دفترچهٔ پاسخ

بنیاد علمی آموزشی قلم‌چی (وقف عام)

آزمون تعیین سطح ۲۰ تیر ۱۴۰۴

اختصاصی دوازدهم ریاضی

پدیدآورندگان

	نام درس	نام طراحان
اختصاصی	حسابان ۱و ریاضی۱	کاظم اجلالی-رضا اسلامی-علی آزاد-افشین خاصه‌خان-سجاد داوطلب-زهره رامشینی-علی شهرابی-حمید علیزاده-احسان غنی‌زاده مصطفی محمدی‌کوثر-امیر محمودیان-میلاد منصوری-احمد مهرابی-جهانبخش نیکنام-پدرام نیکوکار
	هندسه و آمارو احتمال	امیرحسین ابومحبوب-سامان اسپهرم-علی ایمانی-محمد بحیرایی-محسن بهرام‌پور-رضا توکلی-جواد حاتمی-سیدمحمدرضا حسینی‌فرد محمد خندان-سوگند روشنی-محمد صحت‌کار-فرشاد فرامرزی-احمدرضا فلاح-امیرمحمد کریمی - محمد کریمی سیدسروش کریمی‌مداحی-نصیر محبی‌نژاد-مهدی نیک‌زاد-امیر وفائی-سرژ یقیازاریان‌تبریزی
	فیزیک	سعید اردم-علیرضا امینی-عبدالرضا امینی‌نسب-شهرام آزاد-محمد بهلولی-حمید زرین‌کفش-مهدی زمان‌زاده-بهنام شاهینی-سعید شرق معصومه شریعت‌ناصری-محمدرضا شریفی-پوریا علاقه‌مند-مصطفی کیانی-علی گل‌محمدی‌رامشه-سعید منبری-محمدکاظم منشادی-اشکان ولی‌زاده
	شیمی	محمدرضا پورجاوید-امیر حاتمیان-مرتضی حسن‌زاده-یاسر راش-حسن رحمتی‌کوکنده-روزبه رضوانی-مبینا شرافتی‌پور-رسول عابدینی‌زواره محمد عظیمیان‌زواره-محمدپارسا فراهانی-حسن لشکری-محمدحسن محمدزاده‌مقدم-سیدمحمد معروفی-سالار ملکی سیدمحمدرضا میرقائمی-امین نوروزی-سیدرحیم هاشمی‌دهکردی-محمد وزیری

گروه علمی اختصاصی

نام درس	حسابان۱ وریاضی۱	هندسه و آمارواحتمال	فیزیک	شیمی
گزینشگر	سیدسپهر متولیان	امیرمحمد کریمی	حسام نادری	آرش ظریف
گروه ویراستاری	امیرحسین ابومحبوب مهرداد ملوندی	امیرحسین ابومحبوب مهرداد ملوندی	سینا صالحی حسین بصیرترکمبور زهره آقامحمدی	یاسر راش امیرحسین مسلمی
مسئول درس	سیدسپهر متولیان	امیرمحمد کریمی	حسام نادری	آرش ظریف
مستندسازی	سمیه اسکندری	سجاد سلیمی	علیرضا همایون‌خواه	امیرحسین توحیدی
ویراستاران مستند	معصومه صنعت‌کار سجاد سلیمی احسان میرزینلی	معصومه صنعت‌کار مهسا محمدنیا فرشته کمبرانی	پرهام مهرآرا مهدی صالحی	آرمان ستاری آتیلا ذاکری محسن دستجردی

گروه فنی و تولید اختصاصی

مدیر گروه	مهرداد ملوندی	
مسئول دفترچه	نرگس غنی زاده	
گروه مستندسازی	مدیر گروه: محیا اصغری	مسئول دفترچه: الهه شهبازی
حروف‌نگار و صفحه‌آرا	فرزانه فتح اله‌زاده	
ناظر چاپ	سوران نعیمی	

گروه آزمون

بنیاد علمی آموزشی قلم‌چی (وقف عام)

دفتر مرکزی: خیابان انقلاب بین صبا و فلسطین – پلاک ۹۲۳ – کانون فرهنگی آموزش – تلفن: ۶۴۶۳-۰۲۱

حسابان ۱

۱- **گزینهٔ «۱»** *(سراسری ریاضی- ۹۳)*

صورت و مخرج کسر، مجموع جملات دو دنبالهٔ هندسی هستند.

$$A=\frac{a^{11}+a^{10}+a^9+\ldots+a+1}{a^9+a^6+a^3+1}\xrightarrow[t_2=1\ ,\ r_2=a^3]{t_1=1\ ,\ r_1=a}\frac{\frac{1(1-a^{12})}{1-a}}{\frac{1(1-(a^3)^4)}{1-a^3}}$$

$$=\frac{1-a^3}{1-a}=\frac{(1-a)(1+a+a^2)}{1-a}=1+a+a^2$$

با توجه به این‌که $a=\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$، داریم:

$$2a+1=\sqrt{5}\xrightarrow{\text{طرفین به توان دو}}(2a+1)^2=(\sqrt{5})^2$$

$$\Rightarrow 4a^2+4a+1=5\Rightarrow 4(a^2+a)=4\Rightarrow a^2+a=1$$

بنابراین حاصل عبارت A برابر است با: $A=\underbrace{a+a^2}_{1}+1=1+1=2$

(حسابان ۱- جبر و معادله؛ صفحه‌های ۴ تا ۶)

۲- **گزینهٔ «۱»** *(افشین خاصه‌خان)*

برای اینکه معادله جواب داشته باشد، باید $k>0$ باشد، زیرا در غیر این صورت بر اساس دامنه متغیر x، معادله جواب نخواهد داشت. حال برای $k>0$ داریم:

$$\sqrt{x+1}=\sqrt{k}\sqrt{x}-\sqrt{x}=(\sqrt{k}-1)\sqrt{x}$$

طرفین تساوی را به توان دو می‌رسانیم:

$$x+1=(\sqrt{k}-1)^2x\Rightarrow((\sqrt{k}-1)^2-1)x=1$$

$$\Rightarrow x=\frac{1}{(\sqrt{k}-1)^2-1}$$

دامنه جواب بازهٔ $[0,+\infty)$ است، پس جواب بالا باید نامنفی باشد:

$$\Rightarrow(\sqrt{k}-1)^2>1\Rightarrow\begin{cases}\sqrt{k}-1>1\Rightarrow\sqrt{k}>2\Rightarrow k>4\\ \sqrt{k}-1<-1\Rightarrow\sqrt{k}<0 \quad \text{غ ق ق}\end{cases}$$

حدود $k>4$ قابل قبول است و ۴ مقدار طبیعی برای k قابل قبول نیست.

(حسابان ۱- جبر و معادله؛ صفحه‌های ۲۰ و ۲۱)

۳- **گزینهٔ «۲»** *(احسان غنی‌زاده)*

با توجه به تعریف دامنهٔ تابع fof داریم:

$$D_{fof}=\{x\mid x\in D_f\ ,\ f(x)\in D_f\}$$

دامنهٔ تابع f برابر است با: $f(x)=\sqrt{x}-x^2\Rightarrow D_f=[0\ ,+\infty)$

$$\Rightarrow D_{fof}:\begin{cases}1)\ x\in[0\ ,+\infty)\\ 2)\sqrt{x}-x^2\geq 0\Rightarrow\sqrt{x}\geq x^2\Rightarrow 0\leq x\leq 1\end{cases}$$

$$\xrightarrow{\text{اشتراک}}D_{fof}=[0\ ,1]$$

پس دامنهٔ fof شامل ۲ عدد صحیح است.

(حسابان ۱- تابع؛ صفحه‌های ۶۶ تا ۷۰)

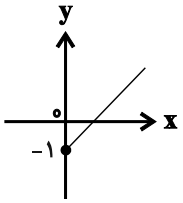
۴- **گزینهٔ «۴»** *(حمید علیزاده)*

$$f(x)=\sqrt{x+1}=y\Rightarrow x+1=y^2\Rightarrow x=y^2-1$$

$$\Rightarrow f^{-1}(x)=x^2-1$$

برد تابع f، دامنهٔ f^{-1} است، پس چون $\sqrt{x+1}\geq 0$ است، پس دامنهٔ $f^{-1}(x)$ برابر $x\geq 0$ می‌باشد. $f^{-1}(x)=x^2-1\ ,\ x\geq 0$

$$y=\frac{f^{-1}(x)}{g(x)}=\frac{x^2-1}{x+1}=\frac{(x-1)(x+1)}{x+1}=x-1\ ,\ x\geq 0$$



$$\Rightarrow R_y=[-1,+\infty)$$

(حسابان ۱- تابع؛ صفحه‌های ۴۶ تا ۴۸ و ۵۴ تا ۶۶)

۵- **گزینهٔ «۳»** *(پدرام نیکوکار)*

تابع $f(x)=5-3^{ax+b}$ از نقاط $(0\ ,\frac{14}{3})$ و $(1\ ,2)$ عبور می‌کند. بنابراین با جای‌گذاری این نقاط در تابع، مقادیر a و b را به دست می‌آوریم:

$$f(0)=\frac{14}{3}\Rightarrow 5-3^b=\frac{14}{3}\Rightarrow 3^b=\frac{1}{3}\Rightarrow b=-1$$

$$f(1)=2\Rightarrow 5-3^{a-1}=2\Rightarrow 3^{a-1}=3\Rightarrow a=2$$

$$\Rightarrow f(x)=5-3^{2x-1}\Rightarrow f(2)=5-3^3=5-27=-22$$

(حسابان ۱- توابع نمایی و لگاریتمی؛ صفحه‌های ۷۲ تا ۷۹)

۶- **گزینهٔ «۳»** *(رضا اسلامی)*

ابتدا عدد خواسته شده را ساده‌تر می‌نویسیم:

$$\log_6 0/25=\log_6\frac{1}{4}=\log_{2\times 3}2^{-2}=-2\log_{2\times 3}2$$

$$=\frac{-2}{\log_2 2\times 3}=\frac{-2}{1+\log_2 3}$$

از فرض داده شده، مقدار $\log_2 3$ را به دست می‌آوریم:

$$a=\frac{\log 12}{\log 18}=\frac{2\log 2+\log 3}{\log 2+2\log 3}$$

صورت و مخرج را بر $\log 2$ تقسیم می‌کنیم:

$$a=\frac{2+\log_2 3}{1+2\log_2 3}\Rightarrow\log_2 3=\frac{2-a}{2a-1}$$

پس جواب برابر است با:

$$\log_6 0/25=\frac{-2}{1+\log_2 3}=\frac{-2}{1+\frac{2-a}{2a-1}}=\frac{-2(2a-1)}{a+1}=\frac{2-4a}{a+1}$$

(حسابان ۱- توابع نمایی و لگاریتمی؛ صفحه‌های ۸۶ و ۸۷)

۷- **گزینهٔ «۲»** *(میلاد منصوری)*

$$\cos ۱۴۰^\circ = \cos\left(۱۸۰^\circ - ۴۰^\circ\right) = -\cos ۴۰^\circ$$

$$\cos ۲۳۰^\circ = \cos\left(۲۷۰^\circ - ۴۰^\circ\right) = -\sin ۴۰^\circ$$

$$\sin ۲۳۰^\circ = \sin\left(۲۷۰^\circ - ۴۰^\circ\right) = -\cos ۴۰^\circ$$

$$\cos ۱۳۰^\circ = \cos\left(۹۰^\circ + ۴۰^\circ\right) = -\sin ۴۰^\circ$$

عبارت مفروض به صورت زیر ساده می‌شود:

$$\frac{\cos ۴۰^\circ - ۲\sin ۴۰^\circ}{-۴\cos ۴۰^\circ - \sin ۴۰^\circ} = a \xrightarrow{+\cos ۴۰^\circ} \frac{۱ - ۲\tan ۴۰^\circ}{-۴ - \tan ۴۰^\circ} = a$$

$$\Rightarrow ۱ - ۲\tan ۴۰^\circ = -۴a - a\tan ۴۰^\circ \Rightarrow (a-۲)\tan ۴۰^\circ = -۴a - ۱$$

$$\Rightarrow \tan ۴۰^\circ = \frac{۴a+۱}{۲-a}$$

(حسابان ۱- مثلثات؛ صفحه‌های ۹۸ تا ۱۰۴)

۸- **گزینهٔ «۲»** *(علی آزاد)*

با توجه به رابطهٔ داده شده خواهیم داشت:

$$\sin x + \sqrt{۳}\cos x = ۲\left(\frac{۱}{۲}\sin x + \frac{\sqrt{۳}}{۲}\cos x\right)$$

$$= ۲\left(\sin\frac{\pi}{۶}\sin x + \cos\frac{\pi}{۶}\cos x\right) = ۲\left(\cos\left(x - \frac{\pi}{۶}\right)\right) = -\frac{\sqrt{۵}}{۲}$$

$$\Rightarrow \cos\left(x - \frac{\pi}{۶}\right) = -\frac{\sqrt{۵}}{۴}$$

$$\cos ۲x + \sqrt{۳}\sin ۲x = ۲\left(\frac{۱}{۲}\cos ۲x + \frac{\sqrt{۳}}{۲}\sin ۲x\right)$$

$$= ۲\left(\cos\frac{\pi}{۳}\cos ۲x + \sin\frac{\pi}{۳}\sin ۲x\right) = ۲\left(\cos\left(۲x - \frac{\pi}{۳}\right)\right)$$

$$= ۲\cos\left(۲\left(x - \frac{\pi}{۶}\right)\right)$$

براساس رابطهٔ $\cos ۲\alpha = ۲\cos^۲\alpha - ۱$ خواهیم داشت:

$$۲\cos\left(۲\left(x - \frac{\pi}{۶}\right)\right) = ۲\left(۲\cos^۲\left(x - \frac{\pi}{۶}\right) - ۱\right) = ۲\left(۲\times\frac{۵}{۱۶} - ۱\right) = -\frac{۳}{۴}$$

(حسابان ۱- مثلثات؛ صفحه‌های ۱۱۰ تا ۱۱۲)

۹- **گزینهٔ «۴»** *(علی آزاد)*

$$\lim_{x\to -۱}\frac{۲x^۳ + ax^۲ + x + b}{x^۲ - x - ۲} = ۱$$

با توجه به اینکه حد مخرج کسر صفر می‌باشد، می‌بایست $x = -۱$ ریشهٔ صورت کسر نیز باشد.

$$۲(-۱)^۳ + a(-۱)^۲ + (-۱) + b = ۰ \Rightarrow a + b = ۳$$

$$\begin{array}{r|l} ۲x^۳ + ax^۲ + x + b & x + ۱ \\ \hline -(۲x^۳ + ۲x^۲) & ۲x^۲ + (a-۲)x + (۳-a) \\ \hline (a-۲)x^۲ + x + b & \\ -((a-۲)x^۲ + (a-۲)x) & \\ \hline (۳-a)x + b & \\ -((۳-a)x + (۳-a)) & \\ \hline a + b - ۳ = ۰ & \end{array}$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to -۱}\frac{۲x^۳ + ax^۲ + x + b}{x^۲ - x - ۲}$$

$$= \lim_{x\to -۱}\frac{(x+۱)(۲x^۲ + (a-۲)x + (۳-a))}{(x+۱)(x-۲)}$$

$$= \frac{۲ - a + ۲ + ۳ - a}{-۳} = ۱ \Rightarrow a = ۵ \Rightarrow b = -۲ \Rightarrow ۲a + b = ۸$$

(حسابان ۱- حد و پیوستگی؛ صفحه‌های ۱۳۰ تا ۱۳۶ و ۱۴۱ تا ۱۴۴)

۱۰- **گزینهٔ «۴»** *(کاظم اجلالی)*

مقدار تابع و حدود چپ و راست را حساب می‌کنیم:

$$f\left(\frac{\pi}{۶}\right) = b[۴\sin\frac{\pi}{۶}] + [\frac{-\pi}{\frac{\pi}{۶}}] = ۲b - ۶$$

$$\lim_{x\to \frac{\pi}{۶}^-} f(x) = \lim_{x\to \frac{\pi}{۶}^-}\left(b[۴\sin x] + [-\frac{\pi}{x}]\right) = b - ۷$$

$$\lim_{x\to \frac{\pi}{۶}^+} f(x) = \lim_{x\to \frac{\pi}{۶}^+}\frac{a\sin ۶x}{۶x - \pi} = \lim_{x\to \frac{\pi}{۶}^+}\frac{a\sin(\pi - ۶x)}{-(\pi - ۶x)} = -a$$

پس برای پیوستگی در $x = \frac{\pi}{۶}$ ، سه مقدار بالا باید برابر باشند:

$$\Rightarrow \begin{cases} ۲b - ۶ = b - ۷ \Rightarrow b = -۱ \\ b - ۷ = -a \Rightarrow a = ۸ \end{cases} \Rightarrow a - b = ۹$$

توجه: همواره $\sin\theta = \sin(\pi - \theta)$ برقرار است.

(حسابان ۱- حد و پیوستگی؛ صفحه‌های ۱۴۵ تا ۱۵۱)

ریاضی ۱

۱۱- **گزینهٔ «۱»** *(مصطفی محمدی‌کوثر)*

برای $n=2$ داریم $a_2 = a_{2-1} + 2(2) - 1$ که $a_1 = 2$ را نتیجه می‌دهد.

برای $n=3$ داریم $a_3 = a_{3-1} + 2(3) - 1$ که $a_3 = 10$ را نتیجه می‌دهد.

برای $n=4$ داریم $a_4 = a_{4-1} + 2(4) - 1$ که $a_4 = 17$ را نتیجه می‌دهد.

با توجه به جملات دنباله ... $2,5,10,17,...$ متوجه می‌شویم جملات دنبالهٔ $a_n = n^2 + 1$ را نمایش می‌دهد که $a_{17} = 17^2 + 1$ است که $a_{17} = 290$ را نتیجه می‌دهد که جمع ارقام آن برابر ۱۱ می‌باشد.

(ریاضی ۱- مجموعه، الگو و دنباله؛ صفحه‌های ۱۴ تا ۲۰)

۱۲- **گزینهٔ «۳»** *(احمد مهرابی)*

$$a_1, \underbrace{\overset{a_2}{\uparrow}, __, ..., \overset{a_{n+1}}{\uparrow}}_{n \text{ تا واسطه هندسی}}, a_{n+2}$$

$$\frac{a_{n+1}}{a_2} = \frac{a_1 r^n}{a_1 r} = r^{n-1} = 3125 = 5^5$$

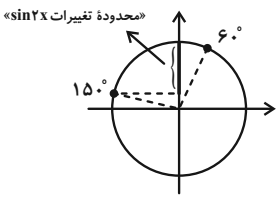
$$\xrightarrow{r=5} n-1=5 \Rightarrow n=6$$

(ریاضی ۱- مجموعه، الگو و دنباله؛ صفحه‌های ۲۵ تا ۲۷)

۱۳- **گزینهٔ «۱»** *(سیاد داوطلب)*

$$30^\circ < x < 75^\circ \xrightarrow{\times 2} 60^\circ < 2x < 150^\circ$$

با توجه به دایرهٔ مثلثاتی، وقتی از زاویهٔ ۶۰ تا ۱۵۰ درجه را طی می‌کنیم حدود مقادیر $\sin 2x$، بازهٔ $(\frac{1}{2}, 1]$ است.



$$60^\circ < 2x < 150^\circ \Rightarrow \frac{1}{2} < \sin 2x \le 1$$

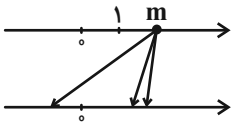
$$\Rightarrow \frac{1}{2} < \frac{2m-1}{3} \le 1 \xrightarrow{\times 3} \frac{3}{2} < 2m-1 \le 3$$

$$\xrightarrow{+1} \frac{5}{2} < 2m \le 4 \xrightarrow{+2} \frac{5}{4} < m \le 2$$

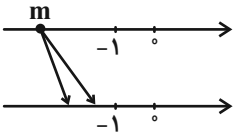
(ریاضی ۱- مثلثات؛ صفحه‌های ۳۶ تا ۳۹)

۱۴- **گزینهٔ «۳»** *(امیر محمودیان)*

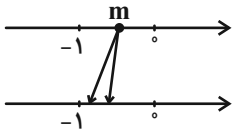
اگر $m > 1$، همهٔ ریشه‌هایش از خودش کوچک‌تر خواهند بود:



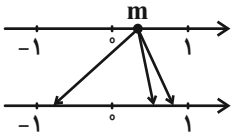
اگر $m < -1$، ریشهٔ زوج ندارد و ریشه‌های فرد عدد m نیز از خود عدد، بزرگ‌تر خواهند بود:



اگر $-1 < m < 0$، ریشهٔ زوج ندارد و ریشه‌های فرد عدد m نیز از خود عدد، کوچک‌تر خواهند بود:



اما $0 < m < 1$، دو ریشهٔ زوج دارد که یکی مثبت و دیگری منفی است. ریشه‌های مثبت از خود عدد بزرگ‌ترند:



بنابراین با توجه به شکل داده شده در سؤال، $0 < m < 1$ است و a ریشهٔ زوج و منفی عدد m است. برای $0 < m < 1$ داریم:

$$m < \sqrt{m} < \sqrt[3]{m} < \sqrt[4]{m} < ...$$

پس موارد «پ»و «ت» قطعاً نادرست است و بقیهٔ موارد می‌توانند درست باشند.

(ریاضی ۱- توان‌های گویا و عبارت‌های جبری؛ صفحه‌های ۴۸ تا ۵۸)

۱۵- **گزینهٔ «۲»** *(حمید علیزاده)*

چون در دو طرف $x=-2$ تغییر علامت وجود دارد، پس $x=-2$ ریشهٔ ساده عبارت P است و باید عبارت ax^2+3x+b را صفر کند. همچنین چون در دو طرف $x=c$ تغییر علامتی وجود ندارد، پس ریشهٔ مضاعف عبارت P است و باید ریشهٔ عبارت ax^2+3x+b با ریشهٔ عبارت $2x-1$ یعنی $x=\frac{1}{2}$ یکسان باشد. پس $x=\frac{1}{2}$ نیز باید عبارت ax^2+3x+b را صفر کند.

$$\Rightarrow c = \frac{1}{2}$$

$$ax^2+3x+b=0 \begin{cases} \xrightarrow{x=-2} 4a+b=6 \\ \xrightarrow{x=\frac{1}{2}} \frac{1}{4}a+b=-\frac{3}{2} \end{cases} \xrightarrow{\text{از حل دستگاه}} \begin{cases} a=2 \\ b=-2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow abc = (2)(-2)(\frac{1}{2}) = -2$$

(ریاضی ۱- معادله‌ها و نامعادله‌ها؛ صفحه‌های ۸۳ تا ۸۸)

۱۶- **گزینهٔ «۱»** *(حمید علیزاده)*

طبق گفتهٔ مسأله، عرض رأس سهمی برابر ۱ است. پس:

$$y_S = \frac{۴ac - b^۲}{۴a} = ۱ \Rightarrow \frac{۸a - ۴}{۴a} = ۱ \Rightarrow ۸a - ۴ = ۴a$$
$$\Rightarrow ۴a = ۴ \Rightarrow a = ۱$$
$$y = x^۲ + ۲x + ۲ = (x^۲ + ۲x + ۱) + ۱ = (x+۱)^۲ + ۱$$
$$a = ۱, h = -۱, k = ۱ \Rightarrow a + h = ۰$$

(ریاضی ۱- معادله‌ها و نامعادله‌ها؛ صفحه‌های ۷۸ تا ۸۲)

۱۷- **گزینهٔ «۲»** *(امیر محمودیان)*

دو زوج مرتب با مؤلفهٔ اول یکسان $x + ۲$ وجود دارد، پس برای تابع شدن رابطه، باید مؤلفه‌های دوم آن‌ها برابر باشد:

$$x^۳ = x^۲ + ۲x \Rightarrow x^۳ - x^۲ - ۲x = ۰ \Rightarrow x(x^۲ - x - ۲) = ۰$$
$$\Rightarrow x(x-۲)(x+۱) = ۰ \Rightarrow x = ۰ \text{ یا } x = -۱ \text{ یا } x = ۲$$

به ازای $x = ۰$ رابطه را بازنویسی می‌کنیم:

تابع است. $\{(۲,۰),(۰,۰),(۲,۰),(۲,۰)\}$

به ازای $x = -۱$:

تابع نیست. $\{(۱,-۱),(۱,۱),(۱,-۱),(۴,-۱)\}$

به ازای $x = ۲$:

تابع نیست. $\{(۴,۸),(-۲,۴),(۴,۸),(-۲,۲)\}$

پس تنها به ازای $x = ۰$ تابع است.

(ریاضی ۱- تابع؛ صفحه‌های ۹۵ تا ۱۰۰)

۱۸- **گزینهٔ «۳»** *(جهانبخش نیکنام)*

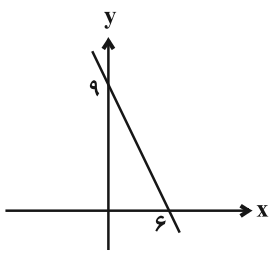
تابع خطی است، پس ضریب $x^۲$ باید صفر باشد:

$$k^۲ - ۱۶ = ۰ \Rightarrow k = \pm ۴$$

اما $k = ۴$ غیرقابل‌قبول است، زیرا مخرج ضریب x را صفر می‌کند.

$$\Rightarrow f(x) = -\frac{۳}{۲}x + ۹$$

نمودار این خط به صورت زیر است:



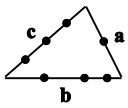
برای اینکه f با دامنه $\mathbb{R} - [a,b]$ فقط از دو ربع دستگاه مختصات عبور کند، باید قسمتی را که نمودار تابع f در ربع اول قرار دارد، حذف کنیم، یعنی باید $a \leq ۰$ و $b \geq ۶$ باشد. پس کم‌ترین مقدار $b - a$ زمانی رخ می‌دهد که $b = ۶$ و $a = ۰$ باشد:

$$(b-a)_{min} = ۶$$

(ریاضی ۱- تابع؛ صفحهٔ ۱۰۳)

۱۹- **گزینهٔ «۴»** *(علی شهرابی)*

در کل سه حالت برای تشکیل یک چهارضلعی محدب وجود دارد که عبارتند از:



حالت ۱): یک رأس از ضلع a، یک رأس از ضلع b و دو رأس از ضلع c انتخاب شود:

$$\binom{۱}{۱}\binom{۳}{۱}\binom{۳}{۲} = ۹$$

حالت ۲): یک رأس از ضلع a، دو رأس از ضلع b و یک رأس از ضلع c انتخاب شود:

$$\binom{۱}{۱}\binom{۳}{۲}\binom{۳}{۱} = ۹$$

حالت ۳): دو رأس از ضلع b و دو رأس از ضلع c انتخاب شود:

$$\binom{۳}{۲}\binom{۳}{۲} = ۹$$

بنابراین تعداد چهارضلعی‌های محدب حاصل برابر است با: $۹+۹+۹ = ۲۷$

(ریاضی ۱- شمارش، بدون شمردن؛ صفحه‌های ۱۱۹ تا ۱۲۶ و ۱۳۳ تا ۱۴۰)

۲۰- **گزینهٔ «۴»** *(زهره رامشینی)*

یکی دیگر از برادرها (۱ حالت) — جایگشت سه نفر دیگر — یکی از ۲ برادر (۲ حالت)

تعداد حالات مطلوب: $n(A) = ۲ \times ۳! \times ۱ = ۱۲$

جایگشت بین ۵ نفر: $n(S) = ۵!$

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{۱۲}{۵!} = \frac{۱۲}{۱۲۰} = \frac{۱}{۱۰}$$

(ریاضی ۱- آمار و احتمال؛ صفحه‌های ۱۴۶ تا ۱۵۱)

هندسه ۲

۲۱- **گزینهٔ «۳»** *(امیرحسین ابومحبوب)*

طول هر ضلع n ضلعی منتظم محیط بر دایره‌ای به شعاع r از رابطهٔ $a = 2r\tan\frac{180^\circ}{n}$ به دست می‌آید. بنابراین با فرض $n = 6$ و $a = 4\sqrt{3}$ داریم:

$$4\sqrt{3} = 2r \times \tan 30^\circ \Rightarrow 2\sqrt{3} = r \times \frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow r = 6$$

مساحت دایرهٔ محاطی : $S = \pi r^2 = 36\pi$

(هندسه ۲- دایره؛ تمرین ۷ صفحهٔ ۳۰)

۲۲- **گزینهٔ «۴»** *(امیرحسین ابومحبوب)*

اگر طول کمان روبه‌رو به زاویهٔ 30° در دایرهٔ C را با L و طول کمان روبه‌رو به زاویهٔ 60° در دایرهٔ C' را با L' نمایش دهیم، آنگاه داریم:

$$\frac{L}{L'} = \frac{\frac{\pi R \times 30^\circ}{180^\circ}}{\frac{\pi R' \times 60^\circ}{180^\circ}} = \frac{\frac{R}{6}}{\frac{R'}{3}} \Rightarrow 3 = \frac{R}{2R'} \Rightarrow \frac{R}{R'} = 6$$

$$\Rightarrow \frac{S}{S'} = \frac{\pi R^2}{\pi R'^2} = \left(\frac{R}{R'}\right)^2 = 36$$

(هندسه ۲- دایره؛ صفحهٔ ۱۲)

۲۳- **گزینهٔ «۴»** *(محمد خندان)*

$$\hat{B} = 2\hat{A} \Rightarrow \frac{\overset{\frown}{TT'}}{2} = 2 \times \frac{\overset{\frown}{TBT'} - \overset{\frown}{TT'}}{2}$$

$$\Rightarrow \overset{\frown}{TT'} = 2(\overset{\frown}{TBT'} - \overset{\frown}{TT'}) \Rightarrow \overset{\frown}{TT'} = \frac{2}{3}\overset{\frown}{TBT'}$$

اگر $\overset{\frown}{TBT'} = 3x$ باشد، آنگاه $\overset{\frown}{TT'} = 2x$ و داریم:

$$\overset{\frown}{TT'} + \overset{\frown}{TBT'} = 360^\circ \Rightarrow 2x + 3x = 360^\circ \Rightarrow 5x = 360^\circ$$

$$\Rightarrow x = 72^\circ \Rightarrow \begin{cases} \overset{\frown}{TT'} = 2 \times 72^\circ = 144^\circ \\ \overset{\frown}{TBT'} = 3 \times 72^\circ = 216^\circ \end{cases}$$

$$BT = BT' \Rightarrow \overset{\frown}{BT} = \overset{\frown}{BT'} = \frac{\overset{\frown}{TBT'}}{2} = 108^\circ$$

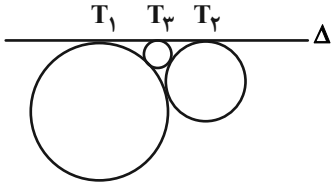
زاویهٔ ATB زاویهٔ ظلی است، پس داریم:

$$\hat{ATB} = \frac{\overset{\frown}{BT'} + \overset{\frown}{TT'}}{2} = \frac{108^\circ + 144^\circ}{2} = 126^\circ$$

(هندسه ۲- دایره؛ صفحه‌های ۱۳ تا ۱۶)

۲۴- **گزینهٔ «۲»** *(سوگند روشنی)*

طول مماس مشترک خارجی دو دایره مماس خارج به شعاع‌های R و R' از رابطهٔ $2\sqrt{RR'}$ به دست می‌آید، بنابراین در صورتی که شعاع کوچک‌ترین دایره برابر r باشد، داریم:



$$T_1T_2 = T_1T_3 + T_3T_2$$

$$2\sqrt{18 \times 2} = 2\sqrt{18r} + 2\sqrt{2r}$$

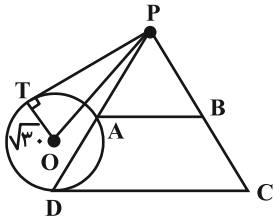
$$\xrightarrow{\div 2} 6 = 3\sqrt{2} \times \sqrt{r} + \sqrt{2} \times \sqrt{r}$$

$$\Rightarrow 6 = 4\sqrt{2} \times \sqrt{r} \Rightarrow \sqrt{r} = \frac{6}{4\sqrt{2}} \Rightarrow r = \frac{9}{8}$$

(هندسه ۲- دایره؛ صفحه‌های ۲۱ و ۲۲)

۲۵- **گزینهٔ «۱»** *(سرژ یقیازاریان‌تبریزی)*

طبق تعمیم قضیهٔ تالس در مثلث PCD داریم:



$$AB \parallel CD \Rightarrow \frac{PA}{PD} = \frac{AB}{CD}$$

$$\Rightarrow \frac{PA}{PA+7} = \frac{10}{15} = \frac{2}{3}$$

$$\Rightarrow 3PA = 2PA + 14 \Rightarrow PA = 14$$

طبق روابط طولی در دایره داریم: $PT^2 = PA \times PD = 14 \times 21$

حال طبق فیثاغورس داریم:

$$PO = \sqrt{PT^2 + OT^2} = \sqrt{294 + 30} = 18$$

(هندسه ۲- دایره؛ صفحه‌های ۱۸ و ۱۹)

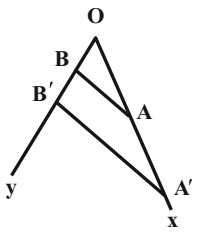
۲۶- **گزینهٔ «۴»** *(سرژ یقیازاریان‌تبریزی)*

$AC = BC$ و $A\hat{C}B = 60^\circ$ است، بنابراین نقطهٔ B دوران یافتهٔ نقطهٔ A تحت دوران 60° در خلاف جهت حرکت عقربه‌های ساعت و به مرکز C است. به‌طور مشابه $DC = EC$ و $D\hat{C}E = 60^\circ$ است، بنابراین نقطهٔ E دوران یافتهٔ نقطهٔ D تحت دوران 60° در خلاف جهت حرکت عقربه‌های ساعت و به مرکز C است. پس پاره‌خط BE نیز دوران یافتهٔ پاره‌خط AD با زاویهٔ 60° و به مرکز C می‌باشد.

(هندسه ۲- تبدیل‌های هندسی و کاربردها؛ صفحه‌های ۴۲ و ۴۳)

۲۷- **گزینهٔ «۱»** *(علی ایمانی)*

طبق فرض داریم:



$$OA' = ۳OA = ۳\times۲ = ۶$$

$$OB' = ۳OB = ۳\times۱ = ۳$$

$$S_{AA'B'B} = S_{OA'B'} - S_{OAB}$$

$$= \frac{۱}{۲}OA'\times OB'\times \sin ۳۰^\circ - \frac{۱}{۲}OA\times OB\times \sin ۳۰^\circ$$

$$= \frac{۱}{۲}\times۶\times۳\times\frac{۱}{۲} - \frac{۱}{۲}\times۲\times۱\times\frac{۱}{۲} = \frac{۹}{۲} - \frac{۱}{۲} = ۴$$

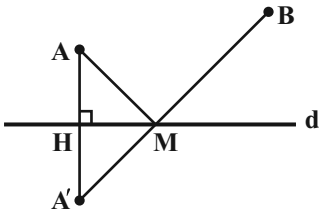
(هندسه ۲- تبدیل‌های هندسی و کاربردها؛ صفحه‌های ۴۳ تا ۴۸)

۲۸- **گزینهٔ «۲»** *(امیر وفائی)*

طبق روش هرون برای محاسبهٔ طول کوتاه‌ترین مسیر، کافی است نقطهٔ A' (بازتاب A نسبت به خط d) را یافته و آن را به B وصل کنیم. محل تلاقی $A'B$ و خط d، همان نقطهٔ مورد نظر M است که کوتاه‌ترین مسیر AMB را ایجاد می‌کند و طول این مسیر دقیقاً برابر طول پاره‌خط $A'B$ است.

$$m_d = -\frac{۱}{۴} \Rightarrow m_{AA'} = ۴$$

معادلهٔ AA': $y - ۲ = ۴(x-۲) \Rightarrow y = ۴x - ۶$



$$۸y + ۲x - ۳ = ۰ \Rightarrow ۸(۴x-۶) + ۲x - ۳ = ۰$$

$$\Rightarrow ۳۴x = ۵۱ \Rightarrow x = \frac{۵۱}{۳۴} = \frac{۳}{۲} \Rightarrow y = ۰$$

بنابراین $H(\frac{۳}{۲},۰)$ تصویر قائم A روی خط d است و داریم:

$$H = \frac{A + A'}{۲} \Rightarrow A' = ۲H - A = (۳,۰) - (۲,۲) = (۱,-۲)$$

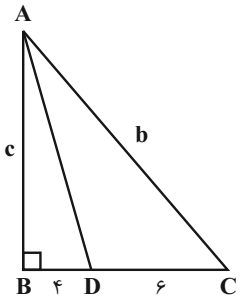
طول کوتاه‌ترین مسیر $AMB = A'B = \sqrt{(۷-۱)^۲ + (۶+۲)^۲}$

$$= \sqrt{۱۰۰} = ۱۰$$

(هندسه ۲- تبدیل‌های هندسی و کاربردها؛ صفحه‌های ۵۲ و ۵۳)

۲۹- **گزینهٔ «۴»** *(علی ایمانی)*

طبق قضیهٔ نیمسازهای زوایای داخلی داریم:



$$\frac{AB}{AC} = \frac{BD}{DC} \Rightarrow \frac{c}{b} = \frac{۴}{۶} \Rightarrow c = ۴x, b = ۶x$$

$$\overset{\Delta}{ABC}: b^۲ = c^۲ + ۱۰^۲ \Rightarrow ۳۶x^۲ = ۱۶x^۲ + ۱۰۰$$

$$\Rightarrow ۲۰x^۲ = ۱۰۰ \Rightarrow x^۲ = ۵ \Rightarrow x = \sqrt{۵} \Rightarrow b = ۶\sqrt{۵}$$

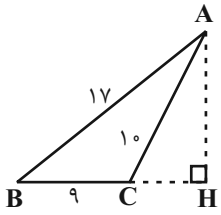
از آنجایی که میانه وارد بر وتر نصف وتر است پس:

$$BM = \frac{b}{۲} = \frac{۶\sqrt{۵}}{۲} = ۳\sqrt{۵}$$

(هندسه ۲- روابط طولی در مثلث؛ صفحه‌های ۶۸ تا ۷۰)

۳۰- **گزینهٔ «۲»** *(سیدمحمدرضا حسینی‌فرد)*

ابتدا به کمک رابطهٔ هرون، مساحت مثلث ABC را به دست می‌آوریم:



$$P = \frac{۱۷+۱۰+۹}{۲} = ۱۸$$

$$\Rightarrow S = \sqrt{۱۸(۱۸-۱۷)(۱۸-۱۰)(۱۸-۹)} = \sqrt{۱۸\times۸\times۹} = ۳۶$$

$$S = \frac{AH\times BC}{۲} \Rightarrow ۳۶ = \frac{AH\times۹}{۲} \Rightarrow AH = ۸$$

$$\overset{\Delta}{ACH} \xrightarrow{\text{فیثاغورس}} CH = \sqrt{AC^۲ - AH^۲} = \sqrt{۱۰^۲ - ۸^۲} = ۶$$

(هندسه ۲- روابط طولی در مثلث؛ صفحه‌های ۷۱ و ۷۲)

آمار و احتمال

۳۱- **گزینهٔ «۳»** *(محسن بهرام‌پور)*

به بررسی موارد می‌پردازیم:

الف) گزاره برای $x=-1$ درست نیست زیرا: $\frac{-1}{2\times-1+1}=1>\frac{1}{2}$

ب) تساوی $\frac{x^2-1}{x+1}=x-1$ به ازاء $x\neq-1$ همواره برقرار است. پس گزاره‌نما در دامنه گفته شده درست است.

پ) برای هر $x\in\mathbb{R}$ داریم: $x^2+2x+2=(x+1)^2+1\geq 0$

پس گزاره‌نما در دامنهٔ گفته شده درست است.

(آمار و احتمال- آشنایی با مبانی ریاضیات؛ صفحه‌های ۳ و ۴)

۳۲- **گزینهٔ «۳»** *(رضا توکلی)*

در گزینهٔ «۳» به ازاء $x=1$ عدد طبیعی کوچک‌تر از آن پیدا نمی‌شود و در گزینه‌های دیگر داریم:

گزینهٔ «۱»: اگر $y=x+1$ باشد، همواره درست است.

گزینهٔ «۲»: اگر $y=x$ باشد. همواره درست است.

گزینهٔ «۴»: اگر $y=x$ باشد. همواره درست است.

(آمار و احتمال- آشنایی با مبانی ریاضیات؛ صفحه‌های ۱۱ تا ۱۴)

۳۳- **گزینهٔ «۲»** *(امیرحسین ابومحبوب)*

$$\frac{n(B\times C)}{n(A\times B)}=\frac{1}{2}\Rightarrow\frac{n(B)\times n(C)}{n(A)\times n(B)}=\frac{1}{2}\Rightarrow n(A)=2n(C)$$

اگر فرض کنیم $n(C)=x$ باشد، آن‌گاه $n(A)=2x$ و $n(B)=2x+2$ است و در نتیجه داریم:

$$n(A^2)-n(B\times C)=12\Rightarrow(n(A))^2-n(B)\times n(C)=12$$

$$\Rightarrow 2x^2-2x-12=0\Rightarrow x^2-x-6=0\Rightarrow(x-3)(x+2)=0$$

$$\Rightarrow\begin{cases}x=3\\ x=-2\ \text{غ ق ق}\end{cases}$$

بنابراین $n(C)=3$ و $n(A)=2\times3=6$ است و داریم:

$$n(A\times C)=n(A)\times n(C)=6\times3=18$$

(آمار و احتمال - آشنایی با مبانی ریاضیات؛ صفحه‌های ۳۰ تا ۳۳)

۳۴- **گزینهٔ «۱»** *(امیرحسین ابومحبوب)*

در این آزمایش تصادفی، فضای نمونه $S=\{1,2,3,4,5,6\}$ و پیشامد A به صورت $A=\{3,6\}$ است.

هر پیشامدی که فاقد هر دو عضو ۳ و ۶ باشد، با A ناسازگار است. تعداد چنین پیشامدهایی برابر تعداد زیرمجموعه‌های مجموعهٔ $\{1,2,4,5\}$، یعنی برابر $2^4=16$ است.

(آمار و احتمال- احتمال؛ صفحه‌های ۳۹ تا ۴۳)

۳۵- **گزینهٔ «۳»** *(جواد حاتمی)*

فرض کنید مجموعهٔ ۳ عدد انتخابی $\{A_1, A_2, A_3\}$ باشد. از بین $3!$ حالت جایگشت این اعداد فقط ۲ جایگشت $A_1<A_2<A_3$ و $A_1<A_3<A_2$ مورد قبول است. پس احتمال مطلوب برابر است با:

$$\frac{2}{3!}=\frac{1}{3}$$

(آمار و احتمال- احتمال؛ صفحه‌های ۴۰ تا ۴۳)

۳۶- **گزینهٔ «۱»** *(فرشاد فرامرزی)*

طبق فرض داریم:

شمارنده‌های طبیعی فرد ۱ $=\{1\}\rightarrow P(1)=x$

شمارنده‌های طبیعی فرد ۲ $=\{1\}\rightarrow P(2)=x$

شمارنده‌های طبیعی فرد ۳ $=\{1,3\}\rightarrow P(3)=4x$

شمارنده‌های طبیعی فرد ۴ $=\{1\}\rightarrow P(4)=x$

شمارنده‌های طبیعی فرد ۵ $=\{1,5\}\rightarrow P(5)=6x$

شمارنده‌های طبیعی فرد ۶ $=\{1,3\}\rightarrow P(6)=4x$

$$P(1)+P(2)+\ldots+P(6)=1$$

$$\Rightarrow x+x+4x+x+6x+4x=1\Rightarrow 17x=1\Rightarrow x=\frac{1}{17}$$

احتمال مورد نظر برابر است با:

$$P(\{2,3,5\})=P(2)+P(3)+P(5)=x+4x+6x=11x$$

$$\Rightarrow P(\{2,3,5\})=\frac{11}{17}$$

(آمار و احتمال- احتمال؛ صفحه‌های ۴۵ تا ۴۷)

۳۷- **گزینهٔ «۲»** (امیرمحمد کریمی)

$$\begin{cases} \text{احتمال انتخاب} \Rightarrow ۶ \text{ مهره : جعبهٔ اول} = \frac{\alpha}{۶} \\ \text{احتمال انتخاب} \Rightarrow ۴ \text{ مهره : جعبهٔ دوم} = \frac{\alpha}{۴} \end{cases} \Rightarrow \frac{\alpha}{۴}+\frac{\alpha}{۶}=۱ \Rightarrow \alpha=\frac{۱۲}{۵}$$

حال طبق قانون احتمال کل داریم:

$A_۱$: احتمال انتخاب جعبهٔ ۱

$A_۲$: احتمال انتخاب جعبهٔ ۲

B : احتمال دیدن مهرهٔ مشکی

$$P(B)=P(A_۱)P(B\mid A_۱)+P(A_۲)P(B\mid A_۲)$$

$$=\frac{\frac{۱۲}{۵}}{۶}\times\frac{۲}{۶}+\frac{\frac{۱۲}{۵}}{۴}\times\frac{۱}{۲}=\frac{۴}{۳۰}+\frac{۳}{۱۰}=\frac{۴+۹}{۳۰}=\frac{۱۳}{۳۰}$$

(آمار و احتمال- احتمال: صفحه‌های ۵۵ تا ۵۷)

۳۸- **گزینهٔ «۲»** (احمدرضا فلاح)

طبق نمودار درختی برای پرتاب تاس و حالت‌های مطلوب برای آنکه سکه ۳ بار رو بیاید داریم:

تاس
- ۳ ← $\frac{۱}{۶}$ ← ۳ رو در ۳ بار پرتاب سکه ← $\frac{\binom{۳}{۳}}{۲^۳}=\frac{۱}{۸}$
- ۴ ← $\frac{۱}{۶}$ ← ۳ رو در ۴ بار پرتاب سکه ← $\frac{\binom{۴}{۳}}{۲^۴}=\frac{۱}{۴}$
- ۵ ← $\frac{۱}{۶}$ ← ۳ رو در ۵ بار پرتاب سکه ← $\frac{\binom{۵}{۳}}{۲^۵}=\frac{۵}{۱۶}$
- ۶ ← $\frac{۱}{۶}$ ← ۳ رو در ۶ بار پرتاب سکه ← $\frac{\binom{۶}{۳}}{۲^۶}=\frac{۵}{۱۶}$

اگر پیشامد ۳ بار رو آمدن سکه را با A و پیشامد ۵ آمدن تاس را با B نمایش دهیم، آنگاه طبق قانون احتمال کل و قانون بیز داریم:

$$P(A)=\frac{۱}{۶}(\frac{۱}{۸}+\frac{۱}{۴}+\frac{۵}{۱۶}+\frac{۵}{۱۶})=\frac{۱}{۶}\times\frac{۲+۴+۵+۵}{۱۶}=\frac{۱}{۶}\times۱=\frac{۱}{۶}$$

$$P(B\mid A)=\frac{P(B)P(A\mid B)}{P(A)}=\frac{\frac{۱}{۶}\times\frac{۵}{۱۶}}{\frac{۱}{۶}}=\frac{۵}{۱۶}$$

(آمار و احتمال- احتمال: صفحه‌های ۵۵ تا ۶۰)

۳۹- **گزینهٔ «۴»** (امیرحسین ابومحبوب)

مجموع فراوانی نسبی‌ها یک است. پس داریم:

$$a=۱-(۰/۱+۰/۱۵+۰/۲۵+۰/۳+۰/۱۵)\Rightarrow a=۰/۰۵$$

فرض کنید فراوانی داده‌ها را به ترتیب با $f_۱$ ، $f_۲$ ، ... و $f_۶$ و تعداد کل داده‌ها را با n نمایش دهیم. با توجه به اینکه برای دستهٔ i ام، $\frac{f_i}{n}$ برابر فراوانی نسبی آن دسته است، داریم:

$$\bar{x}=\frac{f_۱x_۱+f_۲x_۲+f_۳x_۳+f_۴x_۴+f_۵x_۵+f_۶x_۶}{n}$$

$$=\frac{f_۱}{n}x_۱+\frac{f_۲}{n}x_۲+\frac{f_۳}{n}x_۳+\frac{f_۴}{n}x_۴+\frac{f_۵}{n}x_۵+\frac{f_۶}{n}x_۶$$

$$=۰/۱\times۲+۰/۱۵\times۶+۰/۲۵\times۱۰+۰/۳\times۱۴+۰/۱۵\times۱۸+۰/۰۵\times۲۲$$

$$=۰/۲+۰/۹+۲/۵+۴/۲+۲/۷+۱/۱=۱۱/۶$$

(آمار و احتمال- آمار توصیفی: صفحه‌های ۸۰ و ۸۱)

۴۰- **گزینهٔ «۳»** (سوگند روشنی)

نکته: انحراف معیار n داده که تشکیل یک دنبالهٔ حسابی با قدرنسبت d می‌دهند، برابر است با: $\sigma=\sqrt{\frac{n^۲-۱}{۱۲}}\,|d|$

می‌دانیم انحراف معیار داده‌های $۲,۴,۶,۸,۱۰$، چون تشکیل دنباله حسابی با قدر نسبت ۲ می‌دهند، برابر است با:

$$\sigma=\sqrt{\frac{n^۲-۱}{۱۲}}\,|d|=\sqrt{\frac{۵^۲-۱}{۱۲}}\times۲=۲\sqrt{۲}$$

چون همه داده‌ها در m ضرب شده‌اند، انحراف معیار هم در $|m|$ ضرب می‌شود. بنابراین: $۲\sqrt{۲}\,|m|=۴\sqrt{۳}\xrightarrow{m>۰}m=\sqrt{۶}$

بنابراین داده‌های مفروض عبارتند از:

$$\sqrt{۶}m-۲\,,\,m^۲+۴\,,\,m^۲+۱۰\,,\,m^۴-۱۴ : ۴\,,۱۰\,,۱۶\,,۲۲$$

که چون تشکیل دنباله حسابی با $d=۶$ می‌دهند، داریم:

$$\sigma=\sqrt{\frac{n^۲-۱}{۱۲}}\times۶=\sqrt{\frac{۱۶-۱}{۱۲}}\times۶=\sqrt{\frac{۵}{۴}}\times۶=۳\sqrt{۵}$$

میانگین این داده‌ها برابر است با:

$$\bar{x}=\frac{۴+۱۰+۱۶+۲۲}{۴}=۱۳$$

ضریب تغییرات: $CV=\frac{\sigma}{\bar{x}}=\frac{۳\sqrt{۵}}{۱۳}$

(آمار و احتمال، آمار توصیفی: صفحه‌های ۸۷ تا ۹۱)

هندسه ۱

۴۱- **گزینهٔ «۲»** *(محمد کریمی)*

می‌دانیم اگر دو مثلث در یک رأس مشترک بوده و قاعدهٔ مقابل به این رأس آن‌ها روی یک خط راست باشد، نسبت مساحت‌های آن‌ها برابر نسبت اندازهٔ قاعده‌های آن‌هاست. بنابراین داریم:

$$\frac{S_{ABD}}{S_{ABC}}=\frac{BD}{BC}=\frac{۳}{۵} \quad (۱)$$

$$\frac{S_{AED}}{S_{ABD}}=\frac{AE}{AB}=\frac{۴}{۵} \quad (۲)$$

$$\frac{S_{DEF}}{S_{AED}}=\frac{FD}{AD}=\frac{۱}{۲} \quad (۳)$$

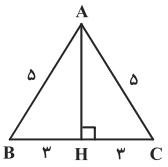
$$\xrightarrow{(۱),(۲),(۳)} \frac{S_{ABD}}{S_{ABC}}\times\frac{S_{AED}}{S_{ABD}}\times\frac{S_{DEF}}{S_{AED}}=\frac{۳}{۵}\times\frac{۴}{۵}\times\frac{۱}{۲}$$

$$\Rightarrow \frac{S_{DEF}}{S_{ABC}}=\frac{۶}{۲۵}$$

(هندسه ۱- قضیهٔ تالس، تشابه و کاربردهای آن؛ صفحه‌های ۳۰ تا ۳۳)

۴۲- **گزینهٔ «۲»** *(سامان اسپهرم)*

کافی است طول کوتاه‌ترین ارتفاع را در مثلث ABC به دست آوریم و سپس با استفاده از نسبت تشابه دو مثلث، مقدار مشابه را در مثلث $A'B'C'$ پیدا کنیم. می‌دانیم کوتاه‌ترین ارتفاع هر مثلث، ارتفاع وارد بر بزرگ‌ترین ضلع آن است، پس مطابق شکل داریم:



$$\overset{\Delta}{ABH}: AH^۲=AB^۲-BH^۲=۵^۲-۳^۲=۱۶\Rightarrow AH=۴$$

نسبت ارتفاع‌ها در دو مثلث متشابه، برابر نسبت تشابه دو مثلث است. از طرفی نسبت محیط‌ها در دو مثلث متشابه نیز با همین نسبت برابر است. با توجه به این‌که محیط مثلث ABC، برابر $۱۶=۵+۵+۶$ است، داریم:

$$\frac{AH}{A'H'}=\frac{\text{محیط } \overset{\Delta}{ABC}}{\text{محیط } \overset{\Delta}{A'B'C'}}\Rightarrow\frac{۴}{A'H'}=\frac{۱۶}{۵۶}\Rightarrow A'H'=۱۴$$

(هندسه ۱- قضیهٔ تالس، تشابه و کاربردهای آن؛ صفحه‌های ۴۵ تا ۴۷)

۴۳- **گزینهٔ «۴»** *(علی ایمانی)*

طبق قضیهٔ خطوط موازی و مورب، $B\hat{A}E=D\hat{C}E$ و $A\hat{B}E=C\hat{D}E$، پس دو مثلث ABE و CDE متشابه هستند و داریم:

$$\frac{S_{ABE}}{S_{CDE}}=\frac{۴}{۹}=k^۲\Rightarrow k=\frac{۲}{۳}\Rightarrow\begin{cases}AB=۲x\\CD=۳x\end{cases}$$

با فرض $CF=a$ و $BF=b$ داریم:

$$\overset{\Delta}{ABC}: EF\parallel AB\xrightarrow{\text{تعمیم قضیهٔ تالس}}\frac{EF}{AB}=\frac{CF}{CB}=\frac{a}{a+b}$$

$$\Rightarrow\frac{۶}{۲x}=\frac{a}{a+b}\xrightarrow{\text{تفضیل نسبت در مخرج}}\frac{۶}{۲x-۶}=\frac{a}{b} \quad (۱)$$

$$\overset{\Delta}{BCD}: EF\parallel DC\xrightarrow{\text{تعمیم قضیهٔ تالس}}\frac{EF}{CD}=\frac{BF}{BC}=\frac{b}{a+b}$$

$$\Rightarrow\frac{۶}{۳x}=\frac{b}{a+b}\xrightarrow{\text{تفضیل نسبت در مخرج}}\frac{۶}{۳x-۶}=\frac{b}{a} \quad (۲)$$

$$\xrightarrow{(۱),(۲)}\frac{۶}{۲x-۶}=\frac{۳x-۶}{۶}=\frac{x-۲}{۲}$$

$$\Rightarrow ۲x^۲-۱۰x+۱۲=۱۲\Rightarrow ۲x^۲-۱۰x=۰$$

$$\Rightarrow\begin{cases}x=۰ & \text{غ ق ق}\\x=۵\Rightarrow CD=۱۵\ ,\ AB=۱۰\end{cases}$$

$$AB+۲CD=۱۰+۳۰=۴۰$$

(هندسه ۱- قضیهٔ تالس، تشابه و کاربردهای آن؛ صفحه‌های ۳۴ تا ۳۸)

۴۴- **گزینهٔ «۳»** *(محمد صحت‌کار)*

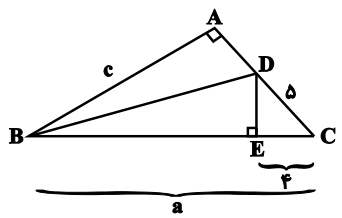
از D عمود DE را بر ضلع BC رسم می‌کنیم. D روی نیمساز زاویهٔ B واقع است. پس از دو ضلع آن به یک فاصله است. بنابراین:

$$\left.\begin{matrix}DE=DA\\DB=DB\\\hat{A}=\hat{E}=۹۰^\circ\end{matrix}\right\}\Rightarrow\overset{\Delta}{BAD}\cong\overset{\Delta}{BED}\Rightarrow BE=AB=c\ ,\ AD=DE$$

$$EC=BC-BE=a-c=۴$$

حال طبق قضیهٔ فیثاغورس داریم: $DE=\sqrt{DC^۲-EC^۲}=\sqrt{۵^۲-۴^۲}=۳$

$$\Rightarrow AD=DE=۳$$



(هندسه ۱- ترسیم‌های هندسی و استدلال؛ صفحه‌های ۱۱ و ۱۲)

۴۵- **گزینهٔ «۲»** *(نصیر محبی‌نژاد)*

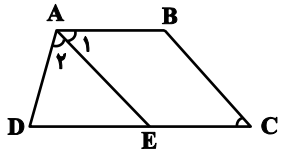
پاره‌خط AE را موازی BC رسم می‌کنیم. در نتیجه خواهیم داشت:

$$\hat{A}_1 = \hat{C}\ ,\ AB = EC\ ,\ AE = BC$$

$$\hat{A} > \hat{C} + \hat{D} \Rightarrow \hat{A}_1 + \hat{A}_2 > \hat{C} + \hat{D} \Rightarrow \hat{A}_2 > \hat{D}$$

$$\overset{\Delta}{ADE} : \hat{A}_2 > \hat{D} \Rightarrow DE > AE$$

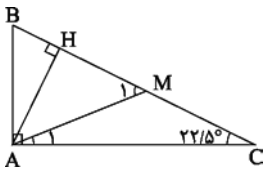
$$\xrightarrow{AB=EC} DE + EC > AE + AB \Rightarrow DC > BC + AB$$



(هندسه ۱- ترسیم‌های هندسی و استدلال؛ صفحه‌های ۲۱ و ۲۲)

۴۶- **گزینهٔ «۳»** *(سیدسروش کریمی مدامی)*

در این مثلث قائم‌الزاویه، میانه و ارتفاع وارد بر وتر را رسم می‌کنیم:



می‌دانیم طول میانهٔ وارد بر وتر نصف طول وتر است، پس داریم:

$$AM = CM = \frac{1}{2}BC \Rightarrow \hat{A}_1 = \hat{C} = 22/5^\circ$$

$$\overset{\Delta}{AMC} : \hat{M}_1 = \hat{A}_1 + \hat{C} = 45^\circ \quad \text{(زاویهٔ خارجی)}$$

در مثلث قائم‌الزاویه، طول ضلع روبه‌رو به زاویهٔ 45°، $\frac{\sqrt{2}}{2}$ طول وتر است، پس داریم:

$$\overset{\Delta}{AMH} : \hat{M}_1 = 45^\circ$$

$$\Rightarrow AH = \frac{\sqrt{2}}{2}AM = \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{1}{2}BC = \frac{\sqrt{2}}{2} \times 1 = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

(هندسه ۱- چندضلعی‌ها؛ صفحه‌های ۶۰ و ۶۴)

۴۷- **گزینهٔ «۱»** *(سید محمدرضا حسینی‌فرد)*

با توجه به فرمول پیک داریم: $S = \frac{i+b}{2} = \frac{b}{2} + i - 1 \Rightarrow i = 2$

حال یک چندضلعی شبکه‌ای داریم که ۲ نقطهٔ درونی دارد و می‌دانیم $b \geq 3$، پس حداقل مساحت برابر است با:

$$S_{min} = \frac{3}{2} + 2 - 1 = \frac{5}{2} = 2/5$$

(هندسه ۱- چندضلعی‌ها ؛ صفحه‌های ۶۹ تا ۷۱)

۴۸- **گزینهٔ «۱»** *(مهدی نیک‌زاد)*

طبق رابطهٔ تعداد اضلاع و قطرهای یک چندضلعی داریم:

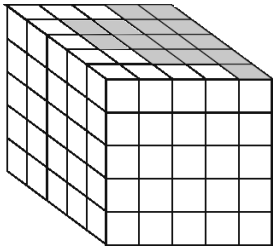
$$\frac{2n(2n-3)}{2} = 3(n+1+\frac{(n+1)(n-2)}{2}) + 5 \Rightarrow \begin{cases} n = -1 & \text{غ‌ق‌ق} \\ n = 10 \end{cases}$$

مجموع زوایای داخلی n ضلعی $= (n-2)180^\circ = (10-2)180^\circ = 1440^\circ$

(هندسه ۱- چندضلعی‌ها ؛ صفحهٔ ۵۵)

۴۹- **گزینهٔ «۱»** *(محمد بحیرایی)*

برای آن‌که نمای بالای مورد نظر به‌دست آید، باید حداقل تمام مکعب‌های هاشورخورده و مکعب‌های زیر آن برداشته شود، یعنی حداقل $14 \times 5 = 70$ مکعب.



(هندسه ۱- تجسم فضایی؛ مشابه تمرین ۵ صفحهٔ ۹۱)

۵۰- **گزینهٔ «۴»** *(مهدی نیک‌زاد)*

طبق قضیهٔ فیثاغورس داریم: $AC = \sqrt{BC^2 - AB^2} = \sqrt{13^2 - 12^2} = 5$

حجم حاصل از دوران شکل صورت سؤال، برابر اختلاف حجم مخروط حاصل از دوران مثلث قائم‌الزاویه و حجم نیمکره حاصل از دوران ربع دایره است. بنابراین داریم:

$$\begin{cases} \text{حجم مخروط} = \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3}\pi \times (5)^2 \times 12 = 100\pi \\ \text{حجم نیمکره} = \frac{1}{2} \times \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{1}{2} \times \frac{4}{3}\pi(2)^3 = \frac{1}{2} \times \frac{32\pi}{3} = \frac{16\pi}{3} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \text{حجم شکل حاصل} = 100\pi - \frac{16\pi}{3} = \frac{284\pi}{3}$$

(هندسه ۱- تجسم فضایی؛ صفحه‌های ۹۵ و ۹۶)

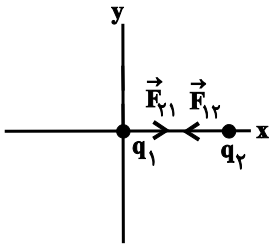
فیزیک ۲

۵۱- گزینهٔ «۴» *(سعید منبری)*

دو بار ناهم‌نام q_1 و q_2 یکدیگر را جذب می‌کنند و اندازهٔ نیروی وارد بر q_2 برابر $10\,N$ است. پس می‌توانیم فاصلهٔ بار q_2 را به‌دست آوریم:

$$F_{12}=\frac{k|q_1||q_2|}{r_{12}^2}\Rightarrow 10=\frac{9\times10^9\times2\times10^{-6}\times2\times10^{-6}}{r_{12}^2}$$
$$\Rightarrow r_{12}=6\,cm$$

حال چون نیروی $\vec{F}_{12}$ در امتداد محور افقی است، بار q_2 باید روی محور x قرار بگیرد. مطابق شکل اگر بار q_2 در نقطهٔ $x=6\,cm$ قرار بگیرد، بردار نیروی وارد بر آن $(\vec{F}_{12})$ در خلاف جهت محور x و به صورت $\vec{F}_{12}=-10\,\vec{i}$ خواهد شد.



(فیزیک ۲- الکتریسیتهٔ ساکن: صفحه‌های ۵ تا ۱۰)

۵۲- گزینهٔ «۴» *(پوریا علاقه‌منر)*

ابتدا اندازهٔ نیرو را حساب می‌کنیم:

$$F=|q|E=20\times10^{-6}\times3\times10^5=6\,N$$

با توجه به این‌که $\Delta U=-W_E$ است و در مسیر A تا B، جابه‌جایی بر خط‌های میدان عمود است، بنابراین $\Delta U_{AB}=W_{AB}=0$ است. در نتیجه فقط ΔU_{BC} را محاسبه می‌کنیم. داریم:

$$W_{BC}=E|q|d\cos180^\circ$$

$$\Rightarrow W_{BC}=20\times10^{-6}\times3\times10^5\times2\times10^{-1}\times(-1)=-1/2\,J$$

$$\Delta U_{BC}=-W_{BC}=+1/2\,J$$

$$\Delta U=\Delta U_{AB}+\Delta U_{BC}=0+1/2=1/2\,J$$

(فیزیک ۲- الکتریسیتهٔ ساکن: صفحه‌های ۱۹ تا ۲۷)

۵۳- گزینهٔ «۴» *(سعید اردم)*

می‌دانیم چگالی سطحی بار الکتریکی، نسبت بار به مساحت جسم است $(\sigma=\frac{q}{A})$.

با توجه به رابطهٔ حجمی بین دو کره داریم: $V_A=343\,V_B$

$$\frac{4}{3}\pi r_A^3=343\times\frac{4}{3}\pi r_B^3\Rightarrow r_A=7r_B$$

با توجه به رابطهٔ چگالی سطحی بار الکتریکی داریم:

$$\sigma=\frac{q}{A}\Rightarrow\frac{\sigma_A}{\sigma_B}=\frac{q_A}{q_B}\times\frac{A_B}{A_A}\xrightarrow{A=4\pi r^2}$$

$$\frac{\sigma_A}{\sigma_B}=\frac{q_A}{q_B}\times(\frac{r_B}{r_A})^2$$

$$2=\frac{q_A}{q_B}\times(\frac{1}{7})^2\Rightarrow\frac{q_A}{q_B}=98$$

(فیزیک ۲- الکتریسیتهٔ ساکن: صفحه‌های ۲۷ تا ۳۱)

۵۴- گزینهٔ «۴» *(مصطفی کیانی)*

با استفاده از رابطه‌های $I=\frac{V}{R}$، $I=\frac{q}{t}$ و $q=ne$ به‌صورت زیر مقدار بار الکتریکی عبوری از هر مقطع سیم B را می‌یابیم:

$$I=\frac{V}{R}\Rightarrow\frac{I_A}{I_B}=\frac{V_A}{V_B}\times\frac{R_B}{R_A}\xrightarrow[R_A=2R_B]{V_A=16V,V_B=4V}$$

$$\frac{I_A}{I_B}=\frac{16}{4}\times\frac{R_B}{2R_B}\Rightarrow\frac{I_A}{I_B}=2\Rightarrow I_A=2I_B$$

$$\xrightarrow{I=\frac{q}{t}}\frac{q_A}{t_A}=2\times\frac{q_B}{t_B}\xrightarrow[q_A=n_Ae]{t_A=t_B}$$

$$n_Ae=2q_B\xrightarrow[e=1/6\times10^{-19}C]{n_A=5\times10^{13}}5\times10^{13}\times1/6\times10^{-19}=2q_B$$

$$\Rightarrow 2q_B=8\times10^{-6}C\Rightarrow q_B=4\times10^{-6}C=4\mu C$$

(فیزیک ۲- جریان الکتریکی و مدارهای جریان مستقیم؛ صفحه‌های ۴۶ تا ۵۰)

۵۵- **گزینهٔ «۱»** *(سعید شرق)*

می‌دانیم ولتاژ دو سر باتری محرکه از رابطهٔ $V=\varepsilon-rI$ به‌دست می‌آید.

اگر ولت‌سنج صفر ولت را نشان دهد، پس داریم:

$$0=\varepsilon_2-r_2I\Rightarrow I=\frac{\varepsilon_2}{r_2}=\frac{4\varepsilon}{2}=2\varepsilon$$

این جریان از کل مدار عبور می‌کند، بنابراین داریم:

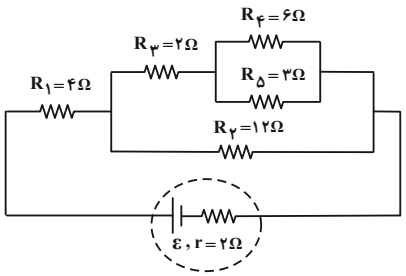
$$I=\frac{\varepsilon_1+\varepsilon_2}{r_1+r_2+R}\Rightarrow 2\varepsilon=\frac{2\varepsilon+4\varepsilon}{0/5+2+R}\Rightarrow 2\varepsilon=\frac{6\varepsilon}{2/5+R}$$

$$\Rightarrow R=0/5\Omega$$

(فیزیک ۲- جریان الکتریکی و مدارهای جریان مستقیم؛ صفحه‌های ۶۱ تا ۶۶)

۵۶- **گزینهٔ «۱»** *(محمدکاظم منشاری)*

ابتدا مطابق شکل زیر مدار را ساده می‌کنیم:



$$R_{4,5}=\frac{R_4\times R_5}{R_4+R_5}=\frac{6\times3}{6+3}=2\Omega$$

$$R_{3,4,5}=R_{4,5}+R_3=2+2=4\Omega$$

$$R_{2,3,4,5}=\frac{R_{3,4,5}\times R_2}{R_{3,4,5}+R_2}=\frac{4\times12}{4+12}=3\Omega$$

$$R_{eq}=R_1+R_{2,3,4,5}=4+3=7\Omega$$

اکنون باید جریان کل مدار را محاسبه کنیم:

$$V_4=V_5\Rightarrow R_4I_4=I_5R_5$$
$$\Rightarrow 6\times0/5=3I_5\Rightarrow I_5=1A$$

حال جریان عبوری از R_3 برابر است با:

$$I_3=I_4+I_5=0/5+1=1/5A$$

$$V_{3,4,5}=V_2\Rightarrow R_{3,4,5}I_3=R_2I_2$$

$$\Rightarrow 4\times1/5=12I_2\Rightarrow I_2=0/5A$$

در نهایت جریان عبوری از مقاومت R_1 (جریان کل مدار) برابر است با:

$$I_1=I_2+I_3=0/5+1/5=2A$$

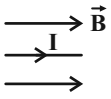
با توجه به این‌که توان مصرفی در مقاومت معادل مدار برابر با توان خروجی باتری است، داریم:

$$\Rightarrow P=R_{eq}I_1^2=7\times2^2=28W$$

(فیزیک ۲- جریان الکتریکی و مدارهای جریان مستقیم؛ صفحه‌های ۶۷ تا ۷۷)

۵۷- **گزینهٔ «۴»** *(عبدالرضا امینی‌نسب)*

طبق رابطهٔ $F_B = I\ell B\sin\theta$، اگر زاویهٔ بین بردار $\vec{B}$ و جریان I صفر یا 180° باشد، (به عبارت دیگر سیم در راستای خطوط میدان مغناطیسی قرار گیرد.)، آنگاه نیروی مغناطیسی وارد بر سیم صفر خواهد شد. برای گزینهٔ ۴ داریم:



$$\theta = 0 \Rightarrow F = 0$$

(فیزیک ۲- مغناطیس؛ صفحه‌های ۹۱ تا ۹۳)

۵۸- **گزینهٔ «۳»** *(اشکان ولی‌زاده)*

بررسی گزینه‌ها:

۱) نادرست؛ دارا بودن حوزه‌های مغناطیسی مربوط به مواد فرومغناطیسی است.

۲) نادرست؛ یکای میدان مغناطیسی در SI معادل با $T = \frac{N}{A.m}$ است.

۳) درست؛ در مواد دیامغناطیسی، حضور میدان مغناطیسی باعث القای دوقطبی‌های مغناطیسی در خلاف جهت میدان خارجی می‌شود.

۴) نادرست؛ نقره و اکسیژن به‌ترتیب جزو مواد دیامغناطیسی و پارامغناطیسی هستند.

(فیزیک ۲- مغناطیس؛ صفحه‌های ۹۱ تا ۹۳ و ۱۰۱ تا ۱۰۳)

۵۹- **گزینهٔ «۲»** *(معصومه شریعت‌ناصری)*

ابتدا معادلهٔ اندازهٔ میدان مغناطیسی برحسب زمان را در SI به‌دست می‌آوریم.

$$B = -\frac{t}{5} + 0/6$$

اکنون شار مغناطیسی عبوری از حلقه را برحسب زمان در SI به‌دست می‌آوریم:

$$\Phi = AB\cos\theta \xrightarrow{\theta=0} \Phi = AB \xrightarrow{A=\pi r^2}$$

$$\Phi = 3\times\left(\frac{2}{100}\right)^2\left(-\frac{t}{5}+0/6\right) = 12\times10^{-4}\left(-\frac{t}{5}+0/6\right)$$

$$\varepsilon_{av} = -\frac{\Delta\Phi}{\Delta t} = -\frac{12\times10^{-4}\left(-\frac{t_2}{5}+0/6\right)-12\times10^{-4}\left(-\frac{t_1}{5}+0/6\right)}{t_2-t_1}$$

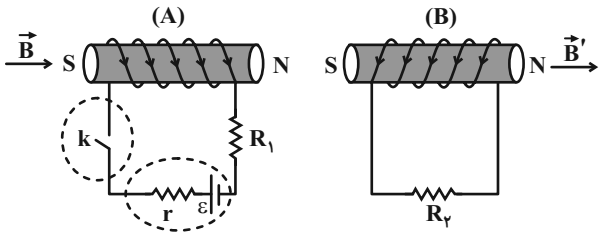
$$\Rightarrow \varepsilon_{av} = \frac{12\times10^{-4}}{5} = 2/4\times10^{-4}\,V = 0/24\,mV$$

توجه شود که با استفاده از رابطهٔ $\varepsilon_{av} = -NA\frac{\Delta B}{\Delta t}\cos\theta$ و با توجه به ثابت بودن شیب نمودار $\left(\frac{\Delta B}{\Delta t}\right)$ نیز می‌توان به پاسخ فوق رسید.

(فیزیک ۲- القای الکترومغناطیسی و جریان متناوب؛ صفحه‌های ۱۱۰ تا ۱۱۷)

۶۰- **گزینهٔ «۲»** *(معصومه شریعت‌ناصری)*

مطابق شکل برای اینکه جریان القایی در مقاومت R_2 به سمت راست باشد، باید میدان القایی $(\vec{B}')$ نیز به سمت راست باشد. با توجه به اینکه طبق قاعدهٔ دست راست جهت میدان سیملولهٔ (A) نیز به سمت راست است، بنابراین طبق قانون لنز نتیجه می‌گیریم که باید این میدان در محل سیملولهٔ (B) در حال کاهش باشد و این موضوع فقط در حالت (۳) اتفاق می‌افتد.



(فیزیک ۲- القای الکترومغناطیسی و جریان متناوب؛ صفحه‌های ۱۱۷ و ۱۱۸)

فیزیک ۱

۶۱- **گزینهٔ «۲»** *(بهنام شاهینی)*

$$۵۰۰nF = ۵\times۱۰^{۲}\times۱۰^{-۹}F = ۵\times۱۰^{-۷}F = ۰/۰۵\times۱۰^{-۵}F$$

$$۲۰\mu F = ۲\times۱۰\times۱۰^{-۶}F = ۲\times۱۰^{-۵}F$$

$$۲\times۱۰^{-۵}F - ۰/۰۵\times۱۰^{-۵}F = ۱/۹۵\times۱۰^{-۵}F\times\frac{۱pF}{۱۰^{-۱۲}F}$$

$$= ۱/۹۵\times۱۰^{-۵}\times۱۰^{۱۲}pF = ۱/۹۵\times۱۰^{۷}pF$$

(فیزیک ۱- فیزیک و اندازه‌گیری؛ صفحه‌های ۱۰ تا ۱۳)

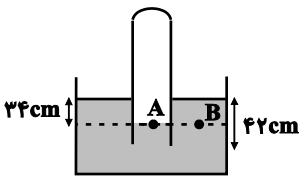
۶۲- **گزینهٔ «۲»** *(محمدرضا شریفی)*

ابتدا تعیین می‌کنیم که ستونی از مایع درون ظرف به ارتفاع ۳۴cm، چه فشاری برحسب سانتی‌متر جیوه ایجاد می‌کند:

$$(\rho h)_{\text{جیوه}} = (\rho h)_{\text{مایع}} \Rightarrow ۱۳/۶\times h = ۳۴\times۰/۸ \Rightarrow h = ۲cmHg$$

حال با توجه به برابری فشار در نقاط هم‌تراز یک مایع ساکن، داریم:

$$P_A = P_B \Rightarrow P_{\text{مایع}} + P_{\text{هوای محبوس}} = P_{\text{هوای محبوس}}$$
$$\Rightarrow ۲cmHg + P_{\text{هوای محبوس}} = ۷۲cmHg \Rightarrow P_{\text{هوای محبوس}} = ۷۰cmHg$$



(فیزیک ۱- ویژگی‌های فیزیکی مواد؛ صفحه‌های ۳۳ تا ۳۸)

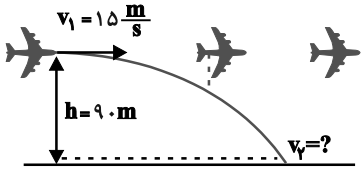
۶۳- **گزینهٔ «۳»** *(علی کل‌محمدی رامشه)*

بال‌های هواپیما طوری طراحی شده‌اند که تندی هوا در زیر بال کمتر از بالای بال می‌باشد و طبق اصل برنولی، فشار در قسمت پایین بال بیش‌تر از قسمت بالای بال بوده و بنابراین نیروی بالابر خالصی به بال هواپیما وارد می‌شود.

(فیزیک ۱- ویژگی‌های فیزیکی مواد؛ صفحهٔ ۴۶)

۶۴- **گزینهٔ «۲»** *(مهدی زمان‌زاده)*

دقت کنید که هر چند بسته رها شده است، ولی نباید فکر کنیم که سرعت اولیهٔ آن صفر است. بلکه بسته در لحظهٔ رها شدن، دارای همان سرعت هواپیما است. همچنین چون گفته شده که تنها نیروی مؤثر، نیروی وزن است، یعنی از مقاومت هوا می‌توانیم صرف‌نظر کنیم، لذا با در نظر گرفتن سطح زمین به عنوان مبدأ انرژی پتانسیل گرانشی و با استفاده از اصل پایستگی انرژی مکانیکی داریم:



$$E_۱ = E_۲ \Rightarrow K_۱ + U_۱ = K_۲ + U_۲$$
$$\Rightarrow \frac{۱}{۲}mv_۱^{۲} + mgh = \frac{۱}{۲}mv_۲^{۲} + ۰$$
$$\Rightarrow \frac{۱}{۲}\times۱۵^{۲} + ۱۰\times۹۰ = \frac{۱}{۲}v_۲^{۲}$$
$$\Rightarrow ۲۲۵ + ۱۸۰۰ = v_۲^{۲} \Rightarrow v_۲ = ۴۵\frac{m}{s}$$

(فیزیک ۱- کار، انرژی و توان؛ صفحه‌های ۶۸ تا ۷۰)

۶۵- **گزینهٔ «۴»** *(شهرام آزاد)*

طبق قضیهٔ کار- انرژی جنبشی داریم:

$$W_t = \frac{۱}{۲}mv_۲^{۲} - \frac{۱}{۲}mv_۱^{۲} = \frac{۱}{۲}\times۳۷۳\times(۹۰۰-۱۰۰)$$
$$\Rightarrow W_t = (۴۰۰\times۳۷۳)J$$

اکنون توان متوسط موتور را محاسبه می‌کنیم:

$$P = \frac{W_t}{t} = \frac{۴۰۰\times۳۷۳}{۲۰} = ۲\times۳۷۳۰W$$
$$P = \frac{۲\times۳۷۳۰}{۷۴۶} = ۱۰hp$$

(فیزیک ۱- کار، انرژی و توان؛ صفحه‌های ۶۱ تا ۶۴، ۷۳ و ۷۴)

۶۶- **گزینهٔ «۱»** *(محمد بحلولی)*

ابتدا با توجه به رابطهٔ چگالی، جرم مکعب فلزی را می‌یابیم:

$$m=\rho V \xrightarrow[V=(20)^3=8000cm^3]{\rho=8\frac{g}{cm^3}} m=8\times 8000=64000g=64kg$$

حال با توجه به رابطهٔ گرما داریم:

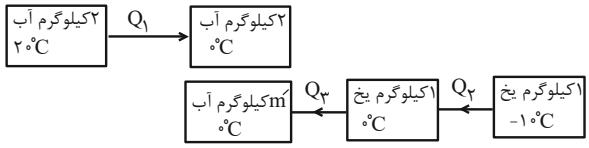
$$Q=mc\Delta\theta \Rightarrow 20\times 10^3=64\times c\times 2/5$$

$$c=125\frac{J}{kg.^\circ C}=0/125\frac{J}{g.^\circ C}$$

(فیزیک ۱- دما و گرما؛ صفحه‌های ۹۸ و ۹۹)

۶۷- **گزینهٔ «۳»** *(حمید زرین‌کفش)*

چون در نهایت بخشی از یخ به صورت ذوب نشده باقی می‌ماند، لذا دمای تعادل نهایی صفر درجهٔ سلسیوس است:



$$Q_1+Q_2+Q_3=0$$

$$\Rightarrow m_{آب}c_{آب}\Delta\theta_{آب}+m_{یخ}c_{یخ}\Delta\theta_{یخ}+m'L_F=0$$

$$2\times 4200\times(0-20)+1\times 2100\times(0-(-10))+m'\times 336\times 10^3=0$$

$$\xrightarrow{336000=80\times 4200}$$

$$\Rightarrow 2\times(-20)+\frac{1}{2}\times(10)+m'\times 80=0 \Rightarrow -40+5+80m'=0$$

$$\Rightarrow m'=\frac{35}{80}=\frac{7}{16}kg$$

پس درصد جرمی یخ ذوب شده برابر است با:

$$\frac{m'}{m}\times 100=\frac{\frac{7}{16}}{1}\times 100=43/75\%$$

(فیزیک ۱- دما و گرما؛ صفحه‌های ۹۸ تا ۱۰۶)

۶۸- **گزینهٔ «۴»** *(حمید زرین‌کفش)*

فقط گزارهٔ «ت» نادرست است چراکه گرم شدن هوای داخل اتاق به وسیلهٔ رادیاتور شوفاژ، نمونه‌ای از همرفت طبیعی است.

(فیزیک ۱- دما و گرما؛ صفحه‌های ۱۱۲ تا ۱۱۴)

۶۹- **گزینهٔ «۳»** *(حمید زرین‌کفش)*

طبق رابطهٔ $PV=nRT$ با ثابت بودن V و T، فشار گاز منحصراً به n وابسته است. از طرف دیگر، چون $n=\frac{m}{M}$ می‌باشد، در نتیجه فشار گاز هم به جرم گاز (m) و هم جنس آن (M) وابسته خواهد بود.

(فیزیک ۱- دما و گرما؛ صفحه‌های ۱۲۲ و ۱۲۳)

۷۰- **گزینهٔ «۴»** *(علیرضا امینی)*

گام اول: ΔU برای هر دو مسیر یکسان است؛ چون در هر دو مسیر گاز از حالت معین a به حالت معین b رسیده است.

$$\Delta U_1=\Delta U_2 \Rightarrow Q_1+W_1=Q_2+W_2$$

گام دوم: در مسیر (۱) گاز $250J$ گرما از دست داده و $420J$ انرژی از طریق کار گرفته است.

$$Q_1=-250J, W_1=+420J$$

در مسیر (۲) گاز $280J$ گرما از دست داده است.

$$Q_2=-280J, W_2=?$$

$$Q_1+W_1=Q_2+W_2$$
$$\Rightarrow -250+420=-280+W_2 \Rightarrow W_2=450J$$

صورت سؤال کاری که گاز روی محیط انجام داده (یعنی W') را خواسته است.

$$W'=-W_2=-450J$$

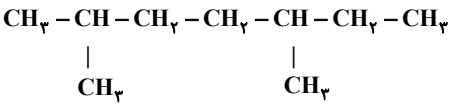
(فیزیک ۱- ترمودینامیک؛ صفحه‌های ۱۲۹ و ۱۳۰)

شیمی ۲

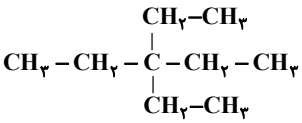
۷۱- **گزینهٔ «۳»** *(حسن لشکری)*

۱) نام درست آن، ۳- اتیل ـ۴، ۵- دی متیل هپتان است.

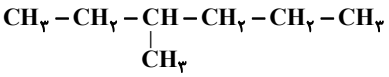
۲) نام درست آن ۲، ۵ـ دی متیل هپتان است.



۳) درست است، با توجه به ساختار زیر درست است.



۴) نام درست به‌صورت ۳-متیل هگزان است.



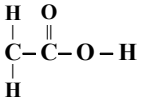
(شیمی ۲- قدر هدایای زمینی را بدانیم؛ صفحه‌های ۳۷ تا ۴۰)

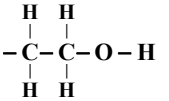
۷۲- **گزینهٔ «۴»** *(سیدرحیم هاشمی دهکردی)*

دما ویژگی مشترک همه حالت‌های ماده است که وجود جنبش‌های نامنظم ذرات آن ماده را نشان می‌دهد.

(شیمی ۲- در پی غذای سالم؛ صفحه‌های ۵۶ تا ۵۸، ۶۰ و ۶۱)

۷۳- **گزینهٔ «۱»** *(سالار ملکی)*

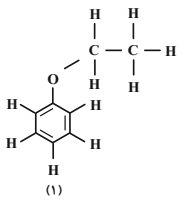
اسید سازندهٔ موز:  ۸ جفت الکترون پیوندی

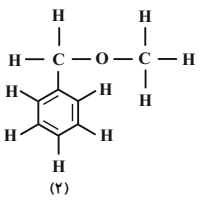
الکل سازندهٔ آناناس:  ۸ جفت الکترون پیوندی

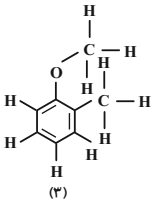
(شیمی ۲- پوشاک، نیازی پایان ناپذیر؛ صفحه‌های ۱۱۰ و ۱۱۵)

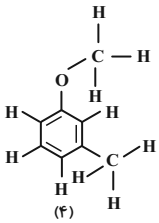
۷۴- **گزینهٔ «۳»** *(امیر حاتمیان)*

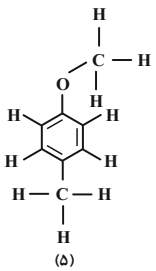
در ترکیب مورد نظر اکسیژن نباید به هیدروژن متصل باشد تا پیوند هیدروژنی تشکیل ندهد. همچنین ۶ کربن در حلقهٔ بنزنی قرار می‌گیرند و ۲ کربن باقی‌مانده است.


(۱)


(۲)


(۳)


(۴)


(۵)

(شیمی ۲- قدر هدایای زمینی را بدانیم؛ صفحهٔ ۴۳)

۷۵- **گزینهٔ «۳»** *(رسول عابدینی‌زواره)*

$$2C_2H_6 + 7O_2 \rightarrow 4CO_2 + 6H_2O$$

واکنش (I) را در ۳ ضرب، واکنش (II) را قرینه و در ۲ ضرب و

واکنش (III) را قرینه و در ۴ ضرب می‌کنیم:

$$\Delta H = 3(-572) + 2(86) - 4(394) = -3120kJ$$

$$?kJ = 1120mL\ C_2H_6 \times \frac{1mol\ C_2H_6}{22400mL\ C_2H_6} \times \frac{3120kJ}{2mol\ C_2H_6} = 78kJ$$

$$Q = mc\Delta\theta \Rightarrow 78000J = m \times 0/9 \frac{J}{g.^\circ C} \times 80^\circ C \Rightarrow m \simeq 1083g$$

(شیمی ۲- در پی غذای سالم؛ صفحه‌های ۵۸ تا ۶۰، ۶۴، ۷۲ تا ۷۷)

۷۶- **گزینهٔ «۴»** *(رسول عابدینی‌زواره)*

$$\text{ظرفیت گرمایی ویژه} = \frac{\text{ظرفیت گرمایی}}{\text{جرم ماده}} = \frac{486}{200} = 2/43J.g^{-1}.^\circ C^{-1}$$

$$Q = mc\Delta\theta \Rightarrow 19/44 \times 10^3 = m \times 2/43 \times (35 - 30)$$

$$m = 1600g$$

$$\text{حجم اتانول} = 1600g \times \frac{1mL}{0/8g} \times \frac{1L}{1000mL} = 2L \text{ اتانول}$$

(شیمی ۲- در پی غذای سالم؛ صفحه‌های ۵۸ تا ۶۰)

۷۷- **گزینهٔ «۲»** *(امین نوروزی)*

ابتدا مقدار $Al_2(SO_4)_3$ مصرف شده را تعیین می‌کنیم.

$$?mol\ Al_2(SO_4)_3 = 160L\ SO_3 \times \frac{1/8g\ SO_3}{1L\ SO_3} \times \frac{1mol\ SO_3}{80g\ SO_3}$$

$$\times \frac{1mol\ Al_2(SO_4)_3}{3mol\ SO_3} = 1/2mol\ Al_2(SO_4)_3$$

مقدار باقی‌ماندهٔ $Al_2(SO_4)_3$ برابر است با:

$$\text{مقدار باقی‌مانده} = 1/4 - 1/2 = 0/2mol$$

با توجه به نمودار زمان لازم برای رسیدن به ۰/۲ مول آلومینیم سولفات

باقی‌مانده برابر با ۱۰ دقیقه است.

(شیمی ۲- در پی غذای سالم؛ صفحه‌های ۸۵ تا ۹۰)

۷۸- **گزینهٔ «۱»** *(سیدمحمد معروفی)*

$$\frac{\overline{R}_A}{\text{ضریب } A} = \frac{\overline{R}_B}{\text{ضریب } B} \Rightarrow \frac{\overline{R}_A}{2} = \frac{2/4}{3}$$

$$\Rightarrow \overline{R}_A = 1/6mol.min^{-1}$$

$$\overline{R}_A = \frac{\Delta n_A}{\Delta t} \Rightarrow 1/6 = \frac{-\frac{0 - 78/72}{41}}{t - 0} \Rightarrow t = 1/2min = 72s$$

(شیمی ۲- در پی غذای سالم؛ صفحه‌های ۹۲ و ۹۳)

۷۹- **گزینهٔ «۲»** *(محمد عظیمیان‌زواره)*

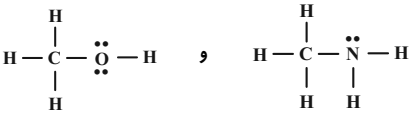
بررسی موارد:

آ) درست- مونومر سازندهٔ تفلون $C_۲F_۴$ می‌باشد.

$$\٪C=\frac{۱۲\times۲}{(۲\times۱۲)+(۴\times۱۹)}\times۱۰۰=۲۴\٪$$

ب) درست- ساده‌ترین الکل، متانول و ساده‌ترین آمین متیل آمین می‌باشد.

(مجموع شمار جفت الکترون‌های پیوندی و ناپیوندی در هر کدام برابر ۷ می‌باشد)



پ) نادرست- انحلال‌پذیری الکل‌ها در آب با افزایش شمار اتم‌های کربن کاهش می‌یابد.

ت) درست- با توجه به فرمول مولکولی آن‌ها:

$$C_۳H_۳N\ ،\ C_۶H_۶\ ،\ C_۸H_۸$$

(شیمی ۲- پوشاک، نیازی پایان‌ناپذیر؛ صفحه‌های ۱۰۶، ۱۱۱، ۱۱۲ و ۱۱۶)

۸۰- **گزینهٔ «۲»** *(مرتضی حسن‌زاده)*

$$۱)\ CH_۴(g)+۲O_۲(g)\rightarrow CO_۲(g)+۲H_۲O(l)$$

$$۲)\ H_۲(g)+\frac{۱}{۲}O_۲(g)\rightarrow H_۲O(l)$$

ابتدا مقدار مول این مخلوط گازی را محاسبه می‌کنیم:

$$۱۱۲L\times\frac{۱mol}{۲۲/۴L}=۵mol$$

حال فرض می‌کنیم x مول $CH_۴$ و y مول $H_۲$ در مخلوط گازی داریم:

$$y+x=۵\,mol$$

گرمای حاصل از x مول متان و y مول هیدروژن برابر با $۱۷۴۴kJ$ است:

$$\left.\begin{array}{l} xmolCH_۴\times\frac{۱۶g\,CH_۴}{۱mol\,CH_۴}\times\frac{۵۶kJ}{۱g\,CH_۴}=۸۹۶x\,kJ \\ ymol\,H_۲\times\frac{۲g\,H_۲}{۱mol\,H_۲}\times\frac{۱۴۴kJ}{۱g\,H_۲}=۲۸۸y\,kJ \end{array}\right\}۸۹۶x+۲۸۸y=۱۷۴۴$$

سپس با حل دو معادلهٔ زیر، x و y را حساب می‌کنیم:

$$\left.\begin{array}{l} x+y=۵ \\ ۸۹۶x+۲۸۸y=۱۷۴۴ \end{array}\right\}\Rightarrow\begin{array}{l} x=۰/۵\,mol \\ y=۴/۵\,mol \end{array}$$

$H_۲O$ در هر دو واکنش تولید می‌شود:

$$۰/۵mol\,CH_۴\times\frac{۱mol\,CO_۲}{۱mol\,CH_۴}=۰/۵mol\,CO_۲$$

$$۰/۵mol\,CH_۴\times\frac{۲mol\,H_۲O}{۱mol\,CH_۴}=۱mol\,H_۲O$$

نسبت خواسته شده در سؤال:

$$\frac{\text{مول }CO_۲}{\text{مول }H_۲O}=\frac{۰/۵}{۱+۴/۵}=\frac{۰/۵}{۵/۵}\simeq۰/۰۹$$

(شیمی ۲- در پی غذای سالم؛ صفحه‌های ۷۲ و ۷۳)

شیمی ۱

۸۱- **گزینهٔ «۴»** *(محمدرضا پورجاوید)*

به غیر از CH_4 و CO_2 بقیهٔ مولکول‌های داده شده در میدان الکتریکی جهت‌گیری می‌کنند. با توجه به ساختارهای زیر، تعداد جفت الکترون‌های ناپیوندی آنها نیز قابل محاسبه است:

مولکول‌های قطبی در میدان الکتریکی جهت‌گیری می‌کنند.

(شیمی ۱- ترکیبی؛ صفحه‌های ۵۷، ۵۸، ۱۰۳، ۱۰۴، ۱۰۷ و ۱۰۹)

۸۲- **گزینهٔ «۳»** *(سیرمحمدرضا میرقائمی)*

آرایش الکترونی فشرده اتم این دو عنصر به‌صورت زیر است:

$$_{30}Zn : [_{18}Ar]3d^{10}4s^2$$

$$_{32}Ge : [_{18}Ar]3d^{10}4s^2 4p^2$$

تفاوت آرایش الکترونی این دو عنصر در $4p^2$ است. بنابراین مقدار خواسته شده برابر است با:

(برابر با اختلاف عدد اتمی) $۲ \times ۱ = ۲$ = تفاوت خواسته شده

بررسی سایر گزینه‌ها:

گزینهٔ «۱»: آرایش الکترونی یون‌های $_1H^-$ ، $_3Li^+$ و اتم $_2He$ به صورت $1s^2$ پایدار است.

گزینهٔ «۲»: شمار الکترون جفت شده در عنصرهای گروه ۲ برابر با صفر و در عنصرهای گروه ۱۶ برابر با دو است.

گزینهٔ «۴»:

$$_{25}Mn : [_{18}Ar]\ 3d^5 4s^2$$

$$_{24}Cr : [_{18}Ar]3d^5 4s^1$$

(زیرلایهٔ d دارای بزرگ‌ترین عدد کوانتومی فرعی با $l = ۲$)

(شیمی ۱- کیهان، زادگاه الفبای هستی؛ صفحه‌های ۲۹ تا ۳۸)

۸۳- **گزینهٔ «۱»** *(محمد وزیری)*

در هر خانه از جدول تناوبی، جرم اتمی میانگین نشان داده می‌شود نه عدد جرمی!

(شیمی ۱- کیهان، زادگاه الفبای هستی؛ صفحه‌های ۱۲، ۲۲، ۲۶، ۳۰ تا ۳۴)

۸۴- **گزینهٔ «۱»** *(محمدحسن محمدزاده‌مقدم)*

ابتدا باید جرم اتمی میانگین X و Y را محاسبه کنیم:

$$\text{جرم اتمی میانگین } X = ۰/۰۶ \times ۶ + ۰/۹۴ \times ۷ = ۶/۹۴$$

$$\text{جرم اتمی میانگین } Y = ۰/۹۹۹۸ \times ۱ + ۰/۰۰۰۲ \times ۲ = ۱/۰۰۰۲$$

از آن‌جایی که فراوانی عنصر A، ۱۰۰٪ بیان شده، جرم آن برابر ۱۶ در نظر گرفته می‌شود:

$$\text{جرم مولی ترکیب } XAY = ۱۶ + ۶/۹۴ + ۱/۰۰۰۲ = ۲۳/۹۴$$

(شیمی ۱- کیهان، زادگاه الفبای هستی؛ صفحه‌های ۶ و ۱۵)

۸۵- **گزینهٔ «۱»** *(محمدرضا پورجاوید)*

اتمی که مجموع n و l الکترون‌های آخرین زیرلایهٔ آن برابر با ۴ باشد، دارای آرایش الکترونی زیر است:

می‌تواند $_{۱۳}Al$، $_{۴}Be$، $_{۲۴}Cr$، $_{۲۹}Cu$ و $_{۱۹}K$ باشد.

$$_{۴}Be: ۱s^۲\ ۲s^۲$$

$$_{۱۳}Al: ۱s^۲\ ۲s^۲\ ۲p^۶\ ۳s^۲\ ۳p^۱$$

$$_{۱۹}K: ۱s^۲\ ۲s^۲\ ۲p^۶\ ۳s^۲\ ۳p^۶\ ۴s^۱$$

$$_{۲۴}Cr: ۱s^۲\ ۲s^۲\ ۲p^۶\ ۳s^۲\ ۳p^۶\ ۳d^۵\ ۴s^۱$$

$$_{۲۹}Cu: ۱s^۲\ ۲s^۲\ ۲p^۶\ ۳s^۲\ ۳p^۶\ ۳d^{۱۰}\ ۴s^۱$$

بررسی گزینه‌ها:

۱) عنصر بریلیم در گروه ۲ دورهٔ ۲، عنصر آلومینیم در گروه ۱۳ دورهٔ ۳، عنصر کروم و مس به ترتیب در گروه ۶ و ۱۱ دورهٔ ۴ از جدول دوره‌ای عنصرها جای دارند. در میان عنصرهای دورهٔ دوم، سوم و چهارم جدول دوره‌ای، به ترتیب $_{۳}Li$، $_{۱۱}Na$ و $_{۱۹}K$ که در گروه ۱ جای دارند، بیشترین شعاع اتمی را دارند.

۲) آلومینیم با $_{۳۱}Ga$ هم‌گروه بوده و با $_{۱۵}P$ هم‌دوره است.

۳) $_{۵}B$ نخستین عنصری است که دارای الکترونی با $l=۱$ (زیرلایه p) می‌باشد. بنابراین $_{۴}Be$ آخرین عنصری است که چنین الکترونی ندارد.

۴) تمامی عناصر فلز می‌باشند و امکان تشکیل پیوند یونی با اتم‌های دیگر دارند.

(شیمی ۱- کیهان زادگاه الفبای هستی؛ صفحه‌های ۲۷ تا ۳۲)

۸۶- **گزینهٔ «۳»** *(حسن رحمتی‌کوکنده)*

موازنهٔ واکنش‌ها به صورت زیر است:

$$I)\ C_۲H_۵OH + ۳O_۲ \rightarrow ۲CO_۲ + ۳H_۲O$$

مجموع ضرایب فراورده‌ها = ۵

$$II)\ ۲Fe_۲O_۳ \rightarrow ۴Fe + ۳O_۲$$

ضریب فراورده‌ها = ۷

$$III)\ C_۳H_۸ + ۵O_۲ \rightarrow ۳CO_۲ + ۴H_۲O$$

مجموع ضرایب فراورده‌ها = ۷

$$IV)\ ۲Al_۲O_۳ + ۳C \rightarrow ۳CO_۲ + ۴Al$$

مجموع ضرایب فراورده‌ها = ۷

(شیمی ۱- ردپای گازها در زندگی؛ صفحه‌های ۶۳ تا ۶۵)

۸۷- **گزینهٔ «۳»** *(مبینا شراختی‌پور)*

جرم اتمی هیدروژن اندکی بیشتر از $1amu$ است.

(شیمی ۱- کیهان زادگاه الفبای هستی؛ صفحه‌های ۱۳ تا ۱۷)

۸۸- **گزینهٔ «۲»** *(روزبه رضوانی)*

$$_{26}X: 1s^2\ 2s^2\ 2p^6\ 3s^2\ 3p^6\ 4s^2 3d^6$$

این عنصر همان Fe است که در لایه ظرفیت خود ۸ الکترون دارد و در ترکیب‌های یونی خود، یون پایدار Fe^{2+} و Fe^{3+} ایجاد می‌کند.

(شیمی ۱- کیهان زادگاه الفبای هستی؛ صفحه‌های ۳۰ تا ۳۸)

۸۹- **گزینهٔ «۲»** *(یاسر راش)*

روش ۱: در هر مرحله تصفیه، مقداری از یون نیترات جذب می‌شود.

با توجه به بازدهی ۵۰ درصدی دستگاه تصفیه داریم:

$$\text{مقدار ppm باقی‌ماندهٔ } NO_3^- = \frac{\text{مقدار ppm اولیهٔ } NO_3^-}{2^n}$$

$n =$ تعداد مراحل تصفیه

$$\Rightarrow 3/125 = \frac{100}{2^n} \Rightarrow 2^n = \frac{100}{3/125} = 32 \Rightarrow n = 5$$

در نتیجه، آب شهری را با دستگاه باید ۵ مرتبه تصفیه کنیم تا غلظت یون نیترات به $3/125ppm$ برسد.

با توجه به اینکه اختلاف ppm موردنظر را در دو حالت اولیه و ثانویه داریم، حجم آب تأثیری در حل مسئله ندارد.

روش ۲: با توجه به الگوی زیر نیز می‌توان به جواب رسید:

$$100 \xrightarrow{n=1} 50 \xrightarrow{n=2} 25 \xrightarrow{n=3} 12/5 \xrightarrow{n=4} 6/25 \xrightarrow{n=5} 3/125$$

۵ مرحله $(n = 5)$ نیاز است تا غلظت از ۱۰۰ به ۳/۱۲۵ با یکای ppm برسد.

(شیمی ۱- آب، آهنگ زندگی؛ صفحه‌های ۹۴ تا ۹۶)

۹۰- **گزینهٔ «۴»** *(محمدپارسا فراهانی)*

ابتدا معادلهٔ انحلال‌پذیری لیتیم سولفات که خطی است را به دست می‌آوریم.

$$S = a\theta + \overbrace{S_1}^{\text{انحلال‌پذیری در دمای صفر}} \Rightarrow S = -\frac{3}{20}\theta + 36$$

با توجه به این‌که انحلال‌پذیری لیتیم سولفات با افزایش دما، کاهش می‌یابد، بر اثر افزایش دما، نمک رسوب خواهد کرد. طبق معادلهٔ انحلال‌پذیری، لیتیم سولفات در دمای $70^\circ C$ را می‌یابیم:

$$S = -0/15 \times 70 + 36 = 25/5g$$

$$?\ g \text{ رسوب} = 26/6g \quad (\text{محلول سیر شده در دمای } 20^\circ C)$$

$$\text{رسوب } 1/5g = \times \frac{(33 - 25/5)\ g \text{ رسوب}}{133g\ (\text{محلول سیرشده در دمای } 20^\circ C)}$$

(شیمی ۱- آب، آهنگ زندگی؛ صفحه‌های ۱۰۰ تا ۱۰۳)