دفترچه پاسخ

آزمون ٤ آبان ١٤٠٣

اختصاصی دوازدهم ریاضی

بنیاد علمی آموزشی قلم‌چی (وقف عام)

	نام درس	نام طراحان
اختصاصی	حسابان ۲	کاظم اجلالی-شیوا امین-دانیال آرکیش-علی آزاد-داود بوالحسنی-هادی پولادی-محمدابراهیم توزنده‌جانی-مهدی حاجی‌زاده داود حسین‌پور-افشین خاصه‌خان-احسان سیفی‌سلسله-حامد معنوی-جهانبخش نیکنام
	هندسه	امیرحسین ابومحبوب-اسحاق اسفندیار-فاطمه برزویی-جواد ترکمن-آرین تفضلی‌زاده-افشین خاصه‌خان-فرزانه خاکپاش کیوان دارابی-سوگند روشنی-هومن عقیلی-احمدرضا فلاح-مجتبی مظاهری‌فرد-مهرداد ملوندی-نیما مهندس
	ریاضیات گسسته	آرین تفضلی‌زاده-کیوان دارابی-مصطفی دیداری-سوگند روشنی-علیرضا شریف‌خطیبی-نیلوفر مهدوی-نیما مهندس
	فیزیک	کامران ابراهیمی-مهران اسماعیلی-حسین الهی-بهزاد آزادفر-زهره آقامحمدی-علیرضا جباری-مهدی حاجی‌زاده-ویدا حیدری مسعود خندانی-محسن سلماسی‌وند-معصومه شریعت‌ناصری-مهدی شریفی-نگار صفری-متین فرخی-مصطفی کیانی-محمد مقدم محمدکاظم منشادی-سیدمحمدعلی موسوی-امیراحمد میرسعید-مجتبی نکوئیان
	شیمی	علیرضا بیانی-محبوبه بیک‌محمدی-محمدرضا پورجاوید-زینب تبایی-امیرحسین حسن‌نژاد-پیمان خواجوی‌مجد-حمید ذبحی یاسر راش-روزبه رضوانی-هانی سوری-امیرحسین طیبی-محمد عظیمیان‌زواره-امیرمحمد کنگرانی-محسن مجنونی-کیارش معدنی هادی مهدی‌زاده

گزینشگران و ویراستاران

نام درس	حسابان ۲	هندسه	ریاضیات گسسته	فیزیک	شیمی
گزینشگر	کاظم اجلالی	امیرحسین ابومحبوب	امیرحسین ابومحبوب	مصطفی کیانی	ایمان حسین نژاد
گروه ویراستاری	امیرحسین ابومحبوب سهیل تقی‌زاده	امیرحسین ابومحبوب مهبد خالتی امیرمحمدکریمی	امیرحسین ابومحبوب مهبد خالتی امیرمحمدکریمی	بهنام شاهنی زهره آقامحمدی	محمدحسن محمدزاده مقدم احسان پنجه‌شاهی امیرحسین کمره ای
ویراستاری رتبه های برتر	امیرحسین ملازینل سپهر متولیان سیدماهد عبدی‌کوهی	امیرحسین ربیعیان امیرحسین ملازینل	امیرحسین ربیعیان امیرحسین ملازینل	سینا صالحی	آرمان قنواتی امیرحسین ملازینل
بازنویسی آزمون	------	امیرحسین ملازینل	امیرحسین ملازینل	سینا صالحی	------
مسئول درس	عادل حسینی	سرژ یقیازاریان تبریزی	سرژ یقیازاریان تبریزی	حسام نادری	امیرعلی بیات
مستندسازی	سمیه اسکندری	عادل حسینی	الهه شهبازی	علیرضا همایون‌خواه	امیرحسین توحیدی
ویراستاران(مستندسازی)	احسان صادقی-سجاد سلیمی-علیرضا عباسی‌زاهد			سیدسجاد رضایی معصومه صنعت‌کار ابراهیم نوری محمد زنگنه	ملینا ملائی سجاد رضایی محمدصدرا وطنی

گروه فنی و تولید

مدیر گروه	مهرداد ملوندی	
مسئول دفترچه	نرگس غنی‌زاده	
گروه مستندسازی	مدیر گروه: محیا اصغری	مسئول دفترچه: الهه شهبازی
حروف‌نگار	فرزانه فتح اله‌زاده	
ناظر چاپ	سوران نعیمی	

گروه آزمون

بنیاد علمی آموزشی قلم‌چی (وقف عام)

دفتر مرکزی: خیابان انقلاب بین صبا و فلسطین – پلاک ۹۲۳ – کانون فرهنگی آموزش – تلفن: ۶۴۶۳-۰۲۱

@MrKonkori

حسابان ۲

۱- **گزینهٔ «۱»** *(مهدی حاجی‌زاده)*

ابتدا تابع f^{-1} را با تعویض مؤلفه‌های اول و دوم در زوج مرتب‌های f به دست می‌آوریم:

$$f^{-1}=\{(۱,۳),(۲,۱),(۳,۴)\}$$

دامنه هر دو تابع f^{-1} و g مجموعهٔ $\{۳,۲,۱\}$ است، پس داریم:

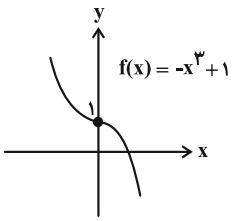
$$f^{-1}+g=\{(۱,۴),(۲,۴),(۳,۹)\}$$

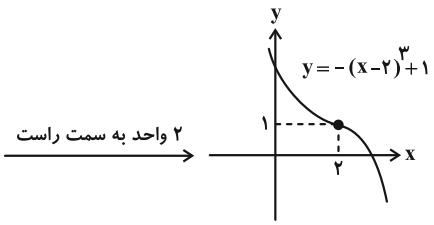
برد این تابع مجموعهٔ $\{۴,۹\}$ است که مجموع اعضای آن برابر ۱۳ است.

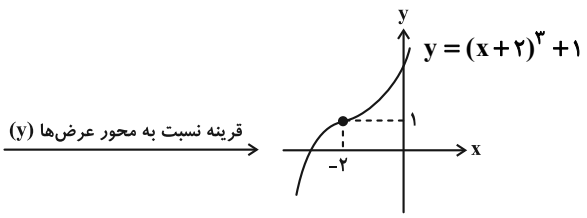
(حسابان ۱- صفحه‌های ۵۷ تا ۶۴)

۲- **گزینهٔ «۴»** *(دانیال آرکیش)*

باید نمودار را رسم کنیم:





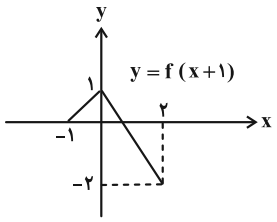


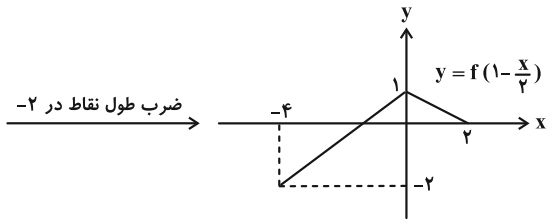
نمودار حاصل از ناحیهٔ چهارم دستگاه مختصات عبور نمی‌کند.

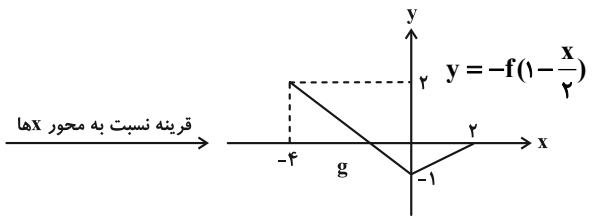
(حسابان ۲- صفحه‌های ۱ تا ۱۲)

۳- **گزینهٔ «۴»** *(داود حسین‌پور)*

برای رسم نمودار تابع g، نمودار تابع f را یک واحد به چپ می‌بریم $\big(y=f(x+۱)\big)$، سپس طول نقاط روی نمودار حاصل را در ۲- ضرب می‌کنیم $\left(y=f(۱-\frac{x}{۲})\right)$ و در نهایت نمودار را نسبت به محور xها قرینه می‌کنیم.







(حسابان ۲- صفحه‌های ۱ تا ۱۲)

۴- **گزینهٔ «۳»** *(هادی پولادی)*

$$f(x)=x^۲-۲x+۱+mx^۲+(n-۱)x+۱$$
$$=(۱+m)x^۲+(n-۳)x+۲$$

تنها تابعی که هم صعودی و هم نزولی است، تابع ثابت است. بنابراین:

$$\begin{cases}۱+m=۰\Rightarrow m=-۱\\ n-۳=۰\Rightarrow n=۳\end{cases}\Rightarrow ۵m-۲n=-۵-۶=-۱۱$$

(حسابان ۲- صفحه‌های ۱۳ تا ۱۸)

۵- **گزینهٔ «۱»** *(افشین خاصه‌خان)*

نقطهٔ $(۴,۶)$ روی نمودار تابع $fogof$ قرار گرفته است. پس داریم:

$$f\Big(g\big(f(۶)\big)\Big)=۴\xrightarrow{f(۶)=۰}f\big(g(۰)\big)=۴$$
$$\xrightarrow{g(۰)=c}f(c)=۴\Rightarrow\sqrt{۶-c}=۴\Rightarrow ۶-c=۱۶\Rightarrow c=-۱۰$$

به‌طور مشابه، مختصات دو نقطهٔ $(۳,۵)$ و $(۱,۲)$ را در تابع $fogof$ اعمال می‌کنیم:

$$f\Big(g\big(f(۵)\big)\Big)=۳\xrightarrow{f(۵)=۱}f\big(g(۱)\big)=۳$$
$$\xrightarrow{f(-۳)=۳}g(۱)=-۳\xrightarrow{(b,-۳)\in g}b=۱$$
$$f\Big(g\big(f(۲)\big)\Big)=۱\xrightarrow{f(۲)=۲}f\big(g(۲)\big)=۱$$
$$\xrightarrow{f(۵)=۱}g(۲)=۵\xrightarrow{(a,۵)\in g}a=۲$$

در نتیجه داریم:

$$a+b+c=۲+۱-۱۰=-۷$$

(حسابان ۱- صفحه‌های ۶۶ تا ۷۰)

@MrKonkori

۶- **گزینهٔ «۱»** *(احسان سیفی‌سلسله)*

تابع f اکیداً یکنواست و چون $f(۲) < f(۱)$ است، تابع اکیداً نزولی است. حال باید نامعادلهٔ $f\big(f(x)\big) < ۳$ را حل کنیم. چون $f(۱) = ۳$ است، پس نامعادله به صورت $f\big(f(x)\big) < f(۱)$ تغییر می‌کند و چون تابع f اکیداً نزولی است داریم:

$$f(x) > ۱ \xrightarrow{f(۲)=۱} f(x) > f(۲) \xrightarrow{f \text{ اکیداً نزولی}} x < ۲$$

(حسابان ۲- صفحه‌های ۱۳ تا ۱۸)

۷- **گزینهٔ «۲»** *(محمدابراهیم توزنده‌جانی)*

با توجه به حضور زوج‌های مرتب $(a , ۴)$ و $(۶ , ۷)$ این نتیجه حاصل می‌شود که $a < ۷$ است. همچنین با توجه به زوج‌های مرتب $(a , ۵)$ و $(۶ , ۷)$ نتیجه می‌گیریم که $a < ۶$ است. حال در دو حالت زیر وضعیت تابع را بررسی می‌کنیم:

الف) $a < ۴ : r = \{(a , ۵) , (۴ , a) , (۶ , ۷)\}$

که این تابع با شرط $a < ۴$ غیریکنواست.

ب) $۴ < a < ۶ : r = \{(۴ , a) , (a , ۵) , (۶ , ۷)\}$

که برای اکیداً صعودی بودن تابع لازم است که $a < ۵$ باشد.

$$\Rightarrow ۴ < a < ۵ \Rightarrow [a] = ۴$$

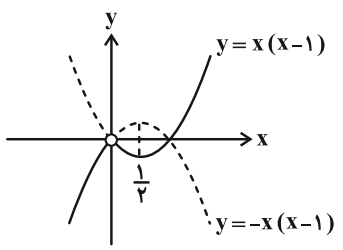
(حسابان ۲- صفحه‌های ۱۳ تا ۱۸)

۸- **گزینهٔ «۳»** *(شیوا امین)*

ابتدا $\frac{f}{g}$ را تشکیل می‌دهیم:

$$\frac{f}{g}(x) = \frac{x^۳ - x^۲}{\sqrt{x^۲}} = \frac{x^۲(x-۱)}{|x|} = \begin{cases} x(x-۱) & ; \quad x > ۰ \\ -x(x-۱) & ; \quad x < ۰ \end{cases}$$

نمودار $\frac{f}{g}$ را رسم می‌کنیم.



این تابع روی بازهٔ $(\frac{۱}{۲} , ۰)$ و هر زیرمجموعه از آن نزولی است.

(حسابان ۲- صفحه‌های ۱۳ تا ۱۸)

۹- **گزینهٔ «۳»** *(کاظم اجلالی)*

ضابطهٔ تابع f را می‌توانیم به صورت یک تابع دو ضابطه‌ای به صورت زیر بنویسیم:

$$f(x) = \begin{cases} (۱-m)x + m & ; \quad x \le ۱ \\ (۱+m)x - m & ; \quad x \ge ۱ \end{cases}$$

و در نتیجه ضابطه‌های تابع gof به صورت زیر است:

$$(gof)(x) = \begin{cases} (\frac{۱}{۲})^{(۱-m)x+m} & ; \quad x \le ۱ \\ (\frac{۱}{۲})^{(۱+m)x-m} & ; \quad x \ge ۱ \end{cases}$$

تابع gof در $\mathbb{R}$ پیوسته است، پس برای اکیداً یکنوایی آن کافی است وضعیت یکنوایی دو تابع $y = (\frac{۱}{۲})^{(۱-m)x+m}$ و $y = (\frac{۱}{۲})^{(۱+m)x-m}$ مثل هم باشد.

در نتیجه $۱-m$ و $۱+m$ باید هم‌علامت باشند.

$$\Rightarrow (۱-m)(۱+m) > ۰ \Rightarrow (m-۱)(m+۱) < ۰ \Rightarrow -۱ < m < ۱$$

(حسابان ۲- صفحه‌های ۱۳ تا ۱۸)

۱۰- **گزینهٔ «۲»** *(علی آزاد)*

برای رسم نمودار تابع f از روی نمودار تابع $y = \sqrt{x}$ به گونهٔ زیر عمل می‌کنیم:

- ابتدا ۲ واحد به چپ انتقال می‌دهیم تا نمودار تابع $y = \sqrt{x+۲}$ به دست آید.

- سپس طول نقاط را بر $m-۲$ تقسیم و عرض نقاط را در $۴-m$ ضرب می‌کنیم تا نمودار تابع f به دست آید.

چون تابع $y = \sqrt{x+۲}$ اکیداً صعودی است، برای این‌که تابع f هم اکیداً صعودی شود، کافی است علامت‌های $m-۲$ و $۴-m$ مثل هم باشند.

$$\Rightarrow (m-۲)(۴-m) > ۰ \Rightarrow (m-۲)(m-۴) < ۰ \Rightarrow ۲ < m < ۴$$

این بازه شامل فقط یک عدد صحیح است.

(حسابان ۲- صفحه‌های ۱۳ تا ۱۸)

۱۱- **گزینهٔ «۳»** *(کاظم اجلالی)*

تابع $y = ۲\sqrt[۳]{۱۳x+۱۴}$ در دامنه‌اش یک به یک است. پس برای این‌که تابع f در $\mathbb{R}$ یک به یک باشد، لازم است مقادیر دو تابع $y = ax + b$ و $y = ۲\sqrt[۳]{۱۳x+۱۴}$ در $x = \pm ۱$ به حالت‌های زیر با هم برابر باشند:

الف)
$$\begin{cases} a(۱) + b = ۲\sqrt[۳]{۱۳(۱)+۱۴} \Rightarrow a + b = ۶ \\ a(-۱) + b = ۲\sqrt[۳]{۱۳(-۱)+۱۴} \Rightarrow -a + b = ۲ \end{cases}$$

$$\Rightarrow b = ۴ \quad , \quad a = ۲ \Rightarrow \frac{b}{a} = ۲$$

@MrKonkori

ب) $\begin{cases} a(1)+b=2\sqrt[3]{13(-1)+14} \Rightarrow a+b=2 \\ a(-1)+b=2\sqrt[3]{13(1)+14} \Rightarrow -a+b=6 \end{cases}$

$\Rightarrow b=4 \quad , \quad a=-2 \Rightarrow \frac{b}{a}=-2$

پس $\frac{b}{a}=\pm 2$ است.

(حسابان ۱- صفحه‌های ۵۵ تا ۵۷)

۱۲- **گزینهٔ «۴»** *(حامد معنوی)*

ابتدا تابع g^{-1} را می‌سازیم:

$$g^{-1}=\{(2,4),(3,2),(4,3),(5,1),(6,13)\}$$

حال تساوی داده شده را می‌نویسیم:

$$(fog^{-1})(5)+(fog^{-1})(6)=f\left(g^{-1}(5)\right)+f\left(g^{-1}(6)\right)$$

$$=f(1)+f(13)=6 \xrightarrow{f(x)=\frac{x}{2}-a} \frac{1}{2}-a+\frac{13}{2}-a=6$$

$$\Rightarrow 7-2a=6 \Rightarrow a=\frac{1}{2}$$

پس $f(x)=\frac{x-1}{2}$ و در نتیجه $f^{-1}(x)=2x+1$ است. حال داریم:

$$f^{-1}\left(g(4a)\right)=f^{-1}\left(g(2)\right)=f^{-1}(3)=7$$

(حسابان ۱- صفحه‌های ۵۷ تا ۷۰)

۱۳- **گزینهٔ «۲»** *(علی آزاد)*

دامنهٔ تابع f بازهٔ $[2,+\infty)$ و دامنهٔ تابع g بازهٔ $(-\infty,5]$ است، پس دامنهٔ تابع $f+g$ اشتراک این دو بازه یعنی بازهٔ $[2,5]$ خواهد بود. حال براساس تعریف، دامنهٔ تابع $(f+g)of$ را حساب می کنیم:

$$D_{(f+g)of}=\{x\in D_f \mid f(x)\in D_{f+g}\}$$
$$=\{x\geq 2 \mid 2\leq \sqrt{x-2}\leq 5\} \qquad (*)$$

نامعادلهٔ $2\leq \sqrt{x-2}\leq 5$ را به صورت زیر حل می‌کنیم:

$$\xrightarrow{\text{توان ۲}} 4\leq x-2\leq 25 \Rightarrow 6\leq x\leq 27$$

$$\xrightarrow{(*)} D_{(f+g)of}=\{x\geq 2 \mid 6\leq x\leq 27\}=[6,27]$$

این یعنی $a=6$ ، $b=27$ و در نتیجه $a+b=33$ است.

(حسابان ۱- صفحه‌های ۶۳ تا ۷۰)

۱۴- **گزینهٔ «۱»** *(کاظم اجلالی)*

ضابطهٔ وارون تابع هموگرافیک $y=\frac{ax+b}{cx+d}$ به صورت $y=\frac{-dx+b}{cx-a}$ است، پس در این سؤال $f^{-1}(x)=\frac{-2x-1}{x-1}$ است. حال معادله را تشکیل می‌دهیم و حل می‌کنیم:

$$-f^{-1}(x)=\frac{x}{f(x)}$$

$$\Rightarrow \frac{2x+1}{x-1}=\frac{x}{\frac{x-1}{x+2}} \Rightarrow \left(\frac{2x+1}{x-1}\right)\left(\frac{x-1}{x+2}\right)=x$$

$$\xrightarrow{x\neq 1} \frac{2x+1}{x+2}=x \Rightarrow x^2+2x=2x+1 \Rightarrow x^2=1$$

$$\xrightarrow{x\neq 1} x=-1$$

پس معادلهٔ مورد نظر فقط یک جواب دارد.

(حسابان ۱- صفحه‌های ۵۴ تا ۶۲)

۱۵- **گزینهٔ «۳»** *(جهانبخش نیکنام)*

ابتدا ضابطهٔ تابع را از حالت کسری درمی‌آوریم و ساده‌تر می‌نویسیم:

$$f(x)=\frac{(x+4)(x-8)}{\sqrt{x+1}+3}\times\frac{\sqrt{x+1}-3}{\sqrt{x+1}-3}=\frac{(x+4)(x-8)(\sqrt{x+1}-3)}{x+1-9}$$

$$\Rightarrow f(x)=(x+4)(\sqrt{x+1}-3)=(x+1+3)(\sqrt{x+1}-3)$$

$$\left((\sqrt{x+1})^2+3\right)(\sqrt{x+1}-3)=(\sqrt{x+1})^3-3(\sqrt{x+1})^2+3\sqrt{x+1}-9$$

$$=(\sqrt{x+1}-1)^3-8$$

و برای محاسبهٔ ضابطهٔ وارون این تابع داریم:

$$y=(\sqrt{x+1}-1)^3-8 \Rightarrow \sqrt{x+1}-1=\sqrt[3]{y+8}$$

$$\Rightarrow x=(\sqrt[3]{y+8}+1)^2-1$$

با تعویض جای x و y ضابطهٔ تابع f^{-1} به دست می‌آید:

$$f^{-1}(x)=(\sqrt[3]{x+8}+1)^2-1 \quad ; \quad x\geq -9$$

این یعنی $a=8$ ، $b=1$ و $c=-1$ و در نتیجه $a+b-c=10$ است.

(حسابان ۱- صفحه‌های ۵۴ تا ۶۲)

۱۶- **گزینهٔ «۳»** *(داود بوالحسنی)*

مختصات هر دو نقطه را در ضابطهٔ مربوطه‌شان جای‌گذاری می‌کنیم:

$$(-3,2):2=2f(3+3)-5 \Rightarrow f(6)=\frac{7}{2} \qquad (1)$$

$$A'(m,n):n=2f^{-1}(2m+1)-3 \Rightarrow f^{-1}(2m+1)=\frac{n+3}{2}$$

طبق ویژگی‌های وارون داریم: $f(\frac{n+3}{2})=2m+1$ (2)

@MrKonkori

دو تساوی (۱) و (۲) باید یکسان باشند:

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{n+3}{2}=6 \Rightarrow n=9 \\ 2m+1=\frac{7}{2} \Rightarrow m=\frac{5}{4} \end{cases} \Rightarrow 4m-n=-4$$

(حسابان ۲- صفحه‌های ۱ تا ۱۲)

۱۷- **گزینهٔ «۴»** *(جهانبخش نیکنام)*

فرض می‌کنیم $g(x)=3f(2x-1)+1$ باشد، داریم:

$$g(1)=-5 \Rightarrow 3f(1)+1=-5 \Rightarrow f(1)=-2$$

$$g(-1)=4 \Rightarrow 3f(-3)+1=4 \Rightarrow f(-3)=1$$

با توجه به تساوی‌های فوق A' و B' روی نمودار تابع $y=f(-kx)+k$ به صورت زیر می‌باشد:

$$A'(-\frac{1}{k}, k-2) \quad , \quad B'(\frac{3}{k}, k+1)$$

برای این‌که پاره‌خط‌های AB و $A'B'$ موازی باشند، باید شیب‌های دو پاره‌خط یکسان باشند:

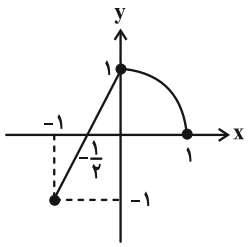
$$m_{AB}=-\frac{9}{2} \quad , \quad m_{A'B'}=\frac{3}{\frac{4}{k}}=\frac{3k}{4}$$

$$\xrightarrow{\text{برابری شیب‌ها}} -\frac{9}{2}=\frac{3k}{4} \Rightarrow k=-6$$

(حسابان ۲- صفحه‌های ۱ تا ۱۲)

۱۸- **گزینهٔ «۲»** *(جهانبخش نیکنام)*

نمودار تابع f به صورت زیر است:



و برای تعیین وضعیت یکنوایی تابع fof، لازم است که ضابطه (های) آن را به دست آوریم:

$$(fof)(x)=f\big(f(x)\big)=\begin{cases} 2f(x)+1 & ; \ -1\le f(x)<0 \\ \sqrt{1-f(x)} & ; \ 0\le f(x)\le 1 \end{cases}$$

با توجه به نمودار تابع f مشخص است که در بازهٔ $(-\frac{1}{2}, -1]$، $-1\le f(x)<0$ و در بازهٔ $[-\frac{1}{2}, 1]$، $0\le f(x)\le 1$ است.

$$\Rightarrow (fof)(x)=\begin{cases} 2(2x+1)+1 & ; \ -1\le x<-\frac{1}{2} \\ \sqrt{1-(2x+1)} & ; \ -\frac{1}{2}\le x<0 \\ \sqrt{1-\sqrt{1-x}} & ; \ 0\le x\le 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow (fof)(x)=\begin{cases} 4x+3 & ; \ -1\le x<-\frac{1}{2} \\ \sqrt{-2x} & ; \ -\frac{1}{2}\le x\le 0 \\ \sqrt{1-\sqrt{1-x}} & ; \ 0\le x\le 1 \end{cases}$$

بزرگ‌ترین بازه‌ای که تابع f روی آن اکیداً نزولی است، بازهٔ $[-\frac{1}{2}, 0]$ است. در نتیجه بیشترین مقدار $b-a$ برابر $\frac{1}{2}$ است.

(حسابان ۲- صفحه‌های ۱۳ تا ۱۸)

۱۹- **گزینهٔ «۴»** *(محمدابراهیم توزنده‌جانی)*

$$f(x)=x^3-3x^2+3x-1+3x^2-x-71$$

$$\Rightarrow f(x)=x^3+2x-72$$

مختصات نقطهٔ $(-P+4, P)$ را در این ضابطه قرار می‌دهیم:

$$f(-P+4)=(-P+4)^3+2(-P+4)-72$$

$$\Rightarrow P=-P^3+64+12P^2-48P-2P+8-72$$

$$-P^3+12P^2-50P=P \Rightarrow P^3-12P^2+51P=0$$

$$P(P^2-12P+51)=0$$

از آنجا که Δ ی معادلهٔ $P^2-12P+51=0$ منفی است، فقط مقدار $P=0$ قابل قبول است.

(حسابان ۱- صفحه‌های ۵۴ تا ۶۲)

۲۰- **گزینهٔ «۳»** *(کاظم اجلالی)*

معادله را به صورت زیر بازنویسی می‌کنیم:

$$(3x-2)^3+\sqrt[3]{3x}=x^3+\sqrt[3]{x+2}$$

با فرض $f(x)=x^3+\sqrt[3]{x+2}$ معادله به صورت زیر است:

$$f(3x-2)=f(x)$$

چون توابع $y=\sqrt[3]{x+2}$ و $y=x^3$ اکیداً صعودی‌اند، تابع f هم که مجموع آن‌هاست، اکیداً صعودی است، بنابراین تابع f یک به یک است. در نتیجه داریم:

$$\xrightarrow{f(3x-2)=f(x)} 3x-2=x \Rightarrow x=1$$

بنابراین معادله فقط یک جواب دارد.

(حسابان ۲- صفحه‌های ۱۳ تا ۱۸)

@MrKonkori

هندسه ۳

۲۱- **گزینهٔ «۲»** *(مهرداد ملوندی)*

$$[1 \quad x \quad -1]\begin{bmatrix} x-1 & 1-x \\ 1 & 1 \\ 3 & \frac{x}{2} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ 1 \end{bmatrix} = 0 \Rightarrow [2x-4 \quad 1-\frac{x}{2}]\begin{bmatrix} x \\ 1 \end{bmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow x(2x-4)+(1-\frac{x}{2})\times 1 = 0$$

$$\Rightarrow 2x^2-4x+1-\frac{x}{2}=0 \Rightarrow 2x^2-\frac{9x}{2}+1=0 \Rightarrow 4x^2-9x+2=0$$

$$\Rightarrow (4x-1)(x-2)=0 \Rightarrow x=\frac{1}{4}, 2$$

(هندسه ۳: ماتریس و کاربردها؛ صفحه‌های ۱۷ تا ۲۱)

۲۲- **گزینهٔ «۱»** *(آرین تفضلی‌زاده)*

در تساوی داده شده $3I$ را به طرف راست منتقل کرده و سپس از ماتریس A در سمت چپ فاکتور می‌گیریم:

$$A^3-5A^2+A=-3I \Rightarrow A(A^2-5A+I)=-3I$$

$$\xrightarrow{\times(-\frac{1}{3})} A\times(-\frac{1}{3})(A^2-5A+I)=I$$

می‌دانیم برای ماتریس وارون‌پذیر A، $AA^{-1}=I$ است، پس با توجه به رابطهٔ فوق داریم:

$$A^{-1}=-\frac{1}{3}(A^2-5A+I)$$

(هندسه ۳- صفحه‌های ۲۲ و ۲۳)

۲۳- **گزینهٔ «۲»** *(اسفاق اسفندیار)*

ابتدا ماتریس A^2 را به دست می‌آوریم:

$$A^2=A\times A=\begin{bmatrix} 6 & 9 \\ -4 & -6 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 6 & 9 \\ -4 & -6 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}=\bar{O}$$

بنابراین به ازای $n\geq 2$، $A^n=\bar{O}$ است و در نتیجه داریم:

$$A^{2!}=A^{3!}=...A^{10!}=\bar{O} \Rightarrow A^{0!}+A^{1!}+\underbrace{A^{2!}+...+A^{10!}}_{\bar{O}}$$

$$=A+A=2A$$

(هندسه ۳- صفحه‌های ۱۷ تا ۲۱)

۲۴- **گزینهٔ «۴»** *(هومن عقیلی)*

با توجه به گزینه‌ها داریم: $(I-5A)^{-1}=I+mA$

بنابراین با توجه به تعریف ماتریس وارون، می‌توان نوشت:

$$(I-5A)(I+mA)=I \Rightarrow I+mA-5A-5mA^2=I$$

$$\Rightarrow I+(m-5-5m)A=I \Rightarrow (-4m-5)A=\bar{O}$$

چون ماتریس A غیرصفر است، پس ضریب A لزوماً باید صفر باشد، بنابراین:

$$-4m-5=0 \Rightarrow m=-\frac{5}{4} \Rightarrow (I-5A)^{-1}=I-\frac{5}{4}A$$

(هندسه ۳- صفحه‌های ۲۲ و ۲۳)

۲۵- **گزینهٔ «۲»** *(اسفاق اسفندیار)*

طرفین رابطه را در ماتریس A^{-1} ضرب می‌کنیم:

$$2A^2-4A+5I=\bar{O} \xrightarrow{\times A^{-1}}$$

$$2\underbrace{A^{-1}A}_{I}A-4\underbrace{A^{-1}A}_{I}+5\underbrace{A^{-1}I}_{A^{-1}}=A^{-1}\times\bar{O}$$

$$\Rightarrow 2A-4I+5A^{-1}=\bar{O} \Rightarrow 5A^{-1}=-2A+4I$$

$$\Rightarrow A^{-1}=-\frac{2}{5}A+\frac{4}{5}I \Rightarrow \begin{cases} \alpha=-\frac{2}{5} \\ \beta=\frac{4}{5} \end{cases} \Rightarrow \alpha\beta=-\frac{8}{25}$$

(هندسه ۳- صفحه‌های ۲۲ و ۲۳)

۲۶- **گزینهٔ «۴»** *(امیرحسین ابومحبوب)*

ماتریس مربعی A وارون‌پذیر است، هرگاه $|A|\neq 0$ باشد. در این صورت ماتریسی مانند A^{-1} وجود دارد به‌طوری که $AA^{-1}=A^{-1}A=I$ باشد.

اگر A وارون‌پذیر باشد، آن‌گاه به ازای ماتریس‌های B و C داریم:

$$AB=AC \xrightarrow{A^{-1}\times} \underbrace{A^{-1}A}_{I}B=\underbrace{A^{-1}A}_{I}C \Rightarrow B=C$$

بنابراین در صورتی که A وارون‌پذیر باشد، قانون حذف برقرار است، یعنی از رابطهٔ $AB=AC$، می‌توان نتیجه گرفت $B=C$.

در بین گزینه‌ها، تنها در گزینهٔ «۴»، $|A|=0$ و ماتریس A وارون‌پذیر نیست. به عنوان مثال برای $A=\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 6 & 3 \end{bmatrix}$، و $B=\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}$

$C=\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ داریم:

$$AB=\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 6 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$$

$$AC=\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 6 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$$

همان‌طور که مشاهده می‌شود $AB=AC$، ولی $B\neq C$.

(هندسه ۳- صفحه‌های ۲۲ و ۲۳)

۲۷- **گزینهٔ «۳»** *(کیوان دارابی)*

ابتدا وارون A را می‌یابیم:

$$A=\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{|A|=-1} A^{-1}=-1\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (1)$$

$$A(A+B)^{-1}=\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{A^{-1}\times} \overbrace{A^{-1}A}^{I}(A+B)^{-1}=A^{-1}\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

@MrKonkori

$$\xrightarrow{(1)}(A+B)^{-1}=\begin{bmatrix}0&1\\1&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2&1\\1&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&1\\2&1\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow((A+B)^{-1})^{-1}=\begin{bmatrix}1&1\\2&1\end{bmatrix}^{-1}=-1\begin{bmatrix}1&-1\\-2&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1&1\\2&-1\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow A+B=\begin{bmatrix}-1&1\\2&-1\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow B=\begin{bmatrix}-1&1\\2&-1\end{bmatrix}-A=\begin{bmatrix}-1&1\\2&-1\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}0&1\\1&0\end{bmatrix}\Rightarrow B=\begin{bmatrix}-1&0\\1&-1\end{bmatrix}$$

بنابراین جمع درایه‌های B برابر است با: $(-1)+1+(-1)=-1$

(هندسه ۳- صفحه‌های ۱۷ تا ۲۳)

۲۸- **گزینهٔ «۱»** *(امیرحسین ابومحبوب)*

ماتریس A اسکالر است، پس درایه‌های غیرواقع بر قطر اصلی آن صفر هستند و درایه‌های واقع بر قطر اصلی آن برابر یکدیگرند.

$$\begin{cases}y^2-4=0\Rightarrow(y-2)(y+2)=0\Rightarrow y=2,-2\\3y^2+6y=0\Rightarrow 3y(y+2)=0\Rightarrow y=0,-2\end{cases}\Rightarrow y=-2$$

$$x^2=4-3x\Rightarrow x^2+3x-4=0\Rightarrow(x+4)(x-1)=0$$

$$\Rightarrow\begin{cases}x=-4\\x=1\end{cases}$$

اما به ازای $x=1$، درایه‌های قطر اصلی A برابر یک می‌شوند و در نتیجه A ماتریس همانی می‌شود، پس این مقدار طبق فرض سؤال غیرقابل قبول است. با جای‌گذاری مقادیر $x=-4$ و $y=-2$ داریم:

$$B=\begin{bmatrix}z-4&-2\\-12&z-2\end{bmatrix}$$

ماتریس B وارون‌پذیر نیست، پس دترمینان آن برابر صفر است:

$$|B|=0\Rightarrow(z-4)(z-2)-24=0\Rightarrow z^2-6z-16=0$$

$$\Rightarrow(z-8)(z+2)=0\Rightarrow z=8,-2$$

(هندسه ۳- صفحه‌های ۱۲، ۱۹، ۲۲ و ۲۳)

۲۹- **گزینهٔ «۲»** *(نیما مهندس)*

ماتریس C به صورت مقابل است:

$$C=\begin{bmatrix}0&-1&3&4\\2&1&5&0\\-1&0&1&-1\\1&1&0&2\end{bmatrix}$$

با فرض $C^2=D$، درایه‌های قطر فرعی ماتریس C^2 را محاسبه می‌کنیم:

$$d_{14}=C\text{ سطر اول}\times C\text{ ستون چهارم}=\begin{bmatrix}0&-1&3&4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}4\\0\\-1\\2\end{bmatrix}=5$$

$$d_{23}=C\text{ سطر دوم}\times C\text{ ستون سوم}=\begin{bmatrix}2&1&5&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3\\5\\1\\0\end{bmatrix}=16$$

$$d_{32}=C\text{ سطر سوم}\times C\text{ ستون دوم}=\begin{bmatrix}-1&0&1&-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1\\1\\0\\1\end{bmatrix}=0$$

$$d_{41}=C\text{ سطر چهارم}\times C\text{ ستون اول}=\begin{bmatrix}1&1&0&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\2\\-1\\1\end{bmatrix}=4$$

بنابراین کمترین اختلاف دو درایه از قطر فرعی C^2 برابر است با:

$$|d_{14}-d_{41}|=|5-4|=1$$

(هندسه ۳- صفحه‌های ۱۷ تا ۲۱)

۳۰- **گزینهٔ «۲»** *(امیرحسین ابومحبوب)*

می‌دانیم هر ماتریس اسکالر از جمله ماتریس همانی (I) با هر ماتریس هم‌مرتبهٔ خود، تعویض‌پذیر است. حال ماتریس‌های A^2، A^3، B^2 و B^3 را محاسبه می‌کنیم.

$$A^2=\begin{bmatrix}1&-2\\-2&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&-2\\-2&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}5&-4\\-4&5\end{bmatrix}$$

$$A^3=\begin{bmatrix}5&-4\\-4&5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&-2\\-2&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}13&-14\\-14&13\end{bmatrix}$$

$$B^2=\begin{bmatrix}-2&3\\-1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-2&3\\-1&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&-3\\1&-2\end{bmatrix}$$

$$B^3=\begin{bmatrix}1&-3\\1&-2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-2&3\\-1&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}=I$$

بنابراین ماتریس B^3 با هر ماتریس هم‌مرتبهٔ خود از جمله A تعویض‌پذیر است، یعنی رابطهٔ $AB^3=B^3A$ برقرار است. نادرستی بقیهٔ روابط را خودتان بررسی کنید.

(هندسه ۳- صفحه‌های ۱۷ تا ۲۱)

@MrKonkori

ریاضیات گسسته

۳۱- **گزینهٔ «۳»** *(آرین تفضلی‌زاده)*

مقادیر گزینه‌ها را در n جای‌گذاری می‌کنیم و بررسی می‌کنیم که آیا گزاره صحیح است یا خیر.

$$\begin{cases} n=5 \Rightarrow 2^n = 2^5 = 32 \Rightarrow 32 = 7\times 4+4 \\ \Rightarrow R=4=2^2 \\ n=6 \Rightarrow 2^n = 2^6 = 64 \Rightarrow 64 = 7\times 9+1 \\ \Rightarrow R=1=1^2 \\ n=7 \Rightarrow 2^n = 2^7 = 128 \Rightarrow 128 = 7\times 18+2 \\ \Rightarrow R=2 \Rightarrow \text{مربع کامل نمی‌باشد.} \\ n=8 \Rightarrow 2^n = 2^8 = 256 \Rightarrow 256 = 7\times 36+4 \\ \Rightarrow R=4=2^2 \end{cases}$$

(ریاضیات گسسته- صفحه‌های ۲ و ۳)

۳۲- **گزینهٔ «۴»** *(نیما مهندس)*

گزینهٔ «۴» نادرست است، زیرا دارای مثال نقض است:

$$\begin{cases} \alpha = \sqrt{2}+1 \\ \beta = -\sqrt{2}+1 \end{cases}$$

$$\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta} = \frac{\beta+\alpha}{\alpha\beta} = \frac{2}{-1} = -2$$

بررسی درستی سایر گزینه‌ها:

۱) چون $p \mid p$ و $p \mid a-p$، نتیجه می‌گیریم $p \mid a$. این گزاره دقیقاً بخش دوم کار در کلاس صفحهٔ ۱۴ کتاب درسی است.

۲) عدد $101!$ بر تمامی اعداد ۲ تا ۱۰۱ بخش‌پذیر است و از این‌رو جمع $101!$ با هر یک از اعداد ۲ تا ۱۰۱ نیز بر خود آن عدد بخش‌پذیر است. بنابراین اعداد $101!+2$, $101!+3$, ... , $101!+101$ صد عدد متوالی و غیراول هستند.

۳) چون این دنباله حسابی است و این اعداد متساوی‌الفاصله هستند، واسطهٔ حسابی دو عددی که نسبت به جملهٔ وسطی فاصلهٔ یکسانی دارند (یکی قبل و یکی بعد) همان عدد وسط است. با استفاده از این استدلال می‌توان درستی گزینهٔ «۳» را اثبات کرد.

(ریاضیات گسسته- صفحه‌های ۲، ۳ و ۹ تا ۱۲)

۳۳- **گزینهٔ «۲»** *(نیلوفر مهدوی)*

الف) اگر اعداد صحیح متوالی برابر n و $n+1$ باشند، داریم:

$$(n+1)^3 - n^3 = (n^3+3n^2+3n+1)-n^3$$
$$= 3n^2+3n+1 = 3n(n+1)+1$$

عبارت $n(n+1)$ چون حاصل‌ضرب دو عدد صحیح متوالی است، عددی زوج می‌باشد.

$$3n(n+1)+1 \xrightarrow{n(n+1)=2q} 3(2q)+1 = 6q+1$$
$$\xrightarrow{3q=q'} 2(3q)+1 = 2q'+1$$

$2q'+1$ عددی فرد است، پس این گزاره صحیح است.

ب) این گزاره نادرست است و مثال نقض دارد:

$$a=1,\ b=4 \Rightarrow \underbrace{\sqrt{1\times 4}}_{2} < \frac{1+4}{\underbrace{2}_{\frac{5}{2}}}$$

پ) می‌دانیم مربع هر عدد فرد به شکل $8q+1$ است، برای اعداد صحیح و فرد a و b داریم:

$$\begin{cases} a^2 = (2k+1)^2 \Rightarrow 4k^2+4k+1 = 4\underbrace{k(k+1)}_{2k'}+1 = 8k'+1 \\ b^2 = (2q+1)^2 \Rightarrow 4q^2+4q+1 = 4\underbrace{q(q+1)}_{2q'}+1 = 8q'+1 \end{cases}$$

$$a^2-b^2 = (8k'+1)-(8q'+1) = 8k'-8q' = 8(k'-q')$$

عبارت $8(k'-q')$ مضرب ۸ است و این گزاره درست است.

(ریاضیات گسسته- صفحه‌های ۲، ۳ و ۷)

۳۴- **گزینهٔ «۳»** *(نیلوفر مهدوی)*

طبق روابط بازگشتی داریم:

$$5x^2+13y^2 \geq 2(-x+5y-2)+3xy$$
$$\Leftrightarrow 5x^2+13y^2 \geq -2x+10y-4+3xy$$
$$\Leftrightarrow 5x^2+13y^2+2x-10y-3xy+4 \geq 0$$

(طرفین نامعادله را در ۲ ضرب می‌کنیم.)

$$\xleftarrow{\times 2} 10x^2+26y^2+4x-20y-6xy+8 \geq 0$$
$$\Leftrightarrow (x^2+4x+4)+(y^2-6xy+9x^2)+(25y^2-20y+4) \geq 0$$
$$\Leftrightarrow (x+2)^2+(y-3x)^2+(5y-2)^2 \geq 0 \qquad (*)$$

عبارت (*) حاصل‌جمع چند مربع کامل است و می‌دانیم که اعداد مربع کامل اعدادی بزرگ‌تر مساوی صفر می‌باشند. پس مجموع چند مربع کامل هم بزرگ‌تر مساوی صفر می‌باشد و عبارت (*) همواره درست است و از آنجا که تمامی عبارات با همدیگر هم‌ارز هستند، نامساوی اولیه و عبارت (*) هم‌ارز هستند.

(ریاضیات گسسته- صفحه‌های ۶ تا ۸)

۳۵- **گزینهٔ «۲»** *(نیما مهندس)*

طبق فرض می‌دانیم که: $n^2+6 \mid 5n \xrightarrow{\times n} n^2+6 \mid 5n^2$ (۱)

از طرفی می‌دانیم که $n^2+6 \mid n^2+6$ و در نتیجه:

$$n^2+6 \mid n^2+6 \xrightarrow{\times 5} n^2+6 \mid 5n^2+30 \qquad (2)$$

از تفاضل عبارت‌های ۱ و ۲ درمی‌یابیم که $n^2+6 \mid 30$. از آنجا که n عددی طبیعی است و $n>0$، لذا می‌توان گفت که $n^2+6>6$ است.

حال مقادیری را که n^2+6 می‌تواند اختیار کند را بررسی می‌کنیم:

$n^2+6=10 \Rightarrow n^2=4 \xrightarrow{n\in\mathbb{N}} n=2 \Rightarrow 2^2+6 \mid 5\times 2$ ✓

$n^2+6=15 \Rightarrow n^2=9 \xrightarrow{n\in\mathbb{N}} n=3 \Rightarrow 3^2+6 \mid 5\times 3$ ✓

✗ $n^2+6=30 \Rightarrow n^2=24 \Rightarrow$ مقداری طبیعی برای n یافت نمی‌شود

در مجموع ۲ مقدار طبیعی برای n وجود دارد.

(ریاضیات گسسته- صفحه‌های ۹ تا ۱۲)

@MrKonkori

۳۶- **گزینهٔ «۳»** *(کیوان دارابی)*

طبق فرض می‌دانیم که:

$$\begin{cases} 7 \mid ma+b \xrightarrow{\times 3} 7 \mid 3ma+3b & (1) \\ 7 \mid 2a+3b & (2) \end{cases}$$

از تفاضل عبارت‌های (۱) و (۲) درمی‌یابیم که $7 \mid (3m-2)a$. (۳)

برای این‌که رابطهٔ (۳) به ازای هر مقادیری از a که مضرب ۷ نیستند برقرار باشد، باید $7 \mid 3m-2$ برقرار باشد. با بررسی گزینه‌ها داریم:

$m=1 \Rightarrow 7 \mid 3-2$ ✗

$m=2 \Rightarrow 7 \mid 6-2$ ✗

$m=3 \Rightarrow 7 \mid 9-2$ ✓

بنابراین حداقل مقدار طبیعی m، برابر ۳ است.

(ریاضیات گسسته- صفحه‌های ۹ تا ۱۲)

۳۷- **گزینهٔ «۴»** *(کیوان دارابی)*

طبق فرض سؤال داریم:

$$5x+7y=xy-2 \Rightarrow 5x+2=xy-7y$$

$$\Rightarrow 5x+2=y(x-7) \Rightarrow \frac{5x+2}{x-7}=y$$

از آنجا که y عددی طبیعی است، پس $\frac{5x+2}{x-7}$ هم عددی طبیعی است، بنابراین $x-7 \mid 5x+2$. (۱)

از طرفی می‌دانیم که: $x-7 \mid x-7 \xrightarrow{\times 5} x-7 \mid 5x-35$ (۲)

از تفاضل روابط ۱ و ۲ درمی‌یابیم که $x-7 \mid 37$. حال مقادیر مختلف x را محاسبه و بررسی می‌کنیم:

$$\begin{cases} x-7=-1 \Rightarrow x=6 \Rightarrow y=\frac{32}{-1}=-32 \notin \mathbb{N} \\ x-7=1 \Rightarrow x=8 \Rightarrow y=\frac{42}{1}=42 \in \mathbb{N} \Rightarrow x+y=50 \\ x-7=-37 \Rightarrow x=-30 \notin \mathbb{N} \\ x-7=37 \Rightarrow x=44 \Rightarrow y=\frac{222}{37}=6 \in \mathbb{N} \Rightarrow x+y=50 \end{cases}$$

مجموع دو عدد طبیعی x و y برابر ۵۰ می‌شود.

(ریاضیات گسسته- صفحه‌های ۹ تا ۱۲)

۳۸- **گزینهٔ «۳»** *(علیرضا شریف‌خطیبی)*

طبق فرض می‌دانیم که:

$$\begin{cases} n \mid 3a+5 \xrightarrow{\times a} n \mid 3a^2+5a & (1) \\ n \mid 3a^2-2a+6 & (2) \end{cases}$$

از تفاضل عبارت‌های ۱ و ۲ داریم $n \mid -7a+6$ و در نتیجه:

$n \mid 3(-7a+6)$ (۳)

از طرفی می‌توانیم بگوییم که:

$n \mid 3a+5 \xrightarrow{\times 7} n \mid 21a+35$ (۴)

از جمع کردن عبارت‌های ۳ و ۴ داریم:

$$n \mid (21a+35)+(-21a+18) \Rightarrow n \mid 53$$

پس $n=1$ یا $n=53$.

(ریاضیات گسسته- صفحه‌های ۹ تا ۱۲)

۳۹- **گزینهٔ «۱»** *(سوگند روشنی)*

از آنجا که ب. م. م a^6-1 و ۱۶ برابر ۴ شده است نتیجه می‌شود که a^6-1 به صورت ۴ برابر عددی فرد است یعنی $a^6-1=4(2k+1)$.

طبق اتحاد چاق و لاغر داریم:

$$a^6-1=(a^2-1)(a^4+a^2+1)=(a^2-1)(a^2(a^2+1)+1) \quad (*)$$

a^2 و a^2+1 دو عدد صحیح متوالی‌اند و حاصل‌ضرب آن‌ها عددی زوج خواهد بود و در نتیجه $a^2(a^2+1)+1$ عددی فرد است و در نتیجه از اتحاد (*) نتیجه می‌گیریم:

$$a^2-1=4(2q+1)=8q+4 \Rightarrow a^2=8q+5$$

با بررسی همهٔ حالت‌های a، مقادیری از a که به ازای آن‌ها $a^2=8q+5$ است را به دست می‌آوریم:

$$\begin{cases} a=4k \Rightarrow a^2=16k^2=8k' \\ a=4k\pm 1 \Rightarrow a^2=16k^2\pm 8k+1=8k'+1 \\ a=4k+2 \Rightarrow a^2=16k^2+16k+4=8k'+4 \end{cases}$$

بنابراین مربع هیچ عدد صحیحی به فرم $8q+5$ نیست و در نتیجه هیچ عدد صحیح دو رقمی برای a یافت نمی‌شود.

(ریاضیات گسسته- صفحه‌های ۴، ۱۳ و ۱۴)

۴۰- **گزینهٔ «۱»** *(مصطفی دیداری)*

می‌دانیم: $a \mid b \Rightarrow (a, b)=|a|$ (*)

اگر $d=(a, b)$ باشد، آن‌گاه:

$$\begin{cases} d \mid a \Rightarrow d \mid a^2 \\ d \mid b \Rightarrow d \mid 2b \end{cases} \xrightarrow{+} d \mid a^2+2b$$

طبق (*) می‌توانیم بگوییم که $(d, a^2+2b)=|d|=d$ و در نتیجه درمی‌یابیم که $d=40$.

پس کافی است تعداد اعداد $b<300$ را بیابیم به گونه‌ای که:

$$(360, b)=40 \Rightarrow (2^3\times 3^2\times 5, b)=2^3\times 5$$

می‌توانیم نتیجه بگیریم که عدد طبیعی b حداقل یک عامل ۵ و سه عامل ۲ دارد و عامل ۳ ندارد و بنابراین از آنجا که ب. م. م برابر حاصل‌ضرب عامل‌های مشترک با توان کمتر است، تجزیهٔ b به صورت زیر خواهد بود:

$$\begin{cases} b=2^n\times 5^m\times 7^t\times 11^k\times \dots \\ n\geq 3 \ , \ m\geq 1 \end{cases}$$

اعداد طبیعی $b<300$ به صورت زیر هستند:

$$b=2^3\times 5 \ , \ 2^4\times 5 \ , \ 2^5\times 5 \ , \ 2^3\times 5^2 \ , \ 2^3\times 5\times 7$$

در مجموع ۵ مقدار طبیعی برای عدد b یافت می‌شود.

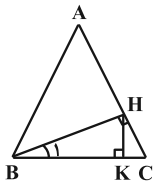
(ریاضیات گسسته- صفحه‌های ۹ تا ۱۴)

@MrKonkori

هندسه ۱

۴۱- **گزینهٔ «۲»** *(افشین خاصه‌خان)*

با توجه به معلومات مسئله

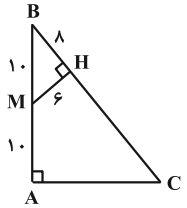


$\hat{B}=\hat{C}=\frac{180^\circ-\hat{A}}{2}=75^\circ$ و از آنجا $\hat{B}_1=90^\circ-75^\circ=15^\circ$. از طرفی می‌دانیم در مثلث قائم‌الزاویه با زاویهٔ 15° اندازهٔ ارتفاع وارد بر وتر $\frac{1}{4}$ وتر است، پس $HK=\frac{BC}{4}$.

(هندسه ۱- چندضلعی‌ها: صفحهٔ ۶۴)

۴۲- **گزینهٔ «۴»** *(سوگند روشنی)*

با توجه به اطلاعات داده شده در صورت سؤال خواهیم داشت:



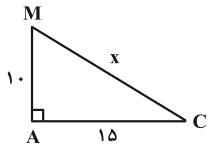
فیثاغورس: $BM^2=MH^2+BH^2\Rightarrow BH=8$

M وسط $AB\Rightarrow BM=MA=10$

در دو مثلث BMH و ABC خواهیم داشت:

$$\begin{cases}\hat{B}=\hat{B}\\ \hat{H}=\hat{A}\end{cases}\Rightarrow BMH\overset{\Delta}{\sim}ABC\Rightarrow\frac{MH}{AC}=\frac{BH}{AB}$$

$$\Rightarrow\frac{6}{AC}=\frac{8}{20}\Rightarrow AC=15$$



$$x^2=100+225=325\Rightarrow x=5\sqrt{13}$$

(هندسه ۱- قضیهٔ تالس، تشابه و کاربردهای آن: صفحه‌های ۳۸ و ۳۹)

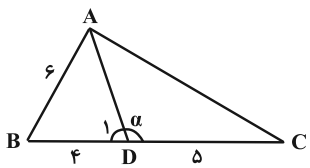
۴۳- **گزینهٔ «۲»** *(کیوان دارابی)*

دو مثلث ABD و ABC با هم متشابه هستند،

$$\begin{cases}\frac{BA}{BC}=\frac{6}{9}=\frac{2}{3}\\ \frac{BD}{BA}=\frac{4}{6}=\frac{2}{3}\end{cases}\Rightarrow\frac{BA}{BC}=\frac{BD}{BA}\ ,\ \hat{B}=\hat{B}\Rightarrow ABD\overset{\Delta}{\sim}ABC$$

بنابراین $A\hat{D}B=\hat{A}$ است و در نتیجه داریم:

$$\alpha=180^\circ-A\hat{D}B\Rightarrow\alpha=180^\circ-\hat{A}=\hat{B}+\hat{C}$$



(هندسه ۱- قضیهٔ تالس، تشابه و کاربردهای آن: صفحه‌های ۳۸ و ۳۹)

۴۴- **گزینهٔ «۱»** *(احمدرضا فلاح)*

مثلث‌های OBC و ODE به دلیل تساوی زوایایشان با هم متشابه هستند با فرض $EF=x$ داریم:

$$\frac{BC}{ED}=\frac{OC}{OF+EF}\xrightarrow{AD=BC}\frac{AD}{ED}=\frac{4}{2+x}\quad(1)$$

از طرفی $AF\parallel DC$، پس طبق قضیهٔ تالس:

$$\frac{DA}{DE}=\frac{CF}{CE}\Rightarrow\frac{AD}{ED}=\frac{6}{6+x}\quad(2)$$

$$\xrightarrow{(1),(2)}\frac{4}{2+x}=\frac{6}{6+x}\Rightarrow 12+6x=24+4x\Rightarrow x=6$$

(هندسه ۱- قضیهٔ تالس، تشابه و کاربردهای آن: صفحه‌های ۳۸ و ۳۹)

۴۵- **گزینهٔ «۱»** *(امیرحسین ابومحبوب)*

مجموع زوایای یک n ضلعی محدب از رابطهٔ $(n-2)\times180^\circ$ و تعداد قطرهای آن از رابطهٔ $\frac{n(n-3)}{2}$ به دست می‌آید، پس داریم:

$$\frac{(n-2)\times180^\circ}{(m-2)\times180^\circ}=2\Rightarrow\frac{n-2}{m-2}=2\Rightarrow n-2=2m-4$$

$$\Rightarrow n=2m-2\qquad(*)$$

$$\frac{\frac{n(n-3)}{2}}{\frac{m(m-3)}{2}}=4\xrightarrow{(*)}\frac{(2m-2)(2m-5)}{m(m-3)}=4$$

$$\Rightarrow 4m^2-14m+10=4m^2-12m\Rightarrow 2m=10\Rightarrow m=5$$

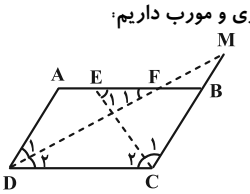
$$\Rightarrow n=2\times5-2=8$$

در نتیجه داریم: $n-m=8-5=3$

(هندسه ۱- چندضلعی‌ها: صفحهٔ ۵۵)

۴۶- **گزینهٔ «۳»** *(امیرحسین ابومحبوب)*

طبق قضیهٔ خطوط موازی و مورب داریم:



$AB\parallel CD$ مورب و $CE\Rightarrow\hat{E}_1=\hat{C}_2\xrightarrow{\hat{C}_1=\hat{C}_2}$

$$\hat{E}_1=\hat{C}_1\xrightarrow{\Delta BCE}BE=BC=5$$

به دلیل مشابه $AF=AD=5$ و در نتیجه داریم:

$$EF=BE+AF-AB=5+5-8=2$$

$$\Rightarrow BF=BE-EF=5-2=3$$

از طرفی طبق تعمیم قضیهٔ تالس در مثلث MCD و با فرض $MB=x$ داریم:

$$BF\parallel CD\Rightarrow\frac{MB}{MC}=\frac{BF}{CD}\Rightarrow\frac{x}{x+5}=\frac{3}{8}$$

$$\Rightarrow 8x=3x+15\Rightarrow 5x=15\Rightarrow x=3$$

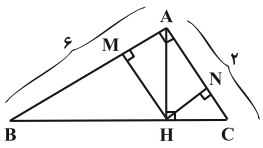
$$\frac{BM}{EF}=\frac{3}{2}$$

(هندسه ۱- چندضلعی‌ها: صفحه‌های ۵۶ تا ۵۹)

@MrKonkori

۴۷- **گزینهٔ «۲»** *(امیرحسین ابومحبوب)*

طبق قضیهٔ فیثاغورس در مثلث ABC داریم:



$$BC^۲ = AB^۲ + AC^۲ = ۶^۲ + ۲^۲ = ۴۰ \Rightarrow BC = ۲\sqrt{۱۰}$$

از طرفی طبق روابط طولی در مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC داریم:

$$AB^۲ = BC \times BH \Rightarrow ۶^۲ = ۲\sqrt{۱۰} \times BH$$

$$\Rightarrow BH = \frac{۱۸}{\sqrt{۱۰}} = \frac{۹}{۵}\sqrt{۱۰} \Rightarrow \frac{BH}{BC} = \frac{\frac{۹}{۵}\sqrt{۱۰}}{۲\sqrt{۱۰}} = \frac{۹}{۱۰}$$

$$\Rightarrow \frac{CH}{BC} = \frac{۱}{۱۰}$$

حال طبق تعمیم قضیهٔ تالس داریم:

$$\overset{\Delta}{ABC} : MH \parallel AC \Rightarrow \frac{MH}{AC} = \frac{BH}{BC}$$

$$\Rightarrow \frac{MH}{۲} = \frac{۹}{۱۰} \Rightarrow MH = ۱/۸$$

$$\overset{\Delta}{ABC} : NH \parallel AB \Rightarrow \frac{NH}{AB} = \frac{CH}{BC}$$

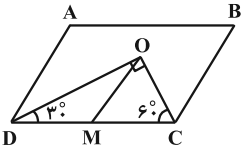
$$\Rightarrow \frac{NH}{۶} = \frac{۱}{۱۰} \Rightarrow NH = ۰/۶$$

$$MH + NH = ۱/۸ + ۰/۶ = ۲/۴$$

(هندسه ۱- قضیهٔ تالس، تشابه و کاربردهای آن: صفحه‌های ۴۱ و ۴۲)

۴۸- **گزینهٔ «۴»** *(فرزانه خاکپاش)*

می‌دانیم هر دو زاویهٔ مجاور در متوازی‌الاضلاع مکمل یکدیگرند، پس داریم:



$$\hat{C} + \hat{D} = ۱۸۰^\circ \Rightarrow \frac{\hat{C}}{۲} + \frac{\hat{D}}{۲} = ۹۰^\circ \Rightarrow C\hat{O}D = ۹۰^\circ$$

بنابراین مثلث COD قائم‌الزاویه است. در این مثلث $O\hat{D}C = ۳۰^\circ$ و $O\hat{C}D = ۶۰^\circ$ است. می‌دانیم طول اضلاع روبه‌رو به زوایای ۳۰° و ۶۰° در مثلث قائم‌الزاویه به ترتیب $\frac{۱}{۲}$ و $\frac{\sqrt{۳}}{۲}$ طول وتر است، پس با فرض $CD = a$ داریم:

$$S_{COD} = \frac{۱}{۲}OC \times OD = \frac{۱}{۲} \times \frac{۱}{۲}a \times \frac{\sqrt{۳}}{۲}a$$

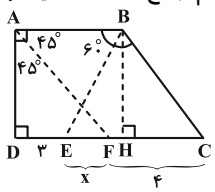
$$\Rightarrow \frac{\sqrt{۳}}{۸}a^۲ = ۸\sqrt{۳} \Rightarrow a^۲ = ۶۴ \Rightarrow a = ۸$$

OM میانهٔ وارد بر وتر در این مثلث است، پس: $OM = \frac{CD}{۲} = ۴$

(هندسه ۱- چندضلعی‌ها: صفحه‌های ۵۸، ۶۰ و ۶۴)

۴۹- **گزینهٔ «۴»** *(بهراد ترکمن)*

با توجه به $\hat{B} = ۱۲۰^\circ$ (و قضیهٔ خطوط موازی و مورب $AB \parallel DC$ و مورب BC)، درمی‌یابیم که $\hat{C} = ۶۰^\circ$ است و در نتیجه مثلث BEC، متساوی‌الاضلاع است. با رسم ارتفاع BH، که میانه و نیمساز نیز می‌باشد، داریم:



$$EH = CH = \frac{EC}{۲} = \frac{x+۴}{۲}$$

از طرفی می‌دانیم $BC = BE = EC = x + ۴$ است و چون ارتفاع مثلث متساوی‌الاضلاع، همواره $\frac{\sqrt{۳}}{۲}$ برابر طول ضلع آن می‌باشد. پس:

$$BH = \frac{\sqrt{۳}}{۲}BC = \frac{\sqrt{۳}}{۲}(x+۴)$$

اما مثلث ADF قائم‌الزاویهٔ متساوی‌الساقین است (چرا؟)، پس:

$$AD = DF = x + ۳$$

حال با توجه به برابری $AD = BH$ داریم:

$$x + ۳ = \frac{\sqrt{۳}}{۲}(x+۴) \Rightarrow ۲x + ۶ = \sqrt{۳}x + ۴\sqrt{۳}$$

$$\Rightarrow ۲x - \sqrt{۳}x = ۴\sqrt{۳} - ۶ \Rightarrow x(۲ - \sqrt{۳}) = ۴\sqrt{۳} - ۶$$

$$\Rightarrow x = \frac{۴\sqrt{۳} - ۶}{۲ - \sqrt{۳}} = \frac{۲\sqrt{۳}(۲ - \sqrt{۳})}{۲ - \sqrt{۳}} = ۲\sqrt{۳}$$

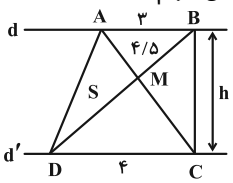
اکنون جواب مسئله برابر است با: $AB = DH = DE + EH$

$$= ۳ + \frac{x+۴}{۲} = ۳ + \frac{x}{۲} + ۲ = ۳ + \sqrt{۳} + ۲ = ۵ + \sqrt{۳}$$

(هندسه ۱- چندضلعی‌ها: صفحه‌های ۶۱ تا ۶۳)

۵۰- **گزینهٔ «۳»** *(مهرداد ملوندی)*

مطابق شکل، فاصلهٔ بین دو خط موازی d و d' را h و مساحت مثلث ADM را S در نظر می‌گیریم.



دو مثلث ABM و CDM با هم متشابه‌اند (چرا؟) و داریم:

$$\frac{S_{ABM}}{S_{CDM}} = \left(\frac{AB}{CD}\right)^۲ \Rightarrow \frac{۴/۵}{S_{CDM}} = \frac{۹}{۱۶} \Rightarrow S_{CDM} = ۸$$

دو مثلث ABD و ACD در ارتفاع به طول h (وارد بر قاعده‌های AB و CD) مشترکند و داریم:

$$\frac{S_{ABD}}{S_{ACD}} = \frac{AB}{CD} = \frac{۳}{۴} \Rightarrow \frac{۴/۵ + S}{۸ + S} = \frac{۳}{۴}$$

$$\Rightarrow ۱۸ + ۴S = ۲۴ + ۳S \Rightarrow S = ۶$$

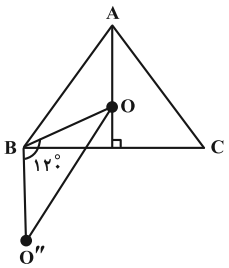
(هندسه ۱- قضیهٔ تالس، تشابه و کاربردهای آن: صفحه‌های ۴۵ تا ۴۷)

@MrKonkori

هندسه ۲

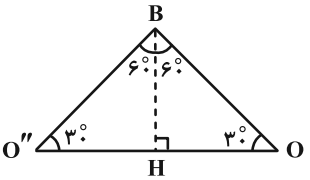
۵۱- **گزینهٔ «۱»** *(کیوان دارابی)*

حاصل دو بازتاب متوالی نسبت به دو خط متقاطع یک دوران است. پس O'' دوران یافته O در جهت ساعتگرد و به اندازهٔ زاویه ۱۲۰° به مرکز دوران B است. (زاویهٔ دوران دو برابر زاویهٔ بین دو محور است) اگر ضلع مثلث a باشد:



$$BO = \frac{۲}{۳}h_a = \frac{۲}{۳}\times\frac{\sqrt{۳}}{۲}a = \frac{\sqrt{۳}}{۳}a$$

با توجه به شکل زیر داریم:



$$OH = O''H$$

$$\Rightarrow OO'' = ۲OH = ۲(\frac{\sqrt{۳}}{۲}BO) = \sqrt{۳}\times\frac{\sqrt{۳}}{۳}a = a$$

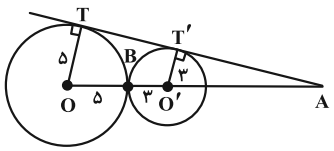
روش دوم محاسبهٔ OO'': چهارضلعی $AOO''B$ متوازی‌الاضلاع است، زیرا:

$$AO = BO'' \ , \ AO \parallel BO'' \Rightarrow OO'' = AB = a$$

(هندسه ۲- صفحهٔ ۴۳)

۵۲- **گزینهٔ «۴»** *(اسحاق اسفندیار)*

مرکز تجانس مستقیم دو دایره مماس خارج، نقطه همرسی مماس مشترک خارجی و خط‌المرکزین دو دایره است و نقطهٔ همرسی مماس مشترک داخلی و خط‌المرکزین دو دایره، مرکز تجانس معکوس است.



$$OT \parallel O'T' \xrightarrow{\text{تالس}} \frac{AO'}{AO} = \frac{O'T'}{OT}$$

$$\xrightarrow{AO'=x} \frac{x}{x+۸} = \frac{۳}{۵} \Rightarrow \frac{x}{۸} = \frac{۳}{۲} \Rightarrow x = ۱۲$$

$$AB = AO' + O'B = ۱۲ + ۳ = ۱۵$$

(هندسه ۲- صفحه‌های ۴۳ تا ۴۹)

۵۳- **گزینهٔ «۲»** *(افشین خاصه‌خان)*

مطابق تمرین ۳ صفحهٔ ۴۲ با رسم عمودمنصف‌های AA' و BB' و تعیین نقطهٔ تقاطع آن‌ها می‌توان مرکز دوران را مشخص کرد.

(هندسه ۲- صفحهٔ ۴۲)

۵۴- **گزینهٔ «۳»** *(فاطمه برزویی)*

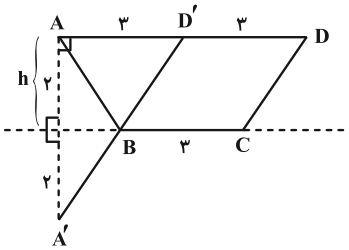
می‌دانیم اگر یک دایره را به n کمان مساوی تقسیم کنیم و نقاط تقسیم را به هم وصل کنیم یک n ضلعی منتظم به دست می‌آید. برای این‌که دوران با هر یک از زاویه‌های ۲۴° و ۳۶° هر رأس n ضلعی منتظم بر رأس دیگری از n ضلعی منتظم منطبق شود باید زاویهٔ مرکزی بین دو شعاع متوالی حداکثر ب. م . م ۲۴ و ۳۶ باشد. چون $(۲۴ , ۳۶) = ۱۲$، لذا $\frac{۳۶۰}{۱۲} = ۳۰$ حداقل تعداد اضلاع n ضلعی خواهد بود.

(هندسه ۲- صفحه‌های ۴۰ و ۴۱)

۵۵- **گزینهٔ «۲»** *(فاطمه برزویی)*

این مسئله را می‌توان توسط مسأله هرون حل کرد. کافی است طول کوتاه‌ترین مسیر $ABCD$ را تعیین کنیم که مسیر BC روی خط به موازات AD است و طول آن ۳ می‌باشد. فاصلهٔ خط AD از این خط همان ارتفاع ذوزنقه است، در نتیجه:

$$S_{\text{ذوزنقه}} = \frac{۱}{۲}(۶+۳)\times h = ۹ \Rightarrow h = ۲$$



کافی است کمترین مقدار $AB + DC$ را به دست آوریم:

$$AB + CD = AB + BD' = A'B + BD' = A'D'$$

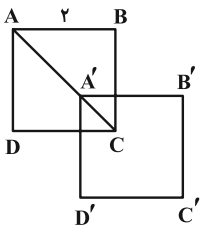
$$\overset{\Delta}{AD'A'} : \hat{A} = ۹۰^\circ \Rightarrow A'D' = \sqrt{۴^۲ + ۳^۲} = ۵$$

کمترین محیط ذوزنقه : $۶ + ۳ + ۵ = ۱۴$

(هندسه ۲- صفحه‌های ۵۲ و ۵۳)

۵۶- **گزینهٔ «۳»** *(مجتبی مظاهری‌فرد)*

می‌دانیم طول قطر مربع $\sqrt{۲}$ برابر ضلع آن است.



@MrKonkori

$$A'C = AC - AA' = ۲\sqrt{۲} - ۲$$

طبق شکل، ناحیهٔ مشترک مورد نظر، مربع است و مساحت مربع برابر نصف مجذور قطر آن است.

$$\text{مساحت ناحیهٔ مشترک} = \frac{(۲\sqrt{۲}-۲)^۲}{۲} = \frac{۱۲-۸\sqrt{۲}}{۲} = ۶-۴\sqrt{۲}$$

(هندسه ۲- صفحه‌های ۳۸ و ۳۹)

۵۷- **گزینهٔ «۳»** *(نیما مهندس)*

نقطهٔ P مرکز تجانس دو دایره و در نتیجه نقطهٔ N مجانس نقطهٔ M خواهد بود. مجانس خط AB به مرکز P و نسبت $\frac{PN}{PM}$ خطی مانند d خواهد بود که از نقطهٔ N گذشته و با وتر AB موازی است. از آنجا که AB بر دایرهٔ C' مماس است، خط d که مجانس AB است بر دایرهٔ C که مجانس دایرهٔ C' است، مماس خواهد بود. بنابراین کمان‌های AN و BN بین دو خط موازی قرار دارند و با یکدیگر برابرند. به عبارتی دیگر نقطهٔ N وسط کمان AB است. یعنی داریم:

$$\overset{\frown}{AN} = \overset{\frown}{BN} \Rightarrow AN = BN$$

$$\frac{AN^۲}{BN} = \frac{AN^۲}{AN} = AN$$

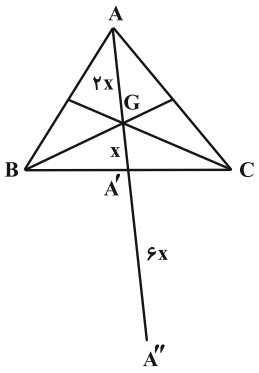
(هندسه ۲- صفحه‌های ۴۳ تا ۴۹)

۵۸- **گزینهٔ «۳»** *(هومن عقیلی)*

مثلث $A''B''C''$ مجانس مثلث ABC است و نوع تجانس، مطابق شکل، معکوس می‌باشد. نسبت تجانس را به صورت زیر به دست می‌آوریم:

$$\text{می‌دانیم} \begin{cases} A'A'' = ۲AA' \\ AG = ۲GA' \end{cases}$$

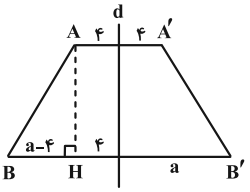
$$k = -\frac{GA''}{GA} = -\frac{۷x}{۲x} = -۳/۵$$



(هندسه ۲- صفحه‌های ۴۳ تا ۴۹)

۵۹- **گزینهٔ «۲»** *(امیرحسین ابومحبوب)*

چهارضلعی $AA'B'B$ مطابق شکل، ذوزنقهٔ متساوی‌الساقین است و با توجه به محیطی بودن آن داریم:



$$AB + A'B' = AA' + BB' \Rightarrow ۲AB = ۲(۴+a)$$

$$\Rightarrow AB = a+۴$$

از طرفی وسط‌های دو پاره‌خط AA' و BB' روی خط d قرار دارد و فاصلهٔ آن‌ها دقیقاً برابر طول ارتفاع ذوزنقه است، پس $AH = ۱۲$ و داریم:

$$\overset{\Delta}{AHB} : AB^۲ = AH^۲ + BH^۲ \Rightarrow (a+۴)^۲ = ۱۲^۲ + (a-۴)^۲$$

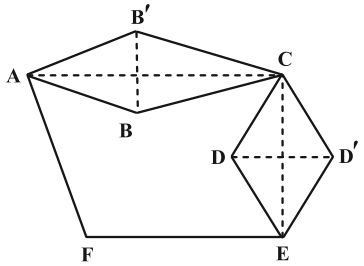
$$\Rightarrow a^۲ + ۸a + ۱۶ = ۱۴۴ + a^۲ - ۸a + ۱۶$$

$$\Rightarrow ۱۶a = ۱۴۴ \Rightarrow a = ۹$$

(هندسه ۲- صفحه‌های ۳۵ تا ۳۷)

۶۰- **گزینهٔ «۱»** *(امیرحسین ابومحبوب)*

برای این‌که مساحت این زمین بدون تغییر در محیط و تعداد اضلاع آن تا حد امکان افزایش یابد، کافی است رأس B را نسبت به پاره‌خط AC و رأس D را نسبت به پاره‌خط CE بازتاب دهیم. در این صورت داریم:



$$\text{میزان افزایش مساحت} = S_{ABCB'} + S_{CDED'} = ۲S_{ABC} + ۲S_{CDE}$$

$$= ۲\times\frac{۱}{۲}\times۴\times۴\sqrt{۲}\times\underbrace{\sin ۱۳۵^\circ}_{\frac{\sqrt{۲}}{۲}} + ۲\times\frac{۱}{۲}\times۲\sqrt{۳}\times۳\times\underbrace{\sin ۱۲۰^\circ}_{\frac{\sqrt{۳}}{۲}}$$

$$= ۱۶ + ۹ = ۲۵$$

اگر مساحت اولیهٔ زمین را با S نمایش دهیم، با توجه به فرض سؤال داریم:

$$S + ۲۵ = ۱/۵S \Rightarrow ۰/۵S = ۲۵ \Rightarrow S = ۵۰$$

(هندسه ۲- صفحه‌های ۵۱، ۵۲ و ۵۴)

@MrKonkori

فیزیک ۳

۶۱- **گزینهٔ «۱»** *(مهدی هادی‌زاده)*

به بررسی عبارات می‌پردازیم:

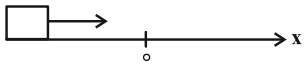
الف) نادرست؛ در حرکت بر خط راست، در صورتی مسافت طی شده و اندازهٔ جابه‌جایی برابرند که متحرک بدون تغییر جهت حرکت کند.

ب) درست؛ طبق رابطهٔ $\vec{v}_{av}=\frac{\Delta\vec{x}}{\Delta t}$ و چون همواره $\Delta t>0$ است، دو بردار سرعت متوسط و جابه‌جایی هم‌جهت هستند.

پ) نادرست؛ از آنجا که اندازهٔ جابه‌جایی و مسافت طی شده توسط یک جسم لزوماً برابر نیستند، بنابراین اندازهٔ سرعت متوسط و تندی متوسط نیز الزاماً برابر نیستند.

ت) نادرست؛ مسافت طی شده همواره بزرگ‌تر یا مساوی اندازهٔ جابه‌جایی است.

ث) نادرست؛ در مثال شکل زیر، با این‌که سرعت مثبت است اما جسم در حال نزدیک شدن به مبدأ محور است.



(فیزیک ۳- صفحه‌های ۱ تا ۱۰)

۶۲- **گزینهٔ «۴»** *(معصومه شریعت‌ناصری)*

از آنجا که جسم بر محیط یک دایره حرکت می‌کند و تندی آن ثابت است، تندی متوسط جسم در تمام بازه‌های زمانی برابر با تندی لحظه‌ای آن است.

حال می‌توان نوشت:

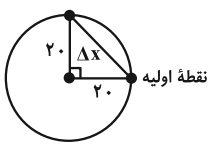
$$s_{av}=\frac{\ell}{\Delta t}\xrightarrow[\Delta t=1/5\,min=90\,s]{s_{av}=3\frac{m}{s}}3=\frac{\ell}{90}\Rightarrow\ell=270\,m$$

حال محیط دایره را به دست می‌آوریم تا بتوانیم جابه‌جایی متحرک را حساب کنیم:

$$P=2\pi r\xrightarrow{2r=40\,m}P=3\times40=120\,m$$

$$\frac{\ell}{P}=\frac{270}{120}=\frac{240}{120}+\frac{30}{120}=2+\frac{1}{4}$$

بنابراین جسم، دو دور کامل طی می‌کند و به مکان اولیهٔ خود بازمی‌گردد و در نهایت $\frac{1}{4}$ از محیط دایره را می‌پیماید، پس:



$$\Delta x=\sqrt{20^2+20^2}=20\sqrt{2}\,m\Rightarrow v_{av}=\frac{\Delta x}{\Delta t}\xrightarrow[\Delta x=20\sqrt{2}\,m]{\Delta t=90\,s}$$

$$v_{av}=\frac{20\sqrt{2}}{90}=\frac{2\sqrt{2}}{9}\frac{m}{s}$$

(فیزیک ۳- صفحه‌های ۱ تا ۱۳)

۶۳- **گزینهٔ «۳»** *(مجتبی نکوئیان)*

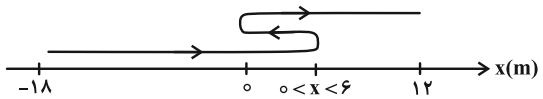
با توجه به رابطهٔ تندی متوسط $(s_{av}=\frac{\ell}{\Delta t})$ و سرعت متوسط $(\vec{v}_{av}=\frac{\vec{d}}{\Delta t})$ می‌توان نوشت:

$$s_{av}=\frac{140}{100}v_{av}\Rightarrow\ell=\frac{7}{5}d\xrightarrow{d=\Delta x=12-(-18)=30\,m}\ell=42\,m$$

بررسی گزینه‌ها:

الف) درست؛ متحرک ابتدا در مکان‌های مثبت تغییر جهت داده است، بنابراین ابتدا در جهت محور x حرکت کرده است. سپس در مکان‌های مثبت تغییر جهت می‌دهد و در خلاف جهت محور x حرکت می‌کند. در نهایت، یک بار دیگر تغییر جهت می‌دهد و در جهت محور x حرکت می‌کند. بنابراین متحرک هنگامی به مکان $x_2=12\,m$ می‌رسد که در جهت محور x حرکت می‌کند و از مبدأ محور دور می‌شود.

ب) نادرست؛ اگر متحرک در مکان‌های کمتر از $6\,m$ برای اولین بار تغییر جهت دهد، جهت بردار مکان سه بار تغییر می‌کند.



پ) درست؛ با توجه به این‌که اختلاف مسافت و جابه‌جایی، $12\,m$ است، در همهٔ حالات، فاصلهٔ دو نقطه‌ای که متحرک در آن‌ها تغییر جهت می‌دهد، $6\,m$ است.

ت) درست؛ با توجه به این‌که اولین تغییر جهت در مکان‌های مثبت اتفاق می‌افتد و اختلاف مسافت و جابه‌جایی، ۱۲ متر است، در دومین تغییر جهت، فاصلهٔ متحرک از مکان x_2، قطعاً کمتر از ۱۸ متر است.

(فیزیک ۳- صفحه‌های ۱ تا ۱۰)

۶۴- **گزینهٔ «۴»** *(متین فرخی)*

$$s_{av}=\frac{\ell}{\Delta t}\xrightarrow[s_{av}=5\frac{m}{s}]{\Delta t=6\,s}5=\frac{\ell}{6}\Rightarrow\ell=30\,m$$

اگر مکان جسم در $t=0$ را x_0 در نظر بگیریم، خواهیم داشت:

$$\ell=|9-x_0|+|0-(9)|\Rightarrow30=|9-x_0|+9$$

$$\Rightarrow21=|9-x_0|\xrightarrow{x_0<0}x_0=9-21=-12\,m$$

$$v_{av}=\frac{\Delta x}{\Delta t}=\frac{x_{6s}-x_0}{6-0}=\frac{0-(-12)}{6}=2\frac{m}{s}$$

(فیزیک ۳- صفحه‌های ۳ تا ۵)

@MrKonkori

۶۵- **گزینهٔ «۳»** (ویدا حیدری)

مطابق نمودار، همواره سرعت متوسط متحرک با تندی متوسط آن برابر است. از این‌رو جابه‌جایی و مسافت طی شده توسط متحرک همواره برابرند و این اتفاق تنها زمانی رخ می‌دهد که متحرک بر خط راست حرکت کرده و تغییر جهت نداشته باشد. لذا جهت بردار سرعت آن ثابت است.

(فیزیک ۳- صفحه‌های ۱ تا ۴)

۶۶- **گزینهٔ «۱»** (مهران اسماعیلی)

نمودار متحرک در لحظات t_1 و t_3 محور زمان را قطع کرده است. بنابراین متحرک در لحظات t_1 و t_3 از مبدأ مکان عبور می‌کند (الف: درست). می‌دانیم شیب خط مماس بر نمودار مکان- زمان جسم، برابر سرعت لحظه‌ای آن است. در بازهٔ زمانی صفر تا t_2 شیب نمودار مثبت است، یعنی متحرک در جهت مثبت محور x حرکت می‌کند. در بازهٔ زمانی t_2 تا t_4، شیب نمودار منفی است و متحرک در خلاف جهت محور حرکت می‌کند. پس متحرک فقط در لحظهٔ t_2 تغییر جهت داشته است (ب: درست). شیب پاره‌خط واصل میان دو نقطه در نمودار مکان زمان، بیانگر سرعت متوسط متحرک در آن بازهٔ زمانی است. شیب پاره‌خط واصل دو نقطه از نمودار در لحظات t_4 و صفر، مثبت است. در نتیجه سرعت متوسط مثبت و در جهت محور x است (نادرستی پ). در بازهٔ زمانی صفر تا t_1 بردار مکان، منفی، در بازهٔ t_1 تا t_3 بردار مکان، مثبت و در بازهٔ t_3 تا t_4 نیز بردار مکان، منفی است. بنابراین از صفر تا t_4 بردار مکان جسم، دو بار تغییر جهت می‌دهد (نادرستی ت). در مبدأ زمان، شیب خط مماس بر نمودار مثبت است، از این‌رو سرعت اولیه متحرک مثبت و در جهت محور x بوده است (نادرستی ث).

(فیزیک ۳- صفحه‌های ۱ تا ۱۰)

۶۷- **گزینهٔ «۴»** (نگار صفری)

طبق رابطهٔ $s_{av} = \frac{\ell}{\Delta t}$، چون $\Delta t > 0$ و $s_{av} = 0$ است، نتیجه می‌شود $\ell = 0$. بنابراین متحرک در این بازهٔ زمانی ساکن بوده است و مکان آن در محور مکان تغییری نداشته است. در نتیجه، بردار مکان تغییری نمی‌کند. (درستی گزینهٔ «۴»)

بررسی سایر گزینه‌ها:

۱) تندی متحرک زمانی کاهش می‌یابد که بردار شتاب و سرعت آن در دو جهت مخالف باشند یا به عبارت دیگر $av < 0$. لذا علاوه بر علامت شتاب، باید علامت سرعت نیز معلوم باشد تا بتوان نوع حرکت متحرک را تشخیص داد.

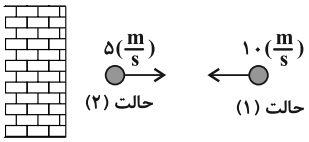
۲) اندازهٔ شیب خط مماس بر نمودار مکان- زمان بیانگر تندی در آن لحظه است. دقت کنید تندی متحرک نمی‌تواند منفی باشد.

۳) اگر بردار مکان و بردار سرعت متحرک در یک جهت باشند، متحرک در حال دور شدن از مبدأ و اگر در خلاف جهت هم باشند، متحرک در حال نزدیک شدن به مبدأ است. بنابراین علاوه بر علامت سرعت، باید علامت بردار مکان متحرک نیز معلوم باشد. دقت کنید شتاب متحرک در بررسی این موضوع بی‌تأثیر است.

(فیزیک ۳- صفحه‌های ۱ تا ۱۰)

۶۸- **گزینهٔ «۲»** (مسعود غدانی)

با توجه به شکل سؤال، جهت مثبت محور x به طرف راست است. بنابراین سرعت اولیهٔ متحرک منفی و سرعت ثانویهٔ آن مثبت است. حال با توجه به رابطهٔ شتاب متوسط داریم:



$$\begin{cases} \vec{v}_1 = (-10\frac{m}{s})\vec{i} \\ \vec{v}_2 = (+5\frac{m}{s})\vec{i} \end{cases} \Rightarrow \vec{a}_{av} = \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} = \frac{5\vec{i} - (-10\vec{i})}{0/5} = (30\frac{m}{s^2})\vec{i}$$

$$\Rightarrow \vec{a}_{av} = (30\frac{m}{s^2})\vec{i}$$

(فیزیک ۳- صفحه‌های ۱۰ تا ۱۳)

۶۹- **گزینهٔ «۲»** (مهری شریفی)

شیب خط مماس بر نمودار مکان- زمان در هر لحظه، برابر با سرعت متحرک در همان لحظه است. با استفاده از خط مماس بر نمودار در $t = 8s$، v_{8s} را به دست می‌آوریم:

$$v_{8s} = \text{شیب خط مماس} = \frac{0-6}{10-8} = -3\frac{m}{s}$$

همچنین خط مماس بر نمودار در $t = 3s$، افقی است. بنابراین شیب آن صفر و به دنبال آن $v_{3s} = 0$. حال با توجه به تعریف شتاب متوسط داریم:

$$a_{av} = \frac{\Delta v}{\Delta t} \quad (\text{از } 3s \text{ تا } 8s)$$

$$\Rightarrow a_{av} = \frac{v_{8s} - v_{3s}}{8-3} \xrightarrow[v_{3s}=0]{v_{8s}=-3\frac{m}{s}} a_{av} = \frac{-3-0}{5} = -\frac{3}{5}\frac{m}{s^2}$$

$$\Rightarrow a_{av} = -0/6\frac{m}{s^2}$$

(فیزیک ۳- صفحه‌های ۹ تا ۱۳)

۷۰- **گزینهٔ «۳»** (سیرمحمدعلی موسوی)

هنگامی بردار مکان و بردار سرعت جسم هم‌جهت هستند که جسم در حال دور شدن از مبدأ باشد. بنابراین در بازه‌های زمانی که نمودار در حال دور شدن از محور t است، بردار مکان و سرعت هم‌جهت‌اند. همچنین زمانی بردار شتاب و بردار سرعت متحرک در خلاف جهت یکدیگر هستند که تندی متحرک در حال کاهش یافتن باشد. به عبارت دیگر، چون شیب خط مماس بر نمودار مکان- زمان برابر با سرعت لحظه‌ای است، باید اندازهٔ شیب خط مماس کاهش یابد. با این توضیحات، در بازه‌های

@MrKonkori

$(۳s , ۴s)$، $(۵s , ۶s)$، $(۷s , ۸s)$ و $(۹s , ۱۵s)$ شرایط مسئله برقرار است:

$$t=(۴-۳)+(۶-۵)+(۸-۷)+(۱۵-۹)=۹s$$

(فیزیک ۳- صفحه‌های ۵ تا ۱۰)

۷۱- **گزینهٔ «۱»** (امیراحمد میرسعید)

متحرک از حال سکون شروع به حرکت کرده است، بنابراین در $t=۰$، $\vec{v}_۰=۰$ است. حال روابط شتاب متوسط را برای $t=۰$ تا $t=۱۰s$ و $t=۵s$ تا $t=۱۰s$ می‌نویسیم:

$$\vec{a}_{av(۱۰s\ تا\ ۰)}=\frac{\vec{v}_{۱۰}-\vec{v}_۰}{۱۰-۰}\xrightarrow[\vec{a}_{av}=(-۲\frac{m}{s^۲})\vec{i}]{\vec{v}_۰=۰}-۲=\frac{\vec{v}_{۱۰}}{۱۰}$$

$$\Rightarrow \vec{v}_{۱۰}=(-۲۰\frac{m}{s})\vec{i}$$

$$\vec{a}_{av(۱۰s\ تا\ ۵s)}=\frac{\vec{v}_{۱۰}-\vec{v}_۵}{۱۰-۵}\xrightarrow[\vec{a}_{av}=(۸\frac{m}{s^۲})\vec{i}]{\vec{v}_{۱۰}=(-۲۰\frac{m}{s})\vec{i}}۸=\frac{-۲۰-\vec{v}_۵}{۵}$$

$$\Rightarrow \vec{v}_۵=(-۶۰\frac{m}{s})\vec{i}$$

(فیزیک ۳- صفحه‌های ۱۰ تا ۱۳)

۷۲- **گزینهٔ «۲»** (زهره آقامحمدی)

بررسی تمام گزینه‌ها:

الف) نادرست؛ جهت حرکت در لحظهٔ $t_۲$ عوض می‌شود، زیرا در این لحظه سرعت متحرک برابر صفر شده و علامت آن نیز عوض می‌شود. دقت کنید شیب خط مماس بر نمودار سرعت- زمان معرف شتاب متحرک است. بنابراین در لحظهٔ $t_۱$، چون خط مماس بر نمودار افقی است، شتاب متحرک صفر است و جهت شتاب آن عوض می‌شود.

ب) نادرست؛ در بازهٔ صفر تا $t_۱$ شیب خط مماس بر نمودار منفی است، پس شتاب در این بازهٔ زمانی در خلاف جهت محور x است. همچنین در بازهٔ زمانی $t_۱$ تا $t_۳$، شیب خط مماس بر نمودار مثبت و به دنبال آن شتاب متحرک در جهت محور x است.

پ) درست؛ مطابق نمودار، در بازهٔ زمانی $t_۱$ تا $t_۲$ اندازهٔ سرعت متحرک در حال کاهش است. در نتیجه تندی متحرک که برابر با اندازهٔ سرعت متحرک در هر لحظه است، نیز کاهش می‌یابد.

ت) درست؛ در بازهٔ صفر تا $t_۲$، همواره سرعت متحرک منفی است و متحرک در خلاف جهت محور x حرکت می‌کند. بنابراین متحرک تغییر جهت نداشته است. لذا مسافت پیموده شده و اندازهٔ جابه‌جایی متحرک با یکدیگر برابر هستند و به دنبال آن تندی متوسط و بزرگی سرعت متوسط نیز برابرند.

(فیزیک ۳- صفحه‌های ۳ تا ۱۳)

۷۳- **گزینهٔ «۳»** (مصطفی کیانی)

با توجه به نمودار سرعت – زمان داده شده، سرعت متحرک در بازهٔ زمانی $t_۱=۶s$ تا $t_۲=۸s$، منفی است. بنابراین، شتاب متوسط در این بازهٔ زمانی برابر است با:

$$a_{av}=\frac{v_{۸s}-v_{۶s}}{\Delta t}\xrightarrow[\Delta t=۸-۶=۲s]{v_{۶s}=۰\ ,\ v_{۸s}=-۱۰\frac{m}{s}}$$

$$a_{av}=\frac{-۱۰-۰}{۲}=-۵\frac{m}{s^۲}$$

از طرف دیگر، شتاب در لحظهٔ $t=۴s$ برابر شیب خط مماس بر نمودار $v-t$ در این لحظه است. در این حالت داریم:

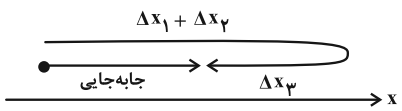
$$a_{t=۴s}=\text{شیب خط مماس}=\frac{۰-۸}{۸-۴}=-۲\frac{m}{s^۲}$$

در آخر داریم:

$$\frac{a_{av}}{a_{t=۴s}}=\frac{-۵}{-۲}=۲/۵$$

(فیزیک ۳- صفحه‌های ۱۰ تا ۱۳)

۷۴- **گزینهٔ «۲»** (محمدکاظم منشادی)



همان‌گونه که از مسیر حرکت متحرک پیداست:

$$\begin{cases}\ell=\Delta x_۱+\Delta x_۲+\Delta x_۳ & (۱)\\ \Delta x_{کل}=\Delta x_۱+\Delta x_۲-\Delta x_۳ & (۲)\end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}\Delta x_۱=v_۱\Delta t_۱\xrightarrow{v_۱=۱۵\frac{m}{s}\ ,\ \Delta t=۸s}\Delta x_۱=۱۵\times۸=۱۲۰m\\ \Delta x_۲=v_۲\Delta t_۲\xrightarrow{v_۲=۷\frac{m}{s}\ ,\ \Delta t=۲۰s}\Delta x_۲=۷\times۲۰=۱۴۰m\\ \Delta x_۳=v_۲\Delta t_۳\xrightarrow{v_۲=۵\frac{m}{s}\ ,\ \Delta t=۱۲s}\Delta x_۳=۱۲\times۵=۶۰m\end{cases}$$

$$\frac{s_{av}}{v_{av}}=\frac{\frac{\ell}{\Delta t}}{\frac{\Delta x_{کل}}{\Delta t}}=\frac{\ell}{\Delta x_{کل}}\xrightarrow{(۱)\ ,\ (۲)}$$

$$\frac{s_{av}}{v_{av}}=\frac{\Delta x_۱+\Delta x_۲+\Delta x_۳}{\Delta x_۱+\Delta x_۲-\Delta x_۳}=\frac{۱۲۰+۱۴۰+۶۰}{۱۲۰+۱۴۰-۶۰}=\frac{۳۲۰}{۲۰۰}=۱/۶$$

(فیزیک ۳- صفحه‌های ۱۳ تا ۱۵)

@MrKonkori

۷۵- **گزینهٔ «۲»** *(مصطفی کیانی)*

ابتدا سرعت دو متحرک را می‌یابیم. دقت کنید، چون نمودار مکان- زمان هر دو متحرک به صورت خط راست می‌باشد، سرعت آن‌ها ثابت و برابر شیب هر یک از خط‌ها است.

$$v_A=\frac{\Delta x_A}{\Delta t_A}\xrightarrow[\Delta t_A=۳-۰=۳s]{\Delta x_A=۰-(-۳۰)=۳۰m} v_A=\frac{۳۰}{۳}=۱۰\frac{m}{s}$$

$$v_B=\frac{\Delta x_B}{\Delta t_B}\xrightarrow[\Delta t_B=۴-۰=۴s]{\Delta x_B=-۳۰-(-۱۰)=-۲۰m} v_B=-\frac{۲۰}{۴}=-۵\frac{m}{s}$$

اکنون معادلهٔ مکان- زمان دو متحرک را می‌نویسیم:

$$x=vt+x_۰\begin{cases}\xrightarrow[v_A=۱۰\frac{m}{s}]{x_{۰A}=-۳۰m} x_A=۱۰t-۳۰\\ \xrightarrow[v_B=-۵\frac{m}{s}]{x_{۰B}=-۱۰m} x_B=-۵t-۱۰\end{cases}$$

در این مرحله، لحظه‌ای را که دو متحرک از کنار یکدیگر عبور می‌کنند، می‌یابیم. چون در این لحظه مکان آن‌ها یکسان است. داریم:

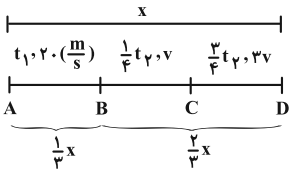
$$x_A=x_B\Rightarrow ۱۰t-۳۰=-۵t-۱۰\Rightarrow ۱۵t=۲۰\Rightarrow t=\frac{۴}{۳}s$$

در آخر، مکان لحظهٔ $t=\frac{۴}{۳}s$ را که دو متحرک از کنار هم می‌گذرند، پیدا می‌کنیم:

$$x_A=۱۰t-۳۰\xrightarrow{t=\frac{۴}{۳}s} x_A=۱۰\times\frac{۴}{۳}-۳۰=-\frac{۵۰}{۳}m$$

(فیزیک ۳- صفحه‌های ۱۳ تا ۱۵)

۷۶- **گزینهٔ «۴»** *(مجتبی نکوئیان)*



ابتدا تندی متوسط متحرک از B تا D را به دست می‌آوریم:

$$s_{av}=\frac{\ell}{\Delta t}\xrightarrow[\Delta t=t_۲]{\ell=st} s_{av}=\frac{\frac{۱}{۴}t_۲\times v+\frac{۳}{۴}t_۲\times ۳v}{t_۲}$$

$$=\frac{t_۲(\frac{v}{۴}+\frac{۹}{۴}v)}{t_۲}=\frac{۵}{۲}v$$

حال تندی متوسط در کل مسیر را به دست می‌آوریم:

$$s_{av}=\frac{\ell}{\Delta t}\xrightarrow[\Delta t=t_۱+t_۲]{\ell=AB+BD} s_{av}=\frac{AB+BD}{t_۱+t_۲}$$

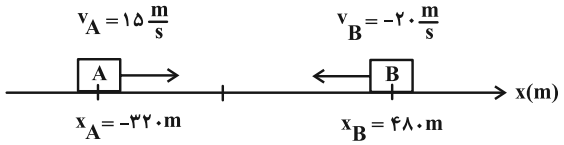
$$\xrightarrow[t=\frac{\ell}{s}]{AB=\frac{۱}{۳}x\ ,\ BD=\frac{۲}{۳}x}\Rightarrow ۳۰=\frac{\frac{۱}{۳}x+\frac{۲}{۳}x}{\frac{\frac{۱}{۳}x}{۲۰}+\frac{\frac{۲}{۳}x}{\frac{۵}{۲}v}}\Rightarrow ۳۰=\frac{x}{\frac{x}{۶۰}+\frac{۴x}{۱۵v}}$$

$$\Rightarrow ۳۰=\frac{۱}{\frac{۱}{۶۰}+\frac{۱۶}{۶۰v}}\Rightarrow \frac{۱}{۶۰}+\frac{۱۶}{۶۰v}=\frac{۱}{۳۰}\Rightarrow v=۱۶\frac{m}{s}$$

(فیزیک ۳- صفحه‌های ۱ تا ۱۵)

۷۷- **گزینهٔ «۳»** *(مجتبی نکوئیان)*

در لحظهٔ $t=۰$، محور مکان را رسم می‌کنیم. با توجه به شکل زیر، دو جسم دو بار در فاصلهٔ $۵۲/۵m$ از یکدیگر قرار می‌گیرند. به گونه‌ای که بار اول $x_B-x_A=۵۲/۵m$ و بار دوم $x_A-x_B=۵۲/۵m$ می‌شود.



حال برای محاسبهٔ زمان می‌توان نوشت:

$$x_B-x_A=۵۲/۵m\xrightarrow[x_A=۱۵t-۳۲۰]{x_B=-۲۰t+۴۸۰}$$

$$-۲۰t_۱+۴۸۰-(۱۵t_۱-۳۲۰)=۵۲/۵$$

$$\Rightarrow -۳۵t_۱+۸۰۰=۵۲/۵\Rightarrow t_۱=\frac{۸۰۰-۵۲/۵}{۳۵}s$$

$$x_A-x_B=۵/۲۵m\xrightarrow[x_A=۱۵t-۳۲۰]{x_B=-۲۰t+۴۸۰}$$

$$۱۵t_۲-۳۲۰-(-۲۰t_۲+۴۸۰)=۵۲/۵$$

$$\Rightarrow ۳۵t_۲-۸۰۰=۵۲/۵\Rightarrow t_۲=\frac{۸۰۰+۵۲/۵}{۳۵}s$$

حال اختلاف این دو زمان ($t_۱$ و $t_۲$) را به دست می‌آوریم:

$$t_۲-t_۱=\frac{۸۰۰+۵۲/۵}{۳۵}-\frac{۸۰۰-۵۲/۵}{۳۵}=\frac{۱۰۵}{۳۵}=۳s$$

(فیزیک ۳- صفحه‌های ۱۳ تا ۱۵)

۷۸- **گزینهٔ «۳»** *(علیرضا جباری)*

هر دو قسمت از نمودار به صورت خط راست هستند. بنابراین متحرک در این دو بازه با سرعت ثابت حرکت می‌کند. معادلهٔ مکان- زمان متحرک را در هر قسمت می‌نویسیم:

$$t=۵s\ \text{از صفر تا}:\ |v|=\frac{۳}{۲}\frac{m}{s}\xrightarrow{\text{شیب منفی است}} v=-\frac{۳}{۲}\frac{m}{s}$$

@MrKonkori

$$v=\frac{x_{۳s}-x_۰}{۳-۰}\xrightarrow[v=-\frac{۳\,m}{۲\,s}]{x_{۳s}=۰}-\frac{۳}{۲}=-\frac{x_۰}{۳}\Rightarrow x_۰=\frac{۹}{۲}m$$

$$\Rightarrow x=vt+x_۰\xrightarrow[x_۰=\frac{۹}{۲}m]{v=-\frac{۳\,m}{۲\,s}}x=-\frac{۳}{۲}t+\frac{۹}{۲}$$

برای نوشتن معادلهٔ قسمت دوم نمودار، به دو نقطه از آن نیاز داریم و چون در $t=۵s$ با خط قبل تقاطع دارد، داریم:

$$t=۵s\Rightarrow x=-\frac{۳}{۲}(۵)+\frac{۹}{۲}=-۳m$$

$$\Rightarrow v=\frac{\Delta x}{\Delta t}=\frac{x_{۱۰s}-x_{۵s}}{۱۰-۵}=\frac{۰-(-۳)}{۵}=\frac{۳}{۵}\frac{m}{s}$$

$$v=\frac{\Delta x}{\Delta t}\Rightarrow v=\frac{x_{۱۰s}-x_۰}{۱۰-۰}\xrightarrow[x_{۱۰s}=۰]{v=\frac{۳\,m}{۵\,s}}\frac{۳}{۵}=\frac{۰-x_۰}{۱۰}$$

$$\Rightarrow x_۰=-۶m\Rightarrow x=\frac{۳}{۵}t-۶$$

می‌دانیم سرعت متوسط در فاصلهٔ زمانی $t_۱$ تا $t_۲$، برابر با شیب پاره‌خط واصل نقاط نظیر این دو لحظه در نمودار مکان- زمان است، در نتیجه:

$$\begin{cases}t_۱=۱s\Rightarrow x=-\frac{۳}{۲}(۱)+\frac{۹}{۲}=۳m\\ t_۲=۶s\Rightarrow x=\frac{۳}{۵}(۶)-۶=۰=-۲/۴m\end{cases}$$

$$\Rightarrow v_{av}=\frac{\Delta x}{\Delta t}=\frac{-۲/۴-۳}{۶-۱}=\frac{-۵/۴}{۵}=-۱/۰۸\frac{m}{s}$$

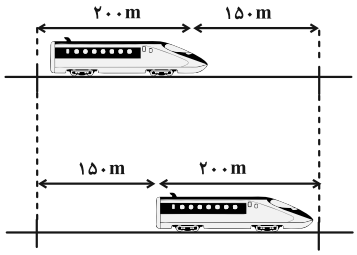
$$\Rightarrow \vec{v}_{av}=-(۱/۰۸\frac{m}{s})\vec{i}$$

(فیزیک ۳- صفحه‌های ۱۳ تا ۱۵)

۷۹- **گزینهٔ «۱»** *(محسن سلماسی‌ونر)*

مطابق دو شکل زیر، قطار در بازهٔ زمانی که انتهای قطار به اول پل و ابتدای آن به آخر پل می‌رسد، به‌طور کامل بر روی پل قرار دارد. همان‌گونه که از شکل پیدا است، انتهای قطار در این مدت مسافت $۱۵۰m$ را پیموده است.

حال می‌توان نوشت:



$$v=\frac{\Delta x}{\Delta t}\xrightarrow[\Delta t=۵s]{\Delta x=۱۵۰m}v=\frac{۱۵۰}{۵}=۳۰\frac{m}{s}$$

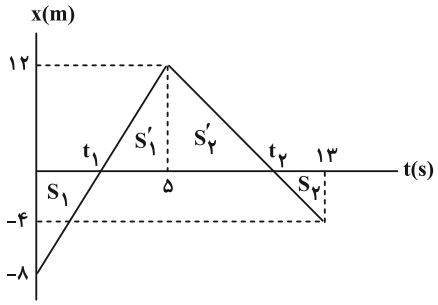
(فیزیک ۳- صفحه‌های ۱۳ تا ۱۵)

۸۰- **گزینهٔ «۲»** *(علیرضا جباری)*

لحظات برخورد نمودار با محور t را به ترتیب $t_۱$ و $t_۲$ در نظر می‌گیریم.

با توجه به تشابه مثلث‌های $S_۱$ و $S'_۱$ داریم:

$$\frac{۱۲}{۸}=\frac{۵-t_۱}{t_۱}\Rightarrow ۱۲t_۱=۴۰-۸t_۱\Rightarrow t_۱=۲s$$



همچنین در تشابه مثلث‌های $S_۲$ و $S'_۲$ می‌توان نوشت:

$$\frac{۱۲}{۴}=\frac{t_۲-۵}{۱۳-t_۲}\Rightarrow ۱۲(۱۳)-۱۲t_۲=۴t_۲-۵(۴)$$

$$\Rightarrow ۱۶t_۲=۴۴(۴)\Rightarrow t_۲=۱۱s$$

بردار مکان جسم در لحظه‌های $t_۱$ و $t_۲$ که از مبدأ مکان می‌گذرد، تغییر جهت می‌دهد. بنابراین خواستهٔ سؤال $t_۲-t_۱$ است که برابر است با:

فاصلهٔ زمانی $=t_۲-t_۱=۹s$

(فیزیک ۳- صفحه‌های ۱۳ تا ۱۵)

@MrKonkori

فیزیک ۱

۸۱- **گزینهٔ «۲»** (مصطفی کیانی)

بررسی گزینه‌ها:

۱) نادرست؛ وقتی مایعی به سرعت سرد شود، معمولاً جامد بی‌شکل (آمورف) تشکیل می‌شود.

۲) درست؛ به جسم‌های درون یک شاره یا غوطه‌ور در آن، همواره نیروی بالاسوی خالصی به نام نیروی شناوری از طرف شاره وارد می‌شود.

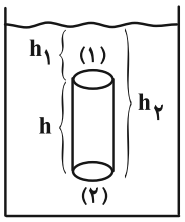
۳) نادرست؛ طبق اصل برنولی، در مسیر حرکت شاره با افزایش تندی شاره، فشار آن کاهش می‌یابد.

۴) نادرست؛ اگر چند لولهٔ مویین شیشه‌ای تمیز را وارد یک ظرف آب کنیم، آب در لوله‌های مویین بالا می‌رود و سطح آب در آن به شکل فرو رفته و بالاتر از سطح آب درون ظرف قرار می گیرد. همچنین هر چه قطر لولهٔ مویین کمتر باشد، ارتفاع ستون آب در آن بیشتر است.

(فیزیک ۱- صفحه‌های ۲۴ تا ۳۲ و ۴۱ تا ۴۶)

۸۲- **گزینهٔ «۲»** (معصومه شریعت‌ناصری)

با توجه به شکل زیر می‌توان نوشت:



$$P=\frac{F}{A}\Rightarrow F=PA\Rightarrow\begin{cases}F_1=P_1A\xrightarrow{P_1=\rho gh_1}\\ F_1=A(\rho gh_1)\quad(1)\\ F_2=P_2A\xrightarrow{P_2=\rho gh_2}\\ F_2=A(\rho gh_2)\quad(2)\end{cases}$$

$$\Delta F=F_2-F_1\overset{(1),(2)}{=\!=}A(\rho gh_2-\rho gh_1)$$

$$=A\rho g(h_2-h_1)=A\rho g\Delta h$$

بنابراین $\Delta F=A\rho g\Delta h$. همچنین Δh همان ارتفاع استوانه است $(h=\Delta h)$. لذا می‌توان نوشت:

$$\Delta F=\rho ghA\xrightarrow[\rho=1/2\frac{g}{cm^3}=1200\frac{kg}{m^3}]{\Delta F=60N\ ,\ A=0/01m^2}60=1200\times10\times h\times0/01$$

$$\Rightarrow h=0/5m=50cm$$

(فیزیک ۱- صفحه‌های ۳۲ تا ۳۴)

۸۳- **گزینهٔ «۱»** (مهدی شریفی)

فشار در عمق h از یک مایع، از رابطهٔ $P=P_0+\rho gh$ به دست می‌آید. وقتی $h=0$ است، $P=P_0$ می‌باشد. بنابراین با توجه به نمودار $P_0=1\times10^5Pa$ است. حال در $h=2m$ داریم:

$$P=P_0+\rho gh\xrightarrow[P_0=1\times10^5Pa\ ,\ h=2m]{P=1/24\times10^5Pa\ ,\ g=10\frac{N}{kg}}$$

$$\Rightarrow0/24\times10^5=20\rho\Rightarrow\rho=1200\frac{kg}{m^3}$$

حال فشار پیمانه‌ای مایع در $h=1m$ را به دست می‌آوریم:

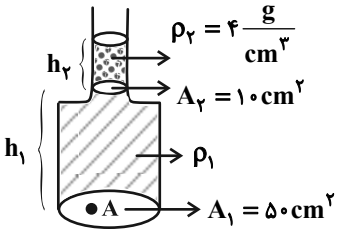
$$\begin{cases}P_g=P-P_0\\ P=P_0+\rho hg\end{cases}\Rightarrow P_g=\rho gh\xrightarrow[g=10\frac{N}{kg}]{h=1m\ ,\ \rho=1200\frac{kg}{m^3}}$$

$$P_g=1200\times10\times1=12000Pa$$

(فیزیک ۱- صفحه‌های ۳۲ تا ۳۸)

۸۴- **گزینهٔ «۴»** (محمد مقدم)

فشار در نقطهٔ A را در حالت اول و دوم می‌نویسیم:



حالت اول: $P_{1A}=P_0+\rho_1gh_1$

حالت دوم: $P_{2A}=P_0+\rho_1gh_1+\rho_2gh_2$

بنابراین تغییرات فشار برابر است با:

$$P_{2A}-P_{1A}=P_0+\rho_1gh_1+\rho_2gh_2-P_0-\rho_1gh_1=\rho_2gh_2\quad(1)$$

همچنین با استفاده از تعریف فشار داریم:

$$P_A=\frac{F}{A_1}\Rightarrow\Delta P=\frac{\Delta F}{A_1}\ (A_1\text{ ثابت است})\qquad(2)$$

از روابط (۱) و (۲) نتیجه می‌شود:

$$\frac{\Delta F}{A_1}=\rho_2gh_2\xrightarrow[\rho_2=4\frac{g}{cm^3}=4\times10^3\frac{kg}{m^3}\ ,\ A_1=50cm^2=50\times10^{-4}m^2]{h_2=\frac{V}{A_2}=\frac{10cm^3}{10cm^2}=1cm=10^{-2}m}$$

$$\frac{\Delta F}{50\times10^{-4}}=4\times10^3\times10\times10^{-2}\Rightarrow\Delta F=2N$$

(فیزیک ۱- صفحه‌های ۳۲ تا ۳۶)

@MrKonkori

۸۵- **گزینهٔ «۲»** *(امیراحمد میرسعید)*

از آنجا که نقاط D و C در یک مایع قرار دارند و همتراز هستند، می‌توان نوشت:

$$P_C = P_D \Rightarrow P_A + 2\rho_1 gh = P_B + \rho_1 g(\frac{2h}{3}) + 3\rho_1 g(\frac{h}{3})$$

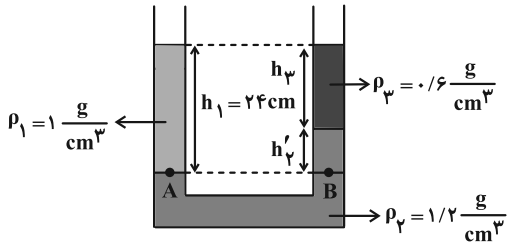
$$\Rightarrow P_B - P_A = 2\rho_1 gh - \frac{5}{3}\rho_1 gh \Rightarrow P_B - P_A = \frac{1}{3}\rho_1 gh$$

نکته: در لولهٔ U شکل اگر دو نقطه هم ارتفاع باشند اما در دو مایع متفاوت قرار داشته باشند، نقطه‌ای فشار بیشتری دارد که در مایع با چگالی کمتر باشد.

(فیزیک ۱- صفحه‌های ۳۲ تا ۳۵)

۸۶- **گزینهٔ «۲»** *(زهره آقامحمدی)*

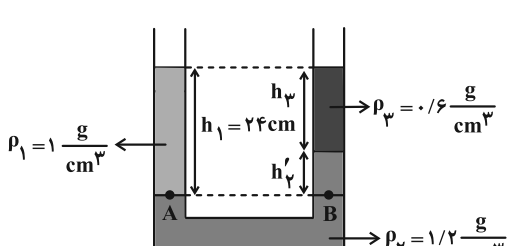
ابتدا ارتفاع مایع به چگالی ρ_1 را به دست می‌آوریم. با توجه به همتراز بودن نقاط A و B می‌توان نوشت:



$$P_A = P_B \Rightarrow \rho_1 gh_1 = \rho_2 gh_2$$

$$\Rightarrow 1 \times h_1 = 1/2 \times 20 \Rightarrow h_1 = 24cm$$

پس از ریختن مایع به چگالی $\rho_3 = 0/6\frac{g}{cm^3}$، برای این‌که سطح آزاد مایع‌ها در دو طرف لوله در یک سطح باشند، مایع‌ها به صورت شکل زیر قرار می‌گیرند. با مساوی قرار دادن فشار نقاط همتراز A و B داریم:



$$P_A = P_B \Rightarrow \rho_1 gh_1 = \rho_2 gh_2 + \rho_3 gh_3$$

$$\xrightarrow[\rho_2 = 1/2\frac{g}{cm^3},\ h_2' = h_1 - h_3 = 24 - h_3]{\rho_1 = 1\frac{g}{cm^3},\ h_1 = 24cm,\ \rho_3 = 0/6\frac{g}{cm^3}}$$

$$1 \times 24 = 1/2(24 - h_3) + 0/6(h_3)$$

$$\Rightarrow 24 = 28/8 - 1/2h_3 + 0/6h_3 \Rightarrow 0/6h_3 = 4/8$$

$$\Rightarrow h_3 = 8cm$$

بنابراین جرم مایع اضافه شده برابر است با:

$$m = \rho V \xrightarrow{V=Ah} m = \rho Ah \xrightarrow[A=2cm^2]{\rho=0/6\frac{g}{cm^3},\ h=8cm}$$

$$m = 0/6 \times 2 \times 8 = 9/6g$$

(فیزیک ۱- صفحه‌های ۳۲ تا ۳۶)

۸۷- **گزینهٔ «۳»** *(حسین الهی)*

با توجه به شکل، نیروسنج مجموع وزن ظرف و مایع درون آن را نشان می‌دهد.

$$\left.\begin{matrix} W_{مایع} = m_{مایع}g = 12 \times 10 = 120N \\ W_{ظرف} = m_{ظرف}g = 2 \times 10 = 20N \end{matrix}\right\} W_{کل} = 120 + 20 = 140N$$

توجه: دقت شود شکل ظرف، بر روی نیروی وارد بر کف ظرف از طرف مایع تأثیر دارد و بر نیروی وارد بر سطح، از طرف ظرف تأثیر ندارد.

(فیزیک ۱- صفحه‌های ۳۲ تا ۳۸)

۸۸- **گزینهٔ «۱»** *(بهزاد آزادخر)*

چون سطح مقطع استوانه ثابت است، می‌توانیم برای به دست آوردن فشار از رابطهٔ $P = \frac{mg}{A}$ استفاده کنیم. بنابراین ابتدا مساحت مقطع استوانه را به دست می‌آوریم:

$$A = \pi r^2 \xrightarrow[\pi=3]{r=\frac{1}{\sqrt{6}}m} A = 3 \times \frac{1}{6} = \frac{1}{2}m^2$$

@MrKonkori

جرم کل هوای موجود در استوانه را بـه دسـت مـی‌آوریـم. (فشـار در سـطح آب‌های آزاد ناشی از جرم کل هوای موجود در استوانه است):

$$P_{\circ}=\frac{mg}{A}\xrightarrow[A=\frac{1}{2}m^2]{P_{\circ}=100\times10^3\,Pa}10^5=\frac{10m}{\frac{1}{2}}\Rightarrow m=5000kg \quad (1)$$

حال جرم هوای موجود در ارتفاع $6km$ و بالاتر را به دست می‌آوریم:

$$P_{6km}=\frac{m_1g}{A}\xrightarrow[A=\frac{1}{2}m^2]{P_{6km}=50\times10^3\,Pa}5\times10^4=\frac{10m_1}{\frac{1}{2}}$$

$$\Rightarrow m_1=2500kg$$

پس جرم هوای موجود تا ارتفاع $6km$ برابر است با:

$$m'=m-m_1=5000-2500=2500kg$$

بـا تکـرار همـین روش، جـرم هـوای موجـود در ارتفـاع بـالای $9km$، $m_2=1500kg$ می‌شـود و نیـز جـرم هـوای موجـود تـا ارتفـاع $9km$، $m''=m-m_2=3500kg$ به دست می‌آید. حال می‌توان نوشت:

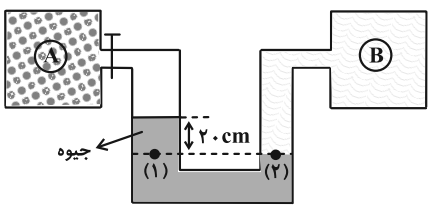
$$\text{درصد جرمی مورد نظر}=\frac{m''-m'}{m}\times100=\frac{3500-2500}{5000}\times100$$

$$=\frac{1}{5}\times100=20\%$$

(فیزیک ۱- صفحه‌های ۳۲ تا ۳۷)

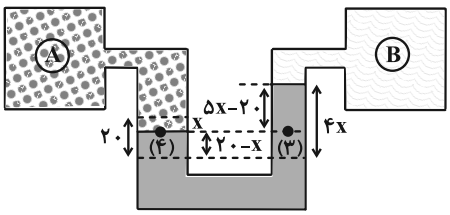
۸۹- **گزینهٔ «۴»** *(مجتبی نکوئیان)*

با توجه به همترازی نقاط (۱) و (۲) خواهیم داشت:



$$P_1=P_2\Rightarrow P_2=P_{B\,\text{گاز}}=20cmHg$$

با باز کردن شیر مخزن A و با توجه به این‌که فشار گاز مخزن A از فشار گاز مخزن B بیشتر است، می‌توان گفت که مایع شاخهٔ سمت چـپ پـایین آمده و مایع شاخهٔ سمت راست، بالاتر از سطح مایع شاخهٔ سـمت چـپ قـرار می‌گیرد. با توجه به این‌که حجم مایع جابه‌جا شده در دو طـرف لولـه بـا هـم برابر است، می‌توان گفت که ارتفاع مایع پایین آمـده در شـاخهٔ سـمت چـپ (x)، $\frac{1}{4}$ برابر ارتفاع مایع بالا آمده در شاخهٔ سـمت راسـت $(4x)$ اسـت، پس مطابق با شکل زیر داریم:



$$P_3=P_4\Rightarrow P_A=P_{\text{جیوه}}+P_B\Rightarrow 65=(5x-20)+20$$

$$\Rightarrow 5x=65\Rightarrow x=13cm\Rightarrow 4x=52cm$$

بنابراین جیوه نسبت به حالت اول ۵۲ سانتی‌متر در لولهٔ سمت راست بالا می‌رود.

(فیزیک ۱- صفحه‌های ۳۲ تا ۳۸)

۹۰- **گزینهٔ «۴»** *(کامران ابراهیمی)*

برای شاره تراکم‌ناپذیر، آهنگ شارش حجمی شاره از رابطهٔ زیر به دست می‌آید:

$$\text{آهنگ شارش حجمی شاره}=\frac{\text{حجم شاره}}{\text{زمان}}=\frac{\Delta V}{\Delta t}=\frac{AL}{\Delta t}=Av$$

بنابراین می‌توان نوشت:

$$\frac{\Delta V}{\Delta t}=Av\xrightarrow[\Delta t=20min=20\times60=1200s]{\Delta V=5400m^3\,,\,A=\pi r^2}$$

$$\frac{5400}{20\times60}=3\times5\times5\times10^{-4}\times v\Rightarrow v=600\frac{m}{s}$$

(فیزیک ۱- صفحه‌های ۴۳ تا ۴۷)

@MrKonkori

فیزیک ۲

۹۱- **گزینهٔ «۲»** *(کامران ابراهیمی)*

طبق رابطهٔ ظرفیت خازن براساس ویژگی‌های ساختمانی آن خواهیم داشت:

$$C = \kappa\varepsilon_0 \frac{A}{d} \Rightarrow \frac{C_2}{C_1} = \frac{\kappa_2}{\kappa_1} \times \frac{A_2}{A_1} \times \frac{d_1}{d_2}$$

$$\xrightarrow[A_2 = 0/2A_1 + A_1 = 1/2A_1]{\kappa_2 = 6\kappa_1 \,,\, d_2 = \frac{1}{2}d_1} \frac{C_2}{C_1} = \frac{6\kappa_1}{\kappa_1} \times \frac{1/2A_1}{A_1} \times \frac{d_1}{\frac{1}{2}d_1}$$

$$\Rightarrow \frac{C_2}{C_1} = 14/4 \Rightarrow C_2 = 14/4\,C_1$$

با توجه به نسبت به دست آمده، درمی‌یابیم ظرفیت خازن افزایش یافته است. بنابراین C_2، $67\mu F$ از C_1 بزرگ‌تر است.

$$C_2 - C_1 = 67\mu F \Rightarrow 14/4C_1 - C_1 = 67\mu F$$

$$\Rightarrow C_1 = \frac{67}{13/4} = 5\mu F$$

(فیزیک ۲- الکتریسیتهٔ ساکن؛ صفحه‌های ۳۲ تا ۳۷)

۹۲- **گزینهٔ «۳»** *(مجتبی نکوئیان)*

در ابتدا، اندازهٔ میدان الکتریکی میان صفحات خازن را براساس ویژگی‌های خازن می‌یابیم:

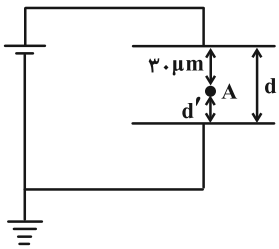
$$E = \frac{V}{d} \xrightarrow{C = \frac{Q}{V} \Rightarrow V = \frac{Q}{C}} E = \frac{Q}{C.d} \xrightarrow{C = \kappa\varepsilon_0 \frac{A}{d}}$$

$$E = \frac{Q}{\kappa\varepsilon_0 \frac{A}{d} d} = \frac{Q}{\kappa\varepsilon_0 A}$$

$$\Rightarrow E = \frac{Q}{\kappa\varepsilon_0 A} \xrightarrow[\kappa = 1 \,,\, A = 5cm^2 = 5\times10^{-4}m^2 \,,\, \varepsilon_0 = 9\times10^{-12}\frac{C^2}{N.m^2}]{Q = 60pC = 60\times10^{-12}C}$$

$$E = \frac{60\times10^{-12}}{9\times10^{-12}\times1\times5\times10^{-4}} = \frac{2}{15}\times10^5 \frac{V}{m}$$

مطابق شکل زیر، صفحهٔ منفی خازن مرجع پتانسیل بوده و پتانسیل الکتریکی آن صفر است. از این‌رو برای این‌که پتانسیل نقطهٔ A، $\frac{8}{3}$ ولت باشد، رابطهٔ اختلاف پتانسیل را برای نقطهٔ A و صفحهٔ منفی خازن می‌نویسیم:



$$\Delta V = V_A - V_0 = V_A \qquad (1)$$

$$\Delta V = Ed' \xrightarrow{(1)} V_A = Ed' \xrightarrow[d' = d - 30\mu m]{E = \frac{2}{15}\times10^5 \frac{V}{m}}$$

$$\frac{8}{3} = \frac{2}{15}\times10^5 \times (d - 3\times10^{-5}) \Rightarrow d - 3\times10^{-5} = 20\times10^{-5}$$

$$\Rightarrow d = 23\times10^{-5}m = 230\mu m$$

(فیزیک ۲- الکتریسیتهٔ ساکن؛ صفحه‌های ۲۵، ۲۶ و ۳۲ تا ۳۷)

۹۳- **گزینهٔ «۴»** *(محسن سلماسی‌وند)*

از آنجا که خازن به باتری متصل است، اختلاف پتانسیل دو سر آن برابر با اختلاف پتانسیل باتری و مقداری ثابت است. با توجه به این نکته به بررسی تمام گزینه‌ها می‌پردازیم:

۱) نادرست؛ طبق رابطهٔ $C = \kappa\varepsilon_0 \frac{A}{d}$، با افزایش κ (ثابت دی‌الکتریک) ظرفیت خازن نیز افزایش می‌یابد. دقت کنید، κ برای هوا تقریباً برابر یک و برای سایر دی‌الکتریک‌ها بزرگ‌تر از یک است.

۲) نادرست؛ طبق رابطهٔ $E = \frac{\Delta V}{d}$، با ثابت ماندن ΔV و d، میدان الکتریکی نیز ثابت می‌ماند.

۳) نادرست؛ با توجه به رابطهٔ $Q = CV$، چون ظرفیت خازن افزایش یافته (در گزینهٔ «۱» بررسی شد) و اختلاف پتانسیل ثابت است، بار ذخیره شده در خازن نیز افزایش می‌یابد.

@MrKonkori

۴) درست؛ براساس رابطهٔ $U=\frac{1}{2}CV^2$، با ثابت ماندن V و افزایش C (ظرفیت خازن)، انرژی خازن نیز افزایش می‌یابد.

(فیزیک ۲- الکتریسیتهٔ ساکن؛ صفحه‌های ۳۲ تا ۴۰)

۹۴- **گزینهٔ «۴»** *(زهره آقامحمدی)*

طبق رابطهٔ ظرفیت خازن تخت براساس مشخصات ساختمانی آن، اگر فاصلهٔ بین صفحات آن را نصف کنیم، خواهیم داشت:

$$C=\kappa\varepsilon_0\frac{A}{d}\Rightarrow\frac{C_2}{C_1}=\frac{d_1}{d_2}\xrightarrow{d_2=\frac{1}{2}d_1}\frac{C_2}{C_1}=\frac{d_1}{\frac{1}{2}d_1}\Rightarrow\frac{C_2}{C_1}=2$$

از طرف دیگر، وقتی خازن از باتری جدا می‌شود، بار خازن ثابت می‌ماند. بنابراین می‌توان نوشت:

$$Q_1=Q_2\Rightarrow C_1V_1=C_2V_2\xrightarrow[V_1=20V]{C_2=2C_1}20=2V_2$$

$$\Rightarrow V_2=10V$$

حال بار ذخیره شده در خازن را می‌یابیم. با توجه به تغییر انرژی خازن با ثابت بودن بار الکتریکی، داریم:

$$\Delta U=U_2-U_1\xrightarrow[Q\text{ ثابت است}]{U=\frac{1}{2}QV}\Delta U=\frac{1}{2}QV_2-\frac{1}{2}QV_1$$

$$=\frac{1}{2}Q(V_2-V_1)\xrightarrow[V_1=20V\ ,\ V_2=10V]{\Delta U=-2/5mJ}$$

$$-2/5\times10^{-3}=\frac{1}{2}Q(10-20)\Rightarrow Q=5\times10^{-4}C=0/5mC$$

(فیزیک ۲- الکتریسیتهٔ ساکن؛ صفحه‌های ۳۲ تا ۴۰)

۹۵- **گزینهٔ «۱»** *(محمد مقدم)*

با توجه به رابطهٔ $U=\frac{1}{2}CV^2$، با ثابت ماندن ظرفیت خازن و افزایش ولتاژ، انرژی ذخیره شده در خازن افزایش می‌یابد. بنابراین می‌توان نوشت:

$$\Delta U=U_2-U_1=\frac{1}{2}CV_2^2-\frac{1}{2}CV_1^2=\frac{1}{2}C(V_2^2-V_1^2)$$

$$\xrightarrow[C=16\mu F=16\times10^{-6}F]{V_2=\frac{5}{3}V_1\ ,\ \Delta U=+8\mu J}8\times10^{-6}=\frac{1}{2}\times16\times10^{-6}(\frac{25}{9}V_1^2-V_1^2)$$

$$\Rightarrow1=\frac{16V_1^2}{9}\Rightarrow1=\frac{4}{3}V_1\Rightarrow V_1=\frac{3}{4}V$$

حال با توجه به رابطهٔ $Q=CV$ خواهیم داشت:

$$Q=CV\xrightarrow{C\text{ ثابت است}}\Delta Q=C\Delta V$$

$$\xrightarrow[\Delta V=V_2-V_1=\frac{5}{3}V_1-V_1=\frac{2}{3}V_1]{C=16\mu F\ ,\ V_1=\frac{3}{4}V}\Delta Q=16\times\frac{2}{3}\times\frac{3}{4}$$

$$\Rightarrow\Delta Q=8\mu C$$

(فیزیک ۲- الکتریسیتهٔ ساکن؛ صفحه‌های ۳۲ تا ۳۸)

۹۶- **گزینهٔ «۴»** *(زهره آقامحمدی)*

در ابتدا با استفاده از قانون اهم، نسبت مقاومت‌های دو سیم را می‌یابیم:

$$R=\frac{V}{I}\Rightarrow\frac{R_A}{R_B}=\frac{V_A}{V_B}\times\frac{I_B}{I_A}\xrightarrow[I_B=0/4A\ ,\ I_A=2/5A]{V_A=V_B=V_0}$$

$$\frac{R_A}{R_B}=1\times\frac{0/4}{2/5}\Rightarrow\frac{R_A}{R_B}=\frac{4}{25}$$

چون دو سیم هم‌جنس هستند $(\rho_A=\rho_B)$ و جرم یکسان دارند $(m_A=m_B)$، با توجه به رابطهٔ $V=\frac{m}{\rho}$، نتیجه می‌شود که حجم‌شان نیز برابر است $(V_A=V_B)$. بنابراین خواهیم داشت:

$$V_A=V_B\xrightarrow{V=AL}A_AL_A=A_BL_B\Rightarrow\frac{L_A}{L_B}=\frac{A_B}{A_A}\quad(1)$$

$$R=\rho\frac{L}{A}\Rightarrow\frac{R_A}{R_B}=\frac{\rho_A}{\rho_B}\times\frac{L_A}{L_B}\times\frac{A_B}{A_A}$$

$$\xrightarrow[(1)]{\rho_A=\rho_B:\text{ هم‌جنس‌اند}}\frac{R_A}{R_B}=(\frac{L_A}{L_B})^2$$

$$\xrightarrow{\frac{R_A}{R_B}=\frac{4}{25}}\frac{4}{25}=(\frac{L_A}{L_B})^2\Rightarrow\frac{L_A}{L_B}=\frac{2}{5}=0/4$$

(فیزیک ۲- جریان الکتریکی و مدارهای جریان مستقیم؛ صفحه‌های ۴۹ تا ۵۲)

@MrKonkori

۹۷- **گزینهٔ «۳»** *(محمد مقدم)*

با ثابت ماندن جرم و دما، حجم سیم نیز ثابت می‌ماند. لذا:

$$V_1 = V_2 \xrightarrow{V=AL} A_1L_1 = A_2L_2 \Rightarrow \frac{L_2}{L_1} = \frac{A_1}{A_2} \qquad (1)$$

حال نسبت مقاومت سیم بعد از کشیده شدن به قبل از آن را به دست می‌آوریم:

$$R = \rho\frac{L}{A} \Rightarrow \frac{R_2}{R_1} = \frac{\rho_2}{\rho_1}\times\frac{L_2}{L_1}\times\frac{A_1}{A_2} \xrightarrow[(1)]{\rho_2=\rho_1}$$

$$\frac{R_2}{R_1} = (\frac{L_2}{L_1})^2 = 9 \Rightarrow R_2 = 9R_1$$

در نهایت با استفاده از قانون اهم داریم:

$$I = \frac{V}{R} \Rightarrow \frac{I_2}{I_1} = \frac{V_2}{V_1}\times\frac{R_1}{R_2} \xrightarrow[R_2=9R_1]{V_2=\frac{1}{2}V_1}$$

$$\frac{I_2}{I_1} = \frac{\frac{1}{2}V_1}{V_1}\times\frac{R_1}{9R_1} = \frac{1}{2}\times\frac{1}{9} = \frac{1}{18} \Rightarrow \frac{I_2}{I_1} = \frac{1}{18}$$

(فیزیک ۲- جریان الکتریکی و مدارهای جریان مستقیم؛ صفحه‌های ۴۹ تا ۵۲)

۹۸- **گزینهٔ «۲»** *(محسن سلماسی‌وند)*

ابتدا مقاومت الکتریکی سیم پس از افزایش دما را به دست می‌آوریم:

$$R_2 = R_1(1+\alpha\Delta T) \xrightarrow[\Delta T=\Delta\theta=45-20=25^\circ C]{R_1=40\Omega\ ,\ \alpha=68\times10^{-4}K^{-1}}$$

$$R_2 = 40(1+68\times10^{-4}\times25) = 46/8\Omega$$

حال با استفاده از قانون اهم و تعریف جریان الکتریکی داریم:

$$\begin{cases} I = \dfrac{\Delta q}{\Delta t} \xrightarrow{q=ne} I = \dfrac{ne}{\Delta t} \\ I = \dfrac{V}{R} \end{cases} \Rightarrow \frac{V}{R} = \frac{ne}{\Delta t}$$

$$\xrightarrow[R=46/8\Omega\ ,\ e=1/6\times10^{-19}C]{V=100V\ ,\ \Delta t=468s} \frac{100}{46/8} = \frac{1/6\times10^{-19}\times n}{468}$$

$$\Rightarrow n = 6/25\times10^{21}$$

(فیزیک ۲- جریان الکتریکی و مدارهای جریان مستقیم؛ صفحه‌های ۴۶ تا ۵۶)

۹۹- **گزینهٔ «۱»** *(نگار صفری)*

بررسی عبارات:

الف) نادرست؛ در یک نیم‌رسانا با افزایش دما، تعداد حامل‌های بار افزایش می‌یابد.

ب) درست؛ یکای مقاومت ویژه $\Omega.m = \frac{V}{A}.m$ است. دقت کنید براساس قانون اهم، ولت بر آمپر هم‌ارز با یکای اهم است.

پ) نادرست؛ با افزایش دما مقاومت نیم‌رسانا کمتر و جریان عبوری از آن بیشتر خواهد شد.

ت) نادرست؛ اغلب از ترمیستور به عنوان حسگر دما در مدارهای حساس به دما استفاده می‌شود.

ث) نادرست؛ با افزایش شدت نور تابیده شده به مقاومت LDR، مقاومت الکتریکی آن کاهش می‌یابد. بنابراین طبق رابطهٔ $I = \frac{V}{R}$، با کاهش مقاومت الکتریکی، جریان الکتریکی افزایش می‌یابد و نور لامپ LED بیشتر خواهد شد.

(فیزیک ۲- جریان الکتریکی و مدارهای جریان مستقیم؛ صفحه‌های ۴۹ تا ۶۰)

۱۰۰- **گزینهٔ «۱»** *(معصومه‌شریعت‌ناصری)*

همان‌طور که می‌دانیم هر دوی این قطعات مقاومت‌های متغیر با دما هستند اما برعکس یکدیگر می‌باشند. PTC رابطهٔ مستقیم با دما دارد اما NTC رابطهٔ عکس با دما دارد. یعنی با بالا رفتن دما NTC مقاومتش کم شده اما PTC مقاومتش بیشتر می‌گردد.

با افزایش دما، مقاومت الکتریکی مدار (۲) افزایش می‌یابد و مقاومت الکتریکی مدار (۱) کاهش می‌یابد. بنابراین بنابه رابطهٔ $I = \frac{V}{R}$، چون V ثابت است، جریان الکتریکی مدار (۲) کاهش و جریان مدار (۱) افزایش می‌یابد. در نتیجه نسبت $\frac{I_2}{I_1}$ کوچک‌تر از یک شده و گزینهٔ «۱» درست است.

(فیزیک ۲- جریان الکتریکی و مدارهای جریان مستقیم؛ صفحه‌های ۴۹ تا ۵۲ و ۵۶ تا ۶۱)

@MrKonkori

شیمی ۳

۱۰۱- **گزینهٔ «۴»** *(محمد عظیمیان‌زواره)*

بررسی موارد:

آ) درست؛ این ترکیب در چربی کوهان شتر یافت می‌شود. به دلیل غلبه بخش ناقطبی به بخش قطبی در آب نامحلول است.

ب) درست؛ در ساختار آن ۶ اتم اکسیژن وجود دارد و هر اتم اکسیژن دارای ۲ جفت الکترون ناپیوندی است. به ازای هر گروه استری دو پیوند $C-O$ وجود دارد.

پ) درست $C_{۵۷}H_{۱۱۰}O_۶ + ۳NaOH \xrightarrow{\Delta}$

$۳CH_۳(CH_۲)_{۱۶}COO^-Na^+ + CH_۲OHCHOHCH_۲OH$

ت) نادرست؛ این ترکیب یک استر ۳ عاملی است.

(شیمی ۳- صفحه‌های ۴ تا ۶)

۱۰۲- **گزینهٔ «۱»** *(یاسر راش)*

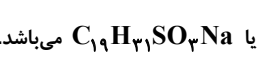
با توجه به مطالب کتاب درسی، مخلوط‌های (۱) و (۲) به ترتیب نشان‌دهندهٔ کلوئید و محلول هستند. دسته‌بندی مخلوط‌های ارائه شده به صورت زیر است:

- محلول: مخلوط آب و نمک
- کلوئید: شیر- ژله- رنگ پوششی
- سوسپانسیون: شربت خاک‌شیر- شربت معده- آب گل‌آلود

کلوئیدها مخلوط‌هایی «پایدار و ناهمگن» و محلول‌ها، مخلوط‌هایی «پایدار و همگن» هستند. بنابراین کلوئیدها و محلول‌ها در ویژگی «پایدار بودن» شباهت دارند.

(شیمی ۳- صفحه‌های ۶ و ۷)

۱۰۳- **گزینهٔ «۲»** *(محمدرضا پورجاوید)*

ترکیب داده شده یک پاک‌کنندهٔ غیرصابونی است که فرمول آن به صورت  یا $C_{۱۹}H_{۳۱}SO_۳Na$ می‌باشد.

در بین عبارت‌های داده شده تنها عبارت آخر درست است.

بخش آبگریز این پاک‌کننده شامل زنجیر کربنی $(C_{۱۳}H_{۲۷})$ و حلقهٔ بنزنی $(C_۶H_۴)$ بوده و در مجموع ۳۱ اتم هیدروژن دارد. این ترکیب از ۵ عنصر، C، H، O، S و Na ساخته شده است. در حالی که صابون جامد دارای ۴ عنصر C، H، O و Na می‌باشد. با توجه به وجود ۳ پیوند دوگانه در ساختار این ترکیب، هر مول از آن با ۳ مول گاز $H_۲$ به‌طور کامل واکنش می‌دهد که جرم آن معادل با ۶ گرم خواهد بود. در این ترکیب ۳۱ اتم H و ۱۹ اتم C وجود دارد که نسبت شمار اتم‌های H به شمار اتم‌های C، $\frac{۳۱}{۱۹}$ بوده و کوچک‌تر از ۲ است.

(شیمی ۳- صفحه‌های ۱۰ و ۱۱)

۱۰۴- **گزینهٔ «۲»** *(کیارش معدنی)*

عبارت‌های (آ) و (ت) درست می‌باشند.

ب) آرنیوس قادر به مقایسهٔ قدرت اسیدها با یکدیگر نبود. هر چند عبارت از نظر علمی درست است.

پ) آرنیوس قادر به مقایسهٔ قدرت بازها با یکدیگر نبود. هر چند عبارت از نظر علمی درست است.

نکتهٔ مهم: آرنیوس صرفاً توانست ماهیت اسید و باز و مقایسهٔ آن‌ها با یکدیگر را انجام دهد و قادر به مقایسهٔ قدرت اسیدها با یکدیگر یا بازها با یکدیگر را نداشت.

(شیمی ۳- صفحه‌های ۱۳ تا ۱۶)

۱۰۵- **گزینهٔ «۴»** *(محبوبه بیک‌محمدی)*

با توجه به اطلاعات داده شده می‌توان دریافت:

$$? \text{ mol یون} = ۴/۸۱۶\times۱۰^{۲۳} \text{ یون} \times \frac{۱ \text{ mol یون}}{۶/۰۲\times۱۰^{۲۳} \text{ یون}}$$

$$= ۰/۸ \text{ mol یون}$$

$$\text{مجموع غلظت یون‌ها} = \frac{n(mol)}{V(L)} = \frac{۰/۸}{۵} = ۰/۱۶ \, mol.L^{-۱}$$

با توجه به معادلهٔ یونش اسید HA در آب: $HA \rightleftharpoons H^+ + A^-$، غلظت هر یک از یون‌ها برابر ۰/۰۸ مولار است. اکنون می‌توان با توجه به رابطهٔ زیر درجهٔ یونش این اسید را محاسبه نمود.

$$\alpha = \frac{[H^+]}{M} = \frac{۰/۰۸}{۰/۴} = ۰/۲$$

بررسی گزینه‌ها:

۱) درست

۲) درست؛ اغلب اسیدها ضعیف و تنها برخی از آن‌ها قوی هستند.

۳) غلظت اولیهٔ اسید برابر ۰/۴ مولار بوده که ۰/۰۸ مولار آن یونیده شده است، در نتیجه غلظت مولکول‌های اسید برابر $(۰/۴ - ۰/۰۸ = ۰/۳۲)$ مولار است.

۴) با توجه به این‌که مجموع غلظت یون‌ها در اسید HA $(۰/۱۶ \, mol.L^{-۱})$ از مجموع غلظت یون‌ها در محلول هیدروکلریک اسید $(۲\times۱۰^{-۳} \, mol.L^{-۱})$ بیشتر است، رسانایی الکتریکی محلول دارای اسید HA بیشتر است.

(شیمی ۳- صفحه‌های ۱۴ و ۱۶ تا ۲۰)

@MrKonkori

۱۰۶- **گزینهٔ «۴»** *(یاسر راش)*

هر دو ماده، رسانای یونی هستند.

بررسی سایر گزینه‌ها:

۱) با توجه به شکل، درجهٔ یونش اسید HA برابر $۰/۲$ و درجهٔ یونش اسید HB برابر ۱ است:

$$\text{درجهٔ یونش } (\alpha) = \frac{\text{شمار مولکول‌های یونیده شده}}{\text{شمار کل مولکول‌های حل شده}}$$

$$\Rightarrow \alpha_{HA} = \frac{۱}{۵} = ۰/۲$$

بنابراین مجموع غلظت یون‌ها در محلول‌ها برابر است با:

$$HA(aq) \rightleftharpoons H^+(aq) + A^-(aq)$$

$$HA \text{ مجموع غلظت یون‌ها در محلول} = ۲\alpha_{HA} M_{HA}$$

$$= ۲\times ۰/۲ \times ۰/۲ = ۰/۰۸ mol.L^{-۱}$$

$$HB(aq) \rightarrow H^+(aq) + B^-(aq)$$

$$HB \text{ مجموع غلظت یون‌ها در محلول} = ۲\alpha_{HB} M_{HB}$$

$$= ۲\times ۱ \times ۰/۱ = ۰/۲ mol.L^{-۱}$$

بنابراین رسانایی الکتریکی نمونهٔ محلول اسید قوی‌تر HB بیشتر است.

۲) HB مربوط به یک اسید قوی با $\alpha = ۱$ است، در حالی‌که نیتروواسید $(HNO_۲)$ یک اسید ضعیف است.

۳) HA یک مادهٔ الکترولیت ضعیف است.

(شیمی ۳- صفحه‌های ۱۶ تا ۲۰)

۱۰۷- **گزینهٔ «۱»** *(روزبه رضوانی)*

یونش اسید و بازهای ضعیف در آب برگشت‌پذیر بوده و به خاطر ثابت یونش کوچک آن‌ها مقدار اسید یا باز یونیده نشده بیشتر از یون‌های آب پوشیده است. اسید و بازهای ضعیف در میان ترکیبات بالا عبارتند از اسید سرکه (استیک اسید)، باز موجود در شیشه پاک‌کن (آمونیاک)، اسید موجود در ریواس.

(شیمی ۳- صفحه‌های ۱۵، ۱۶ و ۱۹ تا ۲۲)

۱۰۸- **گزینهٔ «۳»** *(پیمان خوابوی‌مجد)*

$$۰/۴۱۴ g\ C_۷H_۶O_۳ \times \frac{۱ mol\ C_۷H_۶O_۳}{۱۳۸ g\ C_۷H_۶O_۳} = ۰/۰۰۳ mol\ C_۷H_۶O_۳$$

$$[C_۷H_۶O_۳] = \frac{۰/۰۰۳}{۰/۵} = ۰/۰۰۶ mol.L^{-۱}$$

$$K_a = \frac{[H^+]^۲}{M - [H^+]^۲} \Rightarrow ۱۰^{-۳} = \frac{[H^+]^۲}{۰/۰۰۶ - [H^+]}$$

$$\Rightarrow ۱۰۰۰[H^+]^۲ + [H^+] - ۰/۰۰۶ = ۰$$

$$\Rightarrow [H^+] = ۰/۰۰۲ mol.L^{-۱}$$

(شیمی ۳- صفحه‌های ۲۰ تا ۲۳)

۱۰۹- **گزینهٔ «۱»** *(مجوبه بیک‌محمدی)*

تنها مورد دوم صحیح است.

بررسی موارد:

مورد اول: گسترهٔ تغییر pH در محلول‌های آبی و در دمای اتاق از ۰ تا ۱۴ است و در این شرایط pH محلول‌های خنثی برابر ۷ است.

مورد دوم: در محلول‌های آبی و در دمای معین، با افزایش غلظت یون H^+ به همان نسبت غلظت آنیون OH^- کاهش خواهد یافت.

مورد سوم: با توجه به اطلاعات داده شده pH آب را پس از حل کردن $HCl(g)$ در آن محاسبه می‌کنیم.

$$?mol\ HCl = ۶/۷۲ L\ HCl \times \frac{۱ mol\ HCl}{۲۲/۴ L\ HCl} = ۰/۳ mol\ HCl$$

$$[H^+] = [HCl] = \frac{n}{V} = \frac{۰/۳ mol}{۲ L}$$

$$pH = -\log[H^+] = -\log(۱۵\times ۱۰^{-۲})$$

$$= -(\log ۵ + \log ۳ + \log ۱۰^{-۲}) = -(۰/۷ + ۰/۵ - ۲) = ۰/۸$$

در ابتدا pH آب برابر ۷ بوده است و در نتیجه pH آن به اندازهٔ $۶/۲$ $(۷ - ۰/۸)$ واحد تغییر کرده است.

مورد چهارم: بدون دانستن حجم محلول‌ها نمی‌توان در مورد شمار یون‌های موجود در دو محلول اظهارنظر نمود.

(شیمی ۳- صفحه‌های ۲۴ تا ۲۸)

۱۱۰- **گزینهٔ «۱»** *(محمد عظیمیان‌زواره)*

$$K_۲O(s) + H_۲O(l) \rightarrow ۲KOH(aq)$$

$$pH = ۱۳/۷ \ , \ [H^+] = ۱۰^{-۱۳/۷} = ۲\times ۱۰^{-۱۴} mol.L^{-۱}$$

$$[H^+][OH^-] = ۱\times ۱۰^{-۱۴} \Rightarrow [OH^-] = ۵\times ۱۰^{-۱} mol.L^{-۱}$$

$$M_{KOH} = ۰/۵ = \frac{n}{۰/۵ L} \Rightarrow n_{KOH} = ۰/۲۵ mol$$

$$?g\ K_۲O = ۰/۲۵ mol\ KOH \times \frac{۱ mol\ K_۲O}{۲ mol\ KOH}$$

$$\times \frac{۹۴ g\ K_۲O}{۱ mol\ K_۲O} = ۱۱/۷۵ g\ K_۲O$$

$$HA: [H^+] = M.\alpha \Rightarrow [H^+] = ۰/۰۲ \times ۰/۰۴$$

$$= ۸\times ۱۰^{-۴} mol.L^{-۱}$$

$$pH = -\log(۸\times ۱۰^{-۴}) \Rightarrow pH = ۳/۱ \Rightarrow ۱۳/۷ - ۳/۱ = ۱۰/۶$$

(شیمی ۳- صفحه‌های ۲۴ تا ۲۸)

@MrKonkori

شیمی ۱

۱۱۱- **گزینهٔ «۲»** *(مهبوبه بیک‌محمدی)*

موارد اول و سوم صحیح هستند.

بررسی موارد نادرست:

مورد دوم: دقت کنید حالت (۱) با جذب انرژی همراه است نه آزاد سازی انرژی.

مورد چهارم: با توجه به شکل زیر که نشان‌دهندهٔ طیف نشری خطی هیدروژن در ناحیهٔ مرئی است، می‌توان دریافت با افزایش انرژی و کاهش طول موج خطوط رنگی، فاصلهٔ میان آن‌ها کاهش می‌یابد.

(شیمی ۱- صفحه‌های ۲۴ تا ۲۷)

۱۱۲- **گزینهٔ «۳»** *(محمد عظیمیان‌زواره)*

هر نوع زیرلایه در اتم با یک عدد کوانتومی فرعی مشخص می‌شود. عدد کوانتومی فرعی برای پنجمین نوع زیرلایه در اتم برابر ۴ می‌باشد. با توجه به رابطهٔ $2+4l$، گنجایش پنجمین نوع زیرلایه در اتم برابر ۱۸ الکترون می‌باشد.

(شیمی ۱- صفحه‌های ۲۴ تا ۳۰)

۱۱۳- **گزینهٔ «۱»** *(علیرضا بیانی)*

عنصر A می‌تواند $_{24}Cr$، $_{25}Mn$ یا $_{35}Br$ باشد.

$$_{24}Cr: 1s^2\ 2s^2 2p^6\ 3s^2 3p^6 3d^5\ 4s^1$$

$$_{25}Mn: 1s^2\ 2s^2 2p^6\ 3s^2 3p^6 3d^5\ 4s^2$$

$$l=1 \Rightarrow 12e^- \quad l=2 \Rightarrow 5e^- \quad \Big\} 7$$

$$_{35}Br: 1s^2\ 2s^2 2p^6\ 3s^2 3p^6 3d^{10}\ 4s^2 4p^5$$

$$l=1 \Rightarrow 17e^- \quad l=2 \Rightarrow 10e^- \quad \Big\} 7$$

بررسی موارد:

مورد اول: نادرست؛ اتم $_{24}Cr$، ۶ الکترون ظرفیتی دارد.

مورد دوم: نادرست؛ تنها حالت فیزیکی $_{35}Br$ با سایر عناصر هم‌گروه خود متفاوت است.

مورد سوم: نادرست؛ این عبارت تنها دربارهٔ $_{25}Mn$ درست می‌باشد.

مورد چهارم: نادرست؛ $^{99}_{43}Tc$ نخستین عنصر ساخت بشر است که در گروه ۷ جدول تناوبی بوده و تنها با $_{25}Mn$ هم‌گروه می‌باشد.

مورد پنجم:

$_{24}Cr: 3d^5\ 4s^1$ $\quad (3+2)\times5+(4+0)\times1=29$

$_{25}Mn: 3d^5\ 4s^2$ $\quad (3+2)\times5+(4+0)\times2=33$

$_{35}Br: 4s^2\ 4p^5$ $\quad (4+0)\times2+(4+1)\times5=33$

این گزاره برای $_{24}Cr$ صحیح نمی‌باشد.

(شیمی ۱- صفحه‌های ۲۷ تا ۳۴)

۱۱۴- **گزینهٔ «۴»** *(روزبه رضوانی)*

$$\begin{cases} n+p=58 \\ e=p-2 \\ n-e=4 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} n=30 \\ p=28 \end{matrix} \quad \text{یا} \quad p=\frac{58-(4-2)}{2}=28$$

$$_{28}Ni: \underline{1s^2}\ \underline{\underline{2s^2 2p^6}}\ \underline{\underline{\underline{3s^2 3p^6 3d^8}}}\ \underline{\underline{\underline{4s^2}}}$$

عنصر Ni در گروه ۱۰ و دورهٔ چهارم جدول تناوبی قرار دارد و توانایی تشکیل یون‌های پایدار با بار ۲+ و ۳+ را دارد.

(شیمی ۱- صفحه‌های ۲۷ تا ۳۴)

۱۱۵- **گزینهٔ «۲»** *(محسن میمونی)*

با این‌که آرایش الکترونی فلزهای قلیایی خاکی به زیرلایهٔ ns^2 ختم می‌شود، اما آرایش الکترون نقطه‌ای آن‌ها برخلاف He به صورت $\dot{X}\bullet$ است.

بررسی سایر گزینه‌ها:

۱) آرایش الکترون- نقطه‌ای عنصرهای گروه ۱۴ جدول تناوبی به صورت $\dot{\underset{\bullet}{X}}\bullet$ است که بیشترین الکترون جفت نشده را دارند، که کربن جزء این عناصر می‌باشد.

@MrKonkori

۳) طبق توضیحات ابتدای صفحهٔ ۳۶ کتاب درسی این گزاره صحیح است.

۴) در دورهٔ دوم جدول تناوبی عنصر Li می‌تواند با از دست دادن الکترون، کاتیون تشکیل دهد و سه عنصر N، O و F هم می‌توانند با گرفتن الکترون آنیون تشکیل دهند.

(شیمی ۱- صفحه‌های ۳۴ تا ۳۸)

۱۱۶- **گزینهٔ «۳»** *(زینب تبایی)*

عنصر مورد نظر در گروه ۱۳ قرار دارد و همان Al است و فرمول ترکیب یونی آن با اکسیژن، Al_2O_3 است.

(شیمی ۱- صفحه‌های ۳۸ و ۳۹)

۱۱۷- **گزینهٔ «۳»** *(امیرمحمد کنکرانی)*

بررسی گزینه‌ها:

۱) نادرست؛ $MgCl_2$ یک ترکیب یونی دوتایی و سه اتمی، Al_2O_3 نیز یک ترکیب یونی دوتایی و پنج اتمی است.

۲) نادرست؛ در ساختار ترکیبات یونی مولکول وجود ندارد، یون وجود دارد.

۳) درست؛

$$Na^+N^{3-} \rightarrow Na_3N \rightarrow \frac{\text{شمار آنیون}}{\text{شمار کاتیون}} = \frac{1}{3}$$

$$Al^{3+}F^- \rightarrow AlF_3 \rightarrow \frac{\text{شمار کاتیون}}{\text{شمار آنیون}} = \frac{1}{3}$$

۴) نادرست؛ از دست دادن، گرفتن یا به اشتراک گذاشتن الکترون، نشانه‌ای از رفتار شیمیایی اتم است.

(شیمی ۱- صفحه‌های ۳۶ تا ۴۰)

۱۱۸- **گزینهٔ «۳»** *(محبوبه بیک‌محمدی)*

دومین عنصر گروه ۱۳ و نخستین عنصر گروه ۱۷ جدول تناوبی، به ترتیب Al (آلومینیم) و F (فلوئور) بوده و فرمول ترکیب یونی حاصل AlF_3 است.

بررسی گزینه‌ها:

۱) این ترکیب یونی تنها از دو عنصر ساخته شده و یون‌های $_{13}Al^{3+}$ و F^-، هر دو به آرایش الکترونی گاز نجیب $(_{10}Ne)$ دست یافته‌اند.

۲) فرمول ترکیب یونی حاصل از واکنش میان فلز سدیم و گاز نیتروژن به صورت Na_3N است و هر واحد فرمولی از این دو ترکیب شامل ۴ یون است.

۳) برای تشکیل هر مول از این ترکیب، هر مول فلز Al، ۳ مول الکترون از دست داده و هر مول اتم F، ۱ مول الکترون دریافت می‌کند؛ در نتیجه ۳ مول الکترون به ازای تشکیل هر مول ترکیب میان فلز و نافلز مبادله می‌شود.

$$?e = 0/5\,mol\ AlF_3 \times \frac{\text{۳ mol e}^- \text{ مبادله شده}}{1\,mol\ AlF_3}$$

$$\times \frac{6/02\times10^{23}\,e^-}{1\,mol\ e^-} = 9/03\times10^{23}\,e^-$$

۴) درست

(شیمی ۱- صفحه‌های ۱۶ تا ۱۸ و ۳۸ و ۳۹)

۱۱۹- **گزینهٔ «۴»** *(علیرضا بیانی)*

بررسی موارد:

مورد اول: نادرست؛ جرم مولی هر ماده برابر مجموع جرم مولی اتم‌های سازندهٔ آن است.

مورد دوم: نادرست؛ فرمول مولکولی یک ماده، هم نوع عنصرهای سازنده و هم شمار اتم‌های آن را نشان می‌دهد.

مورد سوم: درست

مورد چهارم درست

مورد پنجم: نادرست؛ مدل فضاپرکن CO_2 به صورت و H_2O به صورت می‌باشد.

(شیمی ۱- صفحه‌های ۴۰ و ۴۱)

۱۲۰- **گزینهٔ «۱»** *(امیرحسین حسن‌نژاد)*

بررسی موارد نادرست:

الف) شکل نشان داده شده ساختار لایه‌ای اتم را نشان می‌دهد و نه مدل بور را.

ب) عنصر D فلزی واسطه بوده و می‌تواند در واکنش‌های مختلف شرکت کند.

تعداد الکترون‌های ظرفیت $B = 8$

تعداد الکترون‌های ظرفیت $D = 10$

(شیمی ۱- صفحه‌های ۴۲ تا ۴۴)

@MrKonkori

شیمی ۲

۱۲۱- **گزینهٔ «۱»** *(محمد عظیمیان‌زواره)*

بررسی برخی از موارد:

توضیح مورد الف) استخراج ۱۰۰۰ کیلوگرم آهن تقریباً ۲۰۰۰ کیلوگرم سنگ معدن آهن و ۱۰۰۰ کیلوگرم از منابع معدنی دیگر استفاده می‌شود.

مورد پ) بازیافت نیازمند انرژی کمتری برای تولید مواد می‌باشد و ردپای CO_2 را کاهش می‌دهد.

(شیمی ۲- صفحه‌های ۲۷ و ۲۸)

۱۲۲- **گزینهٔ «۳»** *(هادی مهدی‌زاده)*

ترکیب‌های شناخته شده از کربن از مجموع ترکیب‌های شناخته شده از دیگر عنصرهای جدول دوره‌ای بیشتر است.

(شیمی ۲- صفحه‌های ۲۹ تا ۳۲)

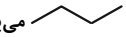
۱۲۳- **گزینهٔ «۲»** *(امیرحسین طیبی)*

موارد «الف» و «ت» نادرست هستند.

بررسی موارد:

الف) ساده‌ترین آلکان دارای گروه CH_3 به صورت اتان (CH_3CH_3) می‌باشد.

ب) ساده‌ترین آلکان دارای شاخهٔ فرعی به صورت $H_3C-\underset{\underset{CH_3}{|}}{CH}-CH_3$ است و نام آن ۲- متیل پروپان است.

پ) ساده‌ترین آلکان راست زنجیر که دارای همپار است، بوتان می‌باشد و فرمول پیوند- خط آن به صورت  می‌باشد.

ت) ساده‌ترین آلکان دارای شاخهٔ فرعی اتیل $(CH_3-CH_2-\underset{\underset{C_2H_5}{|}}{CH}-CH_2-CH_3)$ است.

ث) ساده‌ترین آلکان که در دمای اتاق به صورت مایع وجود دارد، پنتان است و فرمول مولکولی C_5H_{12} دارد.

(شیمی ۲- صفحه‌های ۳۳ تا ۴۰)

۱۲۴- **گزینهٔ «۲»** *(حمید ذبحی)*

در آلکان‌ها با افزایش جرم مولی، درصد جرمی هیدروژن کاهش می‌یابد؛ بنابراین افزایش درصد جرمی هیدروژن یعنی کاهش جرم مولی آن.

در آلکان‌ها، با کاهش جرم مولی، قدرت نیروهای جاذبه وان‌دروالسی و گران‌روی کاهش می‌یابد.

فراریّت و تفاوت نقطه جوش در آلکان‌های متوالی افزایش می‌یابد و تفاوت مول CO_2 و H_2O در واکنش سوختن کامل یک مول از آلکان تغییر نمی‌کند.

$$C_nH_{2n+2}+\frac{3n+1}{2}O_2 \Rightarrow nCO_2+(n+1)H_2O$$

$$\Rightarrow \text{اختلاف مول } CO_2 \text{ و } H_2O = 1mol$$

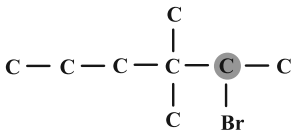
(شیمی ۲- صفحه‌های ۳۵ و ۳۶)

۱۲۵- **گزینهٔ «۴»** *(علیرضا بیانی)*

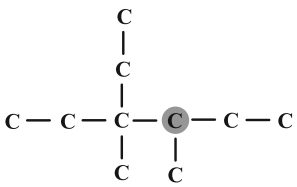
منظور صورت سؤال گروه CH می‌باشد.

بررسی گزینه‌ها:

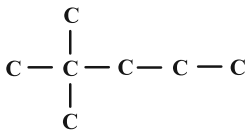
۱) یک گروه CH دارد.



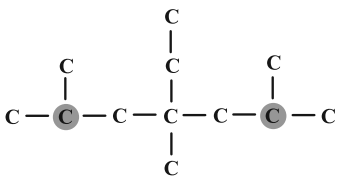
۲) یک گروه CH دارد.



۳) گروه CH ندارد.



۴) دو گروه CH دارد.



(شیمی ۲- صفحه‌های ۳۷ تا ۴۰)

۱۲۶- **گزینهٔ «۳»** *(امیرحسین حسن‌نژاد)*

نام ترکیب، ۶- اتیل- ۳، ۳، ۴، ۵، ۷- پنتا متیل نونان است که دارای فرمول مولکولی $C_{16}H_{34}$ است. اگر در بوتان (C_4H_{10}) به جای اتم‌های هیدروژن گروه متیل جایگزین کنیم، ترکیبی با فرمول $C_{14}H_{30}$ به دست می‌آید.

$$\text{اختلاف جرم مولی} = 16(12)+34(1)-(14(12)+30(1))$$

$$= 28\,g.mol^{-1}$$

(شیمی ۲- صفحه‌های ۳۳ تا ۴۰)

@MrKonkori

۱۲۷- **گزینهٔ «۴»** *(محسن میمونی)*

گازی که سنگ بنای صنایع پتروشیمیایی است اتن است، نه اتین.

بررسی سایر گزینه‌ها:

۱) با توجه به صفحهٔ ۴۲ کتاب درسی پایهٔ یازدهم این گزینه صحیح است.

۲) گاز عمل‌آورنده در کشاورزی اتن است که می‌توان آن را وارد مخلوط آب و اسید کرد تا اتانول که یک مادهٔ ضدعفونی کننده است تولید شود.

۳) درست؛ آلکن‌ها تحت شرایط مناسب واکنش‌پذیری بیشتری از آلکان‌ها دارند.

(شیمی ۲- صفحه‌های ۴۰ تا ۴۲)

۱۲۸- **گزینهٔ «۴»** *(محبوبه بیک‌محمدی)*

ابتدا با توجه به اطلاعات سؤال، فرمول مولکولی هیدروکربن مورد نظر را تعیین می‌کنیم: (شمار اتم‌های هیدروژن را برابر x در نظر می‌گیریم.)

$$\text{درصد جرمی هیدروژن} = \frac{\text{جرم اتم‌های H}}{\text{جرم کل ترکیب}} \times ۱۰۰$$

$$\Rightarrow \frac{x \times ۱}{(x \times ۱) + (۳ \times ۱۲)} \times ۱۰۰ = ۱۰ \Rightarrow x = ۴$$

فرمول مولکولی هیدروکربن مورد نظر $C_۳H_۴$ است که متعلق به خانوادهٔ آلکین‌ها است.

عبارت‌های (ب) و (ت) نادرست هستند.

بررسی موارد:

الف) درست

ب) اتین $(C_۲H_۲)$ که نخستین عضو این خانواده است؛ در گذشته استیلن نام داشته است.

پ) اتان $(C_۲H_۶)$، اتن $(C_۲H_۴)$ و اتین $(C_۲H_۲)$ همگی دارای دو اتم کربن هستند و در میان آن‌ها، اتین کمترین جرم مولی را دارد.

ت) سومین عضو این خانواده بوتین با فرمول مولکولی $(C_۴H_۶)$ است و معادلهٔ موازنه شدهٔ واکنش انجام شده به صورت زیر است:

$$C_۴H_۶ + ۲Br_۲ \rightarrow C_۴H_۶Br_۴$$

$$?\,g\,Br_۲ = ۲/۷\,g\,C_۴H_۶ \times \frac{۱mol\,C_۴H_۶}{۵۴g\,C_۴H_۶} \times \frac{۲mol\,Br_۲}{۱mol\,C_۴H_۶}$$

$$\times \frac{۱۶۰g\,Br_۲}{۱mol\,Br_۲} = ۱۶g\,Br_۲$$

(شیمی ۲- صفحه‌های ۴۰ تا ۴۲)

۱۲۹- **گزینهٔ «۱»** *(امیرمحمد کنکرانی)*

بررسی موارد:

مورد اول: نادرست؛ ترکیب B آروماتیک نیست.

مورد دوم: درست؛ ترکیب A همان نفتالن است.

مورد سوم: درست؛ ترکیب B، ۱۴ هیدروژن دارد و با عدد اتمی اولین شبه‌فلز گروه ۱۴ $(_{۱۴}Si)$ برابر است.

مورد چهارم: نادرست؛ هر پیوند دوگانه می‌تواند با یک مولکول برم (۲ اتم برم) سیر شود. پس با ۱۲ اتم برم به‌طور کامل سیر می‌شوند.

(شیمی ۲- صفحه‌های ۴۰ تا ۴۳)

۱۳۰- **گزینهٔ «۱»** *(هانی سوری)*

همهٔ موارد به جز مورد سوم به نادرستی بیان شده‌اند.

بررسی موارد:

مورد اول: گران‌روی نفت سفید از بنزین و خوراک پتروشیمی بیشتر است اما درصد آن کمتر است.

مورد دوم: در یک بشکه بنزین و خوراک پتروشیمی بالاتر از سوخت قرار می‌گیرد.

مورد سوم: طبق کتاب درست است.

مورد چهارم: حدود $\frac{۲}{۳}$ از سوخت را با خطوط لوله جابه‌جا می‌کنند نه $\frac{۲}{۳}$ از نفت خام.

مورد پنجم: سوخت هواپیما به‌طور عمده شامل آلکان‌هایی با ده تا پانزده کربن است.

(شیمی ۲- صفحه‌های ۴۴ تا ۴۷)

@MrKonkori

بنیاد علمی آموزشی قلم‌چی

دفترچه پاسخ

آزمون هوش و استعداد

(دورهٔ دوم)

٤ آبان

تعداد کل سؤالات آزمون: ۲۰
زمان پاسخ‌گویی: ۳۰ دقیقه

گروه فنی تولید

مسئول آزمون	حمید لنجان‌زاده اصفهانی
ویراستار	فاطمه راسخ، حمیدرضا رحیم خانلو
مدیر گروه مستندسازی	محیا اصغری
مسئول درس مستندسازی	علیرضا همایون‌خواه
طراحان	حمید اصفهانی، سجاد محمدنژاد، فاطمه راسخ، حمید گنجی، امیرمحمد علیدادی، فرزاد شیرمحمدلی
حروف‌چینی و صفحه‌آرایی	معصومه روحانیان
ناظر چاپ	حمید عباسی

@MrKonkori

استعدادتحلیلی

۲۵۱- گزینهٔ «۲» *(حمید اصفهانی)*

در متن ذکر شده است که هیولای داستان فرانکشتاین در برخی روایت‌ها به توجیه علّت رفتارهای خود پرداخته است. این یعنی داستان‌نویسان و راویان، ممکن است آشکار یا پنهان به توجیه رفتارهای شخصیت‌های داستان‌ها بپردازند. بررسی دیگر گزینه‌ها:

گزینه‌ی «۱»: سرنوشت فرانکشتاین در متن، مطابق این عبارت است: نویسنده هدفی داشته و برداشت مخاطب چیز دیگر بوده است.

گزینه‌ی «۳»: این عبارت ناظر است به عبارت «اوج داستان همین است که با همین غیبت دهشت‌انگیز پایان می‌گیرد» در متن.

گزینه‌ی «۴»: طبق متن، هیولای فرانکشتاین دقیقاً به دلیل طردشدن از سوی جمع به رفتارهای شرورانه روی آورده است.

(هوش کلامی)

۲۵۲- گزینهٔ «۲» *(حمید اصفهانی)*

پاسخ به پرسش «هیولای داستان فرانکشتاین، خباثت خود را ناشی از چه می‌دانست؟» بر اساس متن ممکن است: جمله‌ی «من شرور و خبیثم، چون بدبختم» جمله‌ای است از زبان هیولای داستان. امّا متن پاسخ دو پرسش دیگر را نداده است. در متن، از «انتساب نگارش بخش‌هایی از رمان فرانکشتاین به همسر «مری شلی»» گفته شده امّا علّت آن معلوم نشده است. همچنین از تقلید از «مری شلی» نیز می‌خوانیم: «رمان مری‌شلی را که سرچشمه‌ی تقلید دیگر رمان‌نویسان نیز بوده است» امّا که «چه کسانی» مقلّد او بوده‌اند معلوم نیست.

(هوش کلامی)

۲۵۳- گزینهٔ «۴» *(حمید اصفهانی)*

این‌که انسان می‌خواهد خدایی کند امّا نمی‌تواند و مخلوق او از خالقش پیشی می‌گیرد، نمونه‌ای است از این که شاگرد، بخواهد کار را از استاد بیشتر پیش ببرد و شکست بخورد. این همان مفهوم فوت کوزه‌گری را به یاد می‌آورد که شاگرد فوت پایانی را از استاد نیاموخته و سراسر شکست خورده بود.

(هوش کلامی)

۲۵۴- گزینهٔ «۴» *(حمید اصفهانی)*

در متن صورت سؤال، از تضاد این که زایش‌گری امری زنانه است، با فرانکشتاین که مردی پیشرو است، نتیجه گرفته شده است که نویسنده‌ی داستان زن است. این نکته، این پیشفرض را در خود دارد که پیشرفت‌های فنّی، از اسطوره‌های مردانگی است.

(هوش کلامی)

۲۵۵- گزینهٔ «۲» *(حمید اصفهانی)*

«قلمزنی» ساختار «قلم + زن + ی» دارد که «اسم + بن مضارع (بزن) + ی (وند)» است. این ساختار در «هواگیری: هوا + گیر (بگیر) + ی» هم هست. ساختار دیگر واژه‌ها:

کم‌پیدایی: کم (قید / صفت) + پیدا (صفت) + ی (میانجی) + ی (وند)

ناجوانمردی: نا (وند) + جوان (صفت) + مرد (اسم / صفت) + ی

آهنگری: آهن (اسم) + گر (وند) + ی (وند)

(هوش کلامی)

۲۵۶- گزینهٔ «۳» *(حمید اصفهانی)*

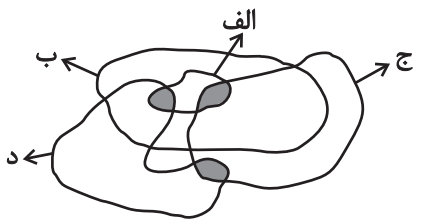
«اصلی» در متن مفهوم «اصل‌بودن» دارد. «اخلاقی» نیز مرتبط با «اخلاق» است. «بی‌نوایی» نیز «بی‌نوا بودن» است ولی «موجود فرمانبرداری» یعنی «یک موجود فرمانبردار». «نیّتی» نیز در متن یعنی «یک نیّت». این «ی» را «ی نکره» می‌نامند.

(هوش کلامی)

۲۵۷- گزینهٔ «۲» *(ستّار محمدنژاد)*

کلّی‌ترین حالت را در نظر می‌گیریم که در آن «الف»ها همه «ب» هستند و هیچ «ب» نیست که همزمان «ج» و «د» باشد:

واضح است که ممکن است دسته‌های «ج» و «د» خارج از «ب» در قسمت رنگ‌شده عضو مشترک داشته باشند یا نداشته باشند. بنابراین گزینه‌های «۱» و «۳» هیچ یک قطعیت ندارد. همچنین دو ناحیه‌ی رنگ‌شده در درون دسته‌ی «الف»، جایی است که ممکن است «همزمان «الف» و «ب» و «ج»» یا «همزمان «الف» و «ب» و «د»» باشد. بنابراین گزینه‌ی «۴» نیز درست نیست. امّا واضح است که هیچ «الف» نیست که همزمان هم «ج» باشد و هم «د»:



(هوش کلامی)

۲۵۸- گزینهٔ «۱» *(حمید اصفهانی)*

دی‌ماه سی روز دارد، ولی در متن گزینه‌ی پاسخ، تاریخ اخذ مدرک روز سی‌ویکم این ماه ذکر شده است.

(هوش منطقی ریاضی)

@MrKonkori

۲۵۹- گزینهٔ «۳» *(امیرمحمد علیدادی)*

می‌دانیم بین ورزشکار سوری و ورزشکار برزیلی، دقیقاً دو ورزشکار دیگر قرار گرفته‌اند. پس ممکن است این دو ورزشکار در رتبه‌های «اوّل و چهارم» یا «دوم و پنجم» باشند. این تنها چیزی است که ما می‌دانیم و همین برای ردّ گزینه‌های غیرپاسخ کافی است. در گزینه‌ی «۱» ورزشکار سوری سوم است، و در گزینه‌های «۲» و «۴» بین ورزشکارهای سوری و برزیلی فاصله‌ی دو نفره رعایت نشده است.

(هوش منطقی ریاضی)

۲۶۰- گزینهٔ «۳» *(امیرمحمد علیدادی)*

سمیرا می‌گوید سیما شیشه را شکسته است. اگر چنین باشد، هم سیما دروغگوست که گفته است شیشه را نشکسته است، هم مینا و هم مونا. امّا اگر سمیرا دروغگو باشد و خودش شیشه را شکسته باشد، هم مینا و هم مونا و هم سیما راستگو خواهند بود که با شرط صورت سؤال که می‌گوید تنها یک نفر دروغ می‌گوید، سازگار است.

(هوش منطقی ریاضی)

۲۶۱- گزینهٔ «۳» *(امیرمحمد علیدادی)*

عدد تعداد کتاب‌های رضا و حسین عددی زوج است. پس عدد مجموع تعداد کتاب‌های ایشان هم عددی زوج است. پس عدد تعداد کتاب‌های محمّد، «سیزده منهای عددی زوج»، عددی فرد است. حال، حاصل جمع تعداد کتاب‌های محمّد و حسین خواسته شده است که جمع عددی فرد و عددی زوج است، که قطعاً عددی فرد است.

(هوش منطقی ریاضی)

۲۶۲- گزینهٔ «۴» *(فاطمه راسخ)*

هر سال عادی ۳۶۵ روز دارد که ۵۲ هفته و ۱ روز است:

$$۳۶۵ = (۵۲ \times ۷) + ۱$$

این یعنی روز اول سال عادی در هفته، باید همان روز پایانی سال در هفته باشد. در گزینهٔ «۱» چنین اتفاقی افتاده است.

هر بهار ۹۳ روز دارد، پس از روز نخست تابستان تا پایان سال، $۳۶۵ - ۹۳ = ۲۷۲$ روز است که معادل ۳۸ هفته و ۶ روز است:

$$۲۷۲ = (۳۸ \times ۷) + ۶$$

این یعنی اگر سال کبیسه نباشد، روز پایان زمستان در هفته دقیقاً شش روز پس از روز آغاز تابستان (یا به عبارتی دو روز قبل) است.

هر تابستان نیز ۹۳ روز دارد. پس از روز نخست پاییز تا انتهای سال عادی، $۳۶۵ - ۹۳ - ۹۳ = ۱۷۹$ روز است که معادل است با ۲۵ هفته و ۴ روز.

$$۱۷۹ = (۲۵ \times ۷) + ۴$$

این یعنی در سال معمولی، روز نخست پاییز در هفته سه روز قبل از روز آخر زمستان (یا به عبارتی چهار روز بعد از آن) است.

حال زمستان عادی دو ماه سی روزه و یک ماه بیست و نه روزه دارد، که یعنی $(۲ \times ۳۰) + (۱ \times ۲۹) = ۸۹$ روز معادل ۱۲ هفته و پنج روز:

$$۸۹ = (۱۲ \times ۷) + ۵$$

و این یعنی در سال عادی، روز نخست زمستان در هفته، سه روز بعد از روز آخر زمستان در هفته است. در گزینهٔ «۴» روز آغاز زمستان یکشنبه و روز پایان آن جمعه است، این یعنی اسفندماه در این سال یک روز اضافه داشته است.

(هوش ریاضی)

۲۶۳- گزینهٔ «۲» *(فاطمه راسخ)*

الف) ساعت پنج و چهل و چهار دقیقهٔ عصر فردا در مقیاس ۲۴ ساعتی:

$$۵:۴۴' + ۱۲:۰۰ = ۱۷:۴۴'$$

سه ساعت و دو دقیقه قبل از آن:

$$۱۷:۴۴' - ۳:۰۲' = ۱۴:۴۲'$$

هفده ساعت و بیست و چهار دقیقه پس از آن:

$$۱۴:۴۲' + ۱۷:۲۴' = ۳۱:۶۶' = ۳۲:۰۶'$$

ساعت پس فردا:

$$۳۲:۰۶' - ۲۴:۰۰ = ۰۸:۰۶'$$

ب)

ساعت نه و ده دقیقه فردا شب در مقیاس ۲۴ ساعتی:

$$۹:۱۰' + ۱۲:۰۰ = ۲۱:۱۰'$$

سیزده دقیقه قبل از آن: $۲۱:۱۰' - ۰۰:۱۳' = ۲۰:۵۷'$

چهار ساعت و پنج دقیقه بعد از آن: $۲۰:۵۷' + ۴:۰۵' = ۲۵:۰۲'$

ساعت پس فردا: $۲۵:۰۲' - ۲۴ = ۱:۰۲'$

ج) اختلاف خواسته‌شده: $۰۸:۰۶' - ۱:۰۲' = ۰۷:۰۴'$

(هوش منطقی ریاضی)

@MrKonkori

۲۶۴- گزینهٔ «۱» *(فاطمه راسخ)*

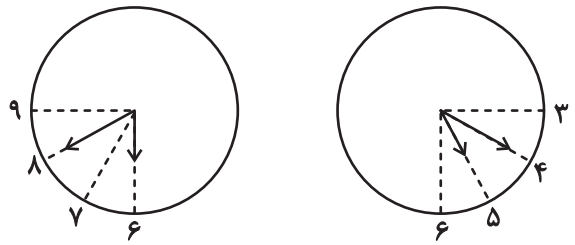
تعداد روزهای پس از هجرت ثابت است:

$$۱۴۰۰\times۳۶۵=\square\times۳۵۰\Rightarrow\square=\frac{۱۴۰۰\times۳۶۵}{۳۵۰}=۱۴۶۰$$

(هوش منطقی ریاضی)

۲۶۵- گزینهٔ «۱» *(فاطمه راسخ)*

عقربهٔ ساعت‌شمار هر ۶۰×۱۲دقیقه، ۳۶۰ درجه طی می‌کند. یعنی در هر دقیقه، $\frac{۳۶۰}{۱۲\times۶۰}=۰/۵$ درجه. عقربهٔ دقیقه‌شمار هر ۶۰ دقیقه ۳۶۰ درجه را طی می‌کند، یعنی در هر دقیقه $\frac{۳۶۰}{۶۰}=۶$ درجه. حال داریم:



$۶\times(۳۰-۴۰)=-۶۰^\circ$: فاصلهٔ عقربهٔ دقیقه‌شمار از ساعت ۶

$۴۰\times۰/۵^\circ=۲۰^\circ$: فاصلهٔ عقربهٔ ساعت‌شمار از ساعت ۶

$$\Rightarrow x(۶:۴۰')=۶۰^\circ-۲۰^\circ=۴۰^\circ$$

$۶\times(۱۵-۲۰)=-۳۰^\circ$: فاصلهٔ عقربهٔ دقیقه‌شمار از ساعت ۳

$۶۰^\circ+۲۰\times۰/۵^\circ=۷۰^\circ$: فاصلهٔ عقربهٔ ساعت‌شمار از ساعت ۳

$$\Rightarrow x(۵:۲۰')=۷۰^\circ-۳۰^\circ=۴۰^\circ$$

$$\Rightarrow|x(۶:۴۰')-x(۵:۲۰')|=۴۰^\circ-۴۰^\circ=۰^\circ$$

(هوش منطقی ریاضی)

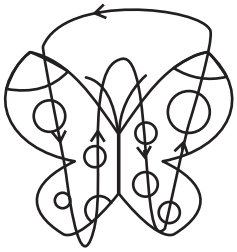
۲۶۶- گزینهٔ «۴» *(فاطمه راسخ)*

شکل صورت سؤال با ۱۸۰ درجه دوران به شکل گزینهٔ پاسخ تبدیل می‌شود. در دیگر گزینه‌ها جایگاه خانه‌های رنگی تغییر کرده و یا شکل آینه (قرینه) شده است.

(هوش غیرکلامی)

۲۶۷- گزینهٔ «۳» *(خرزاد شیرمحمدلی)*

طرح‌های رنگی روی دایره‌های شبیه به بال‌های پروانه‌ها در الگوی صورت سؤال، در مسیر زیر در حرکتند:



(هوش غیرکلامی)

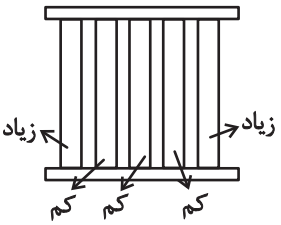
۲۶۸- گزینهٔ «۳» *(فاطمه راسخ)*

در الگوی صورت سؤال پنج دایره هست که در آن‌ها دو، سه، چهار، پنج و شش خط وتر رسم شده است. هم‌چنین چهار مربع در الگو هست که در آن‌ها دو، سه، پنج و شش مثلث هست. اگر به‌جای علامت سؤال، مربعی با چهار مثلث درون آن رسم شود، الگو همخوانی خواهد داشت.

(هوش غیرکلامی)

۲۶۹- گزینهٔ «۲» *(سپهر محمدنژاد)*

معلوم است که الگوی صورت سؤال، الگوی پنج ستونی است که طرح‌های آن‌ها جداگانه در حال زیاد یا کم شدن است:



نکته این که ستون‌ها پس از کاملاً پر یا خالی شدن، همچنان به مسیر خود ادامه می‌دهند.

(هوش غیرکلامی)

۲۷۰- گزینهٔ «۱» *(حمید کنعانی)*

در الگوی صورت سؤال، نُه آسیاب بادی هست که در هر ستون از بالا به پایین عقربه‌های آن ۹۰ درجه ساعتگرد چرخیده است.

(هوش غیرکلامی)

@MrKonkori