دفترچه پاسخ

آزمون ۲۴ اسفند ۱۴۰۳

اختصاصی دوازدهم ریاضی

بنیاد علمی آموزشی قلم‌چی (وقف عام)

	نام درس	نام طراحان
اختصاصی	حسابان ۲ وریاضی‌پایه	کاظم اجلالی-بهمن امیدی-دانیال آرکیش-داود بوالحسنی-شاهین پروازی-افشین خاصه‌خان-سینا خیرخواه-احمدرضا ذاکرزاده محمد زنگنه-علی سلامت-کیان کریمی‌خراسانی-محمد گودرزی-مهسان گودرزی-رضا ماجدی-حامد معنوی-نیما مهندس علیرضا نداف‌زاده-غلامرضا نیازی-جهانبخش نیکنام
	هندسه و آمارو ریاضیات گسسته	امیرحسین ابومحبوب-اسحاق اسفندیار-علی ایمانی-جواد ترکمن-سیدمحمدرضا حسینی‌فرد-افشین خاصه‌خان-کیوان دارابی مصطفی دیداری-سوگند روشنی-علیرضا شریف‌خطیبی-هومن عقیلی-شبنم غلامی-احمدرضا فلاح-مهرداد ملوندی-نیلوفر مهدوی نیما مهندس
	فیزیک	مهران اسماعیلی-حسین الهی-عبدالرضا امینی‌نسب-علی برزگر-علیرضا جباری-مسعود خندانی-مصطفی کیانی محمدکاظم منشادی-امیراحمد میرسعید-افشین مینو-حسام نادری-مجتبی نکوئیان
	شیمی	امیرعلی بیات-محمدرضا پورجاوید-سعید تیزرو-محمدرضا جمشیدی-امیر حاتمیان-امیرحسین حسن‌نژاد-پیمان خواجوی‌مجد حمید ذبحی-یاسر راش-روزبه رضوانی-رضا سلیمانی-رسول عابدینی‌زواره-میلاد عزیزی-آرمین عظیمی-محمد عظیمیان‌زواره محمد فائزنیا-علی کریمی-امیرمحمد کنگرانی-محسن مجنونی-امین نوروزی-اکبر هنرمند

گزینشگران و ویراستاران

نام درس	حسابان ۲ و ریاضی‌پایه	هندسه	آمار و ریاضیات گسسته	فیزیک	شیمی
گزینشگر	کیان کریمی‌خراسانی	امیرحسین ابومحبوب	امیرحسین ابومحبوب	مصطفی کیانی	ایمان حسین‌نژاد
گروه ویراستاری	امیرحسین ابومحبوب	امیرحسین ابومحبوب مهرداد ملوندی	امیرحسین ابومحبوب مهرداد ملوندی	بهنام شاهینی زهره آقامحمدی	حسین شاهسواری محمدحسن محمدزاده مقدم یاسر راش آرش ظریف
بازبینی نهایی رتبه های برتر	محمدپارسا سبزه‌ای	محمدپارسا سبزه‌ای	محمدپارسا سبزه‌ای	سینا صالحی اوستا عباسی	ماهان فرهمندفر
مسئول درس	مهرداد ملوندی	سرژ یقیازاریان تبریزی	سرژ یقیازاریان تبریزی	حسام نادری	امیرعلی بیات
مستندسازی	سمیه اسکندری	سجاد سلیمی	سجاد سلیمی	علیرضا همایون‌خواه	امیرحسین توحیدی
ویراستاران مستندسازی	معصومه صنعت‌کار - علیرضا عباسی‌زاهد - محمدرضا مهدوی			مهدی صالحی سجاد بهارلویی پرهام مهرآرا	محمدصدرا وطنی محسن دستجردی

گروه فنی و تولید

مدیر گروه	مهرداد ملوندی	
مسئول دفترچه	نرگس غنی‌زاده	
گروه مستندسازی	مدیر گروه: محیا اصغری	مسئول دفترچه: الهه شهبازی
حروف‌نگار	فرزانه فتح اله‌زاده	
ناظر چاپ	سوران نعیمی	

گروه آزمون

بنیاد علمی آموزشی قلم‌چی (وقف عام)

دفتر مرکزی: خیابان انقلاب بین صبا و فلسطین – پلاک ۹۲۳ – کانون فرهنگی آموزش – تلفن: ۶۴۶۳-۰۲۱

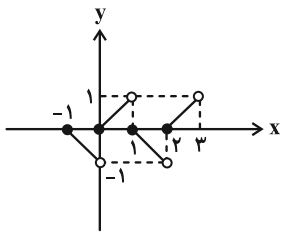
سنجش کلاد
www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshClouds

حسابان ۲

۱- **گزینهٔ «۲»** *(سینا خیرخواه)*

نمودار تابع را با بازه‌بندی رسم می‌کنیم:

$$\begin{cases} -1 \le x < 0 \Rightarrow [x] = -1 \Rightarrow y = -(x-[x]) = [x]-x \\ 0 \le x < 1 \Rightarrow [x] = 0 \Rightarrow y = x-[x] \\ 1 \le x < 2 \Rightarrow [x] = 1 \Rightarrow y = -(x-[x]) = [x]-x \\ 2 \le x < 3 \Rightarrow [x] = 2 \Rightarrow y = x-[x] \end{cases}$$



طبق نمودار رسم شده، تابع $f(x)$ نه $\max$ مطلق دارد و نه $\min$ مطلق.

توجه: تابع f یک تابع متناوب با دورهٔ تناوب $T = 2$ است.

(حسابان ۲- صفحه‌های ۱۱۲ تا ۱۱۶)

۲- **گزینهٔ «۳»** *(دانیال آرگیش)*

کافی است مشتق تابع مذکور را گرفته و تعیین علامت کنیم:

$$y = (x-1)^2(x+2) \Rightarrow y' = 2(x-1)(x+2) + (x-1)^2$$

$$\Rightarrow y' = (x-1)(\underbrace{2x+4+x-1}_{3x+3}) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -1 \end{cases}$$

x	$-\infty$		-1		$+1$		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y		↗		↘		↗	

صعودی نزولی صعودی

در بین گزینه‌ها، تابع فوق تنها در بازهٔ $(-1, -\infty)$ صعودی است.

(حسابان ۲- صفحه‌های ۱۲۰ تا ۱۲۳)

۳- **گزینهٔ «۴»** *(جهانبخش نیکنام)*

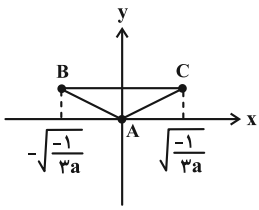
تابع f را به صورت دو ضابطه‌ای می‌نویسیم:

$$f(x) = |x|(ax^2+1) = \begin{cases} ax^3 + x & , \quad x \ge 0 \\ -ax^3 - x & , \quad x < 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow f'(x) = \begin{cases} 3ax^2 + 1 & , \quad x > 0 \\ -3ax^2 - 1 & , \quad x < 0 \end{cases}$$

$x = 0$ نقطهٔ بحرانی تابع f است چون $f'_+(0) \neq f'_-(0)$. همچنین نقاط بحرانی‌ای که مشتق تابع f به ازای آن‌ها صفر است را می‌یابیم:

$$f'(x) = 0 \Rightarrow x = \pm\sqrt{-\frac{1}{3a}} \Rightarrow f(\pm\sqrt{-\frac{1}{3a}}) = \frac{2}{3}\sqrt{-\frac{1}{3a}}$$



با توجه به نمودار تابع f، مساحت مثلث ABC به صورت زیر می‌شود:

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} \times (\frac{2}{3}\sqrt{-\frac{1}{3a}}) \times (2\sqrt{-\frac{1}{3a}}) = \frac{2}{3}(-\frac{1}{3a})$$

$$\xrightarrow{\text{طبق فرض: } S_{ABC} = \frac{1}{18}} \frac{2}{3}(-\frac{1}{3a}) = \frac{1}{18} \Rightarrow a = -4$$

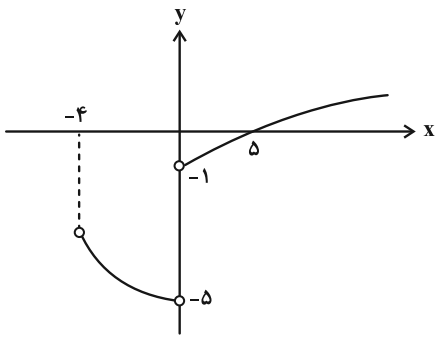
(حسابان ۲- صفحه‌های ۱۱۷ تا ۱۱۹)

۴- **گزینهٔ «۲»** *(جهانبخش نیکنام)*

تابع f را به صورت یک تابع سه ضابطه‌ای می‌نویسیم:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{|x|\sqrt{x+4} - 3x}{x} & , \quad x \in [-4, +\infty) - \{0\} \\ a & , \quad x = 0 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} -\sqrt{x+4} - 3 & , \quad -4 \le x < 0 \\ \sqrt{x+4} - 3 & , \quad x > 0 \\ a & , \quad x = 0 \end{cases}$$



با توجه به نمودار تابع f، اگر $a = -1, -2, -3, -4$ باشد، $x = 0$ اکسترمم نسبی نخواهد بود.

مجموع مقادیر $a = -1-2-3-4 = -10$

(حسابان ۲- صفحه‌های ۱۱۲ تا ۱۱۶)

سنجش کلاد
www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshClouds

۵- **گزینهٔ «۳»** (محمد گودرزی)

با توجه به این‌که $D_f = [۰ , +\infty)$ و f روی $(۰ , +\infty)$ مشتق‌پذیر است، می‌نویسیم:

$$f'(x) = \frac{\frac{۱}{۲\sqrt{x}}(x+a) - ۱(\sqrt{x})}{(x+a)^۲} = ۰$$

$$\Rightarrow f'(x) = \frac{a-x}{۲\sqrt{x}(x+a)^۲} = ۰ \Rightarrow x = a$$

x	۰		a		$+\infty$
$f'(x)$	▨	$+$	۰	$-$	
	▨	↗		↘	

بنابراین تابع f روی $[a , +\infty)$ اکیداً نزولی است. بنابراین باید:

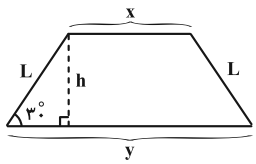
$$a \le ۳a - ۵ \Rightarrow ۲a \ge ۵ \Rightarrow a \ge \frac{۵}{۲}$$

در نتیجه کمترین مقدار طبیعی ممکن برای a برابر ۳ است.

(حسابان ۲- صفحه‌های ۱۲۰ تا ۱۲۳)

۶- **گزینهٔ «۳»** (غلامرضا نیازی)

راه‌حل اول: طول قاعده‌ها را x و y و طول ساق ذوزنقه را L می‌گیریم. با توجه به فرض و شکل زیر داریم:



محیط ذوزنقه: $P = x + y + ۲L = ۱۰۰ \Rightarrow x + y = ۱۰۰ - ۲L$

$$h = L\sin ۳۰^\circ = \frac{L}{۲}$$

مساحت ذوزنقه: $S = (\frac{x+y}{۲}).h = (\frac{۱۰۰-۲L}{۲}).\frac{L}{۲} = ۲۵L - \frac{L^۲}{۲}$

$$S' = ۲۵ - L = ۰ \Rightarrow L = ۲۵$$

$$\Rightarrow S_{max} = ۲۵(۲۵) - \frac{(۲۵)^۲}{۲} = \frac{۶۲۵}{۲} = ۳۱۲/۵$$

راه‌حل دوم:

نکته: اگر مجموع دو یا چند متغیر مثبت، عددی ثابت باشد، حاصل‌ضرب آن‌ها وقتی max است که با هم برابر باشند. پس:

$(x+y)+(۲L) = ۱۰۰$ (ثابت)

$$\Rightarrow S_{max} = (x+y).\frac{L}{۴} = (۵۰)(\frac{۲۵}{۴}) = ۳۱۲/۵$$

توجه:

$$x + y = ۲L = ۵۰ \Rightarrow \begin{cases} x+y = ۵۰ \\ L = ۲۵ \end{cases}$$

(حسابان ۲- صفحه‌های ۱۱۶ تا ۱۱۹)

۷- **گزینهٔ «۱»** (شاهین پروازی)

$$f'(x) = \frac{-(۲x+۴)(a-۱۰)}{(x^۲+۴x+a)^۲} = \frac{(۱۰-a)(۲x+۴)}{(x^۲+۴x+a)^۲}$$

$x = -۲$ ریشهٔ تابع f' است پس همین نقطه باید min نسبی تابع باشد و برای این‌که این نقطه min نسبی باشد، باید جدول تغییرات f به صورت زیر باشد:

x		-۲	
f'	$-$	۰	$+$
	↘		↗

پس $۰ > a - ۱۰$ و در نتیجه $a < ۱۰$.

با توجه به این‌که صورت کسر $f(x)$، منفی است اگر مخرج کسر تابع f، ریشهٔ ساده یا مضاعف داشته باشد، در حداقل یکی از طرفین ریشه‌ها، مخرج کسر برابر $(-\infty)$ می‌شود که در این صورت min مطلق ندارد، در نتیجه مخرج کسر ریشه ندارد و داریم:

$$\Delta\ (\text{مخرج}) < ۰ \Rightarrow ۱۶ - ۴a < ۰ \Rightarrow a > ۴$$

پس $۴ < a < ۱۰$ است. اما دقت کنید اگر $a = ۱۰$ باشد، آن گاه تابع $f(x)$ به تابع ثابت $f(x) = ۰$ تبدیل خواهد شد که همهٔ نقاط آن هم min نسبی و هم min مطلق هستند، پس $۴ < a \le ۱۰$ و در نتیجه حداکثر و حداقل مقدار صحیح a به ترتیب ۱۰ و ۵ خواهد بود.

$$a_{max} + a_{min} = ۱۰ + ۵ = ۱۵$$

(حسابان ۲- صفحه‌های ۱۱۶ تا ۱۲۴)

۸- **گزینهٔ «۲»** (شاهین پروازی)

$f(x) = \frac{۴}{x-۱} - \frac{۱}{x}$ تابع max برابر k کافی است در بازهٔ $(۰ , ۱)$ باشد:

$$f'(x) = \frac{-۴}{(x-۱)^۲} + \frac{۱}{x^۲} \xrightarrow{f'(x)=۰} \frac{۱}{x^۲} = \frac{۴}{(x-۱)^۲}$$

$$\frac{۱}{|x|} = \frac{۲}{|x-۱|} \xrightarrow{x \in (۰,۱)} \frac{۱}{x} = \frac{۲}{۱-x} \Rightarrow ۲x = ۱ - x \Rightarrow x = \frac{۱}{۳}$$

سنجش کلاد
www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshClouds

در نتیجه ماکزیمم مطلق تابع f در بازهٔ $(۱ , ۰)$ برابر است با:

$$f(\frac{۱}{۳}) = \frac{۴}{\frac{۱}{۳}-۱} - \frac{۱}{\frac{۱}{۳}} = -۹ \Rightarrow k = -۹$$

توجه: خطوط $x = ۰$ و $x = ۱$ مجانب‌های قائم تابع f هستند که در بازهٔ $(۱ , ۰)$، مقادیر تابع f در مجاورت این مجانب‌ها به سمت $(-\infty)$ میل می‌کند و تابع f مینیمم مطلق ندارد.

(حسابان ۲- صفحه‌های ۱۱۶ تا ۱۱۹)

۹- **گزینهٔ «۳»** (کاظم اجلالی)

ابتدا توجه کنید که $D_f = (-\infty , ۳]$ و داریم:

$$f'(x) = \frac{۱}{۳} - \frac{۱}{۲\sqrt{۳-x}} = \frac{۲\sqrt{۳-x}-۳}{۶\sqrt{۳-x}}$$

$$f'(x) \le ۰ \Rightarrow ۲\sqrt{۳-x} \le ۳ \Rightarrow ۳-x \le \frac{۹}{۴} \Rightarrow x \ge \frac{۳}{۴}$$

بنابراین تابع f روی بازهٔ $[\frac{۳}{۴} , ۳]$ نزولی است و بیشترین مقدار $b-a$ برابر می‌شود با:

$$۳ - \frac{۳}{۴} = \frac{۹}{۴}$$

(حسابان ۲- صفحه‌های ۱۲۰ تا ۱۲۲)

۱۰- **گزینهٔ «۱»** (کیان کریمی‌خراسانی)

چون تابع f فاقد نقطهٔ بحرانی است، نتیجه می‌گیریم که $f'(a)$ موجود است. پس تابع f باید پیوسته باشد که با بررسی مقادیر $f(a)$، $\lim\limits_{x\to a^-} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)$ نتیجه می‌گیریم که تابع f در $x = a$ پیوسته می‌باشد. لذا باید مشتق چپ و راست f در این نقطه برابر باشد:

$$f'_-(a) = f'_+(a) \Rightarrow ۳a^۲ = ۱۲ \Rightarrow a = \pm ۲$$

به ازای $a = ۲$، تابع f در $x = ۰$ نقطهٔ بحرانی خواهد داشت چون $f'(۰) = ۰$، ولی به ازای $a = -۲$ این اتفاق نمی‌افتد.

(حسابان ۲- صفحهٔ ۱۱۷)

حسابان ۲- پیشروی سریع

۱۱- **گزینهٔ «۴»** (امیدرضا ذاکرزاده)

مشتق دوم تابع را به دست می‌آوریم:

$$y = \sin^۲ x + ۲\sin x$$

$$\Rightarrow y' = ۲\sin x\cos x + ۲\cos x = \sin ۲x + ۲\cos x$$

$$\Rightarrow y'' = ۲\cos ۲x - ۲\sin x = ۲(۱-۲\sin^۲ x) - ۲\sin x$$

ریشه‌های مشتق دوم تابع عبارتند از:

$$y'' = -۲\overbrace{(۲\sin x - ۱)(\sin x + ۱)}^{(۲\sin^۲ x + \sin x - ۱)} = ۰ \Rightarrow \sin x = -۱ \quad \text{یا} \quad \sin x = \frac{۱}{۲}$$

در بازهٔ $۰ < x < \frac{\pi}{۲}$، فقط $\sin x = \frac{۱}{۲}$ قابل قبول است و $x = \frac{\pi}{۶}$ طول تنها نقطه عطف تابع در بازهٔ $(\frac{\pi}{۲} , ۰)$ است. شیب خط مماس بر نمودار تابع در این نقطه برابر می‌شود با:

$$y' = \sin ۲x + ۲\cos x \xrightarrow{\text{شیب خط مماس در } x=\frac{\pi}{۶}}$$

$$m = \sin(\frac{\pi}{۳}) + ۲\cos(\frac{\pi}{۶}) = \frac{\sqrt{۳}}{۲} + ۲(\frac{\sqrt{۳}}{۲}) = \frac{۳\sqrt{۳}}{۲}$$

(حسابان ۲- صفحه‌های ۱۳۱ تا ۱۳۴)

۱۲- **گزینهٔ «۲»** (مهسان کوررزی)

راه‌حل اول: ضابطهٔ تابع هموگرافیک $y = f(x)$ را به دست می‌آوریم:

$$\frac{۱}{y-۳} = ۱ - \frac{۱}{x-۲} \Rightarrow \frac{۱}{y-۳} = \frac{x-۲-۱}{x-۲} \Rightarrow \frac{۱}{y-۳} = \frac{x-۳}{x-۲}$$

$$\Rightarrow y-۳ = \frac{x-۲}{x-۳} \Rightarrow y = \frac{x-۲}{x-۳} + ۳$$

مجانب‌های قائم و افقی تابع f به صورت زیر می‌شود:

$$x - ۳ = ۰ \Rightarrow x = ۳ \quad \text{(مجانب قائم)}$$

$$\lim_{x\to\infty} y = \lim_{x\to\infty} (\frac{x-۲}{x-۳} + ۳) = ۱ + ۳ = ۴ \Rightarrow y = ۴ \quad \text{(مجانب افقی)}$$

نقطهٔ $(۴ , ۳)$ برخورد مجانب‌ها است.

راه‌حل دوم:

$$\begin{cases} \text{مجانب افقی } (x \to \pm\infty): ۰ + \frac{۱}{y-۳} = ۱ \Rightarrow y = ۴ \\ \text{مجانب قائم } (y \to \pm\infty): \frac{۱}{x-۲} + ۰ = ۱ \Rightarrow x = ۳ \end{cases} \Rightarrow (۳ , ۴)$$

(حسابان ۲- صفحه‌های ۱۴۱ تا ۱۴۴)

سنجش کلاد
www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshClouds

۱۳- **گزینهٔ «۳»** *(رضا ماجدی)*

برای این‌که یک تابع درجه سوم، سه ریشهٔ متمایز داشته باشد، اولاً باید دارای ماکزیمم و مینیمم نسبی باشد و ثانیاً حاصل‌ضرب مقادیر ماکزیمم و مینیمم نسبی آن منفی باشد.

مقادیر اکسترمم نسبی تابع را به دست می‌آوریم:

$$f(x)=9x^3-3ax+2a \Rightarrow f'(x)=27x^2-3a=0$$

$$\xrightarrow{\text{باید: } a>0} \begin{cases} x=\dfrac{\sqrt{a}}{3} \\ x=-\dfrac{\sqrt{a}}{3} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x=\dfrac{\sqrt{a}}{3} \Rightarrow f(\dfrac{\sqrt{a}}{3})=\dfrac{-2a\sqrt{a}}{3}+2a : \text{نسبی } \min \\ x=-\dfrac{\sqrt{a}}{3} \Rightarrow f(-\dfrac{\sqrt{a}}{3})=\dfrac{2a\sqrt{a}}{3}+2a : \text{نسبی } \max \end{cases}$$

$$\Rightarrow (2a-\frac{2a\sqrt{a}}{3})(2a+\frac{2a\sqrt{a}}{3})=4a^2-\frac{4a^3}{9}<0$$

$$\Rightarrow 4a^2(1-\frac{a}{9})<0 \xrightarrow{4a^2>0} 1-\frac{a}{9}<0 \Rightarrow a>9$$

در نتیجه a ، ۹ مقدار طبیعی ۹ , ... , ۲ , ۱ را نمی‌تواند قبول کند.

(حسابان ۲- صفحه‌های ۱۳۷ تا ۱۴۰)

۱۴- **گزینهٔ «۳»** *(دانیال آرکیش)*

ضابطهٔ تابع f را به صورت $f(x)=ax^4+bx^3+cx^2+dx+e$ در نظر می‌گیریم. با توجه به نمودار $f(0)=1$، پس $e=1$. همچنین $x=0$ طول نقطه عطف افقی است. پس $f'(0)=0$ و $f''(0)=0$ و داریم:

$$\begin{cases} f'(x)=4ax^3+3bx^2+2cx+d \xrightarrow{f'(0)=0} d=0 \\ f''(x)=12ax^2+6bx+2c \xrightarrow{f''(0)=0} c=0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow f(x)=ax^4+bx^3+1$$

نقطهٔ $(0,-1)$ روی نمودار قرار دارد. پس:

$$f(-1)=0 \Rightarrow a-b+1=0 \Rightarrow a-b=-1 \qquad (1)$$

از طرفی در $x=1$ مشتق تابع برابر صفر است:

$$f'(1)=4a(1)^3+3b(1)^2=0 \Rightarrow 4a+3b=0 \qquad (2)$$

$$\xrightarrow{(1),(2)} \begin{cases} a-b=-1 \\ 4a+3b=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3a-3b=-3 \\ 4a+3b=0 \end{cases} \Rightarrow a=-\frac{3}{7},\ b=\frac{4}{7}$$

در نتیجه: $f(x)=-\frac{3}{7}x^4+\frac{4}{7}x^3+1 \Rightarrow m=f(1)=\frac{8}{7}$

(حسابان ۲- صفحه‌های ۱۳۷ تا ۱۴۰)

۱۵- **گزینهٔ «۲»** *(نیما مهندس)*

خطی که از اکسترمم‌های نسبی یک تابع درجهٔ ۳ می‌گذرد، یا به عبارتی max و min نسبی این تابع را به هم وصل می‌کند، حتماً از نقطه عطف تابع نیز عبور می‌کند. پس ابتدا مختصات نقطه عطف $f(x)$ را به دست می‌آوریم:

$$f'(x)=6x^2-a \Rightarrow f''(x)=12x$$

$$\xrightarrow{f''(x)=0} \text{مختصات نقطه عطف}: I=(0,b)$$

$$\xrightarrow{I\in \ell: y+4x=5} b+4\times(0)=5 \Rightarrow b=5$$

چون $f(x)$ همواره مشتق‌پذیر است، از حل معادلهٔ $f'(x)=0$، طول نقاط اکسترمم نسبی تابع به دست می‌آید. پس داریم:

$$6x^2-a=0 \Rightarrow x=\pm\sqrt{\frac{a}{6}}$$

$$y+4x=5 \xrightarrow{x=\sqrt{\frac{a}{6}}} y+4\sqrt{\frac{a}{6}}=5 \Rightarrow y=-4\sqrt{\frac{a}{6}}+5$$

$$\xrightarrow{(\sqrt{\frac{a}{6}},-4\sqrt{\frac{a}{6}}+5)\in f} -4\sqrt{\frac{a}{6}}+5=2\frac{a}{6}\sqrt{\frac{a}{6}}-a\sqrt{\frac{a}{6}}+5$$

$$\xrightarrow{\text{توجه: } \sqrt{\frac{a}{6}}\neq 0} -4=\frac{a}{3}-a=-\frac{2a}{3} \Rightarrow a=6$$

در نتیجه $a-b=6-5=1$.

(حسابان ۲- صفحه‌های ۱۳۱ تا ۱۳۴)

۱۶- **گزینهٔ «۲»** *(محمد زنگنه)*

مشتق دوم تابع f را به دست می‌آوریم:

$$f(x)=9x^2\sqrt[3]{x^2}-20x^2 \Rightarrow f(x)=9x^{\frac{8}{3}}-20x^2$$

$$\Rightarrow f'(x)=9\times\frac{8}{3}x^{\frac{5}{3}}-40x \Rightarrow f''(x)=9\times\frac{40}{9}x^{\frac{2}{3}}-40=40x^{\frac{2}{3}}-40$$

سنجش کلاد
www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshClouds

ریشه‌های مشتق دوم تابع f عبارتند از:

$$f''(x)=۰ \Rightarrow ۴۰(x^{\frac{۲}{۳}}-۱)=۰ \Rightarrow x=\pm ۱$$

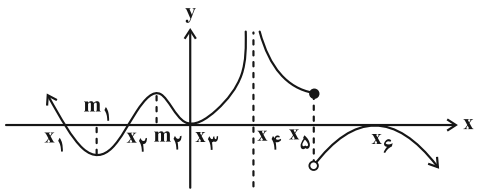
تقعر تابع f در نقاط به طول $x=\pm ۱$ عوض شده و در این نقاط، خط مماس بر نمودار تابع f رسم می‌شود، پس نقاط عطف تابع هستند:

$$\begin{cases} A(۱\ ,\ -۱۱) \\ B(-۱\ ,\ -۱۱) \end{cases} \Rightarrow m_{AB}=\frac{-۱۱+۱۱}{۱+۱}=۰$$

(حسابان ۲- صفحه‌های ۱۳۱ تا ۱۳۴)

۱۷- **گزینهٔ «۱»** (داود بوالحسنی)

نقاط به طول $x_۱ , x_۲ , \dots , x_۶$ نقاط بحرانی تابع f هستند.



جدول تعیین علامت f' برای این نقاط به صورت زیر می‌شود:

x		$x_۱$		$x_۲$		$x_۳$		$x_۴$		$x_۵$		$x_۶$	
f'	+	۰	−	۰	+	۰	+		+		−	۰	−
	↗		↘		↗		↗		↗		↘		↘

نقاط به طول $x_۱$ و $x_۵$ ماکزیمم نسبی و نقطه به طول $x_۲$ مینیمم نسبی است.

از طرفی در نقاط $m_۱ , m_۲ , x_۳ , x_۶$، مقدار f'' تغییر علامت می‌دهد و در همهٔ آن‌ها مماس وجود دارد، پس این ۴ نقطه، عطف هستند.

در نقطهٔ $x_۴$ نیز f'' وجود ندارد ولی f'' تغییر علامت می‌دهد و در این نقطه، مماس قائم دارد، پس $x_۴$ هم عطف (قائم) است.

پس تابع f، ۲ نقطه ماکزیمم نسبی، ۱ نقطهٔ مینیمم نسبی و ۵ نقطهٔ عطف دارد.

توجه: در نقطه به طول $x_۵$، با وجود این‌که f'' تغییر علامت می‌دهد ولی چون تابع f در این نقطه، مشتق‌ناپذیر است، لذا مماس واحد نداریم و $x_۵$ نمی‌تواند نقطهٔ عطف باشد.

(حسابان ۲- صفحه‌های ۱۳۱ تا ۱۳۶)

۱۸- **گزینهٔ «۴»** (بهانبخش نیکنام)

مشتق دوم تابع را به دست می‌آوریم:

$$f(x)=(x+m)\sqrt[۳]{x} \Rightarrow f'(x)=\sqrt[۳]{x}+\frac{x+m}{۳\sqrt[۳]{x^۲}}=\frac{۴x+m}{۳\sqrt[۳]{x^۲}}$$

$$\Rightarrow f''(x)=\frac{۴(۳\sqrt[۳]{x^۲})-\frac{۳\times ۲}{۳\sqrt[۳]{x}}(۴x+m)}{۹\sqrt[۳]{x^۴}}=\frac{۴x-۲m}{۹x\sqrt[۳]{x^۲}}$$

در نقاط به طول $x=۰$ و $x=\frac{m}{۲}$، تابع f'' تغییر علامت می‌دهد و در هر کدام از آن‌ها، خط مماس یکتا بر تابع f وجود دارد، پس هر دوی آن‌ها نقاط عطف تابع f هستند و طبق فرض داریم:

$$۰+\frac{m}{۲}=۶ \Rightarrow m=۱۲$$

(حسابان ۲- صفحه‌های ۱۳۱ تا ۱۳۴)

۱۹- **گزینهٔ «۱»** (بهانبخش نیکنام)

با توجه به این‌که نمودار تابع f بر محور xها مماس است، پس معادلهٔ $f(x)=۰$ دارای ریشهٔ مضاعف است. از طرفی مقادیر تابع f در همسایگی مجانب قائم $x=۱$ به سمت $(+\infty)$ میل می‌کند پس در مخرج کسر عامل $(x-۱)^۲$ وجود دارد. با توجه به ضابطهٔ تابع f داریم:

$$f(x)=\frac{(x+\frac{a}{۲})^۲}{(x-۱)^۲(x+a)} \xrightarrow{f(۰)=\frac{۳}{۲}} f(۰)=\frac{\frac{a^۲}{۴}}{a}=\frac{۳}{۲}$$

$$\Rightarrow \frac{a}{۴}=\frac{۳}{۲} \Rightarrow a=۶$$

در نتیجه:

$$f(x)=\frac{(x+۳)^۲}{(x-۱)^۲(x+۶)}=\frac{(x+۳)^۲}{x^۳+۴x^۲-۱۱x+۶}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} c=۴ \\ d=-۱۱ \end{cases} \Rightarrow f(d+۲c)=f(-۳)=۰$$

(حسابان ۲- صفحه‌های ۱۳۷ تا ۱۴۴)

۲۰- **گزینهٔ «۴»** (کیان کریمی‌خراسانی)

تابع را به صورت دو ضابطه‌ای می‌نویسیم، با فرض $a \neq ۴$ داریم:

$$f(x)=\begin{cases} ax^۲-(۳a+۱۲)x+۳۶ & , \quad x \geq ۳ \\ -ax^۲+(۳a+۱۲)x-۳۶ & , \quad x<۳ \end{cases}$$

$$\Rightarrow f'(x)=\begin{cases} ۲ax-۳a-۱۲ & , \quad x>۳ \\ -۲ax+۳a+۱۲ & , \quad x<۳ \end{cases}$$

$$\Rightarrow f''(x)=\begin{cases} ۲a & , \quad x>۳ \\ -۲a & , \quad x<۳ \end{cases}$$

با توجه به f''، تابع در هیچ کدام از دو بازهٔ $(-\infty\ ,\ ۳)$ و $(۳\ ,\ +\infty)$ تغییر تقعر نمی‌دهد. ولی اگر $a=۴$ باشد، آن‌گاه تابع f در $x=۳$ هم مشتق‌پذیر می‌شود و هم در این نقطه تغییر تقعر می‌دهد، یعنی نقطهٔ عطف است.

(حسابان ۲- صفحه‌های ۱۳۱ تا ۱۳۴)

سنجش کلاد
www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshClouds

ریاضی پایه

۲۱- **گزینهٔ «۳»** *(حامد معنوی)*

توجه کنید که: $1+\tan^2\alpha=\frac{1}{\cos^2\alpha}\Rightarrow 1+(\frac{12}{5})^2=\frac{1}{\cos^2\alpha}$

$\Rightarrow \cos^2\alpha=\frac{25}{169}\xrightarrow{\text{ربع اول}}\cos\alpha=\frac{5}{13}\Rightarrow \sin\alpha=\frac{12}{13}$

مطابق شکل داریم:

$$\begin{cases}A(\frac{5}{13},\frac{12}{13})\\ B(-1,0)\end{cases}\Rightarrow m_{AB}=\frac{\frac{12}{13}-0}{\frac{5}{13}+1}=\frac{\frac{12}{13}}{\frac{18}{13}}=\frac{12}{18}=\frac{2}{3}$$

معادلهٔ خط گذرا از نقاط A و B به صورت زیر می‌شود:

$$y-0=\frac{2}{3}(x+1)\Rightarrow y=\frac{2}{3}x+\frac{2}{3}$$

مختصات نقطهٔ M را به دست می‌آوریم:

$$y=\frac{2}{3}x+\frac{2}{3}\xrightarrow{x=0}M(0,\frac{2}{3})$$

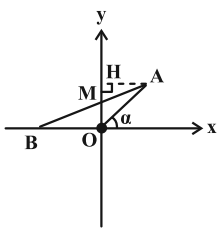
برای به دست آورد مساحت مثلث OAM می‌توان از دو روش زیر استفاده کرد:

روش اول: $S_{OAM}=\frac{1}{2}\times OM\times OA\times\underbrace{\sin(\frac{\pi}{2}-\alpha)}_{\cos\alpha}$

$$\Rightarrow S_{OAM}=\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}\times 1\times\frac{5}{13}=\frac{5}{39}$$

روش دوم: ارتفاع AH در مثلث OAM برابر با $\cos\alpha$ است، پس:

$$S_{OAM}=\frac{1}{2}\times OM\times\underbrace{AH}_{\cos\alpha}=\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}\times\frac{5}{13}=\frac{5}{39}$$



(ریاضی ۱- مثلثات؛ صفحه‌های ۳۶ تا ۴۳)

۲۲- **گزینهٔ «۲»** *(بهمن امیری)*

طبق فرض سؤال داریم:

$$2\sin^2\alpha-3\cos^2\alpha=1\Rightarrow 2(1-\cos^2\alpha)-3\cos^2\alpha=1$$

$$2-5\cos^2\alpha=1\Rightarrow\cos^2\alpha=\frac{1}{5}\Rightarrow\sin^2\alpha=\frac{4}{5}$$

α حاده است، پس: $\sin\alpha=\frac{2}{\sqrt{5}}\quad,\quad\cos\alpha=\frac{1}{\sqrt{5}}$

در مثلث قائم‌الزاویهٔ AHC داریم:

$$\sin\alpha=\frac{x}{x+1}=\frac{2}{\sqrt{5}}\Rightarrow 2x+2=\sqrt{5}x$$

$$\Rightarrow\sqrt{5}x-2x=2\Rightarrow x=\frac{2}{\sqrt{5}-2}\times\frac{\sqrt{5}+2}{\sqrt{5}+2}=2\sqrt{5}+4$$

از طرفی: $\cos\alpha=\frac{AH}{x+1}\Rightarrow\frac{1}{\sqrt{5}}=\frac{AH}{2\sqrt{5}+5}$

$$\Rightarrow AH=\frac{2\sqrt{5}+5}{\sqrt{5}}=2+\sqrt{5}$$

(ریاضی ۱- مثلثات؛ صفحه‌های ۳۰ تا ۳۵، ۴۲ و ۴۳)

۲۳- **گزینهٔ «۲»** *(جهانبخش نیکنام)*

با توجه به فرض، رابطهٔ سینوسی را برای مساحت مثلث ABC می‌نویسیم:

$$S_{ABC}=\frac{1}{2}\times(4+\sin x)(\frac{1}{1+\cos x})\times\sin 30^\circ=\frac{3}{4}$$

$$\Rightarrow\frac{4+\sin x}{1+\cos x}=3\Rightarrow 4+\sin x=3+3\cos x$$

$$\Rightarrow\sin x=3\cos x-1\xrightarrow{\text{توان ۲}}\sin^2 x=9\cos^2 x-6\cos x+1$$

$$\Rightarrow 1-\cos^2 x=9\cos^2 x-6\cos x+1$$

$$\Rightarrow 10\cos^2 x-6\cos x=0\Rightarrow\begin{cases}\cos x=0 & \text{غ ق ق}\\ \cos x=\frac{3}{5}\Rightarrow\sin x=\frac{4}{5}\end{cases}$$

سنجش کلاد
www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshClouds

در نتیجه مساحت مثلث $A'B'C'$ برابر می‌شود با:

$$S_{A'B'C'} = \frac{1}{2}(\sin x \cos x)\sin x = \frac{1}{2}\times(\frac{4}{5})^2 \times \frac{3}{5} = \frac{24}{125}$$

(ریاضی ۱- مثلثات: صفحه‌های ۳۳ تا ۳۵، ۴۲ و ۴۳)

۲۴- **گزینهٔ «۱»** *(علی سلامت)*

ابتدا عبارت داده شده را به صورت زیر بازنویسی می‌کنیم:

$$\frac{\tan 547^\circ - \cot 173^\circ}{2\tan 353^\circ - \cot 97^\circ} = \frac{\tan(540^\circ + 7^\circ) - \cot(180^\circ - 7^\circ)}{2\tan(360^\circ - 7^\circ) - \cot(90^\circ + 7^\circ)}$$

$$= \frac{\tan 7^\circ + \cot 7^\circ}{-2\tan 7^\circ + \tan 7^\circ} = \frac{\tan 7^\circ + \cot 7^\circ}{-\tan 7^\circ}$$

$$= -(1 + \cot^2 7^\circ) = x \Rightarrow 1 + \cot^2 7^\circ = -x$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\sin^2 7^\circ} = -x \Rightarrow \sin^2 7^\circ = -\frac{1}{x}$$

از طرفی با توجه به رابطهٔ $\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x$ داریم:

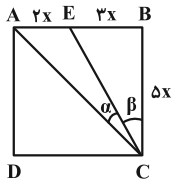
$$\cos 14^\circ = 1 - 2\sin^2 7^\circ = 1 + \frac{2}{x} = \frac{x+2}{x}$$

(حسابان ۱- مثلثات: صفحه‌های ۹۸ تا ۱۰۴ و ۱۱۲)

۲۵- **گزینهٔ «۲»** *(افشین خاصه‌خان)*

با توجه به فرض، $AE = 2x$، $EB = 3x$ و $AB = BC = 5x$ است و همچنین:

$$EC = \sqrt{25x^2 + 9x^2} = \sqrt{34}x$$



مطابق شکل $\alpha + \beta = \frac{\pi}{4}$ و داریم:

$$\sin\alpha = \sin(\frac{\pi}{4} - \beta) = \sin\frac{\pi}{4}\cos\beta - \cos\frac{\pi}{4}\sin\beta$$

$$\Rightarrow \sin\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}(\cos\beta - \sin\beta) = \frac{\sqrt{2}}{2}(\frac{5x}{\sqrt{34}x} - \frac{3x}{\sqrt{34}x})$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{2}{\sqrt{34}} = \frac{1}{\sqrt{17}}$$

(حسابان ۱- مثلثات: صفحه‌های ۱۱۰ تا ۱۱۲)

۲۶- **گزینهٔ «۳»** *(علیرضا نداف‌زاده)*

با توجه به کار در کلاس صفحهٔ ۱۲۰ کتاب درسی، تابع $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ حول $x = 0$ با مقادیر کمتر به عدد ۱ نزدیک می‌شود، پس:

$$\lim_{x\to 0^-}[\frac{x}{\sin x}] = [1^+] = 1$$

از طرفی در یک همسایگی راست $x = 0$، عبارت $\sin x - x$ کمتر از صفر است، پس:

$$\lim_{x\to 0^+}[\sin x - x] = [0^-] = -1$$

پس حاصل عبارت مورد نظر برابر می‌شود با $2 - (-1) = 1$.

(حسابان ۱- حد و پیوستگی: صفحه‌های ۱۲۰ تا ۱۲۹)

۲۷- **گزینهٔ «۴»** *(غلامرضا نیازی)*

ابتدا حد چپ تابع f در $x = 1$ را به دست می‌آوریم:

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-}([x^2] - x^2) = [1^-] - 1 = 0 - 1 = -1$$

حد راست تابع f در $x = 1$ برابر می‌شود با:

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+}\frac{2x - \sqrt{x+3}}{x - \sqrt{x}}$$

$$= \lim_{x\to 1^+}\frac{2x - \sqrt{x+3}}{\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)}\times\frac{2x + \sqrt{x+3}}{2x + \sqrt{x+3}}$$

$$= \lim_{x\to 1^+}\frac{4x^2 - x - 3}{\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)(2x + \sqrt{x+3})}$$

$$= \lim_{x\to 1^+}\frac{(x-1)(4x+3)}{\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)(2x + \sqrt{x+3})}$$

سنجش کلاد
www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshClouds

$$= \lim_{x\to 1^+} \frac{(\sqrt{x}+1)(4x+3)}{\sqrt{x}(2x+\sqrt{x+3})} = \frac{2(7)}{4} = \frac{7}{2} = 3/5$$

در نتیجه اختلاف حد چپ و راست برابر است با:

$$3/5 - (-1) = 4/5$$

(حسابان ۱- حد و پیوستگی؛ صفحه‌های ۱۲۳ تا ۱۲۹ و ۱۴۱ تا ۱۴۴)

۲۸- **گزینهٔ «۱»** *(بهمن امیدی)*

حاصل حد را به صورت زیر به دست می‌آوریم:

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \frac{\frac{\sin x}{\cos x} - \frac{\cos x}{\sin x}}{2\sqrt{2}\cos^2 x - 2\sqrt{2}\sin x.\cos x}$$

$$= \lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \frac{\frac{\sin^2 x - \cos^2 x}{\sin x.\cos x}}{2\sqrt{2}\cos x(\cos x - \sin x)}$$

$$= \lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \frac{\sin^2 x - \cos^2 x}{(\sin x.\cos x)(2\sqrt{2}\cos x)(\cos x - \sin x)}$$

$$= \lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \frac{(\sin x - \cos x)(\sin x + \cos x)}{\sqrt{2}(\sin 2x.\cos x)(\cos x - \sin x)}$$

$$= \lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \frac{-(\sin x + \cos x)}{\sqrt{2}(\sin 2x.\cos x)} = \frac{-\sqrt{2}}{\sqrt{2}(1)(\frac{\sqrt{2}}{2})} = -\sqrt{2}$$

(حسابان ۱- حد و پیوستگی؛ صفحه‌های ۱۳۷ تا ۱۴۴)

۲۹- **گزینهٔ «۲»** *(سینا خیرخواه)*

با توجه به فرض و شکل صورت سوال، مقادیر a و b را به دست می‌آوریم:

$$a = \lim_{x\to 2^+} \frac{x^2[x]-8}{x[x]-4} = \lim_{x\to 2^+} \frac{2x^2-8}{2x-4}$$

$$= \lim_{x\to 2^+} \frac{2(x+2)(x-2)}{2(x-2)} = \lim_{x\to 2^+} (x+2) = 4$$

$$b = \lim_{x\to 1^+} [f(f(x))] = \lim_{t\to 1^-} [f(t)] = [3^-] = 2$$

توجه: وقتی $x \to 1^+$، آن‌گاه تابع f با مقادیر کمتر به عدد ۱ نزدیک می‌شود؛ همچنین وقتی $x \to 1^-$، آن‌گاه تابع f با مقادیر کمتر به عدد ۳ نزدیک می‌شود.

در نتیجه: $h(x) = (x^2 - 6x + 8)[x]$

عبارت x در بازهٔ $(1, 5)$ به ازای $x = 2, 3, 4$، مقادیر صحیح می‌شود ولی $x = 2, 4$ ریشه‌های عبارت پشت $[x]$ هستند، پس تابع $h(x)$ فقط در $x = 3$ ناپیوسته می‌باشد.

(حسابان ۱- حد و پیوستگی؛ صفحه‌های ۱۴۵ تا ۱۵۱)

۳۰- **گزینهٔ «۱»** *(داود بوالحسنی)*

با توجه به این‌که تابع f در R پیوسته است، پس $x = a$ باید تنها ریشهٔ $x^3 - 4x + c = 0$ باشد؛ از طرفی ریشهٔ صورت نیز می‌باشد (یعنی $x^2 - x - 2 = 0$)، پس ریشهٔ مشترک صورت و مخرج است:

$$x^2 - x - 2 = 0 \Rightarrow (x-2)(x+1) = 0 \Rightarrow x = 2 \ , \ x = -1$$

$$\begin{cases} \text{حالت اول}: a = 2 \Rightarrow 2^3 - 4(2) + c = 0 \Rightarrow c = 0 \\ \text{حالت دوم}: a = -1 \Rightarrow (-1)^3 - 4(-1) + c = 0 \Rightarrow c = -3 \end{cases}$$

مقادیر b در هر یک از حالت‌ها را محاسبه می‌کنیم:

$$\lim_{x\to 2} \frac{(x-2)(x+1)}{\underbrace{x^3 - 4x}_{x(x-2)(x+2)}} = \lim_{x\to 2} \frac{x+1}{x(x+2)} = \frac{3}{8} = b_1$$

$$\lim_{x\to -1} \frac{(x-2)(x+1)}{\underbrace{x^3 - 4x - 3}_{(x+1)(x^2-x-3)}} = \lim_{x\to -1} \frac{x-2}{x^2 - x - 3} = \frac{-3}{-1} = 3 = b_2$$

در نتیجه نسبت مقادیر ممکن برای b برابر با یکی از مقادیر 8 یا $\frac{1}{8}$ است.

(حسابان ۱- حد و پیوستگی؛ صفحه‌های ۱۴۵ تا ۱۵۱)

سنجش کلاد
www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshClouds

هندسه ۳

۳۱- **گزینهٔ «۱»** *(اسفاق اسفندیار)*

در ناحیهٔ ششم داریم $x<0$ ، $y>0$ و $z<0$ ، پس:

$$\begin{cases}2m-5<0\\3>0\\-2<0\end{cases}\Rightarrow m<\frac{5}{2} \qquad (1)$$

در ناحیهٔ سوم نیز $x<0$ ، $y<0$ و $z>0$ ، بنابراین داریم:

$$\begin{cases}-1<0\\3-7m<0\Rightarrow m>\frac{3}{7}\\4>0\end{cases} \qquad (2)$$

از (۱) و (۲) نتیجه می‌شود که $\frac{3}{7}<m<\frac{5}{2}$ و m تنها مقادیر صحیح ۱ و ۲ را قبول می‌کند که میانگین آن‌ها برابر $\frac{3}{2}$ است.

(هندسه ۳- صفحه‌های ۶۴ و ۶۵)

۳۲- **گزینهٔ «۴»** *(هومن عقیلی)*

داریم:

$$\begin{cases}\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}\\\overrightarrow{MP}+\overrightarrow{PN}=\overrightarrow{MN}\end{cases}$$

فرض: $\underbrace{\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}}_{\overrightarrow{AC}}+3(\underbrace{\overrightarrow{MP}+\overrightarrow{PN}}_{\overrightarrow{MN}})=\vec{0}\Rightarrow\overrightarrow{AC}=-3\overrightarrow{MN}$

پس دو بردار $\overrightarrow{AC}$ و $\overrightarrow{MN}$ با هم موازی و خلاف جهت یکدیگر هستند و با یکدیگر زاویهٔ 180° می‌سازند.

(هندسه ۳- صفحه‌های ۶۹ تا ۷۲)

۳۳- **گزینهٔ «۲»** *(اسفاق اسفندیار)*

بلندترین میانه، میانه وارد بر کوتاه‌ترین ضلع است. طول اضلاع مثلث را پیدا می‌کنیم:

$$AB=\sqrt{1+1+1}=\sqrt{3}$$

$$AC=\sqrt{4+1+1}=\sqrt{6}$$

$$BC=\sqrt{1+4+4}=3$$

بلندترین میانه، متناظر با کوتاه‌ترین ضلع (یعنی AB) است. نقطهٔ M، وسط ضلع AB به صورت $M(\frac{1}{2},\frac{5}{2},-\frac{3}{2})$ است و طول میانه CM برابر می‌شود با:

$$CM=\sqrt{(-1-\frac{1}{2})^2+(1-\frac{5}{2})^2+(0+\frac{3}{2})^2}\Rightarrow CM=\frac{3\sqrt{3}}{2}$$

(هندسه ۳- صفحه‌های ۶۴ تا ۶۸)

۳۴- **گزینهٔ «۴»** *(سیدمحمدرضا حسینی‌فرد)*

به کمک مختصات نقطهٔ $A(2,-1,-2)$، مختصات بقیهٔ نقاط را به دست می‌آوریم:

$$\begin{cases}B(0,0,-2)\\C(2,0,-2)\\D(0,-1,0)\end{cases}$$

بنابراین مؤلفه‌های بردارهای مورد نظر به صورت زیر می‌شود:

$$\begin{cases}\overrightarrow{AB}=(-2,1,0)\\\overrightarrow{CD}=(-2,-1,2)\end{cases}$$

$$\Rightarrow\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{CD}=(-2,1,0)-(-2,-1,2)=(0,2,-2)$$

(هندسه ۳- صفحه‌های ۶۴ تا ۶۸ و ۷۳ تا ۷۵)

۳۵- **گزینهٔ «۴»** *(افشین خاصه‌خان)*

با توجه به فرض، رابطهٔ $B=\frac{C+A}{2}$ برقرار است، لذا مختصات نقطهٔ C به صورت زیر به دست می‌آید:

$$\begin{cases}\frac{x_C+1}{2}=0\Rightarrow x_C=-1\\\frac{y_C+0}{2}=-a\Rightarrow y_C=-2a\\\frac{z_C-6}{2}=a-3\Rightarrow z_C=2a\end{cases}$$

از طرفی داریم: $|\overrightarrow{OC}|=3\Rightarrow\sqrt{(-1)^2+(-2a)^2+(2a)^2}=3$

$$\Rightarrow 1+4a^2+4a^2=9\Rightarrow 8a^2=8\Rightarrow a=\pm1$$

مجموع مقادیر ممکن برای a مساوی صفر می‌شود.

(هندسه ۳- صفحه‌های ۶۴ تا ۶۸ و ۷۳)

www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshClouds

۳۶- **گزینهٔ «۲»** *(احمدرضا فلاح)*

چون مؤلفه‌های x و z در دو نقطه A و B با هم برابرند، پس معادلهٔ خط گذرا از دو نقطهٔ A و B به صورت $d:(x=۲\ ,\ z=۱)$ می‌باشد. مختصات همهٔ نقاط روی این خط به شکل $(۲\ ,\ t\ ,\ ۱)$ می‌باشد. پس مختصات نقطهٔ M به شکل $M(۲\ ,\ t\ ,\ ۱)$ است. از طرفی فاصلهٔ نقطهٔ M تا مبدأ مختصات، ۳ واحد است، پس:

$$|OM|=۳\Rightarrow\sqrt{۲^۲+t^۲+۱^۲}=۳\Rightarrow t^۲+۵=۹$$

$$\Rightarrow t^۲=۴\Rightarrow t=\pm۲$$

فاصلهٔ نقطهٔ M از محور x ها برابر می‌شود با:

$$\sqrt{y_M^۲+z_M^۲}=\sqrt{(\pm۲)^۲+۱^۲}=\sqrt{۵}$$

(هندسه ۳- صفحه‌های ۶۴ تا ۶۸)

۳۷- **گزینهٔ «۲»** *(سوگند روشنی)*

با توجه به فرض، بردار $\vec{a}$ به صورت $(۴\ ,\ ۲\ ,\ ۰)$ خواهد بود و داریم:

$$\begin{cases}\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{OM}-\overrightarrow{OA}\ ,\ \overrightarrow{MB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OM}\\ \overrightarrow{OA}=(-۱\ ,\ ۲\ ,\ ۳)\ ,\ \overrightarrow{OB}=(-۳\ ,\ ۴\ ,\ ۵)\end{cases}$$

رابطهٔ برداری مفروض به صورت زیر ساده می‌شود:

$$۲\overrightarrow{OM}-\underbrace{۲\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}}_{(-۱\ ,\ ۰\ ,\ -۱)}-\overrightarrow{OM}+(۰\ ,\ ۲\ ,\ ۴)=\vec{O}$$

$$\Rightarrow\overrightarrow{OM}+(-۱\ ,\ ۲\ ,\ ۳)=۰$$

$$\Rightarrow\overrightarrow{OM}=(۱\ ,\ -۲\ ,\ -۳)$$: مختصات نقطهٔ M

در نتیجه مجموع مؤلفه‌های نقطهٔ M برابر ۴- می‌شود.

(هندسه ۳- صفحه‌های ۷۳ تا ۷۶)

۳۸- **گزینهٔ «۳»** *(احمدرضا فلاح)*

نقطهٔ A روی فصل مشترک صفحات $z=۱$ و $y=۲$ است، پس مختصات آن به فرم $A(t\ ,\ ۲\ ,\ ۱)$، $۰\le t\le ۳$ و نقطهٔ B روی فصل مشترک صفحات $x=۳$ و $z=۰$ است. پس مختصات آن به فرم $B(۳\ ,\ t'\ ,\ ۰)$، $۰\le t'\le ۲$ است. طبق فرض داریم:

$$|OA|=۳\Rightarrow\sqrt{t^۲+۲^۲+۱^۲}=۳\Rightarrow t^۲+۵=۹$$

$$\Rightarrow t^۲=۴\Rightarrow t=\pm۲\xrightarrow{۰\le t\le ۳}t=۲\Rightarrow A(۲\ ,\ ۲\ ,\ ۱)$$

$$|OB|=\sqrt{۱۰}\Rightarrow\sqrt{۳^۲+t'^۲+۰}=\sqrt{۱۰}\Rightarrow ۹+t'^۲=۱۰$$

$$\Rightarrow t'^۲=۱\Rightarrow t'=\pm۱\xrightarrow{۰\le t'\le ۲}t'=۱\Rightarrow B(۳\ ,\ ۱\ ,\ ۰)$$

$$\Rightarrow\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}=(۱\ ,\ -۱\ ,\ -۱)$$

هر بردار به صورت $(m\ ,\ -m\ ,\ -m)$، همانند بردار گزینهٔ (۳)، موازی $\overrightarrow{AB}$ می‌باشد.

(هندسه ۳- صفحه‌های ۶۴ تا ۷۶)

۳۹- **گزینهٔ «۴»** *(سیرمحمدرضا حسینی‌فرد)*

مؤلفه‌های برداری که مبدأ را به نقطه‌ای روی خط $(x=۲\ ,\ y=-۳)$ وصل می‌کند، به صورت $\vec{a}=(۲\ ,\ -۳\ ,\ z)$ است، بنابراین:

$$|\vec{a}|=\sqrt{۴+۹+z^۲}=۷\Rightarrow z^۲=۳۶\Rightarrow z=\pm۶$$

پس دو بردار $\vec{a}_۱=(۲\ ,\ -۳\ ,\ ۶)$ و $\vec{a}_۲=(۲\ ,\ -۳\ ,\ -۶)$ به دست می‌آید و اندازهٔ تفاضل آن‌ها به صورت زیر به دست می‌آید:

$$\vec{a}_۱-\vec{a}_۲=(۲\ ,\ -۳\ ,\ ۶)-(۲\ ,\ -۳\ ,\ -۶)=(۰\ ,\ ۰\ ,\ ۱۲)$$

$$\Rightarrow|\vec{a}_۱-\vec{a}_۲|=۱۲$$

(هندسه ۳- صفحه‌های ۷۳ تا ۷۶)

۴۰- **گزینهٔ «۱»** *(مهرداد ملوندی)*

با توجه به فرض داریم:

$$\overrightarrow{AC}=۳\overrightarrow{BC}\Rightarrow\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OA}=۳(\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OB})$$

$$\Rightarrow ۲\overrightarrow{OC}=۳\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}$$

$$=(۳\ ,\ -۶\ ,\ ۱۲)-(-۱\ ,\ ۰\ ,\ ۰)=(۴\ ,\ -۶\ ,\ ۱۲)$$

$$\Rightarrow\overrightarrow{OC}=(۲\ ,\ -۳\ ,\ ۶)$$

فاصلهٔ نقطهٔ C از مبدأ مختصات برابر است با:

$$|\overrightarrow{OC}|=\sqrt{۲^۲+(-۳)^۲+۶^۲}=\sqrt{۴۹}=۷$$

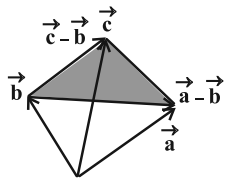
(هندسه ۳- صفحه‌های ۷۳ تا ۷۶)

سنجش کلاد
www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshClouds

هندسه ۳- پیشروی سریع

۴۱- **گزینهٔ «۴»** *(احمدرضا فلاح)*

مطابق شکل، مثلث رنگی، مثلثی است که روی بردارهای $\vec{c}-\vec{b}$ و $\vec{a}-\vec{b}$ ساخته شده است. بنابراین:



$$S_{(\text{مثلث رنگی})}=\frac{1}{2}|(\vec{c}-\vec{b})\times(\vec{a}-\vec{b})|=4\sqrt{6}$$

$$\begin{cases}\vec{c}-\vec{b}=(-2\ ,\ 0\ ,\ 4)\\ \vec{a}-\vec{b}=(\alpha-4\ ,\ -4\ ,\ 4)\end{cases}$$

$$\Rightarrow(\vec{c}-\vec{b})\times(\vec{a}-\vec{b})=\begin{vmatrix} i & j & k\\ -2 & 0 & 4\\ \alpha-4 & -4 & 4\end{vmatrix}=16\vec{i}+(4\alpha-8)\vec{j}+8\vec{k}$$

دارایم: $S=4\sqrt{6}\Rightarrow\frac{1}{2}\sqrt{16^2+(4\alpha-8)^2+8^2}=4\sqrt{6}$

$$\Rightarrow\sqrt{320+(4\alpha-8)^2}=8\sqrt{6}\xrightarrow{\text{توان ۲}}320+(4\alpha-8)^2=384$$

$$\Rightarrow(4\alpha-8)^2=64\Rightarrow 4^2(\alpha-2)^2=64\Rightarrow(\alpha-2)^2=4$$

$$\Rightarrow\begin{cases}\alpha-2=2\Rightarrow\alpha=4\\ \alpha-2=-2\Rightarrow\alpha=0\end{cases}$$

مجموع مقادیر α برابر ۴ می‌شود.

(هندسه ۳- صفحه‌های ۸۱ و ۸۲)

۴۲- **گزینهٔ «۳»** *(اسفاق اسفندیار)*

دارایم: $|(\vec{i}\times\vec{j})\times\vec{i}|=|\vec{k}\times\vec{i}|=|\vec{j}|=1$

$$|(3\vec{i}-\vec{j})\times\vec{k}|=|3\vec{i}\times\vec{k}-\vec{j}\times\vec{k}|=|-3\vec{j}-\vec{i}|$$

$$=\sqrt{(-1)^2+(-3)^2+0^2}=\sqrt{10}$$

در نتیجه: $\frac{|(\vec{i}\times\vec{j})\times\vec{i}|}{|(3\vec{i}-\vec{j})\times\vec{k}|}=\frac{1}{\sqrt{10}}=\frac{\sqrt{10}}{10}$

(هندسه ۳- صفحه‌های ۸۱ و ۸۲)

۴۳- **گزینهٔ «۳»** *(سوگند روشنی)*

طبق خاصیت کشی- شوارتز داریم $|\vec{a}.\vec{b}|\le|\vec{a}||\vec{b}|$. بردارهای $\vec{a}$ و $\vec{b}$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\vec{a}=(x-1\ ,\ y+2\ ,\ z+1)$$

$$\vec{b}=(1\ ,\ -3\ ,\ 4)$$

داریم:

$$|\underbrace{x-1-3y-6+4z+4}_{29-3=26}|\le\sqrt{(x-1)^2+(y+2)^2+(z+1)^2}\times\sqrt{1+9+16}$$

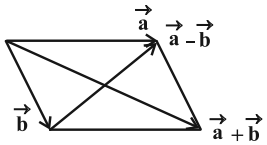
$$\xrightarrow{\text{توان ۲}}26\times26\le[(x-1)^2+(y+2)^2+(z+1)^2]\times26$$

در نتیجه کمترین مقدار عبارت مذکور برابر ۲۶ است.

(هندسه ۳- صفحه‌های ۷۷ تا ۷۹)

۴۴- **گزینهٔ «۲»** *(سیرمحمدرضا حسینی‌فرد)*

مطابق شکل، اگر با بردارهای $\vec{a}$ و $\vec{b}$ متوازی‌الاضلاع بسازیم آن‌گاه $\vec{a}+\vec{b}$ و $\vec{a}-\vec{b}$ قطرهای آن هستند، پس طبق فرض:



$$|\vec{a}+\vec{b}|=11\ ,\ |\vec{a}-\vec{b}|=3$$

$$\begin{cases}|\vec{a}+\vec{b}|^2=|\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2+2\vec{a}.\vec{b}\\ |\vec{a}-\vec{b}|^2=|\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2-2\vec{a}.\vec{b}\end{cases}$$

$$\Rightarrow|\vec{a}+\vec{b}|^2-|\vec{a}-\vec{b}|^2=4\vec{a}.\vec{b}\Rightarrow112=4\vec{a}.\vec{b}\Rightarrow\vec{a}.\vec{b}=28$$

البته اگر $|\vec{a}-\vec{b}|=11$ و $|\vec{a}+\vec{b}|=3$ باشد، آن‌گاه $\vec{a}.\vec{b}=-28$.

(هندسه ۳- صفحه‌های ۷۷ تا ۷۹)

۴۵- **گزینهٔ «۳»** *(سیرمحمدرضا حسینی‌فرد)*

بردارهای $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ دو ضلع از این مثلث هستند و بردار $\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}$ هر بردار همراستا با آن، بر صفحهٔ شامل مثلث ABC عمود است، پس:

$$\begin{cases}\overrightarrow{AB}=(1\ ,\ 1\ ,\ -3)\\ \overrightarrow{AC}=(0\ ,\ 3\ ,\ 0)\end{cases}\Rightarrow\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=\begin{vmatrix} i & j & k\\ 1 & 1 & -3\\ 0 & 3 & 0\end{vmatrix}=(9\ ,\ 0\ ,\ 3)$$

سنجش کلاد
www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshClouds

بردار $\frac{1}{3}(\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC})=3\vec{i}+\vec{k}$ بر صفحهٔ شامل مثلث ABC عمود است.

(هندسه ۳- صفحه‌های ۸۱ و ۸۲)

۴۶- **گزینهٔ «۴»** *(علی ایمانی)*

می‌دانیم:

$$\begin{cases}\vec{a}\times\vec{a}=\vec{O}\\ \vec{a}.(\vec{a}\times\vec{b})=0\\ \vec{a}.(\vec{b}\times\vec{c})=-\vec{a}.(\vec{c}\times\vec{b})\end{cases}$$

طبق فرض داریم:

$$V=|\vec{a}.(\vec{b}\times\vec{c})|=2$$

حجم متوازی‌السطوح مورد نظر به صورت زیر به دست می‌آید:

$$(2\vec{a}+3\vec{b}).((2\vec{a}+3\vec{c})\times(2\vec{b}+3\vec{c}))$$

$$=(2\vec{a}+3\vec{b}).(4\vec{a}\times\vec{b}+6\vec{a}\times\vec{c}-6\vec{b}\times\vec{c})$$

$$=-12\vec{a}.(\vec{b}\times\vec{c})+18\vec{b}.(\vec{a}\times\vec{c})$$

$$=-12\vec{b}.(\vec{c}\times\vec{a})+18\vec{b}.(\vec{a}\times\vec{c})$$

$$=12\vec{b}.(\vec{a}\times\vec{c})+18\vec{b}.(\vec{a}\times\vec{c})=30\vec{b}.(\vec{a}\times\vec{c})$$

$$\Rightarrow V'=|30\vec{b}.(\vec{a}\times\vec{c})|=30\times2=60$$

(هندسه ۳- صفحه‌های ۸۳ و ۸۴)

۴۷- **گزینهٔ «۴»** *(هومن عقیلی)*

با توجه به فرض داریم:

$$|\vec{a}-\vec{b}|=7\Rightarrow|\vec{a}-\vec{b}|^2=49\Rightarrow|\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2-2\vec{a}.\vec{b}=49$$

$$\Rightarrow 400+225-2\vec{a}.\vec{b}=49\Rightarrow\vec{a}.\vec{b}=288$$

اندازهٔ تصویر قائم بردار $\vec{a}$ بر امتداد بردار $\vec{a}-\vec{b}$ برابر می‌شود با:

$$|\vec{a}'|=\frac{|\vec{a}.(a-\vec{b})|}{|\vec{a}-\vec{b}|}=\frac{||\vec{a}|^2-\vec{a}.\vec{b}|}{|\vec{a}-\vec{b}|}=\frac{400-288}{7}=16$$

(هندسه ۳- صفحه‌های ۷۷ تا ۸۰)

۴۸- **گزینهٔ «۱»** *(علیرضا شریف‌طبیبی)*

مطابق دستور مساحت مثلث داریم:

$$S_{ABC}=\frac{1}{2}|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}|$$

$$\begin{cases}\overrightarrow{AB}=(-2,-2,2)\\ \overrightarrow{AC}=(-1,-2,3)\end{cases}\Rightarrow\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=\begin{vmatrix}i&j&k\\-2&-2&2\\-1&-2&3\end{vmatrix}=(-2,4,2)$$

$$\Rightarrow S_{ABC}=\frac{1}{2}|(-2,4,2)|=\frac{1}{2}\sqrt{4+16+4}=\frac{1}{2}\sqrt{24}=\sqrt{6}$$

مطابق شکل زیر، طول ارتفاع BH را به صورت زیر به دست می‌آوریم:

$$S_{ABC}=\frac{1}{2}|AC|\times|BH|\Rightarrow\sqrt{6}=\frac{1}{2}\times\sqrt{1+4+9}\times|BH|$$

$$\Rightarrow|BH|=\frac{2\sqrt{6}}{\sqrt{14}}=\frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{7}}=\frac{2\sqrt{21}}{7}$$

(هندسه ۳- صفحه‌های ۸۱ و ۸۲)

۴۹- **گزینهٔ «۱»** *(نیما مهندس)*

اگر سه بردار مذکور بخواهند هم‌صفحه باشند، آن‌گاه:

$$\begin{vmatrix}1&\alpha&2\\4&-2&0\\3&\beta&4\end{vmatrix}=0\xrightarrow[\text{به سطر اول}]{\text{بسط نسبت}}-8-\alpha(4\times4-3\times0)+2\times(4\beta+6)=0$$

$$\xrightarrow{+4}-2-4\alpha+(2\beta+3)=0\Rightarrow4\alpha-2\beta=1\qquad(*)$$

به ازای مقادیر صحیح α و β، حاصل $4\alpha-2\beta$ عددی زوج خواهد بود که با رابطهٔ (*) در تضاد است، پس هیچ زوج مرتب (α,β) با مقادیر صحیح وجود ندارد.

(هندسه ۳- صفحه‌های ۸۳ و ۸۴)

۵۰- **گزینهٔ «۳»** *(هومن عقیلی)*

با توجه به فرض سؤال داریم:

$$\vec{a}+\vec{b}+2\vec{c}=\vec{O}\Rightarrow\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}+\vec{c}=\vec{O}$$

$$\Rightarrow\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=-\vec{c}\Rightarrow|\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}|^2=|-\vec{c}|^2$$

$$\Rightarrow|\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2+|\vec{c}|^2+2(\underbrace{\vec{a}.\vec{b}+\vec{a}.\vec{c}+\vec{b}.\vec{c}}_{x})=|\vec{c}|^2$$

$$\Rightarrow9+36+2x=0\Rightarrow x=\vec{a}.\vec{b}+\vec{a}.\vec{c}+\vec{b}.\vec{c}=-22/5$$

(هندسه ۳- مشابه تمرین ۲ صفحهٔ ۸۴)

سنجش کلاد
www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshClouds

آمار و احتمال

۵۱- **گزینهٔ «۲»** *(جواد ترکمن)*

چون ۱۵ نفر انتخاب شده است، پس ۱۵ طبقه وجود دارد. چون $\frac{۲۱۰}{۱۵}=۱۴$، پس تعداد افراد داخل هر طبقه ۱۴ نفر است و فاصلهٔ دو شماره متوالی منتخب (قدرنسبت) برابر ۱۴ است. از طرفی $۱۰+(۱۴)\times۶=۹۴$، پس عدد ۹۴ از طبقهٔ هفتم می‌باشد و نفر دهم این طبقه است. پس از هر طبقه نفر دهم انتخاب می‌شود.

(آمار و احتمال- آمار استنباطی؛ صفحه‌های ۹۸ تا ۱۰۳)

۵۲- **گزینهٔ «۳»** *(جواد ترکمن)*

$$|\mu-\bar{x}|\le\frac{۲\sigma}{\sqrt{n}}\xrightarrow{|\mu-\bar{x}|<۱}\frac{۲\sigma}{\sqrt{n}}<۱$$

$$\Rightarrow\frac{۲\times۳}{\sqrt{n}}<۱\Rightarrow\sqrt{n}>۶\Rightarrow n>۳۶\Rightarrow \min(n)=۳۷$$

(آمار و احتمال- آمار استنباطی؛ صفحه‌های ۱۱۵ و ۱۱۶)

۵۳- **گزینهٔ «۱»** *(نیلوفر مهروی)*

می‌دانیم میانگین جامعه (μ)، با اطمینان بیش از ۹۵ درصد، عددی در بازهٔ $[\bar{x}-\frac{۲\sigma}{\sqrt{n}}\ ,\ \bar{x}+\frac{۲\sigma}{n}]$ است، پس طبق فرض داریم:

$$\bar{x}=\frac{۴/۱+۴/۷}{۲}=۴/۴$$

$$\frac{۴\sigma}{\sqrt{n}}=۴/۷-۴/۱\Rightarrow\frac{۴\times۲/۲۵}{\sqrt{n}}=۰/۶\Rightarrow\sqrt{n}=۱۵\Rightarrow n=۲۲۵$$

$$\bar{x}=\frac{x_۱+x_۲+x_۳+\ldots+x_n}{n}\Rightarrow ۴/۴=\frac{x_۱+x_۲+x_۳+\ldots+x_n}{۲۲۵}$$

$$\Rightarrow x_۱+x_۲+x_۳+\ldots+x_n=۹۹۰$$

(آمار و احتمال- آمار استنباطی؛ صفحه‌های ۱۱۵ و ۱۱۶)

۵۴- **گزینهٔ «۲»** *(شبنم غلامی)*

بازهٔ اطمینان ۹۵ درصد برای برآورد میانگین به صورت زیر است:

$$[\bar{x}-\frac{۲\sigma}{\sqrt{n}}\ ,\ \bar{x}+\frac{۲\sigma}{\sqrt{n}}]$$

بنابراین طول فاصلهٔ اطمینان برابر $\frac{۴\sigma}{\sqrt{n}}$ می‌باشد. بدیهی است با افزایش اندازهٔ نمونه، مخرج کسر بزرگ شده و در نتیجه طول فاصلهٔ اطمینان کاهش می‌یابد و برعکس با افزایش انحراف معیار، صورت کسر بزرگ شده و در نتیجه طول فاصلهٔ اطمینان افزایش پیدا می‌کند.

(آمار و احتمال- آمار استنباطی؛ صفحه‌های ۱۱۵ و ۱۱۶)

۵۵- **گزینهٔ «۳»** *(سوگند روشنی)*

می‌دانیم کران بالای بازهٔ اطمینان $\bar{x}+\frac{۲\sigma}{\sqrt{n}}$ است که σ انحراف معیار جامعه و n اندازهٔ نمونه است.

$$۱۵+\frac{۲\sigma}{\sqrt{۲۵۰۰}}=۱۵/۱۲\Rightarrow\frac{۲\sigma}{۵۰}=\frac{۱۲}{۱۰۰}=\frac{۶}{۵۰}\Rightarrow\sigma=۳$$

اگر تعداد اعضای نمونه ۹۰۰ واحد کاهش یابد، $n=۱۶۰۰$ خواهد شد و داریم:

$$\text{طول بازهٔ اطمینان}:\frac{۴\sigma}{\sqrt{n}}=\frac{۴(۳)}{\sqrt{۱۶۰۰}}=\frac{۴(۳)}{۴۰}=۰/۳$$

(آمار و احتمال- آمار استنباطی؛ صفحه‌های ۱۱۵ و ۱۱۶)

سنجش کلاد
www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshClouds

۵۶- **گزینهٔ «۴»** *(شبنم غلامی)*

هیچ دادگان ثبت شده‌ای برای تعداد عابرانی که در یک روز خاص از یک پل عابر استفاده می‌کنند، وجود ندارد و بهترین روش جمع‌آوری داده‌ها در این زمینه، روش مشاهده است. در مورد سایر موضوعات، اطلاعات ثبتی در سازمان‌های مربوطه وجود دارد و می‌توان از دادگان استفاده کرد.

(آمار و احتمال- آمار استنباطی؛ صفحه‌های ۱۰۶ تا ۱۰۹)

۵۷- **گزینهٔ «۳»** *(سوگند روشنی)*

طبق فرض داریم:

$$\begin{cases} \text{جامعهٔ آماری}: \{۱, ۲, ۳, ۴, ۵, ۶, ۷, ۸, ۹\} \\ \text{نمونه}: \{a_۱, a_۲, a_۳, a_۴, a_۵, a_۶, a_۷\} \end{cases}$$

$$\bar{x}_{\text{جامعه}} = \frac{۱+۹}{۲} = ۵$$

$$n(S) = \binom{۹}{۷} = ۳۶$$

$$\frac{a_۱ + a_۲ + a_۳ + ... + a_۷}{۷} = ۵ \Rightarrow a_۱ + a_۲ + ... + a_۷ = ۳۵$$

$$۱+۲+۳+...+۹ = \frac{۹\times۱۰}{۲} = ۴۵ \Rightarrow ۴۵ - ۳۵ = ۱۰$$ ؛ می‌دانیم

باید جمع دو عضو غیرواقع در نمونه ۷ عضوی برابر ۱۰ باشد، پس:

$$\{۱, ۹\}, \{۲, ۸\}, \{۳, ۷\}, \{۴, ۶\} \Rightarrow$$ ۴ حالت

$$P = \frac{۴}{۳۶} = \frac{۱}{۹}$$ ؛ احتمال مورد نظر

(آمار و احتمال- آمار استنباطی؛ صفحه‌های ۱۱۲ تا ۱۱۵)

۵۸- **گزینهٔ «۴»** *(شبنم غلامی)*

اگر یک روش نمونه‌گیری از نمونه‌گیری ایده‌آل فاصله بگیرد و به سمتی خاص انحراف پیدا کند، می‌گویند آن روش نمونه‌گیری اریب است. همهٔ موارد ذکر شده در روش‌های «الف» تا «ت» اریب هستند. دقت کنید که در موارد «ب» و «پ» ممکن است بخش‌هایی از جامعه فاقد ایمیل باشند و یا دسترسی به خط تلفن نداشته باشند، بنابراین شانسی برای حضور در نمونه‌گیری ندارند.

(آمار و احتمال- آمار استنباطی؛ صفحه‌های ۹۸ تا ۱۰۴)

۵۹- **گزینهٔ «۴»** *(سوگند روشنی)*

برای تعیین نمونهٔ ۱۰ عضوی باید هر طبقه $\frac{۲۰۰}{۱۰} = ۲۰$ عضو داشته باشد، پس احتمال انتخاب هر فرد $\frac{۱}{۲۰} = ۰/۰۵$ خواهد شد.

(آمار و احتمال- آمار استنباطی؛ صفحه‌های ۹۸ تا ۱۰۳)

۶۰- **گزینهٔ «۳»** *(شبنم غلامی)*

بهترین روش نمونه‌گیری در این شرایط، نمونه‌گیری خوشه‌ای است که در آن واحدهای نمونه‌گیری اولیه همان دبیرستان‌ها (کلاس‌های دبیرستان‌ها) هستند و سپس همهٔ واحدهای آماری خوشه‌های انتخاب شده (تمام دانش‌آموزان هر کلاس) را به عنوان نمونه درنظر می‌گیریم. دقت کنید که در سه روش دیگر به فهرست دانش‌آموزان نیاز داریم.

(آمار و احتمال- آمار استنباطی؛ صفحه‌های ۹۸ تا ۱۰۴)

سنجش کلاد
www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshClouds

آمار و احتمال

۶۱- **گزینهٔ «۱»** *(سوگند روشنی)*

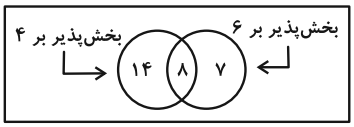
داریم:

$[\frac{99}{4}]-[\frac{9}{4}]=22$: تعداد اعداد طبیعی دو رقمی بخش‌پذیر بر ۴

$[\frac{99}{6}]-[\frac{9}{6}]=15$: تعداد اعداد طبیعی دو رقمی بخش‌پذیر بر ۶

$[\frac{99}{12}]-[\frac{9}{12}]=8$: تعداد اعداد طبیعی دو رقمی بخش‌پذیر بر ۱۲

مطابق نمودار ون زیر، احتمال موردنظر برابر می‌شود با:



$$\Rightarrow P(A)=\frac{7}{7+14}=\frac{7}{21}=\frac{1}{3}$$

(آمار و احتمال- احتمال؛ صفحه‌های ۳۹ تا ۴۳)

۶۲- **گزینهٔ «۳»** *(مصطفی دیداری)*

فرض کنیم تعداد فرزندان هر خانواده n نفر باشد. طبق فرض، احتمال آن‌که هر سه بلیط به فرزندان خانوادهٔ B برسد، برابر می‌شود با:

$$\frac{\binom{n}{3}}{\binom{2n}{3}}=\frac{1}{12}\Rightarrow\frac{\frac{n(n-1)(n-2)}{3\times2\times1}}{\frac{(2n)(2n-1)(2n-2)}{3\times2\times1}}=\frac{1}{12}$$

$$\Rightarrow\frac{n(n-1)(n-2)}{2n(2n-1)(2)(n-1)}=\frac{1}{12}\Rightarrow\frac{n-2}{2n-1}=\frac{1}{3}$$

$$\Rightarrow 3n-6=2n-1\Rightarrow n=5$$

(ریاضی ۱- آمار و احتمال؛ صفحه‌های ۱۴۶ تا ۱۵۱)

۶۳- **گزینهٔ «۴»** *(علی ایمانی)*

طبق فرض داریم:

فاطمه	صبا	پرنیان	نگین	دانش‌آموز
$a+\frac{3}{8}$	$a+\frac{2}{8}$	$a+\frac{1}{8}$	a	احتمال اول شدن

مجموع احتمال $=1\Rightarrow 4a+\frac{6}{8}=1\Rightarrow 4a=\frac{2}{8}\Rightarrow a=\frac{1}{16}$

در نتیجه داریم:

$$\frac{P(\text{فاطمه یا صبا})}{P(\text{نگین})}=\frac{2a+\frac{5}{8}}{a}=\frac{\frac{1}{8}+\frac{5}{8}}{\frac{1}{16}}=\frac{\frac{6}{8}}{\frac{1}{16}}=\frac{6\times16}{8}=12$$

(آمار و احتمال- احتمال؛ صفحه‌های ۴۴ تا ۴۷)

۶۴- **گزینهٔ «۱»** *(سوگند روشنی)*

مریم و پگاه را به ترتیب M و P درنظر می‌گیریم. طبق فرض داریم:

$$P(M)=P(P)=0/6$$

$$P(P\mid M)=0/8\Rightarrow\frac{P(P\cap M)}{P(M)}=0/8$$

$$\Rightarrow P(P\cap M)=0/6\times0/8=0/48$$

احتمال مورد نظر برابر می‌شود با:

$$P(P\mid M')=\frac{P(P\cap M')}{P(M')}=\frac{P(P-M)}{1-P(M)}=\frac{P(P)-P(P\cap M)}{1-P(M)}$$

$$=\frac{0/6-0/48}{0/4}=\frac{0/12}{0/40}=\frac{12}{40}=0/3$$

(آمار و احتمال- احتمال؛ صفحه‌های ۴۱، ۴۲ و ۴۹ تا ۵۲)

۶۵- **گزینهٔ «۳»** *(احمدرضا فلاح)*

پیشامدهای آزمایش را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

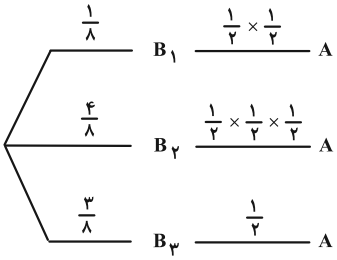
A : پیشامد فرد آمدن رقم تاس

B_1 : پیشامد هر ۳ سکه رو

B_2 : پیشامد حداکثر ۱ سکه رو

B_3 : (۲ سکه رو) سایر حالات

طبق فرض نمودار درختی به صورت زیر می‌شود:



$$\Rightarrow P(A)=\frac{1}{8}\times\frac{1}{4}+\frac{4}{8}\times\frac{1}{8}+\frac{3}{8}\times\frac{1}{2}=\frac{2+4+12}{64}=\frac{18}{64}$$

طبق قاعدهٔ بیز، احتمال خواسته شده را می‌یابیم:

$$P(B_1\mid A)=\frac{P(B_1\cap A)}{P(A)}=\frac{\frac{1}{8}\times\frac{1}{4}}{\frac{18}{64}}=\frac{\frac{1}{32}}{\frac{18}{64}}=\frac{1}{9}$$

(آمار و احتمال- احتمال؛ صفحه‌های ۵۷ تا ۶۰)

۶۶- **گزینهٔ «۴»** *(افشین خاصه‌خان)*

می‌دانیم شرط، فضای نمونه‌ای را به خود محدود می‌کند. فضای نمونه‌ای محدود شده عبارتست از:

$$\{\underbrace{(1,1)}_{(1)},\underbrace{(1,2)}_{(4)},\underbrace{(1,4)}_{(4)},\underbrace{(2,3)}_{(4)},\underbrace{(3,4)}_{(4)}\}$$

تعداد حالت‌ها ←

$(1,1)$ فقط یک حالت وجود دارد که غیرهم‌رنگ می‌باشند.

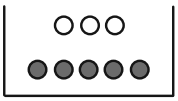
برای هر کدام از زوج‌ها مثلاً $(2,1)$ چهار حالت وجود دارد (هر دو سفید / هر دو سیاه / یکی سفید و دیگری سیاه و برعکس)، لذا در کل با شرط داده شده ۱۷ حالت وجود دارد که ۸ حالت آن هم‌رنگ و ۹ حالت آن غیرهم‌رنگ‌اند.

(آمار و احتمال- احتمال؛ صفحه‌های ۴۹ تا ۵۲)

سنجش کلاد
www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshClouds

۶۷- **گزینهٔ «۴»** *(سوگند روشنی)*

اگر ظرف را به صورت زیر در نظر بگیریم، خواهیم داشت:



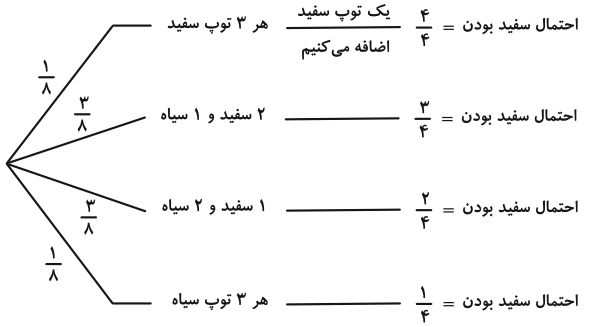
$$P(\text{سومی قرمز , دومی آبی , اولی قرمز}) = \frac{۵}{۸}\times\frac{۳}{۷}\times\frac{۴}{۹} = \frac{۵}{۴۲}$$

دقت کنید که در بار اول احتمال خارج کردن مهرهٔ قرمز برابر $\frac{۵}{۸}$ است. بعد از خروج یک مهرهٔ قرمز، ۳ مهرهٔ آبی و ۴ مهرهٔ قرمز در جعبه باقی مانده است، پس احتمال خارج کردن مهرهٔ آبی برابر $\frac{۳}{۷}$ است. حال این مهرهٔ آبی را به همراه ۲ مهرهٔ آبی دیگر به جعبه برمی‌گردانیم، یعنی ۴ مهرهٔ قرمز و ۵ مهرهٔ آبی در جعبه موجود خواهد بود که احتمال خارج کردن مهرهٔ قرمز برابر $\frac{۴}{۹}$ است.

(آمار و احتمال- احتمال؛ صفحه‌های ۵۲ تا ۵۴)

۶۸- **گزینهٔ «۱»** *(مصطفی دیداری)*

راه‌حل اول: با توجه به حالت‌بندی رنگ توپ‌های داخل جعبه، نمودار درختی زیر را رسم می‌کنیم:



در نتیجه احتمال سفید بودن توپ خارج شده برابر می‌شود با:

$$P(\text{سفید}) = (\frac{۱}{۸}\times ۱)+(\frac{۳}{۸}\times\frac{۳}{۴})+(\frac{۳}{۸}\times\frac{۲}{۴})+\frac{۱}{۸}\times\frac{۱}{۴}$$

$$=\frac{۴}{۳۲}+\frac{۹}{۳۲}+\frac{۶}{۳۲}+\frac{۱}{۳۲}=\frac{۲۰}{۳۲}=\frac{۵}{۸}$$

راه‌حل دوم: به احتمال $\frac{۱}{۴}$ توپ خارج شده همان توپ سفید (که در کیسه انداخته‌ایم) می‌باشد، در غیر این صورت، توپ خارج شده، به احتمال $\frac{۱}{۲}$ سفید خواهد بود. پس احتمال سفید بودن توپ خارج شده برابر می‌شود با:

$$P(\text{سفید}) = \frac{۱}{۴}\times ۱+\frac{۳}{۴}\times\frac{۱}{۲}=\frac{۵}{۸}$$

(آمار و احتمال- احتمال؛ صفحه‌های ۵۵ تا ۵۷)

۶۹- **گزینهٔ «۱»** *(جواد ترکمن)*

راه‌حل اول:

$$P(\text{نمرهٔ } a > \text{نمرهٔ } b \mid \text{نفر دهم است } b) = \frac{P(\text{نمرهٔ } a > \text{نمرهٔ } b) \cap (\text{نفر دهم است } b))}{P(\text{نمرهٔ } a > \text{نمرهٔ } b)}$$

$$= \frac{P(\text{نفر دهم است } b).P((\text{نمرهٔ } a > \text{نمرهٔ } b) \mid \text{نفر دهم است } b)}{P(\text{نمرهٔ } a > \text{نمرهٔ } b)}$$

$$= \frac{\frac{۱}{۲۵}\times\frac{۹}{۲۴}}{\frac{۱}{۲}} = \frac{۳}{۱۰۰}$$

توجه کنید چون b نفر دهم است، پس رتبهٔ دهم توسط b پُر شده است و لذا ۲۴ حالت ممکن برای a باقی می‌ماند که از بین آن‌ها ۹ حالت مطلوب (رتبه‌های ۱ تا ۹) مورد نظر است. پس:

$$P(\text{نمرهٔ } a > \text{نمرهٔ } b \mid \text{نفر دهم است } b) = \frac{۹}{۲۴}$$

راه‌حل دوم: به $\binom{۲۵}{۲} = ۳۰۰$ حالت، دو جایگاه (از نفر اول تا نفر ۲۵ اُم) انتخاب کرده و نمرهٔ بیشتر را a و نمرهٔ کمتر را b قرار می‌دهیم. (شرط بیان شده به عنوان فضای نمونه‌ای جدید.)

پیشامد مطلوب آن است که نفر دهم را b قرار دهیم که در آن صورت ۹ جایگاه برای a قابل قبول است. در نتیجه احتمال مورد نظر برابر است با:

$$P = \frac{۹}{۳۰۰} = \frac{۳}{۱۰۰}$$

(آمار و احتمال- احتمال؛ صفحه‌های ۵۲ تا ۵۷)

۷۰- **گزینهٔ «۱»** *(امیرحسین ابومحبوب)*

روش اول: خروج مهره‌ای با شمارهٔ زوج حداکثر در بار سوم به این معناست که در بار اول یا بار دوم و یا بار سوم مهره‌ای با شمارهٔ زوج خارج شود. با توجه به مستقل بودن پیشامد خارج کردن مهره‌ها از یکدیگر داریم:

$$P(A) = \underset{\text{زوج باشد}}{\underset{\downarrow}{\frac{۲}{۵}}} + \underset{\text{فرد باشد}}{\underset{\downarrow}{\frac{۳}{۵}}} \times \underset{\text{زوج باشد}}{\underset{\downarrow}{\frac{۲}{۵}}} + \underset{\text{فرد باشد}}{\underset{\downarrow}{\frac{۳}{۵}}} \times \underset{\text{فرد باشد}}{\underset{\downarrow}{\frac{۳}{۵}}} \times \underset{\text{زوج باشد}}{\underset{\downarrow}{\frac{۲}{۵}}}$$

$$\begin{matrix} \text{بار اول} & \text{بار اول} & \text{بار دوم} & \text{بار اول} & \text{بار دوم} & \text{بار سوم} \end{matrix}$$

$$= \frac{۲}{۵}+\frac{۶}{۲۵}+\frac{۱۸}{۱۲۵} = \frac{۵۰+۳۰+۱۸}{۱۲۵} = \frac{۹۸}{۱۲۵}$$

روش دوم: متمم پیشامد A آن است که در سه بار اول، مهره با شمارهٔ فرد خارج شود، پس داریم:

$$P(A') = \frac{۳}{۵}\times\frac{۳}{۵}\times\frac{۳}{۵} = \frac{۲۷}{۱۲۵} \Rightarrow P(A) = ۱-\frac{۲۷}{۱۲۵} = \frac{۹۸}{۱۲۵}$$

(آمار و احتمال- احتمال؛ صفحه‌های ۶۳ تا ۶۸)

سنجش کلاد
www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshClouds

ریاضیات گسسته

۷۱- **گزینهٔ «۳»** (کیوان دارابی)

طبق فرض، برای عدد چهار رقمی $\overline{abcd}$ داریم $a=b+c+d$.

از طرفی می‌دانیم به ازای هر انتخاب b، c و d، یک جواب منحصر به فرد برای a وجود دارد. پس کافی است تعداد جواب‌های b، c و d را بشماریم.

داریم: $1\le a\le 9 \Rightarrow 1\le b+c+d\le 9$

تعداد جواب‌های صحیح و نامنفی نامعادلهٔ $b+c+d\le 9$ را منهای تعداد حالات $b+c+d=0$ (۱ حالت) می‌کنیم:

$$\text{تعداد جواب‌ها} = \binom{9+4-1}{4-1}-1=\binom{12}{3}-1=\frac{12\times11\times10}{3\times2\times1}-1=219$$

توجه: برای حل نامعادله $b+c+d\le 9$، با شرط $b,c,d\ge 0$، آن را به معادلهٔ $b+c+d+e=9$ تبدیل می‌کنیم که در آن نیز $e\ge 0$ می‌باشد.

(ریاضیات گسسته- صفحه‌های ۵۹ تا ۶۱)

۷۲- **گزینهٔ «۴»** (سوگند روشنی)

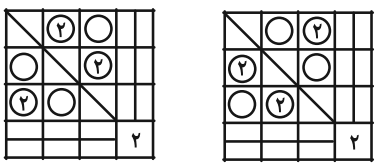
مربع لاتین چرخشی 4×4 به صورت زیر است:

$$A=\begin{array}{|c|c|c|c|}\hline 1&2&3&4\\\hline 4&1&2&3\\\hline 3&4&1&2\\\hline 2&3&4&1\\\hline\end{array}$$

مربع B که متعامد با A بوده و درایهٔ سطر چهارم و ستون چهارم آن ۲ می‌باشد، به صورت زیر خواهد بود:

$$B=\begin{array}{|c|c|c|c|}\hline &&&\\\hline &&&\\\hline &&&\\\hline &&&2\\\hline\end{array}$$

پس به دلیل متعامد بودن B با A، در قطر اصلی مربع B، نباید دیگر ۲ داشته باشیم و با توجه به شرط مربع لاتین بودن، در ۳ سطر اول ستون چهارم و ۳ ستون اول سطر چهارم نباید ۲ داشته باشیم. پس یکی از حالت‌های زیر اتفاق می‌افتد:



که هیچ کدام از آن‌ها با A متعامد نیست، پس هیچ مربع لاتینی مانند B وجود ندارد.

(ریاضیات گسسته- صفحه‌های ۶۲ تا ۶۷)

۷۳- **گزینهٔ «۱»** (احمدرضا فلاح)

اگر x_1 ، x_2 ، x_3 ، x_4 به ترتیب تعداد رأی‌های ۴ نفر کاندیدا و x_5 نیز تعداد رأی‌های سفید آن ۷ نفر باشند، آن‌گاه جواب‌های صحیح و نامنفی معادلهٔ $x_1+x_2+x_3+x_4+x_5=7$ همان جواب مسئله است. تعداد جواب‌های صحیح و نامنفی این معادله برابر است با:

$$\binom{7+5-1}{5-1}=\binom{11}{4}=\frac{11\times10\times9\times8}{4\times3\times2}=330$$

(ریاضیات گسسته- صفحه‌های ۵۹ تا ۶۱)

۷۴- **گزینهٔ «۳»** (افشین خاصه‌خان)

در مربع لاتین 3×3، با تعویض دو سطر یا دو ستون، مربع لاتین حاصل با مربع قبلی متعامد است. با تکرار این عمل، مربع لاتین حاصل با مربع اول متعامد نخواهد بود، پس فقط گزینهٔ «۳» جواب درست خواهد بود.

(ریاضیات گسسته- مشابه تمرین ۱۳ صفحهٔ ۷۲)

۷۵- **گزینهٔ «۲»** (علی ایمانی)

معادلهٔ مورد نظر: $x_1+x_2+x_3+x_4+x_5=12$

با توجه به شرط $x_1x_2=6$، دو حالت پیش می‌آید:

حالت (۱): $\{x_1,x_2\}=\{1,6\}\Rightarrow x_3+x_4+x_5=5$

$$\Rightarrow \text{تعداد جواب‌های طبیعی}=\binom{5-1}{3-1}=\binom{4}{2}=6$$

حالت (۲): $\{x_1,x_2\}=\{2,3\}\Rightarrow x_3+x_4+x_5=7$

$$\Rightarrow \text{تعداد جواب‌های طبیعی}=\binom{7-1}{3-1}=\binom{6}{2}=15$$

از آنجا که در هر یک از حالت‌ها، مقادیر x_1 و x_2، دو حالت جایگشت دارند، پس تعداد جواب‌های طبیعی کل برابر می‌شود با:

$$2\times(6+15)=42$$

(ریاضیات گسسته- صفحه‌های ۵۹ تا ۶۱)

۷۶- **گزینهٔ «۲»** (مصطفی دیداری)

x_4 حتماً باید زوج باشد پس $x_4=2k$ و داریم:

$$2x_1+2x_2+2x_3+3(2k)=12$$

$$\xrightarrow{\div 2} x_1+x_2+x_3+3k=6$$

با حالت‌بندی مقادیر k، تعداد جواب‌های صحیح و نامنفی معادله را به دست می‌آوریم:

$$\begin{cases} k=0\Rightarrow x_1+x_2+x_3=6 \Rightarrow \text{تعداد}=\binom{6+3-1}{3-1}=\binom{8}{2}=28\\ k=1\Rightarrow x_1+x_2+x_3=3 \Rightarrow \text{تعداد}=\binom{3+3-1}{3-1}=\binom{5}{2}=10\\ k=2\Rightarrow x_1+x_2+x_3=0 \Rightarrow \text{فقط یک جواب (همگی صفر)}\end{cases}$$

پس تعداد کل جواب‌ها برابر است با: $28+10+1=39$

(ریاضیات گسسته- صفحه‌های ۵۹ تا ۶۱)

۷۷- **گزینهٔ «۴»** (سوگند روشنی)

در مربع سمت راستی، دو درایه‌ای که در سطر اول و ستون‌های اول و سوم قرار گرفته‌اند غیر از ۱ و ۲ هستند (یعنی ۳ و ۴) و در نتیجه باید $x=2$ باشد. از طرفی در مربع سمت چپی، با توجه به این نکته که در هر سطر یا هر ستون عدد ۲ وجود دارد، نتیجه می‌گیریم که باید $y=z=t=2$ باشد.

پس: $2x+y+z+t=5\times2=10$

(ریاضیات گسسته- صفحه‌های ۶۲ تا ۶۴)

سنجش کلاد
www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshClouds

۷۸- **گزینهٔ «۱»** *(امیرحسین ابومحبوب)*

فرض کنید تعداد گل‌های رز، ارکیده، لاله، شقایق و داوودی را به ترتیب با x_1 تا x_5 نمایش دهیم. در این صورت داریم:

$$\begin{cases} x_1 \geq 3 \Rightarrow x_1 = y_1 + 3 \\ x_3 > 3 \Rightarrow x_3 \geq 4 \Rightarrow x_3 = y_3 + 4 \\ x_4 = 3 \end{cases}$$

در نتیجه:

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 12 \Rightarrow y_1 + x_2 + y_3 + x_5 = 2$$

$$\Rightarrow \text{تعداد جواب‌های صحیح و نامنفی} = \binom{2+4-1}{4-1} = \binom{5}{3} = 10$$

(ریاضیات گسسته- صفحه‌های ۵۹ تا ۶۱)

۷۹- **گزینهٔ «۲»** *(امیرحسین ابومحبوب)*

با فرض $x_1 , x_4 \in \mathbb{Z}$، برای این‌که هر دو عبارت $\frac{x_1}{x_4}$ و $\frac{x_4}{x_1}$ عددی صحیح شود، لازم است $x_1 = x_4 \neq 0$ باشند. در این صورت تنها مقدار صحیح برای $\frac{x_1}{x_4} + \frac{x_4}{x_1}$ عدد ۲ است و مثلاً به ازای $x_1 = x_4 = 1$، معادلهٔ $x_2 + x_3 = 9$ حاصل می‌شود که تعداد جواب‌های صحیح و نامنفی آن برابر می‌شود با:

$$\binom{9+2-1}{2-1} = \binom{10}{1} = 10$$

همچنین متغیرهای دیگر x_1 و x_4، هر دو برابر ۲، ۳ یا ۴ می‌توانند باشند، پس تعداد کل جواب‌ها برابر است با: $4 \times 10 = 40$

(ریاضیات گسسته- صفحه‌های ۵۹ تا ۶۱)

۸۰- **گزینهٔ «۴»** *(شبنم غلامی)*

برای این برنامه‌ریزی، یک مربع لاتین 4×4 رسم می‌کنیم که سطرها نشان‌دهندهٔ کلاس‌ها و ستون‌ها نمایانگر جلسات باشند. اگر مدرسین T_1، T_2، T_3 و T_4 را به ترتیب با شماره‌های ۱ تا ۴ در مربع لاتین مشخص کنیم، آن‌گاه مربع اولیه به صورت مربع A است که با پر کردن اعداد ۲ و ۳ به شکل مربع B درمی‌آید.

$$A = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 2 & & & \\ \hline & 3 & & \\ \hline & & 3 & \\ \hline & & & 2 \\ \hline \end{array} \Rightarrow B = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 2 & & & 3 \\ \hline & 3 & 2 & \\ \hline & 2 & 3 & \\ \hline 3 & & & 2 \\ \hline \end{array}$$

با توجه به این‌که اعداد ۱ و ۴ در سطرهای اول و چهارم به دو صورت و نیز در سطرهای دوم و سوم به دو صورت پر می‌شوند، تعداد مربع‌های لاتین ممکن طبق اصل ضرب برابر است با: $2 \times 2 = 4$

(ریاضیات گسسته- صفحه‌های ۶۲ تا ۶۴)

ریاضیات گسسته- پیشروی سریع

۸۱- **گزینهٔ «۱»** *(احمدرضا فلاح)*

مجموعه‌های زیر را در نظر بگیرید:

$$\begin{cases} A: \text{حالاتی که دو تهرانی کنار هم باشند.} \\ B: \text{حالاتی که دو اصفهانی کنار هم باشند.} \\ C: \text{حالاتی که دو شیرازی کنار هم باشند.} \end{cases}$$

خواستهٔ سؤال به صورت زیر به دست می‌آید:

$$|A' \cap B' \cap C'| = |\underbrace{S}_{\text{کل حالات}}| - |A \cup B \cup C|$$

$$= |S| - (|A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|)$$

$$= |S| - (3|A| - 3|A \cap B| + |A \cap B \cap C|)$$

$$= 6! - (3 \times 2! \times 5! - 3 \times 2! \times 2! \times 4! + 3! \times 2! \times 2! \times 2!)$$

$$= 720 - 480 = 240$$

۲۴۰ طریق ایستادن برای این ۶ نفر وجود دارد طوری که هیچ ۲ همشهری کنار هم نباشند.

(ریاضیات گسسته- صفحه‌های ۷۳ تا ۷۷)

۸۲- **گزینهٔ «۲»** *(احمدرضا فلاح)*

کافی است از کل حالات قرار گرفتن ۴ عکس متمایز در ۳ پاکت مختلف، حالت‌هایی که هیچ پاکتی خالی نمی‌ماند را کم کنیم و این معادل است با تعداد کل توابع از مجموعه ۴ عضوی به مجموعهٔ ۳ عضوی، منهای تعداد توابع پوشا روی همان دو مجموعه (تعداد توابعی که پوشا نمی‌باشند).

تعداد کل توابع برابر $3^4 = 81$ می‌باشد و همچنین تعداد توابع پوشا از یک مجموعه ۴ عضوی به یک مجموعه ۳ عضوی برابر است با:

$$3^4 - 3 \times 2^4 + 3 = 36$$

در نتیجه جواب سؤال برابر خواهد شد با: $81 - 36 = 45$

(ریاضیات گسسته- صفحه‌های ۷۷ و ۷۸)

۸۳- **گزینهٔ «۳»** *(افشین خاصه‌خان)*

بدترین حالت زمانی است که ابتدا همهٔ اعداد دو رقمی غیر مضرب ۷ انتخاب شوند:

$$\begin{cases} S = \{10, 11, \ldots, 99\} \\ \text{اعداد مضرب ۷ : } A = \{14, 21, \ldots, 98\} \end{cases}$$

$$|S| = 90 \quad , \quad |A| = [\frac{99}{7}] - [\frac{9}{7}] = 13$$

$$\Rightarrow \text{تعداد اعداد دو رقمی غیر مضرب ۷} = 90 - 13 = 77$$

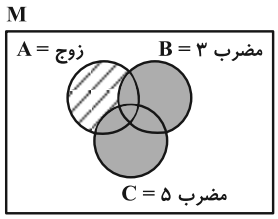
بنابراین حداقل ۷۹ عدد باید انتخاب شود تا مطمئن باشیم دو عدد مضرب ۷ انتخاب شده است.

(ریاضیات گسسته- صفحه‌های ۷۹ تا ۸۴)

سنجش کلاد
www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshClouds

۸۴- **گزینهٔ «۱»** *(سیدمحمدرضا حسینی‌فرد)*

اگر A، B و C به ترتیب مجموعه اعداد زوج، مضرب ۳ و مضرب ۵ باشند، ناحیهٔ هاشورخورده در نمودار ون زیر، پاسخ سؤال است، پس:



$$|A-(B\cup C)|=|A|-|A\cap(B\cup C)|$$
$$=|A|-(|A\cap B|+|A\cap C|-|A\cap B\cap C|)$$
$$=[\frac{۹۰}{۲}]-([\frac{۹۰}{۲\times۳}]+[\frac{۹۰}{۲\times۵}]-[\frac{۹۰}{۲\times۳\times۵}])$$
$$=۴۵-(۱۵+۹-۳)=۴۵-۲۱=۲۴$$

(ریاضیات گسسته- صفحه‌های ۷۳ تا ۷۷)

۸۵- **گزینهٔ «۴»** *(سیدمحمدرضا حسینی‌فرد)*

طبق فرض، برد تابع باید سه عضوی یا چهار عضوی باشد:

$$\text{برد تابع، ۳ عضوی} \Rightarrow \underbrace{\binom{۴}{۳}}_{\text{انتخاب اعضای برد}}\times\underbrace{(۳^۴-۳(۲^۴-۱))}_{\text{توابع پوشا از ۴ به ۳ عضوی}}=۴\times۳۶=۱۴۴$$

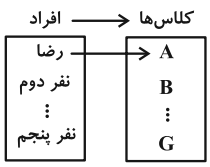
$$\text{برد تابع، ۴ عضوی} \Rightarrow ۴!=۲۴$$

در نتیجه جواب نهایی برابر می‌شود با: $۱۴۴+۲۴=۱۶۸$

(ریاضیات گسسته- صفحه‌های ۷۷ و ۷۸)

۸۶- **گزینهٔ «۲»** *(علیرضا شریف‌خطیبی)*

یکی از افراد و یکی از کلاس‌ها کلاً حذف می‌شوند پس ۴ دانش‌آموز دیگر باید در ۶ کلاس تقسیم شوند و در هر کلاس حداکثر یکی قرار گیرد. این مسأله مانند تعداد توابع یک‌به‌یک از مجموعهٔ ۴ عضوی به مجموعهٔ ۶ عضوی است، در نتیجه:



$$\text{نفر پنجم} \quad \text{نفر چهارم} \quad \text{نفر سوم} \quad \text{نفر دوم}$$
$$۳ \quad \times \quad ۴ \quad \times \quad ۵ \quad \times \quad ۶ \quad = ۳۶۰$$

(ریاضیات گسسته- صفحهٔ ۷۸)

۸۷- **گزینهٔ «۳»** *(علیرضا شریف‌خطیبی)*

طبق اصل لانه کبوتری داریم:

$$\text{تعداد کل کبوترها} = (n-۱)k+۱$$

برای حرف اول و دوم نام هر شخص در زبان فارسی ۳۲×۳۱ حالت (غیرتکراری) انتخاب داریم. در نتیجه:

$$\text{حداقل تعداد دانش‌آموزان} = (۴-۱)\times(۳۲\times۳۱)+۱=۲۹۷۷$$

(ریاضیات گسسته- صفحه‌های ۷۹ تا ۸۴)

۸۸- **گزینهٔ «۳»** *(مصطفی دیداری)*

بدترین حالت انتخاب اعداد، این است که متوالی نباشند. اگر ۱۰ عدد به صورت زیر برداریم هیچ کدام از اعداد متوالی نیستند:

$$۳, ۵, ۷, ۹, ۱۱, ۱۳, ۱۵, ۱۷, ۱۹, ۲۱$$

اگر $m=۲۳$ باشد، اعداد بالا به همراه ۲۳، یازده عددی هستند که هیچ دو عددی از آن‌ها متوالی نیستند. پس اگر $m=۲۳$ باشد نمی‌توانیم مطمئن باشیم و در نتیجه بیشترین مقدار m برابر ۲۲ است.

(ریاضیات گسسته- صفحه‌های ۷۹ تا ۸۴)

۸۹- **گزینهٔ «۴»** *(مهرداد ملوندی)*

برای اعداد چهار رقمی صورت سؤال، مجموعه‌های زیر را تعریف می‌کنیم:

$$\begin{cases} A: \text{مجموعه اعداد فاقد ۱} \\ B: \text{مجموعه اعداد فاقد ۲} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} |A|=|B|=۲\times۲\times۲\times۲=۱۶ \\ |A\cap B|=۱\times۱\times۱\times۱=۱ \end{cases}$$

این که فقط یکی از ارقام ۱ یا ۲ وجود دارد، یعنی مجموعه‌های $A'\cap B$ یا $A\cap B'$، که در آن صورت تعداد اعداد مطلوب برابر می‌شود با:

$$\overbrace{|A'\cap B|}^{B-A}+\overbrace{|A\cap B'|}^{A-B}=|B|-|A\cap B|+|A|-|A\cap B|$$
$$=|A|+|B|-۲|A\cap B|=۲\times۱۶-۲=۳۰$$

(ریاضیات گسسته- صفحه‌های ۷۳ تا ۷۷)

۹۰- **گزینهٔ «۳»** *(شبنم غلامی)*

فرض کنید x و y دو عضو از مجموعهٔ A باشند. طبق فرض، x و y به صورت زیر نوشته می‌شوند:

$$\begin{cases} x=۲^{\alpha_۱}\times۳^{\beta_۱}\times۷^{\gamma_۱}\times۱۱^{\theta_۱} \\ y=۲^{\alpha_۲}\times۳^{\beta_۲}\times۷^{\beta_۲}\times۱۱^{\theta_۲} \end{cases}$$

$$\Rightarrow xy=۲^{\alpha_۱+\alpha_۲}\times۳^{\beta_۱+\beta_۲}\times۷^{\gamma_۱+\gamma_۲}\times۱۱^{\theta_۱+\theta_۲}$$

عدد xy در صورتی مربع کامل است که هر ۴ مقدار $\alpha_۱+\alpha_۲$، $\beta_۱+\beta_۲$، $\gamma_۱+\gamma_۲$ و $\theta_۱+\theta_۲$ زوج باشند.

این موضوع در صورتی امکان‌پذیر است که توان‌های پایه‌های مشابه در x و y، همزمان هر دو زوج یا هر دو فرد باشند و چون ۴ پایهٔ مختلف وجود دارد، پس طبق اصل ضرب، $۲\times۲\times۲\times۲=۱۶$ حالت مختلف برای زوج یا فرد بودن توان‌ها در xy وجود دارد. در نتیجه طبق اصل لانه کبوتری با انتخاب ۱۷ عضو، حداقل دو عضو وجود دارد که توان‌های آن‌ها از نظر زوج یا فرد بودن دقیقاً مانند یکدیگر بوده و حاصل‌ضرب آن‌ها مربع کامل باشد.

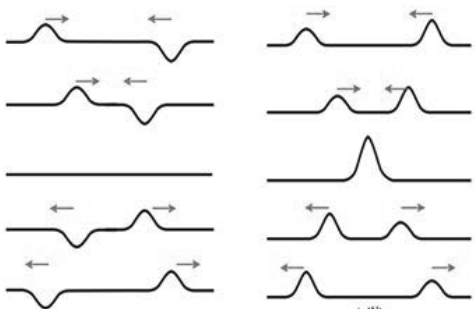
(ریاضیات گسسته- صفحه‌های ۸۱ تا ۸۴)

سنجش کلاد
www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshClouds

فیزیک ۳

۹۱- **گزینهٔ «۳»** *(کنکور ریاضی تیر ۱۴۰۳)*

شکل زیر عکس‌های دو تپ را که در جهت‌های مخالف هم در یک ریسمان کشیده شده حرکت می‌کنند در چند لحظهٔ متوالی نشان می‌دهد. وقتی این تپ‌ها به هم می‌رسند و با یکدیگر همپوشانی می‌کنند، بنابر اصل بر هم نهی، تپ برایند با مجموع دو تپ برابر است. توجه کنید چه برای تپ‌ها و چه برای موج‌هایی که همپوشانی می‌کنند، آن‌ها به هیچ وجه شکل و حرکت یکدیگر را تغییر نمی‌دهند، و بنابراین پس از همپوشانی، بدون هرگونه تغییر شکلی به حرکت خود ادامه می‌دهند به ترکیب موج‌ها با یکدیگر، تداخل می‌گویند. به بیان دیگر تداخل، ترکیب دو یا چند موج است که هم‌زمان از یک منطقه عبور می‌کنند. در شکل ب،تپ‌ها هنگام همپوشانی تپ بزرگ‌تری را ایجاد کرده‌اند که به آن تداخل سازنده می‌گویند، درحالی که در شکل الف، تپ‌ها هنگام همپوشانی اثر یکدیگر را حذف کرده‌اند که به آن تداخل ویرانگر می‌گویند.



ب الف

(فیزیک ۳- برهم‌کنش‌های موج؛ صفحهٔ ۱۰۳)

۹۲- **گزینهٔ «۳»** *(حسام نادری)*

می‌دانیم پهنای نوارها در طرح تداخلی آزمایش یانگ با طول موج نور تابیده متناسب است. پس هر چه طول‌موج نور افزایش یابد، پهنای نوارها افزایش می‌یابد. با انجام مورد (الف) طول‌موج افزایش و در نتیجه پهنای نوارها افزایش می‌یابد:

$$\lambda f = \frac{c}{n} \begin{cases} \xrightarrow{\text{نور قرمز به جای سبز}} \lambda \uparrow \Rightarrow \text{پهنای بیشتر} \\ \xrightarrow{\text{نور آبی به جای زرد}} \lambda \downarrow \Rightarrow \text{پهنای کمتر} \\ \xrightarrow{\text{محیط غلیظ‌تر}} n \uparrow \text{ , } f \text{ ثابت} \Rightarrow \lambda \downarrow \Rightarrow \text{پهنای کمتر} \end{cases}$$

(فیزیک ۳- برهم‌کنش‌های موج؛ صفحه‌های ۱۰۴ و ۱۰۵)

۹۳- **گزینهٔ «۳»** *(علیرضا جباری)*

تندی انتشار موج و سپس بسامد هماهنگ دوم تار را در حالتی که نیروی کشش تار $162\,N$ است، به دست می‌آوریم:

$$v = \sqrt{\frac{F}{\mu}} = \sqrt{\frac{162}{5\times10^{-3}}} = \sqrt{\frac{162\times2}{10^{-2}}} = \sqrt{\frac{81\times4}{10^{-2}}} = 180\,\frac{m}{s}$$

$$f_n = \frac{nv}{2L} \xrightarrow[L=0/75\,m]{n=2\,,\ v=180\frac{m}{s}} f_2 = \frac{2\times180}{2\times0/75} = 240\,Hz$$

تندی انتشار موج و سپس هماهنگ دوم تار را در حالت دوم نیز به دست می‌آوریم:

$$v' = \sqrt{\frac{F'}{\mu}} = \sqrt{\frac{288}{5\times10^{-3}}} = \sqrt{\frac{288\times2}{10^{-2}}} = \sqrt{\frac{144\times4}{10^{-2}}} = 240\,\frac{m}{s}$$

$$f_n' = \frac{nv'}{2L} \xrightarrow[L=0/75\,m]{n=2\,,\ v'=240\frac{m}{s}} f_2' = \frac{2\times240}{2\times0/75} = 320\,Hz$$

اکنون می‌توانیم تغییر بسامد هماهنگ دوم تار را پیدا کنیم:

$$f_2' - f_2 = 320 - 240 = 80\,Hz$$

بنابراین بسامد هماهنگ دوم تار $80\,Hz$ افزایش می‌یابد.

(فیزیک ۳- برهم‌کنش‌های موج؛ صفحه‌های ۱۰۵ تا ۱۰۷)

۹۴- **گزینهٔ «۴»** *(محمدکاظم منشاری)*

$$K_{max} = hf - W_0 \Rightarrow \begin{cases} K_{max_2} = hf_2 - W_0 \\ K_{max_1} = hf_1 - W_0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow K_{max_2} - K_{max_1} = hf_2 - hf_1$$

$$hf = \frac{hc}{\lambda} \Rightarrow K_{max_2} - K_{max_1} = hc\left(\frac{1}{\lambda_2} - \frac{1}{\lambda_1}\right)$$

$$3/6 - 0/6 = 4\times10^{-15}\times3\times10^{8}\left(\frac{1}{\lambda_2} - \frac{1}{240}\right)\times10^{9}$$

$$\Rightarrow \lambda_2 = 150\,nm$$

$$\lambda_2 - \lambda_1 = -90\,nm = -0/09\,\mu m$$

(علامت منفی نشان دهندهٔ کاهش طول موج است.)

(فیزیک ۳- آشنایی با فیزیک اتمی؛ صفحهٔ ۱۱۸)

۹۵- **گزینهٔ «۲»** *(مهران اسماعیلی)*

با توجه به رابطهٔ اثر فوتوالکتریک $(K_{max} = hf - W_0)$ در دو حالت داریم:

$$K_{max_1} = hf_1 - W_0$$

سنجش کلاد
www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshClouds

$$\xrightarrow[W_0=hf_0]{f_1=kf_0} K_{max_1}=h(kf_0)-hf_0=hf_0(k-1)$$

$$f_2=kf_1 \xrightarrow{f_1=kf_0} f_2=k(kf_0)=k^2f_0$$

$$K_{max_2}=hf_2-W_0$$

$$\xrightarrow[W_0=hf_0]{f_2=k^2f_0} K_{max_2}=h(k^2f_0)-hf_0=hf_0(k^2-1)$$

با تقسیم کردن انرژی جنبشی بیشینه در دو حالت، داریم:

$$\frac{K_{max_2}}{K_{max_1}}=\frac{hf_0(k^2-1)}{hf_0(k-1)}=\frac{(k-1)(k+1)}{k-1}=k+1$$

(فیزیک ۳- آشنایی با فیزیک اتمی؛ صفحه‌های ۱۱۸ و ۱۱۹)

۹۶- **گزینهٔ «۴»** *(حسین الهی)*

شکل مربوط به تابش گرمایی رشتهٔ داغ یک لامپ می‌باشد که طیفی پیوسته است و ناشی از برهم‌کنش قوی بین اتم‌های سازندهٔ آن است.

(فیزیک ۳- آشنایی با فیزیک اتمی؛ صفحهٔ ۱۲۱)

۹۷- **گزینهٔ «۴»** *(عبدالرضا امینی‌نسب)*

طول‌موج طیف اتم هیدروژن از رابطهٔ $\frac{1}{\lambda}=R(\frac{1}{n'^2}-\frac{1}{n^2})$ محاسبه می‌شود که n' شماره متناظر با نام رشته می‌باشد. می‌دانیم کوتاه‌ترین طول‌موج به ازای $n=\infty$ به دست می‌آید و بلندترین طول‌موج به ازای نزدیک‌ترین تراز یعنی $n=n'+1$ به دست می‌آید:

$$\left.\begin{aligned}\frac{1}{\lambda_{min}}&=R(\frac{1}{16}-\frac{1}{\infty})\\ \frac{1}{\lambda_{max}}&=R(\frac{1}{16}-\frac{1}{25})\end{aligned}\right\}\Rightarrow\frac{\lambda_{max}}{\lambda_{min}}=\frac{\frac{1}{16}}{\frac{9}{400}}=\frac{400}{9\times16}=\frac{25}{9}$$

$$\Rightarrow\frac{\lambda_{min}}{\lambda_{max}}=\frac{9}{25}$$

(فیزیک ۳- آشنایی با فیزیک اتمی؛ صفحه‌های ۱۲۳ و ۱۲۴)

۹۸- **گزینهٔ «۲»** *(علیرضا جباری)*

ابتدا به کمک انرژی فوتون گسیل شده، طول‌موج مربوط به آن را به دست می‌آوریم:

$$\Delta E=\frac{hc}{\lambda}\Rightarrow\frac{5}{3}=\frac{4\times10^{-15}\times3\times10^8}{\lambda}$$

$$\Rightarrow\lambda=\frac{12\times10^{-7}\times3}{5}=7/2\times10^{-7}m$$

$$\Rightarrow\lambda=720\times10^{-9}m=720nm$$

این طول‌موج در محدودهٔ نور مرئی قرار دارد و مربوط به رشتهٔ بالمر است، یعنی $n'=2$. اکنون با استفاده از رابطهٔ ریدبرگ، شمارهٔ مدار بزرگ‌تر را محاسبه می‌کنیم:

$$\frac{1}{\lambda}=R(\frac{1}{n'^2}-\frac{1}{n^2})\Rightarrow\frac{1}{720}=\frac{1}{100}(\frac{1}{2^2}-\frac{1}{n^2})$$

$$\Rightarrow\frac{5}{36}=\frac{1}{4}-\frac{1}{n^2}\Rightarrow\frac{1}{n^2}=\frac{1}{9}\Rightarrow n=3$$

(فیزیک ۳- آشنایی با فیزیک اتمی؛ صفحه‌های ۱۲۲ تا ۱۲۴)

۹۹- **گزینهٔ «۴»** *(مجتبی نکوئیان)*

با توجه به این‌که انرژی هر فوتون از رابطهٔ $E=hf=\frac{hc}{\lambda}$ به دست می‌آید، داریم:

$$E_B=6E_A\Rightarrow\frac{hc}{\lambda_B}=6\frac{hc}{\lambda_A}\Rightarrow\lambda_A=6\lambda_B$$

$$\lambda_A-\lambda_B=100nm\xrightarrow{\lambda_A=6\lambda_B}6\lambda_B-\lambda_B=100nm$$

$$\Rightarrow\lambda_B=20nm\ ,\ \lambda_A=120nm$$

در نهایت بسامد پرتوی A را به صورت زیر محاسبه می‌کنیم:

$$f_A=\frac{c}{\lambda_A}=\frac{3\times10^8}{12\times10^{-8}}=2/5\times10^{15}Hz=2/5\times10^9MHz$$

(فیزیک ۳- آشنایی با فیزیک اتمی؛ صفحه‌های ۱۱۶ تا ۱۱۸)

۱۰۰- **گزینهٔ «۳»** *(مسام نادری)*

موارد (الف) و (ت) نادرست‌اند.

بررسی موارد نادرست:

الف) مدل اتمی بور طیف اتم‌های هیدروژن گونه (مثل Li^{2+}) را می‌تواند توجیه کند.

ت) در گسیل خودبه‌خود، فوتون در جهت کاتوره‌ای گسیل می‌شود.

(فیزیک ۳- آشنایی با فیزیک اتمی؛ صفحه‌های ۱۲۵، ۱۲۹ و ۱۳۱ تا ۱۳۳)

www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshClouds

فیزیک ۳- پیشروی سریع

۱۰۱- **گزینهٔ «۴»** (حسام نادری)

در عنصری با نماد شیمیایی $_{Z}^{A}X$، A برابر عدد جرمی $(Z+N)$ و Z برابر عدد اتمی می‌باشد:

$$_{Z}^{۱۰۰}X \Rightarrow N+Z=۱۰۰ \xrightarrow{N=۵۲} Z=۴۸ \Rightarrow {}_{۴۸}^{۱۰۰}X$$

$$_{۲۲}^{۴۸}Y^{۲+} \Rightarrow \begin{cases} Z'=۲۲ \\ N'+Z'=۴۸ \end{cases} \Rightarrow N'=۲۶ \Rightarrow N'-Z'=۲۶-۲۲=۴$$

بار خالص هسته $_{۲۲}^{۴۸}Y^{۲+}$ ناشی از ۲۲ پروتون موجود در هسته است:

$$\text{بار هسته} = +۲۲e = ۲۲\times ۱/۶\times ۱۰^{-۱۹} = ۳/۵۲\times ۱۰^{-۱۸}C$$

(توجه شود که بار کل اتم برابر $+۲e$ است.)

(فیزیک ۳- صفحه‌های ۱۳۸ و ۱۳۹)

۱۰۲- **گزینهٔ «۲»** (محمدکاظم منشاری)

تنها عبارت «پ» درست است.

بررسی عبارات نادرست:

الف) انرژی نوکلئون‌های وابسته به هسته نیز مانند انرژی الکترون‌های وابسته به اتم کوانتیده‌اند و نوکلئون‌های درون هسته نمی‌توانند هر انرژی دلخواهی را اختیار کنند.

ب) اگر تعداد پروتون‌های درون هسته افزایش یابد، برای پایدار ماندن هسته باید تعداد نوترون‌ها افزایش یابد.

ت) هر نوکلئون فقط به نزدیک‌ترین نوکلئون‌های مجاورش نیروی هسته‌ای وارد می‌کند.

(فیزیک ۳- صفحه‌های ۱۴۰، ۱۴۱ و ۱۴۲)

۱۰۳- **گزینهٔ «۱»** (علیرضا جباری)

با توجه به یکسان بودن مجموع عددهای جرمی در دو طرف واکنش و همچنین یکسان بودن مجموع عددهای اتمی در دو طرف واکنش می‌توان نوشت:

$$_{Z}^{A}X \rightarrow {}_{۲}^{۴}\alpha + ۳({}_{-۱}^{۰}\beta^{-}) + {}_{Z'}^{A'}Y$$

$$A = ۴+۳(۰)+A' \Rightarrow A-A'=۴$$

$$Z = ۲+۳(-۱)+Z' \Rightarrow Z'-Z=۱$$

می‌دانیم تعداد نوترون‌های هستهٔ یک اتم، برابر است با اختلاف عددهای جرمی و اتمی آن. بنابراین داریم:

$$\begin{matrix} N=A-Z \\ N'=A'-Z' \end{matrix} \Rightarrow N-N'=(A-Z)-(A'-Z')$$

$$\Rightarrow N-N'=(A-A')+(Z'-Z) \xrightarrow[Z'-Z=۱]{A-A'=۴}$$

$$N-N'=۴+۱=۵$$

(فیزیک ۳- صفحه‌های ۱۴۲ تا ۱۴۵)

۱۰۴- **گزینهٔ «۴»** (افشین مینو)

طبق معادلهٔ واکنش‌هسته‌ای در صورت سؤال داریم:

$$_{۸۲}^{۲۰۷}X \rightarrow m({}_{۲}^{۴}\alpha)+n({}_{-۱}^{۰}e)+۲({}_{۰}^{۱}n)+{}_{۸۱}^{۱۹۷}Y$$

$$۲۰۷ = ۴m+۲+۱۹۷ \Rightarrow m=۲$$

$$۸۲ = ۲m-n+۸۱ \Rightarrow ۱=۲m-n \Rightarrow n=۳$$

(فیزیک ۳- صفحه‌های ۱۴۲ تا ۱۴۵)

۱۰۵- **گزینهٔ «۳»** (حسام نادری)

بررسی گزینه‌های نادرست:

گزینهٔ «۱»: هسته‌هایی که تعداد پروتون مساوی ولی تعداد نوترون متفاوت دارند، ایزوتوپ نامیده می‌شوند.

گزینهٔ «۲»:

$$_{Z}^{A}X \rightarrow {}_{Z'}^{A'}Y + {}_{۲}^{۴}\alpha + {}_{+۱}^{۰}\beta \Rightarrow \begin{cases} A=A'+۴ \\ Z=Z'+۳ \end{cases} \Rightarrow {}_{Z-۳}^{A-۴}Y$$

گزینهٔ «۴»: در واپاشی β^{-} یکی از نوترون‌های درون هسته به یک پروتون و یک الکترون تبدیل می‌شود.

(فیزیک ۳- صفحه‌های ۱۳۹ و ۱۴۲ تا ۱۴۷)

۱۰۶- **گزینهٔ «۱»** (امیراحمد میرسعید)

$$\frac{N}{N_{۰}} = \frac{۱}{۲^{n}} \Rightarrow \frac{۱}{۲^{n}} = \frac{۱}{۱۶} \Rightarrow n=۴$$

$$۴ = \frac{t}{T_{\frac{۱}{۲}}} \Rightarrow ۴ = \frac{۱۲۰}{T_{\frac{۱}{۲}}} \Rightarrow T_{\frac{۱}{۲}} = ۳۰ \text{ روز}$$

سنجش کلاد
www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshClouds

۳۰ روز قبل از روز ۱۲۰اُم، یعنی روز ۹۰اُم که معادل ۳ نیمه عمر است:

$$n' = \frac{t}{T_{\frac{1}{2}}} = \frac{۹۰}{۳۰} = ۳$$

$$\frac{N}{N_۰} = \frac{۱}{۲^{n'}} \Rightarrow \frac{N}{N_۰} = \frac{۱}{۸}$$

یعنی $\frac{۱}{۸}$ آن باقی می‌ماند، پس $\frac{۷}{۸}$ آن واپاشیده می‌شود.

درصد هسته‌های واپاشیده شده $= \frac{۷}{۸} \times ۱۰۰ = ۸۷/۵٪$

(فیزیک ۳- صفحه‌های ۱۴۶ و ۱۴۷)

۱۰۷- **گزینهٔ «۲»** *(محمدکاظم منشاری)*

$$N = N_۰(\frac{۱}{۲})^n \Rightarrow \begin{cases} \frac{N}{۴} = \frac{N}{۲}(\frac{۱}{۲})^{n_A} \Rightarrow n_A = ۱ \\ \frac{N}{۸} = N(\frac{۱}{۲})^{n_B} \Rightarrow n_B = ۳ \end{cases}$$

$$n = \frac{t}{T} \begin{cases} n_A = \frac{t_۰}{T_A} \Rightarrow T_A = \frac{t_۰}{n_A} \\ n_B = \frac{t_۰}{T_B} \Rightarrow T_B = \frac{t_۰}{n_B} \end{cases} \Rightarrow \frac{T_B}{T_A} = \frac{n_A}{n_B} = \frac{۱}{۳}$$

$$\Rightarrow T_B = \frac{۱}{۳}T_A = \frac{۴}{۳}s$$

(فیزیک ۳- صفحهٔ ۱۴۷)

۱۰۸- **گزینهٔ «۲»** *(حسین الهی)*

در اندازه‌گیری‌های دقیق نشان داده شده است که جرم هسته از مجموع جرم پروتون‌ها و نوترون‌های تشکیل‌دهنده‌اش اندکی کمتر است. اگر این اختلاف جرم را که به آن کاستی جرم هسته گفته می‌شود، مطابق رابطهٔ معروف اینشتین $(E = mc^۲)$، در مربع تندی نور $(c^۲)$ ضرب کنیم انرژی بستگی هسته‌ای به‌دست می‌آید.

هستهٔ اتم از نوترون‌ها و پروتون‌ها تشکیل شده است که به‌طور کلی نوکلئون نامیده می‌شوند.

(فیزیک ۳- صفحهٔ ۱۴۴)

۱۰۹- **گزینهٔ «۴»** *(مهران اسماعیلی)*

ابتدا باید جرم ماده باقی‌مانده را در پایان سال اول و دوم و سوم به‌دست آوریم:

پایان سال اول: $m_۱ = \frac{m_۰}{۲^{n_۱}} \xrightarrow{n_۱ = \frac{۱۲}{۴} = ۳} m_۱ = \frac{m_۰}{۲^۳}$

پایان سال دوم: $m_۲ = \frac{m_۰}{۲^{n_۲}} \xrightarrow{n_۲ = \frac{۲۴}{۴} = ۶} m_۲ = \frac{m_۰}{۲^۶}$

پایان سال سوم: $m_۳ = \frac{m_۰}{۲^{n_۳}} \xrightarrow{n_۳ = \frac{۳۶}{۴} = ۹} m_۳ = \frac{m_۰}{۲^۹}$

حال می‌توانیم جرم واپاشیده را در طی سال اول و سوم به‌دست آوریم.

جرم واپاشیده در طی سال اول: $m'_۱ = m_۰ - \frac{m_۰}{۲^۳} = \frac{۷}{۸}m_۰$

جرم واپاشیده در طی سال سوم:

$$m'_۳ = m_۲ - m_۳ = \frac{m_۰}{۲^۶} - \frac{m_۰}{۲^۹} = \frac{۷m_۰}{۵۱۲}$$

$$\frac{m'_۱}{m'_۳} = \frac{\frac{۷}{۸}m_۰}{\frac{۷}{۵۱۲}m_۰} = ۶۴$$

(فیزیک ۳- صفحه‌های ۱۴۶ و ۱۴۷)

۱۱۰- **گزینهٔ «۲»** *(حسام نادری)*

گزینهٔ «۲» نادرست است؛ زیرا افزایش غلظت ^{۲۳۵}U در یک نمونهٔ اورانیم را غنی‌سازی می‌گویند.

بررسی سایر گزینه‌ها:

گزینهٔ «۱»: درست؛ در واکنش گداخت، به دلیل همجوشی هسته‌ها، مجموع جرم محصولات فرایند کمتر از مجموع جرم هسته‌های اولیه است و این کاستی جرم در انرژی آزاد شده خود را نشان می‌دهد.

گزینهٔ «۳»: درست؛ $^۱_۰n + {}^{۲۳۵}_{۹۲}U \rightarrow {}^{۱۳۳}_{۵۰}Sn + {}^{۱۰۱}_{۴۲}M_۰ + x^۱_۰n$

$$\Rightarrow ۱ + ۲۳۵ = ۱۳۳ + ۱۰۱ + x \Rightarrow x = ۲$$

گزینهٔ «۴»: درست؛ میله‌های کنترل در یک راکتور هسته‌ای، از مواد جذب‌کنندهٔ نوترون مثل بور و کادمیم ساخته می‌شوند و گرافیت به عنوان کندساز نوترون‌ها استفاده می‌شود.

(فیزیک ۳- صفحه‌های ۱۴۸ تا ۱۵۳)

سنجش کلاد
www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshClouds

فیزیک ۲

۱۱۱- **گزینهٔ «۴»** (محمدکاظم منشاری)

$$\text{(ضلع مربع) } a=\frac{۱۶۰}{۴}=۴۰\,cm \Rightarrow A=a^۲=(\frac{۴۰}{۱۰۰})^۲=۰/۱۶\,m^۲$$

$$\Phi=AB\cos\theta=۰/۱۶\times۲۰۰\times۱۰^{-۴}\times\cos۳۰^\circ$$

$$=۳۲\times۱۰^{-۴}\times\frac{\sqrt{۳}}{۲}=۱۶\sqrt{۳}\times۱۰^{-۴}\,Wb$$

(فیزیک ۲- صفحهٔ ۱۱۱)

۱۱۲- **گزینهٔ «۲»** (عبدالرضا امینی‌نسب)

ابتدا به کمک قانون اهم $(\varepsilon=IR)$ نیروی محرکهٔ القایی را به دست می‌آوریم:

$$\left.\begin{matrix}I=۰/۱\,A\\R=۱۰\,\Omega\end{matrix}\right\}\Rightarrow\varepsilon=RI=۱۰\times۰/۱=۱V$$

سپس به کمک رابطهٔ $\varepsilon_{av}=-N\frac{\Delta\Phi}{\Delta t}$ مجهول مسئله را می‌یابیم. در این مسئله آهنگ تغییرات میدان مغناطیسی مد نظر است، پس داریم:

$$\varepsilon_{av}=|-N\frac{\Delta\Phi}{\Delta t}|=|-NA.\cos\theta\frac{\Delta B}{\Delta t}|$$

$$\Rightarrow ۱=|-۲۰۰۰\times۲۰\times۱۰^{-۴}\times۱\times\frac{\Delta B}{\Delta t}|$$

$$\Rightarrow|\frac{\Delta B}{\Delta t}|=\frac{۱}{۴}\frac{T}{s}=۰/۲۵\frac{T}{s}$$

(فیزیک ۲- صفحه‌های ۱۱۱ تا ۱۱۴)

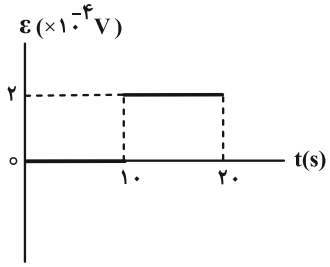
۱۱۳- **گزینهٔ «۲»** (عبدالرضا امینی‌نسب)

می‌دانیم نیروی محرکهٔ القایی در هر مدار از رابطهٔ $\varepsilon_{av}=-N\frac{\Delta\Phi}{\Delta t}$ به دست می‌آید. در بازهٔ زمانی صفر الی ۱۰ ثانیهٔ داریم:

$$\varepsilon_{av}=-۱\times\frac{۱۰^{-۳}-۱۰^{-۳}}{۱۰-۰}=۰$$

در بازهٔ زمانی ۱۰ ثانیه الی ۲۰ ثانیه داریم:

$$\varepsilon_{av}=-۱\times\frac{-۱۰^{-۳}-۱۰^{-۳}}{۲۰-۱۰}=-(\frac{-۲\times۱۰^{-۳}}{۱۰})\Rightarrow\varepsilon_{av}=۲\times۱۰^{-۴}V$$



(فیزیک ۲- صفحه‌های ۱۱۱ تا ۱۱۴)

۱۱۴- **گزینهٔ «۱»** (کنکور سراسری ریاضی ۹۸)

$$\varepsilon=B\ell v\xrightarrow[\ell=۰/۲۵m]{\varepsilon=۰/۱۵V,B=۰/۱۲T}۰/۱۵=۰/۱۲\times۰/۲۵\times v$$

$$\Rightarrow v=۵\frac{m}{s}$$

هنگامی‌که میله به سمت چپ حرکت می‌کند، شار گذرنده از قاب کاهش می‌یابد. برای جلوگیری از کاهش شار طبق قانون لنز، میدان موافق میدان خارجی ایجاد می‌شود، بنابراین اگر چهار انگشت دست راست را در جهت حرکت میله و خم شدن انگشت‌ها را در جهت میدان قرار دهیم، انگشت شست جهت جریان الکتریکی در سیم را، که از N به طرف M می‌باشد، نشان می‌دهد.

(فیزیک ۲- صفحه‌های ۱۱۵ تا ۱۱۸)

۱۱۵- **گزینهٔ «۳»** (علی برزگر)

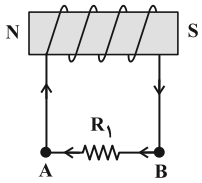
طبق قانون لنز، جهت جریان القایی در جهتی است که با تغییرات شار عبوری از حلقه مخالفت کند، بنابراین در شکل (۱) به دلیل افزایش جریان شار عبوری از حلقه افزایش می‌یابد، لذا جهت جریان القایی باید ساعتگرد باشد تا میدان مغناطیسی ناشی از آن در جهت مخالف میدان سیم راست باشد. در شکل (۲) به دلیل کاهش جریان شار عبوری از حلقه کاهش می‌یابد، لذا جهت جریان القایی باید ساعتگرد باشد تا میدان مغناطیسی ناشی از آن در جهت میدان سیم راست باشد. در شکل (۳) به دلیل افزایش جریان شار عبوری از حلقه افزایش می‌یابد، لذا جهت جریان القایی باید پادساعتگرد باشد تا میدان مغناطیسی ناشی از آن در جهت مخالف میدان سیم راست باشد.

(فیزیک ۲- صفحه‌های ۱۱۷ و ۱۱۸)

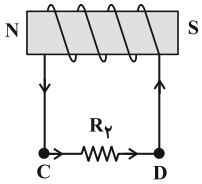
سنجش کلاد
www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshClouds

۱۱۶- **گزینهٔ «۱»** *(علیرضا جباری)*

با توجه به قاعدهٔ دست راست و معلوم بودن جهت جریان در مقاومت R_1، قطب‌های S و N در دو سر سیملولهٔ (۱)، مطابق شکل زیر تشکیل می‌شود.



جهت جریان در مدار (۲) به گونه‌ای است که میدان مغناطیسی درون آن با میدان مغناطیسی سیملولهٔ (۱) هم‌جهت است، بنابراین با توجه به قانون لنز، شار مغناطیسی ناشی از سیملولهٔ (۲) در حال کاهش است. یعنی جریان آن کاهش پیدا کرده و در نتیجه مقاومت رئوستا در حال افزایش است. با توجه به قانون لنز و کاهش شار مغناطیسی عبوری از سیملولهٔ (۳)، جهت میدان مغناطیسی در سیملولهٔ (۳) باید هم‌جهت با میدان سیملولهٔ (۲) یعنی به طرف چپ باشد. بنابراین جهت جریان القایی در مقاومت R_2 از C به طرف D است.



(فیزیک ۲- صفحهٔ ۱۱۷)

۱۱۷- **گزینهٔ «۱»** *(امیراحمد میرسعید)*

$$U_2 = 9U_1 \Rightarrow \frac{1}{2}L_2I_2^2 = 9\times\frac{1}{2}L_1I_1^2$$

$$\Rightarrow 40\times10^{-3}\times I_2^2 = 9\times10\times10^{-3}I_1^2 \Rightarrow I_2 = \frac{3}{2}I_1$$

چون اختلاف پتانسیل دو سر مقاومت‌های موازی یکسان می‌باشد، می‌توان نوشت:

$$V_2 = V_1 \Rightarrow R_2I_2 = R_1I_1 \Rightarrow \frac{I_2}{I_1} = \frac{R_1}{R_2}$$

$$\Rightarrow \frac{R_1}{\frac{50}{3}} = \frac{3}{2} \Rightarrow R_1 = 25\Omega$$

(فیزیک ۲- صفحه‌های ۱۱۸ تا ۱۲۲)

۱۱۸- **گزینهٔ «۴»** *(حسین الهی)*

ابتدا با توجه به نمودار معادله جریان متناوب را به دست می‌آوریم:

$$I = I_m\sin(\frac{2\pi}{T}t) \Rightarrow -3 = 6\sin(\frac{2\pi}{T}\times7)$$

$$\Rightarrow -\frac{3}{6} = -\frac{1}{2} = \sin(\frac{2\pi}{T}\times7) \Rightarrow \frac{7\pi}{6} = \frac{2\pi}{T}\times7$$

$$\Rightarrow T = 12ms = \frac{12}{1000}s$$

بنابراین:

$$I = 6\sin(\frac{500\pi}{3}t) \xrightarrow{t=9ms} I = 6\sin(\frac{500\pi}{3}\times9\times10^{-3})$$

$$\Rightarrow I = 6\sin(\frac{1500\pi}{1000}) = 6\sin(\frac{3\pi}{2}) = -6$$

$$U = \frac{1}{2}LI^2 \xrightarrow[I=6A]{L=100mH} U = \frac{1}{2}\times100\times10^{-3}\times36 = 1/8J$$

(فیزیک ۲- صفحه‌های ۱۲۰ تا ۱۲۵)

۱۱۹- **گزینهٔ «۱»** *(مهران اسماعیلی)*

با توجه به رابطهٔ شار مغناطیسی عبوری از پیچه داریم:

$$\Phi = BA\cos\theta \xrightarrow[B=0/2T\ ,\ A=25\times10^{-4}m^2]{\Phi=3\times10^{-4}Wb}$$

$$3\times10^{-4} = 0/2\times25\times10^{-4}\cos\theta \Rightarrow \cos\theta = \frac{3}{5}$$

$$\sin\theta = \sqrt{1-\cos^2\theta} = \sqrt{1-(\frac{3}{5})^2} = \frac{4}{5}$$

از طرفی دیگر، بنابه معادلهٔ جریان القایی در پیچه داریم:

$$I = I_m\sin\theta \xrightarrow[\sin\theta=\frac{4}{5}]{I=2/4A} 2/4 = I_m\times\frac{4}{5} \Rightarrow I_m = 3A$$

(فیزیک ۲- صفحه‌های ۱۲۰ تا ۱۲۵)

۱۲۰- **گزینهٔ «۴»** *(مسعود خدرانی)*

اختلاف پتانسیل دو سر مقاومت 2Ω با اختلاف پتانسیل دو سر پیچه برابر است:

$$P = \frac{V_2^2}{R} \Rightarrow 18 = \frac{V_2^2}{2} \Rightarrow V_2 = 6V$$

$$\frac{V_2}{V_1} = \frac{N_2}{N_1} \Rightarrow \frac{6}{V_1} = \frac{120}{4000} \Rightarrow V_1 = 200V$$

(فیزیک ۲- صفحه‌های ۱۲۶ و ۱۲۷)

سنجش کلاد
www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshClouds

فیزیک ۱

۱۲۱- **گزینهٔ «۴»** *(افشین مینو)*

در فرایندهای بی‌دررو $Q = 0$ است:

$$\Delta U = Q + W \xrightarrow{\text{بی‌دررو}} W = \Delta U$$

پس در فرایند بی‌دررو، کار انجام شده روی گاز برابر است با تغییرات انرژی درونی گاز و در فرایند هم‌دما، انرژی درونی گاز ثابت و تغییرات انرژی درونی صفر است.

(فیزیک ۱- صفحه‌های ۱۳۰ تا ۱۳۹)

۱۲۲- **گزینهٔ «۱»** *(محمدکاظم منشاری)*

تغییرات انرژی درونی گاز به مسیر بستگی نداشته و تنها به نقاط ابتدایی و انتهایی بستگی دارد:

$$\Delta U_a = \Delta U_b = \Delta U_c$$

$$PV = nRT \xrightarrow[P_fV_f > P_iV_i]{PV \propto T} T_f > T_i$$

$$\xrightarrow{U \propto T} U_f > U_i \Rightarrow \Delta U > 0$$

مساحت سطح زیر نمودار $P - V$ برابر با اندازهٔ کار انجام شده توسط محیط بر روی گاز است:

$$S_c > S_b > S_a \Rightarrow |W_c| > |W_b| > |W_a|$$

$$\Delta V > 0 \Rightarrow W < 0 \Rightarrow W_c < W_b < W_a$$

$$\Delta U_a = \Delta U_b = \Delta U_c > 0$$

$$\Rightarrow W_a + Q_a = W_b + Q_b = W_c + Q_c > 0$$

$$\Rightarrow Q_c > Q_b > Q_a > 0$$

پس هیچ یک از عبارات داده شده، درست نیستند.

(فیزیک ۱- صفحه‌های ۱۲۹ تا ۱۳۵)

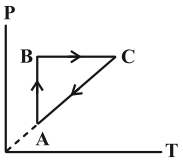
۱۲۳- **گزینهٔ «۲»** *(عبدالرضا امینی‌نسب)*

فرایند AB یک فرایند هم‌دما می‌باشد که حجم آن کم شده، بنابراین طبق رابطهٔ $PV = nRT$ هنگامی که حجم کم شود، فشار گاز افزایش می‌یابد.

فرایند BC یک فرایند هم‌فشار است که دمای آن افزایش یافته، حجم آن نیز افزایش یافته است.

فرایند CA یک فرایند هم‌حجم است که دمای آن کم شده، بنابراین طبق رابطهٔ $PV = nRT$ فشار آن نیز کاهش می‌یابد.

نکته: هرگاه نمودار $V - T$ پادساعتگرد باشد، آن‌گاه نمودار $P - T$ ساعتگرد می‌باشد.



(فیزیک ۱- صفحه‌های ۱۳۰ تا ۱۴۰)

۱۲۴- **گزینهٔ «۴»** *(علی برزگر)*

در فرایند هم‌فشار داریم: $W = -P.\Delta V = -nR\Delta T$

$$\xrightarrow[W=-415J]{n=2/5mol} -415 = -2/5 \times 8/3 \times \Delta T \Rightarrow \Delta T = 20^\circ C$$

$$\Delta T = T_2 - T_1 \Rightarrow 20 = T_2 - 30 \Rightarrow T_2 = 50^\circ C$$

(فیزیک ۱- صفحه‌های ۱۳۲ تا ۱۳۴)

۱۲۵- **گزینهٔ «۲»** *(علیرضا جباری)*

ابتدا به کمک معادلهٔ گازهای کامل، فشار گاز در نقطهٔ A را به دست می‌آوریم:

$$P_AV_A = nRT_A \xrightarrow[R=8\frac{J}{mol.K},\ T_A=500K]{V_A=0/05m^3,\ n=2mol} P_A \times 0/05 = 2 \times 8 \times 500$$

$$\Rightarrow P_A = \frac{16 \times 5 \times 10^2}{5 \times 10^{-2}} = 1/6 \times 10^5 Pa = 1/6 atm$$

از طرفی با توجه به شکل نمودار داده شده، این فرایند در فشار ثابت انجام می‌گیرد، بنابراین: $P_A = P_B \Rightarrow P_B = 1/6 atm$

فرایند AB هم‌فشار است. در نتیجه کار انجام شده روی گاز به صورت زیر به دست می‌آید:

$$W = -P\Delta V = -nR\Delta T = -nR(T_B - T_A)$$

$$\xrightarrow[T_A=500K,\ T_B=800K]{n=2mol,\ R=8\frac{J}{mol.K}}$$

$$W = -2 \times 8(800 - 500) = -16 \times 300 = -4800J$$

(فیزیک ۱- صفحه‌های ۱۳۲ تا ۱۳۴)

۱۲۶- **گزینهٔ «۴»** *(علیرضا جباری)*

می‌دانیم مساحت داخل یک چرخه در نمودار $P - V$ با اندازهٔ کار انجام شده در آن چرخه برابر است. بنابراین داریم:

$$|W| = S_{\text{نمودار}} = \frac{(12-4) \times 10^5 \times (40-20) \times 10^{-3}}{2}$$

$$= \frac{8 \times 20 \times 10^2}{2} = 8000J \Rightarrow |W| = 8kJ$$

سنجش کلاد
www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshClouds

با توجه به این‌که جهت این چرخه، ساعتگرد است، $W<0$ بوده و می‌توان نوشت:

$$W=-8\,kJ$$

از طرفی با توجه به قانون اول ترمودینامیک، می‌توان گرمای مبادله شده را به دست آورد:

$$\Delta U=Q+W \xrightarrow[\text{در یک چرخه}]{\Delta U=0} Q=-W \xrightarrow{W=-8\,kJ} Q=8\,kJ$$

یعنی دستگاه $8\,kJ$ گرما دریافت می‌کند.

(فیزیک ۱- صفحهٔ ۱۳۹)

۱۲۷- **گزینهٔ «۳»** (مهران اسماعیلی)

همان‌طور که می‌دانیم همواره تغییر فشار در فرایند بی‌دررو بیشتر از فرایند هم‌دما است، بنابراین فرایند BC بی‌دررو و فرایند CA هم‌دما است. با توجه به این‌که تغییر انرژی درونی گاز در چرخه برابر صفر است، داریم:

$$\Delta U=0 \Rightarrow \underset{\text{هم‌حجم}}{\Delta U_{AB}}+\underset{\text{بی‌دررو}}{\Delta U_{BC}}+\underset{\text{هم‌دما}}{\Delta U_{CA}}=0$$

در فرایند هم‌حجم $\Delta U_{AB}=Q_{AB}$، در فرایند بی‌دررو $\Delta U_{BC}=W_{BC}$ و در فرایند هم‌دما $\Delta U_{CA}=0$ است.

با توجه به این‌که در فرایند هم‌حجم فشار افزایش یافته، دمای گاز نیز افزایش می‌یابد، یعنی گاز گرما می‌گیرد. بنابراین:

$$\Delta U_{AB}=Q_{AB}=1200\,J$$

$$\Delta U_{AB}+\Delta U_{BC}+\Delta U_{CA}=0 \xrightarrow[\Delta U_{BC}=W_{BC}\ ,\ \Delta U_{CA}=0]{\Delta U_{AB}=1200\,J}$$

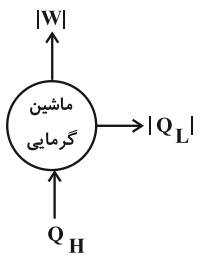
$$1200+W_{BC}+0=0 \Rightarrow W_{BC}=-1200\,J$$

$$\Rightarrow |W_{BC}|=1200\,J$$

(فیزیک ۱- صفحه‌های ۱۳۰ تا ۱۴۰)

۱۲۸- **گزینهٔ «۴»** (عبدالرضا امینی‌نسب)

مطابق قانون اول ترمودینامیک برای چرخهٔ ماشین‌های آرمانی داریم:



$$\Delta U=0 \Rightarrow 0+Q_H+Q_L+W=0 \Rightarrow Q_H=|Q_L|+|W|$$

از طرفی رابطهٔ بازده ماشین گرمایی به صورت $\eta=\frac{|W|}{Q_H}$ می‌باشد.

بنابراین ابتدا، از رابطهٔ بازده ماشین گرمایی مقدار W را محاسبه می‌کنیم.

$$\eta=\frac{|W|}{Q_H} \Rightarrow \frac{40}{100}=\frac{|W|}{270} \Rightarrow |W|=0/4\times 270=108\,kJ$$

$$Q_H=|Q_L|+|W|$$

$$\Rightarrow |Q_L|=Q_H-|W|=270-108=162\,kJ$$

(فیزیک ۱- صفحهٔ ۱۴۵)

۱۲۹- **گزینهٔ «۲»** (مصطفی کیانی)

با استفاده از رابطهٔ بازده ماشین گرمایی آرمانی و با توجه به این‌که $|Q_{L_2}|=\frac{3}{5}Q_{H_1}$ و $Q_{H_2}=|Q_{L_1}|$ است، می‌توان نوشت:

$$\eta_2=1-\frac{|Q_{L_2}|}{Q_{H_2}} \xrightarrow[|Q_{L_2}|=\frac{3}{5}Q_{H_1}]{\eta_2=\frac{20}{100}=\frac{1}{5}} \frac{1}{5}=1-\frac{\frac{3}{5}Q_{H_1}}{Q_{H_2}}$$

$$\xrightarrow{Q_{H_2}=|Q_{L_1}|} \frac{4}{5}=\frac{3}{5}\frac{Q_{H_1}}{|Q_{L_1}|} \Rightarrow \frac{|Q_{L_1}|}{Q_{H_1}}=\frac{3}{4}$$

$$\eta_1=1-\frac{|Q_{L_1}|}{Q_{H_1}} \Rightarrow \eta_1=1-\frac{3}{4} \Rightarrow \eta_1=\frac{1}{4} \Rightarrow \eta_1=25\,\%$$

(فیزیک ۱- صفحهٔ ۱۴۵)

۱۳۰- **گزینهٔ «۴»** (حسام نادری)

موارد (الف) و (ت) صحیح‌اند.

بررسی موارد نادرست:

ب) مرحلهٔ ضربهٔ قدرت در چرخهٔ یک ماشین بنزینی، یک فرایند بی‌دررو است.

پ) نقض قانون دوم ترمودینامیک به بیان یخچالی موجب نقض قانون دوم ترمودینامیک به بیان ماشین گرمایی می‌شود.

(فیزیک ۱- صفحه‌های ۱۴۱ تا ۱۴۷)

سنجش کلاد
www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshClouds

شیمی ۳

۱۳۱- **گزینهٔ «۱»** *(یاسر راش)*

مجموعه تلاش‌های بشریت برای حل مشکلات و مسئله‌ها در هر زمان و مکان و یافتن راهکارهای علمی، در گذر زمان منجر به تولید و انباشت دانش و فناوری شده است. یکی از آن‌ها، دانش شیمی و فناوری‌های آن است که نقش پررنگی برای گذر از تنگناها و رسیدن به زندگی مدرن امروزی داشته است. شکل زیر برخی از دستاوردهای مهم شیمی را در این راستا نشان می‌دهد:

(شیمی ۳- صفحه‌های ۹۲ و ۹۳)

۱۳۲- **گزینهٔ «۴»** *(محمدرضا پورجاوید)*

همهٔ عبارت‌های داده شده درست هستند.

- آلاینده‌های کربن‌داری همچون CO و CO_2 می‌توانند از سوختن ناقص و کامل هیدروکربن‌ها تولید شوند.
- اکسید بی‌رنگ نیتروژن، نیتروژن مونوکسید (NO) است که در ساختار آن N از قاعدهٔ هشت‌تایی پیروی نمی‌کند: $\dot{N}=\dot{O}$
- تولید اوزون تروپوسفری طبق واکنش $NO_2 + O_2 \rightarrow NO + O_3$ صورت می‌گیرد و ضریب O_2 و O_3 (به عنوان آلوتروپ‌های اکسیژن) در این واکنش یکسان است.

(شیمی ۳- صفحه‌های ۹۳ و ۹۴)

۱۳۳- **گزینهٔ «۲»** *(محسن مجنونی)*

بررسی موارد:

الف) با توجه به متن کتاب درسی، با این‌که استفادهٔ بهینه و درست از دانش و فناوری، آسایش و رفاه را در زندگی تأمین می‌کند، اما استفاده نادرست از آن، آثاری مخرب‌تر و زیان‌بارتری به دنبال خواهد داشت.

ب) استفاده از مبدل کاتالیستی، آلودگی ناشی از مصرف سوخت را کاهش می‌دهد.

پ) با توجه به نمودار صفحهٔ ۹۳ کتاب درسی دوازدهم صحیح است.

ت) گسترش فناوری صفحه‌های نمایشگر در وسایل الکترونیک، مدیون دانش شیمی است.

(شیمی ۳- صفحه‌های ۹۱، ۹۲ و ۹۳)

۱۳۴- **گزینهٔ «۳»** *(علی کریمی)*

گزینهٔ «۱»: هر چه اندازهٔ ذره های کاتالیزگر ریزتر باشد، سطح تماس و در نتیجه بازده واکنش‌های تبدیل آلاینده‌ها بیش‌تر می‌شود.

گزینهٔ «۲»: به این دلیل از ۳ نوع کاتالیزگر استفاده می‌شود که ۳ نوع واکنش مختلف داریم.

گزینهٔ «۴»: نماد پالادیم Pd می‌باشد.

(شیمی ۳- صفحه‌های ۱۰۰ تا ۱۰۲)

۱۳۵- **گزینهٔ «۳»** *(یاسر راش)*

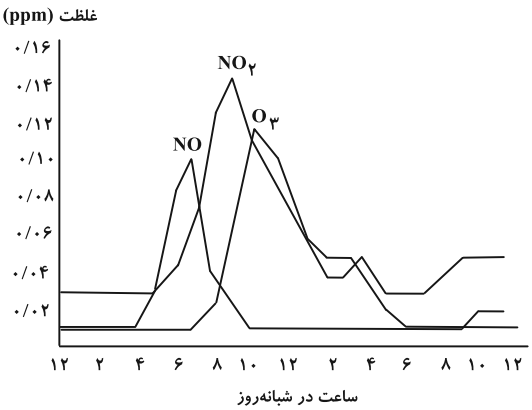
هوای آلوده شامل اکسیدهای نیتروژن‌دار و گوگرددار بوده و بر اثر واکنش این آلاینده‌ها با آب، باران اسیدی شکل می‌گیرد. دو مورد از پیامدهای باران اسیدی، «پوسیدگی خودروها» و «فرسودگی ساختمان‌ها» است.

بررسی سایر گزینه‌ها:

۱) هوای خشک و پاک مخلوطی از گازهای گوناگون است که به‌طور یکنواخت در هواکره پخش شده‌اند. در حالی که هوای آلوده افزون بر آن‌ها حاوی گازهای گوناگونی مانند SO_2، O_3، NO_2، CO، NO، ذره‌های معلق و مواد آلی فرّار است. از طرفی میزان آلودگی هواکره در شهرهای مختلف متفاوت بوده و در نتیجه ترکیب درصد هوای آلوده در قسمت‌های مختلف هواکره متغیر است.

۲) به دلیل وجود آلاینده‌ها هوای آلوده بوی بدی دارد. وجود گاز آلایندهٔ NO_2 در هواکره باعث می‌شود سطح شهرهای بزرگ مثل تهران به ویژه در زمستان با لایهٔ قهوه‌ای رنگی پوشانیده شود.

۴) با توجه به نمودار زیر این گزاره صحیح است:



(شیمی ۳- صفحه‌های ۹۳ و ۹۴)

سنجش کلاد
www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshClouds

۱۳۶- **گزینهٔ «۱»** (محمد خائزنیا)

تنها مورد اول به درستی بیان شده است. بررسی موارد نادرست:

مورد دوم: در بیشتر ساعات شبانه‌روز، غلظت NO_2 بیشتر از NO می‌باشد.

مورد سوم: گاز O_3، مستقیماً از اگزوز خودرو خارج نمی‌شود.

مورد چهارم: NO، NO_2، N_2O، N_2O_3، N_2O_5 و ... از اکسیدهای نیتروژن هستند.

(شیمی ۳- صفحه‌های ۹۳ و ۹۴)

۱۳۷- **گزینهٔ «۱»** (رسول عابدینی‌زواره)

در بین فرمول شیمیایی آلاینده‌های داده شده، فقط مولکول‌های C_xH_y از نوع ناقطبی‌اند.

میزان آلاینده‌های با مولکول قطبی $\leftarrow 5/99+1/04=7/03\ \frac{g}{km}$

$$?\ ton\ (\text{آلاینده}) = 10^8\ (\text{خودرو}) \times \frac{50\,km}{1\ (\text{خودرو})} \times \frac{7/03\,g\ (\text{آلایندهٔ قطبی})}{1\,km}$$

$$\times \frac{1\,ton}{10^6\,g} = 35150\,ton\ (\text{آلایندهٔ قطبی})$$

(شیمی ۳- صفحهٔ ۹۴)

۱۳۸- **گزینهٔ «۳»** (حمید ذبحی)

بررسی گزینه‌ها:

۱) برای آغاز هر واکنش، به انرژی فعال‌سازی نیاز است.

۲) کاتالیزگرها با این‌که در واکنش شرکت می‌کنند، اما مصرف نمی‌شوند.

۳) جرقه انرژی فعال‌سازی واکنش میان گازهای H_2 و O_2 را تأمین می‌کند، ولی استفاده از توری پلاتینی، E_a واکنش را کاهش می‌دهد. جرقه باعث تغییر E_a نمی‌شود.

۴) دقیقاً

(شیمی ۳- صفحه‌های ۹۶ تا ۱۰۲)

۱۳۹- **گزینهٔ «۴»** (محسن مجنونی)

با توجه به نمودار، مقدار آنتالپی واکنش را محاسبه می‌کنیم. با توجه به این‌که واکنش گرماده است، پس ΔH آن منفی است.

پس $\Delta H = -566\,kJ$ می‌باشد. $\Rightarrow |\Delta H| = 900-334 = 566\,kJ$

حال با توجه به واکنش و آنتالپی پیوند مواد داریم:

$$2CO(g) + O_2(g) \rightarrow 2CO_2(g)$$

$$\Delta H = [2\Delta H_{C\equiv O} + \Delta H_{O=O}] - [4\Delta H_{C=O}]$$

$$-566 = 2\Delta H_{C\equiv O} + 494 - 4\times 800$$

$$\Delta H_{C\equiv O} = 1070\,kJ.mol^{-1}$$

(شیمی ۳- صفحه‌های ۹۶ تا ۱۰۰)

۱۴۰- **گزینهٔ «۳»** (پیمان خوابیوی‌میر)

با افزایش دما انرژی فعال‌سازی واکنش تغییر نمی‌کند. بلکه میزان جنب و جوش ذره‌ها افزایش می‌یابد و از این طریق سرعت واکنش افزایش پیدا می‌کند.

(شیمی ۳- صفحه‌های ۹۶ تا ۱۰۲)

شیمی ۳- پیشروی سریع

۱۴۱- **گزینهٔ «۲»** (رسول عابدینی‌زواره)

عبارت‌های (ب) و (ت) درست است.

بررسی عبارت‌ها:

آ) از واکنش اتن با هیدروژن کلرید، ترکیب کلرواتان به‌دست می‌آید که در افشانه‌های بی‌حس‌کنندهٔ موضعی کاربرد دارد.

ب) از واکنش اتن با آب در شرایط مناسب، اتانول به‌دست می‌آید و از اکسایش اتانول، اتانوییک‌اسید حاصل می‌شود.

پ) اتیل‌استات حلّال چسب است که از واکنش اتانول و اتانوییک‌اسید تولید می‌شود.

ت) در دما و فشار بالا، از واکنش پلیمری‌شدن اتن، پلی‌اتن تولید می‌شود.

(شیمی ۳- صفحهٔ ۱۱۴)

۱۴۲- **گزینهٔ «۳»** (امیر حاتمیان)

$$C_2H_4(g) + H_2O(l) \rightarrow C_2H_5OH(aq)$$

$$?\,g H_2O = 9/2\,g C_2H_5OH \times \frac{80}{100} \times \frac{1\,mol\,C_2H_5OH}{46\,g\,C_2H_5OH}$$

$$\times \frac{1\,mol\,H_2O}{1\,mol\,C_2H_5OH} \times \frac{18\,g\,H_2O}{1\,mol\,H_2O} = 2/88\,g H_2O$$

$$C_2H_4(g) + H_2(g) \rightarrow C_2H_6(g)$$

$$?\,L\,C_2H_6 = 9/2\,g C_2H_5OH \times \frac{80}{100} \times \frac{1\,mol\,C_2H_5OH}{46\,g\,C_2H_5OH}$$

$$\times \frac{1\,mol\,C_2H_4}{1\,mol\,C_2H_5OH} \times \frac{1\,mol\,C_2H_6}{1\,mol\,C_2H_4} \times \frac{22/4\,L\,C_2H_6}{1\,mol\,C_2H_6} \simeq 3/58\,L\,C_2H_6$$

(شیمی ۳- صفحهٔ ۱۱۴)

سنجش کلاد
www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshClouds

۱۴۳- **گزینهٔ «۴»** *(رضا سلیمانی)*

بررسی گزینه‌ها:

گزینهٔ «۱»: الکل سازندهٔ پلی‌استر A، همان اتیلن‌گلیکول $(C_2H_6O_2)$ و اسید سازندهٔ پلی‌استر B، همان ترفتالیک‌اسید $(C_8H_6O_4)$ است. این دو ترکیب مونومرهای سازندهٔ پلی‌اتیلن ترفتالات (PET) هستند.

گزینهٔ «۲»: در مولکول اسید سازندهٔ پلی‌استر A، ۸ اتم هیدروژن وجود دارد که با تعداد اتم‌های هیدروژن در مولکول نفتالن $(C_{10}H_8)$ برابر است.

گزینهٔ «۳»: در مولکول الکل سازندهٔ پلی‌استر B، ۱۰ اتم هیدروژن وجود دارد که با تعداد اتم‌های هیدروژن در مولکول پارازایلن (C_8H_{10}) برابر است.

گزینهٔ «۴»: الکل سازندهٔ پلی‌استر B، مولکول $C_4H_{10}O_2$ و الکل سازندهٔ پلی‌استر A، مولکول $C_2H_6O_2$ است.

$$\text{جرم مولی } C_4H_{10}O_2 = (4\times12)+(10\times1)+(2\times16) = 90\,g.mol^{-1}$$

$$\text{جرم مولی } C_2H_6O_2 = (2\times12)+(6\times1)+(2\times16) = 62\,g.mol^{-1}$$

تفاوت جرم مولی این دو ترکیب برابر ۲۸ گرم بر مول بوده و جرم مولی اتان (C_2H_6) برابر ۳۰ گرم بر مول است.

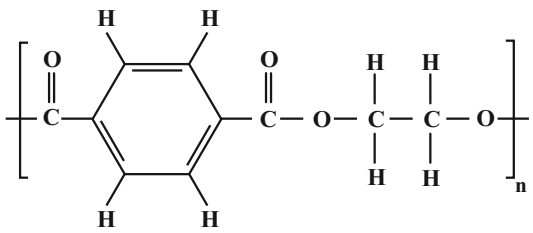
(شیمی ۳- صفحه‌های ۱۱۶ و ۱۱۷)

۱۴۴- **گزینهٔ «۲»** *(رضا سلیمانی)*

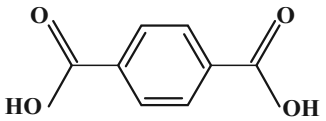
عبارت‌های (آ) و (ت) نادرست هستند.

بررسی عبارت‌ها:

آ) بطری آب از پلیمر PET ساخته شده است که در واحد تکرارشوندهٔ آن مطابق ساختار زیر، ۱۰ اتم کربن وجود دارد.



ب) یکی از مونومرهای سازندهٔ PET، ترفتالیک‌اسید است که در ساختار خود همانند ساختار واحد تکرارشوندهٔ PET یک حلقهٔ بنزن دارد.



(ترفتالیک‌اسید)

پ) فرمول ساختاری واحد تکرارشوندهٔ پلی‌اتیلن ترفتالات (PET) به‌صورت ساختار رسم شده در قسمت «آ» است. در ساختار این واحد تکرارشونده، ۵ پیوند دوگانه و ۸ پیوند «کربن – هیدروژن» وجود دارد.

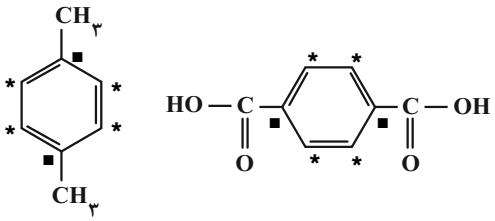
ت) از واکنش یک الکل تک‌عاملی (ROH) و یک اسید آلی تک‌عاملی $(R'\overset{O}{\overset{\|}{C}}OH)$، یک مولکول استر $(R'\overset{O}{\overset{\|}{C}}OR)$ و یک مولکول آب تولید می‌شود.

(شیمی ۳- صفحه‌های ۱۱۶ ، ۱۱۷ و ۱۱۸)

۱۴۵- **گزینهٔ «۲»** *(رسول عابدینی‌زواره)*

عبارت‌های (آ) و (پ) درست‌اند.

ساختار مولکول‌های پارازایلن و ترفتالیک‌اسید به‌صورت زیر است:



بررسی عبارت‌ها:

آ) شمار گروه‌های متیل در پارازایلن = ۲، شمار گروه‌های کربوکسیل در ترفتالیک‌اسید = ۲

ب) شمار پیوندهای دوگانه در پارازایلن = ۳، شمار پیوندهای دوگانه در ترفتالیک‌اسید = ۵

پ) فرمول مولکولی پارازایلن C_8H_{10} و شمار اتم‌ها = ۱۸، فرمول مولکولی ترفتالیک‌اسید $C_8H_6O_4$ و شمار اتم‌ها = ۱۸

ت) در هر دو مولکول، اتم‌های کربن ستاره‌دار عدد اکسایش ۱- و اتم‌های کربن ■ دار، عدد اکسایش صفر دارند. (۶ اتم کربن در هر مولکول با عدد اکسایش یکسان)

(شیمی ۳- صفحه‌های ۱۱۶ تا ۱۱۸)

۱۴۶- **گزینهٔ «۴»** *(امین نوروزی)*

موارد (ب) و (ت) درست‌اند.

بررسی عبارت‌ها:

آ) اتیلن گلیکول یک الکل دو عاملی با فرمول شیمیایی $C_2H_6O_2$ است. چینش اتم‌ها در اطراف اتم‌های کربن موجود در ساختار اتیلن‌گلیکول متقارن نبوده و هریک از اتم‌های کربن موجود در ساختار مولکولی این ماده، به اتم‌های متفاوتی از ۳ عنصر مختلف متصل شده است، پس گشتاور دوقطبی مولکول‌های این ماده بزرگ‌تر از صفر است.

سنجش کلاد
www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshClouds

ب) واکنش‌های سوختن، اکسایشی‌اند. $\overset{-۴}{C}H_۴ + H_۲O \rightarrow ۳H_۲ + \overset{+۲}{C}O$

پ) برای تولید بطری‌های آب، PET را به همراه برخی افزودنی‌ها در قالب‌های ویژه‌ای می‌ریزند.

ت) موارد گفته شده همگی از ویژگی‌های پلاستیک‌ها محسوب می‌شوند.

(شیمی ۳- صفحه‌های ۱۱۳ تا ۱۱۹)

۱۴۷- **گزینهٔ «۳»** *(اکبر هنرمند)*

آ) با وجود غلظت بالای یون پرمنگنات (اکسنده)، باز هم شرایط انجام واکنش تبدیل پارازایلن به ترفتالیک‌اسید تأمین نمی‌شود، مگر آن‌که دمای مخلوط افزایش یابد.

ب)

$$A(C_۲H_۴) = \%C = \frac{\text{جرم اتم‌های C}}{\text{جرم } C_۲H_۴} \times ۱۰۰ = \frac{۲ \times ۱۲}{۲۸} \times ۱۰۰ \simeq \%۸۵/۷$$

$$B(C_۸H_{۱۰}) = \%C = \frac{\text{جرم اتم‌های C}}{\text{جرم } C_۸H_{۱۰}} \times ۱۰۰ = \frac{۸ \times ۱۲}{۱۰۶} \times ۱۰۰ \simeq \%۹۰/۶$$

روش دوم: چون نسبت $\frac{C}{H}$ در مولکول $C_۸H_{۱۰}$ نسبت به مولکول $C_۲H_۴$ بیشتر است، بنابراین درصد جرمی کربن در پارازایلن بیشتر است.

پ) $(I) C_۲H_۶O_۲ : x + ۶(+۱) + ۲(-۲) = ۰ \Rightarrow x = -۲$

$(II) C_۸H_۶O_۴ : y + ۶(+۱) + ۴(-۲) = ۰ \Rightarrow y = +۲$

ت) شمار پیوندها در $C_۲H_۶O_۲ = \frac{\overset{C}{\overbrace{(۲\times۴)}} + \overset{H}{\overbrace{(۶\times۱)}} + \overset{O}{\overbrace{(۲\times۲)}}}{۲} = ۹$

شمار پیوندها در $C_۸H_۶O_۴ = \frac{\overset{C}{\overbrace{(۸\times۴)}} + \overset{H}{\overbrace{(۶\times۱)}} + \overset{O}{\overbrace{(۴\times۲)}}}{۲} = ۲۳$

(شیمی ۳- صفحه‌های ۱۱۵ تا ۱۱۸)

۱۴۸- **گزینهٔ «۳»** *(رسول عابدینی‌زواره)*

بررسی گزینه‌ها:

گزینهٔ «۱»: پلی‌اتیلن ترفتالات در شرایط مناسب با $CH_۳OH$ واکنش می‌دهد و به مواد مفیدی تبدیل می‌گردد.

گزینهٔ «۲»: در میدان‌های گازی، $CH_۴$ به فراوانی یافت می‌شود و بخش قابل توجهی از آن را برای افزایش ایمنی می‌سوزانند.

گزینهٔ «۳»: مونومرهای سازندهٔ PET، اتیلن‌گلیکول و ترفتالیک‌اسید هستند. این دو ماده در نفت خام وجود ندارد.

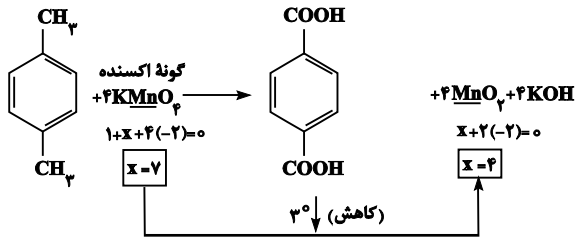
گزینهٔ «۴»: گاز کربن مونوکسید و هیدروژن در شرایط مناسب و در حضور کاتالیزگر با هم واکنش داده و متانول را تولید می‌کنند.

$$CO(g) + ۲H_۲(g) \rightarrow CH_۳OH(l)$$

(شیمی ۳- صفحه‌های ۱۱۹ تا ۱۲۱)

۱۴۹- **گزینهٔ «۳»** *(امیر حاتمیان)*

از معادلهٔ موازنه شدهٔ واکنش داریم:



$$?\,mL\ \text{محلول} = ۸\,g\,C_۸H_۶O_۴ \times \frac{۸۳}{۱۰۰} \times \frac{۱\,mol\,C_۸H_۶O_۴}{۱۶۶\,g\,C_۸H_۶O_۴}$$

$$\times \frac{۴\,mol\,KMnO_۴}{۱\,mol\,C_۸H_۶O_۴} \times \frac{۱\,L\ \text{محلول}}{۰/۴\,mol\,KMnO_۴}$$

$$\times \frac{۱۰۰۰\,mL\ \text{محلول}}{۱\,L\ \text{محلول}} = ۴۰۰\,mL\ \text{محلول}$$

(شیمی ۳- صفحهٔ ۱۱۵)

۱۵۰- **گزینهٔ «۳»** *(میلاد عزیزی)*

متانول را می‌توان به ۲ روش مستقیم و غیرمستقیم تهیه کرد که روش غیرمستقیم، خود شامل ۲ مرحله است. اما روش مستقیم فقط ۱ مرحله است:

روش غیرمستقیم:
- مرحلهٔ اول: $CH_۴(g) + H_۲O(g) \xrightarrow[\text{دمای } ۴۵۰-۵۵۰^\circ C]{\text{کاتالیزگر}} CO(g) + ۳H_۲(g)$
- مرحلهٔ دوم: $CO(g) + ۲H_۲(g) \xrightarrow[\text{دمای } ۳۵۰^\circ C \text{ و فشار } ۳۰-۵۰\,atm]{\text{کاتالیزگر}} CH_۳OH(l)$

روش مستقیم: $CH_۴(g) \xrightarrow{O_۲ / \text{کاتالیزگر}} CH_۳OH(l)$

بررسی عبارت‌ها:

آ) در هر دو روش مستقیم و غیرمستقیم، از گاز متان به عنوان واکنش‌دهنده استفاده می‌شود.

ب) در هر دو روش و در هر سه واکنش از کاتالیزگر استفاده می‌شود.

پ) در روش غیرمستقیم، برای تأمین دمای بالا اغلب از سوزاندن سوخت‌های فسیلی استفاده می‌شود که با تولید کربن دی‌اکسید $(CO_۲)$ که یک آلاینده است، همراه می‌باشد.

ت) گاز متان $(CH_۴)$ یک هیدروکربن سیرشده است و واکنش‌پذیری بسیار کمی دارد.

(شیمی ۳- صفحه‌های ۱۲۰ و ۱۲۱)

سنجش کلاد
www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshClouds

شیمی ۲

۱۵۱- **گزینهٔ «۱»** *(محمد عظیمیان‌زواره)*

الف) درست؛ حدود نیمی از لباس‌های تولیدی در جهان از پنبه تهیه می‌شود.

ب) درست؛ پنبه از الیاف سلولز تشکیل شده است. مونومر سازندهٔ سلولز، گلوکز ($C_6H_{12}O_6$) می‌باشد. فرمول شیمیایی اتانول C_2H_5OH می‌باشد. بنابراین نوع عنصرهای سازندهٔ هر کدام C، H و O می‌باشد.

پ) نادرست؛ اتن درشت مولکول محسوب نمی‌شود.

ت) درست؛ با حرارت دادن گاز اتن (C_2H_4) در فشار بالا، جامد سفید رنگ پلی‌اتن به دست می‌آید و یک درشت مولکول محسوب شده و جرم مولی آن اغلب به ده‌ها هزار گرم بر مول می‌رسد.

ث) نادرست؛ تاکنون هیچ قاعده‌ای برای اتصال شمار مونومرها به یکدیگر ارائه نشده است نه این‌که چگونه به هم وصل می‌شوند.

(شیمی ۲- صفحه‌های ۱۰۲ تا ۱۰۵)

۱۵۲- **گزینهٔ «۳»** *(امیرعلی بیات)*

درصد جرمی F در مخلوطی از C_2H_3Cl و C_2F_4 برابر ۵۷٪ است. این یعنی اگر جرم مخلوط اولیه را ۴۰۰g فرض کنیم:

$$400\times\frac{57}{100}=4\times57g\ F$$

$$4\times57g\ F\times\frac{1mol\ F}{19g\ F}\times\frac{1mol\ C_2F_4}{4mol\ F}\times\frac{100g\ C_2F_4}{1mol\ C_2F_4}$$

$$=300g\ C_2F_4$$

$$\Rightarrow 400-300=100g\ C_2H_3Cl$$

$$nC_2H_3Cl\rightarrow(C_2H_3Cl)_n$$

$$nC_2F_4\rightarrow(C_2F_4)_n$$

$$300g\ C_2F_4\times\frac{1mol}{100g}\times\frac{1mol\ \text{تفلون}}{n\,mol}\times\frac{100n\ g\ \text{تفلون}}{1mol\ \text{تفلون}}\times a\%$$

$$=100g\ C_2H_3Cl\times\frac{1mol}{62/5g}\times\frac{1mol\ PVC}{n\,mol}\times\frac{62/5n\ g\ PVC}{1mol\ PVC}\times b\%$$

$$\Rightarrow 300\,a\%=100b\%\Rightarrow 3a\%=b\%$$

$$\frac{a}{b}=\frac{1}{3}\quad\text{یا}\quad\frac{b}{a}=3$$

(شیمی ۲- صفحه‌های ۱۰۳ تا ۱۰۶)

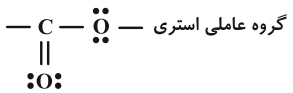
۱۵۳- **گزینهٔ «۴»** *(رسول عابدینی‌زواره)*

بررسی گزینه‌ها:

۱) نادرست؛ پلی‌استرها دسته‌ای از پلیمرها هستند که از اتم‌های C، H و O تشکیل شده‌اند و اتم N ندارند.

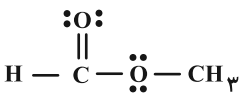
۲) نادرست؛ بو و طعم خوش آناناس به دلیل وجود استری به نام اتیل بوتانوات در آن است.

۳) نادرست؛ یک پلی‌استر با n گروه عاملی دارای 8n الکترون ناپیوندی است. (4n جفت الکترون ناپیوندی)



۴) درست؛ ساده‌ترین استر، متیل متانوآت بوده که شامل ۲ اتم کربن است:

متیل متانوآت:

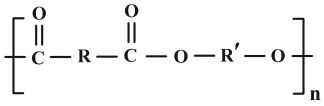


(شیمی ۲- صفحه‌های ۱۰۹ و ۱۱۰)

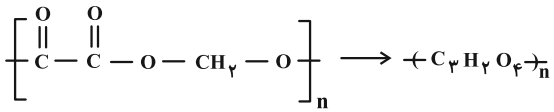
سنجش کلاد
www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshClouds

۱۵۴- **گزینهٔ «۴»** *(روزبه رضوانی)*

فرمول کلی پلی‌استرها:



در ساده‌ترین واحد تکرارشونده، گروه R بدون اتم است و دو گروه $\overset{O}{\overset{\|}{C}}$ با پیوند یگانه به هم متصل می‌شوند و گروه R' نیز تنها دارای یک گروه CH_2 است.



(شیمی ۲- صفحه‌های ۱۱۴ تا ۱۱۶)

۱۵۵- **گزینهٔ «۴»** *(امیرمحمد کنگرانی)*

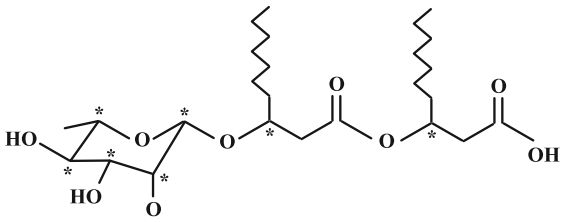
آلکان‌ها ناقطبی هستند و در آب حل نمی‌شوند اما الکل‌ها هم دارای بخش قطبی و هم بخش ناقطبی هستند. در ۵ عضو ابتدایی خانوادهٔ الکل‌های تک‌عاملی، راست‌زنجیر و سیرشده، بخش قطبی بر ناقطبی غلبه کرده و در آب به خوبی حل می‌شوند. هر چه تعداد کربن الکل‌ها کمتر باشد، بخش ناقطبی کوچک‌تر بوده و در آب راحت‌تر حل می‌شوند.

(شیمی ۲- صفحهٔ ۱۱۲)

۱۵۶- **گزینهٔ «۴»** *(سعید تیزرو)*

تمامی عبارت‌ها درست هستند.

در ساختار این ترکیب همانند ساختار ویتامین C گروه‌های عاملی «استر» و «هیدروکسیل» مشاهده می‌شود. در این ساختار همانند الکل‌ها دو نوع نیروی بین مولکولی وجود دارد: نیروی واندروالسی و پیوند هیدروژنی. همچنین اتم‌های کربن ستاره‌دار در ساختار زیر، تنها به یک اتم هیدروژن متصل هستند:



فرمول مولکولی: $C_{۲۶}H_{۴۸}O_۹$

(شیمی ۲- صفحه‌های ۱۰۹ تا ۱۱۳)

۱۵۷- **گزینهٔ «۴»** *(آرمین عظیمی)*

۲۳ گرم اتانول معادل با ۰/۵ مول است، از این‌رو ۰/۵ مول استر و ۰/۵ مول آب مطابق واکنش زیر تولید شده است:

آب + استر ← کربوکسیلیک اسید + اتانول

$$\text{جرم آب} = ۰/۵\,mol\ H_۲O \times \frac{۱۸\,g\ H_۲O}{۱\,mol\ H_۲O} = ۹\,g\ H_۲O$$

$$\text{جرم استر} - \text{جرم آب} = ۴۹\,g \Rightarrow m_{\text{استر}} - ۹ = ۴۹$$

$$\Rightarrow m_{\text{استر}} = ۵۸\,g$$

جرم ۰/۵ مول استر برابر با ۵۸ گرم است، بنابراین جرم مولی این استر برابر با ۱۱۶ گرم بر مول است. فرمول کلی استرهای تک‌عاملی با زنجیر هیدروکربنی سیرشده و دارای n اتم کربن به صورت $C_nH_{۲n}O_۲$ است، بنابراین داریم:

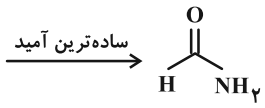
$$۱۲n + ۲n + ۳۲ = ۱۱۶ \Rightarrow n = ۶$$

سنجش کلاد
www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshClouds

اتانول یک الکل دوکربنه با فرمول مولکولی $C_۲H_۶O$ و فرمول مولکولی استر به صورت $C_۶H_{۱۲}O_۲$ است. بنابراین فرمول مولکولی اسید آلی مصرف شده به صورت $C_۴H_۸O_۲$ است. $C_۴H_۸O_۲$

$$\text{شمار پیوندهای اشتراکی} = \frac{(۴\times۴)+(۱\times۸)+(۲\times۲)}{۲} = ۱۴$$

فرمول ساختاری ساده‌ترین آمید به صورت زیر است:



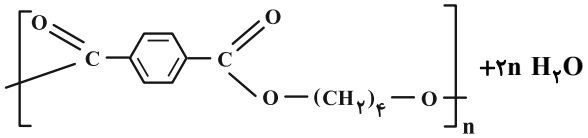
این آمید دارای ۶ پیوند اشتراکی است. بنابراین در نهایت داریم:

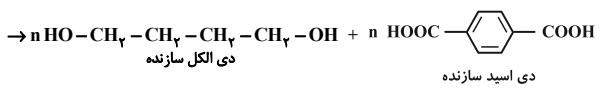
$$\frac{۱۴}{۶} \simeq ۲/۳۳$$

(شیمی ۲- صفحه‌های ۱۱۴ تا ۱۱۸)

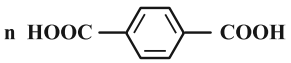
۱۵۸- **گزینهٔ «۱»** *(محمدرضا پورجاوید)*

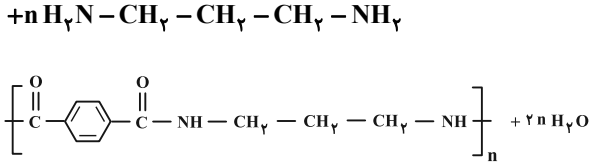
برای تعیین فرمول ساختاری دی اسید سازندهٔ پلی پروپیلن ترفتالات، می‌توان از واکنش آبکافت این پلیمر استفاده کرد:





به این ترتیب فراوردهٔ پلیمری حاصل از واکنش دی اسید تولید شده با دی‌آمین مورد نظر عبارت است از:

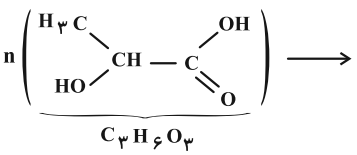


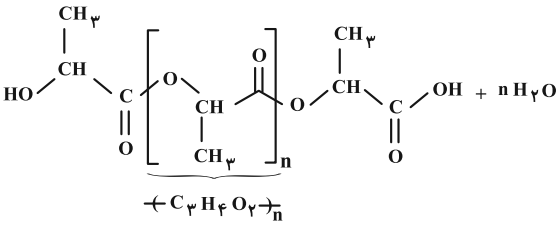


(شیمی ۲- صفحه‌های ۱۱۴ تا ۱۱۸)

۱۵۹- **گزینهٔ «۲»** *(یاسر راش)*

واکنش پلیمری شدن به صورت زیر است:





$$?\,g(\text{پلیمر}) = ۱g\ C_۳H_۶O_۳ \times \frac{۱mol\ C_۳H_۶O_۳}{۹۰g\ C_۳H_۶O_۳} \times \frac{۱mol\ (\text{پلیمر})}{n mol\ C_۳H_۶O_۳}$$

$$\times \frac{۷۲n\,g\ (\text{پلیمر})}{۱mol\ (\text{پلیمر})} = ۰/۸g\ (\text{پلیمر})$$

(شیمی ۲- صفحهٔ ۱۲۱)

۱۶۰- **گزینهٔ «۳»** *(محمدرضا جمشیری)*

بررسی مورد نادرست: گزینهٔ «۳» شیر ترش شده دارای لاکتیک اسید است.

سایر گزینه‌ها درست هستند.

(شیمی ۲- صفحهٔ ۱۲۱)

www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshClouds

شیمی ۱

۱۶۱- **گزینهٔ «۲»** *(محسن میثونی)*

در ابتدا مولاریتهٔ Na_2SO_4 را با استفاده از غلظت ppm یون سدیم محاسبه می‌کنیم: (فرض می‌کنیم ۱۰۰ گرم محلول Na_2SO_4 در اختیار داریم.)

$$ppm = \frac{\text{جرم حل‌شونده}}{\text{جرم محلول}} \times 10^6 \Rightarrow 6900 = \frac{\text{جرم } Na^+}{100g} \times 10^6$$

$$\Rightarrow \text{جرم } Na^+ = 0/69g$$

می‌دانیم در هر مول از Na_2SO_4، دو مول Na^+ وجود دارد. پس با محاسبات استوکیومتری جرم Na_2SO_4 را به دست می‌آوریم:

$$?g\ Na_2SO_4 = 0/69g\ Na^+ \times \frac{1mol\ Na^+}{23g\ Na^+} \times \frac{1mol\ Na_2SO_4}{2mol\ Na^+}$$

$$\times \frac{142g\ Na_2SO_4}{1mol\ Na_2SO_4} = 2/13g\ Na_2SO_4$$

در نتیجه با توجه به فرض سؤال، جرم KOH برابر $2/13g$ است.

حجم $100g$ از محلول Na_2SO_4 با چگالی $1/12\frac{g}{mL}$ برابر است با:

$$d = \frac{\text{جرم محلول}}{\text{حجم محلول}} \Rightarrow 1/12 = \frac{100g\ \text{محلول}}{V} \Rightarrow V = \frac{100}{1/12}mL$$

حال غلظت مولی محلول KOH را محاسبه می‌کنیم:

$$\text{مولاریته} = \frac{mol}{V(L)}$$

$$KOH\ \text{مولاریتهٔ} = \frac{\frac{2/13g}{56g.mol^{-1}}}{\frac{100}{1/12}mL \times \frac{1L}{1000mL}} = 0/426mol.L^{-1}$$

(شیمی ۱- صفحه‌های ۹۸، ۹۹، ۱۰۰، ۱۲۰ و ۱۲۲)

۱۶۲- **گزینهٔ «۱»** *(محمدرضا جمشیری)*

ابتدا مقدار K^+ را برحسب گرم در ۲۰۰ گرم محلول KI به دست می‌آوریم:

$$58500 = \frac{g\ K^+}{200} \times 10^6 \Rightarrow g\ K^+ = 11/7g$$

حال اطلاعات KI را برحسب مول از طریق مقدار K^+ به دست می‌آوریم:

$$11/7g\ K^+ \times \frac{1mol\ K^+}{39g\ K^+} \times \frac{1mol\ KI}{1mol\ K^+} = 0/3mol\ KI$$

حال با توجه به واکنش موازنه شده داریم:

$$2KI(aq) + Cl_2(g) \rightarrow 2KCl(aq) + I_2(s)$$

$$0/3mol\ KI \times \frac{1mol\ Cl_2}{2mol\ KI} \times \frac{22/4L\ Cl_2}{1mol\ Cl_2} = 3/36L\ Cl_2$$

$$0/3mol\ KI \times \frac{1mol\ I_2}{2mol\ KI} = 0/15mol\ I_2$$

(شیمی ۱- صفحه‌های ۱۲۰ تا ۱۲۲)

۱۶۳- **گزینهٔ «۲»** *(محمد عظیمیان‌زواره)*

نقره کلرید $(AgCl)$ یک ترکیب یونی دوتایی محسوب می‌شود.

بررسی گزینه‌های درست:

۱) تعریف انحلال‌پذیری

۳) $\text{درصد جرمی} = \frac{50}{150} \times 100 \simeq 33/33$

۴) زیرا با افزایش دما انحلال‌پذیری لیتیم سولفات در آب کاهش می‌یابد و محلول سیرشدهٔ آن در دمای بالاتر شامل مقدار کمتری حل‌شونده بوده و چگالی محلول آن کمتر است.

(شیمی ۱- صفحه‌های ۱۰۰ تا ۱۰۲ و ۱۲۲)

سنجش کلاد
www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshClouds

۱۶۴- **گزینهٔ «۳»** *(آرمین عظیمی)*

معادلهٔ انحلال‌پذیری پتاسیم نیترات به صورت خطی نیست.

بررسی سایر گزینه‌ها:

۱) انحلال‌پذیری نمک B در دمای $10^\circ C$ برابر است با:

$$S_B = (0/8\times 10)+28 = 36g$$

در ۱۰۰ گرم آب، ۳۶ گرم نمک وجود دارد، از این‌رو در $\frac{100}{8}$ یا ۱۲/۵ گرم آب، باید $\frac{36}{8}$ یا ۴/۵ گرم نمک وجود داشته باشد که سیرشده باشد.

بنابراین محلول حاوی ۳/۷۵ گرم نمک سیرنشده است.

۲) انحلال‌پذیری نمک A را در دماهای $10^\circ C$ و $60^\circ C$ حساب می‌کنیم:

$$S_{10^\circ C}: -(0/4\times 10)+34 = 30g$$

$$S_{60^\circ C}: -(0/4\times 60)+34 = 10g$$

حال مقدار رسوب تولید شده را محاسبه می‌کنیم:

$$\text{(رسوب)}\ 0/5mol\ A \times \frac{\text{رسوب } 1mol}{\text{رسوب } 148g}\times \frac{\text{رسوب } 20g}{\text{محلول } 130g}\times \text{محلول } 481g$$

۴) انحلال‌پذیری نمک‌های A و B را در دمای $25^\circ C$ به دست می‌آوریم:

$$A: S_{25^\circ C}: -(0/4\times 25)+34 = 24g$$

$$B: S_{25^\circ C}: (0/8\times 25)+28 = 48g$$

حال نسبت غلظت مولی دو نمک را محاسبه می‌کنیم:

$$\frac{\text{غلظت مولی } A}{\text{غلظت مولی } B} = \frac{\frac{24}{148}}{\frac{100+24}{d}} \Big/ \frac{\frac{248}{48}}{\frac{100+48}{d}} = 1$$

(شیمی ۱- صفحه‌های ۹۸ تا ۱۰۳)

۱۶۵- **گزینهٔ «۴»** *(امیرحسین حسن‌نژاد)*

بررسی موارد نادرست:

الف) مولکول‌های گوگرد تری اکسید ناقطبی بوده و در میدان الکتریکی جهت‌گیری نمی‌کنند.

ب) مولکول‌های آب از سمت اتم هیدروژن خود به سمت میلهٔ شیشه‌ای مالش داده شده به موی سر نزدیک می‌شوند.

پ) مولکول آب با وجود جرم مولی کمتر نسبت به H_2S، نقطهٔ جوش بیشتری از آن دارد.

(شیمی ۱- صفحه‌های ۱۰۳ تا ۱۰۷)

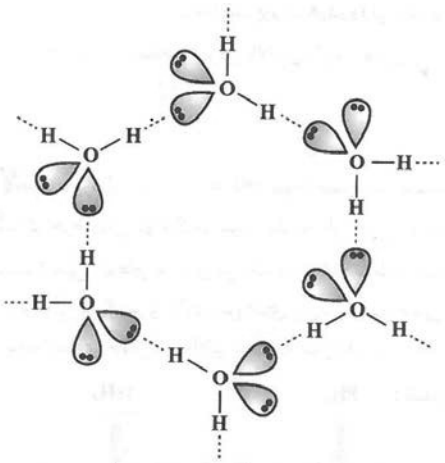
۱۶۶- **گزینهٔ «۲»** *(سعید تیزرو)*

تنها عبارت دوم نادرست است.

بررسی موارد:

مورد اول: تبدیل آب به یخ و بخارآب با افزایش حجم همراه است.

مورد دوم: ساختار حلقه‌های شش‌ضلعی یخ به صورت زیر است:



مطابق شکل در هر حلقهٔ ۶ ضلعی، ۶ اتم H، ۶ اتم O و ۶ پیوند هیدروژنی وجود دارد.

سنجش کلاد
www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshClouds

مورد سوم: ترکیب‌هایی نظیر استون ($H_3C-\overset{\overset{O}{\|}}{C}-CH_3$) فاقد توانایی تشکیل پیوند هیدروژنی با مولکول‌های خودش بوده، اما امکان تشکیل پیوند هیدروژنی با مولکول‌های آب را دارند.

مورد چهارم: مطابق متن کتاب درسی این عبارت درست است.

(شیمی ۱- صفحه‌های ۱۰۸ و ۱۰۹)

۱۶۷- **گزینهٔ «۲»** *(سراسری داخل تجربی ۱۴۰۱)*

عبارت‌های اول، چهار و پنجم درست هستند. بررسی موارد:

مورد اول: انحلال‌پذیری $CO_2(g)$ در هر فشار و دمایی از $NO(g)$ بیش‌تر است. انحلال‌پذیری $NO(g)$ در فشار $3atm$ حدود $0/02g$ است. بنابراین انحلال‌پذیری $CO_2(g)$ از $0/02g$ بیش‌تر است.

مورد دوم: انحلال گازها در آب شور کم‌تر از آب خالص است. انحلال‌پذیری $N_2(g)$ در فشار $6atm$ در آب خالص کم‌تر از $0/02g$ است. پس امکان ندارد انحلال‌پذیری این گازها در آب شور در همین دما بیش‌تر از $0/02g$ باشد.

مورد سوم: با توجه به نمودار، در هر فشار $5atm$، انحلال‌پذیری $O_2(g)$ حدود $0/02g$ و انحلال‌پذیری $NO(g)$ حدود $0/03g$ است. بدین‌ترتیب تفاوت انحلال‌پذیری آن‌ها حدود $0/01g$ خواهد بود.

مورد چهارم: شیب نمودار انحلال - فشار گازها به نوع گاز و دمای گاز بستگی دارد. با افزایش دما، از انحلال‌پذیری گازها کاسته می‌شود و مقدار شیب کاهش می‌یابد.

مورد پنجم: با توجه به بیش‌تر بودن شیب منحنی مربوط به $X_2(g)$ نسبت به منحنی $O_2(g)$، انحلال گاز X_2 از گاز اکسیژن بیش‌تر است انحلال‌پذیری $O_2(g)$ در فشار $4atm$، بین $0/01$ تا $0/02$ گرم است. پس انحلال‌پذیری $X_2(g)$ می‌تواند $0/02g$ باشد.

(شیمی ۱- صفحهٔ ۱۱۵)

۱۶۸- **گزینهٔ «۲»** *(روزبه رضوانی)*

بررسی عبارت‌ها:

الف) نادرست؛ چون CO_2 می‌تواند با آب واکنش دهد، اگرچه ناقطبی است؛ اما با این حال از برخی گازهای قطبی انحلال‌پذیری بیشتری در آب دارد.

ب) نادرست؛ گاز CO_2 با آب واکنش شیمیایی می‌دهد.

پ) درست

ت) نادرست؛ قانون هنری مربوط به اثر فشار بر میزان انحلال گازهاست.

ث) درست

(شیمی ۱- صفحه‌های ۱۱۳ تا ۱۱۵)

۱۶۹- **گزینهٔ «۱»** *(ممدرضا جمشیری)*

ابتدا مقدار گرم NO_2 حل شده را به دست می‌آوریم:

$$0/5\,mol\,NO_2 \times \frac{46\,g\,NO_2}{1\,mol\,NO_2} \times \frac{10}{100} = 2/3\,g\,NO_2$$

حال جرم آب را به دست می‌آوریم:

$$5\,L \times \frac{1000\,mL}{1\,L} \times \frac{1\,g}{1\,mL} = 5000\,g$$

حال غلظت را برحسب ppm به دست می‌آوریم:

$$ppm = \frac{\text{گرم حل‌شونده}}{\text{گرم محلول}} \times 10^6 \Rightarrow ppm = \frac{2/3}{5000} \times 10^6 = 460$$

توجه: در فرمول ppm در مخرج به جای گرم محلول، گرم آب را قرار می‌دهیم، زیرا مقدار حل‌شونده در برابر مقدار حلال (آب) ناچیز است.

(شیمی ۱- صفحه‌های ۱۱۳ تا ۱۱۵ و ۱۲۲)

۱۷۰- **گزینهٔ «۲»** *(امیرعلی بیات)*

در همهٔ روش‌های تصفیهٔ آب، پس از انجام فرایند، باید آب به کمک کلر ضدعفونی شود.

بررسی گزینه‌های نادرست:

۱) با اسمز معکوس می‌توان ترکیبات آلی فرّار را از آب جدا کرد.

۳) گاز اوزون و کلر در گندزدایی کاربرد دارند.

۴) غشاء نیمه‌تراوا، غشایی انتخابی است و اجازهٔ عبور همهٔ یون‌ها را از غشاء نمی‌دهد.

(شیمی ۱- صفحه‌های ۱۱۷، ۱۱۸ و ۱۱۹)

www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshClouds

بنیاد علمی آموزشی قلم‌چی (وقف عام)

دفترچهٔ پاسخ فرهنگیان

(تعلیم و تربیت اسلامی و هوش و استعداد)

۲۴ اسفند ماه ۱۴۰۳

ریاضی و فیزیک، علوم تجربی و فنی و حرفه‌ای/کاردانش

گروه آزمون

بنیاد علمی آموزشی قلم‌چی (وقف عام)

آدرس دفتر مرکزی: خیابان انقلاب- بین صبا و فلسطین- پلاک ۹۲۳ - تلفن چهار رقمی: ۶۴۶۳-۰۲۱

سنجش کلاد
www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshClouds

تعلیم و تربیت اسلامی

۲۵۱- **گزینهٔ «۳»** (محمد رضایی‌بقا)

قرآن کریم، «تبرّج» را کاری جاهلانه می‌داند که موجب غفلت از هدف اصلی زندگی و مشغول‌شدن به کارهایی می‌شود که عاقبتی جز دورشدن از خدا ندارد.

(دین و زندگی۱، فضیلت آراستگی، صفحهٔ ۱۳۹)

۲۵۲- **گزینهٔ «۱»** (محمد رضایی‌بقا)

چون زمان امام صادق (ع)، مردم شرایط بهتری داشتند، ایشان لباس زیبایی می‌پوشید، اما چون در گذشته مردم شرایط سختی داشتند، جدّ امام صادق (ع)، پوشش متفاوتی متناسب با شرایط زندگی مردم و توانایی آنان داشت.

(دین و زندگی۱، فضیلت آراستگی، صفحهٔ ۱۳۷)

۲۵۳- **گزینهٔ «۳»** (محمد رضایی‌بقا)

امام صادق (ع) می فرماید: «لباس نازک و بدن‌نما نپوشید؛ زیرا چنین لباسی نشانهٔ سستی و ضعف دینداری فرد است.»

(دین و زندگی۱، فضیلت آراستگی، صفحهٔ ۱۴۰)

۲۵۴- **گزینهٔ «۳»** (عباس سیدشبستری)

در عبارت قرآنی «ذلک ادنی ان یعرفن فلا یؤذین: این برای آن که به (عفاف) شناخته شوند و مورد آزار قرار نگیرند، بهتر است» به فلسفه و چرایی حجاب اشاره شده است.

(دین و زندگی۱، زیبایی پوشیدگی، صفحهٔ ۱۴۸)

۲۵۵- **گزینهٔ «۴»** (عباس سیدشبستری)

در دوران اخیر پای‌بندی به تعالیم دینی کمتر شده و آن بخش از دستورات و سنت‌های حضرت موسی (ع) و حضرت عیسی (ع) هم که باقی مانده، مورد غفلت قرار گرفته است و به آن‌ها عمل نمی‌شود. بنابراین، بی‌حجابی زنان غرب نه تنها جایگاهی در اندیشهٔ مسیحیت حقیقی ندارد؛ بلکه بازگشتی به سنت‌های مشرکانهٔ قبل از حضرت مسیح (ع) محسوب می‌شود.

(دین و زندگی۱، زیبایی پوشیدگی، صفحهٔ ۱۵۰)

۲۵۶- **گزینهٔ «۴»** (محمد رضایی‌بقا)

نیاز به مقبولیّت در دورهٔ جوانی و نوجوانی نمود بیشتری دارد و سبب می‌شود که نوجوان و جوان بیشتر به خود بپردازد و توانایی‌ها و استعدادهای خود را کشف و شکوفا کند و در معرض دید دیگران قرار دهد. جوانی که با نشان‌دادن استعداد خود در یک رشتهٔ ورزشی یا خلق اثر هنری یا کار مؤثر در کارگاه صنعتی، تحسین دیگران را برانگیزد، از این قبیل است.

(دین و زندگی۱، فضیلت آراستگی، صفحهٔ ۱۳۸)

۲۵۷- **گزینهٔ «۳»** (عباس سیدشبستری)

چگونگی و نوع پوشش، تا حدود زیادی تابع آداب و رسوم ملت‌ها و اقوام است.

حجاب، مانند هر عمل دیگری، هرچه کامل‌تر و دقیق‌تر انجام شود، نزد خدا باارزش‌تر و آثار و ثمرات فردی و اجتماعی آن افزون‌تر است.

(دین و زندگی۱، زیبایی پوشیدگی، صفحهٔ ۱۴۸)

۲۵۸- **گزینهٔ «۳»** (عباس سیدشبستری)

طبق مقررات اسلامی، رضایت کامل دختر و پسر برای ازدواج ضروری است و اگر عقدی به زور انجام بگیرد، باطل است و مشروعیت ندارد.

(دین و زندگی۲، پیوند مقدس، صفحهٔ ۱۵۳)

۲۵۹- **گزینهٔ «۲»** (محمد رضایی‌بقا)

رشد اخلاقی و معنوی: پسر و دختر جوان با تشکیل خانواده، از همان ابتدا زمینه‌های فساد را از خود دور می‌کنند، مسئولیت‌پذیری را تجربه می‌نمایند، مهر و عشق به همسر و فرزندان را در خود پرورش می‌دهند، با گذشت و مدارا و تحمّل سختی‌ها و ناگواری‌های زندگی، به درجات معنوی بالاتری نایل می‌شوند.

انس با همسر: هر یک از زن و مرد، علاوه بر نیاز جنسی، نیازمند به زندگی با دیگری هستند و این نیاز (انس با همسر) نیز پس از بلوغ آشکار می‌شود.

(دین و زندگی۲، پیوند مقدس، صفحهٔ ۱۵۳)

۲۶۰- **گزینهٔ «۴»** (محمد رضایی‌بقا)

سلامت جسمی و روانی از معیارهای همسر شایسته است. همچنین عدم ارتباط قبلی با جنس مخالف نیز از معیارهای دیگر همسر شایسته است.

(دین و زندگی۲، پیوند مقدس، صفحهٔ۱۵۴)

۲۶۱- **گزینهٔ «۲»** (عباس سیدشبستری)

رشد اخلاقی و معنوی: دختر و پسر جوان با تشکیل خانواده از همان ابتدا زمینه‌های فساد را از خود دور می‌کنند و مسئولیت‌پذیری را تجربه می‌کنند.

رشد و پرورش فرزندان: خانواده بستر رشد و بالندگی فرزندان است و هیچ نهادی نمی‌تواند جایگزین آن شود. فرزند، ثمرهٔ زن و مرد و تحکیم‌بخش وحدت روحی آن‌هاست.

(دین و زندگی۲، پیوند مقدس، صفحهٔ ۱۵۳)

۲۶۲- **گزینهٔ «۳»** (محمد رضایی‌بقا)

امام علی (ع) می‌فرماید: «علاقهٔ شدید به چیزی، آدم را کور و کر می‌کند.» علاقه و محبّت به یک شخص، چشم و گوش را می‌بندد و عقل را به حاشیه می‌راند. از این رو، پیشوایان دین از ما خواسته‌اند که در مورد همسر آینده با پدر و مادر خود مشورت کنیم تا به انتخابی درست برسیم.

(دین و زندگی۲، پیوند مقدس، صفحه‌های ۱۵۳ و ۱۵۴)

سنجش کلاد
www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshClouds

۲۶۳- **گزینهٔ «۱»** *(یاسین ساعدی)*

خداوند در آیهٔ ۲۱ سورهٔ روم می‌فرماید: «وَ مِنْ آیاتِهِ أَن خَلَقَ لَکُم مِن أَنفُسِکُم أَزواجاً لِتَسْکُنُوا إِلَیْهَا وَ جَعَلَ بَینَکُم مَوَدَّةً وَ رَحمةً إِنَّ فی ذلک لآیاتٍ لِقَوْمٍ یَتَفَکَّرُونَ: و از نشانه‌های خدا آن است که همسرانی از نوع خودتان برای شما آفرید تا با آن‌ها آرامش یابید و میان شما دوستی و رحمت قرارداد. همانا که در این مورد، نشانه‌هایی است برای کسانی که تفکر می‌کنند.»

آمادگی برای ازدواج، نیازمند دو بلوغ است: یکی بلوغ جنسی و دیگری بلوغ عقلی و فکری که مدتی پس از بلوغ جنسی فرا می‌رسد.

(دین و زندگی۲، پیوند مقدس، صفحه‌های ۱۴۹ و ۱۵۵)

۲۶۴- **گزینهٔ «۴»** *(مرتضی محسنی کبیر)*

امام خمینی (ره) به‌خاطر هم‌دردی با مردم ایران، سرمای پاریس را تحمل می‌کرد و از نفت استفاده نمی‌کرد.

همین که آیت‌الله بروجردی فهمید نسبت به طلبهٔ سؤال‌کننده، تندی بی‌جایی کرده است، در برابر همهٔ شاگردان و علما و مراجع، دست آن طلبه را بوسید که نشان از وظیفهٔ جبران ضعف‌ها در معلمی دارد.

(مهارت معلمی، وظایف معلم، صفحه‌های ۹۰ و ۹۲)

۲۶۵- **گزینهٔ «۴»** *(مرتضی محسنی کبیر)*

«... و اذا قیل انشزوا فانشزوا یرفع الله ...: ... و هرگاه گفته شود برخیزید، برخیزید، خدا شما را به درجاتی رفعت و بزرگی می‌دهد ... .»

در فرهنگ مردم «فرشته» مظهر خوبی و کرامت است؛ تا آن جا که زنان مصر در ستایش یوسف گفتند: «إنّ هذا الّا مَلکٌ کریم».

(مهارت معلمی، وظایف معلم، صفحه‌های ۹۵، ۱۱۵ و ۱۱۶)

۲۶۶- **گزینهٔ «۱»** *(یاسین ساعدی)*

«بسم الله» گام اول در مسیر بندگی و عبودیت است.

امام رضا (ع) فرمود: «بسم الله به اسم اعظم الهی از سیاهی چشم به سفیدی آن نزدیک‌تر است».

(مهارت معلمی، وظایف معلم، صفحه‌های ۷۶ و ۷۷)

۲۶۷- **گزینهٔ «۴»** *(مرتضی محسنی کبیر)*

حکمت، مادر همهٔ خیرات است. هر که آن را داشته باشد، چیزهای زیادی خواهد داشت، گرچه مال و ثروت خیر است، ولی خیر کثیر، داشتن دید و قدرت تشخیص است.

بر اساس روایات، حکمت همچون نوری است که در جان قرار می‌گیرد و آثار آن در گفتار و رفتار انسان پیدا می‌شود.

توجه:

حکمت:

ـ همچون نوری است که در جان قرار می‌گیرد و آثار آن در گفتار و رفتار انسان پیدا می‌شود.

ـ بینش و بصیرتی است که اگر فقیر باشد او را در جامعه از ثروتمند محبوب‌تر می‌کند و اگر صغیر باشد، او را بر بزرگ‌سالان برتری می‌بخشد.

ـ معرفت و تفقه در دین است، اطاعت از خدا و شناخت امام و پرهیز از گناهان است.

ـ هدیه‌ای کلیدی و مادر همهٔ خیرات است (خیر کثیر)

(مهارت معلمی، وظایف معلم، صفحه‌های ۱۰۴ و ۱۰۵)

۲۶۸- **گزینهٔ «۴»** *(مرتضی محسنی‌کبیر)*

در آیه‌ای می‌خوانیم که به جای انتقام، بدی‌های مردم را با عمل خوبی از خود دفع کنید: «ادفع بالّتی هی احسن» که این کار برکاتی دارد؛ از جمله این که کینه و دشمنی بین شما و آن شخص را به دوستی گرم تبدیل می‌کند: «فاذا الّذی بینک و بینه عداوة کانّه ولیّ حمیم».

آیهٔ شریفهٔ «لا تستوی الحسنة و لا السیئة ادفع بالّتی هی احسن» دربارهٔ یکی دیگر از بایدهای معلمی یعنی «توجه به آثار جنبی رفتار» اشاره دارد.

(مهارت معلمی، وظایف معلم، صفحه‌های ۹۸ و ۹۹)

۲۶۹- **گزینهٔ «۳»** *(یاسین ساعدی)*

تشریح گزینهٔ نادرست:

شرط امر به معروف و نهی از منکر، عمل خود انسان نیست؛ یعنی اگر منکری را دیدیم باید از آن نهی کنیم؛ گرچه خودمان آن منکر را انجام دهیم.

(مهارت معلمی، وظایف معلم، صفحه‌های ۷۷، ۷۸ و ۸۰)

۲۷۰- **گزینهٔ «۴»** *(مرتضی محسنی کبیر)*

گوش ندادن به حقایق، صفت کافران کوردل است: «و لهم آذان لا یسمعون بها: آنان گوش‌هایی دارند که با آن نمی‌شنوند.» و «اذا ذکّروا لا یذکرون: و هنگامی که به آن‌ها تذکر داده شود، پند نمی‌گیرند»

یأس از رحمت خداوند رحیم جزء گناهان کبیره است و مأیوس‌کردن دیگران، به تعبیر قرآن کریم، کار شیطان و منافقان.

(مهارت معلمی، وظایف معلم، صفحه‌های ۱۰۱ و ۱۰۲)

سنجش کلاد
www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshClouds

استعدادتحلیلی

۲۷۱- گزینهٔ «۳» *(حمید اصفهانی)*

موجد: ایجادکننده

(هوش کلامی)

۲۷۲- گزینهٔ «۳» *(حمید اصفهانی)*

متن می‌گوید باید به مبانی اندیشه‌های فلسفه‌ی آموزشی توجّه کرد، در غیر این صورت، آسیب‌زاست، یعنی در غیر این توجّه به مبانی اندیشه‌های فلسفه‌ی آموزشی.

(هوش کلامی)

۲۷۳- گزینهٔ «۱» *(حمید اصفهانی)*

متن برای فارغ‌التّحصیلان رشته‌ی فلسفه‌ی تعلیم و تربیت، چند شغل احتمالی معرّفی کرده است ولی به دیگر پرسش‌ها پاسخی نداده است.

(هوش کلامی)

۲۷۴- گزینهٔ «۴» *(حمید اصفهانی)*

طبق متن، «هدف از برگزاری این دوره، تربیت متخصصان کارآمدی است که به ... بپردازند». معلوم است که نهاد جمع انسان، فعل جمع می‌خواهد.

(هوش کلامی)

۲۷۵- گزینهٔ «۲» *(حمید اصفهانی)*

متن می‌گوید اگر ارزش پول ملّی کشور «الف» در قیاس با پول ملّی کشور «ب» کم شود، کشور «الف» محصولاتش را راحت‌تر می‌تواند به کشور «ب» صادر کند. ولی این حدّاقل به شرطی است که افزایش ارزش پول ملّی کشور «ب»، به افزایش قیمت محصولات کشور «الف» منجر نشود. مثلاً اگر محصولات اوّلیه خود وارداتی باشد، قیمت آن‌ها هم بیشتر می‌شود که به افزایش قیمت محصول نهایی منجر می‌شود.

(هوش کلامی)

۲۷۶- گزینهٔ «۲» *(کتاب آبی استعدادتحلیلی هوش کلامی)*

در متن صورت سؤال به اهمّیّتِ شکل و ارتفاع دودها اشاره‌ای نشده است. عبارت «فرستندگان این پیام‌ها، چیزی شبیه به پتو را در فواصل زمانی معیّن روی آتشی قرار می‌دهند و برمی‌دارند تا دودها نیز در فواصلی معیّن به هوا فرستاده شود» به اهمّیّتِ فاصلهٔ زمانی و عبارت «دو دود غلیظ نشانهٔ آمدن دوست و چهار دود غلیظ نشانهٔ حملهٔ دشمن» به اهمّیّتِ غلظت دودها اشاره می‌کند.

(هوش کلامی)

۲۷۷- گزینهٔ «۴» *(کتاب آبی استعدادتحلیلی هوش کلامی)*

وقتی متن دربارهٔ دو یا چهار دود در پیام صحبت می‌کند، به وضوح اشاره می‌کند که گاه ناقص رسیدنِ پیام از نرسیدنِ آن خطرناک‌تر است: دو دود غلیظ نشانهٔ آمدن دوست است و چهار دود غلیظ نشانهٔ حملهٔ دشمن، پس گاه ناقص رسیدنِ پیام از نرسیدنِ آن خطرناک‌تر است. دیگر گزینه‌ها از متن برداشت نمی‌شود.

(هوش کلامی)

۲۷۸- گزینهٔ «۳» *(مهری وکلی فراهانی)*

می‌دانیم کارت سبز ششمین کارت است و دقیقاً بین کارت‌های زرد و نیلی است. پس کارت نیلی یکی از کارت‌های شماره‌های ۵ و ۷ است. پس قطعاً مهر که در جایگاه چهارم است رنگ نیلی ندارد.

۷	۶	۵	۴	۳	۲	۱
زرد/نیلی	سبز	زرد/نیلی	مهر			

(هوش منطقی ریاضی)

۲۷۹- گزینهٔ «۲» *(مهری وکلی فراهانی)*

در این سؤال می‌دانیم مهر قرمز است و آبان و آذر و دی به همین ترتیب کنار همند. پس یکی از چهار حالت زیر ممکن است:

۷	۶	۵	۴	۳	۲	۱
			مهر/قرمز	آبان/دی	آذر	آبان/دی

۷	۶	۵	۴	۳	۲	۱
آبان/دی	آذر	آبان/دی	مهر/قرمز			

همچنین می‌دانیم کارت دی بنفش است و سه کارت سبز و نیلی و زرد کنار همند، پس قطعاً کارت‌های سبز و نیلی و زرد یا در جدول بالا در جایگاه‌های ۵، ۶ و ۷ هستند، یا در جدول پایین در جایگاه‌های ۱، ۲ و ۳. پس آبان و آذر، قطعاً سبز، زرد و نیلی نیستند. قرمز هم که متعلق به مهر است و بنفش متعلق به دی، پس فقط رنگ‌های آبی و نارنجی است که ممکن است رنگ‌های آبان و آذر باشند.

(هوش منطقی ریاضی)

۲۸۰- گزینهٔ «۲» *(مهری وکلی فراهانی)*

در این سؤال، می‌دانیم کارت‌های زرد، سبز و نیلی به هم چسبیده‌اند. با محاسبهٔ قرینه‌های شکل‌های زیر، یکی از این سه حالت برای این سه رنگ ممکن است. حال سه رنگ دیگر، نیلی، بنفش، آبی و قرمز، باید به هم بچسبند. با این شرط، فقط حالت دوم و قرینه‌اش ممکن است درست باشند. در هر دو این حالت‌ها، کارت وسط، کارت مهر، قطعاً نیلی یا زرد است.

(۱)

			مهر			

(۲)

			مهر			

(۳)

			مهر			

(هوش منطقی ریاضی)

سنجش کلاد
www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshClouds

۲۸۱- گزینهٔ «۱» *(مهدی ونکی فراهانی)*

در این سؤال طبق جدول زیر، یا قرینه‌اش، رنگ‌های زرد، سبز و نیلی باید کنار هم باشند ولی مرداد نارنجی نیست پس مهر نارنجی است.

دی بنفش	آذر قرمز	آبان آبی	مهر			مرداد غیرنارنجی

(هوش منطقی ریاضی)

۲۸۲- گزینهٔ «۳» *(فاطمه راسخ)*

کسرِ کار هر کارگر در هر ساعت: $\frac{۱}{۳}\times\frac{۱}{۵}\times\frac{۱}{۸}=\frac{۱}{۱۲۰}$

کسر کار هر سرکارگر در هر ساعت: $\frac{۱}{۲}\times\frac{۱}{۴}\times\frac{۱}{۳}=\frac{۱}{۲۴}$

کسر کار یک کارگر و یک سرکارگر، با هم در هر ساعت:

$$\frac{۱}{۱۲۰}+\frac{۱}{۲۴}=\frac{۱+۵}{۱۲۰}=\frac{۶}{۱۲۰}$$

پس کلّ زمان مورد نیازِ گروه جدید، به ساعت: $\frac{۱۲۰}{۶}=۲۰$

که اگر در هر روز چهار ساعت کار کنند، $\frac{۲۰}{۴}=۵$ روز زمان نیاز دارند.

(هوش منطقی ریاضی)

۲۸۳- گزینهٔ «۴» *(فاطمه راسخ)*

در بدترین حالت، فرض می‌کنیم $۷\times۲=۱۴$ شخص در اتاق اول باشند که یعنی در هر روز هفته، دو نفر به‌دنیا آمده‌اند. حال نفر پانزدهم، در هر روز که به دنیا آمده باشد، شرط صورت سؤال را برآورده می‌کند. $n=۱۵$

همچنین در بدترین حالت، فرض می‌کنیم $۴\times۳=۱۲$ شخص در اتاق دوم هستند که یعنی در هر فصل، سه نفر به‌دنیا آمده‌اند. حال نفر سیزدهم، در هر فصل که به‌دنیا آمده باشد، شرط صورت سؤال را برآورده می‌کند.

$m=۱۳$

پس: $m-n=۱۳-۱۵=-۲$

(هوش منطقی ریاضی)

۲۸۴- گزینهٔ «۳» *(فاطمه راسخ)*

$(۹\times۲)+۱=۱۹$

جمع و اختلاف ارقام: $۹+۱=۱۰, ۹-۱=۸$

$(۸\times۳)+۲=۲۶$

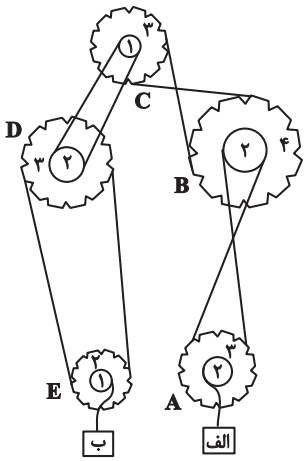
جمع و اختلاف ارقام: $۶+۲=۸, ۶-۲=۴$

$(۷\times۴)+۳=۳۱$

جمع و اختلاف ارقام: $۳+۱=۴, ۳-۱=۲$

(هوش منطقی ریاضی)

۲۸۵- گزینهٔ «۳» *(فرزاد شیرممدلی)*



نسبت سرعت‌ها در انتقال چرخ‌دنده‌ها به قطر آن‌ها بستگی دارد. جهت حرکت هم به نیروی وارد شده بستگی دارد.

برای سرعت داریم:

$$\text{الف} \rightarrow A, B, C, D, E$$

$$۷۲\times\frac{۲}{۳}\times\frac{۲}{۴}\times\frac{۳}{۱}\times\frac{۲}{۳}\times\frac{۲}{۱}=۷۲\times\frac{۴}{۳}=۹۶$$

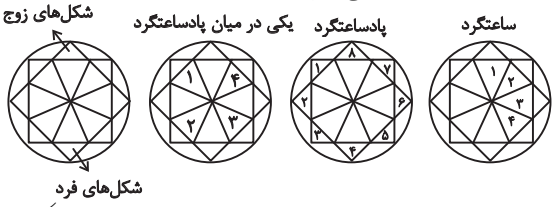
و برای جهت داریم:

D ساعتگرد $\Rightarrow C$ ساعتگرد $\Rightarrow B$ پادساعتگرد $\Rightarrow A$ ساعتگرد $\Rightarrow$ الف به بالا $\Rightarrow$ جعبهٔ B رو به پایین $\Rightarrow E$ ساعتگرد

(هوش منطقی ریاضی)

۲۸۶- گزینهٔ «۲» *(فاطمه راسخ)*

الگوی صورت سؤال ترکیبی از چهار الگو است:



(هوش غیرکلامی)

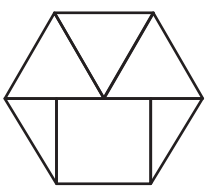
۲۸۷- گزینهٔ «۴» *(هادی زمانیان)*

یک دایره در شکل‌ها یکی در میان رنگی است. ولی چندضلعی‌های دور شکل، ساعتگرد یکی در میان در حرکتند و امواج نیز به سمت پایینِ استخر پیشروی می‌کنند.

(هوش غیرکلامی)

۲۸۸- گزینهٔ «۴» *(فاطمه راسخ)*

شکل مدّنظر:

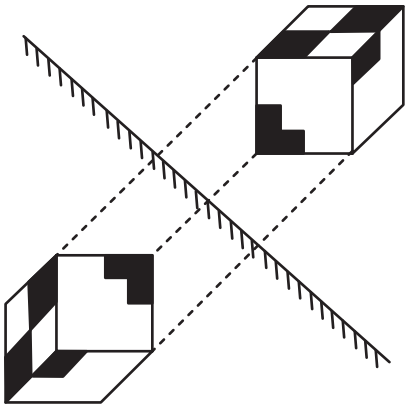


(هوش غیرکلامی)

سنجش کلاد
www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshClouds

۲۸۹- گزینهٔ «۱» *(حمید کنبی)*

تقارنِ مدّ نظر:



(هوش غیرکلامی)

۲۹۰- گزینهٔ «۳» *(هومن رجائیان)*

گزینه‌های «۱»، «۲» و «۴» به‌ترتیب نماهای حجم صورت سؤال است از جلو، بالا و چپ.

(هوش غیرکلامی)

سنجش کلاد
www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshClouds