دفترچه پاسخ

آزمون ۳۰ شهریور ۱۴۰۳

اختصاصی دوازدهم ریاضی

پدیدآورندگان

	نام درس	نام طراحان
اختصاصی	حسابان ۲ و ریاضی پایه	دانیال ابراهیمی-مهرداد استقلالیان-عباس اشرفی-شیوا امینی-مهدی براتی-سعید جعفری-محمدعلی جلالی-عادل حسینی احمدرضا ذاکرزاده-محمدحسن سلامی‌حسینی-رضا سیدنجفی-علیرضا شریف‌خطیبی-علی اصغر شریفی-حبیب شفیعی یوسف عراز سعید علم‌پور-رضا علی‌نواز-علی اکبر علیزاده-علیرضا فیضیان-بهزاد محرمی-سیدعادل‌رضا مرتضوی-سروش موئینی هومن نورائی
	هندسه	امیرحسین ابومحبوب-علی ایمانی-افشین خاصه‌خان-فرزانه خاکپاش-محمد خندان-کیوان دارابی-فرشاد صدیقی‌فر-رضا عباسی‌اصل علی فعلی-محمد کریمی-مهرداد ملوندی-مهدی نیک‌زاد-امیر وفائی-سرژ یقیازاریان‌تبریزی
	آمارواحتمال وریاضیات گسسته	امیرحسین ابومحبوب-علی ایمانی-فرزاد جوادی-سیدمحمدرضا حسینی‌فرد-کیوان دارابی-مهدیار راشدی-سوگند روشنی محمد صحت‌کار-احمدرضا فلاح-مرتضی فهیم‌علوی-مجید نیکنام-مهدی وقوعی-سرژ یقیازاریان‌تبریزی
	فیزیک	خسرو ارغوانی‌فرد-بابک اسلامی-رضا امامی-زهره آقامحمدی-امیرحسین برادران-امیرمهدی جعفری-مرتضی جعفری مجتبی خلیل‌ارجمندی-محمدعلی راست‌پیمان-سیداحسان فلاح-مسعود قره‌خانی-مصطفی کیانی-علیرضا گونه محمدکاظم منشادی محمود منصوری سیدمهرشاد موسوی-سیدعلی میرنوری-حسام نادری-مرتضی یوسف‌نیا
	شیمی	محسن بابامیری-علیرضا بیانی-مسعود جعفری-امیر حاتمیان-عبدالرضا دادخواه-حسن رحمتی‌کوکنده-روزبه رضوانی-حامد رمضانیان امیرمحمد سعیدی-رضا سلیمانی-جهان شاهی‌بیگباغی-حسین شکوه-میلاد شیخ الاسلامی‌خیاوی-سهراب صادقی‌زاده-اسلام طالبی امیرحسین طیبی-سیدصدرا عادل-محمد عظیمیان‌زواره-امیر قاسمی-امیرحسین معروفی-حسین ناصری‌ثانی-سیدرحیم هاشمی‌دهکردی

گزینشگران و ویراستاران

نام درس	حسابان ۲ و ریاضی‌پایه	هندسه	آمارواحتمال وریاضیات گسسته	فیزیک	شیمی
گزینشگر	عادل حسینی	سرژ یقیازاریان تبریزی	سرژ یقیازاریان تبریزی	حسام نادری	ماهان زواری
گروه ویراستاری	امیرحسین ابومحبوب سهیل تقی‌زاده	مهبد خالتی امیرمحمد کریمی امیرحسین ابومحبوب مهرداد ملوندی	مهبد خالتی امیرمحمد کریمی امیرحسین ابومحبوب مهرداد ملوندی	حسین بصیر بهنام شاهنی	محمدحسن محمدزاده مقدم احسان پنجه‌شاهی امیرحسین کمره ای سروش مقدم
گروه ویراستاری رتبه برتر	سپهر متولیان	ایلیا اسفندیارپور	ایلیا اسفندیارپور	سینا صالحی سیددانیال سیدی	آرمان قنواتی محمدجواد پاکیوند کیاشا کوشانفرنیا
مسئول درس	عادل حسینی	سرژ یقیازاریان تبریزی	سرژ یقیازاریان تبریزی	حسام نادری	امیرعلی بیات
مستندسازی	سمیه اسکندری	عادل حسینی	الهه شهبازی	علیرضا همایون‌خواه	امیرحسین توحیدی
ویراستاران (مستندسازی)	سجاد سلیمی-علیرضا عباسی‌زاهد-احسان صادقی			معصومه صنعت‌کار سیدکیان مکی شیدا نجاتی	ملینا ملائی سجاد رضائی محمدصدرا وطنی

گروه فنی و تولید

مدیر گروه	مهرداد ملوندی
مسئول دفترچه	نرگس غنی‌زاده
گروه مستندسازی	مدیر گروه: محیا اصغری — مسئول دفترچه: الهه شهبازی
حروف‌نگار	فرزانه فتح اله‌زاده
ناظر چاپ	سوران نعیمی

گروه آزمون

بنیاد علمی آموزشی قلم‌چی (وقف عام)

دفتر مرکزی: خیابان انقلاب بین صبا و فلسطین – پلاک ۹۲۳ – کانون فرهنگی آموزش – تلفن: ۶۴۶۳-۰۲۱

حسابان ۱

۱- **گزینهٔ «۴»** *(سعید علم‌پور)*

دامنهٔ تابع را می‌یابیم:

$$\left[\frac{ax}{4}\right]=0 \Rightarrow 0 \le \frac{ax}{4} < 1 \Rightarrow 0 \le x < \frac{4}{a}$$

$$\Rightarrow D_f = \mathbb{R} - \left[0, \frac{4}{a}\right) = (-\infty, 0) \cup \left[\frac{4}{a}, +\infty\right)$$

برای اینکه تابع در همسایگی راست $x=5$ تعریف شده باشد، باید $\frac{4}{a} \le 5$ باشد.

$$\Rightarrow a \ge \frac{4}{5}$$

(حسابان ۱- صفحه‌های ۱۱۸ و ۱۱۹)

۲- **گزینهٔ «۱»** *(رضا علی‌نواز)*

می‌دانیم $[x^2 - x]$ در تمام نقاط صحیح فاقد حد است. اما در نقاطی که ضریب جزء صحیح صفر باشد دارای حد خواهد بود. پس:

$$x^3 + x = 0 \Rightarrow x(x^2+1) = 0 \xrightarrow{x^2+1 \neq 0} x = 0$$

که این مقدار هم یک عدد طبیعی نیست.

(حسابان ۱- صفحه‌های ۱۲۴ تا ۱۳۴)

۳- **گزینهٔ «۴»** *(مهدی براتی)*

ابتدا تابع f را به‌صورت دو ضابطه‌ای می‌نویسیم، سپس ضابطهٔ تابع fog را به‌دست می‌آوریم.

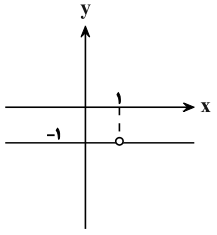
$$f(x) = \frac{|x-2|}{x-2} = \begin{cases} \frac{x-2}{x-2} = 1 & x > 2 \\ \frac{-(x-2)}{x-2} = -1 & x < 2 \end{cases}$$

می‌دانیم که در تابع fog، خروجی تابع g، ورودی تابع f است. بنابراین برد (خروجی) هر کدام از ضابطه‌های $g(x)$ را به‌دست می‌آوریم:

$$\left.\begin{array}{l} x > 1 \Rightarrow -x^2 + 2 < 1 \\ \xrightarrow{g(x)<1} f(g(x)) = -1 \\ x < 1 \Rightarrow 2x < 2 \rightarrow 2x - 3 < -1 \\ \xrightarrow{g(x)<-1} f(g(x)) = -1 \end{array}\right\} \Rightarrow f(g(x)) = -1$$

$$D_{fog} = \mathbb{R} - \{1\}$$

نمودار تابع به صورت زیر است:



واضح است که تابع fog در همهٔ نقاط از دامنهٔ خود حد دارد.

(حسابان ۱- صفحه‌های ۱۲۲ تا ۱۳۶)

۴- **گزینهٔ «۲»** *(عادل حسینی)*

در ابتدا می‌توانیم عبارت داخل براکت را به صورت $2 + \frac{3}{x-1}$ بازنویسی کنیم و در یک همسایگی راست $x=2$ داریم:

$$x > 2 \Rightarrow x-1 > 1 \Rightarrow \frac{3}{x-1} < 3 \Rightarrow 2 + \frac{3}{x-1} < 5$$

$$\Rightarrow \left[2 + \frac{3}{x-1}\right] = 4$$

و داریم:

$$\lim_{x \to 2^+} \frac{x - \left[\frac{2x+1}{x-1}\right]}{x + \sin\frac{\pi}{x}} = \lim_{x \to 2^+} \frac{x-4}{x + \sin\frac{\pi}{x}} = -\frac{2}{3}$$

(حسابان ۱- صفحه‌های ۱۲۲ تا ۱۳۶)

۵- **گزینهٔ «۴»** *(عباس اشرفی)*

ضابطهٔ صورت تابع $f(x)$ باید به یکی از حالت‌های زیر باشد؛ زیرا باید $x = \pm 1$ ریشه‌های مشترک صورت و مخرج باشند و درضمن حد تابع در یکی از این نقاط صفر باشد که به معنای آن است که یکی از این ریشه‌ها، ریشهٔ مضاعف صورت باید باشد.

الف) $(x-1)^2(x+1) = (x^2-2x+1)(x+1) = x^3 - x^2 - x + 1$

$$\Rightarrow 3m + n = -4$$

ب) $(x-1)(x+1)^2 = (x-1)(x^2+2x+1) = x^3 + x^2 - x - 1$

به دلیل عدد ثابت در ضابطه، امکان‌پذیر نیست.

(حسابان ۱- صفحه‌های ۱۴۵ تا ۱۵۱)

۶- **گزینهٔ «۳»** *(عادل حسینی)*

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^2-1}{\sqrt[3]{x}-1} = \lim_{x \to 1} \frac{(x-1)(x+1)}{\sqrt[3]{x}-1} = 2 \lim_{x \to 1} \frac{x-1}{\sqrt[3]{x}-1}$$

$$= 2 \lim_{x \to 1} \frac{(\sqrt[3]{x}-1)(\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{x} + 1)}{\sqrt[3]{x}-1} = 2 \times 3 = 6$$

(حسابان ۱- صفحه‌های ۱۴۱ تا ۱۴۴)

۷- **گزینهٔ «۴»** *(علیرضا فیضیان)*

در حد تابع اول، مخرج به ازای $x=1$ برابر صفر می‌شود. پس صورت هم باید به ازای $x=1$ صفر شود.

$$\Rightarrow 2+2^{a-1}-6=0 \Rightarrow 2^{a-1}=4 \Rightarrow a-1=2 \Rightarrow a=3$$

$$\lim_{x\to 1}\frac{2^x+2^{3-x}-6}{2^{x-1}-1} \xrightarrow[\begin{cases}x\to 1\\ t\to 2\end{cases}]{2^x=t} \lim_{t\to 2}\frac{t+\frac{8}{t}-6}{\frac{t}{2}-1} \xrightarrow[\text{ضرب در } 2t]{\text{صورت و مخرج}} >$$

$$\lim_{t\to 2}\frac{2t^2-12t+16}{t^2-2t}=\lim_{t\to 2}\frac{2(t-2)(t-4)}{t(t-2)}=-2 \Rightarrow b=-2$$

حال برای عبارت دوم داریم:

$$\lim_{x\to b}\frac{\sqrt{x+a+3}+b}{x^3-b^3} \xrightarrow[b=-2]{a=3} \lim_{x\to -2}\frac{\sqrt{x+6}-2}{x^3+8}\times\frac{\sqrt{x+6}+2}{\sqrt{x+6}+2}$$

$$=\lim_{x\to -2}\frac{x+2}{(x+2)(x^2-2x+4)(\sqrt{x+6}+2)}=\frac{1}{48}$$

(حسابان ۱- صفحه‌های ۱۴۱ تا ۱۴۴)

۸- **گزینهٔ «۲»** *(مهدی براتی)*

اگر $x\to(\frac{3}{4})^+$، آن‌گاه حد مخرج کسر برابر صفر است، چون حاصل حد موجود است، پس باید حد صورت هم صفر باشد:

$$\lim_{x\to(\frac{3}{4})^+}|ax^2-2x-3|=0 \to |\frac{9}{16}a-\frac{3}{2}-3|=0 \to a=8$$

برای محاسبهٔ حد لازم است عبارت‌های صورت و مخرج را تعیین‌علامت کنیم و قدر مطلق‌ها را برداریم:

$$8x^2-2x-3=0 \to \text{ضرب ریشه‌ها}: (\frac{3}{4})(x_2)=\frac{-3}{8}$$

$$\to x_2=\frac{-1}{2}$$

x		$\frac{-1}{2}$		$\frac{3}{4}$	
	$+$	0	$-$	0	$+$

$$4x^2-11x+6=0 \to \text{ضرب ریشه‌ها} (\frac{3}{4})(x_2)=\frac{6}{4}$$

$$\to x_2=2$$

x		$\frac{3}{4}$		2	
	$+$	0	$-$	0	$+$

با توجه به جدول تعیین‌علامت و اینکه $x\to(\frac{3}{4})^+$، عبارت داخل قدر مطلق صورت، مثبت و عبارت مخرج، منفی می‌باشد. در ادامه پس از رفع ابهام حاصل حد را می‌یابیم:

$$\lim_{x\to(\frac{3}{4})^+}\frac{|8x^2-2x-3|}{|4x^2-11x+6|}=\lim_{x\to(\frac{3}{4})^+}\frac{8(x-\frac{3}{4})(x+\frac{1}{2})}{-4(x-\frac{3}{4})(x-2)}$$

$$=\frac{8(\frac{3}{4}+\frac{1}{2})}{-4(\frac{3}{4}-2)}=2$$

بنابراین $b=2$ و $a+b=10$ است.

(حسابان ۱- صفحه‌های ۱۴۱ تا ۱۴۴)

۹- **گزینهٔ «۳»** *(یوسف عراز)*

با استفاده از اتحاد مزدوج و اتحاد چاق و لاغر ابتدا صورت و مخرج را تجزیه می‌کنیم:

$$\lim_{x\to -\frac{\pi}{4}}\frac{\cos^2 x-(1-\cos^2 x)}{(\sin x+\cos x)(\sin^2 x-\sin x\cos x+\cos^2 x)}$$

$$=\lim_{x\to -\frac{\pi}{4}}\frac{(\sin x+\cos x)(\cos x-\sin x)}{(\sin x+\cos x)(\sin^2 x-\sin x\cos x+\cos^2 x)}$$

$$=\lim_{x\to -\frac{\pi}{4}}\frac{(\cos x-\sin x)}{(1-\sin x\cos x)}=\frac{\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}}{1-(-\frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2})}=\frac{\sqrt{2}}{1+\frac{1}{2}}=\frac{2\sqrt{2}}{3}$$

(حسابان ۱- صفحه‌های ۱۴۱ تا ۱۴۴)

۱۰- **گزینهٔ «۳»** *(احمدرضا ذاکرزاده)*

$$\lim_{x\to(-4)^+}([-\frac{x}{2}]-[\frac{x+1}{3}])=[2^-]-[(-1)^+]=1-(-1)=2$$

$$\lim_{x\to(-4)^-}([-\frac{x}{2}]-[\frac{x+1}{3}])=[2^+]-[(-1)^-]=2-(-2)=4$$

$$f(-4)=2-(-1)=3$$

تابع f نه پیوستگی راست دارد و نه چپ.

(حسابان ۱- حد و پیوستگی؛ صفحه‌های ۱۴۵ تا ۱۵۱)

ریاضی ۱

۱۱- **گزینهٔ «۱»** *(علیرضا شریف‌فطیبی)*

متغیرهای گزینه‌های «۲»، «۳» و «۴» کیفی اسمی هستند ولی متغیر گزینهٔ «۱» کیفی ترتیبی است که به‌طور مثال می‌تواند به‌صورت «کم، متوسط و زیاد» بیان شود.

(ریاضی ۱- آمار و احتمال؛ صفحه‌های ۱۵۹ تا ۱۷۰)

۱۲- **گزینهٔ «۳»** *(عادل حسینی)*

نوع متغیرهای گزینه‌ها به شرح زیر است:

کیفی اسمی: گروه خونی- مدل خودرو- رنگ چشم- جنسیت

کیفی ترتیبی: مراحل تحصیل- مدرک تحصیلی- مدال المپیک

کمی پیوسته: سن- جرم- سرعت متحرک

کمی گسسته: بار الکتریکی آزاد- تعداد فرزندان- شماره چشم- تعداد تماس‌ها

(ریاضی ۱- آمار و احتمال؛ صفحه‌های ۱۵۹ تا ۱۷۰)

۱۳- **گزینهٔ «۴»** *(سیدعادل‌رضا مرتضوی)*

ابتدا از بین ۶ زوج، ۱ زوج، یعنی ۲ نفر، انتخاب می‌کنیم. حال ۳ نفر باقی‌مانده را از بین ۵ زوج دیگر انتخاب می‌کنیم. برای آنکه این ۳ فرد شامل زن و شوهر نباشند، باید از ۳ خانوادهٔ مختلف انتخاب شوند. پس از بین ۵ زوج باقی‌مانده، ۳ زوج انتخاب کرده و از هر کدام از زوج‌های انتخاب شده یک نفر (زن یا شوهر) را انتخاب می‌کنیم.

$$\text{تعداد حالات} = \binom{6}{1}\binom{5}{3}\underbrace{\binom{2}{1}\binom{2}{1}\binom{2}{1}} = 480$$

از ۲ نفر هر زوج، یک نفر انتخاب می‌شود

(ریاضی ۱- شمارش بدون شمردن؛ صفحه‌های ۱۳۳ تا ۱۴۰)

۱۴- **گزینهٔ «۲»** *(شیوا امینی)*

حالات نامطلوب − حالات کل = حالت مطلوب

حضور یا عدم حضور هریک از ۷ عضو مجموعه ۲ حالت دارد:

$$\text{کل} = 2^7 = 128$$

در کل ۲ فرد و ۵ زوج داریم:

$$\text{حالات نامطلوب} \begin{cases} \binom{2}{2} = 1 : \text{هیچ‌زوج و ۲فرد} \\ \binom{5}{1}\binom{2}{2} = 5 : \text{یک‌زوج و ۲فرد} \\ \binom{2}{1} = 2 : \text{هیچ‌زوج و ۱فرد} \end{cases} \xrightarrow{\text{جمع}} 1+2+5=8$$

$$\Rightarrow \text{حالت مطلوب} = 128 - 8 = 120$$

(ریاضی ۱- شمارش، بدون شمردن؛ صفحه‌های ۱۳۳ تا ۱۴۰)

۱۵- **گزینهٔ «۲»** *(یوسف عراز)*

برای اینکه بخواهیم ۵ ضلعی‌هایی رسم کنیم که AD یک قطر آن باشد بایستی ۲ نقطه از $\{B;C\}$ و ۱ نقطه از $\{H;G;F;E\}$ یا ۱ نقطه از $\{B;C\}$ و ۲ نقطه از $\{H;G;F;E\}$ انتخاب کنیم یعنی $\binom{4}{2}\binom{2}{2}\binom{2}{1} = 4+12 = 16$. برای اینکه بخواهیم ۵ ضلعی‌هایی رسم کنیم که AD یک ضلع آن باشد فقط می‌توانیم ۳ نقطه از $\{H;G;F;E\}$ انتخاب کنیم یعنی: $\binom{4}{3} = 4$.

جواب آخر: $\frac{16}{4} = 4$

(ریاضی ۱- شمارش، بدون شمردن؛ صفحه‌های ۱۳۳ تا ۱۴۰)

۱۶- **گزینهٔ «۴»** *(سروش موئینی)*

پیشامد $A \cap B$ یعنی دو عدد متمایز رو شوند و مجموع آنها یکی از اعداد ۸، ۹، ۱۰، ۱۱ و ۱۲ باشد. اعضای این پیشامد عبارت‌اند از:

$$\{(۳,۵)(۵,۳)(۴,۵)(۵,۴)(۶,۴)(۴,۶)(۲,۶)(۶,۲)(۳,۶)(۶,۳)(۶,۵)(۵,۶)\}$$

پس: $n(A \cap B) = ۱۲$

(ریاضی ۱- آمار و احتمال؛ صفحه‌های ۱۴۲ تا ۱۵۱)

۱۷- **گزینهٔ «۳»** *(هومن نورائی)*

$$P \text{ (همرنگ بودن)} = ۰/۵۲ = ۰/۴۸ - ۱ = \text{(همرنگ نبودن) } P \Rightarrow P \text{ (همرنگ نبودن)} = \frac{۱۳}{۲۵}$$

فرض می‌کنیم n مهره از یک رنگ و $(n+۱)$ مهره از رنگ دیگر در کیسه وجود دارد:

$$P \text{ (همرنگ نبودن)} = \frac{\binom{n}{۱}\times\binom{n+۱}{۱}}{\binom{۲n+۱}{۲}} \Rightarrow \frac{۱۳}{۲۵} = \frac{n(n+۱)}{\frac{(۲n+۱)\times ۲n}{۲}} = \frac{n+۱}{۲n+۱}$$

$$\Rightarrow ۲۶n+۱۳ = ۲۵n+۲۵ \Rightarrow n = ۱۲$$

پس از یک مهره ۱۲ تا و از مهرهٔ دیگر ۱۳ تا داریم و اگر از این کیسه ۳ مهره به تصادف انتخاب کنیم، احتمال همرنگ بودن آن‌ها برابر است با:

$$P = \frac{\binom{۱۲}{۳}+\binom{۱۳}{۳}}{\binom{۲۵}{۳}} = \frac{۲۲۰+۲۸۶}{۲۳۰۰} = \frac{۵۰۶}{۲۳۰۰} = \frac{۲۳\times ۲۲}{۲۳\times ۱۰۰} = ۰/۲۲$$

(ریاضی ۱- آمار و احتمال؛ صفحه‌های ۱۴۶ تا ۱۵۱)

۱۸- **گزینهٔ «۴»** *(علی اصغر شریفی)*

برای اینکه حداکثر ۳ دانش‌آموز ریاضی انتخاب شوند، بهتر است احتمال اینکه هر ۴ دانش‌آموز ریاضی باشند را حساب کنیم و از ۱ کم کنیم:

$$\frac{\binom{۶}{۴}}{\binom{۱۴}{۴}} = \frac{\frac{۶\times ۵}{۲}}{\frac{۱۴\times ۱۳\times ۱۲\times ۱۱}{۴\times ۳\times ۲}} = \frac{۳\times ۵}{۷\times ۱۳\times ۱۱} = \frac{۱۵}{۱۰۰۱}$$

$$\Rightarrow ۱ - \frac{۱۵}{۱۰۰۱} = \frac{۹۸۶}{۱۰۰۱}$$

(ریاضی ۱- آمار و احتمال؛ صفحه‌های ۱۴۲ تا ۱۵۱)

۱۹- **گزینهٔ «۳»** *(علی اصغر شریفی)*

تعداد کل حالات $۶\times۶\times۶ = ۲۱۶$ حالت است. حالات مطلوب را پیدا می‌کنیم:

(در بالای هر ۳ عدد، جایگشت اعداد نوشته شده)

$$۵: \underbrace{(۱,۱,۳)}_{۳\text{حالت}}, \underbrace{(۱,۲,۲)}_{۳\text{حالت}}$$

$$۱۰: \underbrace{(۱,۳,۶)}_{۶\text{حالت}}, \underbrace{(۱,۴,۵)}_{۶\text{حالت}}, \underbrace{(۲,۲,۶)}_{۳\text{حالت}}, \underbrace{(۲,۳,۵)}_{۶\text{حالت}}, \underbrace{(۲,۴,۴)}_{۳\text{حالت}}, \underbrace{(۳,۳,۴)}_{۳\text{حالت}}$$

$$۱۵: \underbrace{(۳,۶,۶)}_{۳\text{حالت}}, \underbrace{(۴,۵,۶)}_{۶\text{حالت}}, \underbrace{(۵,۵,۵)}_{۱\text{حالت}}$$

پس ۴۳ حالت داریم و احتمال خواسته شده برابر است با $\frac{۴۳}{۲۱۶}$.

(ریاضی ۱- آمار و احتمال؛ صفحه‌های ۱۴۲ تا ۱۵۱)

۲۰- **گزینهٔ «۲»** *(دانیال ابراهیمی)*

ابتدا ۳ پرتاب از ۵ پرتاب را انتخاب می‌کنیم. در ۴ حالت، این ۳ پرتاب یکسان بوده و ۲ پرتاب دیگر ۳×۳ حالت خواهند داشت.

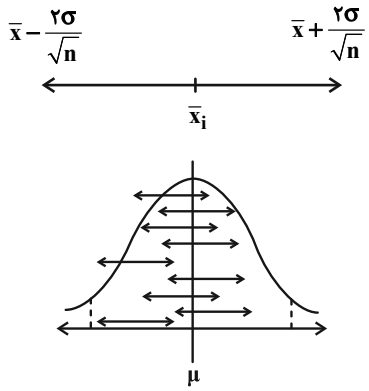
$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{\binom{۵}{۳}\times ۴\times ۳\times ۳}{۴^۵} = \frac{۱۰\times ۴\times ۹}{۴^۵} = \frac{۴۵}{۱۲۸}$$

(ریاضی ۱- آمار و احتمال؛ صفحه‌های ۱۴۲ تا ۱۵۱)

آمار و احتمال

۲۱- **گزینهٔ «۴»** *(فرزاد جوادی)*

اگر نمونه‌گیری را روی یک جامعه تکرار کنیم و میانگین هر نمونه را با $\bar{x}_i$ نشان دهیم به‌طوری که در ۹۵ درصد (یا بیشتر) موارد، پارامتر μ (میانگین جامعه) را قطع می‌کند و فقط ۵ درصد بازه‌هایی به فرم زیر شامل μ نمی‌شوند.



این بازه به بازهٔ اطمینان ۹۵ درصدی معروف است که به صورت $[\bar{x}-\frac{2\sigma}{\sqrt{n}}\ ,\ \bar{x}+\frac{2\sigma}{\sqrt{n}}]$ می‌باشد. طول این بازه برابر است با:

(ابتدای بازه) − (انتهای بازه) = طول بازهٔ اطمینان ۹۵٪

$$=(\bar{x}+\frac{2\sigma}{\sqrt{n}})-(\bar{x}-\frac{2\sigma}{\sqrt{n}})$$

$$\text{طول بازهٔ اطمینان}=\frac{4\sigma}{\sqrt{n}}$$

(آمار و احتمال- آمار استنباطی؛ صفحه‌های ۱۱۵ تا ۱۲۱)

۲۲- **گزینهٔ «۳»** *(امیرحسین ابومحبوب)*

گزاره‌های (پ) و (ت) نادرست‌اند.

گزارهٔ (پ): در نمونه‌گیری خوشه‌ای بهتر است ویژگی مورد بررسی درون خوشه‌ها تفاوت بیشتری داشته باشد.

گزارهٔ (ت): برابری اندازهٔ طبقات از ویژگی‌های نمونه‌گیری سیستماتیک است. در نمونه‌گیری طبقه‌ای، جامعه صرفاً به زیرجامعه‌های مجزا تقسیم می‌شود و از هر طبقه، یک نمونهٔ تصادفی ساده انتخاب می‌گردد.

(آمار و احتمال- آمار استنباطی؛ صفحه‌های ۹۹ تا ۱۰۱)

۲۳- **گزینهٔ «۳»** *(احمدرضا فلاح)*

در یک نمونه دو عضوی به فرم $(a\ ,\ b)$ داریم:

$$\bar{x}=\frac{a+b}{2}\Rightarrow \sigma^2=\frac{(a-\frac{a+b}{2})^2+(b-\frac{a+b}{2})^2}{2}=\frac{(a-b)^2}{4}$$

طبق فرض:

$$\frac{(a-b)^2}{4}=\frac{9}{4}\Rightarrow (a-b)^2=9\Rightarrow |a-b|=3$$

یعنی دو عدد مورد انتخاب باید اختلافشان ۳ واحد باشد همه این دوتایی به فرم زیر هستند.

$$(a\ ,\ b)=(1,\ 4)\ ,\ (2\ ,\ 5)\ ,\ \ldots\ ,\ (7\ ,\ 10)$$

تعداد این دوتایی‌ها ۷ تا است.

(آمار و احتمال- آمار استنباطی؛ صفحه‌های ۱۱۲ تا ۱۱۵)

۲۴- **گزینهٔ «۱»** *(امیرحسین ابومحبوب)*

خط فقر، حداقل درآمدی است که برای زندگی در یک ماه به ازای هر نفر مورد نیاز است. خط فقر برابر است با نصف میانگین درآمد افراد جامعه.

(آمار و احتمال- آمار استنباطی؛ صفحه‌های ۱۰۴، ۱۰۹ و ۱۱۶)

۲۵- **گزینهٔ «۲»** *(مهریار راشدی)*

مجموع نمونه‌های دو عضوی انتخاب شده برابر ۵ و میانگین آن‌ها $\bar{x}=2/5$ است. تعداد کل نمونه‌های دو عضوی برابر با $\binom{6}{2}=15$ است و احتمال آن‌که نمونه‌ای دو عضوی میانگین ۲/۵ را برآورد کند برابر با $0/2=\frac{1}{5}=\frac{3}{15}$ است (زیرا از ۱۵ نمونهٔ ۲ عضوی، میانگین سه نمونهٔ ۲ عضوی برابر با ۲/۵ است.) بنابراین:

$$m-n=2/5-0/2=2/3$$

(آمار و احتمال- آمار استنباطی؛ صفحه‌های ۱۱۲ تا ۱۱۵)

۲۶- **گزینهٔ «۴»** *(سوگند روشنی)*

همهٔ موارد صحیح هستند و در آمار استنباطی از روی آماره‌های مختلف سعی بر تخمین پارامتر جامعه است.

(آمار و احتمال- آمار استنباطی؛ صفحه‌های ۹۹ تا ۱۰۹)

۲۷- **گزینهٔ «۱»** *(سیدمحمدرضا حسینی‌فرد)*

در نمونه‌گیری سامانمند، می‌دانیم شماره‌های انتخاب شده جملات متوالی از دنبالهٔ حسابی هستند پس اگر قدرنسبت دنباله را d در نظر بگیریم $kd = ۴۳ - ۱۳$ یعنی d مقسوم‌علیهی از ۳۰ است و داریم:

$$d = ۲, ۳, ۵, ۶, ۱۰, ۱۵, ۳۰$$

از طرفی اگر $d = ۲, ۵, ۱۰$ آن‌گاه عدد ۳ نیز انتخاب می‌شود که خلاف فرض است. پس d می‌تواند ۳، ۶، ۱۵ یا ۳۰ باشد و فقط به ازای $d = ۳$ عدد ۲۲ نیز انتخاب می‌شود و احتمال برابر $\frac{۱}{۴}$ است.

(آمار و احتمال- آمار استنباطی؛ صفحه‌های ۱۰۰ و ۱۰۱)

۲۸- **گزینهٔ «۴»** *(امیرحسین ابومحبوب)*

میانگین اعداد صحیح از صفر تا N برابر است با:

$$\mu = \frac{۰+۱+۲+\cdots+N}{N+۱} = \frac{\frac{N(N+۱)}{۲}}{N+۱} = \frac{N}{۲}$$

از طرفی میانگین اعداد انتخاب‌شده برابر است با:

$$\bar{x} = \frac{۵+۶+۹+۱۳+۱۴+۱۶}{۶} = ۱۰/۵$$

بنابراین برآورد نقطه‌ای از N به کمک پارامتر میانگین به‌صورت زیر است:

$$\frac{N}{۲} = ۱۰/۵ \Rightarrow N = ۲۱$$

(آمار و احتمال – آمار استنباطی؛ مشابه تمرین ۲ صفحهٔ ۱۱۹)

۲۹- **گزینهٔ «۲»** *(علی ایمانی)*

نفرات انتخاب شده در روش سامانمند تشکیل دنبالهٔ حسابی می‌دهند.

$$\begin{cases} a_۱ = m+۳ \\ a_۲ = ۶m+۴ \\ a_۸ = ۲۰m+۴۲ \end{cases} \Rightarrow d = ۵m+۱ \xrightarrow{\times ۶} ۶d = ۳۰m+۶$$

از طرفی: $a_۸ - a_۲ = ۶d = ۱۴m+۳۸$

$$۳۰m+۶ = ۱۴m+۳۸ \Rightarrow ۱۶m = ۳۲ \Rightarrow m = ۲$$

$$a_۱ = ۵ \ , \ a_۲ = ۱۶ \Rightarrow \text{طول دسته} = ۱۱$$

$$\text{تعداد دسته‌ها} = \frac{۲۳۱}{۱۱} = ۲۱ \Rightarrow a_{۲۱} = ۵+۲۰(۱۱) = ۲۲۵$$

(آمار و احتمال- آمار استنباطی؛ صفحه‌های ۱۰۰ و ۱۰۱)

۳۰- **گزینهٔ «۳»** *(مرتضی فهیم‌علوی)*

میانگین جامعه برابر است با: $\bar{x} = \frac{۱+۲+\ldots+۱۰}{۱۰} = ۵/۵$

بنابراین اگر یک نمونهٔ ۸ تایی میانگین را دقیق برآورد کند، باید میانگین نمونه برابر ۵/۵ باشد، در این‌صورت مجموع اعضای این نمونه برابر است با:

$$۸ \times ۵/۵ = ۴۴$$

و با توجه به اینکه مجموع تمامی اعضای جامعه برابر با $۱+۲+\ldots+۱۰ = ۵۵$ است، می‌توان نتیجه‌گرفت که مجموع دو عضوی که در نمونه نمی‌باشند برابر با ۱۱ است. بنابراین این دو عضو حالات زیر را دارند:

$$\{۱,۱۰\},\{۲,۹\},\{۳,۸\},\{۴,۷\},\{۵,۶\}$$

تعداد کل نمونه‌های ۸ تایی برابر است با: $\binom{۱۰}{۸} = \frac{۱۰!}{۸!۲!} = ۴۵$

بنابراین احتمال اینکه یک نمونهٔ ۸ تایی میانگین جامعه را دقیق برآورد کند، برابر است با: $P(A) = \frac{۵}{۴۵} = \frac{۱}{۹}$

(آمار و احتمال- آمار استنباطی؛ صفحه‌های ۱۱۲ تا ۱۱۴)

هندسه ۲

۳۱- **گزینهٔ «۱»** *(امیرحسین ابومحبوب)*

طبق قضیهٔ سینوس‌ها در مثلث ABC داریم:

$$\frac{b}{\sin\hat{B}} = 2R \Rightarrow b = 2R\sin\hat{B}$$

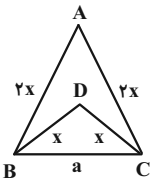
برای به دست آوردن حاصل $\frac{2\tan\hat{B}}{b}$ می‌توان نوشت:

$$\frac{2\tan\hat{B}}{b} = \frac{2\frac{\sin\hat{B}}{\cos\hat{B}}}{2R\sin\hat{B}} = \frac{1}{R\cos\hat{B}}$$

(هندسه ۲- روابط طولی در مثلث؛ صفحه‌های ۶۰ تا ۶۳)

۳۲- **گزینهٔ «۴»** *(افشین خاصه‌خان)*

B را به C وصل می‌کنیم. طبق قضیهٔ کسینوس‌ها:



$$a^2 = x^2 + x^2 - 2x(x).\cos\hat{D} = 4x^2 + 4x^2 - 2(2x)(2x)\cos\hat{A}$$

$$\Rightarrow 2x^2 - 2x^2\cos B\hat{D}C = 8x^2 - 8x^2\cos\hat{A}$$

$$2x^2(1-\cos B\hat{D}C) = 8x^2(1-\cos\hat{A})$$

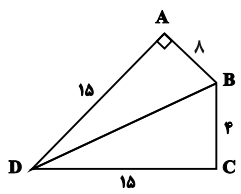
$$\Rightarrow 1-\cos B\hat{D}C = 4-4\cos\hat{A}$$

$$\Rightarrow \cos B\hat{D}C = 4\cos\hat{A} - 3 \Rightarrow \frac{3+\cos B\hat{D}C}{\cos\hat{A}} = 4$$

(هندسه ۲- روابط طولی در مثلث؛ صفحه‌های ۶۴ تا ۶۷)

۳۳- **گزینهٔ «۱»** *(محمد خندان)*

مثلث ABD قائم‌الزاویه است، بنابراین داریم:



$$S_{ABD} = \frac{1}{2}AB\times AD = \frac{1}{2}\times 8\times 15 = 60$$

$$BD^2 = AB^2 + AD^2 = 64 + 225 = 289$$

$$\Rightarrow BD = 17$$

طبق قضیهٔ هرون در مثلث BDC داریم:

$$P = \frac{4+15+17}{2} = 18$$

$$S_{BDC} = \sqrt{18(18-4)(18-17)(18-15)}$$

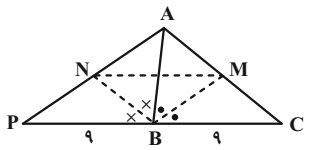
$$= \sqrt{18\times 14\times 1\times 3} = 6\sqrt{21}$$

$$S_{ABCD} = S_{ABD} + S_{BDC} = 60 + 6\sqrt{21} = 6(10+\sqrt{21})$$

(هندسه ۲- روابط طولی در مثلث؛ صفحه‌های ۷۱ و ۷۲)

۳۴- **گزینهٔ «۳»** *(مهرداد ملوندی)*

مطابق شکل BM و BN نیمسازهای زوایای B در دو مثلث $\overset{\Delta}{ABC}$ و $\overset{\Delta}{ABP}$ هستند و داریم:



$$\begin{cases}\frac{AM}{MC} = \frac{AB}{BC} = \frac{7}{9}\\ \frac{AN}{NP} = \frac{AB}{PB} = \frac{7}{9}\end{cases} \Rightarrow \frac{AM}{MC} = \frac{AN}{NP} = \frac{7}{9} \quad (*)$$

طبق رابطهٔ (*) و عکس قضیهٔ تالس نتیجه می‌شود که $MN \parallel BC$. حال طبق قضیهٔ تالس داریم:

$$MN \parallel BC \xrightarrow{\text{تالس}} \frac{MN}{PC} = \frac{AM}{AC} = \frac{7}{16}$$

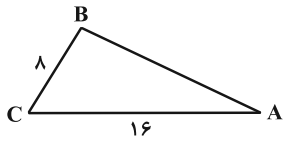
$$\xrightarrow{PC=18} MN = \frac{7\times 18}{16} = \frac{63}{8}$$

توجه: $\frac{AM}{MC} = \frac{7}{9} \xrightarrow{\text{ترکیب در مخرج}} \frac{AM}{AC} = \frac{7}{16}$

(هندسه ۲- روابط طولی در مثلث؛ صفحه‌های ۶۸ تا ۷۰)

۳۵- **گزینهٔ «۴»** *(افشین خاصه‌خان)*

طبق رابطهٔ سینوسی مساحت مثلث داریم:



$$S_{ABC} = \frac{۱}{۲} AC \times BC \times \sin \hat{C}$$

$$\Rightarrow ۳۲\sqrt{۳} = \frac{۱}{۲} \times ۸ \times ۱۶ \times \sin \hat{C} \Rightarrow \sin \hat{C} = \frac{\sqrt{۳}}{۲}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \hat{C} = ۶۰^\circ \\ \hat{C} = ۱۲۰^\circ \end{cases}$$

اگر $\hat{C} = ۱۲۰^\circ$ باشد، آن‌گاه AB بزرگ‌ترین ضلع مثلث می‌شود که خلاف فرض است.

حال طبق قضیه کسینوس‌ها در مثلث ABC داریم:

$$AB^۲ = AC^۲ + BC^۲ - ۲AC \times BC \times \cos \hat{C}$$

$$= ۸^۲ + ۱۶^۲ - ۲ \times ۸ \times ۱۶ \times \frac{۱}{۲} = ۶۴ + ۲۵۶ - ۱۲۸ = ۱۹۲ = ۳ \times ۶۴$$

$$\Rightarrow AB = ۸\sqrt{۳}$$

(هندسه ۲- روابط طولی در مثلث؛ صفحه‌های ۶۴ تا ۶۷ و ۷۲)

۳۶- **گزینهٔ «۳»** *(فرزانه خاکپاش)*

طبق قضیهٔ استوارت در مثلث ABC داریم:

$$AB^۲ \times DC + AC^۲ \times BD = AD^۲ \times BC + BD \times DC \times BC$$

$$\Rightarrow ۴۹ \times ۲x + ۶۴ \times x = ۳۶ \times ۳x + x \times ۲x \times ۳x$$

$$\Rightarrow ۹۸x + ۶۴x = ۱۰۸x + ۶x^۳$$

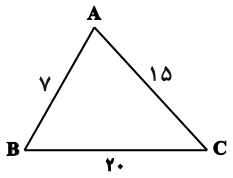
$$\Rightarrow ۶x^۳ - ۵۴x = ۰ \Rightarrow ۶x(x^۲ - ۹) = ۰ \Rightarrow \begin{cases} x = ۰ \text{ غ ق ق} \\ x = ۳ \\ x = -۳ \text{ غ ق ق} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{AB.DC}{۲BD + AC} = \frac{۷ \times ۶}{۶ + ۸} = \frac{۴۲}{۱۴} = ۳$$

(هندسه ۲- روابط طولی در مثلث؛ صفحهٔ ۶۷)

۳۷- **گزینهٔ «۱»** *(امیرحسین ابومحبوب)*

مطابق شکل فرض کنید $a = ۲۰$ ، $b = ۱۵$ و $c = ۷$ باشد. در این صورت طبق قضیهٔ هرون داریم:



$$P = \frac{a+b+c}{۲} = \frac{۷+۱۵+۲۰}{۲} = ۲۱$$

$$S = \sqrt{P(P-a)(P-b)(P-c)}$$

$$= \sqrt{۲۱ \times (۲۱-۷)(۲۱-۱۵)(۲۱-۲۰)} = ۴۲$$

حال طبق رابطهٔ سینوسی مساحت مثلث داریم:

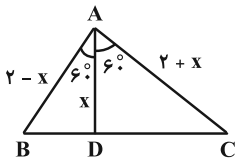
$$S = \frac{۱}{۲} bc . \sin \hat{A}$$

$$\Rightarrow ۴۲ = \frac{۱}{۲} \times ۱۵ \times ۷ \sin \hat{A} \Rightarrow \sin \hat{A} = \frac{۴}{۵}$$

(هندسه ۲- روابط طولی در مثلث؛ صفحه‌های ۷۳ و ۷۴)

۳۸- **گزینهٔ «۱»** *(سرژ یقیازاریان تبریزی)*

در مثلث ABC، پاره‌خط AD نیمساز رأس A است و داریم:



$$AD = \frac{۲bc . \cos \frac{\hat{A}}{۲}}{b+c} \Rightarrow x = \frac{۲(۲+x)(۲-x)\cos ۶۰^\circ}{(۲+x)+(۲-x)}$$

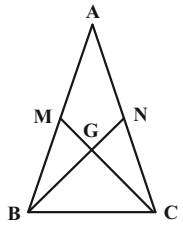
$$\Rightarrow x = \frac{۴-x^۲}{۴} \Rightarrow x^۲ + ۴x - ۴ = ۰ \Rightarrow x = \frac{-۴+۴\sqrt{۲}}{۲} = ۲\sqrt{۲} - ۲$$

دقت داشته باشید که x طول پاره‌خط AD می‌باشد، لذا مقادیر منفی، قابل قبول نیست.

(هندسه ۲- روابط طولی در مثلث؛ صفحه‌های ۶۴، ۷۳ و ۷۴)

۳۹- **گزینهٔ «۲»** *(امیرحسین ابومحبوب)*

مطابق شکل فرض کنید BN و CM میانه‌های وارد بر دو ساق این مثلث باشند. می‌دانیم در هر مثلث متساوی‌الساقین، میانه‌های وارد بر دو ساق مثلث برابر یکدیگرند، پس $BN = CM$. از طرفی طبق قضیهٔ میانه‌ها در مثلث ABC داریم:



$$AC^2+BC^2=\frac{AB^2}{2}+2CM^2 \Rightarrow 4^2+2^2=\frac{4^2}{2}+2CM^2$$

$$\Rightarrow 2CM^2=12 \Rightarrow CM=\sqrt{6}$$

$$\text{محیط } \overset{\Delta}{BMG} = BM+GM+BG$$

$$=BM+\frac{1}{3}CM+\frac{2}{3}BN=BM+\frac{1}{3}CM+\frac{2}{3}CM$$

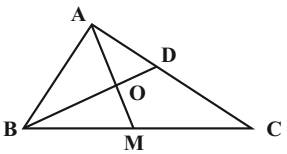
$$=\frac{AB}{2}+CM=2+\sqrt{6}$$

$$\frac{2P_{\overset{\Delta}{BMG}}}{2P_{\overset{\Delta}{ABC}}}=\frac{2+\sqrt{6}}{10}$$

(هندسه ۲- روابط طولی در مثلث؛ صفحهٔ ۶۷)

۴۰- **گزینهٔ «۲»** *(فرزانه فاکپاش)*

طبق قضیهٔ میانه‌ها در مثلث ABC داریم:



$$AB^2+AC^2=2AM^2+\frac{BC^2}{2}$$

$$\Rightarrow 5^2+7^2=2AM^2+\frac{8^2}{2} \Rightarrow AM^2=21 \Rightarrow AM=\sqrt{21}$$

طبق قضیهٔ نیمسازها در مثلث ABM داریم:

$$\frac{OA}{OM}=\frac{AB}{BM} \xrightarrow{\text{ترکیب نسبت در مخرج}} \frac{AO}{AM}=\frac{AB}{AB+BM}$$

$$\Rightarrow \frac{AO}{\sqrt{21}}=\frac{5}{9}$$

$$\Rightarrow AO=\frac{5\sqrt{21}}{9} \Rightarrow OM=\frac{4\sqrt{21}}{9}$$

طبق رابطهٔ طول نیمساز داخلی در مثلث ABM داریم:

$$BO^2=BA\times BM-AO\times OM=5\times 4-\frac{5\sqrt{21}}{9}\times\frac{4\sqrt{21}}{9}$$

$$=20-\frac{20\times 21}{81}=\frac{20\times 81-20\times 21}{81}=\frac{20\times 60}{81}=\frac{400\times 3}{81}$$

$$\Rightarrow BO=\frac{20}{9}\sqrt{3}$$

(هندسه ۲- روابط طولی در مثلث؛ صفحه‌های ۶۷ تا ۷۰)

هندسه ۲- آشنا

۴۱- **گزینهٔ «۲»** *(کتاب آبی)*

با توجه به رابطهٔ سینوس‌ها در مثلث داریم:

$$\frac{a}{\sin\hat{A}}=\frac{b}{\sin\hat{B}} \Rightarrow \frac{a^2}{b^2}=\frac{\sin^2\hat{A}}{\sin^2\hat{B}}$$

$$\frac{\sin^2\hat{A}}{\sin^2\hat{B}}=\frac{\tan\hat{A}}{\tan\hat{B}} \Rightarrow \frac{\sin^2\hat{A}}{\sin^2\hat{B}}=\frac{\frac{\sin\hat{A}}{\cos\hat{A}}}{\frac{\sin\hat{B}}{\cos\hat{B}}}$$

$$\Rightarrow \frac{\sin\hat{A}}{\sin\hat{B}}=\frac{\cos\hat{B}}{\cos\hat{A}} \Rightarrow \sin\hat{A}\times\cos\hat{A}=\sin\hat{B}\times\cos\hat{B}$$

$$\Rightarrow \frac{\sin(2\hat{A})}{2}=\frac{\sin(2\hat{B})}{2} \Rightarrow \sin(2\hat{A})=\sin(2\hat{B})$$

سینوس دو زاویه با هم برابر شده است. این دو زاویه یا با هم برابرند یا مکمل یکدیگرند، پس:

$$\begin{cases} 2\hat{A}=2\hat{B} \Rightarrow \hat{A}=\hat{B} \\ \text{یا} \\ 2\hat{A}+2\hat{B}=180^\circ \Rightarrow \hat{A}+\hat{B}=90^\circ \Rightarrow \hat{C}=90^\circ \end{cases}$$

پس مثلث ABC یا متساوی‌الساقین است و یا این‌که در رأس C قائم‌الزاویه ($\hat{C}=90^\circ$) می‌باشد.

(هندسه ۲- روابط طولی در مثلث؛ صفحه‌های ۶۰ تا ۶۳)

۴۲- **گزینهٔ «۴»** *(کتاب آبی)*

اگر شعاع دایرهٔ محیطی مثلث ABC برابر R باشد، آن‌گاه طبق قضیهٔ سینوس‌ها داریم:

$$\frac{a}{\sin\hat{A}}=\frac{b}{\sin\hat{B}}=\frac{c}{\sin\hat{C}}=2R\Rightarrow\frac{a+b+c}{\sin\hat{A}+\sin\hat{B}+\sin\hat{C}}=2R$$

$$\Rightarrow\frac{2\sqrt{3}}{\sin\hat{A}+\sin\hat{B}+\sin\hat{C}}=2\times1\Rightarrow\sin\hat{A}+\sin\hat{B}+\sin\hat{C}=\sqrt{3}$$

(هندسه ۲- روابط طولی در مثلث؛ صفحه‌های ۶۰ تا ۶۵)

۴۳- **گزینهٔ «۳»** *(کتاب آبی)*

بنا به قضیهٔ کسینوس‌ها داریم:

$$\overset{\Delta}{ADE}: 3^2=2^2+4^2-2\times2\times4\cos A\Rightarrow\cos A=\frac{11}{16}$$

$$\overset{\Delta}{ABC}: x^2=8^2+11^2-2\times8\times11\times\frac{11}{16}\Rightarrow x^2=8^2\Rightarrow x=8$$

(هندسه ۲- روابط طولی در مثلث؛ صفحه‌های ۶۴ تا ۶۷)

۴۴- **گزینهٔ «۴»** *(کتاب آبی)*

اگر در مثلث ABC رابطهٔ میانه‌ها را برای هر یک از میانه‌های m_a، m_b و m_c بنویسیم، خواهیم داشت:

$$\left.\begin{aligned}m_a&=\frac{1}{2}\sqrt{2b^2+2c^2-a^2}\Rightarrow m_a^2=\frac{1}{4}(2b^2+2c^2-a^2)\\ m_b&=\frac{1}{2}\sqrt{2a^2+2c^2-b^2}\Rightarrow m_b^2=\frac{1}{4}(2a^2+2c^2-b^2)\\ m_c&=\frac{1}{2}\sqrt{2b^2+2a^2-c^2}\Rightarrow m_c^2=\frac{1}{4}(2b^2+2a^2-c^2)\end{aligned}\right\}$$

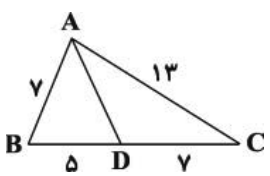
$$\xrightarrow{+}m_a^2+m_b^2+m_c^2=\frac{3}{4}(a^2+b^2+c^2)$$

$$\Rightarrow(4)^2+(5)^2+(7)^2=\frac{3}{4}(a^2+b^2+c^2)$$

$$\Rightarrow a^2+b^2+c^2=\frac{4}{3}(90)=120$$

(هندسه ۲- روابط طولی در مثلث؛ مشابه تمرین ۴ صفحهٔ ۶۷)

۴۵- **گزینهٔ «۲»** *(کتاب آبی)*



طبق قضیهٔ استوارت داریم:

$$AB^2\times CD+AC^2\times BD=BC(AD^2+BD\times CD)$$

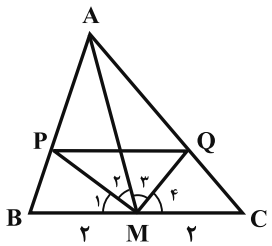
$$\Rightarrow49\times7+169\times5=12(AD^2+5\times7)$$

$$\Rightarrow1188=12(AD^2+35)\Rightarrow99=AD^2+35$$

$$\Rightarrow AD^2=64\Rightarrow AD=8$$

(هندسه ۲- روابط طولی در مثلث؛ مشابه تمرین ۵ صفحهٔ ۶۷)

۴۶- **گزینهٔ «۲»** *(کتاب آبی)*



با توجه به قضیهٔ نیمسازهای زوایای داخلی در دو مثلث AMB و AMC داریم:

$$\left.\begin{aligned}\overset{\Delta}{AMB}:\frac{AP}{BP}=\frac{AM}{BM}=\frac{6}{2}=3\\ \overset{\Delta}{AMC}:\frac{AQ}{QC}=\frac{AM}{CM}=\frac{6}{2}=3\end{aligned}\right\}\Rightarrow\frac{AP}{BP}=\frac{AQ}{QC}$$

بنابراین با توجه به عکس قضیهٔ تالس نتیجه می‌گیریم که $PQ\parallel BC$ است.

در نتیجه داریم:

$$\frac{PQ}{BC}=\frac{AP}{AB}=\frac{AP}{AP+BP}=\frac{AM}{AM+BM}=\frac{3}{4}$$

$$\Rightarrow PQ=\frac{3}{4}BC=\frac{3}{4}\times4=3$$

حال با توجه به این‌که MP و MQ نیمساز زوایای داخلی در دو مثلث AMB و AMC هستند، می‌توان نوشت:

$$\hat{M}_1+\hat{M}_2+\hat{M}_3+\hat{M}_4=180^\circ\xrightarrow[\hat{M}_3=\hat{M}_4]{\hat{M}_1=\hat{M}_2}$$

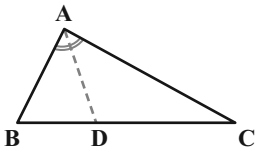
$$\Rightarrow\hat{M}_2+\hat{M}_3=90^\circ$$

پس مثلث PMQ قائم‌الزاویه است و طبق قضیهٔ فیثاغورس داریم:

$$MP^2+MQ^2=PQ^2=3^2=9$$

(هندسه ۲- روابط طولی در مثلث؛ مشابه تمرین ۱ صفحهٔ ۷۰)

۴۷- **گزینهٔ «۲»** *(کتاب آبی)*



با توجه به رابطهٔ محاسبهٔ طول نیمساز داریم:

$$AD=\frac{۲bc\cdot\cos\frac{\hat{A}}{۲}}{b+c}=۲\cos\frac{۹۰^\circ}{۲}\left(\frac{AB\times AC}{AB+AC}\right)$$

حال با توجه به فرض مسئله داریم:

$$\frac{۱}{AC}+\frac{۱}{AB}=۲\Rightarrow\frac{AB+AC}{AB\times AC}=۲$$

$$\Rightarrow\frac{AB\times AC}{AB+AC}=\frac{۱}{۲}$$

$$\Rightarrow AD=۲\cos۴۵^\circ\times\frac{۱}{۲}=\cos۴۵^\circ=\frac{\sqrt{۲}}{۲}$$

(هندسه ۲- روابط طولی در مثلث؛ مشابه تمرین ۵ صفحهٔ ۷۴)

۴۸- **گزینهٔ «۱»** *(کتاب آبی)*

اگر h_a، h_b و h_c طول سه ارتفاع و r شعاع دایرهٔ محاطی داخلی این مثلث باشد، داریم:

$$\frac{۱}{h_a}+\frac{۱}{h_b}+\frac{۱}{h_c}=\frac{۱}{r}$$

حال طبق رابطهٔ $r=\frac{S}{P}$ و قضیهٔ هرون می‌توان نوشت:

$$\frac{۱}{h_a}+\frac{۱}{h_b}+\frac{۱}{h_c}=\frac{P}{S}=\frac{P}{\sqrt{P(P-a)(P-b)(P-c)}}$$

$$=\frac{۲۲}{\sqrt{۲۲(۲۲-۱۱)(۲۲-۱۳)(۲۲-۲۰)}}=\frac{۲۲}{۶۶}=\frac{۱}{۳}$$

(هندسه ۲- روابط طولی در مثلث؛ صفحه‌های ۷۱ و ۷۲)

۴۹- **گزینهٔ «۴»** *(کتاب آبی)*

مساحت چهارضلعی $ABCD$ برابر با تفاضل مساحت دو مثلث ABD و BCD است. حال با توجه به قضیهٔ هرون داریم:

$$P_{ABD}=\frac{AB+BD+AD}{۲}=\frac{۷+۱۵+۲۰}{۲}=۲۱$$

$$\Rightarrow S_{ABD}=\sqrt{۲۱(۲۱-۷)(۲۱-۱۵)(۲۱-۲۰)}=۴۲$$

$$P_{BCD}=\frac{BC+CD+BD}{۲}=\frac{۴+۱۳+۱۵}{۲}=۱۶$$

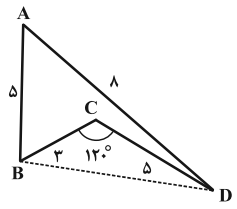
$$\Rightarrow S_{BCD}=\sqrt{۱۶(۱۶-۴)(۱۶-۱۳)(۱۶-۱۵)}=۲۴$$

$$\Rightarrow S_{ABCD}=S_{ABD}-S_{BCD}=۴۲-۲۴=۱۸$$

(هندسه ۲- روابط طولی در مثلث؛ صفحه‌های ۷۱ و ۷۲)

۵۰- **گزینهٔ «۲»** *(کتاب آبی)*

کافی است از B به D وصل کنیم و سپس قضیهٔ کسینوس‌ها را در مثلث BCD به‌کار ببریم:



$$\overset{\Delta}{BCD}: DB^۲=BC^۲+CD^۲-۲BC\times CD\times\cos۱۲۰^\circ$$

$$=۳^۲+۵^۲-۲\times۳\times۵\left(-\frac{۱}{۲}\right)=۴۹\Rightarrow BD=۷$$

اکنون قضیهٔ کسینوس‌ها را در مثلث ABD به‌کار می‌بریم:

$$\overset{\Delta}{ABD}: BD^۲=AB^۲+AD^۲-۲AB\times AD\times\cos\hat{A}$$

$$\Rightarrow ۴۹=۲۵+۶۴-۲\times۵\times۸\times\cos\hat{A}$$

$$\Rightarrow\cos\hat{A}=\frac{۱}{۲}\Rightarrow\hat{A}=۶۰^\circ$$

حال مساحت چهارضلعی $ABCD$ را به‌دست می‌آوریم:

$$S_{ABCD}=S_{\overset{\Delta}{ABD}}-S_{\overset{\Delta}{BCD}}$$

$$=\frac{۱}{۲}AB\times AD\times\sin\hat{A}-\frac{۱}{۲}\times BC\times CD\times\sin\hat{C}$$

$$=\frac{۱}{۲}\times۵\times۸\times\sin۶۰^\circ-\frac{۱}{۲}\times۳\times۵\times\sin۱۲۰^\circ$$

$$=\frac{۲۵\sqrt{۳}}{۴}=۶/۲۵\sqrt{۳}$$

(هندسه ۲- روابط طولی در مثلث؛ مشابه تمرین ۷ صفحهٔ ۷۴)

حسابان ۲

۵۱- **گزینهٔ «۲»** *(محمدعلی جلالی)*

ابتدا دامنهٔ تابع $f(x)$ را مشخص می‌کنیم:

$$D_f = (0,1]$$

$$f(x) = x\sqrt{\frac{1-x}{x}} = \sqrt{x^2 \times \frac{(1-x)}{x}} = \sqrt{x(1-x)} = \sqrt{x-x^2}$$

تابع $y = x - x^2$ روی بازهٔ $[0, \frac{1}{2})$ اکیداً صعودی و روی بازهٔ $[\frac{1}{2}, 1]$ اکیداً نزولی است. حال از آنجا که تابع $y = \sqrt{x}$ روی دامنه‌اش اکیداً صعودی است و نتیجه می‌گیریم تابع f نیز روی بازهٔ $[0, \frac{1}{2})$ اکیداً صعودی و روی بازهٔ $[\frac{1}{2}, 1]$ اکیداً نزولی است. پس تابع f ابتدا صعودی سپس نزولی است.

(حسابان ۲- تابع؛ صفحه‌های ۱۵ تا ۱۸)

۵۲- **گزینهٔ «۱»** *(بهزاد محرمی)*

ابتدا وارون تابع $f(x)$ را به‌دست می‌آوریم:

$$y = f(x) = x^3 - 6x^2 + 12x - 5$$

$$y = (x-2)^3 + 3 \Rightarrow y - 3 = (x-2)^3 \Rightarrow \sqrt[3]{y-3} = x - 2$$

$$\Rightarrow x = \sqrt[3]{y-3} + 2 \Rightarrow f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x-3} + 2$$

$$f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x+a} - b = \sqrt[3]{x-3} + 2$$

$$\begin{cases} a = -3 \\ b = -2 \end{cases}$$

برای منطبق شدن تابع $f^{-1}(x)$ بر $\sqrt[3]{x}$، باید تابع $f^{-1}(x)$، ۳ واحد در جهت منفی محور xها و ۲ واحد نیز در جهت منفی محور yها انتقال یابد، یعنی:

$$\begin{matrix} x \to x+3 \\ y \to y+2 \end{matrix} \Rightarrow y = (\sqrt[3]{(x+3)-3} + 2) - 2 = \sqrt[3]{x}$$

(حسابان ۲- تابع؛ صفحه‌های ۱ تا ۱۴)

۵۳- **گزینهٔ «۱»** *(محمدحسن سلامی‌حسینی)*

$$R = f(-2) = -8 + 8 + 6 + a = a + 6$$

$$f(x) = (x+2)g(x) + (a+6) \ , \ f(-1) = g(-1) \qquad (1)$$

پس:

$$f(-1) = (-1+2)g(-1) + a + 6 \Rightarrow f(-1) = g(-1) + a + 6 \xrightarrow{(1)} a + 6 = 0$$

$$\Rightarrow a = -6 \to f(\frac{a}{3}) = f(-2) = -8 + 8 + 6 - 6 = 0$$

(حسابان ۲- تابع؛ صفحه‌های ۱۸ و ۱۹)

۵۴- **گزینهٔ «۳»** *(رضا سیدنیفی)*

ابتدا تابع داده شده را ساده می‌کنیم:

$$y = a\sin(b\pi x - \pi) - 1 = -a\sin(b\pi x) - 1$$

با توجه به آن‌که تابع حول $x = 0$ صعودی است، پس:

$$(-a)(b) > 0 \Rightarrow ab < 0$$

حداقل مقدار تابع برابر با -3 است، بنابراین:

$$-|a| - 1 = -3 \Rightarrow |a| = 2$$

می‌توانیم فرض کنیم a منفی و b مثبت است. پس $a = -2$ و ضابطهٔ تابع به شکل زیر می‌شود:

$$y = 2\sin(b\pi x) - 1$$

می‌دانیم که تابع sin در $2k\pi + \frac{\pi}{2}$ حداکثر می‌شود. نمودار داده شده در $x = 4$ برای دومین بار حداکثر می‌شود. پس:

$$b\pi \times 4 = 2\pi + \frac{\pi}{2} \Rightarrow b = \frac{1}{2} + \frac{1}{8} = \frac{5}{8}$$

$$\frac{a}{b} = \frac{-2}{\frac{5}{8}} = -\frac{16}{5}$$

(حسابان ۲- مثلثات؛ صفحه‌های ۲۴ تا ۲۹)

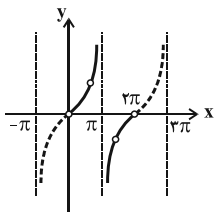
۵۵- **گزینهٔ «۱»** *(حبیب شفیعی)*

ابتدا ضابطهٔ تابع را ساده‌تر می‌کنیم:

$$y = \frac{1}{\sin x} - \frac{1}{\tan x} = \frac{1}{\sin x} - \frac{\cos x}{\sin x} = \frac{1-\cos x}{\sin x} = \frac{2\sin^2 \frac{x}{2}}{2\sin \frac{x}{2}\cos \frac{x}{2}}$$

$$= \frac{\sin\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}} = \tan\frac{x}{2} \; ; \; x \neq \frac{k\pi}{2} \quad (k \in \mathbb{Z})$$

دورهٔ تناوب این تابع برابر است با $T = \frac{\pi}{\left|\frac{1}{2}\right|} = 2\pi$، پس کافی است نمودار تابع را در بازهٔ $(0, 2\pi)$ رسم کنیم. نمودار $y = \tan\frac{x}{2}$ از انبساط افقی نمودار $y = \tan x$ در راستای محور طول‌ها با ضریب ۲ حاصل می‌شود.



(حسابان ۲- مثلثات؛ صفحه‌های ۳۰ تا ۳۲)

۵۶- **گزینهٔ «۱»** *(علی‌اکبر علیزاده)*

$$\tan(2\alpha) = \frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha} = \frac{5}{1-\frac{25}{4}} = -\frac{20}{21}$$

$$\Rightarrow \tan(3\alpha) = \tan(2\alpha+\alpha) = \frac{\tan 2\alpha + \tan\alpha}{1-\tan 2\alpha\tan\alpha}$$

$$= \frac{-\frac{20}{21}+\frac{5}{2}}{1-(-\frac{20}{21}\times\frac{5}{2})} = \frac{\frac{-40+105}{42}}{\frac{142}{42}} = \frac{65}{142}$$

نکته:

$$\tan 3\alpha = \frac{3\tan\alpha - \tan^3\alpha}{1-3\tan^2\alpha}$$

(حسابان ۲- مثلثات؛ صفحهٔ ۴۲)

۵۷- **گزینهٔ «۴»** *(سعید جعفری)*

$$\tan 2x = \cot\left(\frac{\pi}{3}+3x\right) = \tan\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{3}-3x\right)$$

$$\Rightarrow \tan 2x = \tan\left(\frac{\pi}{6}-3x\right)$$

$$\Rightarrow 2x = k\pi + \frac{\pi}{6} - 3x \Rightarrow 5x = k\pi + \frac{\pi}{6} \Rightarrow x = \frac{6k+1}{30}\pi$$

(حسابان ۲- مثلثات؛ صفحه‌های ۳۵ تا ۴۴)

۵۸- **گزینهٔ «۴»** *(سراسری تجربی ۹۲)*

ابتدا توجه کنید که:

$$\sin^4 x - \cos^4 x = (\sin^2 x - \cos^2 x)\underbrace{(\sin^2 x + \cos^2 x)}_{1}$$

$$= -(\cos^2 x - \sin^2 x) = -\cos 2x$$

بنابراین معادلهٔ مفروض سؤال را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$-\cos 2x = \sin^2\frac{5\pi}{4} \Rightarrow -\cos 2x = (-\frac{1}{\sqrt{2}})^2$$

$$\Rightarrow \cos 2x = -\frac{1}{2} \Rightarrow \cos 2x = \cos\frac{2\pi}{3} \Rightarrow 2x = 2k\pi \pm \frac{2\pi}{3}$$

$$\Rightarrow x = k\pi \pm \frac{\pi}{3}$$

نکته: $x = \frac{4\pi}{3}$ در معادله صدق می‌کند، پس گزینهٔ «۴» درست است.

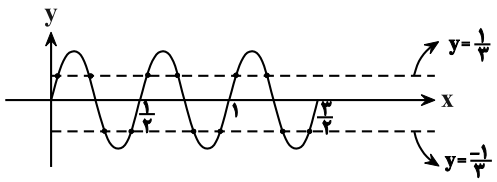
(حسابان ۲- مثلثات؛ صفحه‌های ۳۵ تا ۴۴)

۵۹- **گزینهٔ «۳»** *(مهرداد استقلالیان)*

$$\cos(\pi\sin(4\pi x)) = \cos\frac{\pi}{3} \xrightarrow{k\in\mathbb{Z}} \pi\sin(4\pi x) = 2k\pi \pm \frac{\pi}{3}$$

$$\Rightarrow \sin 4\pi x = 2k \pm \frac{1}{3} \xrightarrow[\text{فقط } k=0]{-1\le\sin\alpha\le 1} \sin 4\pi x = \pm\frac{1}{3}$$

$$y = \sin 4\pi x, T = \frac{2\pi}{|4\pi|} = \frac{1}{2}$$



(حسابان ۲- مثلثات؛ صفحه‌های ۳۵ تا ۴۴)

۶۰- **گزینهٔ «۲»** *(سروش موئینی)*

دو حالت داریم:

$\sin 3x = -1$		$\sin 3x = 1$
$\cos 4x = -1$	یا	$\cos 4x = 1$
$\begin{cases} 3x = 2k\pi - \frac{\pi}{2} \\ 4x = 2k\pi + \pi \end{cases}$		$\begin{cases} 3x = 2k\pi + \frac{\pi}{2} \\ 4x = 2k\pi \end{cases}$
$\begin{cases} x = (4k-1)\frac{\pi}{6} \\ x = (2k+1)\frac{\pi}{4} \end{cases}$		$\begin{cases} x = (4k+1)\frac{\pi}{6} \\ x = \frac{k\pi}{2} \end{cases}$

$\frac{9\pi}{6} = \frac{3\pi}{2}$ مشترک — مشترک ندارد

(حسابان ۲- مثلثات؛ صفحه‌های ۳۵ تا ۴۴)

هندسه ۳

۶۱- **گزینهٔ «۲»** *(امیرحسین ابومحبوب)*

$$A=\begin{bmatrix}x & 1\\ 2 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0\\ 1 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & x\\ -1 & y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x+1 & -1\\ 1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & x\\ -1 & y\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}x+2 & x^2+x-y\\ 0 & x+y\end{bmatrix}$$

ماتریس A اسکالر است، بنابراین درایه‌های غیرواقع بر قطر اصلی آن برابر صفر هستند و درایه‌های واقع بر قطر اصلی برابر یکدیگرند.

$$x+2=x+y\Rightarrow y=2$$

$$x^2+x-y=0\xrightarrow{y=2}x^2+x-2=0\Rightarrow(x+2)(x-1)=0$$

$$\Rightarrow\begin{cases}x=-2 \text{ غ‌ق‌ق}\\ x=1\end{cases}\Rightarrow 3x-y=3-2=1$$

به ازای $x=-2$، درایه های واقع بر قطر اصلی A نیز برابر صفر می‌شوند، پس این مقدار با توجه به فرض سؤال، قابل قبول نیست.

(هندسه ۳- ماتریس و کاربردها؛ صفحه‌های ۱۲، ۱۷ تا ۲۱)

۶۲- **گزینهٔ «۲»** *(علی فخلی)*

$$A^2=\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ \frac{1}{2} & 1 & \frac{3}{2}\\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ \frac{1}{2} & 1 & \frac{3}{2}\\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3 & 6 & 9\\ \frac{3}{2} & 3 & \frac{9}{2}\\ 1 & 2 & 3\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow A^2=3A\Rightarrow A^3=3A^2=3^2A\Rightarrow\ldots\Rightarrow A^{1403}=3^{1402}A$$

(هندسه ۳- ماتریس و کاربردها؛ صفحه‌های ۱۷ تا ۲۱)

۶۳- **گزینهٔ «۴»** *(کیوان دارابی)*

$$\begin{cases}3A+2B=\begin{bmatrix}5 & 4\\ 7 & 14\end{bmatrix}\xrightarrow{\times 3}9A+6B=\begin{bmatrix}15 & 12\\ 21 & 42\end{bmatrix}\\ 2A-3B=\begin{bmatrix}-1 & 7\\ 9 & 5\end{bmatrix}\xrightarrow{\times 2}4A-6B=\begin{bmatrix}-2 & 14\\ 18 & 10\end{bmatrix}\end{cases}$$

$$\Rightarrow 13A=\begin{bmatrix}13 & 26\\ 39 & 52\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow A=\frac{1}{13}\begin{bmatrix}13 & 26\\ 39 & 52\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{bmatrix}$$

بنابراین:

$$\left.\begin{matrix}A \text{ مجموع درایه‌های قطر اصلی}=1+4=5\\ A \text{ مجموع درایه‌های قطر فرعی}=2+3=5\end{matrix}\right\}$$

$$\Rightarrow 1=\text{نسبت خواسته شده}$$

(هندسه ۳- ماتریس و کاربردها؛ صفحه‌های ۱۳ تا ۱۶)

۶۴- **گزینهٔ «۴»** *(علی ایمانی)*

با توجه به رابطهٔ داده شده، A لزوماً یک ماتریس 3×1 است و در نتیجه داریم:

$$\begin{bmatrix}1\\ 2\\ 3\end{bmatrix}A=\begin{bmatrix}2 & 1 & 3\\ a & b & c\\ d & e & f\end{bmatrix}\Rightarrow\begin{bmatrix}1\\ 2\\ 3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x & y & z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2 & 1 & 3\\ a & b & c\\ d & e & f\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow\begin{bmatrix}x & y & z\\ 2x & 2y & 2z\\ 3x & 3y & 3z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2 & 1 & 3\\ 4 & 2 & 6\\ 6 & 3 & 9\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow a-e+f=4-3+9=10$$

(هندسه ۳- ماتریس و کاربردها؛ صفحه‌های ۱۷ تا ۲۱)

۶۵- **گزینهٔ «۱»** *(افشین خاصه‌خان)*

طبق دستور ساروس برای محاسبهٔ دترمینان ماتریس‌های 3×3 داریم:

$$|A|=(2+0-3b+3)-(2+0+3a)=0$$

$$\Rightarrow -3a-3b=-3\Rightarrow a+b=1$$

(هندسه ۳- ماتریس و کاربردها؛ صفحه‌های ۲۷ تا ۲۹)

۶۶- **گزینهٔ «۳»** *(محمد کریمی)*

$$|A|=3\times 2-(-1)\times 2=8$$

بنابراین رابطهٔ ماتریسی به صورت زیر در می‌آید:

$$\begin{bmatrix}-1 & 0\\ 1 & 2\end{bmatrix}=X\begin{bmatrix}8 & -8\\ 0 & 2\end{bmatrix}$$

کافی است وارون ماتریس $\begin{bmatrix}8 & -8\\ 0 & 2\end{bmatrix}$ را از سمت راست در طرفین رابطه ضرب کنیم.

$$\begin{bmatrix}8 & -8\\ 0 & 2\end{bmatrix}^{-1}=\frac{1}{16}\begin{bmatrix}2 & 8\\ 0 & 8\end{bmatrix}$$

$$\frac{1}{16}\begin{bmatrix}-1 & 0\\ 1 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & 8\\ 0 & 8\end{bmatrix}=X\Rightarrow X=\frac{1}{16}\begin{bmatrix}-2 & -8\\ 2 & 24\end{bmatrix}$$

بنابراین مجموع درایه‌های X برابر است با:

$$\frac{1}{16}\big((-2)+(-8)+2+24\big)=\frac{16}{16}=1$$

(هندسه ۳- ماتریس و کاربردها؛ صفحه‌های ۲۲ تا ۲۵)

۶۷- **گزینهٔ «۴»** (محمد کریمی)

از طرفین رابطهٔ داده شده دترمینان می‌گیریم:

$$2A^{-1}=\begin{bmatrix}|A| & 3\\ -1 & 1\end{bmatrix}\Rightarrow|2A^{-1}|=\begin{vmatrix}|A| & 3\\ -1 & 1\end{vmatrix}$$

$$\Rightarrow 2^2\times|A^{-1}|=|A|+3\xrightarrow{|A^{-1}|=\frac{1}{|A|}}|A|^2+3|A|-4=0$$

$$\Rightarrow (|A|+4)(|A|-1)=0$$

$$\xrightarrow{|A|<0}|A|=-4$$

$$\Rightarrow A^{-1}=\begin{bmatrix}-2 & \frac{3}{2}\\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow (A^{-1})^{-1}=\frac{1}{-\frac{1}{4}}\begin{bmatrix}\frac{1}{2} & -\frac{3}{2}\\ \frac{1}{2} & -2\end{bmatrix}\Rightarrow A=\begin{bmatrix}-2 & 6\\ -2 & 8\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow A+3I=\begin{bmatrix}-2 & 6\\ -2 & 8\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}3 & 0\\ 0 & 3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 6\\ -2 & 11\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow|A+3I|=11-(-12)=23$$

(هندسه ۳- ماتریس و کاربردها؛ صفحه‌های ۲۲ تا ۳۱)

۶۸- **گزینهٔ «۴»** (امیر وفائی)

$$\frac{3}{2}A=3I-6A^{-1}\xrightarrow{\times\frac{2}{3}}A=2I-4A^{-1}$$

$$\xrightarrow{\times A}A^2=2A-4I=2(2I-4A^{-1})-4I$$

$$=4I-8A^{-1}-4I$$

$$\Rightarrow A^2=-8A^{-1}\xrightarrow{\times A}A^3=-8I\Rightarrow|A^3|=|-8I|$$

$$\Rightarrow|A|^3=(-8)^3|I|=(-8)^3\times1=(-8)^3\Rightarrow|A|=-8$$

(هندسه ۳- ماتریس و کاربردها؛ صفحه‌های ۲۲ و ۲۷ تا ۳۱)

۶۹- **گزینهٔ «۱»** (امیرحسین ابومحبوب)

فرض کنید $B=\begin{bmatrix}2 & 3\\ -1 & 1\end{bmatrix}$، $C=\begin{bmatrix}2 & 1\\ -5 & -2\end{bmatrix}$ و $D=\begin{bmatrix}5 & 3\\ -10 & -4\end{bmatrix}$ باشد. برای حل معادلهٔ ماتریسی $BAC=D$، کافی است طرفین رابطه را از سمت چپ در وارون ماتریس B و از سمت راست در وارون ماتریس C ضرب کنیم. در این صورت داریم:

$$B^{-1}(BAC)C^{-1}=B^{-1}DC^{-1}\Rightarrow\underbrace{(BB^{-1})}_{I}A\underbrace{(CC^{-1})}_{I}$$

$$=B^{-1}DC^{-1}\Rightarrow A=B^{-1}DC^{-1}$$

پس ابتدا وارون ماتریس‌های B و C را به دست می‌آوریم:

$$B=\begin{bmatrix}2 & 3\\ -1 & 1\end{bmatrix}\Rightarrow B^{-1}=\frac{1}{5}\begin{bmatrix}1 & -3\\ 1 & 2\end{bmatrix}$$

$$C=\begin{bmatrix}2 & 1\\ -5 & -2\end{bmatrix}\Rightarrow C^{-1}=\frac{1}{1}\begin{bmatrix}-2 & -1\\ 5 & 2\end{bmatrix}$$

$$A=B^{-1}DC^{-1}=\frac{1}{5}\begin{bmatrix}1 & -3\\ 1 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}5 & 3\\ -10 & -4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-2 & -1\\ 5 & 2\end{bmatrix}$$

$$=\frac{1}{5}\begin{bmatrix}35 & 15\\ -15 & -5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-2 & -1\\ 5 & 2\end{bmatrix}=\frac{1}{5}\begin{bmatrix}5 & -5\\ 5 & 5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & -1\\ 1 & 1\end{bmatrix}$$

(هندسه ۳- ماتریس و کاربردها؛ صفحه‌های ۱۷ تا ۲۵)

۷۰- **گزینهٔ «۲»** (سرژ یقیازاریان‌تبریزی)

در دستگاه $\begin{cases}ax+by=2\\ cx+dy=-1\end{cases}$، ماتریس ضرایب $A=\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}$ است.

طبق فرض $A^{-1}=\begin{bmatrix}0 & -1\\ 2 & 1\end{bmatrix}$، پس می‌توان نوشت:

$$A=(A^{-1})^{-1}=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}1 & 1\\ -2 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\\ -1 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}\Rightarrow\begin{cases}a=\frac{1}{2}\\ c=-1\end{cases}$$

حال جواب‌های این دستگاه را به دست می‌آوریم. برای حل دستگاه $AX=B$، طرفین را از چپ در A^{-1} ضرب می‌کنیم:

$$AX=B\xrightarrow{\text{از چپ در } A^{-1}\text{ ضرب می‌کنیم}}X=A^{-1}B$$

$$\Rightarrow\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & -1\\ 2 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2\\ -1\end{bmatrix}\Rightarrow\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\ 3\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow ax+cy=(\frac{1}{2})(1)+(-1)(3)=\frac{1}{2}-3=-\frac{5}{2}$$

(هندسه ۳- ماتریس و کاربردها؛ صفحه‌های ۲۳ تا ۲۵)

هندسه ۱

۷۱- **گزینهٔ «۳»** *(افشین خاصه‌خان)*

یال‌های متقاطع با AB عبارتند از AD، AE، BC و BF، پس $m = ۴$ است.

یال‌های موازی با AB عبارتند از DC، EF، HG، پس $n = ۳$ است.

یال‌های متنافر با AB عبارتند از DH، CG، EH و FG، پس $p = ۴$ است.

بنابراین داریم: $۲m - n + p = ۲(۴) - ۳ + ۴ = ۹$

(هندسه ۱- تجسم فضایی؛ صفحه‌های ۷۸ تا ۸۱)

۷۲- **گزینهٔ «۲»** *(محمد خندان)*

فقط عبارت (الف) نادرست، زیرا دو صفحهٔ عمود بر یک صفحه، لزوماً با یکدیگر موازی نیستند.

(هندسه ۱- تجسم فضایی؛ صفحه‌های ۸۳ و ۸۶)

۷۳- **گزینهٔ «۲»** *(فرشاد صدیقی‌فر)*

هر منشور مثلث‌القاعده دارای سه وجه جانبی و دو قاعده است. از هر منشور، سه وجه جانبی قابل رؤیت است و فقط برای بالاترین منشور، وجه بالایی را می‌توان دید، پس در مجموع $(۶ \times ۳) + ۱ = ۱۹$ وجه و در نتیجه ۱۹ عدد یک قابل مشاهده است.

(هندسه ۱- تجسم فضایی؛ مشابه تمرین ۴ صفحهٔ ۹۱)

۷۴- **گزینهٔ «۲»** *(رضا عباسی‌اصل)*

در صفحه، اگر خطی یکی از دو خط موازی را قطع کند دیگری را هم قطع می‌کند اما در فضا، اگر خطی یکی از دو خط موازی را قطع کند الزاماً دیگری را قطع نمی‌کند. پس گزینهٔ «۱» صحیح نیست.

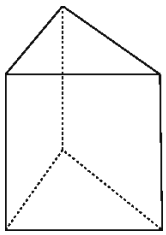
گزینهٔ «۲» درست است زیرا اگر از نقطه‌ای خارج یک صفحه، خطی بر آن صفحه عمود رسم کنیم، هر صفحهٔ شامل این خط، بر صفحهٔ مفروض عمود است.

گزینهٔ «۳» الزاماً درست نیست. اگر خطی با یکی از دو خط متنافر، موازی باشد، می‌تواند با دیگری متقاطع یا متنافر باشد.

گزینهٔ «۴» درست نیست به عنوان مثال نقض فرض کنید که خط d فصل مشترک سه صفحه دوبه‌دو متقاطع $P_۱$، $P_۲$ و $P_۳$ باشد. در این صورت فصل مشترک $P_۳$ با $P_۱$ و $P_۲$ همان خط d است نه دو خط متقاطع.

(هندسه ۱- تجسم فضایی؛ صفحه‌های ۷۸ تا ۸۲)

۷۵- **گزینهٔ «۳»** *(رضا عباسی‌اصل)*

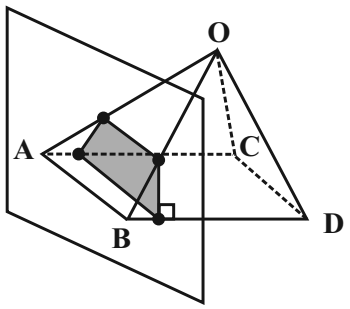


گزینهٔ «۳»، همواره برقرار نیست. سه وجه جانبی منشور قائم مقابل دوبه‌دو متقاطع‌اند ولی نقطهٔ مشترک ندارند. سایر گزینه‌ها همواره صحیح هستند.

(هندسه ۱- تجسم فضایی؛ صفحه‌های ۷۹ تا ۸۲)

۷۶- **گزینهٔ «۴»** *(محمد خندان)*

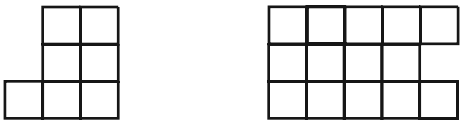
اگر صفحهٔ P بر قاعدهٔ هرم عمود باشد، ولی از نقطهٔ O (رأس هرم) عبور نکند، آن‌گاه سطح مقطع حاصل از برخورد صفحهٔ P با این هرم، یک ذوزنقه (ذوزنقهٔ سایه خورده در شکل) است.



(هندسه ۱- تجسم فضایی؛ تمرین ۲ (ج) صفحهٔ ۹۴)

۷۷- **گزینهٔ «۴»** *(سرژ یقیازاریان‌تبریزی)*

تصویر نمای بالا و رو به روی این سازه به صورت شکل زیر است:



نمای روبه‌رو

نمای راست

اگر مساحت هر مربع را با S نمایش دهیم، آنگاه داریم:

$$\frac{\text{مساحت تصویر نمای راست}}{\text{مساحت تصویر نمای روبه‌رو}} = \frac{۷S}{۱۴S} = \frac{۱}{۲}$$

(هندسه ۱- تجسم فضایی؛ صفحه‌های ۸۷ تا ۹۱)

۷۸- **گزینهٔ «۴»** *(مهدی نیک‌زاد)*

حجم حاصل از دوران شکل صورت سؤال، برابر اختلاف حجم مخروط حاصل از دوران مثلث قائم‌الزاویه و حجم نیمکره حاصل از دوران ربع دایره است.

بنابراین داریم:

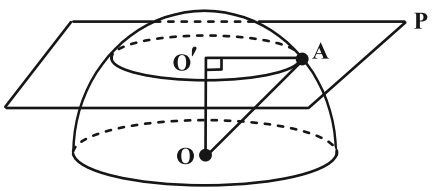
$$\text{حجم مخروط} = \frac{۱}{۳}\pi r^۲ h = \frac{۱}{۳}\pi \times (۶)^۲ \times ۸ = ۹۶\pi$$

$$\text{حجم نیمکره} = \frac{۱}{۲}(\frac{۴}{۳}\pi r^۳) = \frac{۱}{۲}\times\frac{۴}{۳}\pi(۳)^۳ = ۱۸\pi$$

$$\text{حجم شکل حاصل} = ۹۶\pi - ۱۸\pi = ۷۸\pi$$

(هندسه ۱- تجسم فضایی؛ صفحه‌های ۹۵ و ۹۶)

۷۹- **گزینهٔ «۳»** *(سرژ یقیازاریان‌تبریزی)*



سطح مقطع حاصل از برخورد صفحه P و نیم کره، دایره‌ای به شعاع r است.

طبق قضیه فیثاغورس در مثلث قائم الزاویه $OO'A$ داریم:

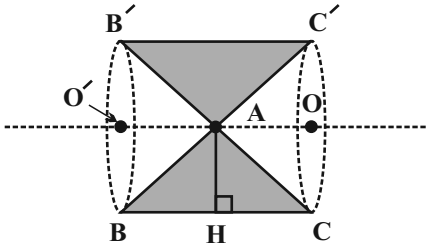
$$OA^۲ = OO'^۲ + O'A^۲ \Rightarrow ۸^۲ = ۶^۲ + r^۲$$
$$\Rightarrow r^۲ = ۶۴ - ۳۶ = ۲۸$$

مساحت سطح مقطع برابر است با: $S = \pi r^۲ = ۲۸\pi$

(هندسه ۱- تجسم فضایی؛ صفحه‌های ۹۲ تا ۹۴)

۸۰- **گزینهٔ «۲»** *(فرشاد صدیقی‌فر)*

مطابق شکل $AH = \sqrt{۳}$ و $BH = CH = ۱$ است، بنابراین برای محاسبهٔ حجم شکل حاصل از دوران، کافی است حجم دو مخروط هرکدام به ارتفاع ۱ و شعاع قاعدهٔ $\sqrt{۳}$ را از حجم یک استوانه به ارتفاع ۲ و شعاع قاعدهٔ $\sqrt{۳}$ کم کنیم:



$$\text{حجم استوانه} = \pi R_۱^۲ h_۱ = \pi \times (\sqrt{۳})^۲ \times ۲ = ۶\pi$$

$$\text{حجم دو مخروط} = ۲\times\frac{۱}{۳}\pi R_۲^۲ h_۲ = \frac{۲}{۳}\times\pi\times(\sqrt{۳})^۲\times ۱ = ۲\pi$$

$$\text{حجم مطلوب} = ۶\pi - ۲\pi = ۴\pi$$

(هندسه ۱- تجسم فضایی؛ صفحه‌های ۹۵ و ۹۶)

ریاضیات گسسته

۸۱- **گزینهٔ «۴»** *(سوگند روشنی)*

به بررسی گزاره‌ها می‌پردازیم:

* گزاره اول نادرست است. زیرا در صورتی می‌توان از $a \mid b$ نتیجه گرفت که $a^m \mid b^n$ باشد. $m \le n$

گزاره دوم درست است زیرا:

$$\begin{cases} a-b \mid a \\ a-b \mid a-b \end{cases} \Rightarrow a-b \mid b \Rightarrow a-b \mid b^2 \qquad (1)$$

$a-b \mid a \Rightarrow a-b \mid a^3$ فرض سؤال (2)

با ضرب طرفین در رابطه (۱) و (۲) خواهیم داشت:

$$(a-b)^2 \mid a^3 b^2$$

* گزاره سوم درست است زیرا:

اگر $\frac{n^2(n+1)^2}{9}$ زوج باشد یعنی $\left(\frac{n(n+1)}{3}\right)^2$ زوج است و در نتیجه

$\frac{n(n+1)}{3}$ زوج و $n(n+1)$ مضرب ۶ است. $n(n+1)$ حاصلضرب دو

عدد متوالی و زوج است، بنابراین کافی است n یا $n+1$ مضرب ۳ باشد.

$$\begin{cases} n = 3k \\ n+1 = 3k \Rightarrow n = 3k-1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow 10 \le 3k \le 99 \Rightarrow 4 \le k \le 33 \Rightarrow \text{۳۰ عدد}$$

$$10 \le 3k-1 \le 99 \Rightarrow 11 \le 3k \le 100 \Rightarrow 4 \le k \le 33 \Rightarrow \text{۳۰ عدد}$$

بنابراین ۶۰ مقدار طبیعی برای n موجود است.

* گزاره چهارم درست است زیرا:

$$\left.\begin{matrix} a \mid b \\ a \mid c \end{matrix}\right\} \Rightarrow a^2 \mid bc \xrightarrow{a^2 \mid a^2} a^2 \mid a^2 + bc$$

(ریاضیات گسسته- آشنایی با نظریه اعداد: صفحه‌های ۵ و ۹ تا ۱۲)

۸۲- **گزینهٔ «۳»** *(امیرحسین ابومحبوب)*

$$a^2 + b^2 \ge ab + a + b - 1$$

$$\Leftrightarrow 2(a^2 + b^2 + 1) \ge 2(ab + a + b)$$

$$\Leftrightarrow (a^2 - 2a + 1) + (b^2 - 2b + 1) + (a^2 + b^2 - 2ab) \ge 0$$

$$\Leftrightarrow (a-1)^2 + (b-1)^2 + (a-b)^2 \ge 0$$

رابطهٔ اخیر همیشه درست است و روابط همگی برگشت‌پذیر هستند، پس اثبات به روش بازگشتی کامل می‌شود.

(ریاضیات گسسته- آشنایی با نظریهٔ اعداد: صفحه‌های ۶ تا ۸)

۸۳- **گزینهٔ «۲»** *(کیوان دارابی)*

$$a = bq + r \qquad (1)$$
$$a+1 = (b+1)(q+1) + (r+1) \Rightarrow a+1 = bq + b + q + 1 + r + 1$$

$$\xrightarrow{(1)} bq + r + 1 = (bq + r + 1) + (b + q + 1)$$

$$\Rightarrow b + q + 1 = 0 \Rightarrow q = -b - 1 \Rightarrow a = b(-b-1) + r$$

از طرفی:

$$r = r_{max} = b - 1$$

در نتیجه داریم:

$$a = -b^2 - b + b - 1 = -b^2 - 1$$
$$\Rightarrow a + 1 = -b^2$$

پس مقسوم جدید قرینهٔ یک عدد مربع کامل است.

(ریاضیات گسسته- آشنایی با نظریه اعداد؛ صفحه‌های ۱۴ و ۱۵)

۸۴- **گزینهٔ «۴»** *(احمدرضا فلاح)*

ابتدا ب.م.م دو عدد $۵n+۲$ و $۷n+۳$ را می‌یابیم.

$$(۵n+۲,۷n+۳)=d \Rightarrow \begin{matrix} d \mid ۵n+۲ \xrightarrow{\times ۷} d \mid ۳۵n+۱۴ \\ d \mid ۷n+۳ \xrightarrow{\times ۵} d \mid ۳۵n+۱۵ \end{matrix} \Rightarrow d=۱$$

بنابراین دو عدد نسبت به هم اولند پس ک‌م‌م آن‌ها با حاصلضرب آن‌ها برابر است:

$$[۵n+۲,۷n+۳]=(۵n+۲)(۷n+۳)=۳۵n^۲+۲۹n+۶$$

مطابق فرض سؤال، باقی‌مانده این عدد در تقسیم بر ۷ برابر ۳ می‌باشد، پس:

$$۳۵n^۲+۲۹n+۶ \overset{۷}{\equiv} ۳ \Rightarrow ۰+n-۱ \overset{۷}{\equiv} ۳ \Rightarrow n \overset{۷}{\equiv} ۴ \Rightarrow n=۷k+۴$$

$$\xrightarrow{n \text{ دورقمی است}} ۱۰ \le ۷k+۴ \le ۹۹ \to ۶ \le ۷k \le ۹۵ \Rightarrow ۱ \le k \le ۱۳$$

بنابراین ۱۳ عدد دو رقمی برای n وجود دارد.

(ریاضیات گسسته- آشنایی با نظریه اعداد؛ صفحه‌های ۱۳ و ۲۵)

۸۵- **گزینهٔ «۳»** *(محمد صحت‌کار)*

ابتدا مشخص می‌کنیم که ۲۱ مرداد چندمین روز سال است و سپس باقی‌مانده

تقسیم این عدد بر ۷ را به دست می‌آوریم:

$$(۴\times ۳۱)+۲۱ \overset{۷}{\equiv} (۴\times ۳) \overset{۷}{\equiv} ۱۲ \overset{۷}{\equiv} ۵$$

بنابراین چهارشنبه مترادف با باقیمانده ۵ به پیمانه ۷ است.

سپس معلوم می‌کنیم که اول خرداد چه روزی از هفته است:

$$(۲\times ۳۱)+۱ \overset{۷}{\equiv} (۲\times ۳)+۱ \overset{۷}{\equiv} ۷ \overset{۷}{\equiv} ۰$$

$$\text{جمعه} \xrightarrow{۰} \text{پنج‌شنبه} \xrightarrow{۶} \text{چهارشنبه} \xrightarrow{۵}$$

بنابراین اول خرداد، جمعه است و در نتیجه اولین چهارشنبه خرداد را می‌یابیم.

پنجم خرداد	چهارم خرداد	سوم خرداد	دوم خرداد	اول خرداد
سه‌شنبه	دوشنبه	یکشنبه	شنبه	جمعه

هم‌اکنون می‌توانیم تاریخ سومین چهارشنبه خرداد ماه را مشخص کنیم:

$$\underset{\text{سومین چهارشنبه}}{\text{۲۰ خرداد}} \xrightarrow{+۷} \underset{\text{دومین چهارشنبه}}{\text{۱۳ خرداد}} \xrightarrow{+۷} \underset{\text{اولین چهارشنبه}}{\text{۶ خرداد}}$$

(ریاضیات گسسته- آشنایی با نظریه اعداد؛ صفحهٔ ۲۴)

۸۶- **گزینهٔ «۲»** *(سوگند روشنی)*

$$۵۲x-۳۹y=۱۳ \xrightarrow{\div ۱۳} ۴x-۳y=۱$$

$$\Rightarrow ۴x \overset{۳}{\equiv} ۱ \Rightarrow x \overset{۳}{\equiv} ۱ \Rightarrow x=۳k+۱$$

$$\xrightarrow{k=۳۳۲} x_{max}=۹۹۷$$

حاصلضرب ارقام $=۹\times ۹\times ۷=۵۶۷$

(ریاضیات گسسته - آشنایی با نظریه اعداد؛ صفحه‌های ۲۶ تا ۲۹)

۸۷- **گزینهٔ «۲»** *(مجید نیکنام)*

توانی از ۲۷ را می‌یابیم که در تقسیم بر ۱۹ باقی‌مانده واحد بیاورد:

$$\begin{cases} ۲۷^۱ \overset{۱۹}{\equiv} ۸ \\ ۲۷^۲ \overset{۱۹}{\equiv} ۸^۲ \overset{۱۹}{\equiv} ۷ \\ ۲۷^۳ \overset{۱۹}{\equiv} ۸^۳ \overset{۱۹}{\equiv} ۸\times ۷ \overset{۱۹}{\equiv} ۵۶ \overset{۱۹}{\equiv} -۱ \Rightarrow (۲۷^۳)^۲ \overset{۱۹}{\equiv} (-۱)^۲ \Rightarrow ۲۷^۶ \overset{۱۹}{\equiv} ۱ \end{cases}$$

پس a به فرم $۶k$ می‌باشد که $k \in \mathbb{N}$ و داریم:

$$\xrightarrow{a \text{ دو رقمی است}} ۱۰ \le ۶k \le ۹۹ \Rightarrow ۲ \le k \le ۱۶$$

تعداد: $۱۶ - ۲ + ۱ = ۱۵$

(ریاضیات گسسته- آشنایی با نظریه اعداد؛ صفحه‌های ۱۸ تا ۲۵)

۸۸- **گزینهٔ «۲»** *(سوگند روشنی)*

برای محاسبه رقم یکان عدد تواندار، کافی است عدد پایه را به پیمانه ۱۰ و توان را به پیمانه ۴ ببریم.

$$\begin{cases} \overset{۱۰}{A} \equiv ۲ + ۲۴ + ۰ \equiv ۶ \Rightarrow \overset{۱۰}{A^{۲}} \equiv ۳۶ \equiv ۶ \\ \overset{۱۰}{B} \equiv ۱ + ۲ + ۶ + ۲۴ + ۰ \equiv ۳ \Rightarrow \overset{۱۰}{B^{۲}} \equiv ۹ \\ \overset{۱۰}{AB} \equiv ۶ \times ۳ \equiv ۸ \end{cases}$$

از طرفی: $\overset{۴}{A - B} \equiv ۲! - (۱! + ۲! + ۳!)$

بنابراین خواهیم داشت:

$$(A^{۲} + AB + B^{۲})^{A-B} \overset{۱۰}{\equiv} (۶ + ۸ + ۹)^{۱} \overset{۱۰}{\equiv} ۲۳ \overset{۱۰}{\equiv} ۳$$

(ریاضیات گسسته- آشنایی با نظریه اعداد؛ صفحه‌های ۱۸ تا ۲۱)

۸۹- **گزینهٔ «۱»** *(مهدی وقوعی)*

$$(۳a + ۲)x + (۲a - ۳)y = ۳۹$$

$$\xrightarrow{\text{شرط وجود جواب در } Z} (۳a + ۲, ۲a - ۳) \mid ۳۹$$

فرض: $(۳a + ۲, ۲a - ۳) = d \Rightarrow \begin{cases} d \mid ۳a + ۲ \xrightarrow{\times ۲} d \mid ۶a + ۴ \\ d \mid ۲a - ۳ \xrightarrow{\times (-۳)} d \mid -۶a + ۹ \end{cases}$

$$\xrightarrow{\text{مجموع}} d \mid ۱۳ \Rightarrow d = ۱ \text{ یا } ۱۳$$

چون $۱۳ \mid ۳۹$ و $۱ \mid ۳۹$، پس با توجه به شرط وجود جواب در Z، این معادله در Z همواره دارای جواب است، از جمله به ازای تمام ۹۰ عدد طبیعی دو رقمی.

(ریاضیات گسسته- آشنایی با نظریهٔ اعداد؛ صفحه‌های ۹ تا ۱۴ و ۲۶)

۹۰- **گزینهٔ «۳»** *(سرژ یقیازاریان تبریزی)*

$$۲۰۰x + ۵۰۰y = ۵۱۰۰ \Rightarrow ۲x + ۵y = ۵۱$$

$$\Rightarrow \overset{۲}{۵y} \equiv \overset{۲}{۵۱} \Rightarrow \overset{۲}{y} \equiv \overset{۲}{۱} \Rightarrow y = ۲k + ۱ \qquad (k \in \mathbb{Z})$$

$$۲x + ۵(۲k + ۱) = ۵۱ \Rightarrow ۲x = -۱۰k + ۴۶ \Rightarrow x = -۵k + ۲۳$$

$$\left.\begin{array}{l} x \ge ۰ \Rightarrow -۵k + ۲۳ \ge ۰ \Rightarrow k \le \frac{۲۳}{۵} \\ y \ge ۰ \Rightarrow ۲k + ۱ \ge ۰ \Rightarrow k \ge -\frac{۱}{۲} \end{array}\right\} \xrightarrow{k \in \mathbb{Z}} k = ۰, ۱, ۲, ۳, ۴$$

بنابراین به ۵ طریق می‌توان مبلغ کتاب را با بن‌های ۲۰۰ و ۵۰۰ تومانی پرداخت.

(ریاضیات گسسته- آشنایی با نظریهٔ اعداد؛ صفحه‌های ۲۶ تا ۳۰)

فیزیک ۲

۹۱- **گزینهٔ «۱»** *(سیدمهرشاد موسوی)*

چون زاویهٔ بین خطوط میدان مغناطیسی با سطح حلقه ۵۳ درجه است، لذا زاویهٔ بین نیم خط عمود بر سطح حلقه و میدان $\theta_1 = 90^\circ - 53^\circ = 37^\circ$ است. با تغییر زاویه، شار مغناطیسی ۲۵ درصد کم می‌شود، بنابراین داریم:

$$\Phi_2 = \Phi_1 - 0/25\Phi_1 = 0/75\Phi_1$$

$$\frac{\Phi_2}{\Phi_1} = \frac{75}{100} \xrightarrow{\Phi = AB\cos\theta} \frac{AB\cos\theta_2}{AB\cos\theta_1} = \frac{3}{4} \Rightarrow \frac{\cos\theta_2}{\cos 37^\circ} = \frac{3}{4}$$

$$\Rightarrow \frac{\cos\theta_2}{0/8} = \frac{3}{4} \Rightarrow \cos\theta_2 = 0/6 \Rightarrow \theta_2 = 53^\circ$$

زاویهٔ بین خطوط میدان و سطح قاب درحالت دوم $37 = 53 - 90$ درجه می‌شود، یعنی زاویه از 53° به 37° می‌رسد که به اندازهٔ ۱۶ درجه کاهش یافته است.

(فیزیک۲- القای الکترومغناطیسی و جریان متناوب؛ صفحه‌های ۱۱۱ و ۱۱۲)

۹۲- **گزینهٔ «۲»** *(محمدعلی راست‌پیمان)*

در ۵ ثانیهٔ اول و ده ثانیهٔ دوم، شیب‌های نمودار ثابت هستند، بنابراین چون شیب نمودار شار-زمان متناسب با نیروی محرکهٔ القایی است، در نتیجه اندازهٔ نیروی محرکهٔ القایی متوسط در سه ثانیهٔ اول با ۵ ثانیهٔ اول و اندازهٔ نیروی محرکهٔ القایی متوسط در ۴ ثانیهٔ چهارم با ده ثانیهٔ دوم برابر است. در نتیجه داریم:

$$|\varepsilon_{av,1}| = \left|-N\frac{\Delta\Phi_1}{\Delta t_1}\right| = \left|-1\times\frac{(12-(-8))\times10^{-3}}{5}\right| = 4\times10^{-3}\,V$$

$$\Rightarrow |\varepsilon_{av,1}| = 4mV$$

$$|\varepsilon_{av,2}| = \left|-N\frac{\Delta\Phi_2}{\Delta t_2}\right| = \left|-1\times\frac{(-8-12)\times10^{-3}}{10}\right| = 2\times10^{-3}\,V$$

$$\Rightarrow |\varepsilon_{av,2}| = 2mV$$

بنابراین:

$$\frac{|\varepsilon_{av,2}|}{|\varepsilon_{av,1}|} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

(فیزیک ۲- القای الکترومغناطیسی و جریان متناوب؛ صفحه‌های ۱۱۳ تا ۱۱۶)

۹۳- **گزینهٔ «۴»** *(محمود منصوری)*

ابتدا تغییر شار مغناطیسی در اثر تغییر میدان را می‌یابیم:

$$\Delta\Phi = \Phi_2 - \Phi_1 \xrightarrow[\Phi_2 = A.B_2.\cos\theta_2]{\Phi_1 = A.B_1.\cos\theta_1} \Delta\Phi = A(B_2\cos\theta_2 - B_1\cos\theta_1)$$

$$\xrightarrow[A=50cm^2=50\times10^{-4}m^2,\theta_1=0,\theta_2=180^\circ]{B_1=0/02T,B_2=-0/06T}$$

$$\Delta\Phi = 50\times10^{-4}\times(0/06(-1) - 0/02(1)) \Rightarrow \Delta\Phi = -4\times10^{-4}\,Wb$$

اکنون نیروی محرکهٔ القایی و به دنبال آن جریان القایی را می‌یابیم:

$$\varepsilon_{av} = -N\frac{\Delta\phi}{\Delta t} \xrightarrow[\Delta t=20\times10^{-3}s]{N=800} \varepsilon_{av} = -800\times\left(\frac{-4\times10^{-4}}{20\times10^{-3}}\right)$$

$$\Rightarrow |\varepsilon_{av}| = 16V$$

$$I_{av} = \frac{|\varepsilon_{av}|}{R} \xrightarrow{R=4\Omega} I_{av} = \frac{16}{4} = 4A$$

(فیزیک ۲- القای الکترومغناطیسی و جریان متناوب؛ صفحه‌های ۱۱۱ تا ۱۱۶)

۹۴- **گزینهٔ «۳»** *(محمدکاظم منشادی)*

ابتدا تعداد دورهای پیچه را می‌یابیم و سپس جریان را پیدا می‌کنیم:

$$N = \frac{L}{2\pi r} \xrightarrow[L=18m]{2r=30cm=0/3m} N = \frac{18}{0/3\pi} = \frac{60}{\pi}$$

$$A = \pi\times(15\times10^{-2})^2 = 225\pi\times10^{-4}\,m^2$$

$$I_{av} = \frac{\varepsilon_{av}}{R} \Rightarrow$$

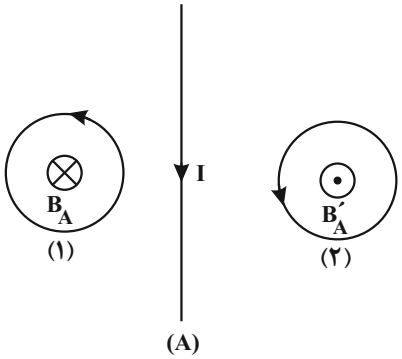
$$I_{av} = \frac{-N\times A\times B\times(\cos\theta_2 - \cos\theta_1)}{R\times\Delta t} \xrightarrow[B=400G=400\times10^{-4}T=4\times10^{-2}T]{\theta_1=0,\theta_2=90^\circ,R=15\Omega,\Delta t=0/2s}$$

$$I_{av} = \frac{-\frac{60}{\pi}\times225\pi\times10^{-4}\times4\times10^{-2}\times(0-1)}{15\times0/2} = 18\times10^{-3}A = 18mA$$

(فیزیک ۲- القای الکترومغناطیسی و جریان متناوب؛ صفحه‌های ۱۱۱ تا ۱۱۶)

۹۵- **گزینهٔ «۲»** *(امیرحسین برادران)*

چون نوع نیرویی که دو سیم به هم وارد می‌کنند از نوع دافعه است، بنابراین جریان عبوری از دو سیم خلاف جهت هم است. پس جریان عبوری از سیم A به سمت پایین است. با حرکت A به سمت چپ، با توجه به جهت میدان مغناطیسی حاصل از سیم A در سمت راست، B'_A در حال کاهش و در سمت چپ B_A در حال افزایش است. بنابراین با توجه به قانون لنز جهت جریان القایی در حلقه‌های (۱) و (۲) پادساعتگرد است.



(فیزیک ۲- القای الکترومغناطیسی و جریان متناوب؛ صفحه‌های ۱۱۷ و ۱۱۸)

۹۶- **گزینهٔ «۴»** (خسرو ارغوانی‌فرد)

با توجه به قانون لنز، پایین حلقه قطب S می‌شود. چون دو قطب هم‌نام یکدیگر را دفع می‌کنند، نیرویی که حلقه به آهنربا وارد می‌کند، رو به پایین می‌شود و ترازو عدد بیشتری را نشان می‌دهد.

(فیزیک ۲- القای الکترومغناطیسی و جریان متناوب؛ صفحه‌های ۱۱۷ و ۱۱۸)

۹۷- **گزینهٔ «۱»** (مصطفی کیانی)

با توجه به برابر بودن اختلاف پتانسیل دو سر مقاومت‌های موازی، جریان عبوری از مقاومت ۳ اهمی، برابر با $۰/۶A$ و در نتیجه جریان عبوری از القاگر برابر با $۰/۸A$ است.

$$V_۱ = V_۲ \Rightarrow I_۱R_۱ = I_۲R_۲ \Rightarrow ۰/۲\times۹ = I_۲\times۳ \Rightarrow I_۲ = ۰/۶A$$

$$\Rightarrow U = \frac{۱}{۲}LI^۲ = \frac{۱}{۲}\times۲۵\times۱۰^{-۳}\times۰/۶۴ \Rightarrow U = ۸\times۱۰^{-۳}J = ۸mJ$$

(فیزیک ۲- القای الکترومغناطیسی و جریان متناوب؛ صفحه‌های ۱۲۱ و ۱۲۲)

(فیزیک ۲- الکتریسیتهٔ جاری؛ صفحه‌های ۴۹ تا ۵۱)

۹۸- **گزینهٔ «۴»** (علیرضا گونه)

با توجه به نمودار $I_{max} = ۴A$ است و چون $\frac{۳}{۴}$ دورهٔ تناوب برابر با $۱۰ms$ است، داریم:

$$\frac{۳}{۴}T = ۱۰\times۱۰^{-۳} \Rightarrow T = \frac{۱}{۷۵}s$$

$$I = I_m \sin\left(\frac{۲\pi}{T}\right)t \Rightarrow I = ۴\sin\left(\frac{۲\pi}{\frac{۱}{۷۵}}\right)t$$

$$\Rightarrow I = ۴\sin۱۵۰\pi t$$

(فیزیک ۲- القای الکترومغناطیسی و جریان متناوب؛ صفحه‌های ۱۲۴ و ۱۲۵)

۹۹- **گزینهٔ «۱»** (مرتضی جعفری)

می‌دانیم، در لحظه‌ای که خطوط میدان مغناطیسی یکنواخت موازی با صفحهٔ پیچه باشد، شارمغناطیسی عبوری از صفحه برابر صفر $(\Phi = ۰)$ و در نتیجه نیروی محرکهٔ القایی بیشینه و به دنبال آن جریان الکتریکی نیز بیشینه خواهد بود. بنابراین چون در این لحظه جریان مولد برابر $۴A$ است، لذا باید $I_{max} = ۴A$ باشد. از طرف دیگر، در لحظه‌ای که میدان مغناطیسی با صفحهٔ پیچه زاویهٔ ۶۰° می‌سازد، میدان مغناطیسی با خط عمود بر صفحهٔ پیچه زاویهٔ $\theta = ۹۰ - ۶۰ = ۳۰^\circ$ خواهد ساخت. بنابراین، با مقایسهٔ رابطهٔ $\Phi = BA\cos\theta$ با رابطهٔ $\Phi = BA\cos(\frac{۲\pi}{T}t)$، در می‌یابیم، $\theta = \frac{۲\pi}{T}t = ۳۰^\circ = \frac{\pi}{۶}rad$ است. در نتیجه در لحظه‌ای که زاویهٔ بین میدان مغناطیسی و صفحهٔ پیچه برابر ۶۰° است، جریان الکتریکی برابر است با:

$$I = I_{max}\sin(\frac{۲\pi}{T}t) \Rightarrow I = ۴\times\sin\frac{\pi}{۶} \Rightarrow I = ۴\times\frac{۱}{۲} = ۲A$$

و در این لحظه توان مصرفی در مقاومت برابر است با:

$$P = RI^۲ \xrightarrow{R=۵\Omega} P = ۵\times۲^۲ \Rightarrow P = ۲۰W$$

(فیزیک ۲- القای الکترومغناطیسی و جریان متناوب؛ صفحه‌های ۱۲۲ تا ۱۲۶)

۱۰۰- **گزینهٔ «۲»** (مجتبی خلیل‌ارجمندی)

طبق رابطهٔ مبدل‌های آرمانی داریم:

$$\frac{V_۲}{V_۱} = \frac{N_۲}{N_۱} \Rightarrow V_۲ = \frac{N_۲}{N_۱}V_۱ = \frac{N_۱ - ۱۰۰}{N_۱}\times۸$$

حال گزینه‌ها را به ترتیب بررسی می‌کنیم تا ببینیم کدام ولتاژ صحیح است.

گزینهٔ «۱»: $۲ = \frac{N_۱ - ۱۰۰}{N_۱}\times۸ \Rightarrow ۲N_۱ = ۸N_۱ - ۸۰۰ \Rightarrow N_۱ = \frac{۴۰۰}{۳}$

گزینهٔ «۲»: $\frac{۸}{۳} = \frac{N_۱ - ۱۰۰}{N_۱}\times۸ \Rightarrow N_۱ = ۳N_۱ - ۳۰۰ \Rightarrow N_۱ = ۱۵۰$

گزینهٔ «۳»: $N_۱$ وجود ندارد $\Rightarrow ۸ = \frac{N_۱ - ۱۰۰}{N_۱}\times۸ \Rightarrow N_۱ = N_۱ - ۱۰۰$

گزینهٔ «۴»: $\frac{۵}{۴} = \frac{N_۱ - ۱۰۰}{N_۱}\times۸ \Rightarrow ۵N_۱ = ۳۲N_۱ - ۳۲۰۰ \Rightarrow N_۱ = \frac{۳۲۰۰}{۲۷}$

همانطور که می‌بینیم، فقط در گزینه «۲»، $N_۱$ عددی طبیعی است.

(فیزیک ۲- القای الکترومغناطیسی و جریان متناوب؛ صفحه‌های ۱۲۶ و ۱۲۷)

فیزیک ۱

۱۰۱- **گزینهٔ «۲»** *(حسام نادری)*

در فرایند هم‌حجم، کار انجام شده به دلیل ثابت ماندن حجم گاز برابر صفر است و در نتیجه داریم:

$$\Delta U = W + Q \xrightarrow[W=0]{\text{در هم حجم}} \Delta U = Q$$

$\Rightarrow$ گرمای مبادله شده = تغییر انرژی درونی

(فیزیک ۱- ترمودینامیک؛ صفحه‌های ۱۳۱ تا ۱۳۹)

۱۰۲- **گزینهٔ «۲»** *(امیرمهدی جعفری)*

طبق رابطهٔ $P = \frac{nR}{V}T$، شیب نمودار P-T با حجم گاز نسبت معکوس دارد، لذا حجم گاز در نقاط B و C کم‌تر از نقاط A و D است. بنابراین در فرایند هم‌دمای AB، حجم گاز کاهش و در فرایند هم‌فشار CD حجم گاز افزایش می‌یابد. در نتیجه با توجه به رابطهٔ $\rho = \frac{m}{V}$، چگالی گاز در فرایند هم‌دمای AB افزایش و در فرایند هم‌فشار CD کاهش می‌یابد.

(فیزیک ۱- ترمودینامیک؛ صفحه‌های ۱۲۸ تا ۱۳۹)

۱۰۳- **گزینهٔ «۴»** *(سیدعلی میرنوری)*

برای یافتن تغییرات انرژی درونی گاز در انبساط از حالت i تا حالت f کافی است که تغییرات انرژی درونی هر مرحله را یافته و آن‌ها را با هم جمع جبری کنیم. برای این منظور باید دقت کنیم که در فرایند انبساط، کار انجام شده روی گاز منفی است. حال برای هر مرحله داریم:

مرحلهٔ (۱): انبساط هم‌دما $\xrightarrow{T_1=\text{ثابت}} \Delta T_1 = 0 \Rightarrow \Delta U_1 = 0$

مرحلهٔ (۲): انبساط بی‌دررو

$$\xrightarrow{Q_2=0} \Delta U_2 = W_2 \xrightarrow{W_2=-40J} \Delta U_2 = -40J$$

مرحلهٔ (۳): انبساط هم‌دما $\xrightarrow{T_3=\text{ثابت}} \Delta T_3 = 0 \Rightarrow \Delta U_3 = 0$

بنابراین:

$$\Delta U_t = \Delta U_1 + \Delta U_2 + \Delta U_3 \Rightarrow \Delta U_t = -40J$$

(فیزیک ۱- ترمودینامیک؛ صفحه‌های ۱۲۸ تا ۱۳۹)

۱۰۴- **گزینهٔ «۲»** *(سیدعلی میرنوری)*

بدیهی است که فرایند BA، بی‌دررو و فرایند CA، هم‌دما است.

بنابراین داریم: (W' : کار انجام شده توسط گاز در فرایند بی‌دررو)

$$\left.\begin{matrix} B \to A : U_B - U_A = W' \\ C \to A : U_C - U_A = 0 \end{matrix}\right\} U_B - U_C = W'$$

(فیزیک ۱- ترمودینامیک؛ صفحه‌های ۱۲۸ تا ۱۳۹)

۱۰۵- **گزینهٔ «۳»** *(مسعود قره‌خانی)*

همانطور که می‌دانید، انرژی درونی به دمای مطلق گاز وابسته است و داریم:

$$\frac{P_1V_1}{T_1} = \frac{P_2V_2}{T_2} \Rightarrow \frac{T_2}{T_1} = \frac{P_2V_2}{P_1V_1} = \frac{\frac{14}{10}P_1 \times \frac{1}{2}V_1}{P_1V_1} = \frac{7}{10}$$

$$T_2 = 0/7T_1 \Rightarrow \Delta T = T_2 - T_1 = 0/7T_1 - T_1 = -0/3T_1$$

$$\frac{\Delta T}{T_1} \times 100 = -30\%$$

می‌بینیم دمای مطلق گاز ۳۰ درصد کاهش یافته است، از طرف دیگر چون $U \propto T$ است، لذا، انرژی درونی گاز نیز ۳۰ درصد کاهش خواهد یافت.

(فیزیک ۱- ترمودینامیک؛ صفحه‌های ۱۲۸ تا ۱۳۱)

۱۰۶- **گزینهٔ «۳»** *(محمدعلی راست پیمان)*

چون هر سه فرایند از نقطهٔ A شروع و به نقطهٔ B ختم شده‌اند، تغییرات انرژی درونی گاز در هر سه مسیر با هم برابر است. از طرف دیگر ، چون حجم گاز افزایش یافته است، در هر سه فرایند علامت کار انجام شده روی گاز منفی است. بنابراین داریم:

ثابت $= \Delta U = W_1 + Q_1 = W_2 + Q_2 = W_3 + Q_3$

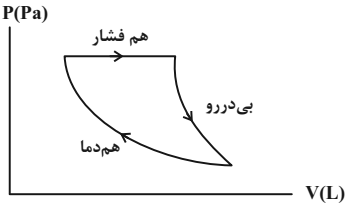
با توجه به این که مساحت زیر نمودار در فرایند (۱) بزرگ‌تر از فرایند (۲) و در فرایند (۲) بزرگ‌تر از فرایند (۳) است، داریم: $|W_1| > |W_2| > |W_3|$

چون $W < 0$ است، بنابراین: $Q_1 > Q_2 > Q_3$

(فیزیک ۱- ترمودینامیک؛ صفحه‌های ۱۲۸ تا ۱۳۹)

۱۰۷- **گزینهٔ «۳»** *(مسعود قهرمانی)*

می‌دانیم $\Delta U_{\text{چرخه}} = 0$ است، می‌توان نوشت:



$$\Delta U = 0 \Rightarrow \Delta U_{\text{هم‌فشار}} + \Delta U_{\text{بی‌دررو}} + \Delta U_{\text{هم‌دما}} = 0$$

توجه کنید که چون در فرایند هم‌دما، دما ثابت است، انرژی درونی تغییری نمی‌کند و در فرایند بی‌دررو نیز $Q_{\text{بی‌دررو}} = 0$ است. پس:

$$W_{\text{بی‌دررو}} + W_{\text{هم‌فشار}} + Q_{\text{هم‌فشار}} = 0$$

در فرایند بی‌دررو، گاز منبسط شده است، پس: $W_{\text{بی‌دررو}} < 0$ می‌باشد.

$$W_{\text{بی‌دررو}} = -1400\,J$$

همچنین $W_{\text{هم‌فشار}}$ از مساحت زیر نمودار به‌دست می‌آید که به دلیل انبساط گاز، علامت کار نیز منفی است:

$$W_{\text{هم‌فشار}} = -S = -8\times10^{5}\times4\times10^{-3} = -3200\,J$$

$$-1400 + Q_{\text{هم‌فشار}} - 3200 = 0 \Rightarrow Q_{\text{هم‌فشار}} = 4600\,J$$

(فیزیک ۱ - ترمودینامیک؛ صفحه‌های ۱۲۸ تا ۱۴۰)

۱۰۸- **گزینهٔ «۱»** *(سیدعلی میرنوری)*

ابتدا مقدار گرمایی که ماشین گرمایی درون‌سوز می‌گیرد را محاسبه می‌کنیم:

$$Q_H = mQ = 4\times50 \Rightarrow Q_H = 200\,kJ$$

برای تعیین بازده داریم:

$$\eta\,(\text{برحسب درصد}) = \left(1-\frac{|Q_L|}{Q_H}\right)\times100 = \left(1-\frac{160}{200}\right)\times100$$

$$\Rightarrow \eta = 20\%$$

(فیزیک ۱- ترمودینامیک؛ صفحه‌های ۱۴۵ و ۱۴۶)

۱۰۹- **گزینهٔ «۴»** *(مصطفی کیانی)*

با استفاده از رابطهٔ بازدهٔ ماشین گرمایی آرمانی و با توجه به این‌که $Q_{H_2} = |Q_{L_1}|$ و $|Q_{L_2}| = \frac{3}{5}Q_{H_1}$ است، می‌توان نوشت:

$$\eta_2 = 1-\frac{|Q_{L_2}|}{Q_{H_2}} \xrightarrow[|Q_{L_2}|=\frac{3}{5}Q_{H_1}]{\eta_2=\frac{25}{100}=\frac{1}{4}} \frac{1}{4} = 1-\frac{\frac{3}{5}Q_{H_1}}{Q_{H_2}}$$

$$\xrightarrow{Q_{H_2}=|Q_{L_1}|} \frac{3}{4} = \frac{3}{5}\frac{Q_{H_1}}{|Q_{L_1}|} \Rightarrow \frac{|Q_{L_1}|}{Q_{H_1}} = \frac{4}{5}$$

$$\eta_1 = 1-\frac{|Q_{L_1}|}{Q_{H_1}} \Rightarrow \eta_1 = 1-\frac{4}{5} \Rightarrow \eta_1 = \frac{1}{5} \Rightarrow \eta_1 = 20\%$$

(فیزیک ۱- ترمودینامیک؛ صفحه‌های ۱۴۰ تا ۱۴۶)

۱۱۰- **گزینهٔ «۴»** *(بابک اسلامی)*

طبق متن کتاب درسی، هر چهار عبارت داده شده صحیح هستند.

(فیزیک ۱ - ترمودینامیک؛ صفحه‌های ۱۳۰، ۱۴۶ و ۱۴۷)

فیزیک ۳

۱۱۱- **گزینهٔ «۴»** *(امیرحسین برادران)*

در بازهٔ زمانی که نمودار زیر محور زمان قرار دارد، بردار مکان در جهت منفی محور x است. مطابق نمودار در بازهٔ زمانی ۲s تا ۶s مکان متحرک منفی است.

در بازهٔ زمانی‌که شیب خط مماس بر نمودار مکان- زمان منفی است، بردار سرعت در خلاف جهت محور x است. مطابق نمودار در بازهٔ زمانی ۱s تا ۴s (مجموعاً ۳ ثانیه) متحرک در جهت منفی محور x در حال حرکت است.

(فیزیک ۳- حرکت بر خط راست؛ صفحه‌های ۲ تا ۱۰)

۱۱۲- **گزینهٔ «۳»** *(امیرحسین برادران)*

با استفاده از معادلهٔ مکان – زمان، ابتدا شتاب را به‌دست می‌آوریم:

$$\Delta x=\frac{1}{2}at^2+v_0t \xrightarrow[t=10s]{v_0=6\frac{m}{s},\Delta x=-15m} -15=\frac{1}{2}a\times10^2+6\times10$$

$$\Rightarrow a=-\frac{75}{100}\times2=\frac{-3}{2}\frac{m}{s^2}$$

اکنون لحظهٔ تغییر جهت را مشخص می‌کنیم:

$$t_s=|\frac{v_0}{a}|=|\frac{6}{\frac{-3}{2}}|=4s \quad \text{(لحظهٔ تغییر جهت)}$$

با استفاده از رابطهٔ مکان – زمان، مسافت طی شده در ۱۰ ثانیهٔ اول حرکت را به‌دست می‌آوریم:

$$\ell=\ell_{0-4s}+\ell_{4s-10s}=|\frac{1}{2}at_s^2|+|\frac{1}{2}a(10-t_s)^2|$$

$$\Rightarrow \ell=\frac{3}{4}\times4^2+\frac{3}{4}\times6^2=12+27=39m$$

$$\Rightarrow s_{av}=\frac{\ell}{\Delta t}=\frac{39}{10}=3/9\frac{m}{s}$$

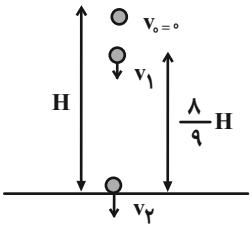
(فیزیک ۳- حرکت بر خط راست؛ صفحه‌های ۱۵ تا ۲۰)

۱۱۳- **گزینهٔ «۲»** *(زهره آقامحمدی)*

ابتدا تندی متحرک را در ارتفاع $\frac{8}{9}H$ از زمین به دست می‌آوریم:

$$K=\frac{1}{2}mv^2\Rightarrow 62/5=\frac{1}{2}\times0/2v_1^2$$

$$\Rightarrow v_1^2=625\Rightarrow v_1=25\frac{m}{s}$$



با استفاده از رابطهٔ سرعت ـ جابه‌جایی و با فرض جهت مثبت محور y به سمت پایین، داریم:

$$v^2=2gy$$

$$\begin{cases}v_1^2=2g\times\frac{1}{9}H\\ v_2^2=2gH\end{cases}\Rightarrow\frac{v_1^2}{v_2^2}=\frac{1}{9}\Rightarrow v_2^2=625\times9\Rightarrow v_2=75\frac{m}{s}$$

و با استفاده از معادلهٔ سرعت – زمان، زمان حرکت را به دست می‌آوریم:

$$\left.\begin{matrix}v_1=gt_1\Rightarrow t_1=2/5s\\ v_2=gt_2\Rightarrow t_2=7/5s\end{matrix}\right\}\Rightarrow t_2-t_1=5s$$

(فیزیک ۳- حرکت بر خط راست؛ صفحهٔ ۲۱ تا ۲۴)

۱۱۴- **گزینهٔ «۲»** *(سیرامسان فلاح)*

طبق قانون اول نیوتون، حرکت سریع مقوا، سبب افتادن سکه در لیوان می‌شود و طبق همین قانون، اگر خودروی در حال حرکت ترمز کند، چون در لحظهٔ اول نیرو بر سرنشین‌ها وارد نمی‌شود، به حرکت خود به سمت جلو ادامه می‌دهند. بنابراین گزینهٔ «۲» درست است.

برای گزینهٔ «۱»، اگر نیروی وارد بر گوی سنگین را به آرامی زیاد کنیم، نخ بالای گوی پاره می‌شود و برای گزینهٔ «۳»، اگر جسم در فضای تهی و خارج از جو زمین و دور از هر سیاره‌ای در حرکت باشد، چون نیرویی بر آن وارد نمی‌شود، به حرکت خود بر خط راست و با سرعت ثابت، ادامه می‌دهد.

(فیزیک ۳- دینامیک و حرکت دایره‌ای؛ صفحه‌های ۳۱ و ۳۲)

۱۱۵- **گزینهٔ «۲»** *(امیرحسین برادران)*

ابتدا با استفاده از قانون دوم نیوتون، شتاب حرکت جسم را می‌یابیم:

$$F = ma \xrightarrow{m=m_1+m_2+m_3} a = \frac{F}{m_1+m_2+m_3}$$

$$\xrightarrow[m_3=\frac{F}{a_3}]{m_1=\frac{F}{a_1},m_2=\frac{F}{a_2}} a = \frac{F}{\frac{F}{a_1}+\frac{F}{a_2}+\frac{F}{a_3}}$$

$$\xrightarrow[a_3=4\frac{m}{s^2}]{a_1=2\frac{m}{s^2},a_2=8\frac{m}{s^2}} a = \frac{1}{\frac{1}{2}+\frac{1}{8}+\frac{1}{4}} \Rightarrow a = \frac{1}{\frac{4+1+2}{8}} \Rightarrow a = \frac{8}{7}\frac{m}{s^2}$$

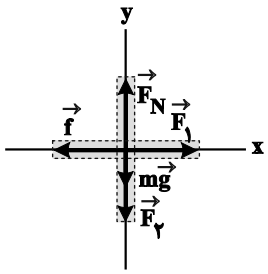
اکنون با استفاده از معادلهٔ سرعت – زمان، داریم:

$$v = at + v_0 \xrightarrow[t=7s]{v_0=0} v = \frac{8}{7}\times 7 + 0 = 8\frac{m}{s}$$

(فیزیک ۳- دینامیک و حرکت دایره‌ای؛ صفحه‌های ۳۲ و ۳۳)

۱۱۶- **گزینهٔ «۴»** *(مرتضی یوسف‌نیا)*

ابتدا مطابق شکل زیر، نیروهای وارد بر جسم را رسم می‌کنیم. چون جسم در راستای قائم حرکت نمی‌کند، نیروی خالص در این راستا صفر است. بنابراین داریم:



$$F_{net_y} = 0 \Rightarrow F_N - mg - F_2 = 0 \Rightarrow F_N = mg + F_2$$

از طرف دیگر، چون مشخص نیست که جسم حرکت می‌کند یا ساکن می‌ماند، بنابراین دو حالت زیر را برای آن در نظر می‌گیریم:

۱) اگر $F_1 < f_{s,max} = \mu_s F_N = \mu_s(mg + F_2)$ باشد، جسم ساکن می‌ماند. در این حالت با افزایش نیروی F_2، نیروی اصطکاک ثابت و برابر $f_s = F_1$ است.

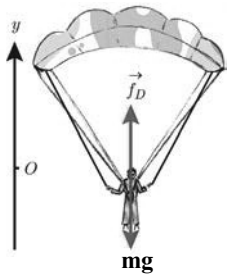
۲) اگر جسم در حال حرکت باشد، در این حالت نیروی اصطکاک به‌صورت $f_k = \mu_k F_N = \mu_k(mg + F_2)$ ظاهر می‌شود که با افزایش نیروی F_2، نیروی اصطکاک نیز افزایش می‌یابد.

بنابراین، با افزایش F_2، نیروی اصطکاک می‌تواند تغییر نکند و یا بیشتر شود. یعنی گزینهٔ «۴» صحیح است.

(فیزیک ۳- دینامیک و حرکت دایره‌ای؛ صفحه‌های ۳۹ تا ۴۳)

۱۱۷- **گزینهٔ «۲»** *(امیرحسین برادران)*

ابتدا نیروهای وارد بر چترباز را رسم نموده و سپس با استفاده از قانون دوم نیوتون تندی چترباز را در لحظهٔ t_1 می‌یابیم:



$$F_{net} = ma \Rightarrow f_D - mg = ma \xrightarrow[a=30\frac{m}{s^2},g=10\frac{m}{s^2}]{f_D=36v^2,m=90kg}$$

$$36v_1^2 - 90\times 10 = 90\times 30 \Rightarrow 36v_1^2 = 900\times 4$$

$$\Rightarrow v_1^2 = \frac{900\times 4}{36} = 100 \Rightarrow v_1 = 10\frac{m}{s}$$

اکنون تندی حدی چترباز را می‌یابیم. چون در حالت تندی حدی، نیروی خالص وارد بر چترباز صفر است، می‌توان نوشت:

$$F_{net} = 0 \Rightarrow f_D - mg = 0 \Rightarrow f_D = mg$$

$$\Rightarrow 36v_2^2 = 90\times 10 \Rightarrow v_2^2 = \frac{900}{36}$$

$$\Rightarrow v_2 = \frac{30}{6} = 5\frac{m}{s}$$

در آخر با استفاده از رابطهٔ شتاب متوسط داریم:

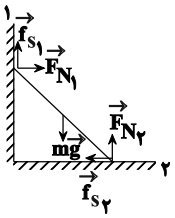
$$a_{av} = \frac{v_2 - v_1}{t_2 - t_1} \xrightarrow[v_1=10\frac{m}{s},v_2=5\frac{m}{s}]{t_1=5s,t_2=25s} a_{av} = \frac{5-10}{25-5} = -0/25\frac{m}{s^2}$$

(فیزیک ۳- دینامیک و حرکت دایره‌ای؛ صفحه‌های ۳۵ تا ۳۷)

۱۱۸- **گزینهٔ «۳»** *(رضا امامی)*

مطابق شکل زیر، از طرف دیوار قائم، نیروی F_{N_1} وارد می‌شود. با توجه به جهت سرخوردن نردبان و اینکه قرار است نردبان در آستانهٔ حرکت باشد، باید نیروی خالص در راستای قائم و افقی صفر باشد، بنابراین طبق قانون اول نیوتون داریم:

$$\begin{cases} F_{(net)_y} = 0 \Rightarrow mg = f_{s_1} + F_{N_2} \\ F_{(net)_x} = 0 \Rightarrow F_{N_1} = f_{s_2} \end{cases}$$



هم‌چنین با توجه به این‌که نردبان در آستانهٔ سرخوردن و دیوار قائم بدون اصطکاک $(f_{s_1} = 0)$ است، داریم:

$$f_{s_2} = \mu_s F_{N_2} \xrightarrow[\mu_s = 0/6 \, , \, g = 10 \frac{N}{kg}]{F_{N_2} = mg \, , \, m = 8kg} f_{s_2} = 0/6 \times 80 = 48N$$

$$\xrightarrow{F_{N_1} = f_{s_2}} F_{N_1} = 48N$$

(فیزیک ۳- دینامیک و حرکت دایره‌ای؛ صفحه‌های ۴۵ و ۴۶)

۱۱۹- **گزینهٔ «۲»** *(امیرحسین برادران)*

با توجه به نمودار، فنر A تحت تأثیر نیروی F_0، چهار واحد و نیز B تحت تأثیر نیروی $4F_0$، سه واحد تغییر طول می‌دهد. بنابراین ابتدا نسبت $\frac{k_B}{k_A}$ را می‌یابیم:

$$\Rightarrow F_e = k\Delta x \Rightarrow \frac{F_{e,B}}{F_{e,A}} = \frac{k_B}{k_A} \times \frac{\Delta x_B}{\Delta x_A} \xrightarrow[F_{e,A} = F_0 \, , \, \Delta x_A = 4\Delta x]{F_{e,B} = 4F_0 \, , \, \Delta x_B = 3\Delta x}$$

$$\Rightarrow \frac{k_B}{k_A} = \frac{16}{3}$$

$$\xrightarrow[F_A = F \, , \, F_B = \frac{F}{3}]{\Delta L_A = \frac{48}{100} L_A} \frac{\frac{F}{3}}{F} = \frac{16}{3} \times \frac{\Delta L_B}{\frac{48}{100} \times L_A}$$

$$\xrightarrow{L_A = L_B} \frac{1}{3} = \frac{16}{3} \times \frac{\Delta L_B \times 100}{48 L_B} \Rightarrow \frac{\Delta L_B}{L_B} \times 100 = 3$$

$$\Rightarrow \Delta L_B = \frac{3}{100} L_B \Rightarrow \Delta L_B = \%3 L_B$$

(فیزیک ۳- دینامیک و حرکت دایره‌ای؛ صفحه‌های ۴۳ و ۴۴)

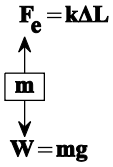
۱۲۰- **گزینهٔ «۳»** *(امیرحسین برادران)*

به جسم دو نیرو وارد می‌شود:

۱- نیروی فنر ۲- نیروی وزن $(W = mg)$

درحالتی که آسانسور با تندی ثابت به‌سمت پایین درحال حرکت است، برایند نیروهای وارد بر آن صفر است. بنابراین داریم:

$$k\Delta L = mg \xrightarrow{\Delta L = 0/1 L_0} 0/1 k L_0 = mg$$
$$\Rightarrow k L_0 = 10 mg$$

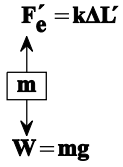


پس از آن‌که حرکت آسانسور با شتاب ثابت ادامه می‌یابد، چون $\Delta L' < \Delta L$، بنابراین $F'_e < mg$ می‌باشد، لذا برایند نیروها، یعنی $F'_{net} = mg - F'_e$، در جهت حرکت آسانسور است، در نتیجه حرکت شتاب‌دار آسانسور از نوع تندشونده خواهد بود و اندازهٔ شتاب آن برابر است با:

$$mg - F'_e = ma$$
$$\xrightarrow[kL_0 = 10mg]{F'_e = 0/08 kL_0} mg - 0/08 \times 10 mg = ma$$

$$\Rightarrow 0/2 mg = ma \Rightarrow a = 0/2 g$$

$$\Rightarrow a = 0/2 \times 10 = 2 \frac{m}{s^2}$$



(فیزیک ۳- دینامیک و حرکت دایره‌ای؛ صفحه‌های ۳۸، ۳۹، ۴۳ و ۴۴)

شیمی ۲

۱۲۱- **گزینهٔ «۴»** *(محمد عظیمیان‌زواره)*

در پلی‌اتن هر اتم کربن با چهار پیوند اشتراکی یگانه به چهار اتم دیگر (دو اتم کربن و دو اتم هیدروژن) متصل است. کربن ابتدایی و انتهایی هم با ۴ پیوند به ۳ اتم هیدروژن و یک اتم کربن متصل‌اند.

بررسی گزینه‌های درست:

گزینهٔ «۱»: زیرا سلولز درشت‌مولکول محسوب می‌شود.

گزینهٔ «۲»: شمار اتم‌های سازندهٔ سلولز، روغن زیتون و پلی‌اتن زیاد و جرم مولی آنها بسیار زیاد است و به همین علت درشت‌مولکول محسوب می‌شوند.

گزینهٔ «۳»: اتن (اتیلن)، در این شرایط به پلی‌اتن تبدیل می‌شود.

(شیمی ۲- پوشاک، نیازی پایان‌ناپذیر؛ صفحه‌های ۱۰۲ تا ۱۰۵)

۱۲۲- **گزینهٔ «۲»** *(حسین شکوه)*

بررسی گزینه‌ها:

گزینهٔ «۱»: ویتامین K در سبزیجات یافت می‌شود و حلقهٔ بنزنی دارد.

گزینهٔ «۲»: ویتامین‌های C، D و A دارای گروه عاملی هیدروکسیل بوده، اما فقط ویتامین C محلول در آب است.

گزینهٔ «۳»: ویتامین A در هویج وجود دارد. همهٔ ویتامین‌های مطرح شده در کتاب دارای حلقه می‌باشند.

گزینهٔ «۴»: ویتامین C محلول در آب بوده و مصرف بیش از اندازه آن برای بدن ضرر ندارد و در ساختار خود دارای گروه عاملی‌استری است.

(شیمی ۲- پوشاک، نیازی پایان‌ناپذیر؛ صفحه‌های ۱۱۳ و ۱۱۴)

۱۲۳- **گزینهٔ «۴»** *(امیر حاتمیان)*

این ترکیب اتیل‌هپتانوات است که در انگور وجود دارد و این ترکیب از واکنش اتانول و هپتانوئیک‌اسید ایجاد می‌شود. در آناناس اتیل‌بوتانوات با فرمول مولکولی $C_6H_{12}O_2$ وجود دارد.

استر موجود در آناناس: اتیل‌بوتانوات $(C_6H_{12}O_2)$

استر موجود در انگور: اتیل‌هپتانوات $(C_9H_{18}O_2)$

$$C_9H_{18}O_2 - C_6H_{12}O_2 = C_3H_6$$

$$\text{جرم مولی } C_3H_6 = (3\times12)+(6\times1) = 42\,g.mol^{-1}$$

(شیمی ۲- پوشاک، نیازی پایان‌ناپذیر؛ صفحه‌های ۱۱۰ و ۱۱۵)

۱۲۴- **گزینهٔ «۲»** *(محمد عظیمیان‌زواره)*

الیاف a، b و c به ترتیب مربوط به پشم، پنبه و پلی‌استر می‌باشند.

بررسی موارد:

آ) نادرست. الیاف طبیعی (پشم، پنبه و ...)، کمتر از ۵۰% الیاف تولیدی در جهان را تشکیل می‌دهند.

ب) درست. الیاف پلی‌استر برخلاف پنبه و پشم، جزو الیاف ساختگی است.

پ) درست. حدود نیمی از لباس‌های تولیدی در جهان، از پنبه تهیه می‌شود.

ت) درست. سلولز (پلیمر سازندهٔ الیاف پنبه) از گلوکز ($C_6H_{12}O_6$) تشکیل شده است. همانند اتانول (C_2H_6O)، در سلولز نیز سه نوع عنصر C، H و O وجود دارد.

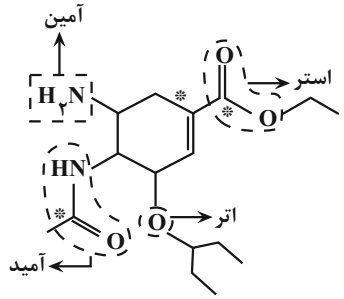
(شیمی ۲- پوشاک، نیازی پایان‌ناپذیر؛ صفحه‌های ۱۰۰، ۱۰۱ و ۱۰۲)

۱۲۵- **گزینهٔ «۱»** *(مسعود جعفری)*

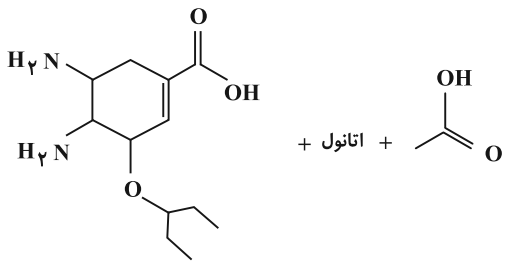
عبارت‌های (پ)، (ت) و (ث) نادرست است.

بررسی عبارت‌ها:

عبارت (آ): این ترکیب شامل گروه‌های عاملی‌استری، آمینی، اتری و آمیدی است.



عبارت (ب)؛ اگر مولکول آب با گروه آمیدی واکنش دهد، یک ترکیب آمینی و یک اسید تولید می‌شود. استیک‌اسید، اسیدی دوکربنه است.



عبارت (پ)؛ فرمول مولکولی این ترکیب به‌صورت $C_{16}H_{28}O_4N_2$ است و در هر واحد فرمولی آن ۵۰ اتم وجود دارد.

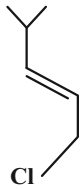
عبارت (ت)؛ ۳ اتم کربن مشخص شده با علامت ستاره در عبارت (آ)، با هیچ اتم هیدروژنی پیوند اشتراکی ندارند. $\frac{3}{16}\times 100 = \%18/75$

عبارت (ث)؛ در ساختار این ترکیب، یک حلقهٔ شش‌ضلعی و در ساختار ویتامین (ث)، یک حلقه ۵ضلعی وجود دارد. در ساختار هر دو ترکیب، پیوند دوگانهٔ $(C=C)$ وجود دارد و هر دو ترکیب سیرنشده هستند؛ بنابراین می‌توانند با بخار برم وارد واکنش شوند.

(شیمی ۲- پوشاک، نیازی پایان‌ناپذیر؛ صفحه‌های ۱۱۳ تا ۱۱۷)

۱۲۶- **گزینهٔ «۴»** *(علیرضا بیانی)*

مونومر آن به‌صورت روبه‌رو است:



$$\Rightarrow C_6H_{11}Cl$$

$$6(12)+11+35/5 = 118/5\ \frac{g}{mol}$$

(شیمی ۲- پوشاک، نیازی پایان‌ناپذیر؛ صفحه‌های ۱۰۴ تا ۱۰۶)

۱۲۷- **گزینهٔ «۳»** *(امیرمحمد سعیری)*

گزینهٔ «۳» نادرست و بقیهٔ گزینه‌ها درست می‌باشند.

جسم نشان داده شده از پلی‌اتن ساخته شده که برای تولید این پلیمر از واکنش بسپارش گاز اتن (اتیلن) استفاده می‌شود. بررسی سایر گزینه‌ها:

گزینهٔ «۱»: کاتالیزگرهایی که در واکنش پلیمری شدن اتن شرکت می‌کنند می‌توانند محتوی اتم‌های آلومینیم (فلز اصلی دستهٔ p) یا تیتانیم (فلز واسطهٔ دستهٔ d) در خود باشد.

گزینهٔ «۲»: نایلون، پلی‌اتن و تفلون از جمله پلیمرهای ساختگی بوده و به همین خاطر، در طبیعت یافت نشده و طی واکنش بسپارش تولید می‌شود.

گزینهٔ «۴»: با تغییر نوع مونومر مصرف شده در واکنش پلیمری شدن، می‌توان فراورده جدید با ساختار و خواص متفاوت را تهیه کرد.

(شیمی ۲- پوشاک، نیازی پایان‌ناپذیر؛ صفحه‌های ۱۰۴ تا ۱۰۶ و ۱۲۳)

۱۲۸- **گزینهٔ «۴»** *(میلاد شیخ‌الاسلامی‌خیاوی)*

بررسی گزینه‌ها:

گزینهٔ «۱»: طبق نمودار صفحهٔ ۱۱۲ شیمی ۲، انحلال‌پذیری الکل‌هایی با بیش از ۷ اتم کربن دقیقاً صفر نیست و اندکی بیشتر است. دلیل این اتفاق وجود گروه هیدروکسیل در ساختار الکل‌هاست که با وجود کوچک بودن باعث انحلال‌پذیری کم الکل‌ها می‌شود.

گزینهٔ «۲»: تمام الکل‌ها با یکدیگر پیوند هیدروژنی تشکیل می‌دهند، اما در الکل‌های ناقطبی، چون میزان این جاذبه کم است، از آن صرف‌نظر می‌کنیم.

گزینهٔ «۳»: در ساختار ویتامین (ث)، یک‌حلقهٔ ۵ضلعی داریم که در یک رأس آن اتم اکسیژن وجود دارد، در حالی‌که در حلقهٔ بنزن، ۶ اتم کربن داریم.

گزینهٔ «۴»، ویتامین (D) حلقه دارد، اما حلقهٔ بنزن نیست، پس یک ترکیب آلی غیرآروماتیک است.

(شیمی ۲- پوشاک، نیازی پایان‌ناپذیر؛ صفحه‌های ۱۱۰ تا ۱۱۴)

۱۲۹- **گزینهٔ «۲»** *(حسن رحمتی‌کوکنده)*

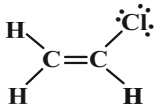
فقط موارد (ت) و (ث) درست هستند.

آ) پلی‌استیرن، از هیدروکربن سیرنشده استیرن تولید می‌شود که پلی‌استیرن نیز سیرنشده و دارای حلقهٔ بنزنی می‌باشد.

ب) تفلون در حلال‌های آلی حل نمی‌شود.

پ) پلیمری که در تهیهٔ دبه‌های آب استفاده می‌شود پلی‌اتن سنگین و بدون شاخه می‌باشد.

ت) وینیل‌کلرید یا کلرواتن با فرمول مولکولی C_2H_3Cl مونومر پلیمر استفاده شده در تهیهٔ کیسهٔ خون می‌باشد:



$$\frac{\text{شمار جفت الکترون‌های پیوندی}}{\text{شمار جفت الکترون‌های ناپیوندی}} = \frac{۶}{۳} = ۲$$

ث) پلی‌اتن سنگین نسبت به پلی‌اتن سبک نیروی بین مولکولی قوی‌تری دارد و چگالی آن بیشتر است.

(شیمی ۲- پوشاک، نیازی پایان ناپذیر؛ صفحه‌های ۱۰۶ تا ۱۰۹)

۱۳۰- **گزینهٔ «۴»** *(میلاد شیخ‌الاسلامی‌فیاوی)*

می‌دانیم در واکنش اسید و الکل یک‌عاملی که منجر به تولید استر و آب می‌شود، ضریب تمام مواد برابر یک است. پس سرعت واکنش با سرعت تولید یا مصرف تک‌تک مواد برابر است. با استفاده از این نکته می‌توان مول تولیدی استر را محاسبه کرد:

$$\bar{R}_{\text{تولید استر}} = +\frac{\Delta n}{\Delta t} \Rightarrow ۰/۰۲۵ = \frac{\Delta n}{۶۰} \Rightarrow \Delta n = ۱/۵\,\text{mol استر}$$

در کنار ۱/۵ مول استر، ۱/۵ مول آب نیز تولید می‌شود. طبق قانون پایستگی جرم، جرم مخلوط واکنش‌دهنده‌ها با جرم مخلوط فراورده‌ها برابر است. پس مجموع جرم ۱/۵ مول استر و ۱/۵ مول آب تولیدی ۲۰۱ گرم است، پس می‌توان جرم مولی استر و فرمول آن را حساب کرد:

$$?\,g\,H_2O = ۱/۵\,mol\,H_2O \times \frac{۱۸\,g\,H_2O}{۱\,mol\,H_2O} = ۲۷\,g\,H_2O$$

$$\Rightarrow \text{جرم استر} = ۲۰۱ - ۲۷ = ۱۷۴\,g \text{ استر}$$

$$?\,\frac{g}{mol} \text{ استر} = ۱۷۴\,g \text{ استر} \times \frac{۱}{۱/۵\,mol} = ۱۱۶\,g.mol^{-۱}$$

از طرفی می‌دانیم فرمول کلی استرهای یک‌عاملی سیرشده، $C_nH_{۲n}O_۲$ می‌باشد، پس داریم:

$$۱۲n + ۲n + ۳۲ = ۱۱۶ \Rightarrow n = ۶$$

در نتیجه فرمول استر حاصل $C_۶H_{۱۲}O_۲$ می‌باشد.

درصد جرمی کربن در استر:

$$\text{درصد جرمی } (C) = \frac{\text{جرم کربن}}{\text{جرم استر}} \times ۱۰۰ = \frac{۶ \times ۱۲}{۱۱۶} \times ۱۰۰ \simeq \%۶۲$$

برای به‌دست آوردن تعداد پیوندهای اشتراکی از رابطهٔ زیر استفاده می‌کنیم:

تعداد پیوندها در ترکیب آلی

$$= \frac{C \times ۴ + H + O \times ۲}{۲} = \frac{۶ \times ۴ + ۱۲ + ۲ \times ۲}{۲} = ۲۰$$

$$?\,\text{mol پیوند اشتراکی} = ۱/۵\,\text{mol} \times \frac{۲۰\,\text{mol پیوند اشتراکی}}{۱\,\text{mol استر}}$$

$$= ۳۰\,\text{mol پیوند اشتراکی}$$

(شیمی ۲- پوشاک، نیازی پایان‌ناپذیر؛ صفحه‌های ۱۱۰ تا ۱۱۲ و ۱۱۴ تا ۱۱۶)

شیمی ۱

۱۳۱- **گزینهٔ «۲»** *(روزبه رضوانی)*

کلسیم فسفات ← نامحلول — آمونیوم نیترات ← محلول

سدیم نیترات ← محلول — استون ← محلول

کلسیم سولفات ← کم‌محلول — شکر ← محلول

باریم سولفات ← نامحلول

منیزیم سولفات ← محلول

در نتیجه: محلول ← ۵ ماده؛ کم‌محلول ← ۱ ماده؛ نامحلول ← ۲ ماده

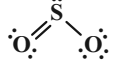
(شیمی ۱- آب، آهنگ زندگی؛ صفحه‌های ۱۰۰ تا ۱۰۲، ۱۰۹، ۱۱۳ و ۱۲۲)

۱۳۲- **گزینهٔ «۴»** *(جهان شاهی‌بیگباغی)*

فقط مورد چهارم درست است.

SO_2 و HCN با توجه به ساختار لوویس‌شان و جهت‌گیری در میدان الکتریکی، مولکول‌های قطبی به شمار می‌روند و مولکول نشان داده شده در داخل میدان با توجه اینکه جهت‌گیری نکرده، یک مولکول ناقطبی می‌باشد.

$$H-C\equiv N:$$



مولکول‌های قطبی برخلاف ناقطبی‌ها، دارای گشتاور دوقطبی بزرگ‌تر از صفر بوده و برای همین در میدان الکتریکی جهت‌گیری می‌کنند و اگر جرم مولی آن‌ها به هم نزدیک باشد، مولکول‌های قطبی نقطهٔ جوش بالاتری دارند. طبق یک قاعدهٔ کلی نقطهٔ ذوب و جوش ترکیبات قطبی از ترکیبات ناقطبی با جرم مولی برابر یا نزدیک به هم، بیشتر است.

کربن تتراکلرید $\left(\begin{array}{c}:\ddot{Cl}:\\ |\\ :\ddot{Cl}-C-\ddot{Cl}:\\ |\\ :\ddot{Cl}:\end{array}\right)$ و آمونیاک $\left(H-\ddot{N}(-H)-H\right)$؛ با توجه به ساختارشان، به ترتیب یک مولکول ناقطبی و قطبی می‌باشند.

(شیمی ۱- آب، آهنگ زندگی؛ صفحه‌های ۱۰۳ تا ۱۰۷)

۱۳۳- **گزینهٔ «۴»** *(محسن بابامیری)*

بررسی همهٔ گزینه‌ها:

گزینهٔ «۱»: مولکول آب به دلیل جفت‌الکترون‌های ناپیوندی روی اتم مرکزی، قطبی بوده و این قطبیت باعث خواص ویژه‌ای در آب شده است.

گزینهٔ «۲»: اتم اکسیژن سر منفی بوده و به سمت قطب مثبت قرار می‌گیرد. اتم‌های هیدروژن نیز سر مثبت می‌باشند و به سمت قطب منفی قرار می‌گیرند.

گزینهٔ «۳»: آب، قطبی و CO_2، O_2 و CH_4 همگی ناقطبی هستند، بنابراین در میدان الکتریکی، رفتاری متفاوت با آب دارند.

گزینهٔ «۴»: در HF به دلیل جاذبهٔ بین H و F و مولکول مجاور بین دو مولکول پیوند هیدروژنی وجود دارد که از جاذبه بین مولکول‌های H_2S قوی‌تر بوده و در نتیجه HF نقطهٔ جوش بیشتری دارد.

(شیمی ۱- آب، آهنگ زندگی؛ صفحه‌های ۱۰۴، ۱۰۶ و ۱۰۷)

۱۳۴- **گزینهٔ «۳»** *(عبدالرضا دارفواه)*

از حل شدن هر مول لیتیم سولفات در آب، ۳ مول یون آزاد می‌شود.

$$\underbrace{Li_2SO_4}_{\text{۱ مول ماده‌ٔ یونی}} \rightarrow \underbrace{2Li^+ + SO_4^{2-}}_{\text{۳ مول یون}}$$

$$?\,g\,Li_2SO_4 = 5L\ \text{محلول} \times \frac{0/3\ mol\ \text{یون}}{1L\ \text{محلول}} \times \frac{1\,mol\,Li_2SO_4}{3\,mol\ \text{یون}}$$

$$\times \frac{110\,g\,Li_2SO_4}{1\,mol\,Li_2SO_4} = 55\,g\,Li_2SO_4$$

(شیمی ۱- آب، آهنگ زندگی؛ صفحه‌های ۹۸ تا ۱۰۰)

۱۳۵- **گزینهٔ «۲»** *(حسن رحمتی‌کوکنده)*

فقط مقایسهٔ (ت) نادرست است.

بررسی موارد:

آ) قدرت پیوند هیدروژنی در مولکول‌های داده شده به‌صورت $NH_3 < H_2O < HF$ می‌باشد، بنابراین میزان قطبی بودن این مولکول‌ها درست مقایسه شده است. H_2S به دلیل نداشتن پیوند هیدروژنی از این ۳ ماده کمتر و به دلیل قطبی بودن از CH_4 ناقطبی قطبی‌تر است.

ب) NO به دلیل قطبی بودن از مولکول‌های O_2 و N_2 دمای جوش بالاتری دارد. و O_2 نیز به دلیل داشتن جرم مولی بیشتر نسبت به N_2، دمای جوش بالاتری دارد.

پ) مولکول H_2O به دلیل داشتن پیوند هیدروژنی، گشتاور دوقطبی بیشتری نسبت به مولکول قطبی H_2S دارد. گشتاور CH_4 نیز صفر می‌باشد.

ت) هرچه نقطهٔ جوش یک گاز، بیشتر باشد، آسان‌تر مایع می‌شود. HCl برخلاف O_2 و F_2 قطبی است و دمای جوش بالاتری دارد $(-85^\circ C)$،

همچنین با وجود جرم مولی بیشتر F_2 نسبت به O_2، دمای جوش O_2 $(-183^\circ C)$، بیشتر از دمای جوش F_2 $(-188^\circ C)$ می‌باشد.

(شیمی ۱- آب، آهنگ زندگی؛ صفحه‌های ۱۰۳ تا ۱۰۷)

۱۳۶- **گزینهٔ «۲»** *(امیرحسین طیبی)*

محلول با کاهش دما به یک محلول سیرنشده تبدیل شده است که با تبخیر شدن بخشی از حلال دوباره به حالت سیرشده باز می‌گردد. در نتیجه می‌توانیم نتیجه بگیریم که انحلال‌پذیری این محلول با دما رابطهٔ عکس دارد و معادلهٔ انحلال‌پذیری آن، یک خط با شیب منفی می‌باشد.

ابتدا جرم حل‌شوندهٔ موجود در محلول سیرشدهٔ نمک X در دمای $60^\circ C$ را محاسبه می‌کنیم:

$$\theta = 60^\circ C \Rightarrow \frac{16g\,X}{116g\,\text{محلول}} = \frac{?g\,X}{34/8g\,\text{محلول}} \Rightarrow 4/8gX$$

پس در محلول اولیه $30g$ آب و $4/8g$ نمک X وجود داشته است.

$$\theta = 20^\circ C \Rightarrow \frac{S_2\,gX}{100g\,\text{آب}} = \frac{4/8g\,X}{(30-18)g\,\text{آب}} \Rightarrow S_2 = 40gX$$

معادلهٔ انحلال‌پذیری برحسب دمای نمک x را محاسبه می‌کنیم.

$$\begin{matrix}\theta_1 = 60^\circ C \to S_1 = 16 \\ \theta_2 = 20^\circ C \to S_2 = 40\end{matrix} \Rightarrow S = -0/6\theta + 52$$

انحلال‌پذیری نمک X در دمای $45^\circ C$ را محاسبه می‌کنیم.

$$S(45^\circ C) = (-0/6\times 45) + 52 = 25g\frac{X}{100gH_2O}$$

غلظت مولار محلول سیرشدهٔ نمک X در دمای $45^\circ C$ را محاسبه می‌کنیم.

$$C_M = \frac{n}{v} = \frac{25gX \times \frac{1molX}{125gX}}{125g\,\text{محلول} \times \frac{1mL\,\text{محلول}}{1g\,\text{محلول}} \times \frac{1L\,\text{محلول}}{1000mL\,\text{محلول}}}$$

$$= \frac{0/2molX}{0/125L\,\text{محلول}} = 1/6\frac{mol}{L}$$

(شیمی ۱- آب، آهنگ زندگی؛ صفحه‌های ۹۸ تا ۱۰۳)

۱۳۷- **گزینهٔ «۱»** *(رضا سلیمانی)*

فقط عبارت اول نادرست است.

عبارت اول: ردپای آب نشان می‌دهد که هر فرد چه مقدار از آب قابل استفاده و در دسترس (نه تمام آب‌های جهان) را مصرف می‌کند.

(شیمی ۱- آب، آهنگ زندگی؛ صفحه‌های ۱۱۰، ۱۱۶، ۱۱۷ و ۱۲۲)

۱۳۸- **گزینهٔ «۳»** *(روزبه رضوانی)*

$$M_2SO_4 \to 2M^+ + SO_4^{2-}$$

$$8/7gM_2SO_4 = 500mL \times \frac{0/2molM^+}{1000mL} \times \frac{1molM_2SO_4}{2molM^+}$$

$$\times \frac{(2x+96)gM_2SO_4}{1molM_2SO_4} \Rightarrow 8/7 = \frac{2x+96}{20} \Rightarrow x = 39g.mol^{-1}$$

(شیمی ۱- آب، آهنگ زندگی؛ صفحه‌های ۹۸ تا ۱۰۰)

۱۳۹- **گزینهٔ «۴»** *(حسین ناصری‌ثانی)*

بررسی گزینه‌ها:

گزینهٔ «۱»: شکل نشان‌دهندهٔ پدیدهٔ اسمز است که طی آن مولکول‌های آب با عبور از غشای نیمه‌تراوا از سمت محلول رقیق‌تر به سمت محلول غلیظ‌تر جابه‌جا می‌شوند.

گزینهٔ «۲»: در پدیدهٔ اسمز مولکول‌های آب به‌صورت خودبه‌خود از محلول رقیق به محلول غلیظ جابه‌جا می‌شوند.

گزینهٔ «۳»: هرگاه بر محلول غلیظ (محلول سمت چپ در شکل) فشار کافی وارد شود، در آن صورت جهت جابه‌جایی خالص مولکول‌های آب عوض شده و از محلول غلیظ به سمت محلول رقیق می‌روند که این فرایند «اسمز معکوس» نامیده می‌شود.

گزینهٔ «۴»: با پدیدهٔ اسمز نمی‌توان نمک‌های محلول در آب دریا را از آن جدا و آب شیرین تهیه کرد.

(شیمی ۱- آب،آهنگ زندگی؛ صفحه‌های ۱۱۷ و ۱۱۸)

۱۴۰- **گزینهٔ «۱»** *(سیدصدرا عادل)*

همهٔ عبارت‌ها نادرست‌اند.

راه حل: زمانی ما پدیدهٔ اسمز و اسمز معکوس داریم که از غشای نیمه‌تراوا استفاده کنیم، اما در این سوال، غشای تراوا استفاده شده است و تنها اتفاقی که می‌افتد، این است که یون‌های نمک از غشا عبور کرده و محلولی همگن در دو طرف غشا پس از مدتی به‌وجود خواهد آمد.

(شیمی ۱- آب، آهنگ زندگی؛ صفحه‌های ۱۱۷ و ۱۱۸)

شیمی ۳

۱۴۱- **گزینهٔ «۴»** *(امیر قاسمی)*

فقط عبارت چهارم درست است.

بررسی عبارت‌های نادرست:

عبارت اول: صابون مایع و جامد از سر ناقطبی خود در چربی حل می‌شوند.

عبارت دوم: با توجه به اینکه سر ناقطبی پاک‌کننده‌های صابونی از یک هیدروکربن بلندزنجیر ساخته شده و سر قطبی آن‌ها گروه $(-COO^-)$ است پس سر قطبی کوچکتر از سر ناقطبی است.

عبارت سوم: اسیدهای چرب، کربوکسیلیک اسیدهایی با زنجیر بلند کربنی هستند و در واکنش با $NaOH$، صابون جامد تولید می‌کنند اما ترکیب $C_5H_{11}COOH$ یک اسید بلندزنجیر نیست، که بتواند در واکنش با $NaOH$، صابون جامد تولید کند.

عبارت پنجم: قسمت آنیونی صابون، قطبی نیست. (بخش آنیونی در آب حل می‌شود.)

(شیمی ۳- مولکول‌ها در خدمت تندرستی؛ صفحه‌های ۵، ۶ و ۸)

۱۴۲- **گزینهٔ «۳»** *(سیدرمیم هاشمی‌دهکردی)*

فقط مورد چهارم نادرست است.

محلول NH_3 در آب دارای خاصیت بازی (با $pH > 7$) و محلول N_2O_5 در آب، اسیدی (با $pH < 7$) است.

بررسی سایر موارد:

مورد اول: NH_3 باز ضعیف بوده و در محلول آبی آن، بخش عمدهٔ مولکول‌های آن به‌صورت یونیده نشده می‌باشد.

مورد دوم: N_2O_5 با آب اسید قوی HNO_3 را تولید می‌کند که تقریباً تمام مولکول‌های آن یونش می‌یابند.

مورد سوم: مطابق واکنش‌های زیر، یک مول N_2O_5، ۴ مول یون و یک مول NH_3، به علت یونش ناکامل، کم‌تر از ۲ مول یون تشکیل می‌دهد.

$$N_2O_5(s) + H_2O(l) \rightarrow 2HNO_3(aq)(2H^+, 2NO_3^-)$$

$$NH_3(g) + H_2O(l) \rightleftharpoons NH_4OH(aq)(NH_4^+, OH^-)$$

(شیمی ۳- مولکول‌ها در خدمت تندرستی؛ صفحه‌های ۱۳ تا ۱۹)

۱۴۳- **گزینهٔ «۱»** *(امیرحسین معروفی)*

ظرف ۱: $pH = 3/7 \Rightarrow [H^+] = 10^{-3/7} = 10^{-4} \times 10^{0/3} = 2 \times 10^{-4} mol.L^{-1}$

$$K_a = \frac{[H^+][CH_3COO^-]}{[CH_3COOH]_{\text{نهایی}}}$$

$$[CH_3COOH]_{\text{نهایی}} = [CH_3COOH]_{\text{اولیه}} - [H^+]$$

$$\Rightarrow K_a = \frac{[H^+][CH_3COO^-]}{[CH_3COOH]_{\text{اولیه}} - [H^+]}$$

$$\xrightarrow{[H^+]=[CH_3COO^-]=2\times10^{-4} mol.L^{-1}}$$

$$2 \times 10^{-5} = \frac{2 \times 10^{-4} \times 2 \times 10^{-4}}{[CH_3COOH]_{\text{اولیه}} - 2 \times 10^{-4}}$$

$$\Rightarrow [CH_3COOH]_{\text{اولیه}} = 2/2 \times 10^{-3} mol.L^{-1}$$

$$?mol\ CH_3COOH = 1L \times \frac{2/2 \times 10^{-3} mol\ CH_3COOH}{1L}$$

$$= 2/2 \times 10^{-3} mol\ CH_3COOH$$

جرم مولی $CH_3COOH = 24 + 32 + 4 = 60\ g.mol^{-1}$

$$?g\ CH_3COOH = 2/2 \times 10^{-3} mol\ CH_3COOH$$

$$\times \frac{60g\ CH_3COOH}{1mol\ CH_3COOH} = 0/132g\ CH_3COOH$$

ظرف ۲: $pH = 11 \Rightarrow [H^+] = 10^{-11} mol.L^{-1}$

$$\Rightarrow [OH^-] = 10^{-3} mol.L^{-1} = M\alpha \xrightarrow{\alpha=1} M = 10^{-3} mol.L^{-1}$$

$$n = M.V = 10^{-3} \times 1 = 10^{-3} mol$$

$$\Rightarrow ?mg\ NaOH = 10^{-3} mol\ NaOH \times \frac{40g\ NaOH}{1mol\ NaOH} \times \frac{10^3 mg}{1g}$$

$$= 40mg\ NaOH$$

(شیمی ۳- مولکول‌ها در خدمت تندرستی؛ صفحه‌های ۲۳ تا ۲۷)

۱۴۴- **گزینهٔ «۴»** *(حسین ناصری‌ثانی)*

بررسی عبارت‌ها:

عبارت «آ»: با توجه به این‌که ثابت یونش BOH از AOH بزرگ‌تر است، پس BOH باز قوی‌تری است.

عبارت «ب»: چون BOH باز قوی‌تری است، بنابراین در شرایط یکسان، در مقایسه با AOH بیشتر یونش‌یافته و درجهٔ یونش بزرگ‌تری دارد.

عبارت «پ»: از آنجا که در شرایط یکسان، BOH به میزان بیشتری یونش می‌یابد، در نتیجه در محلول آن غلظت OH^- بیشتر و غلظت H^+ کمتر بوده و pH محلول آن در مقایسه با محلول AOH بیشتر خواهد بود.

عبارت «ت»: BOH در مقایسه با AOH باز قوی‌تری است. بنابراین در شرایط یکسان به میزان بیشتری یونیده می‌شود و ذرات یونش‌نیافته در محلول آن کمتر از محلول AOH خواهد بود.

(شیمی ۳- مولکول‌ها در خدمت تندرستی؛ صفحه‌های ۲۸ تا ۳۰)

۱۴۵- **گزینهٔ «۳»** *(رضا سلیمانی)*

قدرت اسیدی (K_a) نیتروواسید (HNO_2) از هیدروسیانیک‌اسید (HCN) بیشتر است. در نتیجه میزان یون‌های حاصل از تفکیک نیتروواسید (HNO_2) بیشتر خواهد بود.

بررسی همهٔ گزینه‌ها:

گزینهٔ «۱»: غلظت یون سیانید (CN^-) کمتر از یون (NO_2^-) است.

گزینهٔ «۲»: فلز منیزیم با محلول نیتروواسید نسبت به هیدروسیانیک‌اسید سریع‌تر واکنش می‌دهد، چون غلظت یون هیدرونیوم (H_3O^+) آن بیشتر است ولی در نهایت حجم گاز H_2 تولید شده برابر است.

گزینهٔ «۳»: pH محلول هیدروسیانیک‌اسید، از pH محلول نیتروواسید بیشتر است چون دارای هیدرونیوم (H_3O^+) کمتری است. سرعت واکنش فلز منیزیم با pH محلول اسیدی رابطهٔ عکس دارد.

گزینهٔ «۴»: چون میزان یونش در هیدروسیانیک‌اسید (HCN) کمتر است، میزان غلظت مولکولی (HCN) بیشتر از (HNO_2) خواهد بود.

(شیمی ۳- مولکول‌ها در خدمت تندرستی؛ صفحه‌های ۲۳ تا ۲۵)

۱۴۶- **گزینهٔ «۱»** *(سهراب صادقی‌زاده)*

تنها مورد چهارم درست است. بررسی موارد:

مورد اول: در بازها، هرچه K_b بزرگ‌تر باشد، آن باز قوی‌تر است.

مورد دوم: سدیم هیدروکسید یک باز قوی است و برای باز کردن لوله‌هایی مناسب است که حاوی آلاینده‌های اسیدی باشند، نه هر نوع آلاینده‌ای.

مورد سوم: دیوارهٔ داخلی معده به‌طور طبیعی مقدار کمی از یون‌های هیدرونیوم را جذب می‌کند.

مورد چهارم:

$$2HCl + Mg(OH)_2 \rightarrow MgCl_2 + 2H_2O$$

$$?\,L\,Mg(OH)_2 = 3\,L\,HCl \times \frac{0/03\,mol\,HCl}{1\,L\,HCl} \times \frac{1\,mol\,Mg(OH)_2}{2\,mol\,HCl}$$

$$\times \frac{1\,L\,Mg(OH)_2}{0/02\,mol\,Mg(OH)_2} = 2/25\,L\,Mg(OH)_2$$

مورد پنجم: جوش‌شیرین به تنهایی نیز می‌تواند به عنوان ضد اسید استفاده شود.

(شیمی ۳- مولکول‌ها در خدمت تندرستی؛ صفحه‌های ۲۸ تا ۳۲)

۱۴۷- **گزینهٔ «۲»** *(اسلام طالبی)*

$$pH = 1 \Rightarrow [H^+] = 10^{-1}\,mol.L^{-1} \Rightarrow [HCl] = 0/1\,mol.L^{-1}$$

$$pH = 10/7 \Rightarrow [H^+] = 10^{-10/7} \Rightarrow [OH^-] = 10^{-3/3} = 10^{-4} \times 10^{0/7}$$

$$= 5 \times 10^{-4}\,mol.L^{-1}$$

$$K_b = 10^{-5} = \frac{(5 \times 10^{-4})^2}{[BOH]} \Rightarrow [BOH] \simeq 0/025\,mol.L^{-1}$$

$$M_1V_1 = M_2V_2 \Rightarrow 0/01 = 0/025 \times V \Rightarrow V = 0/4\,L = 400\,mL$$

(شیمی ۳- مولکول‌ها در خدمت تندرستی؛ صفحه‌های ۲۴ تا ۳۰)

۱۴۸- **گزینهٔ «۲»** *(میلاد شیخ‌الاسلامی‌فیاوی)*

با توجّه به جدول زیر گزینهٔ ۲ صحیح است.

نوع مخلوط / ویژگی	سوسپانسیون‌ها	کلوئیدها	محلول‌ها
رفتار در برابر نور	نور را پخش می‌کنند.	نور را پخش می‌کنند.	نور را عبور می‌دهند.
همگن‌بودن	ناهمگن	ناهمگن	همگن
پایداری	ناپایدار / ته‌نشین می‌شوند.	پایدار / ته‌نشین نمی‌شوند.	پایدار / ته‌نشین نمی‌شوند.
ذره‌های سازنده	ذره‌های ریز ماده	توده‌های مولکولی با اندازه‌های متفاوت	یون‌ها یا مولکول‌های مجزا

(شیمی ۳- مولکول‌ها در خدمت تندرستی؛ صفحه‌های ۶ و ۷)

۱۴۹- **گزینهٔ «۲»** *(حامد رمضانیان)*

$$Ca(OH)_2(aq)+2HNO_2(aq)\rightarrow Ca(NO_2)_2(aq)+2H_2O(l)$$

$$Ca(OH)_2: pH=11/6 \xrightarrow{pH+pOH=14}$$

$$pOH=14-11/6=2/4\Rightarrow [OH^-]=10^{-2/4}$$

$$[OH^-]=10^{-3+0/6}=10^{-3}\times 10^{0/6}=4\times 10^{-3}mol.L^{-1}$$

$$M_{Ca(OH)_2}=\frac{[OH^-]}{2}=2\times 10^{-3}mol.L^{-1}$$

$$m_1v_1n_1=m_2v_2n_2\Rightarrow 2\times 10^{-3}\times 20\times 2=m_2\times 8\times 1$$

$$\Rightarrow m_2=10^{-2}mol.L^{-1}\rightarrow \text{غلظت اسید}$$

$$\text{در محلول اسید}: [H^+]=10^{-3/7}=10^{-4+0/3}=2\times 10^{-4}mol.L^{-1}$$

$$\Rightarrow \alpha=\frac{[H^+]}{M}=\frac{2\times 10^{-4}}{10^{-2}}=0/02$$

(شیمی ۳- مولکول‌ها در خدمت تندرستی؛ صفحه‌های ۱۹، ۲۴ تا ۲۸ و ۳۱)

۱۵۰- **گزینهٔ «۲»** *(سهراب صادقی‌زاده)*

چون pH محلول نهایی کوچک‌تر از ۷ است، محلول حاصل خاصیت اسیدی دارد و باید از رابطهٔ زیر استفاده کنیم:

$$[H^+]_{\text{نهایی}}=\frac{mol\,H^+-mol\,OH^-}{V_1+V_2}=\frac{M_1V_1-mol\,OH^-}{V_1+V_2}$$

$$pH_{\text{نهایی}}=5/7\rightarrow [H^+]_{\text{نهایی}}=10^{-5/7}=10^{-6}\times 10^{0/3}$$

$$=2\times 10^{-6}mol.L^{-1}$$

$$M_1=\frac{ppm\times d}{1000\times \text{جرم مولی}}=\frac{109/5\times 1/17}{1000\times 36/5}\approx 3/5\times 10^{-3}mol.L^{-1}$$

$$2\times 10^{-6}=\frac{3/5\times 10^{-3}\times 2-molOH^-}{2}\rightarrow molOH^-\approx 7\times 10^{-3}mol$$

$$\Rightarrow 7\times 10^{-3}mol\,NaHCO_3\times\frac{84gNaHCO_3}{1molNaHCO_3}\approx 0/6gNaHCO_3$$

$$\text{درصد خلوص}=\frac{\text{جرم مادهٔ خالص}}{\text{جرم مادهٔ ناخالص}}\times 100$$

$$\Rightarrow \text{جرم مادهٔ ناخالص}=\frac{\text{جرم مادهٔ خالص}}{\text{درصد خلوص}}\times 100$$

$$=\frac{0/6}{80}\times 100=0/75gNaHCO_3$$

(شیمی ۳- مولکول‌ها در خدمت تندرستی؛ صفحه‌های ۲۴ تا ۳۶)

شیمی ۳- آشنا

۱۵۱- **گزینهٔ «۴»** *(کتاب اول)*

کلوییدها و سوسپانسیون‌ها هر دو مخلوط‌هایی ناهمگن هستند.

بررسی سایر گزینه‌ها:

گزینهٔ (۱): نیروی غالب در چربی از نوع وان‌دروالسی است که برای پاک کردن آن از روی لباس (آلاینده) می‌توان از حلال‌های ناقطبی استفاده کرد.

گزینهٔ (۲): اوره ترکیبی قطبی بوده و بین مولکول‌های آن پیوند هیدروژنی برقرار می‌شود. یعنی میان اتم N از یک مولکول و H از مولکول دیگر پیوند هیدروژنی برقرار می‌شود.

گزینهٔ (۳): چربی‌ها، مخلوطی از اسیدهای چرب و استرهای بلند زنجیر (سه عاملی) می‌باشند.

(شیمی ۳- مولکول‌ها در خدمت تندرستی؛ صفحه‌های ۴ تا ۷)

۱۵۲- **گزینهٔ «۴»** *(کتاب اول)*

هر ۴ عبارت نادرست هستند.

بررسی همهٔ موارد:

- بازها همانند اسیدها باعث آسیب به دست می‌شوند. (حتی آسیب شدیدتری نسبت به اسیدها ایجاد می‌کنند.)

- اسید معده، هیدروکلریک اسید است.

- آرنیوس نخستین کسی بود که اسیدها و بازها را بر یک مبنای علمی توصیف کرد.

- اگر در محلولی $[H_3O^+]=[OH^-]$ باشد، آن محلول خنثی است و خاصیت اسیدی یا بازی ندارد.

(شیمی ۳- مولکول‌ها در خدمت تندرستی؛ صفحه‌های ۱۳ تا ۱۹)

۱۵۳- **گزینهٔ «۳»** *(کتاب اول)*

با توجه به نمودار، اسید HA به‌طور کامل یونیده می‌شود از این رو اسیدی قوی بوده و محلول آن شامل یون‌های آب‌پوشیده است.

بررسی سایر گزینه‌ها:

گزینهٔ (۱): از آن‌جایی که اسید HB به‌طور جزئی یونیده می‌شود پس اسیدی ضعیف بوده و می‌تواند استیک اسید باشد در عوض اسید HA به‌طور کامل یونیده شده و می تواند نیتریک‌اسید باشد.

گزینهٔ (۲): نظر به این‌که HA اسید قوی‌تری از HB است، در شمار مول‌های برابر از این اسیدها، رسانایی الکتریکی HA بیشتر خواهد بود.

گزینهٔ (۴): طبق رابطهٔ $pH=-\log[H^+]$ هرچه اسیدی قوی‌تر باشد غلظت یون هیدرونیوم بیشتر بوده و pH محلول کوچکتر می‌شود.

(شیمی ۳- مولکول‌ها در خدمت تندرستی؛ صفحه‌های ۳۰ تا ۳۴)

۱۵۴- **گزینهٔ «۳»** *(کتاب اول)*

بررسی همهٔ گزینه‌ها:

گزینهٔ (۱): خصلت اسیدی وابسته به $[H^+]$ است که در محلول HA بیش‌تر است و در نتیجه خاصیت اسیدی محلول HA بیش‌تر است.

گزینهٔ (۲): HA و HB هر دو اسید ضعیف ($\alpha<1$) هستند و هیچ‌یک نمی‌توانند نیتریک‌اسید باشند.

گزینهٔ «۳»:

$$\left.\begin{array}{l} HA: K_a=\dfrac{(8\times10^{-3})(8\times10^{-3})}{4\times10^{-2}}=16\times10^{-4}\,mol.L^{-1} \\ HB: K_a=\dfrac{(10^{-4})(10^{-4})}{2\times10^{-3}}=5\times10^{-6}\,mol.L^{-1} \end{array}\right\} \frac{16\times10^{-4}}{5\times10^{-6}}=320$$

گزینهٔ «۴»:

$$HA \Rightarrow \begin{cases} \text{غلظت اولیه اسید}=0/04+0/008=0/048\ mol.L^{-1} \\ \alpha_{HA}=\dfrac{0/008}{0/048}=\dfrac{1}{6} \end{cases}$$

$$HB \Rightarrow \begin{cases} \text{غلظت اولیه اسید}=0/002+0/0001=0/0021\ mol.L^{-1} \\ \alpha_{HB}=\dfrac{0/0001}{0/0021}=\dfrac{1}{21} \end{cases}$$

$$\frac{1}{6}>\frac{1}{21}$$

(شیمی ۳- مولکول‌ها در خدمت تندرستی؛ صفحه‌های ۱۸ تا ۲۵)

۱۵۵- **گزینهٔ «۲»** *(کتاب اول)*

$$CHCOOH+H_2O \rightleftharpoons CH_3COO^- + H_3O$$

$$K_{a\,\text{اتانوئیک اسید}}=\frac{[H^+][CH_3COO^-]}{[CH_3COOH]}$$

$$=\frac{[H^+]^2}{M_{CH_3COOH}-[H^+]}$$

$$pH=3 \Rightarrow 2\times10^{-5}=\frac{10^{-6}}{M_{CH_3COOH}-10^{-3}}$$

$$\Rightarrow M_{CH_3COOH}=5\times10^{-2}+10^{-3}=0/051\ mol.L^{-1}$$

$$H_2O+ClCH_2COOH \rightleftharpoons ClCH_2COO^- + H_3O^+$$

$$K_{a\,\text{کلرواتانوییک اسید}}=\frac{\left[H^+\right]\left[ClCH_2COO^-\right]}{\left[ClCH_2COOH\right]}$$

$$K_a=\frac{[H^+]^2}{M_{ClCH_2COOH}-[H^+]}$$

$$\Rightarrow \quad 2\times10^{-3}=\frac{10^{-6}}{M_{ClCH_2COOH}-10^{-3}}$$

$$\Rightarrow M_{ClCH_2COOH}=5\times10^{-4}+10^{-3}=1/5\times10^{-3}\,mol.L^{-1}$$

$$\Rightarrow \frac{M_{ClCH_2COOH}}{M_{CH_3COOH}}=\frac{1/5\times10^{-3}}{0/051}\simeq 0/03$$

(شیمی ۳- مولکول‌ها در خدمت تندرستی؛ صفحه‌های ۲۰ تا ۲۵)

۱۵۶- **گزینهٔ «۲»** *(کتاب اول)*

ابتدا غلظت اولیهٔ باز AOH را محاسبه می‌کنیم:

$$AOH \Rightarrow \begin{cases} pH = ۱۱ \rightarrow pOH = ۳ \rightarrow [OH^-] = ۱۰^{-۳}\,mol.L^{-۱} \\ [OH^-] = M.\alpha \Rightarrow ۱۰^{-۳} = M \times \frac{۱۰}{۱۰۰} \rightarrow M = ۱۰^{-۲}\,mol.L^{-۱} \end{cases}$$

$$?\,gHCl = ۵۰mL\,محلول \times \frac{۱۰^{-۲}\,molAOH}{۱۰۰۰mL\,محلول} \times \frac{۱molHCl}{۱molAOH} \times \frac{۳۶/۵gHCl}{۱molHCl}$$

$$= ۰/۰۱۸۲۵gHCl$$

(شیمی ۳- مولکول‌ها در خدمت تندرستی؛ صفحه‌های ۲۵، ۲۸ و ۲۹)

۱۵۷- **گزینهٔ «۳»** *(کتاب اول)*

ابتدا از طریق $pH \rightarrow pOH \xrightarrow{\text{و سپس}} [OH^-] = [KOH]$ **را به‌دست می‌آوریم:**

$$pH = ۱۲/۷ \rightarrow pOH = ۱/۳ \rightarrow [OH^-]$$

$$= ۱۰^{-pOH} = ۱۰^{-۱/۳} = ۱۰^{-۲} \times ۱۰^{۰/۷} = ۵ \times ۱۰^{-۲}\,mol/L$$

$$?\,gKOH = ۱۰۰mL\,محلول \times \frac{۵ \times ۱۰^{-۲}\,molKOH}{۱۰۰۰mL\,محلول} \times \frac{۵۶gKOH}{۱molKOH} = ۰/۲۸gKOH$$

(شیمی ۳- مولکول‌ها در خدمت تندرستی؛ صفحه‌های ۲۵، ۲۸ و ۲۹)

۱۵۸- **گزینهٔ «۳»** *(کتاب اول)*

برای زدودن مسیر لوله‌ای که با مخلوطی از اسیدهای چرب مسدود شده باشد از محلول غلیظ سدیم هیدروکسید استفاده می‌شود. همچنین برای پاک‌کردن لوله‌ها از رسوب کلسیم کربنات، می‌توان از محلول هیدروکلریک اسید بهره جست.

بررسی سایر گزینه‌ها:

گزینهٔ (۱): گل ادریسی در خاک اسیدی به رنگ آبی و در خاک قلیایی به رنگ قرمز شکوفا می‌شود.

گزینهٔ (۲): از محلول پتاسیم هیدروکسید به عنوان ضداسید برای رفع سوزش معده استفاده نمی‌شود.

گزینهٔ (۴): از جوهر نمک برای پاک‌کردن موادی که خصلت بازی (مانند کلسیم کربنات) دارند استفاده می‌شود.

(شیمی ۳- مولکول‌ها در خدمت تندرستی؛ صفحه‌های ۳۱، ۳۲ و ۳۴)

۱۵۹- **گزینهٔ «۳»** *(کتاب اول)*

بررسی گزینه‌های نادرست:

گزینهٔ (۱): برخی ترکیبات مانند آمونیاک در آب به میزان کمی یونش پیدا می‌کنند و الکترولیت ضعیف‌اند در حالی که شکر غیر الکترولیت است.

گزینهٔ (۲): محلول شیشه‌پاک‌کن همانند محلول آب و صابون دارای pH بزرگ‌تر از ۷ است.

گزینهٔ (۴): در غلظت و دمای یکسان، رسانایی الکتریکی محلول لوله‌باز کن از محلول شیشه‌پاک‌کن بیش‌تر است، زیرا محلول لوله‌بازکن حاوی باز قوی است و به میزان بیش‌تری یونش می‌یابد.

(شیمی ۳- مولکول‌ها در خدمت تندرستی؛ صفحه‌های ۲۸ و ۲۹)

۱۶۰- **گزینهٔ «۱»** *(کتاب اول)*

$$[H^+]_{\text{شیره معده}} = ۱۰^{-۱/۴} = ۱۰^{-۲} \times ۱۰^{۰/۶} = ۴ \times ۱۰^{-۲}\,mol/L$$

$$[Mg(OH)_۲] = ۲۹۰\frac{g}{\text{لیتر}} \times \frac{۱mol}{۵۸g} = ۵mol/L$$

$$M_b V_b n_b = M_a V_a n_a$$

$$M_b V_b \times ۲ = (۴ \times ۱۰^{-۲}) \times (\frac{۲/۵}{۲} \times ۱۰۰۰) \times ۱$$

$$\Rightarrow V_b = ?\,mL\ Mg(OH)_۲ = \frac{۵۰}{۵ \times ۲} = ۵\,mL$$

(شیمی ۳- مولکول‌ها در خدمت تندرستی؛ صفحه‌های ۳۰ تا ۳۲)