<۰$

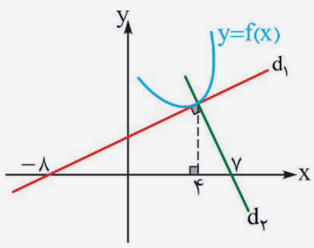
۴) $f'(۴)\times f'(-۱)>۰$

پاسخ: گزینه ۳

در بازه‌های $(-\infty,۰)$ و $(۴,+\infty)$ تابع اکیداً صعودی است پس علامت مشتق در این بازه مثبت است. ولی در بازه $(۰,۴)$ تابع اکیداً نزولی اســت و علامت مشتق در این بازه منفی اســت. با توجه به توضیحات بالا $f'(۶)>۰$ و $f'(۳)<۰$ پس حاصلضرب منفی است و گزینه ۳ درست است.

دقت کنید که در نقطه‌ی $x=۰$ و $x=۴$ شیب خط مماس بر نمودار صفر است پس $f'(۴)\times f'(-۱)=۰$

۱۲۳. در شکل مقابل، خط $d_۱$ در نقطهٔ $x=۴$ بر نمودار تابع $y=f(x)$ مماس است. مقدار $f'(۴)$ کدام است؟



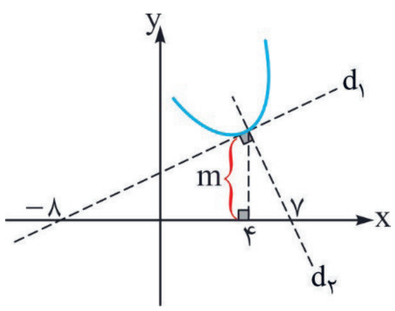
۱) ۱

۲) $\dfrac{۱}{۲}$

۳) ۲

۴) $\dfrac{۱}{۳}$

پاسخ: گزینه ۲

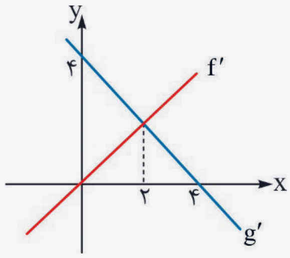


شیب خط $d_۱$ $\dfrac{m}{۱۲}\xrightarrow[m>۰]{d_۱\perp d_۲}\dfrac{m}{۱۲}\left(\dfrac{-m}{۳}\right)=-۱\to m^{۲}=۳۶\to m=۶$

شیب خط $d_۲$ $=\dfrac{-m}{۳}$

با توجه به مقدار $m=۶$ شیب خط $d_۱$ که همان $f'(۴)$ است برابر $\dfrac{۶}{۱۲}=\dfrac{۱}{۲}$ است.

۱۲۴. دو تابع چند جمله‌ای f و g را در نظر بگیرید. نمودار دو تابع f' و g' به صورت مقابل است. اگر $(gof)'(۲) = ۲۰$ باشد، مقدار $g(۲)$ کدام است؟



۱) ۱

۲) ۳

۳) ۴

۴) ۶

پاسخ: گزینه ۴

ابتدا ضابطه‌ی تابع g' را می‌نویسیم و با توجه به آن محل برخورد دو تابع g' و f' در نتیجه ضابطه f' را به دست می‌آوریم.

$$g'(x) = -x + ۴ \to g'(۲) = -۲ + ۴ = ۲ \to (۲,۲) \in f'$$

$$f'(x) = x \to f'(۲) = ۲ \qquad (gof')(۲) = g\left(f'(۲)\right) = ۶ \to g(۲) = ۶$$

۱۲۵. اگر $f(x) = \log(\sqrt{x^۲ + ۵} - x)$ و $g(x) = \log(\sqrt{x^۲ + ۵} + x)$ باشند آنگاه حاصل عبارت $\sqrt{\frac{f'(۲)}{g'(۲)} - \frac{g'(۵)}{f'(۵)}}$ کدام است؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) تعریف نشده

پاسخ: گزینه ۱

اگر توابع f و g را با هم جمع کنیم خواهیم داشت:

$$f(x) + g(x) = \underbrace{\log(x^۲ + ۵ - x^۲)}_{\log ۵}$$

حال از طرفین مشتق خواهیم گرفت:

($\log ۵$ عدد ثابت است و مشتق عدد ثابت برابر صفر است)

$$f'(x) + g'(x) = ۰$$

$$f'(x) = -g'(x) \Rightarrow \begin{cases} f'(۲) = -g'(۲) \\ f'(۵) = -g'(۵) \end{cases} \Rightarrow \sqrt{\frac{f'(۲)}{g'(۲)} - \frac{g'(۵)}{f'(۵)}} = \sqrt{-۱ - (-۱)} = \sqrt{۰} = ۰$$