دفترچهٔ پاسخ

آزمون ۲۱ دی ۱۴۰۳

اختصاصی دوازدهم ریاضی

بنیاد علمی آموزشی قلم‌چی (وقف عام)

	نام درس	نام طراحان
اختصاصی	حسابان ۲	کاظم اجلالی-دانیال آرکیش-علی آزاد-مهدی حاجی‌زاده-داود حسین‌پور-افشین خاصه‌خان-سینا خیرخواه-احمدرضا ذاکرزاده محمدرضا راسخ-مسعود شفیعی-حامد قاسمیان-محمدرضا کشاورزی-نیما مهندس-غلامرضا نیازی-جهانبخش نیکنام
	هندسه و ریاضیات گسسته	امیرحسین ابومحبوب-اسحاق اسفندیار-آرین تفضلی‌زاده-افشین خاصه‌خان-سوگند روشنی-علیرضا شریف‌خطیبی فرشاد صدیقی‌فر-احمدرضا فلاح-مهرداد ملوندی
	فیزیک	مهران اسماعیلی-حسین الهی-بهزاد آزادفر-زهره آقامحمدی-علی برزگر-علیرضا جباری-مسعود خندانی-محسن سلماسی‌وند محمدرضا شریفی-مهدی شریفی-محمدکاظم منشادی-محمود منصوری-سیدمحمدعلی موسوی-امیراحمد میرسعید-حسام نادری مجتبی نکوئیان
	شیمی	امیرعلی بیات-علیرضا بیانی-محمدرضا پورجاوید-سعید تیزرو-علی جعفری-محمدرضا جمشیدی-امیر حاتمیان-امیرمسعود حسینی یاسر راش-حسین شاهسواری-رسول عابدینی‌زواره-محمد عظیمیان‌زواره-محسن مجنونی-هادی مهدی‌زاده

گزینشگران و ویراستاران

نام درس	حسابان ۲	هندسه	ریاضیات گسسته	فیزیک	شیمی
گزینشگر	کاظم اجلالی	امیرحسین ابومحبوب	امیرحسین ابومحبوب	حسام نادری	ایمان حسین‌نژاد
گروه ویراستاری	امیرحسین ابومحبوب	مهرداد ملوندی امیرمحمد کریمی امیرحسین ابومحبوب	مهرداد ملوندی امیرمحمد کریمی امیرحسین ابومحبوب	بهنام شاهنی زهره آقامحمدی	محمدحسن محمدزاده‌مقدم حسین شاهسواری احسان پنجه‌شاهی آرش ظریف
بازبینی نهایی رتبه های برتر	سیدماهد عبدی محمدپارسا سبزه‌ای	امیرحسین ملازینل محمدپارسا سبزه‌ای	امیرحسین ملازینل محمدپارسا سبزه‌ای	سینا صالحی	آرمان قنواتی ماهان فرهمندفر
مسئول درس	مهرداد ملوندی	سرژ یقیازاریان تبریزی	سرژ یقیازاریان تبریزی	حسام نادری	امیرعلی بیات
مستندسازی	سمیه اسکندری	سجاد سلیمی	سجاد سلیمی	علیرضا همایون‌خواه	امیرحسین توحیدی
ویراستاران مستندسازی	احسان صادقی-سجاد سلیمی-علیرضا عباسی‌زاهد-معصومه صنعت‌کار			معصومه صنعت‌کار سیدمحمدرضا مهدوی ابراهیم نوری	سجاد رضایی محمدصدرا وطنی ملینا ملائی

گروه فنی و تولید

مدیر گروه	مهرداد ملوندی
مسئول دفترچه	نرگس غنی‌زاده
گروه مستندسازی	مدیر گروه: محیا اصغری مسئول دفترچه: الهه شهبازی
حروف‌نگار	فرزانه فتح الهزاده
ناظر چاپ	سوران نعیمی

گروه آزمون

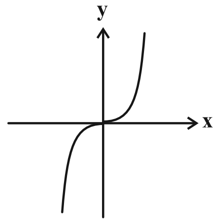
بنیاد علمی آموزشی قلم‌چی (وقف عام)

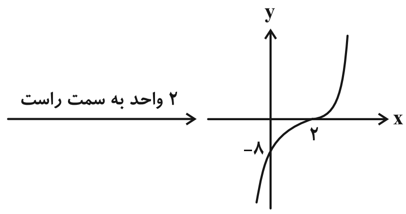
دفتر مرکزی: خیابان انقلاب بین صبا و فلسطین – پلاک ۹۲۳ – کانون فرهنگی آموزش – تلفن: ۶۴۶۳-۰۲۱

ریاضیات

۱- **گزینهٔ «۱»** *(محمدرضا کشاورزی)*

ابتدا نمودار تابع $y=(x-۲)^۳$ را رسم می‌کنیم:





اگر $a>۰$ باشد نمودار تابع $y=(x-۲)^۳-a$، به اندازهٔ a واحد به سمت پایین منتقل شده و از ناحیهٔ دوم محورهای مختصات عبور نمی‌کند.

اگر $a<۰$ باشد نمودار تابع $y=(x-۲)^۳-a$، به اندازهٔ a واحد به سمت بالا منتقل می‌شود. با توجه به عرض از مبدأ تابع $y=(x-۲)^۳$ اگر حداکثر انتقال به سمت بالا ۸ واحد باشد، نمودار تابع f از ناحیهٔ دوم محورهای مختصات عبور نمی‌کند. در نتیجه حدود a برای این‌که نمودار تابع f، از ناحیهٔ دوم محورهای مختصات عبور نکند به صورت $[-۸, +\infty)$ است و کمترین مقدار a برابر ۸- است:

$$f(x)=(x-۲)^۳+۸ \Rightarrow f(-۸)=(-۸-۲)^۳+۸=-۹۹۲$$

(حسابان ۲- تابع؛صفحه‌های ۲ تا ۵، ۱۳ و ۱۴)

۲- **گزینهٔ «۲»** *(سینا خیرخواه)*

ابتدا ضابطهٔ توابع g و h را مشخص می‌کنیم:

$$f(x)=\sqrt{x} \xrightarrow{\text{۱ واحد به چپ}} g(x)=\sqrt{x+۱}$$

$$f(x)=\sqrt{x} \xrightarrow{\text{۵ واحد به راست}} y=\sqrt{x-۵} \xrightarrow{\text{طول نقاط، نصف}}$$

$$y=\sqrt{۲x-۵} \xrightarrow{\text{۱ واحد به بالا}} h(x)=\sqrt{۲x-۵}+۱$$

حال برای محاسبهٔ محل برخورد نمودار توابع g و h، معادلهٔ $h(x)=g(x)$ را حل می‌کنیم:

$$\sqrt{x+۱}=\sqrt{۲x-۵}+۱ \Rightarrow x+۱=۲x-۵+۱+۲\sqrt{۲x-۵}$$

$$\Rightarrow ۵-x=۲\sqrt{۲x-۵} \Rightarrow x^۲-۱۰x+۲۵=۴(۲x-۵)$$

$$\Rightarrow x^۲-۱۸x+۴۵=۰ \Rightarrow \begin{cases} x=۳ & \text{ق ق} \\ x=۱۵ & \text{غ ق ق} \end{cases}$$

حال با قرار دادن طول محل برخورد یعنی $x=۳$ در ضابطهٔ g یا h مقدار عرض آن را به دست می‌آوریم:

$$g(۳)=\sqrt{۳+۱}=۲ \Rightarrow \text{نقطهٔ برخورد}: A(۳\,,\,۲)$$

$$\Rightarrow OA=\sqrt{۳^۲+۲^۲}=\sqrt{۱۳}$$

(حسابان ۲- تابع؛ صفحه‌های ۲ تا ۱۲)

۳- **گزینهٔ «۲»** *(مهدی حاجی‌زاده)*

با توجه به دو زوج مرتب $(۲\,,\,-۲)$ و $(۱\,,\,-۳)$، تابع f اکیداً صعودی است، در نتیجه:

$$\begin{cases} ۲x>-۲ \Rightarrow x>-۱ \\ x+۲>۲x \Rightarrow x<۲ \end{cases} \xrightarrow{\cap} -۱<x<۲$$

بنابراین x شامل دو مقدار صحیح صفر و ۱ است.

(حسابان ۲- تابع؛صفحه‌های ۱۵ تا ۱۸)

۴- **گزینهٔ «۲»** *(علی آزاد)*

ابتدا دامنهٔ تابع f را مشخص می‌کنیم:

$$D_f=\{x\in\mathbb{R} \mid ۴-۲x\ge ۰\}=(-\infty\,,\,۲]$$

هر دو تابع $y=\sqrt{۴-۲x}$ و $y=x^۲-۴x$ در محدودهٔ $x\le ۲$، اکیداً نزولی هستند و جمع دو تابع نزولی اکید، یک تابع اکیداً نزولی است، بنابراین $f(x)=x^۲-۴x+\sqrt{۴-۲x}$ تابعی اکیداً نزولی است.

(حسابان ۲- تابع؛صفحه‌های ۱۵ تا ۱۸)

۵- **گزینهٔ «۲»** *(غلامرضا نیازی)*

با توجه به این‌که می‌خواهیم محدوده‌ای که تابع $y=-\frac{۱}{۲}f(۱-۲x)$ روی آن صعودی است را مشخص کنیم پس در آن محدوده تابع $y=f(۱-۲x)$ نزولی است. چون تابع $y=۱-۲x$ نزولی است و ترکیب دو تابع زمانی نزولی است که یکی نزولی و دیگری صعودی باشد پس $y=f(x)$ باید صعودی باشد. با توجه به نمودار، تابع $y=f(x)$، روی بازهٔ $[۰\,,\,۱]$ صعودی است در نتیجه:

$$۰\le ۱-۲x\le ۱ \Rightarrow ۰\le x\le \frac{۱}{۲}$$

(حسابان ۲- تابع؛ صفحه‌های ۱۵ تا ۱۸)

۶- **گزینهٔ «۳»** *(داود حسین‌پور)*

با توجه به رابطهٔ تقسیم و اطلاعات مسئله داریم:

$$\begin{cases} P(x+۳)=(۷x^۲-۵x+۹)Q(x) & (*) \\ Q(-۱)=۶ \end{cases}$$

حال برای محاسبهٔ باقی‌ماندهٔ تقسیم $P(x)$ بر $x-۲$، باید مقدار $P(۲)$ را محاسبه کنیم. با توجه به رابطهٔ (*) داریم:

$$P(۲)=P(-۱+۳)=(۷(-۱)^۲-۵(-۱)+۹)Q(-۱)$$

$$\xrightarrow{Q(-۱)=۶} P(۲)=۲۱\times ۶=۱۲۶$$

(حسابان ۲- تابع؛ صفحه‌های ۱۸ تا ۲۰)

۷- **گزینهٔ «۱»** *(جهانبخش نیکنام)*

ابتدا ضابطهٔ تابع را به صورت ساده‌تر می‌نویسیم:

$$y=\sin^۴(\pi ax)+\cos^۴(\pi ax)=۱-۲\sin^۲(\pi ax)\cos^۲(\pi ax)$$

$$=۱-۲(\sin(\pi ax)\cos(\pi ax))^۲=۱-۲(\frac{۱}{۲}(\sin ۲\pi ax))^۲$$

$$=۱-\frac{۱}{۲}(\frac{۱-\cos(۴\pi ax)}{۲})=\frac{۳}{۴}+\frac{۱}{۴}\cos(۴\pi ax)$$

حال مقادیر دورهٔ تناوب و Max و Min تابع را مشخص می‌کنیم:

$$Max=\frac{۳}{۴}+\frac{۱}{۴}=۱\ ,\ Min=-\frac{۱}{۴}+\frac{۳}{۴}=\frac{۱}{۲}\ ,\ T=\frac{۲\pi}{|۴\pi a|}=\frac{۱}{۲a}$$

حال از روی نمودار، قاعده و ارتفاع مثلث ABC را به دست می‌آوریم:

$$\begin{cases} BC=\frac{۳}{۲}T=\frac{۳}{۲}\times\frac{۱}{۲a}=\frac{۳}{۴a} \\ \text{ارتفاع}=Max-Min=۱-\frac{۱}{۲}=\frac{۱}{۲} \end{cases}$$

$$\Rightarrow S_{ABC}=\frac{۱}{۲}\times\frac{۱}{۲}\times\frac{۳}{۴a}=\frac{۳}{۱۶a}\Rightarrow\frac{۳}{۱۶a}=\frac{۱}{۱۲}\Rightarrow a=\frac{۹}{۴}$$

(حسابان ۲- مثلثات؛ صفحه‌های ۲۴ تا ۲۹)

۸- **گزینهٔ «۱»** *(محمدرضا راسخ)*

با توجه به ضابطهٔ تابع f داریم:

$$T=\frac{۲\pi}{\frac{\pi}{۴}}=۸$$

از طرفی با توجه به نمودار تابع داریم:

$$\frac{T}{۲}=k\Rightarrow k=۴\Rightarrow Min=-۴$$

$$Min=-۱-|a|=-۴\Rightarrow |a|=۳\Rightarrow a=\pm ۳$$

از آنجا که نمودار تابع f در همسایگی راست $x=۰$ صعودی است در نتیجه $a<۰$:

$$a=-۳\Rightarrow a+k=-۳+۴=۱$$

(حسابان ۲- مثلثات؛ صفحه‌های ۲۴ تا ۲۹)

۹- **گزینهٔ «۲»** *(کاظم اجلالی)*

با توجه به این که دامنهٔ تابع $y=\tan x$ به صورت $\{x\in\mathbb{R}\ |\ x\neq\frac{(۲k+۱)\pi}{۲}\ ,\ k\in\mathbb{Z}\}$ است، داریم:

$$\frac{۶\pi}{|x|+۴}=(۲k+۱)\frac{\pi}{۲}\Rightarrow |x|+۴=\frac{۱۲}{۲k+۱}$$

$$\Rightarrow |x|=\frac{۸-۸k}{۲k+۱}\ \ ,\ \ k\in\mathbb{Z}$$

چون $|x|\geq ۰$، پس:

$$\frac{۸-۸k}{۲k+۱}\geq ۰\Rightarrow -\frac{۱}{۲}<k\leq ۱\xrightarrow{k\in\mathbb{Z}}k\in\{۰,۱\}$$

حال به ازای مقادیر به دست آمده برای k داریم:

$$k=۰\Rightarrow |x|=۸\Rightarrow x=\pm ۸$$

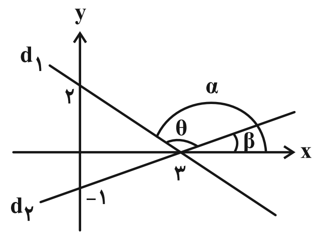
$$k=۱\Rightarrow |x|=۰\Rightarrow x=۰$$

بنابراین فقط سه عدد صفر، ۸ و ۸- در دامنهٔ تابع f قرار ندارند.

(حسابان ۲- مثلثات؛ صفحه‌های ۲۹ تا ۳۲)

۱۰- **گزینهٔ «۳»** *(افشین خاصه‌خان)*

می‌دانیم شیب هر خط با تانژانت زاویه‌ای که خط با جهت مثبت محور x ها می‌سازد برابر است، لذا براساس نام‌گذاری شکل زیر داریم:



$$m_{d_۱}=\tan\alpha=-\frac{۲}{۳}\qquad ,\qquad m_{d_۲}=\tan\beta=\frac{۱}{۳}$$

از طرفی $\theta=\alpha-\beta$، در نتیجه:

$$\tan\theta=\tan(\alpha-\beta)=\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{۱+\tan\alpha\tan\beta}$$

$$=\frac{-\frac{۲}{۳}-\frac{۱}{۳}}{۱+(-\frac{۲}{۳})(\frac{۱}{۳})}=\frac{-۱}{۱-\frac{۲}{۹}}=-\frac{۹}{۷}$$

(حسابان ۲- مثلثات؛ صفحه‌های ۴۲ و ۴۳)

۱۱- **گزینهٔ «۳»** *(سینا خیرخواه)*

با توجه به نمودار داریم:

$$f(۰)=۲\Rightarrow c=۲$$

$$\frac{۳T}{۲}=۳\Rightarrow T=۲\Rightarrow\frac{\pi}{|a\pi|}=۲\Rightarrow |a|=\frac{۱}{۲}\Rightarrow a=\pm\frac{۱}{۲}$$

حال چون نقطهٔ $(-\frac{۱}{۳}\ ,\ ۰)$ روی نمودار تابع قرار دارد، داریم:

اگر $a=\frac{۱}{۲}\Rightarrow ۰=b(\tan(\frac{۱}{۲}\times\pi\times(-\frac{۱}{۳})))+۲$

$$\Rightarrow \frac{-\sqrt{3}}{3}b+2=0 \Rightarrow b=2\sqrt{3} \Rightarrow a\times b\times c=2\sqrt{3}$$

اگر $a=-\frac{1}{2} \Rightarrow 0=b(\tan(-\frac{1}{2}\times\pi\times(-\frac{1}{3})))+2$

$$\Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{3}b+2=0 \Rightarrow b=-2\sqrt{3} \Rightarrow a\times b\times c=2\sqrt{3}$$

(حسابان ۲- مثلثات؛ صفحه‌های ۲۹ تا ۳۲)

۱۲- **گزینهٔ «۲»** *(احمدرضا ذاکرزاده)*

ابتدا معادله را به صورت زیر بازنویسی می‌کنیم:

$$2\sin^2 x+\sin^2 x+\cos^2 x-(\sqrt{2}-2)\sin x-(\sqrt{2}+1)=0$$

$$\Rightarrow 2\sin^2 x-(\sqrt{2}-2)\sin x-\sqrt{2}=0$$

حال با فرض $t=\sin x$ داریم: $2t^2-(\sqrt{2}-2)t-\sqrt{2}=0$

$$\Rightarrow \begin{cases} t=\frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \sin x=\frac{\sqrt{2}}{2} \xrightarrow{x\in(0,2\pi)} x=\frac{\pi}{4},\frac{3\pi}{4} \\ t=-1 \Rightarrow \sin x=-1 \xrightarrow{x\in(0,2\pi)} x=\frac{3\pi}{2} \end{cases}$$

در نتیجه مجموع جواب‌های معادله در این بازه برابر است با:

$$\frac{\pi}{4}+\frac{3\pi}{4}+\frac{3\pi}{2}=\frac{5\pi}{2}$$

(حسابان ۲- مثلثات؛ صفحه‌های ۳۵ تا ۳۷)

۱۳- **گزینهٔ «۳»** *(مسعود شفیعی)*

می‌دانیم $\sin x+\cos x=\sqrt{2}\sin(x+\frac{\pi}{4})$، پس داریم:

$$3\sqrt{2}(\sin x+\cos x)=\sin 6x+7$$

$$\Rightarrow 6\sin(x+\frac{\pi}{4})=\sin 6x+7$$

با توجه بـه ایـن‌کـه $8\le \sin 6x+7\le 6$ و $-6\le 6\sin(x+\frac{\pi}{4})\le 6$ است. داریم:

الف) $\sin 6x+7=6 \Rightarrow \sin 6x=-1$

$$\Rightarrow 6x=2k\pi-\frac{\pi}{2},\ k\in\mathbb{Z}$$

$$\Rightarrow x=\frac{k\pi}{3}-\frac{\pi}{12},\ k\in\mathbb{Z}$$

$$\xrightarrow{x\in(0,2\pi)} x=\frac{\pi}{4},\frac{7\pi}{12},\frac{11\pi}{12},\frac{5\pi}{4},\frac{19\pi}{12},\frac{23\pi}{12}$$

ب) $6\sin(x+\frac{\pi}{4})=6 \Rightarrow \sin(x+\frac{\pi}{4})=1$

$$\Rightarrow x+\frac{\pi}{4}=2k\pi+\frac{\pi}{2},\ k\in\mathbb{Z}$$

$$\Rightarrow x=2k\pi+\frac{\pi}{4},\ k\in\mathbb{Z}$$

$$\xrightarrow{x\in(0,2\pi)} x=\frac{\pi}{4}$$

اشتراک جواب‌های به دست آمده برابر $x=\frac{\pi}{4}$ است. در نتیجه معادله یـک جواب دارد.

(حسابان ۲- مثلثات؛ صفحه‌های ۳۵ تا ۳۷)

۱۴- **گزینهٔ «۴»** *(افشین خاصه‌خان)*

با توجه به حد داده شده، مخرج دارای ریشهٔ مضاعف $x=2$ است:

$$-x^2+4x-a^2=-(x-2)^2 \Rightarrow a^2=4 \Rightarrow \begin{cases} a=2 \\ a=-2 \end{cases}$$

به ازای $a=2$ حاصل حد برابر $-\infty$ مـی‌شـود پـس $a=-2$ قابـل قبـول است. حال ضابطهٔ تابع f را می‌نویسیم: $f(x)=\frac{x+2}{\sqrt{-x}}$

با توجه به دامنه، تابع f در همسایگی راست $x=0$ تعریف نشده اسـت. در نتیجه:

$$\lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0^-}\frac{x+2}{\sqrt{-x}}=\frac{2}{0^+}=+\infty$$

(حسابان ۲- حدهای نامتناهی- حد در بی‌نهایت؛ صفحه‌های ۵۱ تا ۵۵)

۱۵- **گزینهٔ «۴»** *(دانیال آرکیش)*

با توجه به این‌که حاصل حد وقتی $x\to-\infty$، برابر مقـدار متنـاهی ۲ شـده است و چندجمله‌ای مخرج از درجه ۲ است پس درجه چندجملـه‌ای صـورت نیز باید برابر ۲ باشد:

$$a-2=0 \Rightarrow a=2 \Rightarrow \lim_{x\to-\infty}\frac{2x^2+3}{bx^2+1}=\lim_{x\to-\infty}\frac{2x^2}{bx^2}=\frac{2}{b}$$

$$\Rightarrow \frac{2}{b}=2 \Rightarrow b=1 \Rightarrow a-b=2-1=1$$

(حسابان ۲- حدهای نامتناهی- حد در بی‌نهایت؛ صفحه‌های ۶۵ و ۶۶)

۱۶- **گزینهٔ «۲»** *(محمدرضا کشاورزی)*

ابتدا ضابطهٔ تابع f را به صورت زیر بازنویسی می‌کنیم:

$$f(x)=\frac{2x^2+1}{x^2-4}=\frac{2(x^2-4)+9}{x^2-4}=2+\frac{9}{x^2-4}$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to+\infty} f(x)=2\ ,\quad f(x)>2$$

حال با توجه به این‌که وقتی $x \to +\infty$ ، آن‌گاه $f(x) \to ۲^+$ و داریم:

$$\lim_{x\to+\infty}(fof)(x)=\lim_{x\to+\infty} f(f(x))$$

$$=\lim_{t\to ۲^+} f(t)=\lim_{t\to ۲^+}\frac{۲t^۲+۱}{t^۲-۴}=+\infty$$

(حسابان ۲- حدهای نامتناهی- حد در بی‌نهایت؛ صفحه‌های ۵۱ تا ۵۵ و ۶۷ تا ۶۹)

۱۷- گزینهٔ «۱» *(حامد قاسمیان)*

راه اول: مجانب‌های قائم تابع $y=\tan x$ به صورت $x=k\pi+\frac{\pi}{۲}\ , \quad (k\in\mathbb{Z})$ است، در نتیجه:

$$۲x+\frac{\pi}{۲}=k\pi+\frac{\pi}{۲}\Rightarrow ۲x=k\pi\Rightarrow x=\frac{k\pi}{۲}\ ,\ k\in\mathbb{Z}$$

بنابراین مجانب‌های قائم تابع $y=-۳+\tan(۲x+\frac{\pi}{۲})$ به صورت $x=\frac{k\pi}{۲}\ , \quad (k\in\mathbb{Z})$ است و کمترین فاصله بین دو مجانب قائم برابر است با:

$$\left|\frac{(k+۱)\pi}{۲}-\frac{k\pi}{۲}\right|=\frac{\pi}{۲}$$

راه دوم: فاصلهٔ بین دو مجانب تابع، همان دورهٔ تناوب (T) است: $T=\frac{\pi}{۲}$

(حسابان ۲- مثلثات؛ صفحه‌های ۲۹ تا ۳۲ و حدهای نامتناهی- حد در بی‌نهایت؛ صفحه‌های ۵۵ تا ۵۸)

۱۸- گزینهٔ «۲» *(سینا خیرخواه)*

ابتدا مجانب‌های افقی تابع f را مشخص می‌کنیم:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{(a+۱)x}{(a-۱)x}=\frac{a+۱}{a-۱}$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{(a-۱)x}{(a+۱)x}=\frac{a-۱}{a+۱}$$

با توجه به این‌که فاصلهٔ مجانب‌های افقی برابر $\frac{۳}{۲}$ است داریم:

$$\left|\frac{a+۱}{a-۱}-\frac{a-۱}{a+۱}\right|=\frac{۳}{۲}\Rightarrow\left|\frac{۴a}{a^۲-۱}\right|=\frac{۳}{۲}\xrightarrow{a>۱}\frac{۴a}{a^۲-۱}=\frac{۳}{۲}$$

$$\Rightarrow ۳a^۲-۳=۸a\Rightarrow ۳a^۲-۸a-۳=۰\xrightarrow{a>۱}a=۳$$

(حسابان ۲- حدهای نامتناهی- حد در بی‌نهایت؛ صفحه‌های ۶۷ تا ۶۹)

۱۹- گزینهٔ «۲» *(نیما مهندس)*

با توجه به ضابطهٔ تابع f، حاصل $\lim f(x)$ وقتی $x\to\pm\infty$ را مشخص می‌کنیم:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^۲-۱}{x|x|+۲}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^۲-۱}{x^۲+۲}=\lim_{x\to+\infty}(۱-\frac{۳}{x^۲+۲})=۱$$

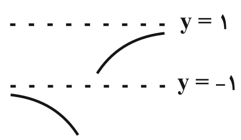
$$\Rightarrow \lim_{x\to+\infty} f(x)=۱\ ,\ f(x)<۱$$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{x^۲-۱}{x|x|+۲}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^۲-۱}{-(x^۲-۲)}$$

$$=\lim_{x\to-\infty}(-۱+\frac{۱}{-(x^۲-۲)})=-۱$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to-\infty} f(x)=-۱\ ,\ f(x)<-۱$$

بنابراین نمودار تابع f، اطراف مجانب‌های افقی خود به صورت زیر است:



(حسابان ۲- حدهای نامتناهی- حد در بی‌نهایت؛ صفحه‌های ۶۷ تا ۶۹)

۲۰- گزینهٔ «۳» *(محمدرضا راسخ)*

با توجه به نمودار تابع f که از انتقال نمودار تابع $y=x^۳$ به دست آمده است، ضابطهٔ آن را مشخص می‌کنیم:

$$f(x)=a(x-۱)^۳+۲\xrightarrow{(۰,۰)\in f}۰=a(۰-۱)^۳+۲\Rightarrow a=۲$$

$$\Rightarrow f(x)=۲(x-۱)^۳+۲$$

حال به کمک ضابطهٔ تابع f، ضابطهٔ تابع g را تشکیل می‌دهیم و مجانب‌های افقی آن را مشخص می‌کنیم:

$$g(x)=\frac{|۲(x-۱)^۳+۲|}{۲(-\frac{x}{۲}-۱)^۳+۲}$$

$$\lim_{x\to+\infty} g(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{|۲(x-۱)^۳+۲|}{۲(-\frac{x}{۲}-۱)^۳+۲}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{|۲x^۳|}{-\frac{x^۳}{۴}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{۲x^۳}{-\frac{x^۳}{۴}}=-۸$$

$$\lim_{x\to-\infty} g(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{|۲(x-۱)^۳+۲|}{۲(-\frac{x}{۲}-۱)^۳+۲}$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{|۲x^۳|}{-\frac{x^۳}{۴}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{-۲x^۳}{-\frac{x^۳}{۴}}=۸$$

در نتیجه فاصلهٔ مجانب‌های افقی تابع g برابر است با: $|۸-(-۸)|=۱۶$

(حسابان ۲- حدهای نامتناهی- حد در بی‌نهایت؛ صفحه‌های ۶۷ تا ۶۹)

۲۱- **گزینهٔ «۴»** (فرشاد صدیقی‌فر)

ماتریس مورد نظر را تشکیل می‌دهیم:

$$\begin{cases} A^{۲} = A\times A = \begin{bmatrix} ۲ & ۰ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix}\times\begin{bmatrix} ۲ & ۰ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۴ & ۰ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix} \\ A^{۳} = A^{۲}\times A = \begin{bmatrix} ۴ & ۰ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix}\times\begin{bmatrix} ۲ & ۰ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۸ & ۰ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix} \\ kA = \begin{bmatrix} ۲k & ۰ \\ ۰ & k \end{bmatrix} \end{cases}$$

$$\Rightarrow A^{۳} - kA = \begin{bmatrix} ۸-۲k & ۰ \\ ۰ & ۱-k \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{\text{ماتریس اسکالر}} ۸-۲k = ۱-k \Rightarrow k = ۷$$

(هندسه ۳- ماتریس و کاربردها: صفحه‌های ۱۰ تا ۲۰)

۲۲- **گزینهٔ «۲»** (احمدرضا فلاح)

از روی فرض، ماتریس $A^{-۱}$ را یافته و سپس ماتریس A را به دست می‌آوریم:

$$A^{-۱}+I = \begin{bmatrix} ۲ & -۳ \\ -۲ & ۵ \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow A^{-۱} = \begin{bmatrix} ۲ & -۳ \\ -۲ & ۵ \end{bmatrix}-\begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۱ & -۳ \\ -۲ & ۴ \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{\text{وارون}} A = (A^{-۱})^{-۱} = \begin{bmatrix} ۱ & -۳ \\ -۲ & ۴ \end{bmatrix}^{-۱} = \frac{۱}{۴-۶}\begin{bmatrix} ۴ & ۳ \\ ۲ & ۱ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -۲ & -\frac{۳}{۲} \\ -۱ & -\frac{۱}{۲} \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow A+I = \begin{bmatrix} -۱ & -\frac{۳}{۲} \\ -۱ & \frac{۱}{۲} \end{bmatrix} \Rightarrow |A+I| = -\frac{۱}{۲}-\frac{۳}{۲} = -۲$$

(هندسه ۳- ماتریس و کاربردها: صفحه‌های ۲۲، ۲۳ و ۳۱)

۲۳- **گزینهٔ «۴»** (امیرحسین ابومحبوب)

ابتدا دترمینان ماتریس A را محاسبه می‌کنیم:

$$۲A = \begin{bmatrix} |A|^{۲} & -۳ \\ ۴ & |A|-۳ \end{bmatrix} \Rightarrow |۲A| = \begin{vmatrix} |A|^{۲} & -۳ \\ ۴ & |A|-۳ \end{vmatrix}$$

$$\Rightarrow ۴|A| = |A|^{۲}(|A|-۳)+۱۲$$

$$\Rightarrow |A|^{۲}(|A|-۳)-۴(|A|-۳) = ۰$$

$$\Rightarrow (|A|^{۲}-۴)(|A|-۳) = ۰ \Rightarrow |A| = -۲, ۲, ۳$$

به ازای هر مقدار $|A|$، مقادیر x و y را به دست می‌آوریم:

الف) $|A| = -۲ \Rightarrow ۲A = \begin{bmatrix} ۴ & -۳ \\ ۴ & -۵ \end{bmatrix}$

$$\Rightarrow A = \begin{bmatrix} ۲ & -\frac{۳}{۲} \\ ۲ & -\frac{۵}{۲} \end{bmatrix} \Rightarrow A^{-۱} = \frac{۱}{-۲}\begin{bmatrix} -\frac{۵}{۲} & \frac{۳}{۲} \\ -۲ & ۲ \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \frac{۱}{-۲}\begin{bmatrix} -\frac{۵}{۲} & \frac{۳}{۲} \\ -۲ & ۲ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -۲ \\ ۴ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -\frac{۱۱}{۲} \\ -۶ \end{bmatrix} \Rightarrow x-y = \frac{۱}{۲}$$

ب) $|A| = ۲ \Rightarrow ۲A = \begin{bmatrix} ۴ & -۳ \\ ۴ & -۱ \end{bmatrix}$

$$\Rightarrow A = \begin{bmatrix} ۲ & -\frac{۳}{۲} \\ ۲ & -\frac{۱}{۲} \end{bmatrix} \Rightarrow A^{-۱} = \frac{۱}{۲}\begin{bmatrix} -\frac{۱}{۲} & \frac{۳}{۲} \\ -۲ & ۲ \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \frac{۱}{۲}\begin{bmatrix} -\frac{۱}{۲} & \frac{۳}{۲} \\ -۲ & ۲ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -۲ \\ ۴ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \frac{۷}{۲} \\ ۶ \end{bmatrix} \Rightarrow x-y = -\frac{۵}{۲}$$

ج) $|A| = ۳ \Rightarrow ۲A = \begin{bmatrix} ۹ & -۳ \\ ۴ & ۰ \end{bmatrix}$

$$\Rightarrow A = \begin{bmatrix} \frac{۹}{۲} & -\frac{۳}{۲} \\ ۲ & ۰ \end{bmatrix} \Rightarrow A^{-۱} = \frac{۱}{۳}\begin{bmatrix} ۰ & \frac{۳}{۲} \\ -۲ & \frac{۹}{۲} \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \frac{۱}{۳}\begin{bmatrix} ۰ & \frac{۳}{۲} \\ -۲ & \frac{۹}{۲} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -۲ \\ ۴ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۲ \\ \frac{۲۲}{۳} \end{bmatrix} \Rightarrow x - y = -\frac{۱۶}{۳}$$

(هندسه ۳- ماتریس و کاربردها؛ صفحه‌های ۲۲ تا ۳۱)

۲۴- **گزینهٔ «۴»** *(اسحاق اسفندیار)*

ماتریس $B^{-۱} - A^{-۱}$ را از سمت چپ و راست به ترتیب در ماتریس‌های A و B ضرب می‌کنیم:

$$A(B^{-۱} - A^{-۱})B = A\underbrace{B^{-۱}B}_{I} - \underbrace{AA^{-۱}}_{I}B = A - B$$

در این صورت داریم:

$$|A - B| = |A(B^{-۱} - A^{-۱})B|$$

$$= |A||B^{-۱} - A^{-۱}||B| = |AB||B^{-۱} - A^{-۱}|$$

ماتریس $B - A$ مربعی از مرتبه ۲ بوده و داریم:

$$|B - A| = |-(A - B)| = (-۱)^{۲}|A - B| = |A - B|$$

$$\Rightarrow |B^{-۱} - A^{-۱}| = \frac{|B - A|}{|AB|} = \frac{۱\times۲ - (۴)(-۱)}{۶} = \frac{۶}{۶} = ۱$$

(هندسه ۳- ماتریس و کاربردها؛ صفحه‌های ۲۲، ۲۳، ۲۹ و ۳۱)

۲۵- **گزینهٔ «۱»** *(مهرداد ملوندی)*

چون ماتریس اولی وارون‌پذیر نیست، پس دترمینان آن صفر است. دترمینان این ماتریس را از روش ساروس به دست آورده و برابر صفر قرار می‌دهیم:

$$\begin{vmatrix} a & -۴ & ۲ \\ -\frac{۱}{۲} & ۰ & ۱ \\ ۳ & b & -۱ \end{vmatrix} = ۰ \xrightarrow{\text{ساروس}} (۰ - ۱۲ - b) - (۰ - ۲ + ab) = ۰$$

$$\Rightarrow -۱۰ - b(a+۱) = ۰ \Rightarrow b(a+۱) = -۱۰ \qquad (۱)$$

این که دستگاه داده شده، حداقل دو جواب دارد، به این معناست که دارای بی‌شمار جواب است و در نتیجه:

$$\underbrace{\frac{a}{۹} = \frac{-۲}{b+۱}}_{a(b+۱)=-۱۸ \ (۲)} = \frac{m-۱}{۲m-۳} \qquad (*)$$

$$\xrightarrow{(۱),(۲)} \begin{cases} ab + b = -۱۰ \\ ab + a = -۱۸ \end{cases} \xrightarrow{\text{تفاضل}} b - a = ۸ \Rightarrow b = a + ۸$$

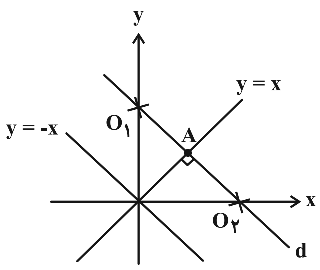
$$\xrightarrow{(۱)} (a+۸)(a+۱) = -۱۰ \Rightarrow \underbrace{a^{۲} + ۹a + ۱۸}_{(a+۳)(a+۶)} = ۰ \Rightarrow \begin{cases} a = -۳ \\ a = -۶ \end{cases}$$

$$\begin{cases} a = -۳ \xrightarrow{(*)} -\frac{۳}{۹} = \frac{m-۱}{۲m-۳} \xrightarrow{\text{نهایتاً}} m = ۱/۲ \\ a = -۶ \xrightarrow{(*)} -\frac{۶}{۹} = \frac{m-۱}{۲m-۳} \xrightarrow{\text{نهایتاً}} m = \frac{۹}{۷} \end{cases}$$

(هندسه ۳- ماتریس و کاربردها؛ صفحه‌های ۲۲ تا ۲۹)

۲۶- **گزینهٔ «۳»** *(احمدرضا فلاح)*

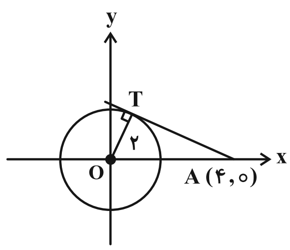
مکان هندسی مراکز دایره‌هایی که بر هر دو نیمساز نواحی مختصات (خطوط $y = x$ و $y = -x$) مماس باشد، خطوط نیمساز این دو خط (یعنی محور x ها و y ها) را تشکیل می‌دهد. همچنین مکان هندسی مرکز دایره‌هایی که از نقطهٔ A روی خط $y = x$ گذشته و بر خط $y = x$ مماس باشند، خط d گذرا از A و عمود بر خط $y = x$ می‌باشد. خط d محورهای مختصات را در دو نقطهٔ $(O_۱ \ , \ O_۲)$ قطع می‌کند. بنابراین مسئله ۲ جواب دارد.



(هندسه ۳- آشنایی با مقاطع مخروطی؛ صفحه‌های ۳۶ تا ۳۹)

۲۷- **گزینهٔ «۱»** *(فرشاد صدیقی‌فر)*

مرکز دایره به معادلهٔ $x^{۲} + y^{۲} = ۴$، مبدأ مختصات و شعاع آن برابر $r = ۲$ است. شعاع (OT) عمود بر خط مماس را رسم می‌کنیم. مطابق شکل داریم:



$$OA^2 = OT^2 + AT^2 \Rightarrow 16 = 4 + AT^2 \Rightarrow AT = \sqrt{12}$$

نقطهٔ تماس را به صورت $T(x\,,\,\sqrt{4-x^2})$ در نظر می‌گیریم. داریم:

$$AT = \sqrt{(x-4)^2 + (\sqrt{4-x^2})^2} = \sqrt{12}$$

$$\Rightarrow \sqrt{-8x+20} = \sqrt{12} \Rightarrow x = 1$$

(هندسه ۳- آشنایی با مقاطع مخروطی: صفحه‌های ۴۰ تا ۴۳)

۲۸- گزینهٔ «۳» *(افشین خاصه‌خان)*

مرکز و شعاع دایره $(x+1)^2 + (y-1)^2 = 2a+1$ عبارتند از:

$O'(-1\,,\,1)$ و $r = \sqrt{2a+1}$

با توجه به فرض، خط باید بر دایره مماس باشد و در نتیجه فاصلهٔ مرکز دایره از خط مفروض برابر شعاع دایره است:

$$\frac{|-1+2(1)+3a-2|}{\sqrt{1^2+2^2}} = \sqrt{2a+1}$$

$$\Rightarrow |3a-1| = \sqrt{5}\times\sqrt{2a+1} \Rightarrow 9a^2 - 6a + 1 = 5(2a+1)$$

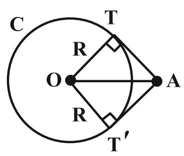
$$\Rightarrow 9a^2 - 16a - 4 = 0 \Rightarrow (a-2)(9a+2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} a = 2 \\ a = -\frac{2}{9} \end{cases}$$

$$\begin{cases} a = 2 \Rightarrow R_1 = \sqrt{5} \\ a = -\frac{2}{9} \Rightarrow R_2 = \frac{\sqrt{5}}{3} \end{cases} \Rightarrow R_1 + R_2 = \sqrt{5} + \frac{\sqrt{5}}{3} = \frac{4}{3}\sqrt{5}$$

(هندسه ۳- آشنایی با مقاطع مخروطی: صفحهٔ ۴۵)

۲۹- گزینهٔ «۳» *(امیرحسین ابومحبوب)*

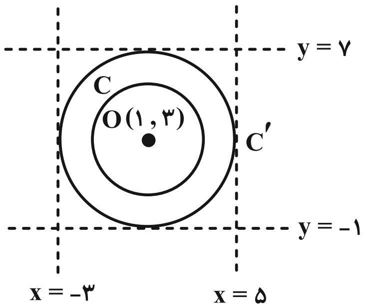
فرض کنید از نقطهٔ A، دو مماس عمود بر هم بر دایرهٔ $C(O\,,\,R)$ رسم کرده باشیم. چهارضلعی $ATOT'$ چهار زاویهٔ قائمه دارد و دو ضلع مجاور آن برابر یکدیگرند $(OT = OT' = R)$، پس این چهارضلعی مربع است و در نتیجه OA قطر مربع و اندازهٔ آن برابر $R\sqrt{2}$ است.



شعاع دایره: $R = \frac{1}{2}\sqrt{(-2)^2 + (-6)^2 - 4(2)} = 2\sqrt{2} \Rightarrow R\sqrt{2} = 4$

پس نقطهٔ A روی دایرهٔ C' به مرکز O و شعاع ۴ قرار دارد.

با توجه به مختصات مرکز دایره، یعنی $O(1\,,\,3)$، خطوط قائم $x = 5$ و $x = -3$ و خطوط افقی $y = 7$ و $y = -1$ بر دایرهٔ C' مماس‌اند. هر خط افقی یا قائم که خارج از فاصلهٔ بین این چهار خط مذکور باشد، فاقد نقطه‌ای است که بتوان از آن نقطه، دو مماس عمود بر هم بر دایرهٔ C رسم کرد. در بین خطوط داده شده، خط $y = -3$ دارای این ویژگی است.



(هندسه ۳- آشنایی با مقاطع مخروطی: صفحه‌های ۴۰ تا ۴۵)

۳۰- گزینهٔ «۴» *(احمدرضا فلاح)*

مرکزهای این دو دایره را که روی خط $y = x+1$ قرار دارند به صورت پارامتری $O'(\alpha\,,\,\alpha+1)$ در نظر می‌گیریم.

فاصلهٔ مرکز دایره تا خط $y = 4$ برابر شعاع دایره می‌باشد، پس:

$$R = |y_{O'} - 4| = |\alpha + 1 - 4| = 3 \Rightarrow |\alpha - 3| = 3$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \alpha - 3 = 3 \Rightarrow \alpha = 6 \Rightarrow O_1(6\,,\,7) \\ \alpha - 3 = -3 \Rightarrow \alpha = 0 \Rightarrow O_2(0\,,\,1) \end{cases}$$

طول خط‌المرکزین را با مقادیر جمع و تفاضل شعاع دایره‌ها مقایسه می‌کنیم:

$$O_1O_2 = \sqrt{(6-0)^2 + (7-1)^2} = \sqrt{72} = 6\sqrt{2} \quad , \quad \begin{cases} R_1 + R_2 = 6 \\ |R_1 - R_2| = 0 \end{cases}$$

$\Rightarrow O_1O_2 > R_1 + R_2 \Rightarrow$ دو دایره متخارج‌اند.

(هندسه ۳- آشنایی با مقاطع مخروطی: صفحه‌های ۴۳ و ۴۴)

۳۱- **گزینهٔ «۱»** *(امیرحسین ابومحبوب)*

طبق ویژگی‌های رابطهٔ عاد کردن داریم:

$$\begin{cases} 2n+3 \mid 3n^2-2n+5 \xrightarrow{\times 2} 2n+3 \mid 6n^2-4n+10 \\ 2n+3 \mid 2n+3 \xrightarrow{\times 3n} 2n+3 \mid 6n^2+9n \end{cases}$$

$$\xrightarrow{\text{تفاضل}} 2n+3 \mid 13n-10$$

$$\begin{cases} 2n+3 \mid 13n-10 \xrightarrow{\times 2} 2n+3 \mid 26n-20 \\ 2n+3 \mid 2n+3 \xrightarrow{\times 13} 2n+3 \mid 26n+39 \end{cases}$$

$$\xrightarrow{\text{تفاضل}} 2n+3 \mid 59 \qquad (*)$$

n عددی طبیعی و عدد ۵۹ اول است، پس از رابطهٔ (*) نتیجه می‌شود:

$$2n+3=59 \Rightarrow n=28$$

کوچک‌ترین عدد طبیعی سه رقمی مضرب ۲۸، عدد $112=4\times 28$ است که مجموع ارقامش برابر ۴ می‌باشد.

(ریاضیات گسسته- آشنایی با نظریهٔ اعداد: صفحه‌های ۱۰ تا ۱۲)

۳۲- **گزینهٔ «۲»** *(علیرضا شریف‌خطیبی)*

اعداد اول بزرگ‌تر از ۲، اعدادی فرد هستند، پس a عددی فرد است و $a+2^{101}$ نیز عددی فرد می‌باشد و چون b مقسوم‌علیه $(a+2^{101})$ است، پس b نیز فرد می‌باشد. می‌دانیم مربع هر عدد فرد به شکل $8k+1$، $(k\in\mathbb{Z})$، نوشته می‌شود، پس:

$$a^2+b^2+17=(8k+1)+(8k'+1)+17$$
$$=8(k+k')+19=8(k+k'+2)+3=8q+3$$

(ریاضیات گسسته- آشنایی با نظریهٔ اعداد: صفحه‌های ۱۴ تا ۱۶)

۳۳- **گزینهٔ «۳»** *(علیرضا شریف‌خطیبی)*

طبق فرض باید در تقسیم $a=bq+r$، رابطهٔ $r=3q$ برقرار باشد، داریم:

$$45=bq+3q \Rightarrow q(b+3)=45=3\times 15=5\times 9=1\times 45$$

در قضیهٔ تقسیم، همواره $r<b$ است پس $3q<b$، یعنی $q<b$ و در نتیجه $q<b+3$ و داریم:

$$q=3\ ,\ b+3=15 \Rightarrow b=12 \qquad (1)$$
$$q=5\ ,\ b+3=9 \Rightarrow b=6 \qquad (2)$$
$$q=1\ ,\ b+3=45 \Rightarrow b=42 \qquad (3)$$

تنها موارد (۱) و (۳) قابل قبول است و مورد (۲) با شرط $3q<b$ همخوانی ندارد و غیرقابل قبول است.

(ریاضیات گسسته- آشنایی با نظریهٔ اعداد: صفحه‌های ۱۴ و ۱۵)

۳۴- **گزینهٔ «۳»** *(احمدرضا فلاح)*

طبق فرض داریم:

$$4^n+55 \overset{17}{\equiv} 0 \Rightarrow 4^n \overset{17}{\equiv} -55 \overset{17}{\equiv} -4$$

یعنی توان‌هایی از ۴ را می‌خواهیم که در تقسیم بر ۱۷ با ۴- هم‌نهشت باشند:

$$4^2 \overset{17}{\equiv} -1 \xrightarrow{\times 4} 4^3 \overset{17}{\equiv} -4 \xrightarrow{\times 4} 4^4 \overset{17}{\equiv} -16 \overset{17}{\equiv} 1$$

$$\xrightarrow{\times 4} 4^5 \overset{17}{\equiv} 4 \xrightarrow{\times 4} 4^6 \overset{17}{\equiv} 16 \overset{17}{\equiv} -1 \xrightarrow{\times 4} 4^7 \overset{17}{\equiv} -4$$

بنابراین $n=3\ ,\ 7\ ,\ \dots$، پس $n=4k+3$، $(k\geq 0)$، الگوی توان‌هایی از ۴ می‌باشد که در تقسیم بر ۱۷ با ۴- هم‌نهشت می‌باشند.

$$n=4k+3 \xrightarrow{n \text{ دورقمی}} 10 \leq 4k+3 < 100$$
$$\Rightarrow k=2\ ,\ \dots\ ,\ 24 \Rightarrow \text{۲۳ مقدار}$$

(ریاضیات گسسته- آشنایی با نظریهٔ اعداد: صفحه‌های ۱۹ تا ۲۲)

۳۵- **گزینهٔ «۴»** *(سوگند روشنی)*

عدد داده شده مضرب ۹ است، پس طبق قاعدهٔ بخش‌پذیری بر ۹ داریم:

$$\overline{77a1a} \overset{9}{\equiv} 7+7+a+1+a \overset{9}{\equiv} 0 \Rightarrow 2a \overset{9}{\equiv} -15 \overset{9}{\equiv} -15+27 \overset{9}{\equiv} 12$$

$$\xrightarrow[(2\ ,\ 9)=1]{\div 2} a \overset{9}{\equiv} 6 \xrightarrow{0\leq a\leq 9} a=6$$

خواستهٔ سؤال: $6^6 \overset{42}{\equiv} ? \Rightarrow \begin{cases} 6^6 \overset{6}{\equiv} 0 \overset{6}{\equiv} -6 \\ 6^6 \overset{7}{\equiv} (-1)^6 \overset{7}{\equiv} 1 \overset{7}{\equiv} -6 \end{cases}$

$$\xrightarrow{[6\ ,\ 7]=42} 6^6 \overset{42}{\equiv} -6 \overset{42}{\equiv} 36$$

در نتیجه $6^6 \in [36]_{42}$.

(ریاضیات گسسته- آشنایی با نظریهٔ اعداد: صفحه‌های ۱۸ تا ۲۳)

۳۶- **گزینهٔ «۱»** *(مهرداد ملوندی)*

معادلهٔ سیالهٔ فوق در $\mathbb{Z}$ جواب دارد، پس: $\quad (*) \quad (P^2-1\ ,\ 9) \mid P$

از آنجا که $3^2=9$، پس مقدار $(P^2-1\ ,\ 9)$ یکی از سه مقدار ۱، ۳ یا ۹ می‌تواند باشد. اگر $P\neq 3$، در این صورت عدد اول P به صورت $3k+1$ یا $3k+2$ است و در این صورت:

$$P^2 - 1 = (P-1)(P+1)\begin{cases} \xrightarrow{P=3k+1} = 3k(3k+2) \\ \xrightarrow{P=3k+2} = 3(3k+1)(k+1) \end{cases}$$

یعنی به ازای $P \neq 3$، عدد $P^2 - 1$ مضرب ۳ است.

در نتیجه حاصل $(P^2 - 1, 9)$ یکی از دو مقدار ۳ یا ۹ است که از رابطهٔ (*) تنها عدد اول $P = 3$ می‌تواند قرار بگیرد که غیرقابل قبول است. پس فرض $P \neq 3$ غلط است و $P = 3$ می‌باشد و معادلهٔ سیاله به صورت زیر می‌شود:

$$8x + 9y = 3$$

$$\xrightarrow{\text{پیمانهٔ } 9} 8x \overset{9}{\equiv} 3 \Rightarrow -x \overset{9}{\equiv} 3 \Rightarrow x \overset{9}{\equiv} -3 \Rightarrow x = 9m - 3$$

به ازای $m = 11$، بزرگ‌ترین مقدار طبیعی دو رقمی x به دست می‌آید:

$$x_{max} = 9\times 11 - 3 = 96 \Rightarrow \text{مجموع ارقام} = 15$$

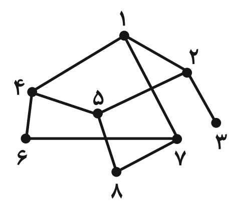
(ریاضیات گسسته- آشنایی با نظریهٔ اعداد: صفحه‌های ۲۴ تا ۲۹)

۳۷- گزینهٔ «۳» *(افشین خاصه‌خان)*

مطابق نمودار، رئوس را شماره‌گذاری می‌کنیم.

سه دور به طول ۵ وجود دارد:

۱۲۵۸۷۱ ، ۴۵۸۷۶۴ ، ۱۴۵۸۷۱



(ریاضیات گسسته- گراف و مدل‌سازی: صفحه‌های ۳۴ تا ۳۸)

۳۸- گزینهٔ «۳» *(علیرضا شریف‌خطیبی)*

تعداد یال‌های گراف کامل هم‌مرتبهٔ G برابر است با:

$$q(K_{10}) = \binom{10}{2} = \frac{10\times 9}{2} = 45$$

گراف G، ۲۰ یال کمتر از K_{10} دارد. برای رسم ۲۰ یال حداقل ۷ رأس لازم است $(q(K_7) = \binom{7}{2} = 21 > 20)$. پس از گراف کامل مرتبهٔ ۱۰، ۲۰ یال را به صورت فشرده، از یک مجموعهٔ ۷ رأسی جدا می‌کنیم. لذا سه رأس دیگر از درجه ۹ باقی خواهد ماند، که حداکثر تعداد رئوس ممکن است.

(ریاضیات گسسته- گراف و مدل‌سازی: صفحه‌های ۳۴ تا ۳۸)

۳۹- گزینهٔ «۴» *(آرین تفضلی‌زاده)*

در این گراف r- منتظم، رابطهٔ زیر برقرار است:

$$pr = 2q \xrightarrow{q=p+3} pr = 2(p+3) \Rightarrow pr - 2p = 6$$

$$p(r-2) = 6 \Rightarrow p = \frac{6}{r-2}$$

$$\begin{cases} r = 3 \Rightarrow p = 6 & \checkmark \\ r = 4 \Rightarrow p = 3 & \times \\ r = 5 \Rightarrow p = 2 & \times \\ r = 8 \Rightarrow p = 1 & \times \end{cases}$$

توجه داشته باشید که $0 \le r \le p - 1$.

(ریاضیات گسسته- گراف و مدل‌سازی: صفحه‌های ۳۵ تا ۴۰)

۴۰- گزینهٔ «۲» *(امیرحسین ابومحبوب)*

ابتدا عدد ۳۶۰ را به عامل‌های اول آن تجزیه می‌کنیم:

$$360 = 2^3 \times 3^2 \times 5$$

با توجه به این‌که یکی از عامل‌ها عدد ۵ است، پس $\Delta(G) \ge 5$.

درجات گرافی از مرتبهٔ ۶ با اعدادی که حاصل‌ضرب آن‌ها ۳۶۰ باشد، به صورت زیر است:

$$G: 5, 4, 3, 3, 2, 1$$

در این صورت داریم:

$$q(G) = \frac{5+4+3+3+2+1}{2} = 9$$

$$q(\bar{G}) = \frac{p(p-1)}{2} - q(G) = \frac{6\times 5}{2} - 9 = 6$$

$$\delta(G) + \Delta(\bar{G}) = p - 1 \Rightarrow 1 + \Delta(\bar{G}) = 5 \Rightarrow \Delta(\bar{G}) = 4$$

در نتیجه:

$$q(\bar{G}) + \Delta(\bar{G}) = 10$$

توجه: حاصل‌ضرب دنبالهٔ اعداد ۲ , ۲ , ۲ , ۳ , ۳ , ۵ نیز برابر ۳۶۰ است ولی این دنباله نمی‌تواند درجات رئوس گراف ساده باشد!

(ریاضیات گسسته- گراف و مدل‌سازی: صفحه‌های ۳۷ تا ۴۰)

فیزیک

۴۱- گزینهٔ «۲» *(حسام نادری)*

بررسی موارد:

الف) درست؛ جهت تقعر (گودی) نمودار $x-t$، علامت شتاب را نشان می‌دهد که در بازهٔ ۰ تا t_1، گودی به سمت پایین و در نتیجه علامت شتاب منفی و در خلاف جهت محور x است.

ب) نادرست؛ شیب خط واصل بین دو نقطه از نمودار $x-t$، سرعت متوسط را نشان می‌دهد که در نمودار داده شده، اندازهٔ شیب خط واصل دو لحظهٔ t_1 و t_2، بزرگ‌تر از اندازهٔ شیب خط واصل دو لحظهٔ t_3 و t_4 است.

پ) درست؛ بردار مکان زمانی تغییر جهت می‌دهد که اولاً $x=0$ و ثانیاً علامت x تغییر کند که تنها در لحظهٔ t_4 این اتفاق می‌افتد. دقت کنید که در لحظهٔ t_2، $x=0$ می‌شود ولی تغییر علامت نمی‌دهد.

ت) نادرست؛ جهت حرکت متحرک زمانی تغییر می‌کند که شیب خط مماس بر نمودار $x-t$ که بیانگر سرعت است، صفر شود و تغییر علامت بدهد. در نمودار داده شده در لحظات t_1، t_2 و t_3 این اتفاق رخ می‌دهد.

(فیزیک ۳- حرکت بر خط راست؛ صفحه‌های ۱ تا ۱۰)

۴۲- گزینهٔ «۲» *(مجتبی نکوئیان)*

برای به دست آوردن سرعت متوسط ($\vec{v}_{av}=\frac{\vec{d}}{\Delta t}$) در جابه‌جایی بین مکان‌های x_1 و x_2، چهار حالت زیر را می‌توان در نظر گرفت:

$$t_1 \le t \le t_2 : |v_{av_1}| = \frac{x_1-x_2}{2t'}$$

$$t_1 \le t \le t_3 : |v_{av_2}| = \frac{x_1-x_2}{5t'}$$

$$t_2 \le t \le t_4 : |v_{av_3}| = \frac{x_1-x_2}{4t'}$$

$$t_3 \le t \le t_4 : |v_{av_4}| = \frac{x_1-x_2}{t'}$$

ملاحظه می‌شود که $|v_{av_4}|$ بیشترین و $|v_{av_2}|$ کمترین اندازهٔ سرعت متوسط می‌باشند. بنابراین:

$$|v_{av_4}|-|v_{av_2}|=12 \Rightarrow \frac{4(x_1-x_2)}{5t'}=12 \Rightarrow \frac{x_1-x_2}{t'}=15\frac{m}{s}$$

و در نهایت می‌توان نوشت:

$$v_{av_3}=\frac{x_1-x_2}{4t'}=\frac{15}{4}\frac{m}{s}$$

(فیزیک ۳- حرکت بر خط راست؛ صفحه‌های ۱ تا ۱۰)

۴۳- گزینهٔ «۱» *(بهزاد آزادفر)*

طبق نمودار حرکت با سرعت ثابت است، پس:

$$x_A=v_At+x_{0A} \Rightarrow x_A=v_At-2$$

$$x_B=v_Bt+x_{0B} \Rightarrow x_B=v_Bt+4$$

دو متحرک در لحظهٔ $t=5s$ به هم می‌رسند:

$$x_A=x_B \xrightarrow{t=5s} 5v_A-2=5v_B+4$$

$$v_A-v_B=1/2\frac{m}{s}$$

فاصلهٔ ۲ متحرک در لحظهٔ $t=8s$ برابر است با:

$$|x_A-x_B|=|(v_At+x_{0A})-(v_Bt+x_{0B})|$$

$$=|8v_A-2-8v_B-4|=|8(v_A-v_B)-6|$$

$$=|8(1/2)-6|=|9/6-6|=3/6m$$

(فیزیک ۳- حرکت بر خط راست؛ صفحه‌های ۱۳ تا ۱۵)

۴۴- گزینهٔ «۴» *(زهره آقامحمدی)*

با توجه به نمودار مشخص است که حرکت متحرک A با سرعت ثابت و حرکت متحرک B با شتاب ثابت صورت می‌گیرد، در نتیجه سرعت متحرک A و شتاب متحرک B برابرند با:

$$v_A=20\frac{m}{s}$$

$$a_B=\frac{\Delta v}{\Delta t}=\frac{v_5-v_0}{5}=\frac{20-40}{5}=-4\frac{m}{s^2}$$

با داشتن شتاب متحرک B، با استفاده از معادلهٔ سرعت- زمان، لحظهٔ تغییر جهت متحرک B را که در آن سرعت متحرک صفر می‌شود، به دست می‌آوریم:

$$v=at+v_0 \xrightarrow[v_0=40\frac{m}{s}]{a=-4\frac{m}{s^2}} 0=-4t+40 \Rightarrow t=10s$$

سپس معادلهٔ حرکت هر دو متحرک را در SI، می‌نویسیم:

$$x_A=v_At+x_{0A} \xrightarrow[x_{0A}=-2m]{v_A=20\frac{m}{s}} x_A=20t-2 \qquad (1)$$

$$x_B=\frac{1}{2}at^2+v_{0B}t+x_0 \xrightarrow[x_{0B}=20m]{a=-4\frac{m}{s^2},\ v_{0B}=40\frac{m}{s}}$$

$$x_B=\frac{1}{2}\times(-4)t^2+40t+20 \Rightarrow x_B=-2t^2+40t+20 \qquad (2)$$

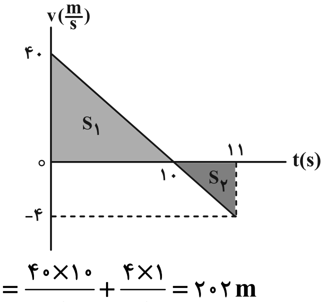
لحظه‌ای که دو متحرک به هم می‌رسند، مکان یکسانی دارند. بنابراین داریم:

$$x_A=x_B \xrightarrow{(1),(2)} 20t-2=-2t^2+40t+20$$

$$\Rightarrow 2t^2-20t-22=0 \Rightarrow t^2-10t-11=0$$

$$\Rightarrow (t+1)(t-11)=0 \Rightarrow \begin{cases} t=-1 & \text{غ ق ق} \\ t=11s \end{cases}$$

اکنون مسافت طی شده توسط متحرک B را از لحظهٔ صفر تا $t=11s$ به دست می‌آوریم. توجه کنید که چون متحرک B در لحظهٔ $t=10s$ تغییر جهت می‌دهد، مسافت طی شده برابر حاصل جمع قدرمطلق جابه‌جایی‌ها از لحظهٔ صفر تا $t=10s$ و $t=10s$ تا $t=11s$ است. با توجه به این‌که مساحت زیر نمودار سرعت- زمان، برابر جابه‌جایی است، داریم:

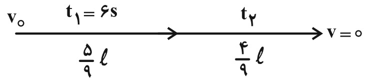


$$\ell=S_1+S_2=\frac{40\times 10}{2}+\frac{4\times 1}{2}=202m$$

(فیزیک ۳- حرکت بر خط راست؛ صفحه‌های ۱۳ تا ۲۱)

۴۵- **گزینهٔ «۴»** *(علیرضا جباری)*

چون حرکت بر مسیر مستقیم و بدون تغییر جهت است، جابه‌جایی و مسافت، برابر هستند.



رابطهٔ مستقل از سرعت اولیه (حرکت برعکس جهت شکل بالا) در حرکت با شتاب ثابت را یک بار برای کل مسیر و بار دیگر برای $\frac{4}{9}$ آخر مسیر می‌نویسیم و از تقسیم آن‌ها بر یکدیگر t_2 را به دست می‌آوریم:

$$\left.\begin{array}{l} \Delta x = -\frac{1}{2}at^2 + vt \xrightarrow[v=0\ ,\ \Delta x=\ell]{t=t_1+t_2} \\ \ell = -\frac{1}{2}a(t_1+t_2)^2 \\ \Delta x = -\frac{1}{2}at^2 + vt \xrightarrow[\Delta x=\ell-\frac{5}{9}\ell=\frac{4}{9}\ell]{t=t_2\ ,\ v=0} \\ \frac{4}{9}\ell = -\frac{1}{2}at_2^2 \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{\ell}{\frac{4}{9}\ell} = \frac{(t_1+t_2)^2}{t_2^2}$$

$$\Rightarrow \frac{9}{4} = \frac{(t_1+t_2)^2}{t_2^2} \xrightarrow{\text{جذر می‌گیریم}} \frac{3}{2} = \frac{t_1+t_2}{t_2}$$

$$\Rightarrow 3t_2 = 2t_1 + 2t_2 \Rightarrow t_2 = 2t_1 \xrightarrow{t_1=6s} t_2 = 12s$$

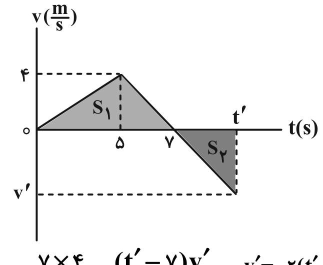
(فیزیک ۳- حرکت بر خط راست؛ صفحه‌های ۱۵ تا ۲۱)

۴۶- **گزینهٔ «۱»** *(علیرضا جباری)*

سرعت متحرک در لحظهٔ t' را با v' نشان می‌دهیم. شتاب متحرک در بازهٔ زمانی ۵s تا t' ثابت است، بنابراین می‌توانیم شتاب حرکت در بازهٔ زمانی ۵s تا ۷s را با شتاب حرکت در بازهٔ زمانی ۷s تا t' برابر قرار دهیم:

$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{0-4}{7-5} = \frac{v'-0}{t'-7} \Rightarrow -2 = \frac{v'}{t'-7} \Rightarrow v' = -2(t'-7)$$

سطح محصور بین نمودار سرعت و محور زمان، جابه‌جایی متحرک را نشان می‌دهد:



$$\Delta x = S_1 + S_2 = \frac{7\times 4}{2} + \frac{(t'-7)v'}{2} \xrightarrow{v'=-2(t'-7)}$$

$$\Delta x = 14 - \frac{2(t'-7)(t'-7)}{2} \Rightarrow \Delta x = 14-(t'-7)^2$$

اکنون رابطهٔ سرعت متوسط را برای بازهٔ زمانی صفر تا t' می‌نویسیم:

$$v_{av} = \frac{\Delta x}{\Delta t} \xrightarrow{v_{av}=0/5\frac{m}{s}} 0/5 = \frac{14-(t'-7)^2}{t'-0}$$

$$\Rightarrow 0/5t' = 14-(t'-7)^2 \Rightarrow t'^2 - 13/5t' + 35 = 0$$

$$(t'-10)(t'-3/5) = 0 \xrightarrow{t'>7} \begin{cases} t' = 3/5 & \text{غ ق ق} \\ t' = 10 & \text{ق ق} \end{cases}$$

(فیزیک ۳- حرکت بر خط راست؛ صفحه‌های ۱۵ تا ۲۱)

۴۷- **گزینهٔ «۲»** *(محمدکاظم منشادی)*

$$\left.\begin{array}{l} v_B^2 - v_A^2 = 2a(x_B - x_A) \\ v_C^2 - v_A^2 = 2a(x_C - x_A) \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{v_B^2 - v_A^2}{v_C^2 - v_A^2} = \frac{r}{\frac{8r}{9}}$$

$$\Rightarrow \frac{8}{9}v_B^2 - \frac{8}{9}v_A^2 = v_C^2 - v_A^2$$

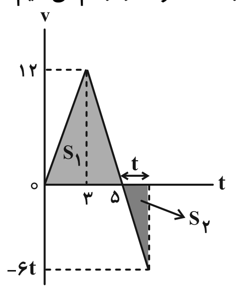
$$\Rightarrow v_C^2 = \frac{8}{9}v_B^2 + \frac{1}{9}v_A^2 = \frac{1}{9}(8v_B^2 + v_A^2)$$

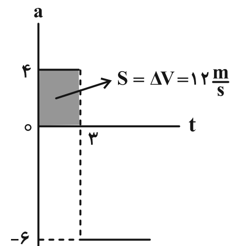
$$\Rightarrow v_C = \frac{1}{3}\sqrt{8v_B^2 + v_A^2}$$

(فیزیک ۳- حرکت بر خط راست؛ صفحهٔ ۱۸)

۴۸- **گزینهٔ «۲»** *(مهدی شریفی)*

سطح زیر نمودار شتاب- زمان نشان‌دهندهٔ تغییرات سرعت است، پس ابتدا به کمک نمودار شتاب- زمان، نمودار سرعت- زمان متحرک را رسم می‌کنیم.





چون مساحت زیر نمودار سرعت- زمان برابر جابه‌جایی است، فرض می‌کنیم t ثانیه بعد از لحظهٔ $t = 5s$ مقادیر S_1 و S_2 برابر می‌شوند تا $\Delta x = 0$ شود:

$$S_1 = \frac{5\times 12}{2} = 30m \Rightarrow |S_2| = 30m$$

$$|S_2| = 30 = \frac{t\times 6t}{2} \Rightarrow t = \sqrt{10}s$$

پس در لحظهٔ $t = 5 + \sqrt{10}s$، جابه‌جایی متحرک و در نتیجه سرعت متوسط آن تا این لحظه صفر می‌شود.

(فیزیک ۳- حرکت بر خط راست؛ صفحه‌های ۲۰ و ۲۱)

۴۹- **گزینهٔ «۳»** *(مهران اسماعیلی)*

با استفاده از معادلهٔ سرعت- زمان و معادلهٔ مکان- زمان متحرک، می‌توان شتاب و سرعت اولیهٔ متحرک را محاسبه کرد:

$$v = at + v_0 \xrightarrow[v=0]{t=2s} 0 = a\times 2 + v_0 \Rightarrow 2a + v_0 = 0 \qquad (1)$$

$$x = \frac{1}{2}at^2 + v_0t + x_0 \xrightarrow[t=6s\ ,\ x=0]{x_0=24m}$$

$$0 = \frac{1}{2}a\times 6^2 + v_0\times 6 + 24 \Rightarrow 18a + 6v_0 + 24 = 0 \qquad (2)$$

$$\xrightarrow{(1)\ ,\ (2)} \begin{cases} 2a + v_0 = 0 \\ 18a + 6v_0 = -24 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = -4\frac{m}{s^2} \\ v_0 = 8\frac{m}{s} \end{cases}$$

حال با استفاده از معادلهٔ سرعت- جابه‌جایی (مستقل از زمان) مکان متحرک را به دست می‌آوریم:

$$v^2 - v_0^2 = 2a(x - x_0) \xrightarrow[v_0=8\frac{m}{s},\ v=4\frac{m}{s}]{a=-4\frac{m}{s^2},\ x_0=24m}$$

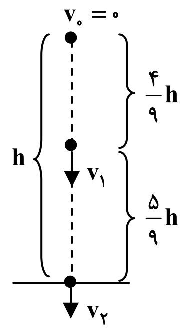
$$4^2 - 8^2 = 2(-4)(x-24) \Rightarrow 16 - 64 = -8(x-24)$$

$$\Rightarrow x = 30m$$

(فیزیک ۳- حرکت بر خط راست؛ صفحه‌های ۱۵ تا ۲۱)

۵۰- گزینهٔ «۲» (مهران اسماعیلی)

با انتخاب جهت مثبت به سمت پایین، معادلهٔ سرعت- جابه‌جایی (مستقل از زمان) را یک بار برای $\frac{4}{9}$ اول مسیر و بار دیگر برای کل مسیر می‌نویسیم:



$$\begin{cases} v_1^2 = 2g(\frac{4}{9}h) \\ v_2^2 = 2gh \end{cases} \Rightarrow \frac{v_1^2}{v_2^2} = \frac{2g(\frac{4}{9}h)}{2gh}$$

$$\Rightarrow \frac{v_1^2}{v_2^2} = \frac{4}{9} \Rightarrow \frac{v_1}{v_2} = \frac{2}{3} \Rightarrow v_1 = \frac{2}{3}v_2$$

چون حرکت گلوله سقوط آزاد و با شتاب ثابت و بدون تغییر جهت می‌باشد، تندی متوسط در $\frac{5}{9}$ آخر مسیر میانگین v_1 و v_2 است.

$$s_{av} = v_{av} = \frac{v_1 + v_2}{2} \xrightarrow[s_{av}=25\frac{m}{s}]{v_1=\frac{2}{3}v_2} 25 = \frac{\frac{2}{3}v_2 + v_2}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{5}{6}v_2 = 25 \Rightarrow v_2 = 30\frac{m}{s}$$

$$v_2^2 = 2gh \xrightarrow[g=10\frac{m}{s^2}]{v_2=30\frac{m}{s}} 30^2 = 2\times 10h \Rightarrow h = 45m$$

(فیزیک ۳- حرکت بر خط راست؛ صفحه‌های ۲۱ تا ۲۴)

۵۱- گزینهٔ «۲» (محمدرضا شریفی)

با استفاده از قانون دوم نیوتون داریم:

حالت اول: $F - mg = ma \Rightarrow F = m(g+a)$ (۱)

حالت دوم: $2F - mg = ma' \Rightarrow 2F = m(g+a')$ (۲)

$$\xrightarrow{(1),(2)} 2(mg+ma) = mg + ma'$$

$$2mg + 2ma = mg + ma'$$

$$mg = ma' - 2ma \Rightarrow g = a' - 2a$$

$$a' = g + 2a \Rightarrow a' > 2a$$

(فیزیک ۳- دینامیک و حرکت دایره‌ای؛ صفحه‌های ۳۲ تا ۳۴)

۵۲- گزینهٔ «۳» (حسین الهی)

زمانی چترباز به تندی حدی می‌رسد که $f_D = mg$ باشد.

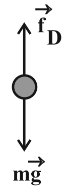
$$f_D = 120v^2 = 120\times 2^2 = 480N \xrightarrow{f_D=mg} 480 = m\times 10$$

$$\Rightarrow m = 48kg$$

$$F_{net} = ma \Rightarrow mg - f_D = ma$$

$$\Rightarrow 480 - (120\times 1^2) = 48\times a \Rightarrow 360 = 48\times a$$

$$\Rightarrow a = 7/5\frac{m}{s^2}$$



(فیزیک ۳- دینامیک و حرکت دایره‌ای؛ صفحه‌های ۳۲ تا ۳۷)

۵۳- گزینهٔ «۱» (امیراحمد میرسعید)

ابتدا نیروی عمودی سطح را به دست آورده و سپس μ_k و μ_s را می‌یابیم:

$$F_N = mg + 20 \Rightarrow F_N = 40N$$

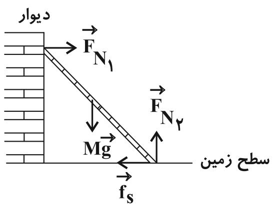
$$f_{s,max} = 30N \Rightarrow \mu_s F_N = 30 \Rightarrow 40\mu_s = 30 \Rightarrow \mu_s = \frac{3}{4}$$

$$f_k = 20N \Rightarrow \mu_k F_N = 20 \Rightarrow 40\mu_k = 20 \Rightarrow \mu_k = \frac{1}{2}$$

(فیزیک ۳- دینامیک و حرکت دایره‌ای؛ صفحه‌های ۳۷ تا ۴۳)

۵۴- گزینهٔ «۲» (زهره آقامحمدی)

نیروهای وارد بر نردبان، به صورت شکل زیر است که در آن F_{N_1}، نیروی عمودی سطح از طرف دیوار به نردبان، F_{N_2}، نیروی عمودی سطح از طرف سطح زمین به نردبان، mg نیروی وزن و f_s نیروی اصطکاک ایستایی بین سطح زمین و نردبان است. چون نردبان ساکن است، نیروهای وارد بر آن متوازن‌اند و داریم:



$$\begin{cases} F_{N_1} = f_s \\ F_{N_2} = Mg \end{cases}$$

با قرار گرفتن شخص روی نردبان، نیروی وزن و در نتیجه نیروی F_{N_2} افزایش می‌یابد، ولی نیروهای f_s (نیروی اصطکاک ایستایی بین سطح زمین و نردبان) و F_{N_1} (نیرویی که سطح دیوار به نردبان وارد می‌کند)، ثابت می‌مانند. نیرویی که سطح زمین به نردبان وارد می‌کند (R)، طبق رابطهٔ زیر افزایش می‌یابد:

$$R = \sqrt{F_{N_2}^2 + f_s^2} \xrightarrow{F_{N_2}\ \text{افزایش می‌یابد}} R\ \text{افزایش می‌یابد}$$

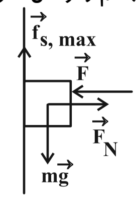
توجه کنید که با افزایش F_{N_2}، نیروی اصطکاک ایستایی بیشینه بین نردبان و سطح زمین افزایش می‌یابد و نردبان همچنان ساکن می‌ماند:

$$f_{s,max} = \mu_s F_{N_2}$$

(فیزیک ۳- دینامیک و حرکت دایره‌ای؛ صفحه‌های ۳۷ تا ۴۱)

۵۵- گزینهٔ «۲» *(مهران اسماعیلی)*

حداقل نیروی F برای زمانی است که جسم در آستانهٔ لغزش رو به پایین باشد، بنابراین نیروی اصطکاک بین جسم و دیوارهٔ آسانسور از نوع $f_{s,max}$ است. با رسم نیروهای وارد بر جسم و نوشتن قانون دوم نیوتون داریم:



در راستای افقی: $F_N = F$

در راستای قائم: $F_{net} = ma \Rightarrow f_{s,max} - mg = ma$

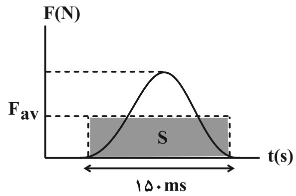
$$\xrightarrow[g=10\frac{N}{kg}]{m=2kg\ ,\ a=2\frac{m}{s^2}} f_{s,max} - 2\times10 = 2\times2 \Rightarrow f_{s,max} = 24N$$

$$f_{s,max} = \mu_s F_N \xrightarrow[\mu_s=0/6\ ,\ F_N=F]{f_{s,max}=24N} 24 = 0/6F \Rightarrow F = 40N$$

(فیزیک ۳- دینامیک و حرکت دایره‌ای: صفحه‌های ۳۵ تا ۴۳)

۵۶- گزینهٔ «۴» *(امیراحمد میرسعید)*

مساحت زیر نمودار $F-t$ برابر Δp می‌باشد و اگر مساحت شکل قابل محاسبه نبود، می‌توان مساحت مستطیل زیر را محاسبه کرده و برابر مساحت شکل قرار داد. پس می‌توان نوشت:



$$S = F_{av} \times 150\times10^{-3}$$

مساحت مستطیل برابر اندازهٔ تغییرات تکانه است. پس می‌توان نوشت:

$$\Delta p = S \Rightarrow 3 = F_{av}\times150\times10^{-3} \Rightarrow F_{av} = 20N$$

$$F_{max} = 2F_{av} = 2\times20 = 40N$$

(فیزیک ۳- دینامیک و حرکت دایره‌ای: صفحه‌های ۴۶ تا ۴۸)

۵۷- گزینهٔ «۲» *(مسعود خندانی)*

بررسی موارد:

الف) نادرست؛ شیب خط مماس بر نمودار $p-t$ همان نیروی خالص است که فقط یک مرتبه تغییر علامت (و جهت) داده است.

ب) نادرست؛ زیرا متحرک تغییر جهت داده است (در لحظات t_1 و t_4) و بنابراین مسافت طی شده و اندازهٔ جابه‌جایی برابر نیستند.

پ) درست؛ چون شیب خط مماس بر نمودار $(F_{net} = ma)$ ثابت است پس حرکت با شتاب ثابت است.

(فیزیک ۳- دینامیک و حرکت دایره‌ای: صفحه‌های ۴۶ تا ۴۸)

۵۸- گزینهٔ «۱» *(محمود منصوری)*

ابتدا رابطهٔ شتاب گرانشی را براساس چگالی محاسبه می‌کنیم:

$$g = G\frac{M}{R^2} \xrightarrow{m=\rho.V} g = G\frac{\rho.V}{R^2} \xrightarrow{V=\frac{4}{3}\pi R^3} g = \frac{\frac{4}{3}G.\rho.\pi R^3}{R^2}$$

$$\Rightarrow g = \frac{4}{3}G\rho\pi R$$

حال مقدار شتاب سیاره (g_s) را به دست می‌آوریم:

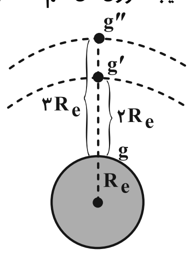
$$\frac{g_s}{g_e} = \frac{\rho_s}{\rho_e}\times\frac{R_s}{R_e} \xrightarrow[R_s=\frac{1}{2}R_e]{\rho_s=6\rho_e\ ,\ g_e=10\frac{N}{kg}}$$

$$\frac{g_s}{10} = \frac{6\rho_e}{\rho_e}\times\frac{\frac{1}{2}R_e}{R_e} \Rightarrow g_s = 10\times6\times\frac{1}{2} = 30\frac{N}{kg}$$

(فیزیک ۳- دینامیک و حرکت دایره‌ای: صفحه‌های ۵۳ تا ۵۶)

۵۹- گزینهٔ «۱» *(علیرضا جباری)*

با تغییر مدار ماهواره، جرم آن عوض نمی‌شود اما هر چه از زمین دور شود، شتاب گرانش کاهش و در نتیجه، وزن آن هم کاهش می‌یابد.



$$12800km = 2\times6400km = 2R_e$$

$$25600km = 4\times6400km = 4R_e$$

$$\frac{g'}{g} = (\frac{r}{r'})^2 \xrightarrow[r'=R_e+2R_e]{r=R_e} \frac{g'}{g} = (\frac{R_e}{3R_e})^2 = \frac{1}{9} \Rightarrow g' = \frac{g}{9}$$

$$\frac{g''}{g} = (\frac{r}{r''})^2 \xrightarrow[r''=4R_e]{r=R_e} \frac{g''}{g} = (\frac{R_e}{4R_e})^2 = \frac{1}{16} \Rightarrow g'' = \frac{g}{16}$$

تغییر وزن ماهواره، بین این دو مدار به صورت زیر است:

$$W'' - W' = mg'' - mg' = m(g'' - g') = m(\frac{g}{16} - \frac{g}{9})$$

$$\xrightarrow[m=144kg]{g=10\frac{N}{kg}} W'' - W' = 144(\frac{10}{16} - \frac{10}{9}) = 90 - 160 = -70N$$

علامت منفی نشان می‌دهد که وزن ماهواره، کاهش یافته است.

(فیزیک ۳- دینامیک و حرکت دایره‌ای: صفحه‌های ۵۳ تا ۵۶)

۶۰- گزینهٔ «۱» *(زهره آقامحمدی)*

نیروی مرکزگرای وارد بر ماهواره در گردش به دور زمین، همان نیروی گرانش است. بنابراین داریم:

$$F_c = W \Rightarrow \frac{mv^2}{r} = G\frac{mM_e}{r^2} \Rightarrow v^2 \propto \frac{1}{r} \Rightarrow (\frac{v_A}{v_B})^2 = \frac{r_B}{r_A} \quad (1)$$

چون تندی ماهوارهٔ A، ۲۰ درصد بیشتر از تندی ماهوارهٔ B است، $(v_A = 1/2v_B = \frac{6}{5}v_B)$ داریم:

$$\xrightarrow{(1)} (\frac{6}{5})^2 = \frac{r_B}{r_A} \Rightarrow \frac{r_B}{r_A} = \frac{36}{25} \quad (2)$$

از طرفی شتاب گرانش در فاصلهٔ r از مرکز زمین برابر است با:

$$g = \frac{GM_e}{r^2} \Rightarrow \frac{g_A}{g_B} = (\frac{r_B}{r_A})^2 \xrightarrow{(2)} \frac{g_A}{g_B} = (\frac{36}{25})^2 = 2/07 \simeq 2$$

(فیزیک ۳- دینامیک و حرکت دایره‌ای: صفحه‌های ۵۱ تا ۵۶)

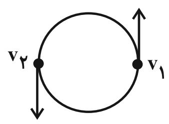
۶۱- **گزینهٔ «۱»** *(مهدی شریفی)*

ابتدا شتاب متوسط را در $10s$ اول پیدا می‌کنیم:

محیط دایره $= 2\pi r = 2\times 3\times 20 = 120m$

مسافت طی شده: $\ell = s.t = 6\times 10 = 60m$

$$\frac{\ell}{2\pi r}=\frac{60}{120}=\frac{1}{2}$$ (متحرک نصف محیط دایره را پیموده است.)



$$|\Delta v| = |v_2+v_1|$$

$$a_{av}=\frac{\Delta v}{\Delta t}=\frac{12}{10}=1/2\frac{m}{s^2}$$

$$a_c=\frac{v^2}{r}=\frac{6^2}{20}=\frac{36}{20}=\frac{18}{10}=1/8\frac{m}{s^2}$$ (شتاب مرکزگرا)

$$\frac{a_{av}}{a_c}=\frac{1/2}{1/8}=\frac{12}{18}=\frac{2}{3}$$

(فیزیک ۳- دینامیک و حرکت دایره‌ای: صفحه‌های ۴۸ تا ۵۳)

۶۲- **گزینهٔ «۲»** *(علی برزگر)*

نیروی فنر نقش نیروی مرکزگرا را ایفا می‌کند و چون فنر در نهایت با طول $80cm$ می‌چرخد، پس شعاع مسیر دایره‌ای برابر $80cm$ می‌شود. لذا می‌توان نوشت:

$$F_{\text{فنر}}=F_{\text{مرکزگرا}}\Rightarrow kx=\frac{mv^2}{r}$$

طبق رابطهٔ $T=\frac{t}{n}$ می‌توان نوشت:

$$T=\frac{t}{n}=\frac{60}{30}=2s$$

از طرفی داریم:

$$v=r(\frac{2\pi}{T})\xrightarrow[T=2s]{r=0/8m}v=0/8\times(\frac{2\pi}{2})=0/8\pi\frac{m}{s}$$

$$\Rightarrow v^2=0/64\pi^2$$

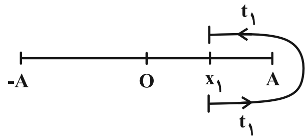
با جای‌گذاری در رابطهٔ اول خواهیم داشت:

$$kx=\frac{mv^2}{r}\xrightarrow[r=\frac{8}{10}m\ ,\ m=\frac{1}{2}kg]{x=\frac{2}{10}m\ ,\ v^2=0/64\pi^2}k(\frac{2}{10})=\frac{(\frac{1}{2})(\frac{64}{100}\pi^2)}{\frac{8}{10}}$$

$$k=2\pi^2\xrightarrow{\pi^2=10}k=20\frac{N}{m}$$

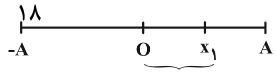
(فیزیک ۳- دینامیک و حرکت دایره‌ای: صفحه‌های ۴۳ تا ۵۳)

۶۳- **گزینهٔ «۱»** *(امیراحمد میرسعید)*



حداقل زمان یعنی طبق شکل بالا از x_1 به A رفته و بازمی‌گردد.

$$2t_1=\frac{T}{9}\Rightarrow t_1=\frac{T}{18}$$



$$\frac{T}{4}-\frac{T}{18}=\frac{7T}{36}$$

(فیزیک ۳- نوسان و موج: صفحه‌های ۶۳ تا ۶۵)

۶۴- **گزینهٔ «۲»** *(زهره آقامحمدی)*

ابتدا با توجه به معادلهٔ مکان- زمان نوسانگر، دوره تناوب را محاسبه می‌کنیم:

$$\begin{cases}x=A\cos\omega t\\ x=0/01\cos 40\pi t\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}A=0/01m\\ \omega=40\pi\end{cases}\xrightarrow{\omega=\frac{2\pi}{T}}\frac{2\pi}{T}=40\pi$$

$$\Rightarrow T=\frac{1}{20}s$$

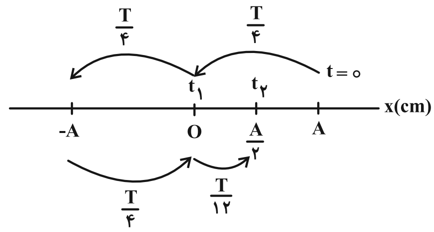
اکنون لحظهٔ t_1 و بازهٔ $\Delta t=t_2-t_1$ را برحسب T محاسبه می‌کنیم:

$$\frac{t_1}{T}=\frac{\frac{1}{80}}{\frac{1}{20}}=\frac{1}{4}\Rightarrow t_1=\frac{T}{4}$$

$$\Delta t=t_2-t_1=\frac{5}{120}-\frac{1}{80}=\frac{7}{240}s\Rightarrow\frac{\Delta t}{T}=\frac{\frac{7}{240}}{\frac{1}{20}}=\frac{7}{12}$$

$$\Rightarrow\Delta t=\frac{7T}{12}=\frac{T}{2}+\frac{T}{12}$$

در نتیجه مسیر حرکت نوسانگر به صورت زیر است:



$$\ell=2A+\frac{A}{2}=2/5A$$

$$s_{av}=\frac{\ell}{\Delta t}\xrightarrow[\Delta t=\frac{7}{240}s]{\ell=2/5A\ ,\ A=0/01m}s_{av}=\frac{2/5\times 0/01}{\frac{7}{240}}=\frac{6}{7}\frac{m}{s}$$

(فیزیک ۳- نوسان و موج: صفحه‌های ۶۳ تا ۶۵)

۶۵- **گزینهٔ «۲»** *(مجتبی نکوئیان)*

با توجه به معادلهٔ مکان- زمان در حرکت هماهنگ ساده داریم:

$$x=A\cos(\frac{2\pi}{T}t)\xrightarrow[t=\frac{7}{5}s]{x=-\frac{\sqrt{3}}{2}A}-\frac{\sqrt{3}}{2}A=A\cos(\frac{2\pi}{T}\times\frac{7}{5})$$

$$\Rightarrow\frac{7\pi}{6}=\frac{14\pi}{5T}\Rightarrow T=\frac{12}{5}s\Rightarrow\omega=\frac{2\pi}{T}=\frac{5\pi}{6}\frac{rad}{s}$$

سپس مکان نوسانگر را در لحظات t_1 و t_2 به دست می‌آوریم:

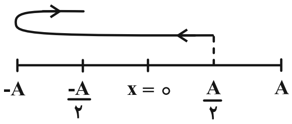
$$t=t_1=0/4s\Rightarrow x_1=A\cos(\frac{5\pi}{6}\times\frac{2}{5})$$

$$=A\cos(\frac{\pi}{3})=\frac{A}{2}$$ (ربع اول)

$$t=t_2=1/6s\Rightarrow x_2=A\cos(\frac{5\pi}{6}\times\frac{8}{5})$$

$$=A\cos(\frac{4\pi}{3})=-\frac{A}{2}$$ (ربع سوم)

و در نهایت با استفاده از مسیر حرکت نوسانگر، تندی متوسط و سرعت متوسط آن را به صورت زیر محاسبه می‌کنیم:



$$\begin{cases} s_{av} = \frac{\ell}{\Delta t} = \frac{۲A}{۱/۲} = \frac{۵A}{۳} \\ v_{av} = \frac{d}{\Delta t} = -\frac{A}{۱/۲} = -\frac{۵A}{۶} \end{cases} \Rightarrow \frac{s_{av}}{|v_{av}|} = ۲$$

(فیزیک ۳- نوسان و موج؛ صفحه‌های ۶۳ تا ۶۵)

۶۶- گزینهٔ «۱» *(مهدی شریفی)*

در حرکت هماهنگ ساده، انرژی مکانیکی همواره ثابت است، پس:

$$E = \frac{۱}{۲} m A^{۲} \omega^{۲} \xrightarrow[A=۰/۰۲m\ ,\ \omega=۱۰۰\frac{rad}{s}]{m=۴۰g=۴۰\times۱۰^{-۳}kg}$$

$$E = \frac{۱}{۲}\times۴۰\times۱۰^{-۳}\times۴\times۱۰^{-۴}\times۱۰^{۴} = ۸\times۱۰^{-۲}J$$

(فیزیک ۳- نوسان و موج؛ صفحه‌های ۶۲ تا ۶۸)

۶۷- گزینهٔ «۱» *(محسن سلماسی‌وند)*

انرژی پتانسیل زمانی بیشترین مقدار خواهد بود که نوسانگر در نقاط بازگشت باشد، پس نوسانگر در نقطهٔ A یا $-A$ قرار دارد. در این شرایط نیرو نیز بیشینه می‌شود چون نیرو بیشینه است، پس شتاب نیز بیشینه خواهد بود. همچنین در A یا $-A$ مکان جسم نیز بیشینه است.

(فیزیک ۳- نوسان و موج؛ صفحه‌های ۶۲ تا ۶۸)

۶۸- گزینهٔ «۳» *(سیدمحمدعلی موسوی)*

$$T = ۲\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}} \Rightarrow \frac{T_۲}{T_۱} = \sqrt{\frac{\ell_۲}{\ell_۱}}$$

$$\frac{۳}{۵} = \sqrt{\frac{\ell_۲}{\ell_۱}} \Rightarrow \frac{\ell_۲}{\ell_۱} = \frac{۹}{۲۵}$$

$$\Delta\ell = \ell_۲ - \ell_۱ = \frac{۹}{۲۵}\ell_۱ - \ell_۱ = -\frac{۱۶}{۲۵}\ell_۱$$

$$\Rightarrow \left|\frac{\Delta\ell}{\ell_۱}\right|\times۱۰۰ = \frac{۱۶}{۲۵}\times۱۰۰ = ۶۴\%$$

(فیزیک ۳- نوسان و موج؛ صفحهٔ ۶۷)

۶۹- گزینهٔ «۳» *(مهران اسماعیلی)*

اگر آونگ در مدت t، N نوسان کامل انجام دهد، دورهٔ نوسان آونگ برابر است با:

$$T = \frac{t}{N}$$

پس می‌توان نوشت:

$$T = \frac{t}{N} \Rightarrow \frac{T_۲}{T_۱} = \frac{N_۱}{N_۲} = \frac{۵۲}{۲۰} = ۲/۶s$$

از طرفی با توجه به رابطهٔ شتاب گرانش می‌توان رابطهٔ مقایسه‌ای شتاب گرانش با فاصله را نوشت:

$$g = G\frac{M_e}{r^{۲}} \Rightarrow \frac{g_۱}{g_۲} = \left(\frac{r_۲}{r_۱}\right)^{۲} \xrightarrow[r_۲=R_e+R_e=۲R_e]{r_۱=R_e}$$

$$\frac{g_۱}{g_۲} = \left(\frac{۲R_e}{R_e}\right)^{۲} = ۴$$

حال با توجه به رابطهٔ دورهٔ تناوب آونگ ساده داریم:

$$T = ۲\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}} \Rightarrow \frac{T_۲}{T_۱} = \sqrt{\frac{\ell_۲}{\ell_۱}\times\frac{g_۱}{g_۲}} \xrightarrow{\frac{T_۲}{T_۱}=\frac{N_۱}{N_۲}}$$

$$\frac{N_۱}{N_۲} = \sqrt{\frac{\ell_۲}{\ell_۱}\times\frac{g_۱}{g_۲}} \xrightarrow[\frac{g_۱}{g_۲}=۴]{\frac{N_۱}{N_۲}=۲/۶} ۲/۶ = \sqrt{\frac{\ell_۲}{\ell_۱}\times۴}$$

$$\Rightarrow ۱/۳ = \sqrt{\frac{\ell_۲}{\ell_۱}} \Rightarrow \frac{\ell_۲}{\ell_۱} = ۱/۶۹ \Rightarrow \ell_۲ = ۱/۶۹\ell_۱$$

$$\text{درصد افزایش طول} = \frac{\Delta\ell}{\ell_۱}\times۱۰۰ = \frac{\ell_۲-\ell_۱}{\ell_۱}\times۱۰۰$$

$$= \frac{۱/۶۹\ell_۱ - \ell_۱}{\ell_۱}\times۱۰۰ = ۶۹\%$$

(فیزیک ۳- ترکیبی؛ صفحه‌های ۵۳ تا ۵۶ و ۶۷)

۷۰- گزینهٔ «۱» *(علیرضا جباری)*

طول پاره‌خط نوسانی، ۲ برابر دامنه است. پس داریم:

$$۱۶ = ۲A \Rightarrow A = ۸cm$$

رابطهٔ شتاب برحسب مکان برای نوسانگری که روی محور x و در طرفین مبدأ مکان، نوسان می‌کند، به صورت $a = -\omega^{۲}x$ است.

$$a = -\omega^{۲}x \xrightarrow[a=-۱۲/۸\frac{m}{s^{۲}}]{x=A=۸cm} -۱۲/۸ = -\omega^{۲}\times۸\times۱۰^{-۲}$$

$$\Rightarrow \omega^{۲} = \frac{۱۲۸۰}{۸} = ۱۶۰$$

$$\omega = \frac{۲\pi}{T} \Rightarrow \omega^{۲} = \frac{۴\pi^{۲}}{T^{۲}} \xrightarrow[\omega^{۲}=۱۶۰]{\pi^{۲}=۱۰} ۱۶۰ = \frac{۴\times۱۰}{T^{۲}}$$

$$\Rightarrow T^{۲} = \frac{۱}{۴} \Rightarrow T = \frac{۱}{۲}s$$

برای آن‌که آونگ با نوسانگر فوق تشدید حاصل کند باید دورهٔ نوسان آن‌ها یکسان باشد.

$$T = ۲\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}} \xrightarrow[g=\pi^{۲}]{T=\frac{۱}{۲}s} \frac{۱}{۲} = ۲\pi\sqrt{\frac{\ell}{\pi^{۲}}} \Rightarrow \frac{۱}{۴} = \sqrt{\ell}$$

$$\Rightarrow \ell = \frac{۱}{۱۶}m \Rightarrow \ell = \frac{۱۰۰}{۱۶}cm = ۶/۲۵cm$$

(فیزیک ۳- نوسان و موج؛ صفحه‌های ۶۷ تا ۶۹)

شیمی

۷۱- **گزینهٔ «۳»** *(حسین شاهسواری)*

به جز مورد آخر، بقیهٔ موارد نادرست هستند.

بررسی موارد نادرست:

مورد اول: شبیه به صابون (نه خود صابون)

مورد دوم: رعایت بهداشت فردی و همگانی (نه صرفاً یک مرحله از پیشگیری)

مورد سوم: وبا هنوز هم می‌تواند خطرناک باشد

مورد چهارم: میانگین (نه دستِ کم)

(شیمی ۳- مولکول‌ها در خدمت تندرستی: صفحه‌های ۲ و ۳)

۷۲- **گزینهٔ «۱»** *(محمدرضا پورجاوید)*

در بین مخلوط‌های گفته شده شیر، سس مایونز و مخلوط آب و روغن و صابون همگی کلوئید هستند. از طرفی مخلوط آب و قند نیز یک محلول است. از آنجا که محلول‌ها و کلوئیدها همگی مخلوط‌هایی پایدار هستند، در بین گزینه‌های داده شده ۳ کلوئید و ۴ مخلوط پایدار وجود دارند.

(شیمی ۳- مولکول‌ها در خدمت تندرستی: صفحه‌های ۶ و ۷)

۷۳- **گزینهٔ «۴»** *(محمد عظیمیان‌زواره)*

$$۲RCOO^-Na^+(aq) + MgCl_۲(aq) \rightarrow (RCOO)_۲Mg(s) + ۲NaCl(aq)$$

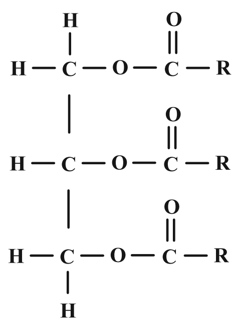
$$۵۳/۴g\ (RCOO)_۲Mg = ۰/۲mol\ RCOO^-Na^+ \times \frac{۱mol\ (RCOO)_۲Mg}{۲mol\ RCOO^-Na^+} \times \frac{a\,g\ (RCOO)_۲Mg}{۱mol\ (RCOO)_۲Mg}$$

$$\Rightarrow a = ۵۳۴g \Rightarrow \text{جرم مولی} = ۵۳۴g.mol^{-۱}$$

$$a = ۲R + ۸۸ + ۲۴ = ۵۳۴ \Rightarrow R = ۲۱۱g.mol^{-۱}$$

$$۱۴n + ۱ = ۲۱۱ \Rightarrow n = ۱۵ \Rightarrow C_{۱۵}H_{۳۱}$$

با توجه به ساختار استرهای سه عاملی و فرمول R $(C_{۱۵}H_{۳۱})$ فرمول مولکولی این استر به صورت $C_{۵۱}H_{۹۸}O_۶$ خواهد بود.

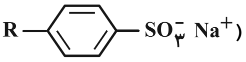


(شیمی ۳- مولکول‌ها در خدمت تندرستی: صفحه‌های ۵، ۸ و ۹)

۷۴- **گزینهٔ «۲»** *(امیرمسعود حسینی)*

با شستشوی پارچهٔ نخی با صابون آنزیم‌دار در دمای $۴۰^\circ C$، درصد لکهٔ چربی باقی‌مانده روی پارچه به صفر می‌رسد.

بررسی موارد نادرست:

۱) با توجه به ساختار کلی پاک‌کننده‌های غیرصابونی () حداقل سه پیوند $C = C$ در ساختار آن‌ها وجود دارد و اگر زنجیر هیدروکربنی سیرشده نباشد و پیوند $C = C$ داشته باشد، تعداد این پیوندها بیشتر از ۳ می‌شود.

۳) نمک‌های منیزیم یا کلسیم مربوط به یک پاک‌کنندهٔ غیرصابونی در آب محلول بوده و تولید رسوب نمی‌کند.

۴) برای افزایش خاصیت ضدعفونی‌کنندگی و میکروب‌کشی صابون باید ترکیبات شیمیایی کلردار اضافه کرد.

(شیمی ۳- مولکول‌ها در خدمت تندرستی: صفحه‌های ۸ تا ۱۲)

۷۵- **گزینهٔ «۱»** *(امیرعلی بیات)*

با توجه به رابطهٔ α داریم:

$$\alpha = \frac{[H^+]}{[H^+] + [HX]} = \frac{۲\times۱۰^{-۳}}{۲\times۱۰^{-۳} + ۱/۶\times۱۰^{-۲}} = \frac{۱}{۹} \simeq ۰/۱۱$$

حال می‌دانیم که:

$$K_a = \frac{[H^+][X^-]}{[HX]} = \frac{[H^+]^۲}{[HX]} = \frac{(۲\times۱۰^{-۳})^۲}{(۱/۶\times۱۰^{-۲})} = \frac{۱}{۴۰۰۰}$$

$$= ۰/۲۵\times۱۰^{-۳} = ۲/۵\times۱۰^{-۴}mol.L^{-۱}$$

(شیمی ۳- مولکول‌ها در خدمت تندرستی: صفحه‌های ۱۹ تا ۲۳)

۷۶- **گزینهٔ «۲»** *(امیر حاتمیان)*

موارد (الف) و (ت) نادرست هستند.

بررسی عبارت‌ها:

الف) محلول HA یک اسید قوی و محلول HB یک اسید ضعیف است و سرعت واکنش اسید با فلز در شرایط یکسان به قدرت اسیدی (K_a) وابسته است. بنابراین سرعت واکنش محلول HA بیشتر است.

ب) محلول‌های HA و HB به ترتیب می‌توانند HI و HF باشند لذا داریم:

$${}_{۵۳}I^- \rightarrow {}_{۵۴}Xe \quad \text{و} \quad {}_{۹}F^- \rightarrow {}_{۱۰}Ne$$

پ) یونش اسیدهای ضعیف یک فرایند تعادلی و یونش اسیدهای قوی یک فرایند یک‌طرفه و غیرتعادلی است.

ت) محلول HB یک الکترولیت ضعیف است و غیرالکترولیت ماده‌ای است که در اثر انحلال یونی تولید نکند.

(شیمی ۳- مولکول‌ها در خدمت تندرستی: صفحه‌های ۱۶ تا ۲۳)

۷۷- **گزینهٔ «۱»** *(سعید تیزرو)*

گزینهٔ «۲»: دقت کنید مطابق جدول صفحهٔ ۲۳ کتاب درسی، $HNO_۳$ در بین اسیدهای قوی ضعیف‌تر از سایرین است.

(شیمی ۳- مولکول‌ها در خدمت تندرستی: صفحه‌های ۲۳ و ۲۴)

۷۸- **گزینهٔ «۱»** *(امیرمسعود حسینی)*

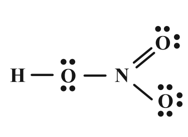
تنها عبارت دوم درست است.

بررسی عبارت‌ها:

عبارت اول: یونش فرایندی است که در آن یک ترکیب مولکولی (فاقد یون در ساختار خود) در آب به یون‌های مثبت و منفی تبدیل می‌شود.

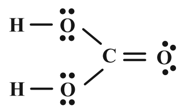
عبارت دوم: اسیدهای باران اسیدی شامل:

- نیتریک اسید (HNO_3) ← تک پروتون‌دار



- سولفوریک اسید (H_2SO_4) ← دو پروتون‌دار

اسید باران معمولی ← H_2CO_3



عبارت سوم: در یک سامانهٔ خنثی همواره و در هر دمایی $[H^+]=[OH^-]$ است و در دمای اتاق $(25^\circ C)$، $[H^+]=[OH^-]=10^{-7}\,mol.L^{-1}$ است. بنابراین در این دما $(25^\circ C)$، pH سامانه خنثی برابر است با:

$$pH=-\log[H^+]=-\log 10^{-7}=7$$

بدیهی است که با تغییر دما، pH سامانه خنثی نیز تغییر می‌کند.

عبارت چهارم: محلول آبی ترکیب اتانول (C_2H_5OH) علی‌رغم داشتن پیوند هیدروژنی قابلیت عبور برق را ندارد.

(شیمی ۳- مولکول‌ها در خدمت تندرستی: صفحه‌های ۱۶ تا ۲۷)

۷۹- **گزینهٔ «۳»** *(امیر حاتمیان)*

موارد (ب) و (ت) نادرست هستند.

بررسی عبارت‌ها:

الف) HSO_4^- اسید قوی‌تری است؛ یعنی بیشتر یونیده می‌شود و درجهٔ یونش آن بیشتر است.

ب) محلول اسیدهای ضعیف (مانند HF) نمونه‌ای از سامانه‌های تعادلی هستند که در لحظه تعادل در آن سرعت واکنش رفت (یونش HF) با سرعت واکنش برگشت (ترکیب شدن F^- و H^+) برابر است.

پ) $K_a(HSO_4^-)>K_a(HF)\xrightarrow{\text{در شرایط یکسان}}[SO_4^{2-}]>[F^-]$

ت) HSO_4^- اسید قوی‌تری از HF است. چون K_a آن بزرگ‌تر است در نتیجه در شرایط یکسان بیشتر یونیده شده و غلظت یون‌های تولید شدهٔ آن بیشتر است. به همین دلیل محلول HSO_4^- نسبت به محلول HF رسانایی الکتریکی بیشتری دارد.

ث) HF اسید ضعیف‌تری است، لذا کمتر یونش یافته و H^+ کمتری تولید می‌کند.

(شیمی ۳- مولکول‌ها در خدمت تندرستی: صفحه‌های ۱۶ تا ۲۴)

۸۰- **گزینهٔ «۲»** *(یاسر راش)*

ابتدا با استفاده از pH، غلظت یون هیدرونیوم را حساب می‌کنیم:

$$pH=1/7\Rightarrow[H^+]=10^{-1/7}=10^{-2}\times10^{0/3}=0/02\,mol.L^{-1}$$

حالا با استفاده از ثابت یونش و $[H^+]$، غلظت مولی اسید (M) را به دست می‌آوریم:

$$HA(aq)\rightleftharpoons H^+(aq)+A^-(aq)$$

$$\Rightarrow K_a=\frac{[H^+][A^-]}{M-[H^+]}\xrightarrow{[H^+]=[A^-]}$$

$$0/05=\frac{(0/02)^2}{M-0/02}\Rightarrow M=0/028\,mol.L^{-1}$$

در ادامه با استفاده از رابطهٔ «$M=\frac{10ad}{\text{جرم مولی}}$»، درصد جرمی HA در محلول را حساب می‌کنیم:

$$0/028=\frac{10\times a\times1/12}{120}\Rightarrow a=0/3\%$$

(شیمی ۳- مولکول‌ها در خدمت تندرستی: صفحه‌های ۲۰ تا ۲۷)

۸۱- **گزینهٔ «۳»** *(محمدرضا جمشیدی)*

$$1)\ HX\to H^++X^-\xrightarrow{\text{قوی}}[H^+]_1=M$$

$$2)\ HY\rightleftharpoons H^++Y^-\xrightarrow{\text{ضعیف}}[H^+]_2=M\alpha$$

$$\frac{\text{شمار ذرات یونیده نشده}}{\text{شمار یون‌ها}}=\frac{[HY]}{[H^+]+[Y^-]}=\frac{M-M\alpha}{2M\alpha}=3/5$$

$$\xrightarrow{\text{حذف } M}\alpha=\frac{1}{8}=0/125\Rightarrow12/5\%$$

$$pH_{(2)}=4/3\Rightarrow[H^+]=10^{-4/3}=10^{-5}\times10^{0/7}$$

$$=5\times10^{-5}\,mol.L^{-1}$$

$$[H^+]_2=M\alpha\Rightarrow5\times10^{-5}=M\times\frac{1}{8}\Rightarrow M=4\times10^{-4}\,mol.L^{-1}$$

$$pH_1=-\log[H^+]_1=-\log(4\times10^{-4})=4-\log4=3/4$$

(شیمی ۳- مولکول‌ها در خدمت تندرستی: صفحه‌های ۱۸، ۱۹، ۲۴، ۲۵ و ۲۶)

۸۲- **گزینهٔ «۴»** *(هادی مهدی‌زاده)*

با توجه به این‌که pH اسید HB دو واحد کمتر از pH اسید HA است، پس غلظت یون هیدرونیوم در اسید HB، ۱۰۰ برابر غلظت یون هیدرونیوم در اسید HA خواهد بود.

$$[H^+]=10^{-pH}\Rightarrow\frac{[H^+]_{HB}}{[H^+]_{HA}}=\frac{10^{-x}}{10^{-(x+2)}}=10^2$$

$$[H^+]=M.\alpha\Rightarrow\frac{[H^+]_{HB}}{[H^+]_{HA}}=\frac{\alpha_{HB}\times M_{HB}}{\alpha_{HA}\times M_{HA}}$$

$$\Rightarrow ۱۰^{۲} = \frac{\frac{۶/۶}{۱۰۰}\times a}{\frac{۲/۲}{۱۰۰}\times b} \Rightarrow ۱۰^{۲} = \frac{۶۶\times ۱۰^{-۳}a}{۲۲\times ۱۰^{-۳}b}$$

$$\Rightarrow ۱۰^{۲} = ۳\frac{a}{b} \Rightarrow \frac{a}{b} = \frac{۱۰۰}{۳}$$

(شیمی ۳- مولکول‌ها در خدمت تندرستی؛ صفحه‌های ۱۸ تا ۲۵)

۸۳- **گزینهٔ «۲»** *(رسول عابدینی‌زواره)*

$$NaOH + HA \rightarrow NaA + H_2O$$

$$?\ mol\ HA = ۳/۲g\ NaOH\ \text{محلول} \times \frac{۲۵g\ NaOH\ \text{خالص}}{۱۰۰g\ NaOH\ \text{محلول}}$$

$$\times \frac{۱mol\ NaOH}{۴۰g\ NaOH} \times \frac{۱mol\ HA}{۱mol\ NaOH} = ۰/۰۲mol\ HA$$

$$[HA] = \frac{n}{V} = \frac{۰/۰۲mol}{۰/۴L} = ۰/۰۵mol.L^{-۱}$$

$$[H^+] = ۱۰^{-pH} = ۱۰^{-۲/۷} = ۱۰^{۰/۳}\times ۱۰^{-۳} = ۲\times ۱۰^{-۳}mol.L^{-۱}$$

$$[H^+] = M.\alpha \Rightarrow ۲\times ۱۰^{-۳} = ۰/۰۵\alpha \Rightarrow \alpha = ۰/۰۴$$

$$\xrightarrow[\text{درصد یونش}]{\times ۱۰۰} \alpha\% = ۴\%$$

$$HA \rightleftarrows A^- + H^+$$

$$K_a = \frac{[A^-][H^+]}{[HA]} \xrightarrow{[A^-]=[H^+],\ [HA]\simeq M}$$

$$K_a = \frac{(۲\times ۱۰^{-۳})^{۲}}{۵\times ۱۰^{-۲}} = ۸\times ۱۰^{-۵}mol.L^{-۱}$$

(شیمی ۳- مولکول‌ها در خدمت تندرستی؛ صفحه‌های ۱۸ تا ۲۵)

۸۴- **گزینهٔ «۲»** *(محمدرضا پورجاوید)*

واکنش انجام شده به صورت زیر است.

$$HCl(aq) + KOH(aq) \rightarrow KCl(aq) + H_2O(l)$$

در ابتدا باید تعداد مول هر یک از واکنش‌دهنده‌ها را تعیین کنیم:

$$KOH\ \text{مول} = ۰/۲L\ \text{محلول} \times \frac{۰/۷۵mol\ KOH}{۱L\ \text{محلول}}$$

$$= ۰/۱۵mol\ KOH$$

$$HCl\ \text{مول} = ۰/۳L\ \text{محلول} \times \frac{۰/۶mol\ HCl}{۱L\ \text{محلول}}$$

$$= ۰/۱۸mol\ HCl$$

با توجه به این‌که مقدارمول HCl بیشتر است، مقدار باقی‌مانده از آن پس از واکنش با اسید برابر است با: $۰/۱۸ - ۰/۱۵ = ۰/۰۳mol\ HCl$

از آنجا که حجم محلول نهایی برابر با حجم کل محلول‌های مخلوط شده با یکدیگر است، غلظت HCl باقی‌مانده و مقدار pH آن عبارتند از:

$$[H^+] \simeq [HCl] = \frac{۰/۰۳mol}{(۰/۲+۰/۳)L} = ۰/۰۶mol.L^{-۱}$$

$$pH = -\log[H^+] = -\log(۶\times ۱۰^{-۲}) = -\log(۲\times ۳\times ۱۰^{-۲})$$

$$= (-\log ۲) + (-\log ۳) + (-\log ۱۰^{-۲}) = (-۰/۳) + (-۰/۵) + ۲ = ۱/۲$$

(شیمی ۳- مولکول‌ها در خدمت تندرستی؛ صفحه‌های ۲۴ تا ۲۶، ۳۰ و ۳۱)

۸۵- **گزینهٔ «۴»** *(علی جعفری)*

تمامی موارد نادرست هستند.

بررسی موارد:

* عملکرد گل ادریسی عکس کاغذ pH می‌باشد؛ یعنی در محیط اسیدی آبی و در محیط بازی، قرمز رنگ است.

* محلول جوش شیرین ($NaHCO_3$) و شیشه‌پاک‌کن هر دو خاصیت بازی دارند و رنگ کاغذ pH را آبی می‌کنند.

* کاملاً برعکس! تولید گاز H_2 در این واکنش، قدرت پاک‌کنندگی مخلوط را افزایش می‌دهد.

* در برخی موارد که لوله‌ها با اسید چرب گرفتگی داشته باشند، باید از موادی مانند NaOH (سود) برای رفع گرفتگی استفاده کرد.

* به‌طور کلی محلول سود نسبت به صابون بازی‌تر است.

(شیمی ۳- مولکول‌ها در خدمت تندرستی؛ صفحه‌های ۱۲، ۱۳، ۲۶، ۲۹، ۳۲ و ۳۴)

۸۶- **گزینهٔ «۲»** *(امیرمسعود حسینی)*

با قرار دادن تیغه روی درون محلول $CuSO_4$، واکنش اکسایش- کاهش به صورت زیر انجام می‌گیرد.

$$Zn(s) + Cu^{2+}(aq) \rightarrow Zn^{2+}(aq) + Cu(s)$$

$Zn(s)$: ۲ الکترون می‌دهد	$Cu^{2+}(aq)$: ۲ الکترون می‌گیرد
اکسایش می‌یابد	کاهش می‌یابد
کاهنده	اکسنده

بررسی گزینه‌ها:

۱) درست؛ از آنجا که یون $Cu^{2+}(aq)$ (گونهٔ اکسنده) آبی رنگ و یون $Zn^{2+}(aq)$ بی‌رنگ است، با گذشت زمان از شدت رنگ محلول کاسته می‌شود.

۲) نادرست؛ واکنش فلزهایی مانند روی و آهن با محلول مس (II) سولفات به صورت خودبه‌خودی انجام می‌شود.

۳) درست؛ با توجه به تصویر صفحهٔ ۴۱ کتاب درسی، شعاع اتم Zn از کاتیون Cu^{2+} بزرگ‌تر است.

۴) درست؛ به ازای مبادلهٔ ۲ مول الکترون بین گونه‌های اکسنده و کاهنده، ۱ مول Zn و ۱ مول Cu^{2+} مصرف می‌شوند. همچنین به ازای مصرف هر مول فلز روی و تشکیل هر مول فلز مس، ۱ گرم ($۶۵g - ۶۴g = ۱g$) از جرم تیغه کاسته می‌شود.

$$۴/۸۱۶\times ۱۰^{۲۲}\ \text{مبادله شده}\ e^- \times \frac{\text{۱مول}\ e^-\ \text{مبادله شده}}{۶/۰۲\times ۱۰^{۲۳}\ \text{مبادله شده}\ e^-}\times \frac{\text{۱مول Zn مصرف شده}}{\text{۲مول}\ e^-\ \text{مبادله شده}}\times\frac{\text{۱g کاهش جرم تیغه}}{\text{۱مول Zn مصرف شده}}\times\frac{۱۰۰۰mg}{۱g}=۴۰mg$$

(شیمی ۳- آسایش و رفاه در سایه شیمی؛ صفحه‌های ۴۰ تا ۴۴)

۸۷- گزینهٔ «۲» *(محمدرضا جمشیدی)*

واکنش اکسایش- کاهش انجام شده به شکل زیر است:

$$۲Al(s)+۳Cu^{۲+}(aq)\rightarrow ۲Al^{۳+}(aq)+۳Cu(s)$$

جرم فلز آلومینیم جدا شده از تیغه:

$$۰/۶\,mol\ e^-\times\frac{۲\,mol\ Al}{۶\,mol\ e^-}\times\frac{۲۷\,g\ Al}{۱\,mol\ Al}=۵/۴\,g\ Al$$

جرم رسوب مس که بر روی تیغه می‌نشیند:

$$۰/۶\,mol\ e^-\times\frac{۳\,mol\ Cu}{۶\,mol\ e^-}\times\frac{۶۴\,g\ Cu}{۱\,mol\ Cu}\times\frac{۷۰}{۱۰۰}=۱۳/۴۴\,g\,Cu$$

از آنجا که جرم Al جدا شده از تیغه از جرم رسوب مس که بر روی تیغه می‌نشیند کمتر است، بنابراین جرم تیغه افزایش می‌یابد.

میزان افزایش جرم تیغه : $۱۳/۴۴-۵/۴=۸/۰۴g$

(شیمی ۳- آسایش و رفاه در سایه شیمی؛ صفحه‌های ۴۰ تا ۴۷)

۸۸- گزینهٔ «۲» *(علیرضا بیانی)*

هر چه تفاوت E° مابین تیغهٔ فلز با کاتیون موجود در محلول بیشتر باشد واکنش با میل و شدت بیشتری انجام شده و گرمای بیشتری آزاد می‌شود. بنابراین تغییر دمای محلول نیز بیشتر است. بدین ترتیب جدول الکتروشیمیایی زیر را تنظیم می‌کنیم:

D^{d+}/D

M^{m+}/M

B^{b+}/B

C^{c+}/C

A^{a+}/A

بررسی موارد نادرست:

- ترتیب قدرت کاهندگی به صورت $A>C>B>M>D$ می‌باشد.
- محلول حاوی نمک C را می‌توان در ظرفی از جنس B نگهداری کرد زیرا قدرت کاهندگی B از C کمتر است.

(شیمی ۳- آسایش و رفاه در سایه شیمی؛ صفحه‌های ۴۳ تا ۴۸)

۸۹- گزینهٔ «۴» *(علیرضا بیانی)*

با توجه به E°های داده شده جدول زیر را مرتب می‌کنیم.

$Cu^{۲+}/Cu$

$Pb^{۲+}/Pb$

$Zn^{۲+}/Zn$

$Mg^{۲+}/Mg$

بررسی گزینه‌ها:

۱) واکنش مورد نظر انجام نمی‌شود.

۲) بیشترین ولتاژ برای سلول حاصل از $Mg-Cu$ می‌باشد که برابر ۲/۷۲ ولت است.

۳) نمک سرب (II) در ظرف روی واکنش می‌دهد و نگهداری اتفاق نمی‌افتد.

۴) در سلول گالوانی روی- منیزیم، تیغهٔ منیزیم نقش آند را دارد که به مرور زمان دچار کاهش جرم می‌شود.

(شیمی ۳- آسایش و رفاه در سایه شیمی؛ صفحه‌های ۴۴ تا ۴۹)

۹۰- گزینهٔ «۲» *(حسین شاهسواری)*

تنها مورد اول درست است، واکنش رخ داده به صورت زیر است:

$$Cu(s)+۲Ag^+(aq)\rightarrow Cu^{۲+}(aq)+۲Ag(s)$$

نکته: در سلول گالوانی، نیم‌واکنش اکسایش در آند و نیم‌واکنش کاهشی در کاتد رخ می‌دهد (همانند الکترولیتی)

نکته: در سلول گالوانی، الکترون در مدار بیرونی از آند به سمت کاتد حرکت می‌کنند (همانند الکترولیتی)

نکته: در سلول گالوانی، کاتیون‌ها به سمت کاتد و آنیون‌ها به سمت آند حرکت می‌کنند (همانند الکترولیتی)

مورد دوم: در سلول الکترولیتی، آند قطب مثبت و کاتد قطب منفی است.

مورد سوم:

$$\frac{\text{جرم Ag تولیدی}}{\text{ضریب}\times\text{جرم مولی Ag}}=\frac{\text{اختلاف جرم الکترود (در گالوانی)}}{\text{ضریب}\times\text{جرم مولی Ag}+\text{ضریب}\times\text{جرم مولی Cu}}$$

$$\Rightarrow\frac{۲۱/۶}{۲\times۱۰۸}=\frac{x}{۲۱۶+۶۴}\Rightarrow x=۲۸g$$

مورد چهارم: رنگ محلول چپ، پررنگ‌تر می‌شود به علت افزایش غلظت یون $Cu^{۲+}$ (نه کاهش غلظت یون Ag^+)

مورد پنجم: با مصرف شدن ۳ مول اتم مس، $۶N_A$ الکترون از آند به کاتد منتقل می‌شود.

(شیمی ۳- آسایش و رفاه در سایه شیمی؛ صفحه‌های ۴۸ تا ۵۰)

۹۱- گزینهٔ «۳» *(هادی مهدی‌زاده)*

با توجه به مقدار E°های داده شده، دریافت می‌شود که در سری الکتروشیمیایی، نقره بالاتر از هیدروژن است و با HCl واکنش نمی‌دهد و تنها روی با HCl وارد واکنش می‌شود.

$$Zn(s)+۲HCl(aq)\rightarrow ZnCl_۲(aq)+H_۲(g)$$

$$\text{چگالی گاز } H_2 = \frac{\text{جرم}}{\text{حجم}} \Rightarrow 0/12 = \frac{\text{جرم } H_2}{4/5}$$

$$\Rightarrow \text{جرم } H_2 = 0/54\,g\ H_2$$

$$?g\ Zn = 0/54\,g\ H_2 \times \frac{1mol\ H_2}{2g\ H_2} \times \frac{1mol\ Zn}{1mol\ H_2} \times \frac{65g\ Zn}{1mol\ Zn} = 17/55\,g\ Zn$$

$$?g\ Ag = 32/55 - 17/55 = 15\,g\ Ag$$

$$\text{درصد جرمی نقره} = \frac{15}{32/55} \times 100 \simeq 46\%$$

(شیمی ۳- آسایش و رفاه در سایه شیمی: صفحه‌های ۴۴ تا ۴۸)

۹۲- **گزینهٔ «۳»** *(سعید تیزرو)*

واکنش‌های (۱)، (۲) و (۴) حاوی گونهٔ آزاد بوده و قطعاً جزو واکنش‌های اکسایش- کاهش محسوب می‌شوند؛ اما در واکنش (۳) که مربوط به واکنش خنثی شدن جوش شیرین با سولفوریک اسید می‌باشد، گونهٔ آزادی وجود نداشته و عدد اکسایش تمامی عناصر در دو سمت واکنش برابر است.

هرگاه در واکنش، در یک سمت یک گونهٔ آزاد عنصری (مثل F_2) داشته باشیم و در سمت دیگر آن عنصر در ترکیب وجود داشته باشد، واکنش از نوع اکسایش- کاهش است.

(شیمی ۳- آسایش و رفاه در سایه شیمی: صفحه‌های ۵۲ و ۵۳)

۹۳- **گزینهٔ «۴»** *(محسن مجنونی)*

ابتدا فرمول مولکولی آن را به دست می‌آوریم: n: تعداد کربن است

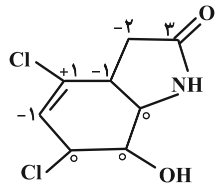
$\text{تعداد } H = 2n + 2 - 2$ (تعداد حلقه + تعداد پیوند دوگانه) $+$ تعداد اتم N − تعداد هالوژن‌ها

$$n = 8 \Rightarrow H = 2\times8 + 2 - 2(2+2) + 1 - 2 = 9$$

فرمول مولکولی: $C_8H_9NO_2Cl_2$

$\Rightarrow$ مجموع اتم‌ها $= 8 + 9 + 1 + 2 + 2 = 22$

اعداد اکسایش (۳ , ۱ , ۰ , ۱− , ۲−) برای کربن در این ساختار مشاهده می‌شود.



(شیمی ۳- آسایش و رفاه در سایه شیمی: صفحه‌های ۵۲ و ۵۳)

۹۴- **گزینهٔ «۳»** *(هادی مهدی‌زاده)*

عبارت‌های (ب) و (ت) نادرست‌اند.

بررسی هر یک از عبارت‌ها:

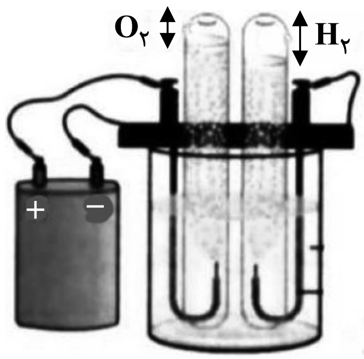
الف) مطابق واکنش‌های انجام شده در آند و کاتد صحیح است.

آند ⟵ قطب مثبت $\Rightarrow 2H_2O(l) \rightarrow O_2(g) + 4H^+(aq) + 4e^-$ (تولید H^+ و محیط اسیدی)

کاتد ⟵ قطب منفی $\Rightarrow 4H_2O(l) + 4e^- \rightarrow 2H_2(g) + 4OH^-(aq)$ (تولید OH^- و محیط بازی)

ب) با توجه به شکل A و B به ترتیب O_2 و H_2 هستند.

$$2H_2O \rightarrow 2H_2 + O_2$$



پ) در سلول‌های الکترولیتی برخلاف گالوانی آند به قطب مثبت باتری و کاتد به قطب منفی باتری وصل است ولی همچنان الکترون‌ها در سیم از آند به کاتد حرکت می‌کنند.

ت) نیم‌واکنش‌های انجام شده در فرایند برقکافت آب به صورت زیر است:

نیم‌واکنش کاهش: $4H_2O(l) + 4e^- \rightarrow 2H_2(g) + 4OH^-(aq)$

نیم‌واکنش اکسایش: $2H_2O(l) \rightarrow O_2(g) + 4H^+(aq) + 4e^-$

(شیمی ۳- آسایش و رفاه در سایه شیمی: صفحه‌های ۵۴ و ۵۵)

۹۵- **گزینهٔ «۲»** *(یاسر راش)*

ابتدا شمار الکترون‌های مبادله شده به ازای مصرف هر مول اکسنده را به دست می‌آوریم:

$$\text{I)}\ \underset{+7}{\underline{MnO_4^-}} + 3e^- \rightarrow \underset{+4}{\underline{MnO_2}} \qquad 3\downarrow$$

$$2\downarrow$$

$$Pb^{2+} + O_3 + H_2O \rightarrow PbO_2 + O_2 + 2H^+$$

$$2\uparrow$$

پس با توجه به معادله‌های موازنه شدهٔ واکنش‌ها، به ازای مصرف ۲ مول MnO_4^-، ۶ مول الکترون و به ازای مصرف یک مول O_3، ۲ مول الکترون مبادله می‌شود.

$$\begin{cases} 2MnO_4^- \sim 3Pb^{2+} \sim 6e^- \\ O_3 \sim Pb^{2+} \sim 2e^- \end{cases}$$

از طرفی با توجه به مشابه بودن نمونه‌های آب آلوده، شمار یون‌های سرب در نمونه‌ها برابر است، پس ضریب یون سرب در واکنش‌ها را یکسان کرده و بین دو واکنش ارتباط برقرار می‌کنیم:

$$\begin{cases} 2MnO_4^- \sim 3Pb^{2+} \sim 6e^- \\ 3O_3 \sim 3Pb^{2+} \sim 6e^- \end{cases}$$

با توجه به هم‌ارزی‌های به دست آمده و یکسان بودن ضرایب الکترون در هم‌ارزی‌ها، مشخص می‌شود که شمار الکترون‌های مبادله شده یکسان است.

نتیجه‌گیری: بر اثر اکسایش شمار یون‌های برابری از Pb^{2+} در دو محلول مشابه، شمار الکترون‌های یکسانی مبادله می‌شود و فرقی نمی‌کند از چه اکسنده‌ای در این فرایند استفاده شود.

(شیمی ۳- آسایش و رفاه در سایه شیمی: صفحه‌های ۵۲ و ۵۳)

۹۶- **گزینهٔ «۳»** *(هادی مهدی‌زاده)*

عبارت‌های اول و چهارم نادرست هستند.

+۷ ۳ واحد کاهش +۴

$$A)\ MnO_4^- + 2H_2C_2O_4 + 4H^+ \to MnO_2 + 2H_2O + 4CO_2$$

$$B)\ Zn(s) + 2H_2SO_4(aq) \to ZnSO_4(aq) + SO_2(g) + 2H_2O(l)$$

۰ +۲

۲ واحد اکسایش (کاهنده)

در واکنش (A)، H^+ مصرف و غلظت آن کاهش پیدا می‌کند، پس pH افزایش می‌یابد.

(شیمی ۳- آسایش و رفاه در سایه شیمی: صفحه‌های ۵۲ و ۵۳)

۹۷- **گزینهٔ «۲»** *(محمد عظیمیان‌زواره)*

بررسی موارد:

آ) نادرست؛ مجموع ضرایب استوکیومتری عنصرها (O_2 و Fe) برابر ۷ خواهد بود:

$$4Fe(s) + 6H_2O(l) + 3O_2(g) \to 4Fe(OH)_3(s)$$

ب) درست؛ عدد اکسایش هر اتم کربن در اتین (C_2H_2) برابر ۱- و عدد اکسایش H در NaH نیز برابر ۱- می‌باشد.

پ) نادرست؛ چگالی $Mg(l)$ از چگالی $MgCl_2(l)$ کمتر است.

ت) درست، نخستین فلز گروه ۱۴ قلع می‌باشد.

ث) درست؛ فلزهای دارای E° منفی با محلول اسیدها، واکنش داده و گاز H_2 تولید می‌کنند زیرا قدرت کاهندگی آن‌ها از H_2 بیشتر است.

(شیمی ۳- آسایش و رفاه در سایه شیمی: صفحه‌های ۵۶ تا ۵۹)

۹۸- **گزینهٔ «۱»** *(سعید تیزرو)*

بررسی گزینه‌ها:

گزینهٔ اول: نیم‌واکنش اکسایش (آندی) در برقکافت آب:

$$2H_2O \to O_2 + 4e^- + 4H^+ \Rightarrow 1\,mol\ O_2 \sim 4\,mol\ e^-$$

در نتیجه: $\dfrac{16\,mol\ e^-}{4} = \dfrac{XL \times 0/8\,g.L^{-1}}{1\times 32} \Rightarrow X = 160\,L$ (نادرست)

گزینهٔ دوم: معادلهٔ کلی واکنش زنگ زدن آهن در هوای مرطوب:

$$4Fe + 3O_2 + 6H_2O \to 4Fe(OH)_3 \Rightarrow 4\,mol\ Fe \sim 3\,mol\ O_2$$

در نتیجه: $\dfrac{11/2\,g\ Fe}{4\times 56} = \dfrac{X\,L\ O_2}{3\times 22/4} \Rightarrow X = 3/36\,L$ (درست)

بررسی گزینهٔ سوم: نیم‌واکنش کاتدی در فرایند آبکاری با نقره:

$$Ag^+(aq) + e^- \to Ag(s) \Rightarrow 1\,mol\ Ag \sim 1\,mol\ e^-$$

در نتیجه: $\dfrac{1/806\times 10^{23}}{1\times 6/02\times 10^{23}} = \dfrac{Xg\ Ag}{1\times 108}$

$\Rightarrow X = 32/4\,g$ افزایش جرم تیغهٔ کاتدی (نقره) (درست)

بررسی گزینهٔ چهارم: واکنش کلی سلول هال:

$$2Al_2O_3 + 3C \to 4Al + 3CO_2 \Rightarrow 4\,mol\ Al \sim 3\,mol\ CO_2$$

در نتیجه: $\dfrac{810\,g\ Al}{4\times 27} = \dfrac{xg\ CO_2}{3\times 44} \Rightarrow x = 990\,g\ CO_2 < 1\,kg\ CO_2$ (درست)

(شیمی ۳- آسایش و رفاه در سایه شیمی: صفحه‌های ۵۴ تا ۶۲)

۹۹- **گزینهٔ «۱»** *(هادی مهدی‌زاده)*

واکنش کلی فرایند هال به صورت زیر است:

$$2Al_2O_3(s) + 3C(s) \to 4Al(l) + 3CO_2(g)$$

$$?\,kg\ C = 1080\,kg\ Al \times \frac{1000\,g\ Al}{1\,kg\ Al} \times \frac{1\,mol\ Al}{27\,g\ Al} \times \frac{3\,mol\ C}{4\,mol\ Al} \times \frac{12\,g\ C}{1\,mol\ C} \times \frac{1\,kg\ C}{1000\,g\ C} = 360\,kg\ C$$

$$?\,kg\ CO_2 = 1080\,kg\ Al \times \frac{1000\,g\ Al}{1\,kg\ Al} \times \frac{1\,mol\ Al}{27\,g\ Al} \times \frac{3\,mol\ CO_2}{4\,mol\ Al} \times \frac{25\,L\ CO_2}{1\,mol\ CO_2} = 7/5\times 10^5\,L\ CO_2$$

(شیمی ۳- آسایش و رفاه در سایه شیمی: صفحهٔ ۶۱)

۱۰۰- **گزینهٔ «۴»** *(یاسر راش)*

نیم‌واکنش‌های مطرح شده به صورت زیر هستند:

- نیم‌واکنش کاتدی در فرایند خوردگی آهن در محیط اسیدی و نیم‌واکنش کاتدی در سلول سوختی هیدروژن:

$$O_2 + 4H^+ + 4e^- \to 2H_2O$$

- نیم‌واکنش کاهش آب در کاتد سلول «نور- الکتروشیمیایی» سیلیسیم:

$$2H_2O + 2e^- \to H_2 + 2OH^-$$

- نیم‌واکنش اکسایش گاز هیدروژن در الکترود SHE زمانی که در نقش آند است و نیم‌واکنش اکسایش گاز هیدروژن در آند سلول سوختی هیدروژن:

$$H_2 \to 2H^+ + 2e^-$$

- نیم‌واکنش اکسایش آب در آند سلول برقکافت آب:

$$2H_2O \to O_2 + 4H^+ + 4e^-$$

(شیمی ۳- آسایش و رفاه در سایه شیمی: صفحه‌های ۴۷، ۵۱، ۵۷ و ۶۶)