دفترچه پاسخ

آزمون ۱۶ آذر ۱۴۰۳

اختصاصی دوازدهم ریاضی

بنیاد علمی آموزشی قلم‌چی (وقف عام)

	نام درس	نام طراحان
اختصاصی	حسابان ۲	کاظم اجلالی-علی آزاد-سینا خیرخواه-محمدرضا راسخ-محمد زنگنه-علی سلامت-مسعود شفیعی-محمدرضا کشاورزی مهسان گودرزی-نیما مهندس
	هندسه	اسحاق اسفندیار-سیدمحمدرضا حسینی‌فرد-افشین خاصه‌خان-کیوان دارابی-سوگند روشنی-فرشاد صدیقی‌فر-هومن عقیلی احمدرضا فلاح
	آمار و ریاضیات گسسته	امیرحسین ابومحبوب-علی ایمانی-سیدمحمدرضا حسینی‌فرد-افشین خاصه‌خان-کیوان دارابی-مصطفی دیداری علیرضا شریف‌خطیبی-فرشاد صدیقی‌فر-احمدرضا فلاح-امیرحسین ملازینل-نیلوفر مهدوی
	فیزیک	کامران ابراهیمی-حسین الهی-بهزاد آزادفر-علی برزگر-علیرضا جباری-مسعود خندانی-محسن سلماسی‌وند-سعید شرق محمدکاظم منشادی-محمود منصوری-امیراحمد میرسعید-سیده‌ملیحه میرصالحی-حسام نادری-مجتبی نکوئیان
	شیمی	امیرعلی بیات-علیرضا بیانی-محمدرضا پورجاوید-سعید تیزرو-محمدرضا جمشیدی-امیر حاتمیان-امیرحسین حسن‌نژاد پیمان خواجوی‌مجد -حمید ذبحی-یاسر راش-میلاد شیخ الاسلامی‌خیاوی-امیرحسین طیبی-محمد عظیمیان‌زواره-محسن مجنونی هادی مهدی‌زاده

گزینشگران و ویراستاران

نام درس	حسابان ۲	هندسه	آمار و ریاضیات گسسته	فیزیک	شیمی
گزینشگر	کاظم اجلالی	امیرحسین ابومحبوب	امیرحسین ابومحبوب	حسام نادری	ایمان حسین نژاد
گروه ویراستاری	امیرحسین ابومحبوب محمد خندان	امیرحسین ابومحبوب محمد خندان امیرمحمد کریمی	امیرحسین ابومحبوب محمد خندان امیرمحمدکریمی	بهنام شاهنی زهره آقامحمدی	محمدحسن محمدزاده مقدم احسان پنجه‌شاهی امیرحسین کمره ای
ویراستاری رتبه های برتر	امیرحسین ملازینل سپهر متولیان سیدماهد عبدی	امیرحسین ملازینل سپهر متولیان محمدپارسا سبزه‌ای	امیرحسین ملازینل سپهر متولیان محمدپارسا سبزه‌ای	سینا صالحی ماهان فرهمندفر	امیرحسین ملازینل آرمان قنواتی ماهان فرهمندفر
بازنویسی آزمون	محمدرضا راسخ	امیرحسین ملازینل	امیرحسین ملازینل	------	------
مسئول درس	مهرداد ملوندی	سرژ یقیازاریان تبریزی	سرژ یقیازاریان تبریزی	حسام نادری	امیرعلی بیات
مستندسازی	سمیه اسکندری	سجاد سلیمی	سجاد سلیمی	علیرضا همایون‌خواه	امیرحسین توحیدی
ویراستاران(مستندسازی)	احسان صادقی-سجاد سلیمی-معصومه صنعت‌کار			ابراهیم نوری سجادرضایی	ملینا ملائی سجاد رضایی محمدصدرا وطنی

گروه فنی و تولید

مدیر گروه	مهرداد ملوندی
مسئول دفترچه	نرگس غنی‌زاده
گروه مستندسازی	مدیر گروه: محیا اصغری — مسئول دفترچه: الهه شهبازی
حروف‌نگار	فرزانه فتح اله‌زاده
ناظر چاپ	سوران نعیمی

گروه آزمون

بنیاد علمی آموزشی قلم‌چی (وقف عام)

دفتر مرکزی: خیابان انقلاب بین صبا و فلسطین – پلاک ۹۲۳ – کانون فرهنگی آموزش – تلفن: ۶۴۶۳-۰۲۱

@MrKonkori

حسابان ۲

۱- **گزینهٔ «۲»** *(کاظم اجلالی)*

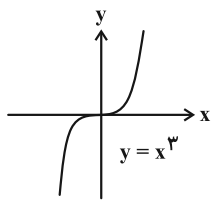
با کمک تعیین علامت عبارت قدرمطلقی، ضابطهٔ تابع را به صورت یک تابع قطعه‌ای بازنویسی می‌کنیم:

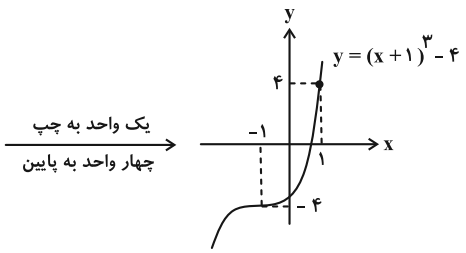
$$f(x)=\begin{cases}x^3+3x+3(x+1)(x-1) & ; \ x\geq 1\\ x^3+3x-3(x+1)(x-1) & ; \ x<1\end{cases}$$

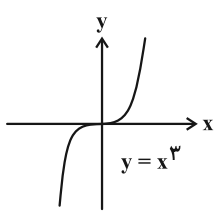
$$\Rightarrow f(x)=\begin{cases}x^3+3x+3x^2-3 & ; \ x\geq 1\\ x^3+3x-3x^2+3 & ; \ x<1\end{cases}$$

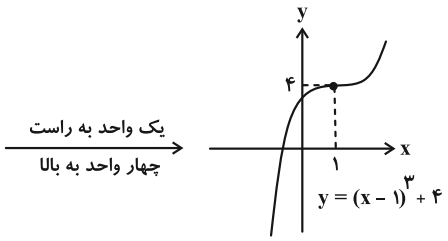
$$\Rightarrow f(x)=\begin{cases}(x+1)^3-4 & ; \ x\geq 1\\ (x-1)^3+4 & ; \ x<1\end{cases}$$

حال توجه کنید که نمودار توابع $y=(x+1)^3-4$ و $y=(x-1)^3+4$، به کمک قوانین انتقال از روی نمودار تابع $y=x^3$ به صورت زیر رسم می‌شوند:

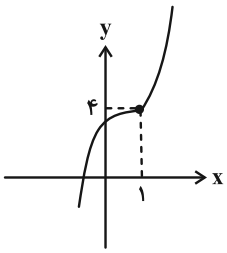








بنابراین نمودار تابع f به صورت زیر است:



(حسابان ۲- تابع؛ صفحه‌های ۱۳ و ۱۴)

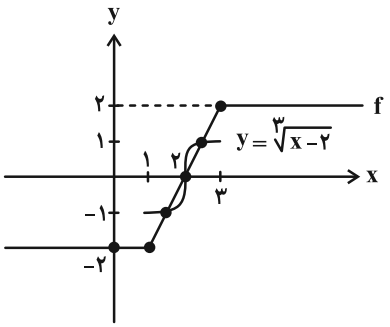
۲- **گزینهٔ «۲»** *(محمدرضا راسخ)*

ابتدا ضابطهٔ وارون تابع g را به دست می‌آوریم:

$$y=(\frac{x}{m})^3+2\Rightarrow y-2=(\frac{x}{m})^3\Rightarrow x=m\sqrt[3]{y-2}$$

$$\Rightarrow g^{-1}(x)=m\sqrt[3]{x-2}$$

حال نمودار توابع f و $y=\sqrt[3]{x-2}$ را در یک دستگاه مختصات رسم می‌کنیم که مطابق شکل ۳ نقطهٔ برخورد در بازهٔ $[1,3]$ دارند.



با توجه به نمودار تابع $y=\sqrt[3]{x-2}$، اگر $m<0$ باشد، نمودار تابع نسبت به محور xها قرینه می‌شود و در نتیجه f و g^{-1} فقط در نقطهٔ $x=2$ برخورد دارند.

همچنین اگر $g^{-1}(3)>2$ (یا معادل آن $g^{-1}(1)<-2$) باشد، نیز نمودارهای توابع فقط در $x=2$ برخورد دارند:

$$g^{-1}(3)>2\Rightarrow m\sqrt[3]{3-2}>2\Rightarrow m>2$$

@MrKonkori

بنابراین حدود m، به صورت $(-\infty , 0)\cup(2 , +\infty)$ است و داریم:

$$a+b=0+2=2$$

(حسابان ۲- تابع؛ صفحه‌های ۱۳، ۱۴ و ۲۱)

۳- **گزینهٔ «۴»** *(محمدرضا راسخ)*

ابتدا ضابطهٔ $y=-4x^2+4x$ را به صورت زیر می‌نویسیم:

$$y=-(4x^2-4x+1)+1=-(2x-1)^2+1$$

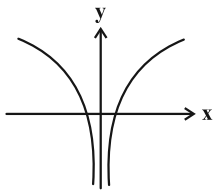
$$\xrightarrow{\text{۱ واحد به سمت پایین}} y=-(2x-1)^2 \xrightarrow{\text{قرینه نسبت به محور x ها}}$$

$$y=(2x-1)^2 \xrightarrow{\text{انبساط افقی با ضریب } \frac{1}{2}} y=(x-1)^2$$

$$\xrightarrow{\text{۱ واحد به چپ}} y=x^2 \Rightarrow g(x)=x^2$$

حال نمودار تابع $y=\log x^2$ را رسم می‌کنیم:

$$y=\log x^2=2\log|x|$$



این تابع روی دامنه‌اش ابتدا نزولی و سپس صعودی است.

(حسابان ۲- تابع؛ صفحه‌های ۲ تا ۱۲)

۴- **گزینهٔ «۳»** *(سینا خیرخواه)*

با توجه به دامنهٔ تابع f، ورودی‌های توابع $y=f(3x-1)$ و $y=f(4-x)$ باید بزرگ‌تر یا مساوی ۱ باشد:

$$3x-1\geq 1\Rightarrow x\geq \frac{2}{3} \quad (I) \qquad \text{و} \qquad 4-x\geq 1\Rightarrow x\leq 3 \quad (II)$$

همچنین زیر رادیکال با فرجهٔ زوج همواره باید بزرگ‌تر یا مساوی صفر باشد:

$$f(3x-1)\geq f(4-x) \xrightarrow{f \text{ اکیداً نزولی}} 3x-1\leq 4-x$$

$$\Rightarrow x\leq \frac{5}{4} \qquad (III)$$

حال از اشتراک (I)، (II) و (III) داریم:

$$D_y=[\frac{2}{3} , \frac{5}{4}]\Rightarrow b-a=\frac{5}{4}-\frac{2}{3}=\frac{7}{12}$$

(حسابان ۲- تابع؛ صفحه‌های ۱۵ تا ۱۸ و ۲۲)

۵- **گزینهٔ «۱»** *(کاظم اجلالی)*

ابتدا توجه کنید که $P(1)=1-4+3=0$، بنابراین $P(x)$ بر $(x-1)$ بخش‌پذیر است، پس $x-1$، یکی از عامل‌های $P(x)$ است، در نتیجه:

$$P(x)=x^{12}-1-4x^5+4=(x^{12}-1)-4(x^5-1)$$

$$=(x-1)(x^{11}+x^{10}+\ldots+x+1)-4(x-1)(x^4+x^3+x^2+x+1)$$

$$=(x-1)(\underbrace{x^{11}+x^{10}+\ldots+x+1-4(x^4+x^3+x^2+x+1)}_{Q(x)})$$

$$\Rightarrow P(x)=(x-1)Q(x)$$

حال کافی است باقی‌ماندهٔ تقسیم $Q(x)$ را بر $(x-1)$ پیدا کنیم که برابر است با:

$$R=Q(1)=\underbrace{1+1+\ldots+1}_{\text{۱۲ تا}}-4(1+1+1+1+1)=-8$$

بنابراین داریم: $Q(x)=(x-1)q(x)-8$

$$\Rightarrow P(x)=(x-1)\big((x-1)q(x)-8\big)$$

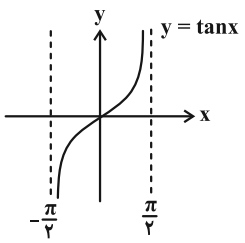
$$=(x-1)^2q(x)-8(x-1)$$

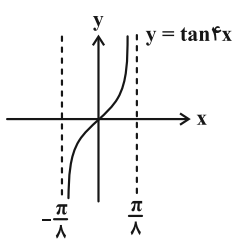
بنابراین باقی‌ماندهٔ تقسیم برابر است با: $r(x)=-8(x-1)=-8x+8$

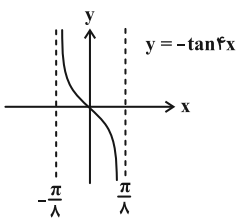
(حسابان ۲- تابع؛ صفحه‌های ۱۸ تا ۲۰)

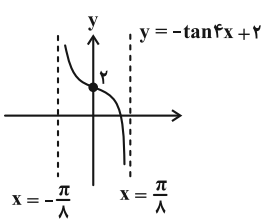
۶- **گزینهٔ «۲»** *(محمد زنگنه)*

به کمک نمودار تابع $y=\tan(x)$ که به صورت زیر است، نمودار تابع $y=-\tan(4x)+2$ را رسم می‌کنیم.









@MrKonkori

$$\Rightarrow \begin{cases} a=-\frac{\pi}{8} \\ b=\frac{\pi}{8} \\ c=2 \end{cases} \Rightarrow \frac{b-a}{c}=\frac{\frac{\pi}{8}+\frac{\pi}{8}}{2}=\frac{\pi}{8}$$

(حسابان ۲- مثلثات؛ صفحه‌های ۲۹ تا ۳۲)

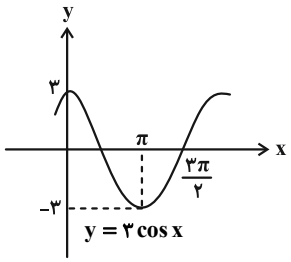
۷- **گزینهٔ «۳»** (کاظم اجلالی)

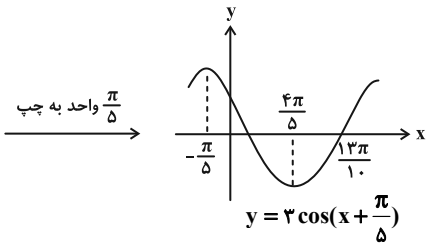
نمودار تابع محور yها را نقطه‌ای با عرض مثبت قطع کرده است:

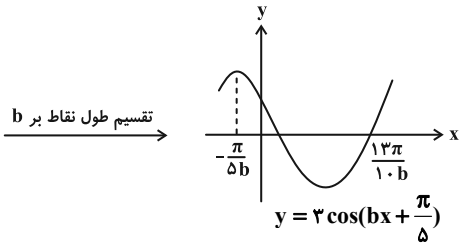
$$f(0)=a\cos\frac{\pi}{5}>0 \Rightarrow a>0$$

کمترین مقدار تابع برابر ۳- است، پس: $-|a|=-3 \xrightarrow{a>0} a=3$

اکنون توجه کنید که نمودار تابع f به صورت زیر رسم می‌شود:







بنابراین: $\frac{13\pi}{10b}=\frac{13}{5} \Rightarrow b=\frac{\pi}{2} \Rightarrow ab=\frac{3\pi}{2}$

(حسابان ۲- مثلثات؛ صفحه‌های ۲۴ تا ۲۹)

۸- **گزینهٔ «۳»** (مسعود شفیعی)

با توجه به نمودار، تابع از مبدأ مختصات عبور می‌کند، پس:

$$f(0)=0 \Rightarrow a\sin(-\frac{\pi}{6})+3=0 \Rightarrow -\frac{a}{2}+3=0 \Rightarrow a=6$$

حال با توجه به نمودار تابع، دورهٔ تناوب برابر $\frac{\pi}{3}$ است، در نتیجه:

$$T=\frac{2\pi}{|b|}=\frac{\pi}{3} \Rightarrow |b|=6 \xrightarrow{b>0} b=6$$

بنابراین ضابطهٔ تابع به صورت $f(x)=6\sin(6x-\frac{\pi}{6})+3$ است و داریم:

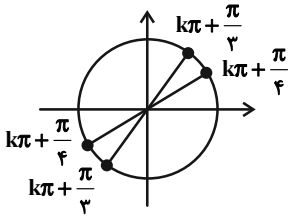
$$f(\frac{\pi}{12})=6\sin(6\times\frac{\pi}{12}-\frac{\pi}{6})+3=6\sin(\frac{\pi}{3})+3$$

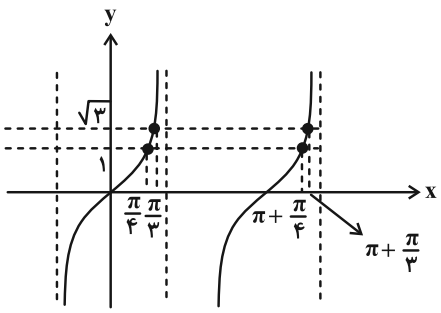
$$=6(\frac{\sqrt{3}}{2})+3=3\sqrt{3}+3$$

(حسابان ۲- مثلثات؛ صفحه‌های ۲۴ تا ۲۹)

۹- **گزینهٔ «۱»** (کاظم اجلالی)

با توجه به دایرهٔ مثلثاتی و نمودار $y=\tan x$، اگر $1<\tan x<\sqrt{3}$، آن‌گاه داریم:





$$1<\tan x<\sqrt{3} \Rightarrow k\pi+\frac{\pi}{4}<x<k\pi+\frac{\pi}{3} \ , \ (k\in\mathbb{Z})$$

بنابراین:

$$k\pi+\frac{\pi}{4}<\alpha+\frac{\pi}{12}<k\pi+\frac{\pi}{3} \Rightarrow k\pi+\frac{\pi}{6}<\alpha<k\pi+\frac{\pi}{4}$$

@MrKonkori

$$\Rightarrow \tan(k\pi+\frac{\pi}{6}) < \tan\alpha < \tan(k\pi+\frac{\pi}{4}) \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{3} < \tan\alpha < 1$$

(حسابان ۲- مثلثات؛ صفحه‌های ۲۹ تا ۳۱)

۱۰- **گزینهٔ «۴»** (کاظم اجلالی)

با توجه به فرضیات مسئله داریم: $\tan\beta = \tan\alpha - 1$ (*)

$$\tan(\alpha+\beta) = -8 \Rightarrow \frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta} = -8$$

با فرض $\tan\alpha = x$ و رابطهٔ (*) داریم:

$$\frac{x+x-1}{1-x(x-1)} = -8 \Rightarrow \frac{2x-1}{1-x^2+x} = -8$$

$$\Rightarrow 8x^2-8x-8 = 2x-1 \Rightarrow 8x^2-10x-7 = 0$$

$$\Rightarrow (2x+1)(4x-7) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = -\frac{1}{2} & \text{غ ق ق} \\ x = \frac{7}{4} \end{cases}$$

بنابراین $\tan\alpha = \frac{7}{4}$ و از رابطهٔ (*) داریم:

$$\tan\beta = \frac{7}{4}-1 = \frac{3}{4} \Rightarrow \frac{\tan\alpha}{\tan\beta} = \frac{\frac{7}{4}}{\frac{3}{4}} = \frac{7}{3}$$

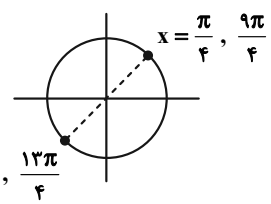
(حسابان ۲- مثلثات؛ صفحه‌های ۴۲ و ۴۳)

۱۱- **گزینهٔ «۲»** (سینا خیرخواه)

با توجه به اتحادهای $1-\cos 2x = 2\sin^2 x$ و $1+\cos x = 2\cos^2 x$، معادله را به صورت زیر بازنویسی می کنیم:

$$\sqrt{\frac{2\sin^2 x}{\sin x}} = \sqrt{\frac{2\cos^2 x}{\cos x}} \Rightarrow \sqrt{2\sin x} = \sqrt{2\cos x} \qquad (1)$$

$$\Rightarrow \sin x = \cos x \xrightarrow{x\in(0\,,\,4\pi)}$$



از معادلهٔ (۱) معلوم است که باید مقادیر $\sin x$ و $\cos x$ مثبت باشند، پس جواب‌های واقع در ناحیهٔ سوم مثلثاتی قابل قبول نیستند. در نتیجه معادله تنها دو جواب $x = \frac{\pi}{4}$ و $x = \frac{9\pi}{4}$ را در بازهٔ $(0\,,\,4\pi)$ دارد که مجموع آن‌ها برابر است با:

$$\frac{\pi}{4}+\frac{9\pi}{4} = \frac{10\pi}{4} = \frac{5\pi}{2}$$

(حسابان ۲- مثلثات؛ صفحه‌های ۳۵ تا ۴۱)

۱۲- **گزینهٔ «۴»** (محمدرضا راسخ)

به کمک روابط مثلثاتی 2α و سینوس تفاضل دو زاویه، معادله را بازنویسی می‌کنیم:

$$\sin\frac{\pi}{12}\cos x - \sin x\cos\frac{\pi}{12} + \sin x - \sin\frac{\pi}{12} = 0$$

$$\Rightarrow \sin\frac{\pi}{12}\underbrace{(\cos x-1)}_{-2\sin^2\frac{x}{2}} + \sin x(1-\cos\frac{\pi}{12}) = 0$$

$$\Rightarrow \sin x(1-\cos\frac{\pi}{12}) = 2\sin^2\frac{x}{2}\sin\frac{\pi}{12}$$

$$\Rightarrow 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}(1-\cos\frac{\pi}{12}) = 2\sin^2\frac{x}{2}\sin\frac{\pi}{12}$$

معادلهٔ اخیر را به صورت زیر در محدودهٔ $[0\,,\,2\pi]$ حل می‌کنیم:

$$\begin{cases} \sin\frac{x}{2} = 0 \Rightarrow x = 0\,,\ 2\pi & \checkmark \\ \sin\frac{x}{2} \neq 0 \Rightarrow \cos\frac{x}{2}(1-\cos\frac{\pi}{12}) = \sin\frac{x}{2}\sin\frac{\pi}{12} & (*) \end{cases}$$

$$\xrightarrow{(*)} \tan\frac{x}{2} = \frac{2\sin^2\frac{\pi}{24}}{2\sin\frac{\pi}{24}\cos\frac{\pi}{24}} \Rightarrow \tan\frac{x}{2} = \tan\frac{\pi}{24}$$

$$\Rightarrow x = \frac{\pi}{12} \qquad \checkmark$$

بنابراین معادله در محدودهٔ مورد نظر دارای سه جواب 2π، $\frac{\pi}{12}$ و $x = 0$ است.

(حسابان ۲- مثلثات؛ صفحه‌های ۳۵ تا ۴۲)

@MrKonkori

۱۳- **گزینهٔ «۱»** *(نیما مهندس)*

حد خواسته شده را به صورت زیر بازنویسی می‌کنیم:

$$\lim_{x\to(-\frac{\pi}{16})}\frac{\tan(2x+\frac{\pi}{8})}{\sin 4x+\cos 4x}=\frac{0}{0}$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to(-\frac{\pi}{16})}\frac{\tan(2x+\frac{\pi}{8})}{\sqrt{2}\sin(4x+\frac{\pi}{4})}=\frac{0}{0}$$

با در نظر گرفتن $t=2x+\frac{\pi}{8}$ داریم:

$$\lim_{t\to 0}\frac{\tan(t)}{\sqrt{2}\sin 2t}=\lim_{t\to 0}\frac{\frac{\sin t}{\cos t}}{\sqrt{2}\times 2\sin t\cos t}$$

$$=\lim_{t\to 0}\frac{1}{2\sqrt{2}\cos^2 t}=\frac{1}{2\sqrt{2}}=\frac{k}{\sqrt{2}}\Rightarrow k=\frac{1}{2}\Rightarrow [k]=0$$

(حسابان ۱- حد و پیوستگی؛ صفحه‌های ۱۴۱ تا ۱۴۴)

۱۴- **گزینهٔ «۴»** *(کاظم اجلالی)*

با فرض $t=2\pi\cos x-2\pi$، داریم:

$$\cos x=\frac{t+2\pi}{2\pi}\Rightarrow \cos 2x=2\cos^2 x-1=2(\frac{t+2\pi}{2\pi})^2-1$$

$$\Rightarrow \cos 2x=\frac{t^2+4\pi t+2\pi^2}{2\pi^2}\Rightarrow \pi\cos 2x=\pi+2t+\frac{t^2}{2\pi}$$

چون $x\to 0$ پس $t\to 0$ و حد مورد نظر به صورت زیر درمی‌آید:

$$\lim_{t\to 0}\frac{\sin(\pi+2t+\frac{t^2}{2\pi})}{\sin(t+2\pi)}=\lim_{t\to 0}\frac{-\sin(2t+\frac{t^2}{2\pi})}{\sin t}$$

$$=\lim_{t\to 0}\frac{-(2t+\frac{t^2}{2\pi})}{t}=\lim_{t\to 0}-(2+\frac{t}{2\pi})=-2$$

(حسابان ۱- حد و پیوستگی؛ صفحه‌های ۱۴۱ تا ۱۴۴)

۱۵- **گزینهٔ «۱»** *(محمدرضا کشاورزی)*

با توجه به ضابطهٔ تابع f، نقاط $x=3$ و $x=-3$ کاندیداهای نقاط ناپیوستگی تابع f هستند.

حالت اول:

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 3^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 3^-}f(x)=f(3)\\ \lim\limits_{x\to(-3)^-}f(x)\neq\lim\limits_{x\to(-3)^+}f(x)=f(-3)\end{array}\right\}\Rightarrow\begin{array}{l}\frac{a}{3}=3\Rightarrow a=9\\ -\frac{a}{3}\neq 3\Rightarrow -\frac{9}{3}\neq 3\end{array}\quad\checkmark$$

حالت دوم:

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to(-3)^-}f(x)=\lim\limits_{x\to(-3)^+}f(x)=f(-3)\\ \lim\limits_{x\to 3^+}f(x)\neq\lim\limits_{x\to 3^-}f(x)=f(3)\end{array}\right\}\Rightarrow\begin{array}{l}\frac{a}{-3}=3\Rightarrow a=-9\\ \frac{a}{3}\neq 3\Rightarrow\frac{-9}{3}\neq 3\end{array}\quad\checkmark$$

بنابراین به ازای دو مقدار $a=\pm 9$، تابع f فقط در یک نقطه از دامنه‌اش ناپیوسته است.

(حسابان ۱- حد و پیوستگی؛ صفحه‌های ۱۴۵ تا ۱۵۱)

۱۶- **گزینهٔ «۳»** *(علی آزاد)*

ابتدا ضابطهٔ تابع f را به صورت زیر بازنویسی می‌کنیم:

$$f(x)=(x-1)(x-\sqrt{2})[x^2]$$

توابع شامل براکت در نقاطی که داخل براکت، عددی صحیح شود ناپیوسته هستند، به جز نقاطی که مینیمم عبارت داخل براکت باشد یا به صورت عامل صفرکننده‌ای در پشت براکت باشد:

$$-\frac{1}{2}\le x<k\xrightarrow{|k|>\frac{1}{2}}0\le x^2<k^2$$

$x^2=0\Rightarrow x=0\Rightarrow$ پیوسته است زیرا نقطه مینیمم است.

$$x^2=1\Rightarrow\begin{cases}x=1\to \text{پیوسته است زیرا عامل صفر کننده دارد.}\\ x=-1\to \text{در دامنه نیست.}\end{cases}$$

$$x^2=2\Rightarrow\begin{cases}x=\sqrt{2}\to \text{پیوسته است زیرا عامل صفر کننده دارد.}\\ x=-\sqrt{2}\to \text{در دامنه نیست.}\end{cases}$$

$$x^2=3\Rightarrow\begin{cases}x=\sqrt{3}\to \text{ناپیوسته است.}\\ x=-\sqrt{3}\to \text{در دامنه نیست.}\end{cases}$$

بنابراین اولین نقطهٔ ناپیوستگی تابع f، $x=\sqrt{3}$ است و بیشترین مقدار k باید برابر $\sqrt{3}$ باشد و این نقطه شامل دامنهٔ تابع نیست.

توجه: به ازای $|k|\le\frac{1}{2}$، تابع f روی بازهٔ $(k,-\frac{1}{2}]$ پیوسته است.

(حسابان ۱- حد و پیوستگی؛ صفحه‌های ۱۴۵ تا ۱۵۱)

@MrKonkori

۱۷- **گزینهٔ «۴»** *(محمدرضا کشاورزی)*

با توجه به فرض سؤال، حاصل حد مخرج وقتی $x \to 1$، برابر صفر است، بنابراین باید حد صورت کسر نیز برابر صفر باشد تا حاصل حد کسر، موجود و برابر عددی حقیقی باشد:

$$\sqrt{a+b} = 2 \Rightarrow a+b = 4 \qquad (*)$$

$$\lim_{x\to 1} \frac{\sqrt{ax+b}-2}{x^2-1} = \lim_{x\to 1} \frac{\sqrt{ax+b}-2}{x^2-1} \times \frac{\sqrt{ax+b}+2}{\sqrt{ax+b}+2}$$

$$= \lim_{x\to 1} \frac{ax+b-4}{(x-1)(x+1)(\sqrt{ax+b}+2)}$$

$$\xrightarrow{(*)} \lim_{x\to 1} \frac{ax+4-a-4}{(x-1)(x+1)(4)} = \lim_{x\to 1} \frac{a(x-1)}{(x-1)(2)(4)} = \frac{a}{8} = \frac{3}{2}$$

$$\Rightarrow a = 12 \xrightarrow{(*)} b = -8$$

حال با توجه به مقادیر a و b، حاصل حد خواسته شده را محاسبه می‌کنیم:

$$\lim_{x\to(-8)^-} \frac{12x}{x+8} = \frac{-96}{0^-} = +\infty$$

(حسابان ۱- حد و پیوستگی؛ صفحه‌های ۱۴۱ تا ۱۴۴)

(حسابان ۲- حدهای نامتناهی- حد در بی‌نهایت؛ صفحه‌های ۴۶ تا ۵۵)

۱۸- **گزینهٔ «۱»** *(مهسان کودرزی)*

با توجه به نمودار تابع در اطراف مجانب قائم، مخرج کسر باید ریشهٔ مضاعف داشته باشد:

$$\Delta = 0 \Rightarrow a^2 - 4(3)(12) = 0 \Rightarrow a = 144 \Rightarrow a = \pm 12$$

اگر $a = 12$ باشد:

$$\lim_{x\to k} \frac{x-1}{3(x+2)^2} = \lim_{x\to -2} \frac{x-1}{3(x+2)^2} = \frac{-3}{0^+} = -\infty \quad \text{غ ق ق}$$

اگر $a = -12$ باشد:

$$\lim_{x\to k} \frac{x-1}{3(x-2)^2} = \lim_{x\to 2} \frac{x-1}{3(x-2)^2} = \frac{1}{0^+} = +\infty \quad \text{ق ق}$$

بنابراین $a = -12$ و $k = 2$ داریم: $a + k = -12 + 2 = -10$

(حسابان ۲- حدهای نامتناهی- حد در بی‌نهایت؛ صفحه‌های ۵۵ تا ۵۸)

۱۹- **گزینهٔ «۴»** *(علی سلامت)*

(حالت ۱): اگر $m = -1$ باشد، آن‌گاه:

$$f(x) = \frac{3x-2}{2x+2} \Rightarrow \text{فقط } x = -1 \text{ مجانب قائم است}$$

(حالت ۲): اگر $m \neq -1$، آن‌گاه:

$$(m+1)x^2 + 2x + 1 - m = 0 \xrightarrow{a+c=b} \begin{cases} x_1 = -1 \\ x_2 = \dfrac{m-1}{m+1} \end{cases}$$

حالت (۱-۲): اگر $x_1 = x_2$، آن‌گاه $m = 0$:

$$f(x) = \frac{4x-2}{x^2+2x+1} \Rightarrow \text{فقط } x = -1 \text{ مجانب قائم است}$$

حالت (۲-۲): اگر $x_1 = -1$ ریشهٔ صورت باشد:

$$(m+4)(-1) - 2 = 0 \Rightarrow m = -6$$

$$f(x) = \frac{-2x-2}{-5x^2+2x+7} \Rightarrow \text{فقط } x = \frac{7}{5} \text{ مجانب قائم است}$$

حالت (۳-۲): اگر $x_2 = \dfrac{m-1}{m+1}$، ریشهٔ صورت باشد:

$$(m+4)\left(\frac{m-1}{m+1}\right) - 2 = 0 \Rightarrow m^2 + m - 6 = 0 \Rightarrow \begin{cases} m = -3 \\ m = 2 \end{cases}$$

$$m = -3 \Rightarrow f(x) = \frac{x-2}{-2x^2+2x+4} \Rightarrow \text{فقط } x = -1 \text{ مجانب قائم است}$$

$$m = 2 \Rightarrow f(x) = \frac{6x-2}{3x^2+2x-1} \Rightarrow \text{فقط } x = -1 \text{ مجانب قائم است}$$

بنابراین به ازای پنج مقدار $m = -1, 0, -6, -3, 2$، نمودار تابع f فقط یک مجانب قائم دارد.

(حسابان ۲- حدهای نامتناهی- حد در بی‌نهایت؛ صفحه‌های ۵۵ تا ۵۸)

۲۰- **گزینهٔ «۲»** *(کاظم اجلالی)*

حول $x = 0$ مثلاً در بازهٔ $x \in (-1, 1)$ هم‌ارزی‌های زیر معادل هم‌اند:

$$\sqrt{x^2+1} - x^3 - 1 > 0 \Leftrightarrow \sqrt{x^2+1} > x^3 + 1$$

$$\Leftrightarrow x^2 + 1 > x^6 + 2x^3 + 1 \Leftrightarrow x^6 + 2x^3 - x^2 < 0$$

$$\Leftrightarrow x^2(x^4 + 2x - 1) < 0$$

در یک همسایگی محذوف $x = 0$، عبارت x^2 مثبت و عبارت $x^4 + 2x - 1$ منفی است، بنابراین نابرابری بالا برقرار است و یعنی در این همسایگی (حول $x = 0$)، مخرج $f(x)$، مثبت است. در نتیجه داریم:

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} \frac{x-1}{\sqrt{x^2+1} - x^3 - 1} = \lim_{x\to 0} \frac{-1}{0^+} = -\infty$$

(حسابان ۲- حدهای نامتناهی- حد در بی‌نهایت؛ صفحه‌های ۴۶ تا ۵۸)

@MrKonkori

هندسه ۳

۲۱- **گزینهٔ «۱»** *(احمدرضا فلاح)*

ابتدا ماتریس A را طبق فرض پیدا می‌کنیم:

$$A=\begin{bmatrix}-1 & 0 & 0\\ 0 & -2 & 0\\ 1 & -1 & -3\end{bmatrix}$$

سپس براساس قوانین ضرب ماتریس‌ها، ماتریس A^3 را می‌یابیم:

$$A^3=\begin{bmatrix}-1 & 0 & 0\\ 0 & -2 & 0\\ 1 & -1 & -3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1 & 0 & 0\\ 0 & -2 & 0\\ 1 & -1 & -3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1 & 0 & 0\\ 0 & -2 & 0\\ 1 & -1 & -3\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 4 & 0\\ -4 & 5 & 9\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1 & 0 & 0\\ 0 & -2 & 0\\ 1 & -1 & -3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1 & 0 & 0\\ 0 & -8 & 0\\ 13 & -19 & -27\end{bmatrix}$$

بنابراین مجموع درایه‌های زیر قطر اصلی برابر است با: $-6=-19+13+0$

(هندسه ۳- ماتریس و کاربردها؛ صفحه‌های ۱۷ تا ۲۱)

۲۲- **گزینهٔ «۱»** *(کیوان دارابی)*

از سمت چپ، ماتریس A^{-1} و از سمت راست، ماتریس A را در عبارت فرض سؤال ضرب می‌کنیم:

$$A^{-1}(A+A^{-1})A=A^{-1}(ABA^{-1})A$$

$$\Rightarrow (I+(A^{-1})^2)A=IBI\Rightarrow A+A^{-1}=B$$

(هندسه ۳- ماتریس و کاربردها؛ صفحه‌های ۲۲ و ۲۳)

۲۳- **گزینهٔ «۲»** *(سیرمحمدرضا حسینی‌فرد)*

طبق فرض داریم:

$$\begin{bmatrix}2 & 1\\ 3 & -1\end{bmatrix}X+\begin{bmatrix}1 & 4\\ 2 & -1\end{bmatrix}=I-2X$$

$$\Rightarrow\left(\begin{bmatrix}2 & 1\\ 3 & -1\end{bmatrix}+2I\right)X=I-\begin{bmatrix}1 & 4\\ 2 & -1\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow\begin{bmatrix}4 & 1\\ 3 & 1\end{bmatrix}X=\begin{bmatrix}0 & -4\\ -2 & 2\end{bmatrix}$$

حال باید وارون ماتریس $\begin{bmatrix}4 & 1\\ 3 & 1\end{bmatrix}$ را از سمت چپ در طرفین ضرب کنیم:

$$\Rightarrow X=\begin{bmatrix}4 & 1\\ 3 & 1\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}0 & -4\\ -2 & 2\end{bmatrix}\Rightarrow X=\frac{1}{1}\begin{bmatrix}1 & -1\\ -3 & 4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & -4\\ -2 & 2\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow X=\begin{bmatrix}2 & -6\\ -8 & 20\end{bmatrix}$$

پس مجموع درایه‌های X برابر ۸ است.

(هندسه ۳- ماتریس و کاربردها؛ صفحه‌های ۲۲ تا ۲۵)

۲۴- **گزینهٔ «۳»** *(افشین خاصه‌خان)*

d و d' دو خط موازی با شیب‌های مثبت هستند که فقط یکی از آن‌ها از مبدأ عبور می‌کند. لذا در معادلهٔ ماتریسی متناظر، دترمینان ماتریس ضرایب بایستی صفر بوده و فقط یکی از درایه‌های ماتریس مقادیر معلوم نیز صفر می‌باشد. پس گزینه‌های «۱» و «۴» حذف می‌شوند. همچنین در گزینهٔ «۲» شیب هر دو خط منفی است. (درایه‌های سطرها هم‌علامت‌اند.)

(هندسه ۳- ماتریس و کاربردها؛ صفحه‌های ۲۵ و ۲۶)

۲۵- **گزینهٔ «۴»** *(فرشاد صدیقی‌فر)*

با استفاده از دستور ساروس داریم:

$$\begin{vmatrix}0 & x & \log x\\ -x & 0 & x^2-1\\ -\log x & 1-x^2 & 0\end{vmatrix}$$

$$=\left(0-x\underbrace{(x^2-1)}\log x-x\underbrace{(1-x^2)}\log x\right)-(0+0+0)=0$$

قرینه

دترمینان فوق همواره به ازای $x>0$ (دامنهٔ تعریف لگاریتم) برابر صفر است؛ پس معادله بی‌شمار جواب دارد.

(هندسه ۳- ماتریس و کاربردها؛ صفحه‌های ۲۷ تا ۳۱)

۲۶- **گزینهٔ «۳»** *(اسحاق اسفندیار)*

بررسی گزینه‌ها:

۱) درست $|BA-I|=|BA-BB^{-1}|=|B||A-B^{-1}|$

$=|A-B^{-1}||B|=|AB-I|$

۲) درست $|ABA^{-1}-2I|=|ABA^{-1}-2AA^{-1}|$

$=|A||B-2I||A^{-1}|=|B-2I|$

۳) نادرست؛ برای ماتریس‌های مربعی A و B از مرتبهٔ ۳ داریم:

$$|A-B|=|-(B-A)|=(-1)^3|B-A|=-|B-A|$$

۴) درست

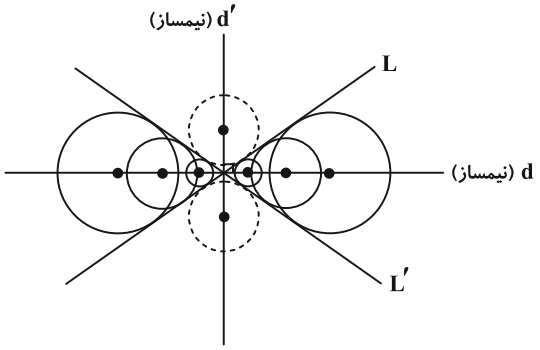
$$|(A^{-1}BA)^2|=|A^{-1}B^2A|=|A^{-1}||B|^2|A|=|B|^2$$

(هندسه ۳- ماتریس و کاربردها؛ صفحه‌های ۳۰ و ۳۱)

@MrKonkori

۲۷- **گزینهٔ «۲»** *(سوگند روشنی)*

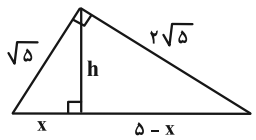
مطابق شکل، مرکز دایره‌هایی که بر دو خط متقاطع، مماس هستند روی نیمسازهای داخلی و خارجی دو خط قرار می‌گیرد. (d و d' عمود بر هم)



(هندسه ۳- آشنایی با مقاطع مخروطی؛ صفحه‌های ۳۶ تا ۳۹)

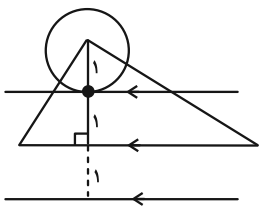
۲۸- **گزینهٔ «۱»** *(افشین خاصه‌خان)*

با توجه به معلومات مسئله، طول وتر برابر ۵ است. حال طبق روابط طولی در مثلث قائم‌الزاویه داریم:



$$(\sqrt{5})^2 = 5x \Rightarrow x = 1 \Rightarrow h^2 = 1\times(5-1) \Rightarrow h = 2$$

اکنون به مرکز رأس قائم و شعاع ۱ دایره‌ای رسم می‌کنیم. همچنین دو خط به موازات وتر و به فاصلهٔ ۱ واحد از آن رسم می‌کنیم. چون طول ارتفاع وارد بر وتر برابر ۲ واحد است، لذا مطابق نمودار، تعداد نقاط تقاطع دو خط و دایره ۱ نقطه خواهد بود.

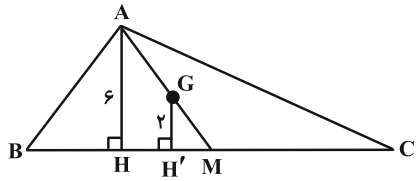


(هندسه ۳- آشنایی با مقاطع مخروطی؛ صفحه‌های ۳۶ تا ۳۹)

۲۹- **گزینهٔ «۳»** *(هومن عقیلی)*

چون فاصلهٔ رأس A تا ضلع BC همواره برابر ۶ است، مکان هندسی رأس A دو خط به موازات BC و به فاصلهٔ ۶ از آن می‌باشد. همچنین می‌دانیم فاصلهٔ مرکز ثقل هر مثلث از هر ضلع آن، $\frac{1}{3}$ طول ارتفاع وارد بر آن ضلع می‌باشد، بنابراین:

$$GH' = \frac{1}{3}AH = 2$$



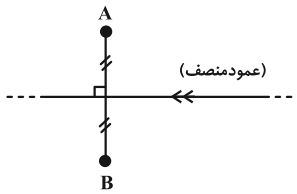
در نتیجه مکان هندسی مرکز ثقل مثلث ABC برابر دو خط به موازات BC و به فاصلهٔ ۲ از آن خواهد بود.

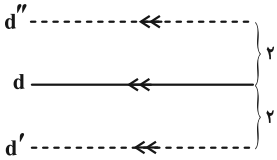
(هندسه ۳- آشنایی با مقاطع مخروطی؛ صفحه‌های ۳۶ تا ۳۹)

۳۰- **گزینهٔ «۲»** *(سیدمحمدرضا حسینی‌فرد)*

الف) مکان هندسی حاصل، تقاطع دو نیمساز عمود بر هم و دو خط موازی می‌باشد و هرگز نمی‌تواند تهی باشد. (در بهترین حالت اگر $\Delta \parallel L$، آن‌گاه $\Delta \perp L'$ و بنابراین با هم متقاطع خواهند بود.)

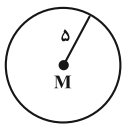
ب)

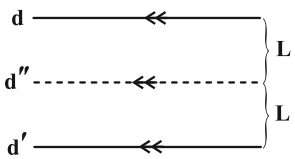




اگر عمودمنصف AB یک خط موازی d و d' (و غیرمنطبق بر آن‌ها) باشد، مجموعه جواب تهی است.

پ)





مطابق شکل دایره و خط d'' نقطهٔ مشترک ندارد و در نتیجه مجموعه جواب تهی است.

(هندسه ۳- آشنایی با مقاطع مخروطی؛ صفحه‌های ۳۶ تا ۳۹)

@MrKonkori

ریاضیات گسسته

۳۱- **گزینهٔ «۴»** *(مصطفی دیداری)*

طبق فرض می‌دانیم q عددی زوج است، پس:

$$q=2t\Rightarrow (6q+5)^2=(12t+5)^2=144t^2+120t+25$$

$$=24(\underbrace{6t^2+5t+1}_{k})+1=24k+1$$

بنابراین مجموع ضرایب جمله‌ها در چندجمله‌ای k برابر است با:

$$6+5+1=12$$

(ریاضیات گسسته- صفحه‌های ۴ و ۵)

۳۲- **گزینهٔ «۳»** *(احمدرضا فلاح)*

طبق فرض سؤال می‌دانیم:

$$\frac{a}{b}+\frac{4}{7}\in\mathbb{Z}\Rightarrow\frac{7a+4b}{7b}\in\mathbb{Z}\Rightarrow 7b\mid 7a+4b$$

از طرفی می‌دانیم $7b\mid 7b$، بنابراین داریم:

$$\begin{cases}7b\mid 7b\xrightarrow{\times a}7b\mid 7ab\\ 7b\mid 7a+4b\xrightarrow{\times b}7b\mid 7ab+4b^2\end{cases}$$

$$\xrightarrow{\text{تفاضل}}7b\mid 4b^2\Rightarrow 7\mid 4b\xrightarrow{\times 2}7\mid 8b\xrightarrow{7\nmid 7b}7\mid b$$

(ریاضیات گسسته- صفحه‌های ۹ تا ۱۲)

۳۳- **گزینهٔ «۴»** *(مصطفی دیداری)*

طبق قضیهٔ تقسیم داریم: $a=12q+7$

برای این‌که مقسوم علیه تبدیل به ۳۶ شود، برای q سه حالت در نظر می‌گیریم:

$$\begin{cases}q=3k\Rightarrow a=12(3k)+7=36k+7\\ q=3k+1\Rightarrow a=12(3k+1)+7=36k+19\\ q=3k+2\Rightarrow a=12(3k+2)+7=36k+31\end{cases}$$

از آنجا که باقی‌ماندهٔ تقسیم عدد a بر ۳۶ نباید برابر ۱۹ باشد، پس a باید به صورت $36k+7$ یا $36k+31$ باشد:

$$\begin{cases}1\le 36k+7<500\Rightarrow k=0,1,2,\dots,13\Rightarrow \text{۱۴ مقدار}\\ 1\le 36k+31<500\Rightarrow k=0,1,2,\dots,13\Rightarrow \text{۱۴ مقدار}\end{cases}$$

پس در مجموع ۲۸ عدد قابل قبول برای a وجود دارد.

(ریاضیات گسسته- صفحه‌های ۱۴ تا ۱۶)

۳۴- **گزینهٔ «۲»** *(سیدمحمدرضا حسینی‌فرد)*

عدد $\overline{aab}$ را در پیمانهٔ ۲۳ به صورت گسترده می‌نویسیم:

$$\overline{aab}\overset{23}{\equiv}0\Rightarrow 100a+10a+b\overset{23}{\equiv}0\Rightarrow 110a+b\overset{23}{\equiv}0$$

$$\Rightarrow -5a+b\overset{23}{\equiv}0\Rightarrow 5a\overset{23}{\equiv}b$$

با توجه به این‌که b فرد و $1\le a,b\le 9$ می‌باشد، داریم:

$$*\ b=1\Rightarrow 5a\overset{23}{\equiv}1\Rightarrow 5a\overset{23}{\equiv}70\xrightarrow[(5,23)=1]{\div 5}a\overset{23}{\equiv}14$$

$$\Rightarrow a=14,37,\dots\quad\times$$

$$*\ b=3\Rightarrow 5a\overset{23}{\equiv}3\Rightarrow 5a\overset{23}{\equiv}-20\Rightarrow a\overset{23}{\equiv}-4\overset{23}{\equiv}19$$

$$\Rightarrow a=19,42,\dots\quad\times$$

$$*\ b=5\Rightarrow 5a\overset{23}{\equiv}5\Rightarrow a\overset{23}{\equiv}1\Rightarrow a=1\quad\checkmark$$

$$*\ b=7\Rightarrow 5a\overset{23}{\equiv}7\Rightarrow 5a\overset{23}{\equiv}30\Rightarrow a\overset{23}{\equiv}6\Rightarrow a=6\quad\checkmark$$

$$*\ b=9\Rightarrow 5a\overset{23}{\equiv}9\Rightarrow 5a\overset{23}{\equiv}55\Rightarrow a\overset{23}{\equiv}11$$

$$\Rightarrow a=11,34,\dots\quad\times$$

بنابراین دو عدد مطلوب ۱۱۵ و ۶۶۷ به دست می‌آید.

(ریاضیات گسسته- صفحه‌های ۱۹ تا ۲۲)

۳۵- **گزینهٔ «۱»** *(مصطفی دیداری)*

نکته: می‌دانیم اگر $a\overset{m}{\equiv}b$ و $a\overset{n}{\equiv}b$، آن‌گاه $a\overset{[m,n]}{\equiv}b$.

از آنجا که $77=7\times 11$، پس باقی‌ماندهٔ تقسیم عدد داده شده را بر ۷ و ۱۱ به دست می‌آوریم:

$$2\times 6^{53}-41\overset{7}{\equiv}2\times(-1)^{53}-41=-43\overset{7}{\equiv}6$$

$$6^2\overset{11}{\equiv}3\xrightarrow{\text{توان }2}6^4\overset{11}{\equiv}9\xrightarrow{\times 6}6^5\overset{11}{\equiv}54\overset{11}{\equiv}-1$$

$$\xrightarrow{\text{توان }10}6^{50}\overset{11}{\equiv}1\xrightarrow{\times 6^3}6^{53}\overset{11}{\equiv}6^3=216\overset{11}{\equiv}7$$

$$\Rightarrow 2\times 6^{53}-41\overset{11}{\equiv}2\times 7-41\overset{11}{\equiv}6$$

بنابراین اگر عدد داده شده را A در نظر بگیریم، کافی است سمت راست دو همنهشتی را یکسان کنیم:

$$\begin{cases}A\overset{7}{\equiv}6\\ A\overset{11}{\equiv}6\end{cases}\xrightarrow{[7,11]=77}A\overset{77}{\equiv}6$$

(ریاضیات گسسته- صفحه‌های۱۹ تا ۲۲)

۳۶- **گزینهٔ «۱»** *(علی ایمانی)*

عبارت داده شده را به پیمانهٔ ۹۹ به صورت گسترده می‌نویسیم:

$$\overline{a2b3}+\overline{2a3b}\overset{99}{\equiv}1000a+200+10b+3+2000+100a+30+b$$

$$\overset{99}{\equiv}1100a+11b+2233\overset{99}{\equiv}11a+11b-44\overset{99}{\equiv}0$$

@MrKonkori

$$\Rightarrow 11(a+b)\overset{99}{\equiv}44 \xrightarrow[(11,99)=11]{+11} a+b\overset{9}{\equiv}4$$

از آنجا که $0 \le a+b < 20$، مقادیر ممکن برای $a+b$، اعداد ۴ و ۱۳ هستند که تنها مقدار ۴ در گزینه‌ها وجود دارد.

(ریاضیات گسسته- صفحه‌های ۱۹ تا ۲۲)

۳۷- **گزینهٔ «۱»** *(فرشاد صدیقی‌فر)*

$$\begin{cases} x: \text{تعداد پسرها} \\ y: \text{تعداد دخترها} \end{cases} \Rightarrow 7x+4y=82 \Rightarrow 7x\overset{4}{\equiv}82 \Rightarrow 3x\overset{4}{\equiv}2\overset{4}{\equiv}6$$

$$\xrightarrow[(3,4)=1]{+3} x\overset{4}{\equiv}2 \Rightarrow x=4k+2$$

با جای‌گذاری x در معادلهٔ اولیه داریم:

$$7(4k+2)+4y=82 \Rightarrow 4y=-28k+68$$

$$\xrightarrow{+4} y=-7k+17$$

می‌دانیم x و y اعدادی بزرگ‌تر یا مساوی صفر هستند، بنابراین:

$$\begin{cases} x\ge 0 \Rightarrow 4k+2\ge 0 \Rightarrow k\ge -\frac{1}{2} \\ y\ge 0 \Rightarrow -7k+17\ge 0 \Rightarrow k\le \frac{17}{7} \end{cases}$$

$$\Rightarrow -\frac{1}{2}\le k\le \frac{17}{7} \xrightarrow{k\in\mathbb{Z}} k=0 \text{ یا } 1 \text{ یا } 2$$

بنابراین مقادیر ممکن برای x و y عبارتند از:

$$\begin{cases} x=2\ ,\ y=17 \Rightarrow x+y=19 \\ x=6\ ,\ y=10 \Rightarrow x+y=16 \\ x=10\ ,\ y=3 \Rightarrow x+y=13 \end{cases} \text{(کمترین تعداد افراد)}$$

(ریاضیات گسسته- صفحه‌های ۲۶ تا ۲۸)

۳۸- **گزینهٔ «۳»** *(سیدمحمدرضا حسینی‌فرد)*

ابتدا به کمک معادلهٔ همنهشتی، مقدار a را به دست می‌آوریم:

$$9x+15y=120 \xrightarrow{+3} 3x+5y=40 \Rightarrow 3x\overset{5}{\equiv}40$$

$$\xrightarrow{5\times 8=40} 3x\overset{5}{\equiv}0 \xrightarrow[(3,5)=1]{+3} x\overset{5}{\equiv}0 \Rightarrow x=5k \qquad (k\in\mathbb{Z})$$

پس بزرگ‌ترین مقدار طبیعی دو رقمی x برابر $a=5\times 19=95$ بوده و داریم:

$$a^{1403}\overset{4}{\equiv}95^{1403} \xrightarrow{95\overset{4}{\equiv}-1} a^{1403}\overset{4}{\equiv}(-1)^{1403}\overset{4}{\equiv}-1\overset{4}{\equiv}3$$

(ریاضیات گسسته- صفحه‌های ۲۶ تا ۲۸)

۳۹- **گزینهٔ «۲»** *(احمدرضا فلاح)*

طبق فرض می‌دانیم که اعداد طبیعی x و y به صورت $3k$ و $3k'$ هستند و داریم:

$$4x+7y=300 \Rightarrow 4(3k)+7(3k')=300$$

$$\Rightarrow 4k+7k'=100 \qquad (k\ ,\ k'\in\mathbb{N}) \qquad (*)$$

معادلهٔ سیالهٔ به دست آمده را می‌توان به یک معادلهٔ همنهشتی تبدیل کرد:

$$7k'\overset{4}{\equiv}100 \xrightarrow{4\times 25=100} 7k'\overset{4}{\equiv}0 \xrightarrow[(4,7)=1]{+7} k'\overset{4}{\equiv}0$$

$$\Rightarrow k'=4q \qquad (q\in\mathbb{N})$$

$$(*): 4k+7(4q)=100 \Rightarrow k=25-7q$$

از آنجا که k و k' اعدادی طبیعی هستند، داریم:

$$\begin{cases} k\ge 1 \Rightarrow 25-7q\ge 1 \Rightarrow q\le \frac{24}{7} & (1) \\ k'\ge 1 \Rightarrow 4q\ge 1 \Rightarrow q\ge \frac{1}{4} & (2) \end{cases}$$

$$\xrightarrow{(1),(2)} \frac{1}{4}\le q\le \frac{24}{7} \xrightarrow{q\in\mathbb{N}} q=1\ ,\ 2\ ,\ 3$$

مقادیری که برای x و y به دست می‌آید عبارتند از:

$$\begin{cases} x=54\ ,\ y=12 \\ x=33\ ,\ y=24 \\ x=12\ ,\ y=36 \end{cases}$$

(ریاضیات گسسته- صفحه‌های ۲۶ تا ۲۸)

۴۰- **گزینهٔ «۱»** *(نیلوفر مهدوی)*

نکته: شرط آن که معادلهٔ سیالهٔ $ax+by=c$ در مجموعهٔ اعداد صحیح دارای جواب باشد، آن است که: $(a\ ,\ b)\mid c$

$$(152\ ,\ 209)\mid 4m+2 \Rightarrow (19\times 8\ ,\ 19\times 11)\mid 4m+2$$

$$\Rightarrow 19\mid 4m+2 \Rightarrow 4m+2\overset{19}{\equiv}0 \Rightarrow 4m\overset{19}{\equiv}-2 \Rightarrow 4m\overset{19}{\equiv}36$$

$$\xrightarrow[(4,19)=1]{+4} m\overset{19}{\equiv}9 \Rightarrow m=19k+9 \qquad (k\in\mathbb{Z})$$

$$1\le m<340 \Rightarrow 1\le 19k+9<340 \Rightarrow k=0\ ,\ 1\ ,\ 2\ ,\ \dots\ ,\ 17$$

بنابراین ۱۸ مقدار طبیعی و کوچک‌تر از ۳۴۰ برای m یافت می‌شود.

(ریاضیات گسسته- صفحه‌های ۲۶ تا ۲۸)

@MrKonkori

آمار و احتمال

۴۱- **گزینهٔ «۴»** *(کیوان دارابی)*

احتمال رخداد پیشامد مطلوب برابر است با:

$$P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{\binom{۷}{۳}\times ۴!}{\binom{۹}{۴}\times ۴!}=\frac{\frac{۷\times ۶\times ۵}{۳!}}{\frac{۹\times ۸\times ۷\times ۶}{۴!}}=\frac{۲۴\times ۵}{۶\times ۹\times ۸}=\frac{۵}{۱۸}$$

(ریاضی ۱- آمار و احتمال؛ صفحهٔ ۱۴۶)

۴۲- **گزینهٔ «۱»** *(نیلوفر مهدوی)*

اگر پیشامد مضرب ۳ بودن را با A و پیشامد مضرب ۷ بودن را با B نشان دهیم، داریم:

$$P(A)=\frac{[\frac{۱۴۴}{۳}]-[\frac{۲۴}{۳}]}{۱۲۰}=\frac{۴۸-۸}{۱۲۰}=\frac{۴۰}{۱۲۰}$$

$$P(A\cap B)=\frac{[\frac{۱۴۴}{۲۱}]-[\frac{۲۴}{۲۱}]}{۱۲۰}=\frac{۶-۱}{۱۲۰}=\frac{۵}{۱۲۰}$$

$$P(A-B)=P(A)-P(A\cap B)=\frac{۴۰}{۱۲۰}-\frac{۵}{۱۲۰}=\frac{۳۵}{۱۲۰}=\frac{۷}{۲۴}$$

(آمار و احتمال- احتمال؛ صفحه‌های ۳۹ تا ۴۳)

۴۳- **گزینهٔ «۱»** *(مصطفی دیداری)*

مقادیر $P(a)$، $P(b)$ و $P(c)$ را به ترتیب برابر k، kq و $kq^۲$ فرض می‌کنیم. حال داریم:

$$\begin{cases} k+kq+kq^۲=۱ & (۱)\\ \frac{۱}{k}+\frac{۱}{kq}+\frac{۱}{kq^۲}=\frac{۴۹}{۴}\Rightarrow\frac{kq^۲+kq+k}{k^۲q^۲}=\frac{۴۹}{۴} & (۲)\end{cases}$$

از تقسیم تساوی (۱) بر تساوی (۲) داریم:

$$k^۲q^۲=\frac{۴}{۴۹}\xrightarrow{k\,,\,q>۰}kq=\frac{۲}{۷}$$

حال با جای‌گذاری مقدار kq در تساوی (۱) داریم:

$$k+\frac{۲}{۷}+\frac{۲}{۷}q=۱\Rightarrow k=\frac{۵}{۷}-\frac{۲}{۷}q\xrightarrow{k=\frac{۲}{۷q}}$$

$$\frac{۲}{۷q}=\frac{۵}{۷}-\frac{۲}{۷}q\xrightarrow{\times ۷q}۲=۵q-۲q^۲$$

$$\Rightarrow ۲q^۲-۵q+۲=۰\Rightarrow(۲q-۱)(q-۲)=۰\Rightarrow q=\frac{۱}{۲}\ \text{یا}\ ۲$$

بنابراین مقادیر $P(a)$، $P(b)$ و $P(c)$ به صورت‌های زیر می‌توانند باشند:

$$\begin{cases} q=\frac{۱}{۲}\Rightarrow k=\frac{۴}{۷}\Rightarrow P(a)=\frac{۴}{۷}\,,\,P(b)=\frac{۲}{۷}\,,\,P(c)=\frac{۱}{۷}\\ q=۲\Rightarrow k=\frac{۱}{۷}\Rightarrow P(a)=\frac{۱}{۷}\,,\,P(b)=\frac{۲}{۷}\,,\,P(c)=\frac{۴}{۷}\end{cases}$$

در هر دو حالت مذکور بیشترین مقدار ممکن برای احتمال یک پیشامد ساده برابر $\frac{۴}{۷}$ می‌باشد.

(آمار و احتمال- احتمال؛ صفحه‌های ۴۴ تا ۴۷)

۴۴- **گزینهٔ «۳»** *(نیلوفر مهدوی)*

طبق فرض داریم:

$$P(B\mid A)=P(A\mid B')\Rightarrow\frac{P(A\cap B)}{P(A)}=\frac{P(A\cap B')}{P(B')}$$

$$\Rightarrow\frac{P(A\cap B)}{P(A)}=\frac{P(A-B)}{۱-P(B)}=\frac{P(A)-P(A\cap B)}{۱-P(B)}\qquad (*)$$

از طرفی می‌دانیم:

$$\begin{cases} P(A\cap B)=\frac{۲}{۹}\\ P(A')=۱-P(A)=\frac{۲}{۳}\Rightarrow P(A)=\frac{۱}{۳}\end{cases}$$

حال با توجه به (*) داریم:

$$\frac{\frac{۲}{۹}}{\frac{۱}{۳}}=\frac{\frac{۱}{۳}-\frac{۲}{۹}}{۱-P(B)}\Rightarrow P(B)=\frac{۵}{۶}$$

@MrKonkori

بنابراین احتمال آن‌که حداقل یکی از پیشامدهای A یا B رخ دهد برابر $P(A\cup B)$ است و داریم:

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$$

$$=\frac{۱}{۳}+\frac{۵}{۶}-\frac{۲}{۹}=\frac{۱۷}{۱۸}$$

(آمار و احتمال- احتمال: صفحه‌های ۴۱ و ۵۰)

۴۵- **گزینهٔ «۳»** (علیرضا شریف‌طیبی)

یادآوری: طبق قانون جذب در مجموعه‌ها داشتیم: $A\cap(A\cup B)=A$

نکته:

$$\begin{cases}A\cup(B-A)=A\cup(B\cap A')=A\cup B\\ A\cap(B-A)=A\cap B\cap A'=\varnothing\end{cases}$$

$$\Rightarrow P(A)+P(B-A)=P(A\cup B)\qquad (*)$$

بنابراین احتمال خواسته شده برابر است با:

$$P(A\mid A\cup B)=\frac{P(A\cap(A\cup B))}{P(A\cup B)}=\frac{P(A)}{P(A\cup B)}\overset{(*)}{=}$$

$$\frac{P(A)}{P(A)+P(B-A)}=\frac{\frac{۲}{۵}}{\frac{۲}{۵}+\frac{۱}{۳}}=\frac{\frac{۲}{۵}}{\frac{۱۱}{۱۵}}=\frac{۳۰}{۵۵}=\frac{۶}{۱۱}$$

(آمار و احتمال- احتمال: صفحه‌های ۴۱ و ۵۰)

۴۶- **گزینهٔ «۳»** (کیوان دارابی)

پیشامدهای A و B را به گونهٔ زیر تعریف می‌کنیم:

$$\begin{cases}A: \text{پیشامد قبول شدن نوید}\\ B: \text{پیشامد تقلب کردن نوید}\end{cases}$$

حال اطلاعات مسئله را برحسب پیشامدهای A و B بازنویسی می‌کنیم:

$$\begin{cases}P(A\mid B)=۰/۷\Rightarrow\frac{P(A\cap B)}{P(B)}=\frac{۷}{۱۰}\\ \Rightarrow\frac{۱۰}{۷}P(A\cap B)=P(B)\qquad (۱)\\ P(B\mid A)=۰/۶\Rightarrow\frac{P(A\cap B)}{P(A)}=\frac{۶}{۱۰}\\ \Rightarrow\frac{۵}{۳}P(A\cap B)=P(A)\qquad (۲)\\ P(A'\cap B')=۰/۲\Rightarrow P[(A\cup B)']=۱-P(A\cup B)=\frac{۲}{۱۰}\\ \Rightarrow P(A\cup B)=\frac{۸}{۱۰}\qquad (۳)\end{cases}$$

حال داریم:

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)\xrightarrow{(۱),(۲),(۳)}$$

$$\frac{۸}{۱۰}=\frac{۵}{۳}P(A\cap B)+\frac{۱۰}{۷}P(A\cap B)-P(A\cap B)$$

$$\Rightarrow\frac{۴}{۵}=\frac{۴۴}{۲۱}P(A\cap B)\Rightarrow P(A\cap B)=\frac{۴\times۲۱}{۵\times۴۴}=\frac{۲۱}{۵۵}$$

$$\xrightarrow{(۱)}P(B)=\frac{۲۱}{۵۵}\times\frac{۱۰}{۷}=\frac{۶}{۱۱}$$

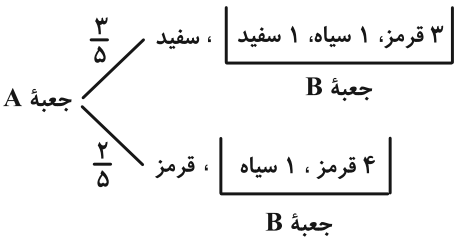
(آمار و احتمال- احتمال: صفحه‌های ۴۸ تا ۵۱)

۴۷- **گزینهٔ «۴»** (افشین خاصه‌خان)

مهره‌های موجود در جعبه‌های A و B به صورت زیر است:

$$A\begin{cases}\text{سفید }۳\\ \text{قرمز }۲\end{cases}\qquad B\begin{cases}\text{سیاه }۱\\ \text{قرمز }۳\end{cases}$$

قسمت اول نمودار درختی مربوط به این سؤال، به شکل زیر است:



@MrKonkori

احتمال مطلوب سؤال برابر است با:

$$(\frac{۳}{۵})(\frac{\binom{۳}{۲}+\binom{۳}{۱}\binom{۲}{۱}}{\binom{۵}{۲}})+(\frac{۲}{۵})(\frac{۴}{۵})$$

$$=(\frac{۳}{۵})(\frac{۹}{۱۰})+\frac{۸}{۲۵}=\frac{۲۷}{۵۰}+\frac{۸}{۲۵}=\frac{۴۳}{۵۰}=۰/۸۶$$

(آمار و احتمال- احتمال: صفحه‌های ۵۲ و ۵۳)

۴۸- **گزینهٔ «۳»** *(سیدمحمدرضا حسینی‌فرد)*

فضای نمونهٔ این آزمایش ۳۶ عضو دارد و حالت‌هایی که مجموع دو تاس برابر ۷ می‌شود در جدول زیر مشخص شده است:

	۲	۲	۳	۴	۴	۵
۲						۷
۲						۷
۳				۷	۷	
۴			۷			
۴			۷			
۵	۷	۷				

بنابراین احتمال رخ دادن پیشامد خواسته شده برابر است با:

$$P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{۸}{۳۶}=\frac{۲}{۹}$$

(ریاضی ۱- آمار و احتمال: صفحه‌های ۱۴۲ تا ۱۴۹)

۴۹- **گزینهٔ «۳»** *(احمدرضا فلاح)*

پیشامدهای $B_۱$، $B_۲$ و $B_۳$ را به گونهٔ زیر تعریف کرده و احتمال هر یک را به دست می‌آوریم:

$$\begin{cases} B_۱: \text{رو آمدن هر ۲ سکه} \Rightarrow P(B_۱)=\frac{۱}{۴} \\ B_۲: \text{رو آمدن تنها ۱ سکه} \Rightarrow P(B_۲)=\frac{۲}{۴}=\frac{۱}{۲} \\ B_۳: \text{سایر حالات} \Rightarrow P(B_۳)=۱-(\frac{۱}{۴}+\frac{۲}{۴})=\frac{۱}{۴} \end{cases}$$

اگر A پیشامد فرد آمدن تاس‌ها باشد، طبق قانون احتمال کل داریم:

$$P(A)=P(B_۱)P(A\mid B_۱)+P(B_۲)P(A\mid B_۲)+P(B_۳)P(A\mid B_۳)$$

$$\Rightarrow P(A)=\frac{۱}{۴}\times(\frac{۱}{۲}\times\frac{۱}{۲})+\frac{۱}{۲}\times(\frac{۱}{۲}\times\frac{۱}{۲}\times\frac{۱}{۲})+\frac{۱}{۴}\times\frac{۱}{۲}$$

$$\Rightarrow P(A)=\frac{۱}{۱۶}+\frac{۱}{۱۶}+\frac{۱}{۸}=\frac{۱}{۴}$$

اکنون می‌توان طبق قانون بیز، احتمال خواسته شده را به دست آورد:

$$P(B_۱\mid A)=\frac{P(B_۱)P(A\mid B_۱)}{P(A)}=\frac{\frac{۱}{۴}\times(\frac{۱}{۲}\times\frac{۱}{۲})}{\frac{۱}{۴}}=\frac{۱}{۴}$$

(آمار و احتمال- احتمال: صفحه‌های ۵۵ تا ۵۸)

۵۰- **گزینهٔ «۱»** *(امیرحسین ابومحبوب)*

در صورتی که مهره‌ها را با جای‌گذاری خارج کنیم، پیشامدهای خروج ۲ مهره مستقل از یکدیگرند و در نتیجه داریم:

$$P(\text{دو مهرهٔ همرنگ})=\underbrace{\frac{۳}{۶}\times\frac{۳}{۶}}_{\text{آبی}}+\underbrace{\frac{۲}{۶}\times\frac{۲}{۶}}_{\text{قرمز}}+\underbrace{\frac{۱}{۶}\times\frac{۱}{۶}}_{\text{زرد}}=\frac{۱۴}{۳۶}=\frac{۷}{۱۸}$$

در صورتی که مهره‌ها را بدون جای‌گذاری خارج کنیم، آن‌گاه طبق قانون ضرب احتمال داریم:

$$P(\text{دو مهرهٔ همرنگ})=\underbrace{\frac{۳}{۶}\times\frac{۲}{۵}}_{\text{آبی}}+\underbrace{\frac{۲}{۶}\times\frac{۱}{۵}}_{\text{قرمز}}=\frac{۸}{۳۰}=\frac{۴}{۱۵}$$

(تذکر: دقت کنید که در این حالت احتمال خروج ۲ مهرهٔ زرد وجود ندارد.)

بنابراین نسبت این دو احتمال برابر است با:

$$\frac{\frac{۷}{۱۸}}{\frac{۴}{۱۵}}=\frac{۷\times۱۵}{۴\times۱۸}=\frac{۳۵}{۲۴}$$

(آمار و احتمال- احتمال: صفحه‌های ۵۲ و ۶۳ تا ۶۸)

@MrKonkori

آمار و احتمال

۵۱- **گزینهٔ «۴»** *(امیرحسین ابومحبوب)*

میزان بارندگی برحسب سانتی‌متر، متغیر کمّی پیوسته، نوع بارندگی (باران، برف و تگرگ) متغیر کیفی اسمی و شدت بارندگی (کم، متوسط و زیاد) متغیر کیفی ترتیبی است.

(ریاضی ۱- آمار و احتمال؛ صفحه‌های ۱۶۲ تا ۱۷۰)

۵۲- **گزینهٔ «۳»** *(افشین خاصه‌خان)*

مطابق تعریف در نمونه‌گیری طبقه‌ای، از همهٔ طبقه‌ها یک نمونهٔ تصادفی ساده انتخاب می‌شود. (طبقه‌ها به صورت تصادفی انتخاب نمی‌شوند.)

(آمار و احتمال- آمار استنباطی؛ صفحه‌های ۹۸ تا ۱۰۱)

۵۳- **گزینهٔ «۲»** *(مصطفی دیداری)*

از آنجا که $\frac{۷۱۵}{۶۵}=۱۱$، پس افراد به ۶۵ گروه ۱۱ تایی تقسیم شده‌اند. همچنین چون $۶۹\overset{۱۱}{\equiv}۳$، پس شمارهٔ اولین نفر انتخاب شده برابر ۳ و قدرنسبت شماره‌های انتخابی برابر ۱۱ است و در نتیجه شماره‌های انتخاب شده به صورت $۱۱k+۳$ بوده و باقی‌ماندهٔ آن‌ها بر ۱۱ برابر ۳ است؛ پس داریم:

$$abc\overset{۱۱}{\equiv}۳ \Rightarrow c-b+a\overset{۱۱}{\equiv}۳ \xrightarrow{-۸\le c-b+a\le ۱۸}$$

$$\begin{cases} c-b+a=-۸ & \text{غ ق ق} \\ c-b+a=۳ & \text{ق ق} \xrightarrow{\text{مثال}} ۱۱۳ \\ c-b+a=۱۴ & \text{ق ق} \xrightarrow{\text{مثال}} ۷۰۷ \end{cases}$$

(آمار و احتمال- آمار استنباطی؛ صفحهٔ ۱۰۱)

۵۴- **گزینهٔ «۱»** *(احمدرضا فلاح)*

این نوع نمونه‌گیری، «نمونه‌گیری خوشه‌ای» نام دارد. در این روش نمونه‌گیری کل جامعه در قالب چند گروه یا خوشه در نظر گرفته می‌شوند. این خوشه‌ها به عنوان واحدهای آماری اولیه درنظر گرفته می‌شوند و تعدادی از آن‌ها انتخاب می‌شوند؛ سپس همهٔ واحدهای آماری آن خوشه‌ها به عنوان نمونه در نظر گرفته شده و بررسی می‌شوند. در این روش نمونه‌گیری اگر تعداد کل خوشه‌ها n و تعداد خوشه‌های انتخاب m باشد، احتمال انتخاب هر عضو جامعه $\frac{m}{n}$ خواهد بود:

$$\begin{cases} m=۳ \\ n=۱۰ \end{cases} \Rightarrow P=\frac{۳}{۱۰}=۰/۳$$

(آمار و احتمال- آمار استنباطی؛ صفحه‌های ۹۸ تا ۱۰۱)

۵۵- **گزینهٔ «۴»** *(امیرحسین ابومحبوب)*

در بین روش‌های بیان شده، تنها روش نمونه‌گیری در گزینهٔ «۴» یک روش نمونه‌گیری احتمالی است و همهٔ دانش‌آموزان هر کدام از کلاس‌ها شانس معلومی برای انتخاب شدن در نمونه را دارند و روشی تصادفی برای انتخاب افراد به کار رفته است. در سایر گزینه‌ها، فقط یک نفر مشخص در هر کلاس شانس انتخاب در نمونه را پیدا می‌کند و نمونه‌گیری احتمالی نیست.

(آمار و احتمال- آمار استنباطی؛ صفحه‌های ۱۰۱ تا ۱۰۴)

۵۶- **گزینهٔ «۱»** *(نیلوفر مهروی)*

میانگین جامعه برابر است با:

$$\mu=\frac{۱+۲+\ldots+۷۹}{۷۹}=\frac{\frac{۷۹\times ۸۰}{۲}}{۷۹}=۴۰$$

@MrKonkori

میانگین جامعه برابر ۴۰ است پس برای آن‌که میانگین یک نمونهٔ دوتایی نظیر $\{a,b\}$ برابر ۴۰ شود، باید $a+b=80$ بشود؛ بنابراین مقادیر ممکن برای $\{a,b\}$ عبارتند از: $\{41,39\},\ldots,\{78,2\},\{79,1\}$ که تعداد آن‌ها برابر ۳۹ است. احتمال آن‌که میانگین نمونه با جامعه یکسان نباشد برابر است با:

$$1-\frac{39}{\binom{79}{2}}=1-\frac{39}{79\times 39}=1-\frac{1}{79}=\frac{78}{79}$$

(آمار و احتمال- آمار استنباطی؛ صفحه‌های ۱۱۲ تا ۱۱۴)

۵۷- **گزینهٔ «۲»** *(افشین خاصه‌خان)*

چون نمونه‌ها سه‌تایی هستند لذا تعداد کل انتخاب‌ها برابر است با $\binom{5}{3}=10$

و چون برآورد میانگین ۲۰ میلیون تومان است، مجموعه‌های سه عضوی‌ای که مجموع اعضای آن‌ها برابر ۶۰ می‌باشند را مشخص می‌کنیم:

$$\{25,20,15\},\{30,20,10\}$$

پس احتمال برآورد میانگین ۲۰ میلیون تومان برابر با $\frac{2}{10}=0/2$ است.

(آمار و احتمال- آمار استنباطی؛ صفحه‌های ۱۱۲ تا ۱۱۴)

۵۸- **گزینهٔ «۱»** *(احمدرضا فلاح)*

نکته: انحراف معیار برآورد میانگین جامعه‌ای با انحراف معیار σ توسط نمونه‌ای با اندازهٔ n از دستور $\sigma_{\bar{x}}=\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ محاسبه می‌شود. چون هر دو نمونه متعلق به یک جامعه می‌باشند، σ آن‌ها یکسان است.

$$\begin{cases} n_2-n_1=400 \\ \sigma_{\bar{x}}=\frac{5}{3}\sigma'_{\bar{x}} \end{cases} \Rightarrow \frac{\sigma}{\sqrt{n_1}}=\frac{\frac{5}{3}\sigma}{\sqrt{n_1+400}} \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{n_1}}=\frac{\frac{5}{3}}{\sqrt{n_1+400}}$$

$$\xrightarrow{\text{توان ۲}} \frac{1}{n_1}=\frac{25}{9}\times\frac{1}{n_1+400} \Rightarrow 9n_1+3600=25n_1$$

$$\Rightarrow 16n_1=3600 \Rightarrow n_1=225$$

(آمار و احتمال- آمار استنباطی؛ صفحهٔ ۱۱۵)

۵۹- **گزینهٔ «۱»** *(کیوان دارابی)*

در جامعه‌ای با انحراف معیار σ و میانگین $\bar{x}$، برای نمونه‌ای با اندازهٔ n، بازه با اطمینان بیش از ۹۵٪ به صورت $[\bar{x}-\frac{2\sigma}{\sqrt{n}},\ \bar{x}+\frac{2\sigma}{\sqrt{n}}]$ می‌باشد.

در این جامعه $\sigma=10$ می‌باشد، بنابراین:

$$[\bar{x}-\frac{20}{\sqrt{n}},\ \bar{x}+\frac{20}{\sqrt{n}}]=[9/8,\ 10/2]$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{40}{\sqrt{n}}=0/4 \Rightarrow \sqrt{n}=100 \Rightarrow n=10000 \\ \bar{x}-\frac{20}{\sqrt{n}}=9/8 \Rightarrow \bar{x}-0/2=9/8 \Rightarrow \bar{x}=10 \end{cases}$$

بنابراین مجموع داده‌های نمونه برابرند با:

$$\bar{x}=\frac{x_1+\ldots+x_n}{n} \Rightarrow x_1+\ldots+x_n=n\bar{x}=10^4\times 10=10^5$$

(آمار و احتمال- آمار استنباطی؛ صفحه‌های ۱۱۵ و ۱۱۶)

۶۰- **گزینهٔ «۲»** *(امیرحسین ملازینل)*

مطابق با تعاریف صفحهٔ ۱۰۷ کتاب درسی، زمانی از مصاحبه استفاده می‌شود که آمارگیر از همهٔ پاسخ‌هایی ممکن اطلاعات کافی نداشته باشد، در بسیاری از مؤسسات و سامانه‌ها استفاده از روش دادگان برای جمع‌آوری اطلاعات به سرعت رواج یافته و پرسشنامه مرسوم‌ترین ابزار گرفتن اطلاعات از مردم می‌باشد.

(آمار و احتمال- آمار استنباطی؛ صفحهٔ ۱۰۷)

@MrKonkori

فیزیک ۳

۶۱- **گزینهٔ «۳»** *(محسن سلماسی‌ونر)*

در نمودار $x-t$ شیب خط مماس بر نمودار بیانگر سرعت متحرک است، بنابراین در بازه‌های زمانی ($t=0$ تا $t=1s$) و ($t=4s$ تا $t=6s$) که شیب خط مماس بر نمودار مقداری مثبت است، سرعت نیز مثبت خواهد بود.

در نمودار $x-t$ تا زمانی که نمودار بالای محور t است، بردار مکان در جهت مثبت خواهد بود. بنابراین در بازهٔ زمانی ($t=0$ تا $t=2s$) بردار مکان متحرک مثبت خواهد بود.

(فیزیک ۳- حرکت بر خط راست؛ صفحه‌های ۱ تا ۱۰)

۶۲- **گزینهٔ «۴»** *(مسعود خندانی)*

چون فاصلهٔ زمانی عکس‌ها یکسان است و مسافت پیموده شده بین دو لحظه ابتدا کاهش (کاهش تندی) و سپس افزایش (افزایش تندی) می‌یابد؛ پس حرکت متحرک ابتدا کندشونده و سپس تندشونده است.

(فیزیک ۳- حرکت بر خط راست؛ صفحه‌های ۱ تا ۱۰ و ۱۶)

۶۳- **گزینهٔ «۳»** *(علیرضا جباری)*

اگر متحرکی مسافت ℓ_1 را با تندی ثابت v_1 و پس از آن مسافت ℓ_2 را با تندی ثابت v_2 بپیماید، تندی متوسط آن در کل مسیر برابر است با:

$$s_{av}=\frac{\ell_1+\ell_2}{\Delta t_1+\Delta t_2}=\frac{\ell_1+\ell_2}{\frac{\ell_1}{v_1}+\frac{\ell_2}{v_2}}$$

$$\xrightarrow[v_1=72\frac{km}{h}=72+3/6=20\frac{m}{s}\ ,\ \ell=\ell_1+\ell_2]{P=\frac{m}{n}\ ,\ v_2=30\frac{m}{s}\ ,\ s_{av}=25\frac{m}{s}}$$

برای ساده‌تر شدن محاسبات $\frac{m}{n}$ را برابر P فرض می‌کنیم:

$$25=\frac{P\ell+(1-P)\ell}{\frac{P\ell}{20}+\frac{(1-P)\ell}{30}}=\frac{1}{\frac{P}{20}+\frac{(1-P)}{30}}$$

$$\Rightarrow \frac{5}{4}P+\frac{5}{6}(1-P)=1\Rightarrow \frac{5}{4}P+\frac{5}{6}-\frac{5}{6}P=1$$

$$\Rightarrow \frac{15P-10P}{12}=\frac{1}{6}\Rightarrow \frac{5P}{12}=\frac{1}{6}\Rightarrow P=\frac{2}{5}$$

$$\xrightarrow{P=\frac{m}{n}} \frac{m}{n}=\frac{2}{5}$$

(فیزیک ۳- حرکت بر خط راست؛ صفحه‌های ۱۳ تا ۱۵)

۶۴- **گزینهٔ «۱»** *(بهزاد آزادخر)*

طبق نمودار مکان- زمان متحرک‌ها که خط راست است، حرکت یکنواخت است، پس:

$$x_A=v_At+x_{0A}\Rightarrow x_A=v_At-2$$

$$x_B=v_Bt+x_{0B}\Rightarrow x_B=v_Bt+4$$

در لحظهٔ $t=5s$ دو متحرک به هم می‌رسند.

$$x_A=x_B\xrightarrow{t=5s}5v_A-2=5v_B+4\Rightarrow v_A-v_B=1/2$$

برای فاصلهٔ دو متحرک در لحظهٔ $t=8s$ داریم:

$$|x_A-x_B|=|(v_At+x_{0A})-(v_Bt+x_{0B})|$$

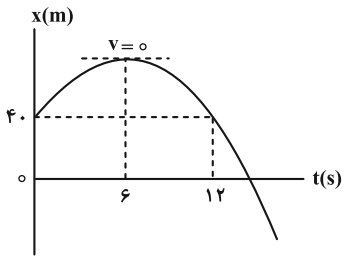
$$=|8v_A-2-8v_B-4|=|8(v_A-v_B)-6|$$

$$=|8(1/2)-6|=|9/6-6|=3/6m$$

(فیزیک ۳- حرکت بر خط راست؛ صفحه‌های ۱۳ تا ۱۵)

۶۵- **گزینهٔ «۳»** *(علیرضا جباری)*

با توجه به تقارن موجود در نمودار سهمی، در لحظهٔ $t=6s$ که در رأس سهمی قرار دارد، سرعت متحرک صفر است.



$$v=at+v_0\xrightarrow[t=6s]{v=0\ ,\ a=-0/5\frac{m}{s^2}}$$

(توجه داشته باشید که گودی سهمی نمودار مکان- زمان، رو به پایین است بنابراین شتاب حرکت منفی است.)

$$0=-0/5\times6+v_0\Rightarrow v_0=3\frac{m}{s}$$

لحظه‌ای که جهت بردار مکان عوض می‌شود، همان لحظه‌ای است که متحرک از مبدأ مکان ($x=0$) می‌گذرد. با استفاده از رابطهٔ سرعت- جابه‌جایی می‌توان نوشت:

$$v^2-v_0^2=2a\Delta x\xrightarrow[\Delta x=0-40=-40m]{v_0=3\frac{m}{s}\ ,\ a=-0/5\frac{m}{s^2}}$$

@MrKonkori

$$v^۲ - ۹ = ۲(-۰/۵)(-۴۰) \Rightarrow v^۲ = ۴۹ \Rightarrow v = \pm ۷\frac{m}{s}$$

با توجه به نمودار $v = -۷\frac{m}{s}$ است، اما تندی متحرک برابر با $|v| = ۷\frac{m}{s}$ می‌باشد.

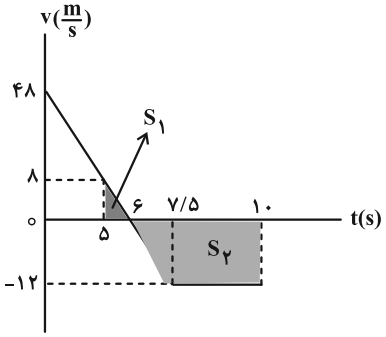
(فیزیک ۳- حرکت بر خط راست؛ صفحه‌های ۱۵ تا ۲۱)

۶۶- **گزینهٔ «۱»** *(مجتبی نکوئیان)*

با توجه به این‌که حرکت متحرک با شتاب ثابت است، معادلهٔ سرعت- زمان آن را می‌توان به صورت زیر به دست آورد:

$$\begin{cases} x = \frac{۱}{۲}at^۲ + v_۰t + x_۰ \\ v = at + v_۰ \end{cases} \xrightarrow[v_۰ = ۴۸\frac{m}{s}]{a = -۸\frac{m}{s^۲}} v = -۸t + ۴۸$$

از آنجا که در لحظهٔ $t = ۷/۵s$، نیروی خالص F قطع می‌شود، می‌توان گفت که از این لحظه به بعد حرکت متحرک، حرکت با سرعت ثابت می‌شود. پس نمودار سرعت- زمان این متحرک را می‌توان به صورت زیر رسم کرد:



مساحت محصور بین نمودار سرعت- زمان با محور زمان برابر با جابه‌جایی متحرک است، بنابراین:

$$\Delta x_۱ = S_۱ - S_۲ = \frac{۱}{۲}(۱)(۸) - \frac{۱}{۲}(\frac{۱۳}{۲})(۱۲) = -۳۵\,m$$

(فیزیک ۳- حرکت بر خط راست و دینامیک و حرکت دایره‌ای؛ صفحه‌های ۱۳ تا ۲۱، ۲۹ تا ۳۳)

۶۷- **گزینهٔ «۲»** *(علی برزگر)*

با استفاده از معادلهٔ مکان- زمان در سقوط آزاد داریم:

$$\Delta y = -\frac{۱}{۲}gt^۲ \Rightarrow -۲۴۵ = -\frac{۱}{۲}\times ۱۰ \times t^۲ \Rightarrow t^۲ = ۴۹ \Rightarrow t = ۷s$$

حال از معادلهٔ سرعت- جابه‌جایی داریم:

$$v^۲ - v_۰^۲ = -۲g\Delta y \xrightarrow[g=۱۰\frac{m}{s^۲}]{v_۰=۰} v^۲ = -۲\times ۱۰ \times (-۲۴۵) = ۴۹۰۰$$

$$\Rightarrow |v| = ۷۰\frac{m}{s}$$

(فیزیک ۳- حرکت بر خط راست؛ صفحه‌های ۲۱ تا ۲۴)

۶۸- **گزینهٔ «۳»** *(محمدکاظم منشادی)*

$$\Delta y_۱ : |\Delta y_۱| = \frac{۱}{۲}gt^۲$$

$$\Delta y_۲ : |\Delta y_۲| = (|\Delta y_۱| + |\Delta y_۲|) - |\Delta y_۱| = \frac{۱}{۲}g(۲t)^۲ - \frac{۱}{۲}gt^۲ = \frac{۳}{۲}gt^۲$$

$$\Delta y_۳ : |\Delta y_۳| = (|\Delta y_۱| + |\Delta y_۲| + |\Delta y_۳|) - (|\Delta y_۱| + |\Delta y_۲|) = \frac{۱}{۲}g(۳t)^۲ - \frac{۱}{۲}g(۲t)^۲ = \frac{۵gt^۲}{۲}$$

$$\Delta y_۴ : |\Delta y_۴| = (|\Delta y_۱| + |\Delta y_۲| + |\Delta y_۳| + |\Delta y_۴|) - (|\Delta y_۱| + |\Delta y_۲| + |\Delta y_۳|) = \frac{۱}{۲}g(۴t)^۲ - \frac{۱}{۲}g(۳t)^۲ = \frac{۷gt^۲}{۲}$$

$$\Rightarrow |\Delta y_۱| + |\Delta y_۲| + |\Delta y_۳| + |\Delta y_۴| = ۸gt^۲ = ۶۴۰\,m$$

$$\Rightarrow gt^۲ = ۸۰ \Rightarrow \begin{cases} |\Delta y_۱| = ۴۰ \\ |\Delta y_۲| = ۱۲۰ \\ |\Delta y_۳| = ۲۰۰ \\ |\Delta y_۴| = ۲۸۰ \end{cases}$$

(فیزیک ۳- حرکت بر خط راست؛ صفحه‌های ۲۱ تا ۲۴)

۶۹- **گزینهٔ «۴»** *(سعید شرق)*

قانون دوم نیوتون را برای هر دو نیرو می‌نویسیم:

نیروی $F_۱$: $F_۱ = ۲ma$

نیروی $F_۲$: $F_۲ = (۲m)\times\frac{a}{۳} = \frac{۲}{۳}ma$

حداکثر شتاب زمانی اتفاق می‌افتد که دو نیروی $F_۱$ و $F_۲$ هم‌جهت و در یک راستا وارد شوند:

$$F_۱ + F_۲ = ۲ma + \frac{۲}{۳}ma = \frac{۸}{۳}ma$$

$$F_{net۱} = ma_{max} \Rightarrow \frac{۸}{۳}ma = (\frac{m}{۲})\times a_{max} \Rightarrow a_{max} = \frac{۱۶a}{۳}$$

حداقل شتاب زمانی اتفاق می‌افتد که دو نیروی $F_۱$ و $F_۲$ خلاف جهت و در یک راستا وارد شوند:

$$F_۱ - F_۲ = ۲ma - \frac{۲ma}{۳} = \frac{۴ma}{۳}$$

@MrKonkori

$$F_{net\,۲}=ma_{min}\Rightarrow\frac{۴ma}{۳}=(\frac{m}{۲})\times a_{min}\Rightarrow a_{min}=\frac{۸a}{۳}$$

گزینهٔ «۴» یعنی $\frac{a}{۲}$ میان حداقل و حداکثر شتاب قرار ندارد.

(فیزیک ۳- دینامیک و حرکت دایره‌ای؛ صفحه‌های ۳۰ تا ۳۵)

۷۰- **گزینهٔ «۳»** *(محمود منصوری)*

با توجه به قانون هوک داریم: $F_e=kx\Rightarrow k=\frac{F_e}{x}$

حال با توجه به نمودار می‌توان نوشت:

$$\frac{k_A}{k_B}=\frac{\frac{F_{eA}}{x_A}}{\frac{F_{eB}}{x_B}}=\frac{\frac{۴}{۲}}{\frac{۳}{۵}}=\frac{۲۰}{۶}=\frac{۱۰}{۳}$$

(فیزیک ۳- دینامیک و حرکت دایره‌ای؛ صفحه‌های ۴۳ و ۴۴)

۷۱- **گزینهٔ «۱»** *(محمود منصوری)*

تکانه در حالت اول:

$$p_۱=mv_۱\xrightarrow{m=۰/۲kg\ ,\ v_۱=۳۰\frac{m}{s}}p_۱=۰/۲\times۳۰=۶kg.\frac{m}{s}$$

برای محاسبه سرعت ثانویه داریم:

$$K=\frac{p^۲}{۲m}\Rightarrow\frac{p_۲}{p_۱}=\sqrt{\frac{K_۲}{K_۱}}\xrightarrow{K_۲=K_۱-۰/۱۹K_۱=۰/۸۱K_۱}$$

$$\frac{p_۲}{۶}=\sqrt{\frac{۰/۸۱K_۱}{K_۱}}\Rightarrow\frac{p_۲}{۶}=۰/۹\Rightarrow p_۲=۵/۴kg\frac{m}{s}$$

تغییرات تکانه $\Delta p=p_۲-p_۱=۵/۴-۶=-۰/۶kg\frac{m}{s}$

بنابراین تکانهٔ گلوله $۰/۶kg\frac{m}{s}$ کاهش یافته است.

(فیزیک ۳- دینامیک و حرکت دایره‌ای؛ صفحه‌های ۴۶ تا ۴۸)

۷۲- **گزینهٔ «۳»** *(محمدکاظم منشاری)*

مساحت سطح زیر نمودار نیرو- زمان با محور زمان برابر با تغییر تکانه است، از طرفی:

$$\Delta p=F_{av}\Delta t\Rightarrow$$

$$\Rightarrow S_۱+S_۲=۱۰\times۴=۴۰\Rightarrow۴S_۱=۴۰\Rightarrow S_۱=۱۰\Rightarrow S_۲=۳S_۱=۳۰$$

مساحت سطح زیر نمودار نیرو- زمان $=F_{av}\Delta t$

(فیزیک ۳- دینامیک و حرکت دایره‌ای؛ صفحه‌های ۴۷ و ۴۸)

۷۳- **گزینهٔ «۴»** *(حسام نادری)*

موارد (الف) و (پ) درست‌اند. در حرکت دایره‌ای یکنواخت، بردار سرعت همواره مماس بر مسیر حرکت جسم است و توجه کنید که جهت بردار سرعت تغییر می‌کند اما اندازهٔ آن ثابت است، یعنی در حرکت دایره‌ای یکنواخت بردار سرعت جسم تغییر جهت می‌دهد اما تندی جسم ثابت است (علت نادرستی (ب)). همچنین توجه کنید که نیروی مرکزگرای وارد بر جسم همواره به سمت مرکز دایره و در نتیجه عمود بر مسیر و جابه‌جایی جسم است. پس کار انجام شده توسط آن برابر با صفر است:

$$(W=Fd\cos۹۰^\circ=۰)$$

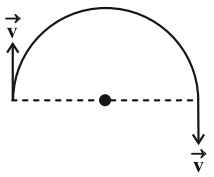
(فیزیک ۳- دینامیک و حرکت دایره‌ای؛ صفحه‌های ۴۹ و ۵۲)

۷۴- **گزینهٔ «۲»** *(امیراحمد میرسعید)*

با توجه به رابطهٔ تندی جسم در حرکت دایره‌ای، می‌توان نوشت:

$$v=\frac{۲\pi r}{T}\Rightarrow۲۰\pi=\frac{۲\pi(۰/۱)}{T}\Rightarrow T=\frac{۱}{۱۰۰}s$$

دورهٔ تناوب $\frac{۱}{۱۰۰}$ ثانیه است و زمان $\frac{۱}{۲۰۰}$ ثانیه معادل $\frac{T}{۲}$ است، در نتیجه متحرک روی دایره، نیم‌دور می‌چرخد. می‌توان شتاب متوسط را به روش زیر به دست آورد.



$$|a_{av}|=|\frac{v-(-v)}{\Delta t}|\Rightarrow|a_{av}|=\frac{۲۰\pi+۲۰\pi}{\frac{۱}{۲۰۰}}=\frac{۴۰\pi}{\frac{۱}{۲۰۰}}=۸۰۰۰\pi\frac{m}{s^۲}$$

$$a_c=\frac{v^۲}{r}\Rightarrow a_c=\frac{(۲۰\pi)^۲}{۰/۱}=۴۰۰۰\pi^۲(\frac{m}{s^۲})$$

$$\frac{|a_{av}|}{a_c}=\frac{۸۰۰۰\pi}{۴۰۰۰\pi^۲}=\frac{۲}{\pi}=\frac{۲}{۳}$$

(فیزیک ۳- دینامیک و حرکت دایره‌ای؛ صفحه‌های ۴۸ تا ۵۳)

۷۵- **گزینهٔ «۴»** *(سیده‌ملیحه میرصالحی)*

از رابطهٔ $a_c=\frac{v^۲}{r}$ داریم:

$$\frac{a_A}{a_B}=(\frac{v_A}{v_B})^۲\times(\frac{R_B}{R_A})\Rightarrow۱۲=۴\times\frac{R_B}{R_A}\Rightarrow\frac{R_B}{R_A}=۳$$

(فیزیک ۳- دینامیک و حرکت دایره‌ای؛ صفحه‌های ۴۸ تا ۵۳)

@MrKonkori

۷۶- **گزینهٔ «۲»** *(علی برزگر)*

نیروی فنر نقش نیروی مرکزگرا را ایفا می‌کند و چون فنر در نهایت با طول $۸۰cm$ می‌چرخد، پس شعاع مسیر دایره‌ای برابر $۸۰cm$ می‌شود. لذا می‌توان نوشت:

$$F_{\text{فنر}} = F_{\text{مرکزگرا}} \Rightarrow k\Delta L = \frac{mv^۲}{r}$$

طبق رابطهٔ $T = \frac{t}{n}$ می‌توان نوشت:

$$T = \frac{t}{n} = \frac{۶۰}{۳۰} = ۲s$$

از طرفی در رابطهٔ $v = \frac{۲\pi r}{T}$ داریم:

$$v = \frac{۲\pi r}{T} \xrightarrow[T=۲s]{r=۰/۸m} v = \frac{۲\pi \times ۰/۸}{۲} = ۰/۸\pi \frac{m}{s}$$

$$\Rightarrow v^۲ = ۰/۶۴\pi^۲ (\frac{m}{s})^۲$$

با جای‌گذاری در رابطهٔ اول خواهیم داشت:

$$k\Delta x = \frac{mv^۲}{r} \xrightarrow[r=۰/۸m\ ,\ m=\frac{۱}{۲}kg]{x=۰/۲m\ ,\ v^۲=۰/۶۴\pi^۲(\frac{m}{s})^۲} k(۰/۲) = \frac{(\frac{۱}{۲})(۰/۶۴\pi^۲)}{۰/۸}$$

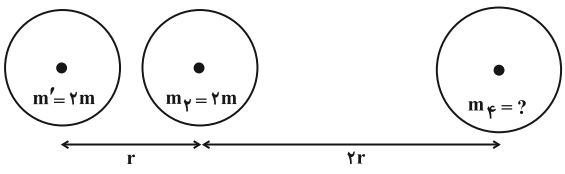
$$\Rightarrow k = ۲\pi^۲ \xrightarrow{\pi^۲=۱۰} k = ۲۰\frac{N}{m}$$

(فیزیک ۳- دینامیک و حرکت دایره‌ای؛ صفحه‌های ۴۸ تا ۵۳)

۷۷- **گزینهٔ «۳»** *(محمدکاظم منشاری)*

با توجه به برابر بودن فاصلهٔ بین مراکز کره‌های (۱) و (۳) با مرکز کرهٔ (۲) و $m_۱ = ۳m_۳$، طبق رابطهٔ $F = \frac{Gm_۱m_۲}{r^۲}$ نتیجه می‌شود $F_{۱۲} = ۳F_{۳۲}$

است، پس می‌توان به جای کره‌های (۱) و (۳)، کره‌ای فرضی به جرم $m' = ۲m$ در جای کرهٔ (۱) گذاشت:



اکنون نیروهای وارد برمرکز کرهٔ (۲) از طرف دو کرهٔ دیگر برابرند:

$$\frac{Gm'm_۲}{r^۲} = \frac{Gm_۴m_۲}{(۲r)^۲} \Rightarrow \frac{۲m}{r^۲} = \frac{m_۴}{۴r^۲}$$

$$\Rightarrow m_۴ = ۸m \Rightarrow \frac{m_۴}{m_۲} = ۴$$

(فیزیک ۳- دینامیک و حرکت دایره‌ای؛ صفحه‌های ۵۳ تا ۵۶)

۷۸- **گزینهٔ «۲»** *(کامران ابراهیمی)*

با توجه به رابطهٔ شتاب گرانشی داریم:

$$g' = \frac{۱}{۹}g \Rightarrow \frac{GM_e}{(R_e+h)^۲} = \frac{۱}{۹}\frac{GM_e}{R_e^۲}$$

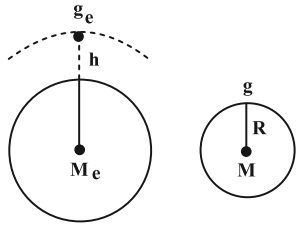
$$\Rightarrow (R_e+h)^۲ = ۹R_e^۲ \Rightarrow R_e + h = ۳R_e \Rightarrow h = ۲R_e$$

$$\Rightarrow n = \frac{h}{R_e} = ۲$$

(فیزیک ۳- دینامیک و حرکت دایره‌ای؛ صفحه‌های ۵۳ تا ۵۶)

۷۹- **گزینهٔ «۱»** *(علیرضا جباری)*

شتاب گرانش در سطح سیاره‌ای به شعاع R را با g و شتاب گرانش زمین در فاصلهٔ h از سطح زمین را با g_e نشان می‌دهیم:



$$g_e = g \Rightarrow \frac{GM_e}{(R_e+h)^۲} = \frac{GM}{R^۲}$$

$$\xrightarrow{M_e=\rho_e V_e=\rho_e\times\frac{۴}{۳}\pi R_e^۳,\ M=\rho V=\rho\times\frac{۴}{۳}\pi R^۳} \frac{\rho_e\times\frac{۴}{۳}\pi R_e^۳}{(R_e+h)^۲} = \frac{\rho\times\frac{۴}{۳}\pi R^۳}{R^۲}$$

$$\xrightarrow{\rho=۲\rho_e} \frac{\rho_e R_e^۳}{(R_e+h)^۲} = ۲\rho_e R \xrightarrow{R_e=۴/۵R}$$

$$\frac{R_e^۳}{(R_e+h)^۲} = \frac{۲R_e}{۴/۵} \Rightarrow \frac{R_e^۲}{(R_e+h)^۲} = \frac{۴}{۹}$$

$$\xrightarrow{\text{جذر می‌گیریم}} \frac{R_e}{R_e+h} = \frac{۲}{۳} \Rightarrow ۳R_e = ۲R_e + ۲h$$

$$\Rightarrow R_e = ۲h \Rightarrow \frac{R_e}{h} = ۲$$

(فیزیک ۳- دینامیک و حرکت دایره‌ای؛ صفحه‌های ۵۳ تا ۵۶)

۸۰- **گزینهٔ «۳»** *(علی برزگر)*

نیروی مرکزگرا برابر با نیروی گرانش وارد به ماهواره از طرف زمین خواهد بود.

$$F_e = m\frac{v^۲}{r} \Rightarrow G\frac{mM_e}{r^۲} = \frac{mv^۲}{r} \Rightarrow r = \frac{G.M_e}{v^۲}$$

از طرفی:

$$T = \frac{۲\pi r}{v} \xrightarrow{r=\frac{GM_e}{v^۲}} T = \frac{۲\pi GM_e}{v^۳}$$

$$\Rightarrow T \propto \frac{۱}{v^۳}$$

(فیزیک ۳- دینامیک و حرکت دایره‌ای؛ صفحه‌های ۵۳ تا ۵۶)

@MrKonkori

فیزیک ۱

۸۱- **گزینهٔ «۲»** *(حسین الهی)*

موارد (ب) و (ت) نادرست می‌باشند که شکل درست آن‌ها به صورت زیر است:

ب) اگر فشار و دمای گازی در تمام نقاط آن یکسان باشد می‌گوییم گاز در حالت تعادل قرار دارد.

ت) متغیرهای ترمودینامیکی از یکدیگر مستقل نیستند و با یکدیگر طبق معادلهٔ حالت رابطه دارند.

(فیزیک ۱- صفحه‌های ۱۲۸ تا ۱۳۰)

۸۲- **گزینهٔ «۱»** *(بهزاد آزادخر)*

طبق قانون اول ترمودینامیک داریم:

$$\Delta U = Q + W \Rightarrow U_2 - U_1 = Q + W$$

$$1900 - 900 = 2400 + W \Rightarrow W = -1400\,J$$

$$W' = -W = 1400\,J$$

(فیزیک ۱- صفحه‌های ۱۳۰ تا ۱۳۱)

۸۳- **گزینهٔ «۴»** *(بهزاد آزادخر)*

$$\frac{P_1V_1}{T_1} = \frac{P_2V_2}{T_2} \xrightarrow{P_1=P_2} \frac{V_1}{T_1} = \frac{V_2}{T_2} \xrightarrow{V_1>V_2}$$

$$T_1 > T_2 \Rightarrow U_1 > U_2 \Rightarrow \Delta U < 0$$

انرژی درونی کاهش می‌یابد.

$$\Delta U < 0 \ , \ V_1 > V_2 \xrightarrow{\text{فرایند تراکمی است.}} W > 0$$

$$\Delta U = Q + W \Rightarrow Q + W < 0 \xrightarrow{W>0} Q < 0$$

و طبق قانون اول ترمودینامیک گرما از دست می‌دهد.

(فیزیک ۱- صفحه‌های ۱۳۲ تا ۱۳۵)

۸۴- **گزینهٔ «۴»** *(علی برزگر)*

در فرایند هم‌فشار داریم:

$$W = -P\Delta V = -nR\Delta T$$

$$\xrightarrow[W=-415J]{n=2/5mol} -415 = -2/5\times 8/3\times\Delta T \Rightarrow \Delta T = 20K$$

$$\Delta T = \Delta\theta = \theta_2 - \theta_1 \Rightarrow \theta_2 - 30 = 20 \Rightarrow \theta_2 = 50^\circ C$$

(فیزیک ۱- صفحه‌های ۱۳۲ تا ۱۳۵)

۸۵- **گزینهٔ «۲»** *(سیره‌ملیحه میرصالحی)*

چون پیستون جابه‌جا نشده است، حجم گاز در دو حالت با هم برابر است:

حالت اول:
$$\begin{cases} P_1 = P_0 + \frac{mg}{A} = 10^5 + \frac{5\times 10}{5\times 10^{-4}} = 2\times 10^5\,Pa \\ T_1 = \theta_1 + 273 = 300\,K \\ V_1 \end{cases}$$

حالت دوم:
$$\begin{cases} P_2 = P_0 + \frac{m'g}{A} = 10^5 + \frac{70}{5\times 10^{-4}} = 2/4\times 10^5\,Pa \\ V_2 = V_1 \\ T_2 = ? \end{cases}$$

از رابطهٔ $\frac{P_1V_1}{T_1} = \frac{P_2V_2}{T_2}$ داریم:

$$\frac{P_1V_1}{T_1} = \frac{P_2V_2}{T_2} \Rightarrow \frac{2\times 10^5\times V_1}{300} = \frac{2/4\times 10^5\times V_1}{T_2}$$

$$\Rightarrow T_2 = \frac{300\times 2/4\times 10^5}{2\times 10^5} = 360\,K$$

$$\Rightarrow T_2 = \theta_2 + 273 \xrightarrow{T_2=360K} \theta_2 = 87^\circ C$$

(فیزیک ۱- صفحه‌های ۱۳۱ تا ۱۳۹)

@MrKonkori

۸۶- **گزینهٔ «۳»** *(بهزاد آزادخو)*

براساس قانون گازهای کامل داریم:

$$\frac{P_a V_a}{T_a} = \frac{P_b V_b}{T_b} \Rightarrow \frac{V_b}{V_a} = \frac{P_a T_b}{P_b T_a}$$

$$\frac{V_b}{V_a} = \frac{۲(۲۷۳+۲۸۲)}{۵(۲۷۳+۹۱)} = \frac{۲\times۵۵۵}{۵\times۳۶۴} = \frac{۱۱۱}{۱۸۲} \simeq ۰/۶۱$$

(فیزیک ۱- صفحه‌های ۱۲۸ و ۱۲۹)

۸۷- **گزینهٔ «۳»** *(مسعود خندانی)*

بررسی گزینه‌ها:

۱) $\begin{cases} P_۱V_۱ = ۰/۴PV \\ P_۲V_۲ = ۴PV \end{cases} \Rightarrow$ فرایند هم‌دما نیست

۲) $P_۱V_۱ < P_۲V_۲ \Rightarrow T_۲ > T_۱$

در انبساط بی‌دررو دما کاهش می‌یابد، پس فرایند بی‌دررو نیست.

۳ و ۴)

در انبساط کار روی گاز منفی است. $\Delta U = W + Q \Rightarrow \begin{cases} W < ۰ \\ \Delta U > ۰ \end{cases}$

با توجه به علامت W و ΔU، $Q > ۰$ است.

(فیزیک ۱- صفحه‌های ۱۳۱ تا ۱۳۹)

۸۸- **گزینهٔ «۴»** *(ریاضی خارج ۹۹)*

تغییرات انرژی درونی مقدار معینی گاز کامل طی یک چرخهٔ کامل برابر با صفر است، بنابراین:

$$\Delta U_{ABCA} = ۰ \Rightarrow \Delta U_{ABC} + \Delta U_{CA} = ۰$$

$$\xrightarrow[\Delta U_{CA}=۰]{CA \text{ فرایند هم‌دما است.}} \Delta U_{ABC} = ۰$$

$$\Rightarrow Q_{ABC} + W_{ABC} = ۰ \Rightarrow Q_{ABC} + W_{AB} + W_{BC} = ۰$$

$$\xrightarrow[W_{BC}=۰]{BC \text{ فرایند هم‌حجم است.}} Q_{ABC} = -W_{AB}$$

$$\xrightarrow{AB \text{ فرایند هم‌فشار است.}} Q_{ABC} = P_A(V_B - V_A)$$

$$= P_A V_B - P_A V_A \xrightarrow[P_A V_A = P_C V_C]{V_B = V_C}$$

$$Q_{ABC} = P_A V_C - P_C V_C = V_C(P_A - P_C)$$

$$\Rightarrow Q_{ABC} = ۱۶\times۱۰^{-۳}\times(۸\times۱۰^{۵} - ۲\times۱۰^{۵})$$

$$\Rightarrow Q_{ABC} = ۹۶۰۰J$$

(فیزیک ۱- صفحه‌های ۱۳۳، ۱۳۹ و ۱۴۰)

۸۹- **گزینهٔ «۲»** *(علیرضا جباری)*

با استفاده از بازده و با معلوم بودن گرمای تلف شده در هر چرخه، کاری را که ماشین گرمایی در هر چرخه روی محیط انجام می‌دهد به دست می‌آوریم:

$$\eta = \frac{|W|}{Q_H} = \frac{|W|}{|Q_L| + |W|} \xrightarrow[|Q_L|=۴۰۰J]{\eta=۰/۲}$$

$$۰/۲ = \frac{|W|}{۴۰۰ + |W|} \Rightarrow |W| = ۸۰ + ۰/۲|W|$$

$$\Rightarrow ۰/۸|W| = ۸۰ \Rightarrow |W| = ۱۰۰J$$

اکنون کار کل ماشین گرمایی در هر دقیقه (W_t) را پیدا می‌کنیم:

$$P = \frac{|W_t|}{\Delta t} \xrightarrow[\Delta t = ۱min = ۶۰s]{P = ۲/۴kW = ۲۴۰۰W} ۲۴۰۰ = \frac{|W_t|}{۶۰}$$

$$\Rightarrow |W_t| = ۲۴۰۰\times۶۰ \Rightarrow |W_t| = ۱۴۴۰۰۰J$$

در پایان تعداد چرخه‌ها (N) را محاسبه می‌کنیم:

$$N = \frac{|W_t|}{|W|} = \frac{۱۴۴۰۰۰}{۱۰۰} = ۱۴۴۰$$

(فیزیک ۱- صفحه‌های ۱۴۵ و ۱۴۶)

۹۰- **گزینهٔ «۳»** *(حسام نادری)*

یخچال با استفاده از کار، گرما را از منبعی دماپایین می‌گیرد و به منبعی دمابالا می‌دهد.

(فیزیک ۱- صفحه‌های ۱۴۱، ۱۴۶ و ۱۴۷)

@MrKonkori

فیزیک ۲

۹۱- **گزینهٔ «۳»** *(محمود منصوری)*

با توجه به قانون القای الکترومغناطیسی فاراده، خواهیم داشت:

$$|\varepsilon_{av}| = |N\frac{\Delta\Phi}{\Delta t}| \Rightarrow \varepsilon_{av} = NB\cos\theta\,|\frac{\Delta A}{\Delta t}|$$

$$\xrightarrow[B=۵۰G=۰/۰۵T\ ,\ \cos۰^\circ=۱]{\varepsilon=۰/۴V\ ,\ N=۱۰۰} ۰/۴ = ۱۰۰\times۰/۰۵\times\cos۰^\circ\times|\frac{\Delta A}{\Delta t}|$$

$$\Rightarrow |\frac{\Delta A}{\Delta t}| = \frac{۰/۴}{۵} = ۰/۰۸\frac{m^۲}{s}$$

(فیزیک ۲- صفحه‌های ۱۱۳ تا ۱۱۶)

۹۲- **گزینهٔ «۱»** *(محسن سلماسی‌ونر)*

از ترکیب روابط، رابطهٔ زیر را نتیجه می‌گیریم:

$$\left.\begin{array}{l}\varepsilon_{av} = |-N\frac{\Delta\Phi}{\Delta t}|\\ I = \frac{\varepsilon}{R}\\ I = \frac{\Delta q}{\Delta t}\end{array}\right\} \Rightarrow \frac{\Delta q}{\Delta t} = |-\frac{N\Delta\Phi}{R\Delta t}|$$

$$\xrightarrow{\Delta t>۰} |\Delta q| = \frac{N|\Delta\Phi|}{R} \qquad (*)$$

در محاسبهٔ $\Delta\Phi$ باید حواسمان باشد، زاویهٔ اولیه ۳۰ درجه بوده و در نهایت میدان به خلاف جهت اولیهٔ خود رسیده است.

$$\Delta\Phi = AB_۲\cos\theta_۲ - AB_۱\cos\theta_۱ \xrightarrow[\theta_۲=۱۸۰^\circ-۶۰^\circ=۱۲۰^\circ]{\theta_۱=۹۰^\circ-۳۰^\circ=۶۰^\circ}$$

$$= ۲\times۱۰^{-۲}\times۴\times۱۰^{-۲}\times\cos۱۲۰^\circ - ۲\times۱۰^{-۲}\times۸\times۱۰^{-۲}\cos۶۰^\circ$$

$$\Delta\Phi = -۱۲\times۱۰^{-۴}\,Wb$$

$$\xrightarrow{(*)} \Delta q = |\frac{-۱۲\times۱۰^{-۴}}{۲}| = ۶\times۱۰^{-۴}C = ۰/۶\,mC$$

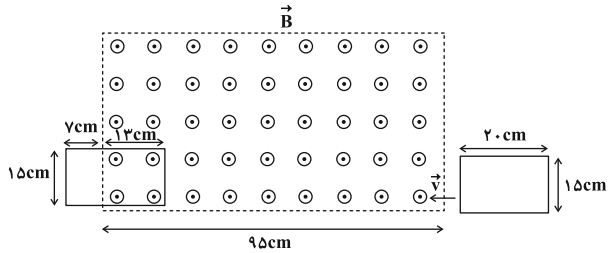
(فیزیک ۲- صفحه‌های ۱۱۳ تا ۱۱۶)

۹۳- **گزینهٔ «۲»** *(مجتبی نکوئیان)*

با توجه به رابطهٔ حرکت با تندی ثابت بر روی خط راست، جابه‌جایی قاب رسانا را در مدت زمان ۶s به صورت زیر به دست می‌آوریم:

$$\Delta x = vt \xrightarrow[\Delta t=۶s]{v=۱۷\frac{cm}{s}} \Delta x = (۱۷)(۶) = ۱۰۲\,cm$$

بنابراین موقعیت قاب رسانا پس از ۶s مطابق با شکل زیر است:



طبق رابطهٔ تغییر شار مغناطیسی می‌توان نوشت:

$$\Delta\Phi = B(\Delta A)\cos\theta = B(A_۲ - A_۱)\cos\theta$$

$$\xrightarrow[B=۲\times۱۰^{-۳}G=۲\times۱۰^{-۱}T\ ,\ \theta=۰]{A_۱=۰\ ,\ A_۲=۱۵cm\times۱۳cm=۱۹۵cm^۲=۱۹۵\times۱۰^{-۴}m^۲}$$

$$\Delta\Phi = (۲\times۱۰^{-۱})(۱۹۵\times۱۰^{-۴})(۱) = ۳۹\times۱۰^{-۴}\,Wb$$

و در نهایت با استفاده از قانون القای الکترومغناطیسی فاراده داریم:

$$|\varepsilon_{av}| = |-N\frac{\Delta\Phi}{\Delta t}| \Rightarrow |\varepsilon_{av}| = \frac{۳۹\times۱۰^{-۴}}{۶} = ۶/۵\times۱۰^{-۴}V = ۶۵۰\mu V$$

(فیزیک ۲- صفحه‌های ۱۱۳ تا ۱۱۶)

۹۴- **گزینهٔ «۱»** *(سراسری ریاضی ۱۴۰۱ خارج کشور)*

بررسی گزینه‌ها:

گزینهٔ «۱»: با توجه به کاهش جریان عبوری از سیم راست، شار مغناطیسی عبوری از حلقه در حال کاهش است، بنابراین طبق قاعدهٔ دست راست، جهت جریان القایی باید به گونه‌ای باشد تا با کاهش شار مخالفت کند، بنابراین جریان القایی در حلقه ساعتگرد خواهد بود.

در گزینه‌های «۲»، «۳» و «۴» طبق قانون لنز، جهت جریان القایی در خلاف جهت رسم شده در گزینه‌ها است.

(فیزیک ۲- صفحه‌های ۱۱۷ و ۱۱۸)

۹۵- **گزینهٔ «۴»** *(علیرضا جباری)*

ابتدا نیروی محرکهٔ القایی متوسط ایجاد شده در پیچه را به دست می‌آوریم:

$$\varepsilon_{av} = -N\frac{\Delta\Phi}{\Delta t} = -N\frac{\Phi_۲ - \Phi_۱}{\Delta t}$$

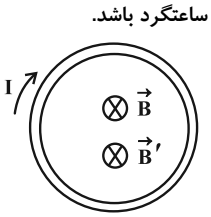
$$\xrightarrow[\Phi_۱=۰/۰۴\,Wb\ ,\ \Delta t=۰/۳s]{N=۷۵\ ,\ \Phi_۲=-۰/۰۴\,Wb} \varepsilon_{av} = -۷۵\times\frac{-۰/۰۴-۰/۰۴}{۰/۳}$$

$$= ۷۵\times\frac{۰/۰۸}{۰/۳} = ۲۰V$$

اکنون می‌توانیم جریان القایی متوسط ایجاد شده در پیچه را حساب کنیم:

$$I_{av} = \frac{\varepsilon_{av}}{R} \xrightarrow[R=۵\Omega]{\varepsilon_{av}=۲۰V} I_{av} = \frac{۲۰}{۵} = ۴A$$

جهت جریان القا شده در پیچه را به کمک قانون لنز مشخص می‌کنیم. از آنجا که شار مغناطیسی عبوری از پیچه به صورت کاهشی تغییر می‌کند، میدان مغناطیسی القایی $\vec{B}'$ با میدان مغناطیسی $\vec{B}$ همسو می‌شود تا از این طریق با کاهش شار مغناطیسی مخالفت کند. بنابراین با توجه به قاعدهٔ دست راست، جریان پیچه باید ساعتگرد باشد.



(فیزیک ۲- صفحه‌های ۱۱۳ تا ۱۱۸)

@MrKonkori

۹۶- **گزینهٔ «۴»** *(کنکور تیر ۱۴۰۳)*

در برخی از مدارهایی که از چندین القاگر به‌وجود آمده است، تغییرات جریان در یک القاگر می‌تواند نیروهای محرکهٔ ناخواسته‌ای را در القاگرهای مجاور القا کند. به همین دلیل، در برخی از مدارهای الکتریکی، القای متقابل می‌تواند مزاحم باشد. برای هر چه کمتر کردن این اثر ناخواسته، باید سطح حلقه‌های القاگرهای مجاور را به‌طور عمود بر یکدیگر قرار داد (شکل سوال) در این صورت اثر القای متقابل تا حد امکان کوچک می‌شود.

(فیزیک ۲- صفحه‌های ۱۲۰ و ۱۲۱)

۹۷- **گزینهٔ «۲»** *(امیراحمد میرسعید)*

گام اول: از رابطهٔ انرژی ذخیره شده در القاگر، ضریب القاوری را به دست می‌آوریم:

$$U=\frac{1}{2}LI^2 \Rightarrow 10^{-3}=\frac{1}{2}\times L\times 0/25 \Rightarrow L=8\times 10^{-3}\,H$$

گام دوم: از رابطهٔ ضریب القاوری، طول سیملوله را محاسبه می‌کنیم:

$$L=\frac{\mu_0 N^2 A}{\ell} \Rightarrow \ell=\frac{\mu_0 N^2 A}{L}$$

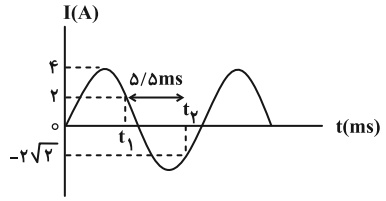
$$\ell=\frac{4\pi\times 10^{-7}\times (1000)^2\times \pi\times 4\times 10^{-4}}{8\times 10^{-3}}$$

$$\Rightarrow \ell=18\times 10^{-2}\,m=18\,cm$$

(فیزیک ۲- صفحه‌های ۱۱۸ تا ۱۲۲)

۹۸- **گزینهٔ «۳»** *(مجتبی نکوئیان)*

مطابق با شکل زیر و با توجه به رابطهٔ جریان متناوب برحسب زمان داریم:



$$I=I_m\sin(\frac{2\pi}{T}t)$$

$$t=t_1 \xrightarrow{I=2A} 2=4\sin(\frac{2\pi}{T}t_1) \Rightarrow \frac{2\pi}{T}t_1=\frac{5\pi}{6}$$

$$\Rightarrow t_1=\frac{5}{12}T \qquad (1)$$

$$t=t_2 \xrightarrow{I=-2\sqrt{2}A} -2\sqrt{2}=4\sin(\frac{2\pi}{T}t_2) \Rightarrow \frac{2\pi}{T}t_2=\frac{7\pi}{4}$$

$$\Rightarrow t_2=\frac{7}{8}T \qquad (2)$$

$$t_2-t_1=5/5ms \xrightarrow{(1),(2)} \frac{7}{8}T-\frac{5}{12}T=\frac{11}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{11}{24}T=\frac{11}{2} \Rightarrow T=12\,ms$$

بنابراین جریان عبوری از القاگر در لحظهٔ $t=8ms$ برابر است با:

$$I=4\sin(\frac{2\pi}{12}(8))=4\sin(\frac{4\pi}{3})=4(-\frac{\sqrt{3}}{2})=-2\sqrt{3}\,A$$

و در نهایت با استفاده از رابطهٔ انرژی ذخیره شده در القاگر داریم:

$$U=\frac{1}{2}LI^2 \xrightarrow[I=-2\sqrt{3}A]{L=0/4H} U=(\frac{1}{2})(4\times 10^{-1})(12)=2/4\,J$$

(فیزیک ۲- صفحه‌های ۱۲۱ تا ۱۲۵)

۹۹- **گزینهٔ «۴»** *(حسین الهی)*

روش اول: می‌دانیم:

$$I=I_m\sin(\frac{2\pi}{T}t)$$

$$\Rightarrow \frac{5}{10}=\sin(\frac{2\pi}{T}t) \Rightarrow \sin(\frac{\pi}{6})=\sin(\frac{2\pi}{T}t)$$

$$\Rightarrow \frac{2\pi}{T}t=\frac{\pi}{6}$$

$$\Phi=\Phi_m\cos(\frac{2\pi}{T}t)$$

$$\Rightarrow \Phi=\Phi_m\cos(\frac{2\pi}{T}t)=2000\times 10^{-3}\cos(\frac{\pi}{6})=\sqrt{3}\,Wb$$

روش دوم: روابط زیر برقرارند:

$$(\frac{\Phi}{\Phi_M})^2+(\frac{\varepsilon}{\varepsilon_M})^2=(\frac{\Phi}{\Phi_M})^2+(\frac{I}{I_M})^2=1$$

بنابراین داریم:

$$(\frac{5}{10})^2+(\frac{\Phi}{2000\,mWb})^2=1 \Rightarrow \Phi=\sqrt{3}\,Wb$$

(فیزیک ۲- صفحه‌های ۱۲۲ تا ۱۲۵)

۱۰۰- **گزینهٔ «۱»** *(علیرضا جباری)*

ابتدا بیشینهٔ اختلاف پتانسیل دو سر منبع جریان متناوب که به مدار اولیهٔ مبدل متصل شده است را به دست می‌آوریم، سپس بیشینهٔ اختلاف پتانسیل دو سر لامپ، در مدار ثانویهٔ مبدل را پیدا می‌کنیم:

$$\left.\begin{matrix}\varepsilon=\varepsilon_{1m}\sin\frac{2\pi}{T}t\\ \varepsilon=60\sin 80\pi t\end{matrix}\right\} \Rightarrow \varepsilon_{1m}=60\,V \quad , \quad \frac{2\pi}{T}=80\pi\frac{rad}{s}$$

در یک مبدل آرمانی داریم:

$$\frac{\varepsilon_{2m}}{\varepsilon_{1m}}=\frac{N_2}{N_1} \xrightarrow[\varepsilon_{1m}=60V\,,\,N_1=25]{N_2=100} \frac{\varepsilon_{2m}}{60}=\frac{100}{25}$$

$$\Rightarrow \varepsilon_{2m}=240\,V$$

اکنون می‌توانیم بیشینهٔ جریان عبوری از لامپ را در مدار ثانویهٔ مبدل حساب کنیم:

$$I_m=\frac{\varepsilon_{2m}}{R} \xrightarrow[R=30\Omega]{\varepsilon_{2m}=240V} I_m=\frac{240}{30}=8\,A$$

در پایان، معادلهٔ جریان متناوب گذرنده از لامپ را به دست می‌آوریم:

$$I=I_m\sin\frac{2\pi}{T}t \xrightarrow[\frac{2\pi}{T}=80\pi\frac{rad}{s}]{I_m=8A} I=8\sin 80\pi t$$

دقت کنید در یک مبدل، دورهٔ تناوب جریان تغییر نمی‌کند.

(فیزیک ۲- صفحه‌های ۱۲۲ تا ۱۳۰)

@MrKonkori

شیمی ۳

۱۰۱- **گزینهٔ «۴»** *(امیر حاتمیان)*

ابتدا فرمول ساختارهای ۱ و ۲ را به دست می‌آوریم:

پاک‌کنندهٔ غیرصابونی (۱)

$$C_nH_{2n+1} + C_6H_4 + SO_3^- + Na^+$$

$$n = 12 \Rightarrow C_{12}H_{25} + C_6H_4 + SO_3^- + Na^+$$

$$C_{18}H_{29}SO_3Na$$

پاک‌کنندهٔ صابونی جامد (۲)

$$C_nH_{2n+1} + COO^- + Na^+$$

$$n = 17 \Rightarrow C_{17}H_{35}COO^-Na^+$$

بررسی عبارت‌ها:

الف) درست؛ ساختار (۲) متعلق به یک پاک‌کنندهٔ صابونی جامد است.

ب) درست؛ $35 - 29 = 6$

پ) درست؛ در ساختار (۱): $\frac{\text{تعداد C}}{\text{تعداد O}} = \frac{18}{3} = 6$

در ساختار (۲): $\frac{\text{تعداد C}}{\text{تعداد O}} = \frac{17+1}{2} = \frac{18}{2} = 9$

$(9 > 6)$

ت) درست؛ ساختار (۱) یک پاک‌کنندهٔ غیرصابونی بوده و قدرت پاک‌کنندگی آن در آب سخت بیشتر از قدرت پاک‌کنندگی ساختار (۲) در همان آب است.

(شیمی ۳- مولکول‌ها در خدمت تندرستی؛ صفحه‌های ۶ و ۹ تا ۱۱)

۱۰۲- **گزینهٔ «۴»** *(علیرضا بیانی)*

موارد اول و سوم درست می‌باشند.

مورد اول: با توجه به رابطهٔ $K_a = \frac{M\alpha^2}{1-\alpha}$ و این‌که در اسیدهای ضعیف با $K_a \leq 10^{-4}$ از α مخرج صرف‌نظر می‌شود، به رابطهٔ $K_a = M\alpha^2$ می‌رسیم:

$$K_a = M\alpha^2 \xrightarrow{K_a \text{ ثابت}} M\alpha^2 = 4M\alpha'^2 \Rightarrow \frac{\alpha'}{\alpha} = \frac{1}{2}$$

مورد دوم: ثابت یونش فقط با دما تغییر می‌کند.

مورد سوم: حجم گاز تولید شده ربطی به قدرت اسیدی ندارد و فقط به غلظت و حجم اسید وابسته بوده و یک مسئله استوکیومتری می‌باشد.

$$2HCl + Mg \rightarrow MgCl_2 + H_2$$

$$2HF + Mg \rightarrow MgF_2 + H_2$$

مورد چهارم: یونش اسیدهای قوی (در اینجا HCl) در هر دمایی به تقریب کامل انجام می‌شود ولی اسیدهای ضعیف (HF) با افزایش دما، بیشتر به یون تبدیل می‌شوند و در نتیجه اختلاف pH آن‌ها کاهش می‌یابد.

مورد پنجم: این رابطه برای اسیدهای قوی صدق می‌کند ولی برای اسیدهای ضعیف رابطهٔ تقریبی $\frac{1}{2}\log n$ صادق می‌باشد.

(شیمی ۳- مولکول‌ها در خدمت تندرستی؛ صفحه‌های ۲۲ تا ۲۵)

۱۰۳- **گزینهٔ «۳»** *(امیرعلی بیات)*

ابتدا باید مقدار pH محلول اسیدی را محاسبه کنیم. غلظت اولیه اسید برابر است با:

$$\frac{0/2\,mol}{2L} = 0/1\,mol.L^{-1}$$

چون اسید ضعیف است و K_a آن کوچک است $(K_a < 10^{-4})$ می توان از عبارت H^+ در مخرج کسر K_a صرف‌نظر کرد:

$$K_a = \frac{[H^+]^2}{M - [H^+]} \xrightarrow{\text{تقریب}} K_a = \frac{[H^+]^2}{M}$$

$$\Rightarrow [H^+] = \sqrt{K_a.M} \Rightarrow \sqrt{10^{-5} \times 0/1} = 10^{-3}\,mol.L^{-1}$$

$$H^+ \text{ غلظت} \Rightarrow -\log[H^+] = pH = -\log 10^{-3} = 3$$

(شیمی ۳- مولکول‌ها در خدمت تندرستی؛ صفحه‌های ۲۴، ۲۵، ۲۷)

۱۰۴- **گزینهٔ «۲»** *(هادی مهدی‌زاده)*

موارد (ب) و (ت) صحیح هستند.

بررسی موارد نادرست:

الف) آمونیاک یک باز ضعیف است و به‌طور جزئی یونیده می‌شود و به همین علت یک الکترولیت ضعیف به شمار می‌رود.

پ) در دمای یکسان pH محلول ۰/۰۱ مولار استیک اسید از pH محلول ۰/۰۱ مولار فورمیک اسید بزرگ‌تر است، چراکه استیک اسید، ضعیف‌تر از فورمیک اسید می‌باشد.

(شیمی ۳- مولکول‌ها در خدمت تندرستی؛ صفحه‌های ۲۳ تا ۲۹)

۱۰۵- **گزینهٔ «۴»** *(محمد عظیمیان‌زواره)*

آ) درست؛ در واکنش Zn با اکسیژن، عنصر اکسیژن الکترون گرفته، کاهش یافته و نقش اکسنده را دارد.

ب) نادرست؛ برای این منظور از منیزیم (دومین فلز گروه دوم یا دومین فلز دورهٔ سوم) استفاده می‌شده است.

@MrKonkori

پ) نادرست؛ به دلیل انجام واکنش زیر با مصرف یون‌های $Cu^{2+}(aq)$ شدت رنگ آبی ناشی از محلول مس (II) سولفات کاهش و دمای آن افزایش می‌یابد.

$$\overbrace{Zn(s)+Cu^{2+}(aq)}^{\text{آبی}} \rightarrow \overbrace{Zn^{2+}(aq)+Cu(s)}^{\text{بدون رنگ}}$$

ت) نادرست؛ در برخی واکنش‌های اکسایش- کاهش انرژی آزاد می‌شود.

ث) درست؛

$$2Al(s)+3Cu^{2+}(aq) \rightarrow 2Al^{3+}(aq)+3Cu(s) \sim 6e^-$$

(شیمی ۳- آسایش و رفاه در سایهٔ شیمی؛ صفحه‌های ۴۰ تا ۴۳)

۱۰۶- **گزینهٔ «۴»** *(میلاد شیخ‌الاسلامی‌فیاوی)*

بررسی گزینه‌های نادرست:

۱) ضمن کارکرد سلول گالوانی روی- مس، فلز موجود در الکترود آند با جرم مولی $65g.mol^{-1}$ مصرف و فلز موجود در الکترود کاتد با جرم مولی $64g.mol^{-1}$ تولید می‌شود. در نتیجه به دلیل تفاوت در جرم مولی فلز مصرفی و تولیدی و با توجه به یکسان بودن ضرایب این مواد در معادلهٔ موازنه شده، مجموع جرم مواد جامد رفته رفته کاهش می‌یابد.

۲) جهت حرکت الکترون‌ها در مدار خارجی سلول گالوانی از آند به کاتد است.

۳) در نیم‌سلول SHE از محلولی استفاده می‌شود که غلظت H^+ آن یک مولار باشد. استیک اسید، اسیدی ضعیف است، پس غلظت یون هیدرونیوم در محلول ۱ مولار آن کمتر از $1mol.L^{-1}$ خواهد بود.

(شیمی ۳- آسایش و رفاه در سایهٔ شیمی؛ صفحه‌های ۴۴ تا ۴۹)

۱۰۷- **گزینهٔ «۴»** *(امیرحسین حسن‌نژاد)*

همهٔ موارد بیان شده صحیح هستند.

بررسی برخی موارد:

مورد دوم: اختلاف پتانسیل الکتریکی استاندارد سلول برابر (پتانسیل استاندارد آند- پتانسیل استاندارد کاتد) است. بنابراین داریم:

$$1/66-(-0/34)=2V$$

مورد سوم: طبق واکنش $2Al+3Cu^{2+} \rightarrow 2Al^{3+}+3Cu$ داریم:

$$?g\ Cu=8/1g\ Al\times\frac{1mol\ Al}{27g\ Al}\times\frac{3mol\ Cu}{2mol\ Al}$$

$$\times\frac{64g\ Cu}{1mol\ Cu}=28/8g\ Cu$$

مورد چهارم: در سلول‌های گالوانی استفاده از غشاء متخلخل برای جلوگیری از واکنش مستقیم میان گونه‌های موجود در محلول الزامی است.

(شیمی ۳- آسایش و رفاه در سایهٔ شیمی؛ صفحه‌های ۴۴ تا ۴۹)

۱۰۸- **گزینهٔ «۴»** *(یاسر راش)*

همهٔ عبارت‌ها درست هستند. معادلهٔ موازنه شدهٔ واکنش به صورت زیر است:

$$2Fe^{2+}+\underset{-1}{H_2O_2}+2H^+ \rightarrow 2Fe^{3+}+\underset{-2}{2H_2O} \sim 2e^-$$

$$-1 \xleftarrow{1^\circ\downarrow\ (\text{اکسنده})} -2$$

$$emf=1/76-0/77=0/99>0 \Rightarrow$$ پیشرفت به صورت طبیعی

(شیمی ۳- آسایش و رفاه در سایهٔ شیمی؛ صفحه‌های ۴۴ تا ۴۹)

۱۰۹- **گزینهٔ «۴»** *(سعید تیزرو)*

بررسی گزینه‌ها:

۱) پسماندهای الکترونیکی نباید در طبیعت دفن یا رها شوند، زیرا سمی بوده و موجب آلودگی محیط زیست می‌شوند.

۲) لیتیم در میان فلزها، دارای کمترین چگالی و کمترین E° می‌باشد.

۳) سالانه از میلیاردها باتری لیتیمی درون دستگاه‌های الکترونیک در سرتاسر جهان استفاده می‌شود.

۴) در تمامی باتری‌ها (از جمله باتری‌های لیتیمی)، با انجام واکنش‌های شیمیایی الکتریسیته تولید می‌شود.

(شیمی ۳- آسایش و رفاه در سایهٔ شیمی؛ صفحه‌های ۴۹ و ۵۰)

۱۱۰- **گزینهٔ «۲»** *(پیمان خواجوی‌مهر)*

با مصرف ۰/۰۵ مول A، ۰/۱۵ مول الکترون مبادله شده است، پس نیم‌واکنش اکسایش به صورت $A \rightarrow A^{3+}+3e^-$ است. با توجه به نیم‌واکنش کاهش $(Cu^{2+}+2e^- \rightarrow Cu)$ معادلهٔ کلی واکنش به صورت $2A+3Cu^{2+} \rightarrow 2A^{3+}+3Cu$ خواهد بود.

$$0/75=\frac{M_A}{64} \Rightarrow M_A=48g.mol^{-1}$$

$$0/15mol\ e^-\times\frac{1mol\ Cu}{2mol\ e^-}\times\frac{64gCu}{1mol\ Cu}=4/8gCu$$

$$0/05mol\ A\times\frac{48g\ A}{1mol\ A}=2/4g\ A$$

پس جرم آند به ۲۲/۶ (۲/۴ – ۲۵) گرم و جرم کاتد به ۲۹/۸ (۴/۸ + ۲۵) گرم می‌رسد.

$$\text{تفاوت جرم آند و کاتد}=29/8-22/6=7/2g$$

(شیمی ۳- آسایش و رفاه در سایهٔ شیمی؛ صفحه‌های ۴۴ تا ۴۹)

@MrKonkori

شیمی ۱

۱۱۱- **گزینهٔ «۲»** *(حمید ذبحی)*

می‌دانیم دستگاه گلوکومتر غلظت گلوکز خون را برحسب $\frac{mg}{dL}$ (میلی‌گرم بر دسی‌لیتر) نمایش می‌دهد، پس:

$$\text{غلظت مولار} = \frac{\text{مول حل‌شونده}}{\text{لیتر محلول}}$$

(فرضی) $= ۱۰۰mL$ حجم هر دو محلول

$= ۱۰۸mg$ جرم حل‌شونده نمونهٔ اول

$= ۱۴۴mg$ جرم حل شونده نمونهٔ دوم

$$\text{غلظت گلوکز در نمونه اول } M_۱ = \frac{\frac{۱۰۸mg}{۱۸۰g.mol^{-۱}}}{\frac{۱۰۰}{۱۰۰۰}L} = ۶\times۱۰^{-۳}\ mol.L^{-۱}$$

$$\text{غلظت گلوکز در نمونه دوم } M_۲ = \frac{\frac{۱۴۴mg}{۱۸۰g.mol^{-۱}}}{\frac{۱۰۰}{۱۰۰۰}L} = ۸\times۱۰^{-۳}\ mol.L^{-۱}$$

$$\text{نسبت غلظت گلوکز در دو نمونه } \frac{۶\times۱۰^{-۳}}{۸\times۱۰^{-۳}} = \frac{۳}{۴}$$

(شیمی ۱- صفحه‌های ۹۸ تا ۱۰۰)

۱۱۲- **گزینهٔ «۳»** *(امیرحسین طیبی)*

پس از افزودن متانول، غلظت مولی محلول از ۰/۰۵ به ۰/۳ رسیده است به این معنی که x گرم متانول افزوده شده، باعث افزایش غلظت به اندازهٔ $۰/۲۵mol.L^{-۱}$ شده است.

$$x\ g \text{ متانول} : ۲۵۰\ mL \text{ محلول} \times \frac{۱L}{۱۰^۳\ mL} \times \frac{۰/۲۵mol\ CH_۳OH}{۱\ L \text{ محلول}}$$

$$\times \frac{۳۲g\ CH_۳OH}{۱mol\ CH_۳OH} = ۲g\ CH_۳OH$$

آب مقطر افزوده شده باعث کاهش غلظت مولی از طریق افزایش حجم محلول می‌شود.

$$M = \frac{n}{V} \Rightarrow n = MV \Rightarrow M_۱V_۱ = M_۲V_۲$$

$$\Rightarrow ۰/۳\times۲۵۰ = ۰/۱۲\times V_۲ \Rightarrow V_۲ = \frac{۰/۳\times۲۵۰}{۰/۱۲} = ۶۲۵mL$$

$$\text{آب افزوده شده} \Rightarrow = ۶۲۵mL - ۲۵۰mL = ۳۷۵mL$$

(شیمی ۱- صفحه‌های ۹۸ تا ۱۰۰)

۱۱۳- **گزینهٔ «۱»** *(محمدرضا پورجاوید)*

برای تعیین معادلهٔ انحلال‌پذیری لازم است دو نقطه از آن را داشته باشیم. در دمای $۶۰^\circ C$ انحلال‌پذیری برابر $۸۵g$ بوده و در دمای $۲۰^\circ C$ انحلال‌پذیری برابر خواهد بود با:

$$M: \text{جرم نمک حل‌شده} \Rightarrow (\frac{M}{M+۱۰۰})\times۱۰۰ = ۲۰ \Rightarrow M = ۲۵g$$

به این ترتیب برای تعیین معادلهٔ انحلال‌پذیری خواهیم داشت:

$$S - S_۱ = \frac{S_۲ - S_۱}{\theta_۲ - \theta_۱}(\theta - \theta_۱) \Rightarrow S - ۲۵ = \frac{۸۵ - ۲۵}{۶۰ - ۲۰}(\theta - ۲۰)$$

$$\Rightarrow S - ۲۵ = \frac{۳}{۲}(\theta - ۲۰) \Rightarrow S - ۲۵ = \frac{۳}{۲}\theta - ۳۰$$

$$\Rightarrow S = \frac{۳}{۲}\theta - ۵$$

(شیمی ۱- صفحه‌های ۱۰۰ تا ۱۰۳)

۱۱۴- **گزینهٔ «۴»** *(یاسر راش)*

بررسی گزینه‌ها:

۱) در دمای $۲۵^\circ C$، $Cl_۲$ به حالت گاز است و نیروهای بین مولکولی آن از یک ماده با مولکول‌های دو اتمی و ناقطبی که در دمای $۲۵^\circ C$ به حالت جامد است (مثل $I_۲$)، کمتر است.

۲) HX یک مولکول دو اتمی با اتم‌های سازندهٔ متفاوت و گشتاور دوقطبی بزرگ‌تر از صفر است.

۳) مولکول‌های $X_۲$ در میدان الکتریکی جهت گیری نکرده‌اند. مولکول‌های ترکیب‌های چند اتمی $CO_۲$ و $CH_۴$ نیز در میدان الکتریکی جهت‌گیری نمی‌کنند.

۴) اگر مولکول‌های $X_۲$ را به $F_۲$ نسبت دهیم، HF به دلیل توانایی در تشکیل پیوند هیدروژنی، دارای نقطهٔ جوش $۱۹^\circ C$ خواهد بود.

(شیمی ۱- صفحه‌های ۱۰۳ تا ۱۰۵)

۱۱۵- **گزینهٔ «۳»** *(امیر حاتمیان)*

موارد (ب) و (ت) درست می‌باشند.

بررسی موارد:

الف) مطابق شکل‌های کتاب درسی Cl در HCl به سمت قطب مثبت جهت‌گیری می‌کند.

ب) چون اتانول در آب حل می‌شود، پس:

$$\frac{\text{نیروی بین مولکولی (جاذبهٔ هیدروژنی) آب - آب} + \text{نیروی بین مولکولی (جاذبهٔ هیدروژنی) اتانول - اتانول}}{۲} < \text{نیروی بین مولکولی (جاذبهٔ هیدروژنی) آب و اتانول}$$

@MrKonkori

پ) گشتاور دوقطبی H_2S بزرگ‌تر از صفر است.

ت) در دمای $25^\circ C$ که آب به حالت مایع می‌باشد، هر مولکول آب با ۲ پیوند هیدروژنی به سایر مولکول‌ها متصل می‌شود. در دمای $105^\circ C$ آب به حالت گاز بوده و بین مولکول‌های آن تقریباً پیوند هیدروژنی وجود ندارد.

(شیمی ۱- صفحه‌های ۱۰۴ تا ۱۰۹)

۱۱۶- **گزینهٔ «۲»** *(محمدرضا جمشیری)*

بررسی موارد نادرست:

۱) مولکول ید (I_2) یک مولکول ناقطبی است و گشتاور آن دقیقاً برابر صفر است.

۳) هگزان به دلیل این‌که یک مولکول ناقطبی است، در آب که یک حلال قطبی است، حل نمی‌شود.

۴) استون همانند اتانول در یک حلال قطبی مانند آب حل می‌شود.

(شیمی ۱- صفحه‌های ۱۰۹ و ۱۱۱)

۱۱۷- **گزینهٔ «۳»** *(محمدرضا پورجاوید)*

هر چند کاهش دمای آب موجب افزایش انحلال‌پذیری گازها در آن می‌شود، اما رابطهٔ خطی بین آن‌ها وجود ندارد و نصف کردن دمای آب ممکن است انحلال‌پذیری را به میزان دو برابر، کمتر و یا بیشتر افزایش دهد.

در رابطه با عبارت اول توجه داشته باشید که گاهی اوقات با چنین شرایطی مواجه می‌شویم؛ به عنوان مثال انحلال‌پذیری CO_2 (ناقطبی) از NO (قطبی) در آب بیشتر است، چراکه CO_2 با آب واکنش شیمیایی می‌دهد و کربنیک اسید تولید می‌شود.

(شیمی ۱- صفحه‌های ۱۱۳ تا ۱۱۵)

۱۱۸- **گزینهٔ «۱»** *(سعید تیزرو)*

تمامی موارد درست هستند.

چون مولکول‌های آب از سر هیدروژن‌ها دور یون X جمع شده‌اند، این یون دارای بار منفی است. در فرایند انحلال ترکیب‌های یونی، ماده حل‌شونده ویژگی ساختاری خود را حفظ نکرده و یون‌های سازندهٔ شبکهٔ بلور یونی، تفکیک و آب‌پوشیده می‌شوند. همچنین نیروی جاذبه برقرار شده بین یون X و مولکول‌های آب در شکل، جاذبهٔ یون- دوقطبی نام دارد.

(شیمی ۱- صفحه‌های ۱۱۲ و ۱۱۳)

۱۱۹- **گزینهٔ «۳»** *(حمید ذبحی)*

بررسی موارد:

الف) درست

ب) نادرست؛ میوه‌های خشک طی فرایند اسمز، آب را جذب می‌کنند.

پ) درست

ت) درست؛ ابتدا غلظت مولی هر دو محلول را حساب می‌کنیم:

$$\text{غلظت مولی محلول چپ } (NaCl) = \frac{\frac{5/85g}{58/5g.mol^{-1}}}{\frac{200}{1000}L} = 0/5 mol.L^{-1}$$

$$\text{غلظت مولی محلول راست } (KCl) = \frac{\frac{7/45g}{74/5g.mol^{-1}}}{\frac{100}{1000}L} = 1 mol.L^{-1}$$

فرایند اسمز تا جایی پیش می‌رود که غلظت محلول‌ها در دو طرف غشا برابر بشوند. فرض می‌کنیم x لیتر آب از محلول رقیق ($NaCl$ با غلظت ۰/۵ مولار) به سمت محلول غلیظ (KCl با غلظت ۱ مولار) انتقال می‌یابد.

$$M_{NaCl} = M_{KCl} \Rightarrow \frac{0/1}{0/2-x} = \frac{0/1}{0/1+x}$$

$$\Rightarrow 0/2-x = 0/1+x \Rightarrow x = 0/05 L$$

بنابراین مقدار آب انتقال یافته به محلول KCl برابر با $50mL$ است.

درصد افزایش حجم محلول KCl: $\frac{50}{100} \times 100 = 50\%$

(شیمی ۱- صفحه‌های ۱۱۶ تا ۱۱۸)

۱۲۰- **گزینهٔ «۴»** *(محسن مجنوبی)*

همهٔ موارد نادرست‌اند.

بررسی موارد:

الف) با توجه به گشتاور دوقطبی مادهٔ B که برابر ۱/۳۰ است، این ماده قطبی می‌باشد، در نتیجه در هگزان که یک مادهٔ ناقطبی است نامحلول است.

ب) نقطهٔ جوش ارتباط مستقیمی با نیروهای بین مولکولی مواد دارد، پس مقایسهٔ نقطهٔ جوش همان مقایسهٔ نیروهای بین مولکولی است.

پ) از آنجا که مادهٔ C بیشترین و مادهٔ A کمترین گشتاور دوقطبی را دارند، پس در میدان الکتریکی بیشترین جهت‌گیری را مادهٔ C و کمترین جهت‌گیری را مادهٔ A دارد.

ت) اسیدهای چرب گشتاور دوقطبی کوچکی دارند ولی امکان برقراری پیوند هیدروژنی در بین مولکول‌های آن‌ها ممکن است.

(شیمی ۱- صفحه‌های ۱۰۳ تا ۱۰۹ و ۱۲۰ تا ۱۲۲)

@MrKonkori

شیمی ۲

۱۲۱- **گزینهٔ «۲»** *(محمد عظیمیان‌زواره)*

شمار اتم‌های سازندهٔ هر مولکول سلولز بسیار زیاد بوده و اندازهٔ مولکول آن بزرگ است.

بررسی عبارت‌های درست:

۱) حدود نیمی (حدود ۵۰٪) از لباس‌های تولیدی در جهان از پنبه تهیه می‌شود.

۳) درشت مولکول‌ها بسیار بزرگ بوده و جرم مولی و شمار اتم‌های سازندهٔ آن‌ها بسیار زیاد است.

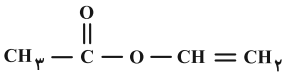
۴) زیرا ذره‌های سازندهٔ آن‌ها مولکول‌ها هستند و در ساختار آن‌ها یون وجود ندارد.

(شیمی ۲- صفحه‌های ۱۰۲ تا ۱۰۴)

۱۲۲- **گزینهٔ «۴»** *(امیر حاتمیان)*

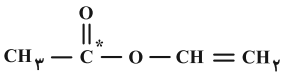
بررسی سایر گزینه‌ها:

۱) مونومر سازندهٔ این پلیمر، وینیل استات با ساختار زیر است:



۲) مونومر آن غیرآروماتیک است و سیرنشده می‌باشد.

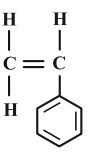
۳) در واحد سازندهٔ این پلیمر، تنها یک اتم کربن وجود دارد که به هیچ هیدروژنی متصل نمی‌باشد.



(شیمی ۲- صفحه‌های ۱۰۴ تا ۱۰۶)

۱۲۳- **گزینهٔ «۲»** *(علیرضا بیاتی)*

فرمول استیرن به صورت C_8H_8 و ساختار آن به صورت زیر می‌باشد.



بررسی موارد:

الف) استیرن ۲۰ پیوند کووالانسی دارد.

$$C_8H_8 \Rightarrow \text{تعداد پیوند اشتراکی} = \frac{8\times4+8\times1}{2} = 20$$

و هفتمین عضو خانوادهٔ آلکین‌ها C_8H_{14} می‌باشد که ۲۳ پیوند کووالانسی دارد.

$$\text{تعداد پیوند کووالانسی} = \frac{8\times4+14\times1}{2} = 23$$

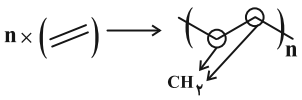
ب) پلی‌استیرن در تهیهٔ ظروف یک بار مصرف به کار می‌رود.

پ) با توجه به ساختار، تعداد پیوند دوگانهٔ کربن-کربن و یگانهٔ کربن-کربن مساوی و هر دو برابر ۴ می‌باشند.

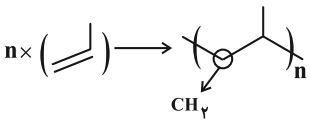
ت) فرمول نفتالن $C_{10}H_8$ بوده که تعداد H آن با استیرن برابر می‌باشد. بنابراین تنها مورد الف نادرست می‌باشد.

(شیمی ۲- صفحهٔ ۱۰۶)

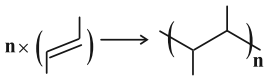
۱۲۴- **گزینهٔ «۱»** *(امیرحسین طیبی)*

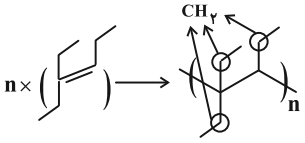
۱)  ~ ۲n گروه CH_2

$$?\,mol\ CH_2\ \text{گروه} : 70g\ C_2H_4 \times \frac{1mol\ C_2H_4}{28g\ C_2H_4} \times \frac{2n\,mol\ CH_2\ \text{گروه}}{n\,mol\ C_2H_4} = 5mol\ CH_2\ \text{گروه}$$

۲)  ~ n گروه CH_2

$$?\,mol\ CH_2\ \text{گروه} : 70g\ C_2H_4 \times \frac{1mol\ C_3H_6}{42g\ C_3H_6} \times \frac{n\,mol\ CH_2\ \text{گروه}}{n\,mol\ C_3H_6} = \frac{5}{3}mol\ CH_2\ \text{گروه}$$

۳) در ساختار این پلیمر گروه CH_2 وجود ندارد: 

۴)  ~ ۳n گروه CH_2

$$?\,mol\ CH_2\ \text{گروه} : 70g\ C_8H_{16} \times \frac{1mol\ C_8H_{16}}{112g\ C_8H_{16}} \times \frac{3n\,mol\ CH_2\ \text{گروه}}{n\,mol\ C_8H_{16}} = \frac{15}{8}mol\ CH_2\ \text{گروه}$$

در نتیجه شمار گروه‌های CH_2 در ساختار ۷۰ گرم از پلیمر $(C_2H_4)_n$ بیشتر از باقی گزینه‌ها است.

(شیمی ۲- صفحه‌های ۱۰۴ و ۱۰۵)

@MrKonkori

۱۲۵- **گزینهٔ «۳»** *(هادی مهدی‌زاده)*

فقط مورد (پ) نادرست است.

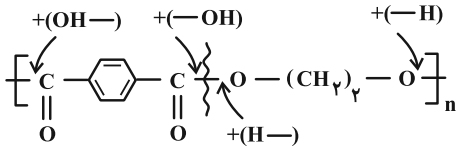
بررسی مورد نادرست:

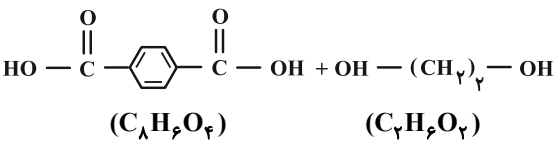
پ) در واحد تکرارشونده پلی‌استرها، حداقل ۴ اتم اکسیژن وجود دارد که هر اتم اکسیژن دارای ۲ جفت الکترون ناپیوندی است. بنابراین در هر واحد تکرارشونده پلی‌استرها، حداقل ۸ جفت الکترون ناپیوندی وجود دارد.

(شیمی ۲- صفحه‌های ۱۰۹، ۱۱۰ و ۱۱۴ تا ۱۱۶)

۱۲۶- **گزینهٔ «۱»** *(هادی مهدی‌زاده)*

واکنش آبکافت این پلی‌استر به صورت زیر است:





(شیمی ۲- صفحه‌های ۱۱۴ تا ۱۱۶ و ۱۱۹)

۱۲۷- **گزینهٔ «۲»** *(محسن مجنونی)*

فرمول مولکولی این ترکیب به صورت $C_6H_{12}O_2$ است.

$$\text{جرم مولی ترکیب} = 6\times12+12\times1+2\times16 = 116\,g.mol^{-1}$$

الکل سازندهٔ این استر، اتانول می‌باشد که جرم مولی آن $46\,g.mol^{-1}$ است. تفاوت جرم مولی استر و الکل برابر است با:

$$116-46 = 70\,g.mol^{-1}$$

بررسی سایر گزینه‌ها:

۱) نام این استر اتیل بوتانوات است و در آناناس وجود دارد.

۳) در ترکیب $C_6H_{12}O_2$ ، ۲۰ پیوند کووالانسی وجود دارد.

$$\text{تعداد پیوندهای کووالانسی} = \frac{6\times4+12\times1+2\times2}{2} = 20$$

۴) اسید سازندهٔ این استر، بوتانوئیک اسید است که فرمول مولکولی آن به صورت $C_4H_8O_2$ می‌باشد و جرم مولی آن برابر است با:

$$4\times12+8\times1+2\times16 = 88\,g.mol^{-1}$$

(شیمی ۲- صفحه‌های ۱۰۹، ۱۱۰ و ۱۱۵)

۱۲۸- **گزینهٔ «۲»** *(یاسر راش)*

گروه‌های عاملی بخش‌های قطبی یک ترکیب آلی را تشکیل می‌دهند و افزایش تعداد این گروه‌ها در ساختار ترکیب‌های آلی، نسبت به سایر موارد گفته شده، انحلال‌پذیری ترکیب‌های آلی را در آب، به میزان بیشتری افزایش می‌دهد.

(شیمی ۲- صفحه‌های ۱۱۱ تا ۱۱۴)

۱۲۹- **گزینهٔ «۲»** *(پیمان فوادپوی‌مهر)*

برای تشکیل پلی‌آمیدها به ماده‌ای نیاز است که هم‌گروه عاملی آمین و هم‌گروه عاملی کربوکسیل داشته باشد. برای این کار باید یا دو واکنش‌دهنده (یک دی اسید و یک دی آمین) یا یک واکنش‌دهنده (شامل گروه عامل‌های آمین و اسید) داشته باشد.

(شیمی ۲- صفحه‌های ۱۱۶ و ۱۱۷)

۱۳۰- **گزینهٔ «۲»** *(سعید تیزرو)*

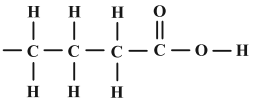
بررسی موارد:

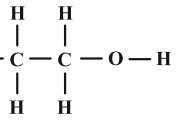
الف) درست؛ پلیمرهای حاصل از آلکن‌ها و هیدروکربن‌های سیرنشده نظیر پلی اتن و پلی استیرن، زیست تخریب‌ناپذیرند.

ب) درست؛ مطابق متن صفحهٔ ۱۲۱ کتاب درسی درست است.

پ) درست؛ پلیمرهای طبیعی مانند نشاسته زیست تخریب‌پذیر هستند. مولکول‌های نشاسته در شرایط مناسب مانند محیط مرطوب با کاتالیزگر یا محیط گرم و مرطوب به آرامی به مونومرهای سازنده (گلوکز) تبدیل می‌شوند.

ت) نادرست؛ از آبکافت اتیل بوتانوات، مولکول‌های اتانول (C_2H_5OH) و بوتانوئیک اسید $(CH_3CH_2CH_2-\overset{O}{\overset{\|}{C}}-OH)$ تولید می‌شوند که در مجموع دارای ۲۲ پیوند اشتراکی هستند.


ساختار بوتانوئیک اسید (۱۴ پیوند اشتراکی):


ساختار اتانول (۸ پیوند اشتراکی):

(شیمی ۲- صفحه‌های ۱۱۸ تا ۱۲۱)

@MrKonkori

دفترچه پاسخ

آزمون هوش و استعداد
(دورهٔ دوم)
۱۶ آذر

تعداد کل سؤالات آزمون: ۲۰
زمان پاسخ‌گویی: ۳۰ دقیقه

گروه فنی تولید

مسئول آزمون	حمید لنجان‌زاده اصفهانی
ویراستار	فاطمه راسخ، حمیدرضا رحیم خانلو
مدیر گروه مستندسازی	محیا اصغری
مسئول درس مستندسازی	علیرضا همایون‌خواه
طراحان	حمید اصفهانی، فاطمه راسخ، هادی زمانیان، حمید گنجی، فرزاد شیرمحمدلی
حروف‌چینی و صفحه‌آرایی	معصومه روحانیان
ناظر چاپ	حمید عباسی

@MrKonkori

استعدادتحلیلی

۲۵۱- گزینهٔ «۳» *(حمید اصفهانی)*

مصراع «سخت می‌گیرد جهان بر مردمان سخت‌کوش» توصیه است به سخت‌نگرفتن، توصیه به آسان‌گیری. در گزینهٔ «۳» هم همین توصیه هست: اگر بر خودت دشوار گرفته‌ای، گناه خودت است. در دیگر گزینه‌ها:

گزینهٔ «۱»: کارهای سخت را آسان نگیر.

گزینهٔ «۲»: کار دشوار با یادگیری آسان می‌شود.

گزینهٔ «۴»: اگر چیزی آسان به‌دست بیاید، ارزش آن دانسته نمی‌شود و آسان از دست می‌رود.

(هوش کلامی)

۲۵۲- گزینهٔ «۲» *(حمید اصفهانی)*

همهٔ گزینه‌ها به تنهایی و تنها ماندن توصیه می‌کنند، به‌جز گزینهٔ «۲» که تنهایی را برازندهٔ خدا می‌داند.

(هوش کلامی)

۲۵۳- گزینهٔ «۴» *(حمید اصفهانی)*

سه حرف پایانیِ چهار فصلِ سال در صورت سؤال آمده است: بهار، تابستان، پاییز، زمستان

(هوش کلامی)

۲۵۴- گزینهٔ «۱» *(حمید اصفهانی)*

سی‌ودو حرف الفبا داریم که یک‌چهارم دوم، یعنی حرف‌های نُه تا شانزده و یک‌چهارمِ پایانی یعنی حرف‌های بیست‌وپنج تا سی‌ودو:

الف ب پ ت ث ج چ ح خ د ذ ر ز ژ س ش ص ض ط ظ ع غ ف ق ک گ ل م ن و هـ ی

ترتیب مدّنظر:

الف ب پ ت ث ج چ ح ک گ ل م ن و هـ ی ص ض ط ظ ع غ ف ق خ د ذ ر ز ژ س ش

سومین حرفِ سمتِ راستِ شانزدهمین حرفِ الفبا، سیزدهمین حرف الفباست که در ترتیب بالا حرف یک‌نقطه‌ای «ن» است.

(هوش کلامی)

۲۵۵- گزینهٔ «۱» *(حمید اصفهانی)*

اگر قرار باشد حاصل جمع سه عدد طبیعی برابر شش باشد، ممکن است که آن سه عدد «چهار، یک، یک» یا «سه، دو، یک» یا «دو، دو، دو» باشند که در هیچ حالتی با حروف «ا، ب، ج، د» با ترتیب‌های بالا، نمی‌توان نام گل یا درخت ساخت. در دیگر گزینه‌ها:

[ک = ۲۰] + [ا = ۱] + [ج = ۳] کاج: ۲۴

[ی = ۱۰] + [ا = ۱] + [س = ۶۰] یاس: ۷۱

[س = ۶۰] + [ر = ۲۰۰] + [و = ۶] سرو: ۲۶۶

(هوش کلامی)

۲۵۶- گزینهٔ «۱» *(حمید اصفهانی)*

می‌توانیم با حذف حروف مشترک، سریعتر به پاسخ برسیم. با این حال عدد همه‌ی کلمات:

[خ = ۶۰۰] + [ر = ۲۰۰] + [چ = ۳] + [ن = ۵۰] + [گ = ۲۰] خرچنگ: ۸۷۳

[ک = ۲۰] + [ر = ۲۰۰] + [گ = ۲۰] + [د = ۴] + [ن = ۵۰] کرگدن: ۲۹۴

[گ = ۲۰] + [ر = ۲۰۰] + [ا = ۱] + [ز = ۷] گراز: ۲۲۸

[گ = ۲۰] + [و = ۶] + [ر = ۲۰۰] + [ک = ۲۰] + [ن = ۵۰] گورکن: ۲۹۶

(هوش کلامی)

۲۵۷- گزینهٔ «۲» *(حمید اصفهانی)*

در گزینه‌ها، عددهای یکان یکسان نیست. پس می‌توانیم تنها با محاسبه‌ی عدد یکان ارزش عددی مصراع «پادشاه شعرا بود اهلی» به پاسخ برسیم. با این حال ارزش کل مصراع ۹۴۲ است:

[ی = ۱۰] + [ل = ۳۰] + [ه = ۵] + [ا = ۱] + [د = ۴] + [و = ۶] +

[ب = ۲] + [ا = ۱] + [ر = ۲۰۰] + [ع = ۷۰] + [ش = ۳۰۰] + [ه = ۵] +

[ا = ۱] + [ش = ۳۰۰] + [د = ۴] + [ا = ۱] + [پ = ۲]

(هوش کلامی)

۲۵۸- گزینهٔ «۴» *(حمید کنبی)*

وقتی میرزامحمود ۵۰ ساله بوده است اولین نوهٔ او به دنیا آمده است. پس وقتی میرزامحمود ۸۰ ساله باشد، اولین نوهٔ او سی‌ساله است.

حال سن سه نوهٔ دیگر هم معلوم است:

$$۳۰ \xrightarrow{-۲} ۲۸ \xrightarrow{-۳} ۲۵ \xrightarrow{-۴} ۲۱$$

پس میانگین سن نوه‌ها برابر است:

$$\frac{۳۰+۲۸+۲۵+۲۱}{۴} = \frac{۱۰۴}{۴} = ۲۶$$

(منطقی و ریاضی)

@MrKonkori

۲۵۹- گزینهٔ «۱» *(فاطمه راسخ)*

m را کارِ مینا، n را کارِ نرگس و h را کار هما و e را کار الهه می‌گیریم. کسرِ کارِ انجام‌شده را به می‌نویسیم:

$$\left.\begin{matrix} m+n+h+e=\frac{1}{2} \\ n=\frac{1}{10}\ ,\ e=\frac{1}{12} \end{matrix}\right\} \Rightarrow m+\frac{1}{10}+e+\frac{1}{12}=\frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow m+e=\frac{1}{2}-(\frac{1}{10}+\frac{1}{12})$$

$$m+e=\frac{30-(6+5)}{60}=\frac{19}{60}\Rightarrow$$

پس کل کار به‌دست مینا و هما در $\frac{60}{19}\simeq 3$ ساعت انجام می‌شود.

(هوش منطقی و ریاضی)

۲۶۰- گزینهٔ «۳» *(فرزاد شیرمحمدلی)*

در ظرف اولیه:

	نسبت به حجم	حجم به لیتر
الف	۳	
ب	۵	
ج	۲	
مجموع	۱۰	۲۰

×۲

$\Rightarrow$

	نسبت به حجم	حجم به لیتر
الف	۳	۶
ب	۵	۱۰
ج	۲	۴
مجموع	۱۰	۲۰

×۲

حال یازده لیتر مادهٔ «ب» اضافه داریم و باید بدون تغییر حجم مادهٔ «الف»، حجم مادهٔ «ج» را افزایش دهیم. این میزان افزایش حجم را x می‌نامیم. داریم:

	ظرف اول	ظرف دوم
الف	۶	۶
ب	۱۰	$۱۰+۱۱=۲۱$
ج	۴	$۴+x$
مجموع	۲۰	$۶+۲۱+۴+x$

$$\frac{4+x}{6+21+4+x}=\frac{1}{4}\Rightarrow\frac{x+4}{x+31}=\frac{1}{4}\Rightarrow 4x+16=x+31$$

$$\Rightarrow 3x=15\Rightarrow x=5$$

(هوش منطقی ریاضی)

۲۶۱- گزینهٔ «۱» *(فاطمه راسخ)*

$$\frac{1}{14}=\frac{1}{7\times2}=(\frac{7-2}{7\times2})\times\frac{1}{5}=(\frac{1}{2}-\frac{1}{7})\times\frac{1}{5}$$

$$\frac{1}{84}=\frac{1}{7\times12}=(\frac{12-7}{12\times7})\times\frac{1}{5}=(\frac{1}{7}-\frac{1}{12})\times\frac{1}{5}$$

همچنین:

$$\frac{1}{204}=(\frac{1}{12}-\frac{1}{17})\times\frac{1}{5},\frac{1}{374}=(\frac{1}{17}-\frac{1}{22})\times\frac{1}{5}$$

$$\frac{1}{594}=(\frac{1}{22}-\frac{1}{27})\times\frac{1}{5}$$

پس عبارت صورت سؤال برابر است با:

$$\frac{1}{5}\times[(\frac{1}{2}-\frac{1}{7})+(\frac{1}{7}-\frac{1}{12})+(\frac{1}{12}-\frac{1}{17})+(\frac{1}{17}-\frac{1}{22})$$

$$+(\frac{1}{22}-\frac{1}{27})]=\frac{1}{5}\times(\frac{1}{2}-\frac{1}{27})=\frac{1}{5}\times\frac{27-2}{2\times27}=\frac{25}{5\times2\times27}=\frac{5}{54}$$

(هوش منطقی ریاضی)

۲۶۲- گزینهٔ «۲» *(حمید اصفهانی)*

فرض کنیم در گذشته «ج ۱۰۰= ب و الف» بوده است.

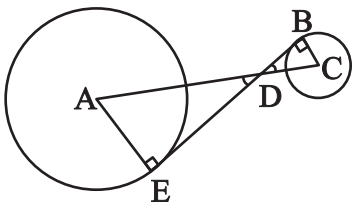
اکنون «ج ۸۰= الف» و «ج ۱۱۰= ب» است. پس:

$$\frac{\text{الف}}{\text{ب}}=\frac{80}{110}=\frac{8}{11}$$

(هوش منطقی ریاضی)

۲۶۳- گزینهٔ «۲» *(حمید کنعی)*

دو مثلث DBC و DEA را درنظر بگیرید. چون خط مماس بر دایره بر شعاعِ دایره عمود است، هر دو مثلث قائم‌الزاویه‌اند. همچنین به دلیل تساوی زوایای متقابل به رأس D در دو مثلث، این دو مثلث متشابه هستند. پس اگر نسبت تشابه را بدانیم، نسبت مساحت هم معلوم می‌شود.



از دادهٔ «الف» نسبت ضلع‌های AE و BC با هم، معلوم است. پس نسبت مساحت‌ها برابرِ مربع این عدد است. از دادهٔ «ب» به نتیجهٔ خواسته شده نمی‌رسیم.

(هوش منطقی ریاضی)

@MrKonkori

۲۶۴- گزینهٔ «۴» *(کتاب استعدارتفلیلی هوش کلامی)*

شعاع دایره‌ها را r می‌گیریم:

اندازهٔ مساحت مربع $= ۸r \times ۸r = ۶۴r \times r$

اندازهٔ مساحت هر دایره $= \pi r^۲$

تعداد کل دایره‌ها $= (۹\times ۱) + (۱۲\times \frac{۱}{۲}) + (۴\times \frac{۱}{۴}) = ۱۶$

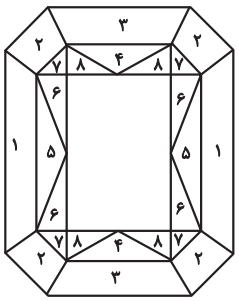
اندازهٔ مساحت رنگی $= ۶۴r^۲ - ۱۶\pi r^۲ = (۶۴ - ۱۶\pi)r^۲$

$$\frac{\text{اندازهٔ مساحت رنگی}}{\text{اندازهٔ مساحت کل مربع}} = \frac{(۶۴-۱۶\pi)r^۲}{۶۴r^۲} = \frac{۶۴-۱۶\pi}{۶۴} = ۱ - \frac{\pi}{۴}$$

(هوش منطقی ریاضی)

۲۶۵- گزینهٔ «۳» *(حمید اصفهانی)*

مستطیلِ سفید درونِ شکل، $\frac{۳}{۷}$ از مساحت کل شکل است. در $۱ - \frac{۳}{۷} = \frac{۴}{۷}$ که باقی‌مانده است، از هر دو قسمت، یکی رنگی است. یعنی $\frac{۴}{۷} \div ۲ = \frac{۲}{۷}$ از کل شکل رنگی است.



(هوش منطقی ریاضی)

۲۶۶- گزینهٔ «۴» *(فاطمه راسخ)*

دقت کنید برای فردی که از پشت به مجسمه نگاه می‌کند، شکل وارونِ جانبی است. بدیهی است بین دو شکل، آن‌چه برای ما جلوتر است برای چشم رسم شده عقب‌تر است و برعکس.

(هوش غیرکلامی)

۲۶۷- گزینهٔ «۲» *(هادی زمانیان)*

از شکل گستردهٔ گزینهٔ «۱» مکعب کاملی ساخته نمی‌شود، وجه‌های ۱ و ۲ روی هم می‌افتند و روبه‌روی وجه ۶ قرار می‌گیرند، وجه‌های ۳ و ۴ نیز روبه‌روی یکدیگر هستند ولی وجهی روبه‌روی وجه ۵ قرار نمی‌گیرد.

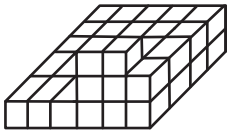
در گزینهٔ «۳» یا باید جای عددهای ۲ و ۳ با هم عوض شود و یا جای عددهای ۴ و ۵.

در گزینهٔ «۴» یا باید جای عددهای ۱ و ۴ با هم عوض شود یا جای عددهای ۳ و ۶.

(هوش غیرکلامی)

۲۶۸- گزینهٔ «۲» *(فاطمه راسخ)*

حجم داده شده، در کف از $۶\times ۴ = ۲۴$ مکعب و در لایه‌های بعدی از ۶ مکعب تشکیل شده است. پس در کل حداقل $۲۴ + ۶ = ۳۰$ مکعب دارد.



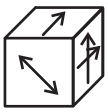
(هوش غیرکلامی)

۲۶۹- گزینهٔ «۱» *(کتاب استعدارتفلیلی هوش غیرکلامی)*

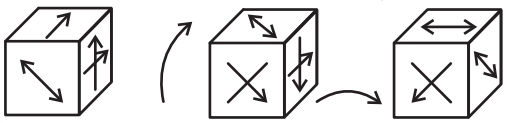
دقت کنید پستی و بلندی در تصویر سایه تأثیر ندارد.

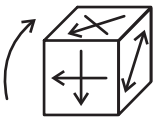
(هوش غیرکلامی)

۲۷۰- گزینهٔ «۱» *(هادی زمانیان)*

مکعب صورت سؤال در حرکت خود، ابتدا سه بار نود درجهٔ ساعتگرد می‌چرخد. در نتیجه، به شکل  درمی‌آید که همان شکلِ چرخشِ نود درجه پادساعتگرد مکعب است.

حال سه چرخش دیگر داریم:





(هوش غیرکلامی)

@MrKonkori