دفترچه پاسخ

آزمون ۱۶ شهریور ۱۴۰۳
اختصاصی دوازدهم ریاضی

بنیاد علمی آموزشی قلم‌چی (وقف عام)

پدیدآورندگان

	نام درس	نام طراحان
اختصاصی	حسابان ۲ و ریاضی پایه	امیرحسین ابومحبوب-جلیل احمدمیربلوچ-توحید اسدی-محسن اسماعیل‌پور-محمد پیمانی-سهیل حسن‌خان‌پور-عادل حسینی بهرام حلاج-طاهر دادستانی-میلاد سجادی‌لاریجانی-محمدحسن سلامی‌حسینی-علی شهرابی-یوسف عراز-حمید علیزاده نیما کدیوریان-مصطفی کرمی-میلاد منصوری-سروش موئینی-سیدجواد نظری-جهانبخش نیکنام
	هندسه	محمدمهدی ابوترابی-امیرحسین ابومحبوب-علی ایمانی-رضا بخشنده-جواد حاتمی-افشین خاصه‌خان-فرزانه خاکپاش محمد خندان یاسین سپهر-رضا عباسی‌اصل-فرشاد فرامرزی-محمدابراهیم گیتی‌زاده-سهام مجیدی‌پور-رحیم مشتاق‌نظم محمد هجری-سرژ یقیازاریان‌تبریزی
	آمارواحتمال وریاضیات گسسته	امیرحسین ابومحبوب-علی ایمانی-افشین خاصه‌خان-فرزانه خاکپاش-آرش رحیمی-علیرضا شریف‌خطیبی-علی اکبرعلی‌زاده محمدعلی کاظم‌نظری-علیرضا کلانتری-مهرداد ملوندی-مختار منصوری-میلاد منصوری-نیلوفر مهدوی-هومن نورائی
	فیزیک	شهرام احمدی‌دارانی-خسرو ارغوانی‌فرد-عباس اصغری-محمد اکبری-عبدالرضا امینی‌نسب-احسان ایرانی-رامین آرامش‌اصل زهره آقامحمدی-امیرحسین برادران-امیر پوریوسف-میثم دشتیان-محمدعلی راست‌پیمان-رامین شادلویی-مصطفی کیانی علیرضا گونه-حسین مخدومی-محمود منصوری-عباس موتاب-مهدی میراب‌زاده-حسین ناصحی-مصطفی واثقی
	شیمی	عین اله ابوالفتحی-آرمان اکبری-امیرعلی بیات-مسعود جعفری-امیر حاتمیان-میرحسن حسینی-ارژنگ خانلری-عبدالرضا دادخواه سینا رحمانی‌تبار-حسن رحمتی‌کوکنده-حامد رمضانیان-امیرمحمد سعیدی-جهان شاهی‌بیگباغی-سهراب صادقی‌زاده-مسعود طبرسا امیرحسین طیبی-حسن عیسی‌زاده-محمد فائزنیا-بهنام قازانچایی-امیرحسین معروفی-فرزاد نجفی‌کرمی-حمیدرضا نقی‌لو-امین نوروزی اکبر هنرمند-محمدرضا یوسفی

گزینشگران و ویراستاران

نام درس	حسابان ۲ و ریاضی‌پایه	هندسه	آمارواحتمال وریاضیات گسسته	فیزیک	شیمی
گزینشگر	عادل حسینی	سرژ یقیازاریان تبریزی	سرژ یقیازاریان تبریزی	حسام نادری	ماهان زواری
گروه ویراستاری	امیرحسین ابومحبوب سهیل تقی‌زاده مهرداد ملوندی	امیرمحمد کریمی امیرحسین ابومحبوب مهرداد ملوندی	امیرمحمد کریمی امیرحسین ابومحبوب مهرداد ملوندی	حسین بصیر بهنام شاهنی	محمدحسن محمدزاده مقدم احسان پنجه‌شاهی امیررضا حکمت نیا امیرحسین کمره ای سروش مقدم
گروه ویراستاری رتبه برتر	سپهر متولیان	سپهر متولیان	سپهر متولیان	سینا صالحی	آرمان قنواتی
مسئول درس	عادل حسینی	سرژ یقیازاریان تبریزی	سرژ یقیازاریان تبریزی	حسام نادری	امیرعلی بیات
مستندسازی	سمیه اسکندری	عادل حسینی	الهه شهبازی	علیرضا همایون‌خواه	امیرحسین توحیدی
ویراستاران (مستندسازی)	علیرضا زارعی- علیرضا عباسی‌زاهد- سجاد سلیمی-احسان صادقی			علی سلطانی-ملینا ملائی محمد زنگنه	محسن دستجردی حسین شاهسواری امیرحسین کلانتری

گروه فنی و تولید

مدیر گروه	مهرداد ملوندی	
مسئول دفترچه	نرگس غنی‌زاده	
گروه مستندسازی	مدیر گروه: محیا اصغری	مسئول دفترچه: الهه شهبازی
حروف‌نگار	فرزانه فتح اله‌زاده	
ناظر چاپ	سوران نعیمی	

گروه آزمون

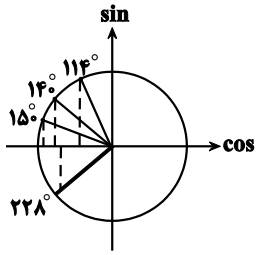
بنیاد علمی آموزشی قلم‌چی (وقف عام)

دفتر مرکزی: خیابان انقلاب بین صبا و فلسطین – پلاک ۹۲۳ – کانون فرهنگی آموزش – تلفن: ۶۴۶۳-۰۲۱

حسابان ۱

۱- **گزینهٔ «۲»** *(سهیل حسن‌خان‌پور)*

ابتدا تمام زوایا را به درجه تبدیل می‌کنیم. (هر ۱ رادیان، حدود ۵۷ درجه است.)



$$۲\text{rad} \simeq ۲\times ۵۷^\circ = ۱۱۴^\circ$$

$$۴\text{rad} \simeq ۴\times ۵۷^\circ = ۲۲۸^\circ$$

$$\frac{۷\pi}{۹}\text{rad} = \frac{۷\pi}{۹}\times\frac{۱۸۰^\circ}{\pi} = ۱۴۰^\circ$$

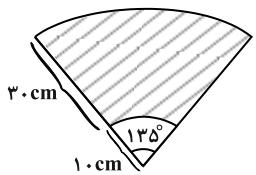
هر ۴ زاویه را در دایره مثلثاتی مشخص می‌کنیم.

از دایره شکل بالا مشخص است که کسینوس هر ۴ زاویه منفی است و کمترین مقدار کسینوس را زاویهٔ ۱۵۰° دارد، پس قدرمطلق آن از همه بزرگتر است.

(حسابان ۱- صفحه‌های ۹۲ تا ۹۴)

۲- **گزینهٔ «۱»** *(بهرام علاج)*

ناحیهٔ پاک‌شده مورد نظر چنین شکلی خواهد داشت:



نکته: مساحت قطاع دایره به زاویهٔ θ رادیان برابر است با: $S = \frac{۱}{۲}\theta r^۲$

و همچنین داریم: $۱۳۵^\circ = \frac{۳\pi}{۴}\text{rad}$

پس مساحت ناحیهٔ پاک شده (هاشورخورده شکل بالا) برابر است با:

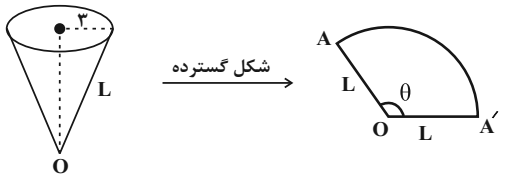
قطاع بزرگ $S = \frac{۱}{۲}\times\frac{۳\pi}{۴}\times ۱۶۰۰ = ۶۰۰\pi\,\text{cm}^۲$

قطاع کوچک $S = \frac{۱}{۲}\times\frac{۳\pi}{۴}\times ۱۰۰ = ۳۷/۵\pi\,\text{cm}^۲$

$\Rightarrow$ ناحیهٔ پاک‌شده $S = ۶۰۰\pi - ۳۷/۵\pi = ۵۶۲/۵\pi\,\text{cm}^۲$

(حسابان ۱- صفحه‌های ۹۴ تا ۹۷)

۳- **گزینهٔ «۴»** *(میلاد منصوری)*



محیط قاعدهٔ مخروط برابر طول کمان AA' است.

$$\Rightarrow ۲\pi(۳) = ۶\pi = L\theta \Rightarrow L = \frac{۶\pi}{\theta}$$

از طرفی مساحت قطاعی با زاویهٔ θ رادیان از دایره‌ای به شعاع L از رابطهٔ $S = \frac{۱}{۲}\theta L^۲$ به دست می‌آید. بنابراین داریم:

$$S = \frac{۱}{۲}\theta\left(\frac{۶\pi}{\theta}\right)^۲ = \frac{۱۸\pi^۲}{\theta} = ۴۵\pi \Rightarrow \theta = \frac{۱۸\pi^۲}{۴۵\pi} = \frac{۲\pi}{۵}\text{rad} = ۷۲^\circ$$

(حسابان ۱- مشابه تمرین ۳ صفحهٔ ۹۶)

۴- **گزینهٔ «۲»** *(نیما کریوریان)*

در ابتدا زاویه‌ها را براساس زاویهٔ مرجع $\frac{\pi}{۸} = ۲۲/۵^\circ$ می‌نویسیم:

$$\frac{\cos(۵۶۲/۵^\circ) - \sin(۱۱۲/۵^\circ)}{\cos(۶۷/۵^\circ) + \cos(۳۳۷/۵^\circ)} = \frac{\cos(۵۴۰^\circ + ۲۲/۵^\circ) - \sin(۹۰^\circ + ۲۲/۵^\circ)}{\cos(۹۰^\circ - ۲۲/۵^\circ) + \cos(۳۶۰^\circ - ۲۲/۵^\circ)}$$

$$= \frac{-\cos(۲۲/۵^\circ) - \cos(۲۲/۵^\circ)}{\sin(۲۲/۵^\circ) + \cos(۲۲/۵^\circ)}$$

سپس صورت و مخرج را بر $\cos(۲۲/۵^\circ)$ تقسیم می‌کنیم که رابطهٔ داده شده برحسب $\tan(۲۲/۵^\circ)$ مرتب شود:

$$= \frac{-۲}{\tan(۲۲/۵^\circ) + ۱} = \frac{-۲}{\sqrt{۲} - ۱ + ۱} = \frac{-۲}{\sqrt{۲}} = -\sqrt{۲}$$

(حسابان ۱- صفحه‌های ۹۸ تا ۱۰۴)

۵- **گزینهٔ «۱»** *(جهانبخش نیکنام)*

$$\tan\frac{\pi}{۲۰}\tan\frac{۹\pi}{۲۰}=\tan\frac{\pi}{۲۰}\tan\left(\frac{\pi}{۲}-\frac{\pi}{۲۰}\right)=\tan\frac{\pi}{۲۰}\cot\frac{\pi}{۲۰}=۱$$

$$\tan\frac{۳\pi}{۲۰}\tan\frac{۷\pi}{۲۰}=\tan\frac{۳\pi}{۲۰}\cot\frac{۳\pi}{۲۰}=۱$$

$$\tan\frac{۵\pi}{۲۰}=\tan\frac{\pi}{۴}=۱$$

$$\Rightarrow A=۱$$

(حسابان ۱- صفحهٔ ۹۸)

۶- **گزینهٔ «۳»** *(سید جواد نظری)*

$$B=(۱+\sin\frac{\pi}{۱۲})(۱+\sin\frac{۵\pi}{۱۲})(۱+\sin\frac{۱۳\pi}{۱۲})(۱+\sin\frac{۱۷\pi}{۱۲})$$

$$=(۱+\sin\frac{\pi}{۱۲})(۱+\sin\frac{۵\pi}{۱۲})(۱+\sin(\pi+\frac{\pi}{۱۲}))$$

$$(۱+\sin(\pi+\frac{۵\pi}{۱۲}))$$

$$\Rightarrow B=(۱+\sin\frac{\pi}{۱۲})(۱+\sin\frac{۵\pi}{۱۲})(۱-\sin\frac{\pi}{۱۲})(۱-\sin\frac{۵\pi}{۱۲})$$

$$=(۱-\sin^۲\frac{\pi}{۱۲})(۱-\sin^۲\frac{۵\pi}{۱۲})$$

حال به کمک رابطهٔ $\cos^۲\alpha=۱-\sin^۲\alpha$، داریم:

$$B=(\cos^۲\frac{\pi}{۱۲})(\cos^۲\frac{۵\pi}{۱۲})=(\cos^۲\frac{\pi}{۱۲})(\sin^۲\frac{\pi}{۱۲})$$

$$=\frac{۱}{۴}(\sin^۲\frac{\pi}{۶})=\frac{۱}{۴}(\frac{۱}{۲})^۲=\frac{۱}{۱۶}$$

(حسابان ۱- صفحه‌های ۹۸ تا ۱۰۴ و ۱۱۰ تا ۱۱۲)

۷- **گزینهٔ «۴»** *(بهرام حلاج)*

با رسم موارد گفته شده خواهیم دید که در گزینهٔ «۴» نمودار به‌دست آمده منطبق نیست اما بررسی جبری راهکار مناسب‌تری می‌باشد، به‌طوری‌که داریم:

$$۱)\ y=\sin(x-\frac{\pi}{۴})$$

$$\xrightarrow{\text{چپ }\frac{۳\pi}{۴}} y=\sin(x+\frac{۳\pi}{۴}-\frac{\pi}{۴})=\sin(x+\frac{\pi}{۲})=\cos x$$

$$\xrightarrow{\text{قرینه نسبت به xها}} y=-\cos x\ \checkmark$$

$$۲)\ y=\sin(x-\frac{\pi}{۴})$$

$$\xrightarrow{\text{قرینه نسبت به yها}} y=\sin(-x-\frac{\pi}{۴})=-\sin(x+\frac{\pi}{۴})$$

$$\xrightarrow{\text{چپ }\frac{\pi}{۴}} y=-\sin(x+\frac{\pi}{۴}+\frac{\pi}{۴})$$

$$=-\sin(x+\frac{\pi}{۲})=-\cos x\ \checkmark$$

$$۳)\ y=\sin(x-\frac{\pi}{۴})\xrightarrow{\text{راست }\frac{\pi}{۴}} y=\sin(x-\frac{\pi}{۴}-\frac{\pi}{۴})$$

$$=\sin(x-\frac{\pi}{۲})=-\cos x\ \checkmark$$

$$۴)\ y=\sin(x-\frac{\pi}{۴})\xrightarrow{\text{راست }\frac{۳\pi}{۴}} y=\sin(x-\frac{۳\pi}{۴}-\frac{\pi}{۴})=\sin(x-\pi)$$

$$\xrightarrow{\text{قرینه نسبت به x ها}} y=-\sin(x-\pi)$$

$$=\sin(\pi-x)=\sin x\ \times$$

(حسابان ۱- صفحه‌های ۱۰۵ تا ۱۰۹)

۸- **گزینهٔ «۳»** *(علی شهرابی)*

ابتدا در حالت کلی در اتحاد $\frac{\sin\theta}{\sin۳\theta}=\frac{\cos\theta}{\cos۳\theta+X}$ عبارت X را پیدا می‌کنیم. با طرفین- وسطین کردن تناسب بالا داریم:

$$\sin۳\theta\cos\theta=\sin\theta\cos۳\theta+X\sin\theta$$

$$\Rightarrow X\sin\theta=\sin(۳\theta-\theta)=\sin۲\theta$$

$$\Rightarrow X\sin\theta=۲\sin\theta\cos\theta\Rightarrow X=۲\cos\theta$$

پس در این سؤال عبارت X برابر $۲\cos۵^\circ$ است.

(حسابان ۱- صفحه‌های ۱۱۰ تا ۱۱۲)

۹- **گزینهٔ «۲»** *(محمدحسن سلامی حسینی)*

$$\frac{\cos۲\alpha}{۱+\sin\alpha}=\frac{۱}{۳}\Rightarrow\frac{۱-۲\sin^۲\alpha}{۱+\sin\alpha}=\frac{۱}{۳}$$

$$\Rightarrow ۳-۶\sin^۲\alpha=۱+\sin\alpha$$

$$\Rightarrow ۶\sin^۲\alpha+\sin\alpha-۲=۰$$

$$\Rightarrow (۲\sin\alpha-۱)(۳\sin\alpha+۲)=۰\Rightarrow \begin{cases}\sin\alpha=\frac{۱}{۲}\\ \sin\alpha=-\frac{۲}{۳}\end{cases}$$

چون علامت سینوس در ربع چهارم منفی است، پس $\sin\alpha=-\frac{۲}{۳}$ قابل قبول است. حال داریم:

$$\cos^۲\alpha=۱-\sin^۲\alpha=۱-\frac{۴}{۹}=\frac{۵}{۹}$$

$$\Rightarrow \cos\alpha=\frac{\pm\sqrt{۵}}{۳}\xrightarrow{\text{ربع چهارم}}\cos\alpha=\frac{\sqrt{۵}}{۳}$$

بنابراین:

$$\sin۲\alpha=۲\sin\alpha.\cos\alpha=۲(-\frac{۲}{۳})(\frac{\sqrt{۵}}{۳})=\frac{-۴\sqrt{۵}}{۹}$$

(حسابان ۱- صفحه‌های ۱۱۰ تا ۱۱۲)

۱۰- **گزینهٔ «۳»** *(عادل حسینی)*

$$\begin{cases}\cos۴\alpha=\cos۲(۲\alpha)=۲\cos^۲۲\alpha-۱\\ \cos۲\alpha=۱-۲\sin^۲\alpha\end{cases}$$

$$\Rightarrow ۲(۱-۲\sin^۲\alpha)^۲-۱=-\frac{۱}{۹}\Rightarrow(۱-۲\sin^۲\alpha)^۲=\frac{۴}{۹}$$

$$\Rightarrow ۱-۲\sin^۲\alpha=\pm\frac{۲}{۳}\Rightarrow\sin^۲\alpha=\frac{۱}{۶}\text{ یا }\frac{۵}{۶}$$

این یعنی ۴ مقدار به دست آمده برای $\sin\alpha$ برابر $\pm\sqrt{\frac{۱}{۶}}$ یا $\pm\sqrt{\frac{۵}{۶}}$ است،

در نتیجه حاصل‌ضرب مقادیر ممکن برای $\sin\alpha$ برابر $\frac{۵}{۳۶}$ خواهد بود.

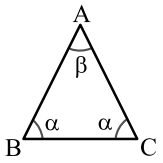
(حسابان ۱- صفحه‌های ۱۱۰ تا ۱۱۲)

حسابان ۱- آشنا

۱۱- **گزینهٔ «۳»** *(کتاب آبی)*

ابتدا $\frac{۳۶۰^\circ}{\pi}$ را به رادیان تبدیل می‌کنیم: رادیان $\frac{۳۶۰^\circ}{\pi}\times\frac{\pi}{۱۸۰^\circ}=۲$

چون مثلث متساوی‌الساقین است، پس با توجه به شکل زیر داریم:



(*) رادیان $\alpha+\beta=۲=$ مجموع دو زاویهٔ نابرابر

از طرفی در هر مثلث داریم:

$$\alpha+\alpha+\beta=\pi\Rightarrow ۲\alpha+\beta=\pi\ (**)$$

$$\xrightarrow{(**)-(*)}\alpha=\pi-۲\text{ رادیان}\xrightarrow{(*)}\beta=۴-\pi\text{ رادیان}$$

از آنجا که $\pi\simeq ۳/۱۴$ بنابراین:

$$\beta\simeq ۴-۳/۱۴=۰/۸۶\text{ رادیان}$$

(حسابان ۱- صفحه‌های ۹۲ تا ۹۴)

۱۲- **گزینهٔ «۳»** *(کتاب آبی)*

اگر $S_۱$ را مساحت قطاع دایره به شعاع ۱۰ سانتی‌متر و $S_۲$ را مساحت قطاع دایره به شعاع ۴ سانتی‌متر فرض کنیم، آنگاه:

$$\text{مساحت سطح سایه زده شده}=S_۱-S_۲=\frac{۱}{۲}r_۱^۲\theta-\frac{۱}{۲}r_۲^۲\theta$$

(θ برحسب رادیان است.)

$$=\frac{۱}{۲}\theta(r_۱^۲-r_۲^۲)=\frac{۱}{۲}\times(۱۲۰^\circ\times\frac{\pi}{۱۸۰^\circ})\times(۱۰^۲-۴^۲)$$

$$=\frac{۱}{۲}\times\left(\frac{۲\pi}{۳}\right)(۱۰۰-۱۶)=\frac{\pi}{۳}\times۸۴=۲۸\pi\text{cm}^۲$$

(حسابان ۱- صفحه‌های ۹۴ تا ۹۷)

۱۳- **گزینهٔ «۳»** *(کتاب آبی)*

می‌دانیم اگر دو زاویه متمم هم باشند، تانژانت یکی با کتانژانت دیگری برابر است، به عبارت دیگر:

$$\alpha+\beta=\frac{\pi}{۲}\Rightarrow\tan\alpha=\cot\beta$$

بنابراین:

$$(۲x-\frac{\pi}{۱۵})+(\frac{۳\pi}{۱۵}+۳x)=\frac{\pi}{۲}\Rightarrow ۵x+\frac{۲\pi}{۱۵}=\frac{\pi}{۲}$$

$$\Rightarrow ۵x=\frac{\pi}{۲}-\frac{۲\pi}{۱۵}=\frac{۱۱\pi}{۳۰}\Rightarrow x=\frac{۱۱\pi}{۱۵۰}$$

(حسابان ۱- صفحه‌های ۹۸ تا ۱۰۴)

۱۴- **گزینهٔ «۴»** *(کتاب آبی)*

از آنجا که $\cos\alpha=\cos(-\alpha)$، داریم:

$$\cos(x-\frac{2\pi}{9})=\cos(\frac{2\pi}{9}-x)$$

برای دو زاویهٔ $(x+\frac{5\pi}{18})$ و $(\frac{2\pi}{9}-x)$ داریم:

$$(x+\frac{5\pi}{18})+(\frac{2\pi}{9}-x)=\frac{\pi}{2}$$

بنابراین این دو زاویه متمم یکدیگرند و کسینوس یکی برابر با سینوس دیگری است، لذا:

$$\cos(\frac{2\pi}{9}-x)=\sin(x+\frac{5\pi}{18})$$

با استفاده از رابطهٔ $\sin^2\alpha=1-\cos^2\alpha$ داریم:

$$\sin^2(x+\frac{5\pi}{18})=1-\cos^2(x+\frac{5\pi}{18})=1-A^2$$

از طرفی $0^\circ<x<40^\circ$ است، بنابراین:

$$0<x<40^\circ\Rightarrow 0<x<40^\circ\times\frac{\pi}{180^\circ}$$

$$\Rightarrow 0<x<\frac{4\pi}{18}\xrightarrow{+\frac{5\pi}{18}}\frac{5\pi}{18}<x+\frac{5\pi}{18}<\frac{9\pi}{18}$$

$$\Rightarrow \frac{5\pi}{18}<x+\frac{5\pi}{18}<\frac{\pi}{2}$$

بنابراین کمان $x+\frac{5\pi}{18}$ در ناحیهٔ اول است و سینوس آن مثبت است، پس:

$$\sin(x+\frac{5\pi}{18})=\sqrt{1-A^2}$$

(حسابان ۱- صفحه‌های ۹۸ تا ۱۰۴)

۱۵- **گزینهٔ «۴»** *(کتاب آبی)*

با توجه به مثلث ABC واضح است $x+y=\frac{\pi}{2}$ می‌باشد.

بنابراین داریم:

$$\cos(2x+y)=-\frac{1}{4}\xrightarrow{x+y=\frac{\pi}{2}}\cos(x+\underbrace{x+y}_{\frac{\pi}{2}})=-\frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow\cos(\frac{\pi}{2}+x)=-\frac{1}{4}\Rightarrow-\sin x=-\frac{1}{4}\Rightarrow\sin x=\frac{1}{4}$$

حال با توجه به این‌که $0<x<\frac{\pi}{2}$ است، برای محاسبهٔ $\tan x$ داریم:

$$\sin^2x+\cos^2x=1\Rightarrow(\frac{1}{4})^2+\cos^2x=1$$

$$\Rightarrow\cos^2x=1-\frac{1}{16}=\frac{15}{16}\Rightarrow\cos x=\frac{\sqrt{15}}{4}$$

$$\Rightarrow\tan x=\frac{\sin x}{\cos x}=\frac{\frac{1}{4}}{\frac{\sqrt{15}}{4}}=\frac{1}{\sqrt{15}}$$

(حسابان ۱- صفحه‌های ۹۸ تا ۱۰۴)

۱۶- **گزینهٔ «۱»** *(کتاب آبی)*

با توجه به اینکه $50-10=40$ و با استفاده از اتحاد کسینوس مجموع و تفاضل دو کمان داریم:

$$2\cos10^\circ\cos50^\circ-\cos(50^\circ-10^\circ)$$

$$=2\cos10^\circ\cos50^\circ-(\cos50^\circ\cos10^\circ+\sin50^\circ\sin10^\circ)$$

$$=\cos50^\circ\cos10^\circ-\sin50^\circ\sin10^\circ=\cos(50^\circ+10^\circ)=\cos60^\circ=\frac{1}{2}$$

(حسابان ۱- صفحه‌های ۱۱۰ تا ۱۱۲)

۱۷- **گزینهٔ «۱»** *(کتاب آبی)*

توجه کنید که $\frac{13\pi}{4}=\frac{12+1}{4}\pi=3\pi+\frac{\pi}{4}$، پس:

$$A=\sin(\frac{13\pi}{4}+\alpha)=\sin(3\pi+\frac{\pi}{4}+\alpha)$$

$$=\sin(2\pi+(\pi+\frac{\pi}{4}+\alpha))$$

می‌دانیم $\sin(2\pi+\theta)=\sin\theta$، پس:

$$A=\sin(\pi+\frac{\pi}{4}+\alpha)$$

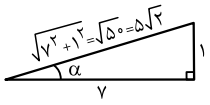
از طرفی $\sin(\pi+\theta)=-\sin\theta$، پس:

$$A=-\sin(\frac{\pi}{4}+\alpha)$$

با استفاده از اتحاد $\sin(a+b)=\sin a\cos b+\cos a\sin b$، داریم:

$$A=-(\sin\frac{\pi}{4}\cos\alpha+\cos\frac{\pi}{4}\sin\alpha)$$
$$=-(\frac{\sqrt{2}}{2}\cos\alpha+\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\alpha)\quad (*)$$

برای محاسبهٔ $\sin\alpha$ و $\cos\alpha$ به کمک شکل زیر، داریم:



$$\cos\alpha=\frac{۷}{۵\sqrt{۲}}\ \text{و}\ \sin\alpha=\frac{۱}{۵\sqrt{۲}}$$

با جایگذاری مقادیر $\sin\alpha$ و $\cos\alpha$ در تساوی (*) داریم:

$$A=-(\frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{۷}{۵\sqrt{۲}}+\frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{۱}{۵\sqrt{۲}})=-\frac{۸}{۱۰}=-\frac{۴}{۵}$$

(حسابان ۱- صفحه‌های ۱۱۰ تا ۱۱۲)

۱۸- **گزینهٔ «۳»** *(کتاب آبی)*

$$\frac{\sin\theta}{1-\cos\theta}+\frac{1+\cos\theta}{\sin\theta}=\frac{\sin^۲\theta+\overbrace{(1-\cos^۲\theta)}^{\sin^۲\theta}}{(1-\cos\theta)\sin\theta}$$

$$=\frac{۲\sin^۲\theta}{(1-\cos\theta)\sin\theta}=\frac{۲\sin\theta}{1-\cos\theta}=\frac{۲(۲\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2})}{۲\sin^۲\frac{\theta}{2}}$$

$$=\frac{۲\cos\frac{\theta}{2}}{\sin\frac{\theta}{2}}=۲\cot\frac{\theta}{2}$$

(حسابان ۱- صفحه‌های ۱۱۰ تا ۱۱۲)

۱۹- **گزینهٔ «۳»** *(کتاب آبی)*

$$(\tan\alpha)x^۲-۲x-\tan\alpha=۰$$

$$\Delta=b^۲-۴ac=(-۲)^۲-۴\tan\alpha(-\tan\alpha)=۴(1+\tan^۲\alpha)$$

با توجه به اتحاد $1+\tan^۲\alpha=\frac{1}{\cos^۲\alpha}$، خواهیم داشت:

$$\Delta=\frac{۴}{\cos^۲\alpha}$$

$$x=\frac{-(-۲)\pm\sqrt{\frac{۴}{\cos^۲\alpha}}}{۲\tan\alpha}=\frac{۱\pm\left|\frac{۱}{\cos\alpha}\right|}{\tan\alpha}$$

$\xrightarrow[\cos\alpha>۰]{\text{حاده }\alpha}$ ریشهٔ مثبت: $x=\frac{۱+\frac{۱}{\cos\alpha}}{\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}}=\frac{۱+\cos\alpha}{\sin\alpha}$

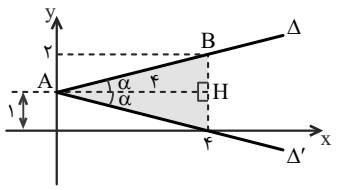
با توجه به اتحادهای $1+\cos۲u=۲\cos^۲u$ و $\sin۲u=۲\sin u\cos u$ داریم:

$$x=\frac{۱+\cos\alpha}{\sin\alpha}=\frac{۲\cos^۲\frac{\alpha}{2}}{۲\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}}=\frac{\cos\frac{\alpha}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}}=\cot\frac{\alpha}{2}$$

(حسابان ۱- صفحه‌های ۱۱۰ تا ۱۱۲)

۲۰- **گزینهٔ «۴»** *(کتاب آبی)*

با توجه به شکل، دو مثلث قائم‌الزاویهٔ مشخص شده، همنهشت هستند، پس زاویهٔ بین Δ و Δ' برابر با ۲α است.



از طرفی اگر مثلث ABH را در نظر بگیریم، داریم:

$$AB^۲=AH^۲+BH^۲\Rightarrow AB=\sqrt{۱۶+۱}=\sqrt{۱۷}$$

$$\sin\alpha=\frac{BH}{AB}=\frac{۱}{\sqrt{۱۷}}\ \text{و}\ \cos\alpha=\frac{AH}{AB}=\frac{۴}{\sqrt{۱۷}}$$

$\Rightarrow \Delta'$ و Δ سینوس زاویهٔ بین: $\sin۲\alpha=۲\sin\alpha\cos\alpha$

$$=۲\times\frac{۱}{\sqrt{۱۷}}\times\frac{۴}{\sqrt{۱۷}}=\frac{۸}{۱۷}$$

(حسابان ۱- صفحه‌های ۱۱۰ تا ۱۱۲)

ریاضی ۱

۲۱- **گزینهٔ «۱»** *(حمید علیزاده)*

مؤلفه‌های اول و دوم هر زوج مرتب باید برابر باشند:

$$۴a+b=۴a^۲+b+۱\Rightarrow ۴a^۲-۴a+۱=۰$$

$$\Rightarrow (۲a-۱)^۲=۰\Rightarrow a=\frac{۱}{۲}$$

$$۴a+b^۲=۲b+۱\xrightarrow{a=\frac{۱}{۲}}۲+b^۲=۲b+۱\Rightarrow b^۲-۲b+۱=۰$$

$$\Rightarrow (b-۱)^۲=۰\Rightarrow b=۱$$

$$\Rightarrow f=\{(۳,۳),(۱,۱)\}\Rightarrow f(۲a+۲b)=f(۳)=۳$$

(ریاضی ۱- تابع؛ صفحه‌های ۱۰۹ تا ۱۱۳)

۲۲- **گزینهٔ «۳»** *(حمید علیزاده)*

تابع همانی f را به‌صورت $f(x)=x$ و تابع ثابت g را به‌صورت $g(x)=c$ تعریف می‌کنیم. داریم:

$$\begin{cases}\frac{f(۳)}{g(۳)}+\frac{۱}{۲}g(۳)=\frac{۳}{c}+\frac{۱}{۲}c\\ \frac{۵}{f(۲)}=\frac{۵}{۲}\end{cases}\Rightarrow \frac{۳}{c}+\frac{۱}{۲}c=\frac{۵}{۲}$$

$$\Rightarrow c^۲-۵c+۶=(c-۲)(c-۳)=۰$$

$$\Rightarrow \begin{cases}c=۲\\ \text{یا}\\ c=۳\end{cases}\Rightarrow |۲f(g(۱۴۰۳))-۵|=|۲f(c)-۵|$$

$$=|۲c-۵|=|\pm ۱|=۱$$

(ریاضی ۱- تابع؛ صفحه‌های ۱۰۹ تا ۱۱۷)

۲۳- **گزینهٔ «۱»** *(عادل حسینی)*

f یک تابع سه‌ضابطه‌ای است که هر سه ضابطهٔ آن خطی هستند. ضابطهٔ هر کدام را می‌نویسیم:

ضابطهٔ اول: $A(-۲,۳),B(-۳,۰)\Rightarrow m=\frac{۳-۰}{-۲+۳}=۳$

$$y-۰=۳(x+۳)\Rightarrow y=۳x+۹$$

ضابطهٔ دوم $\xrightarrow{\text{تابع ثابت}} y=۳$

ضابطهٔ سوم: $C(۱,۳),D(۵,۰)\Rightarrow m=\frac{۳-۰}{۱-۵}=-\frac{۳}{۴}$

$$y-۰=-\frac{۳}{۴}(x-۵)\Rightarrow y=-\frac{۳}{۴}x+\frac{۱۵}{۴}$$

$$\Rightarrow f(x)=\begin{cases}۳x+۹ & ;x<-۲\\ ۳ & ;-۲\le x\le ۱\\ -\frac{۳}{۴}x+\frac{۱۵}{۴} & ;x>۱\end{cases}$$

حال هر کدام از ضابطه‌ها را برابر ۲ قرار می‌دهیم تا مجموع جواب‌های معادلهٔ $f(x)=۲$ را پیدا کنیم:

$۳x+۹=۲\Rightarrow x_۱=-\frac{۷}{۳}<-۲$ قابل قبول

$۳=۲$ غیرممکن

$\frac{۱۵-۳x}{۴}=۲\Rightarrow ۳x=۷\Rightarrow x_۲=\frac{۷}{۳}>۱$ قابل قبول

پس مجموع جواب‌های معادله برابر $x_۱+x_۲=۰$ است.

(ریاضی ۱- تابع؛ صفحه‌های ۱۰۹ تا ۱۱۷)

۲۴- **گزینهٔ «۲»** *(کتاب آبی ریاضیات کنکور رشتهٔ ریاضی)*

با توجه به نمودار، تابع g برای $x\neq ۱$ یک سهمی است که محور xها را در $x=۰$ و $x=-۲$ قطع کرده است و $g(۱)=n$ می‌باشد. پس ضابطهٔ آن به صورت زیر است:

$$g(x)=\begin{cases}a(x-۰)(x-(-۲)) & ;\ x\neq ۱\\ n & ;\ x=۱\end{cases}$$

$$=\begin{cases}x^۲+bx+c & ;\ x\neq ۱\\ ۴ & ;\ x=۱\end{cases}$$

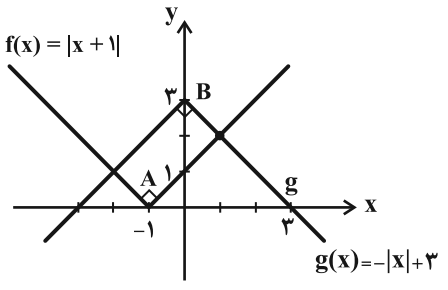
$$\Rightarrow \begin{cases}n=۴\\ ax(x+۲)=x^۲+bx+c\end{cases}\Rightarrow \begin{cases}a=۱\\ x^۲+۲x=x^۲+bx+c\\ \Rightarrow b=۲,c=۰\end{cases}$$

$$\Rightarrow n+b+c=۴+۲+۰=۶$$

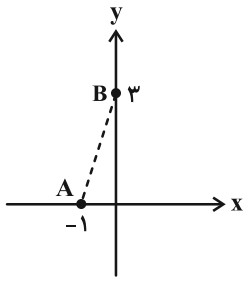
(ریاضی ۱- تابع؛ صفحه‌های ۱۱۱ و ۱۱۲)

۲۵- **گزینهٔ «۱»** *(حمید علیزاده)*

ابتدا دو تابع را به کمک انتقال رسم می‌کنیم:



با توجه به شکل، AB قطر مستطیل است.



$$\Rightarrow \text{قطر} = \sqrt{۳^۲ + ۱^۲} = \sqrt{۱۰}$$

(ریاضی ۱- تابع؛ صفحه‌های ۱۰۹ تا ۱۱۷)

۲۶- **گزینهٔ «۲»** *(میلاد سجادی‌لاریجانی)*

$$y = |x+۱| \xrightarrow{\text{قرینه نسبت به محور x}} y = -|x+۱|$$

$$\xrightarrow{\text{۲ واحد به سمت راست}} y = -|x-۱|$$

$$\xrightarrow{\text{تقاطع با نیمساز ناحیهٔ چهارم}} -|x-۱| = -x$$

$$\Rightarrow |x-۱| = x \Rightarrow x-۱ = -x \Rightarrow ۲x = ۱ \Rightarrow x = \frac{۱}{۲}$$

$$\xrightarrow{y=-x} y = -\frac{۱}{۲}$$

(ریاضی ۱- تابع؛ صفحه‌های ۱۰۹ تا ۱۱۷)

۲۷- **گزینهٔ «۲»** *(جلیل احمدمیربلوچ)*

حروف کلمه «جهان» را در یک بسته قرار می‌دهیم که این حروف داخل بسته به $۴!$ حالت باهم جایگشت دارند.

$$\boxed{\text{جهان}} \Rightarrow \text{ی د ر گ } ۵!$$

پس داریم:

$$۴! \times ۵!$$

(ریاضی ۱- شمارش، بدون شمردن؛ صفحهٔ ۱۲۷ تا ۱۳۲)

۲۸- **گزینهٔ «۲»** *(امیرحسین ابومحبوب)*

ابتدا حالت‌هایی را می‌شماریم که a و b کنار یکدیگرند، سپس حالت‌هایی را که هم a و b و هم c و d کنار هم باشند را شمرده و از جواب اولیه کم می‌کنیم.

برای این که a و b کنار هم باشند، آنها را درون یک بسته قرار می‌دهیم که در این صورت تعداد حالات برابر است با $۲! \times ۵! = ۲۴۰$.

سپس a و b را با هم و c و d را نیز با هم در نظر می‌گیریم که در این صورت تعداد حالات برابر است با $۴! \times ۲! \times ۲! = ۹۶$

$$\text{تعداد حالت‌های مطلوب} = ۲۴۰ - ۹۶ = ۱۴۴$$

(ریاضی ۱- شمارش بدون شمردن؛ صفحه‌های ۱۲۷ تا ۱۳۲)

۲۹- **گزینهٔ «۳»** *(مصطفی کرمی)*

اگر از ۲ و ۳ هر کدام حداقل ۵ تا داشتیم به تعداد $۲^۵ = ۳۲$ عدد می‌توان نوشت ولی حالت‌های زیر را نداریم:

$$\begin{cases} ۱ \text{ عدد} \rightarrow ۲,۲,۲,۲,۲ \\ ۵ \text{ عدد} \rightarrow ۲,۲,۲,۲,۳ \\ ۱ \text{ عدد} \rightarrow ۳,۳,۳,۳,۳ \end{cases}$$

یعنی از این ۳۲ حالت، ۷ عدد را نمی‌توانیم بنویسیم و بنابراین $۳۲ - ۷ = ۲۵$ عدد پنج رقمی می‌توان نوشت.

(ریاضی ۱- شمارش، بدون شمردن؛ صفحه‌های ۱۱۹ تا ۱۳۲)

۳۰- **گزینهٔ «۱»** *(یوسف عراز)*

یک رقمی: ۳،۹

دورقمی: $(\frac{۳}{\text{۸یا۵یا۲}} \times \frac{۲}{\text{۷یا۱}}) + (\frac{۲}{\text{۹یا۶}} \times \frac{۱}{۳})$

$$+ (\frac{۲}{\text{۶یا۳}} \times \frac{۱}{۹}) + (\frac{۳}{\text{۷یا۴یا۱}} \times \frac{۱}{\text{فقط۵}}) = ۱۳$$

سه‌رقمی:

$$\left.\begin{array}{l} ۱ \times \frac{۳}{\text{۸یا۵یا۲}} \times \frac{۱}{\text{فقط۳}} \\ ۱ \times \frac{۳}{\text{۹یا۶یا۳}} \times \frac{۱}{\text{فقط۵}} \\ ۱ \times \frac{۱}{\text{فقط۴}} \times \frac{۱}{\text{فقط۷}} \\ ۱ \times \frac{۳}{\text{۸یا۵یا۲}} \times \frac{۱}{\text{فقط۹}} \end{array}\right\} \xrightarrow{\text{تعداد اعداد}} ۱۰$$

مجموع حالات: $۲ + ۱۳ + ۱۰ = ۲۵$

(ریاضی ۱- شمارش، بدون شمردن؛ صفحه‌های ۱۱۹ تا ۱۲۶)

آمار و احتمال

۳۱- **گزینهٔ «۴»** *(محمدعلی کاظم‌نظری)*

نمودارهای میله‌ای و دایره‌ای برای متغیرهای کمّی گسسته و کیفی و نمودار بافت‌نگاشت برای متغیرهای کمّی پیوسته مناسب‌اند.

(آمار و احتمال- آمار توصیفی؛ صفحه‌های ۷۰ تا ۷۸)

۳۲- **گزینهٔ «۳»** *(افشین خاصّه‌خان)*

با افزودن داده‌ای برابر با میانگین، میانگین ۲۴ داده جدید برابر میانگین داده‌های قبلی خواهد شد.

$$\text{واریانس جدید} = \frac{\overbrace{(x_1-\bar{x})^2+\ldots+(x_{23}-\bar{x})^2}^{23\times 6}+\overbrace{(\bar{x}-\bar{x})^2}^{\text{صفر}}}{24} = \frac{23\times 6}{24} = 5/75$$

$$|\text{واریانس جدید} - \text{واریانس قدیم}| = |6 - 5/75| = 0/25$$

(آمار و احتمال- آمار توصیفی؛ صفحه‌های ۸۷ تا ۸۹)

۳۳- **گزینهٔ «۲»** *(نیلوفر مهدوی)*

مجموع درصدهای فراوانی برابر ۱۰۰ است، بنابراین داریم:

$$a+20+30+22+18=100 \Rightarrow a=10$$

بنابراین زاویهٔ متناظر با نمرهٔ A در نمودار دایره‌ای این نمرات برابر است با:

$$\alpha = \frac{10}{100}\times 360^\circ = 36^\circ$$

(آمار و احتمال- آمار توصیفی؛ صفحه‌های ۷۰ تا ۷۸)

۳۴- **گزینهٔ «۳»** *(آرش رحیمی)*

از هر یک از داده‌ها، ۲۵ واحد کم می‌کنیم. در این صورت از میانگین نیز ۲۵ واحد کم می‌شود.

$x_i - 25$	-۶	-۳	۰	۳	۶
f_i	۳	۲	x	۶	۲

اگر $x'_i = x_i - 25$ باشد، داریم:

$$\bar{x}' = \frac{\sum f_i x'_i}{n} = \frac{(-18)+(-6)+0+18+12}{13+x} = 0/24$$

$$\Rightarrow \frac{6}{13+x} = 0/24 \Rightarrow x = 12$$

(آمار و احتمال- آمار توصیفی؛ صفحه‌های ۸۰ تا ۸۲)

۳۵- **گزینهٔ «۱»** *(امیرحسین ابومحبوب)*

جدول فراوانی داده‌های اولیه مطابق با نمودار بافت نگاشت داده شده به صورت زیر است:

حدود دسته	[۵۰,۶۰)	[۶۰,۷۰)	[۷۰,۸۰)	[۸۰,۹۰)	[۹۰,۱۰۰)
فراوانی	۳	۷	۸	۵	۲

با افزودن دانش‌آموزانی به وزن‌های ۶۹، ۷۳، ۷۶، ۸۲ و ۹۴ کیلوگرم، تعداد کل داده‌ها ۵ واحد و تعداد داده‌های دستهٔ وسط دو واحد افزایش می‌یابد. داریم:

$$\text{فراوانی نسبی اولیهٔ دستهٔ وسط} = \frac{8}{25} = 0/32$$

$$\text{فراوانی نسبی ثانویهٔ دستهٔ وسط} = \frac{10}{30} = \frac{1}{3} \simeq 0/33$$

چون فراوانی نسبی ثانویه دستهٔ وسط بیشتر از فراوانی نسبی اولیهٔ آن است، پس فراوانی نسبی ۰/۰۱ زیاد شده است.

(آمار و احتمال- آمار توصیفی؛ صفحه‌های ۷۰ تا ۷۸)

۳۶- **گزینهٔ «۱»** *(علی اکبر علی‌زاده)*

$$\text{میانگین} = \frac{\text{مجموع داده‌ها}}{\text{تعداد داده‌ها}} \Rightarrow \text{مجموع داده‌ها} = \text{میانگین} \times \text{تعداد داده‌ها}$$

$$\text{مجموع داده‌ها}(n-3) = (n-3)\times 9 = 9n-27$$

$$\text{مجموع داده‌ها}(2n+3) = (2n+3)\times 12 = 24n+36$$

$$\text{مجموع داده‌های هر دو دسته} = 9n-27+24n+36 = 33n+9$$

$$\text{تعداد کل داده‌ها} = n-3+2n+3 = 3n$$

$$\text{میانگین کل} = \frac{33n+9}{3n} = 11+\frac{3}{n}$$

حال گزینه‌ها را بررسی می‌کنیم:

گزینه ۱: $11+\frac{3}{n} = 11/25 \Rightarrow n = 12$ ق ق

گزینه ۲: $11+\frac{3}{n} = 11/35 \Rightarrow n = \frac{60}{7}$ غ ق ق

غ ق ق $\frac{15}{2}$ $\Rightarrow n = \frac{3}{11/4} + 11$ ؛ گزینه ۳

غ ق ق $\frac{30}{7}$ $\Rightarrow n = \frac{3}{11/7} + 11$ ؛ گزینه ۴

(آمار و احتمال- آمار توصیفی؛ صفحه‌های ۸۰ تا ۸۲)

۳۷- **گزینهٔ «۲»** *(نیلوفر مهدوی)*

ابتدا داده‌ها را از کوچک به بزرگ مرتب می‌کنیم:

۱,۲,۲,۴,۷,۷,۷,۸,۹,۱۲,۱۳,۱۷,۱۷

مد داده‌ها برابر ۷ است و مجموع داده‌های کوچک‌تر از مد برابر است با:

$1+2+2+4=9$

تعداد داده‌ها برابر ۱۳ است، پس دادهٔ هفتم میانه و میانگین داده‌های دهم و یازدهم برابر چارک سوم است.

$Q_3 = \frac{12+13}{2} = 12/5$

مجموع داده‌های بزرگ‌تر از چارک سوم برابر است با: $13+17+17=47$

بنابراین اختلاف بین مجموع این دو دسته از داده‌ها برابر است با: $47-9=38$

(آمار و احتمال- آمار توصیفی؛ صفحه‌های ۸۲ و ۸۳)

۳۸- **گزینهٔ «۲»** *(علیرضا شریف‌خطیبی)*

می‌دانیم اگر تعدادی داده برابر یکدیگر باشند، واریانس آنها برابر صفر است و بالعکس، بنابراین داریم:

$$\begin{cases} 3x-9=6 \Rightarrow x=5 \\ 4y+2=6 \Rightarrow y=1 \\ 5z-4=6 \Rightarrow z=2 \end{cases}$$

پس داده های y^2، $3z-5$، $x+1$ و $x-2y$ به ترتیب عبارتند از: ۳,۶,۱,۱

داده‌ها را از کوچک به بزرگ مرتب می‌کنیم. چون تعداد داده‌ها زوج است، میانه برابر میانگین دو دادهٔ وسط است:

۱,۱,۳,۶ $\Rightarrow$ میانه $= \frac{1+3}{2} = 2$

(آمار و احتمال- آمار توصیفی؛ صفحه‌های ۸۷ تا ۸۹)

۳۹- **گزینهٔ «۴»** *(میلاد منصوری)*

میانگین ۴ دادهٔ حذف شده برابر است با:

$\frac{10+15+45+50}{4} = 30$

بنابراین میانگین ۲۱ دادهٔ باقی‌مانده نیز برابر ۳۰ می‌باشد.

$\sigma^2 = 64 \Rightarrow$

$$\frac{\sum_{i=1}^{21}(x_i-30)^2 + (10-30)^2 + (15-30)^2 + (45-30)^2 + (50-30)^2}{25} = 64$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{21}(x_i-30)^2 + 1250 = 1600$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{21}(x_i-30)^2 = 350$$

بنابراین واریانس داده‌های باقی‌مانده برابر است با:

$$\sigma'^2 = \frac{\sum_{i=1}^{21}(x_i-30)^2}{21} = \frac{350}{21} \simeq 16/67$$

(آمار و احتمال- آمار توصیفی، صفحه‌های ۸۱ و ۸۸)

۴۰- **گزینهٔ «۴»** *(مهرداد ملونری)*

تعداد داده‌های ۱۷ از سایر داده‌ها بیش‌تر است، پس مد داده‌ها برابر ۱۷ می‌باشد. تعداد کل داده‌ها برابر ۲۳ است، پس اگر داده‌ها از کوچک به بزرگ، مرتب شوند، دوازدهمین داده، میانهٔ داده‌هاست که این داده برابر ۱۴ می‌باشد.

(آمار و احتمال- آمار توصیفی، صفحه‌های ۸۲ و ۸۳)

هندسه ۲

۴۱- **گزینهٔ «۱»** *(فرشاد فرامرزی)*

گزینهٔ «۱»: $(2n+1)$ بار دوران با زاویهٔ ۱۲۰ درجه، معادل با دوران $(2n+1)120$ درجه است. در این حالت، تصویر A می‌تواند بر خودش منطبق شود.

گزینهٔ «۲»: در $(2n+1)$ بار تجانس به مرکز O و با نسبت (-1)، تصویر نقطهٔ A بر خودش منطبق نمی‌شود.

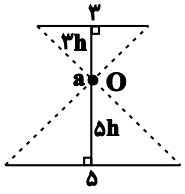
گزینهٔ «۳»: در بازتاب نسبت به خط d، اگر نقطهٔ A روی خط d واقع نشده باشد، با $(2n+1)$ بار بازتاب، تصویر آن بر خودش منطبق نمی‌شود.

گزینهٔ «۴»: $(2n+1)$ بار انتقال با بردار غیر صفر $\vec{v}$، همان انتقال با بردار $(2n+1)\vec{v}$ است، پس تصویر A بر خودش منطبق نمی‌شود.

(هندسه ۲ - تبدیل‌های هندسی و کاربردها؛ صفحه‌های ۴۳ تا ۴۹)

۴۲- **گزینهٔ «۳»** *(افشین خاصه خان)*

چون تجانس معکوس است، مرکز تجانس بین دو پاره‌خط قرار دارد و نسبت فاصلهٔ مرکز تجانس از دو پاره‌خط با نسبت طول دو پاره‌خط برابر است:



$$3h+5h=12 \Rightarrow h=1/5 \Rightarrow 5h=7/5$$

(هندسه ۲- تبدیل‌های هندسی و کاربردها؛ صفحه‌های ۴۳ تا ۴۹)

۴۳- **گزینهٔ «۱»** *(امیرحسین ابومحبوب)*

طبق تعریف تجانس داریم:

$$\left.\begin{matrix} OA'=k\times OA \\ OA''=k'\times OA \end{matrix}\right\} \Rightarrow \frac{OA'}{OA''}=\frac{k}{k'} \Rightarrow OA'=\frac{k}{k'}\times OA''$$

بنابراین A' مجانس A'' به مرکز O و نسبت $\frac{k}{k'}$ است.

(هندسه ۲- تبدیل‌های هندسی و کاربردها؛ صفحه‌های ۴۳ تا ۴۹)

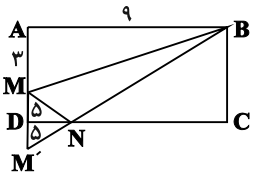
۴۴- **گزینهٔ «۴»** *(رضا بشنده)*

انتقال و تجانس هر دو شیب خط را حفظ می‌کنند، پس ترکیب آن‌ها شیب خط را حفظ می‌کند. انتقال طولپا است ولی تجانس در حالت $|k|\neq 1$، طولپا نیست، پس ترکیب آن‌ها لزوماً طولپا نیست و حالت مطلوب مسأله می‌باشد.

(هندسه ۲ - تبدیل‌های هندسی و کاربردها؛ صفحه‌های ۴۳ تا ۴۹)

۴۵- **گزینهٔ «۳»** *(جواد حاتمی)*

چون MB ثابت است، پس باید $MN+NB$ حداقل باشد. می‌خواهیم نقطه‌ای مانند N روی DC پیدا کنیم که مسیر شکستهٔ MNB کمترین مقدار باشد، پس بازتاب M را نسبت به DC پیدا کرده آن را به B وصل می‌کنیم.



$$MB=\sqrt{81+9}=3\sqrt{10}$$

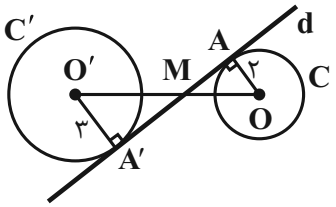
$$M'B=\sqrt{169+81}=5\sqrt{10}$$

$$\Rightarrow \min(\text{محیط } \overset{\Delta}{MBN}) = ۳\sqrt{۱۰} + ۵\sqrt{۱۰} = ۸\sqrt{۱۰}$$

(هندسه ۲- تبدیل‌های هندسی و کاربردها؛ صفحه‌های ۵۲ و ۵۳)

۴۶- **گزینهٔ «۳»** *(علی ایمانی)*

مرکز تجانس معکوس دو دایرهٔ متخارج همان محل برخورد مماس مشترک‌های داخلی دو دایره با خط المرکزین آنهاست.



بنابراین خط d در نقطهٔ A' بر دایرهٔ C' نیز مماس است. دو مثلث OAM و $O'A'M$ به‌حالت تساوی زاویه‌ها متشابه‌اند و داریم:

$$\frac{OM}{O'M} = \frac{OA}{O'A'} = \frac{۲}{۳}$$

$$\xrightarrow{\text{ترکیب نسبت در مخرج}} \frac{OM}{OO'} = \frac{۲}{۵} \Rightarrow \frac{OM}{۱۰} = \frac{۲}{۵} \Rightarrow OM = ۴$$

$$\overset{\Delta}{OAM} : AM^۲ = OM^۲ - OA^۲ = ۱۶ - ۴ = ۱۲ \Rightarrow AM = ۲\sqrt{۳}$$

$$S_{OAM} = \frac{۱}{۲} OA \times AM = \frac{۱}{۲} \times ۲ \times ۲\sqrt{۳} = ۲\sqrt{۳}$$

(هندسه ۲- تبدیل‌های هندسی و کاربردها؛ صفحه‌های ۴۳ تا ۴۹)

۴۷- **گزینهٔ «۳»** *(امیرحسین ابومحبوب)*

برای افزایش مساحت این قطعه زمین بدون تغییر محیط و تعداد اضلاع پنج ضلعی $ABCDE$، کافی است بازتاب نقطهٔ C را نسبت به خط گذرنده از نقاط B و D به‌دست آوریم. در این‌صورت دو مثلث BCD و $BC'D$ هم‌نهشت هستند.

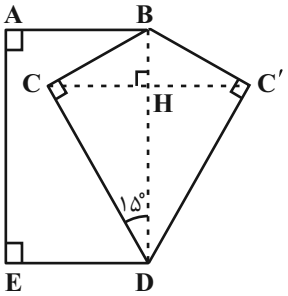
می‌دانیم اگر یکی از زوایای حاده در مثلث قائم‌الزاویه‌ای برابر ۱۵° باشد، آن‌گاه طول ارتفاع وارد بر وتر در این مثلث، $\frac{۱}{۴}$ طول وتر است، پس داریم:

$$CH = \frac{۱}{۴} BD = \frac{۱}{۴} \times ۱۲ = ۳$$

$$S_{BC'D} = S_{BCD} = \frac{۱}{۲} CH \times BD = \frac{۱}{۲} \times ۳ \times ۱۲ = ۱۸$$

با توجه به اینکه چهارضلعی $ABDE$ مستطیل است، داریم:

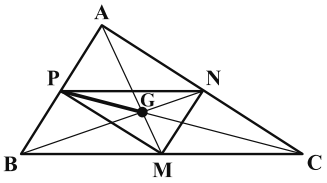
$$S_{ABC'DE} = S_{ABDE} + S_{BC'D} = (۱۲ \times ۳ / ۵) + ۱۸ = ۶۰$$



(هندسه ۲- تبدیل‌های هندسی و کاربردها؛ صفحه‌های ۵۱ و ۵۲)

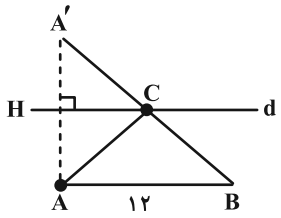
۴۸- **گزینهٔ «۱»** *(محمد غندران)*

طبق تعریف تجانس، اگر نقطهٔ A' تصویر نقطهٔ A در تجانس به مرکز O و نسبت تجانس k باشد، آنگاه سه نقطهٔ O، A و A' روی یک خط راست قرار دارند. بنابراین اگر نقاط M، N و P به‌ترتیب مجانس نقاط A، B و C در یک تجانس باشند، مرکز تجانس قطعاً بر روی خط‌های شامل پاره‌خط‌های AM، BN و CP قرار دارد. چون این سه پاره‌خط، میانه‌های مثلث ABC هستند، پس نقطهٔ تقاطع آنها همان نقطهٔ همرسی میانه‌های مثلث ABC است.



(هندسه ۲- تبدیل‌های هندسی و کاربردها؛ صفحه‌های ۴۳ تا ۴۹)

۴۹- **گزینهٔ «۳»** *(سرژ یقیازاریان تبریزی)*



اگر طول ارتفاع وارد بر ضلع AB در مثلث $\overset{\Delta}{ABC}$ را برابر h در نظر بگیریم، آنگاه داریم:

$$S_{\overset{\Delta}{ABC}} = \frac{AB \times h}{۲} \Rightarrow ۲۷ = \frac{۱۲ \times h}{۲} \Rightarrow h = \frac{۹}{۲}$$

پس رأس C روی خطی به‌فاصلهٔ $\frac{۹}{۲}$ واحد از ضلع AB قرار دارد.

چون مقدار AB ثابت و می‌خواهیم محیط ABC کم‌ترین مقدار ممکن باشد، مسئله تبدیل می‌شود به پیدا کردن رأس C روی خط d به‌گونه‌ای که مقدار $AC+BC$ کم‌ترین باشد. با توجه به مسئلهٔ اول هرون، قرینهٔ A را نسبت به d پیدا می‌کنیم (نقطهٔ A'). چون $AC = A'C$، بنابراین حداقل مقدار $AC+CB$ برابر است با:

$$AC + CB = A'C + BC = A'B$$

در مثلث قائم‌الزاویهٔ $AA'B$ داریم:

$$A'B = \sqrt{AA'^{۲} + AB^{۲}} = \sqrt{۹^{۲} + ۱۲^{۲}} = \sqrt{۲۲۵} = ۱۵$$

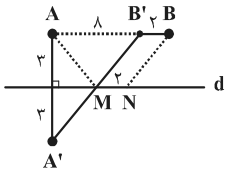
پس کمترین مقدار محیط مثلث ABC برابر است با:

$$۱۲ + ۱۵ = ۲۷$$

(هندسه ۲- تبدیل‌های هندسی و کاربردها؛ صفحه‌های ۵۲ و ۵۳)

۵۰- **گزینهٔ «۱»** *(امیرحسین ابومحبوب)*

برای پیدا کردن کوتاه‌ترین مسیر بین A و B، کافی است از نقطهٔ B، خطی به طول ۲ کیلومتر موازی با خط d و به طرف نقطهٔ A رسم کنیم تا نقطهٔ B' حاصل شود. سپس از نقطهٔ A' قرینهٔ A نسبت به خط d، به B' وصل کنیم تا خط d را در نقطه‌ای مانند M قطع کند. اگر N نقطه‌ای به فاصلهٔ ۲ کیلومتر از M بر روی خط d باشد، آنگاه مسیر $AMNB$ کوتاه‌ترین مسیر ممکن است. داریم:



$$AM + MN + NB = A'M + BB' + MB'$$

$$= (A'M + MB') + BB' = A'B' + BB'$$

در مثلث قائم‌الزاویهٔ $A'AB'$ داریم:

$$A'B'^{۲} = AA'^{۲} + AB'^{۲} = ۳۶ + ۶۴ = ۱۰۰ \Rightarrow A'B' = ۱۰$$

و در نتیجه طول جادهٔ بین A و B، برابر $۱۲ = ۲ + ۱۰$ خواهد بود.

(هندسه ۲- تبدیل‌های هندسی و کاربردها؛ صفحهٔ ۵۳)

حسابان ۲

۵۱- **گزینهٔ «۲»** *(علی شهرابی)*

تغییرات گفته شده را به‌ترتیب روی تابع $y=x^3$ انجام می‌دهیم:

$$y=x^3 \xrightarrow{\text{۱ واحد به چپ}} y=(x+1)^3$$

$$\xrightarrow{\text{قرینه نسبت به xها}} y=-(x+1)^3$$

$$\xrightarrow[\text{با ضریب } k]{\text{انبساط عمودی}} y=-k(x+1)^3$$

$$\xrightarrow{\text{۲ واحد به بالا}} f(x)=-k(x+1)^3+2$$

نمودار تابع f از مبدأ می‌گذرد، پس: $f(0)=-k+2=0\Rightarrow k=2$

حال معادلهٔ $f(x)=4$ را حل می‌کنیم:

$$-2(x+1)^3+2=4\Rightarrow (x+1)^3=-1\Rightarrow x+1=-1\Rightarrow x=-2$$

(حسابان ۲- تابع؛ صفحه‌های ۱ تا ۱۴)

۵۲- **گزینهٔ «۲»** *(عادل حسینی)*

می‌دانیم تابع مورد نظر، از پاره‌خط‌هایی تشکیل شده است که شیب آن‌ها مثبت است. بنابراین، با توجه به اینکه $[x]$ در عدد صحیح z ناپیوسته است، برای اکیداً صعودی بودن تابع $y=2x-k[x]$، کافی است حد راست آن در $x=z$، بزرگ‌تر یا مساوی با حد چپ آن در $x=z$ باشد. پس داریم:

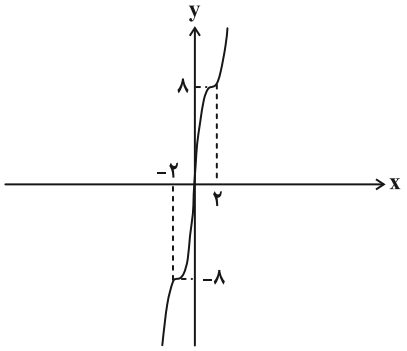
$$\begin{cases}\lim\limits_{x\to z^+}\big(2x-k[x]\big)=2z-kz\\ \lim\limits_{x\to z^-}\big(2x-k[x]\big)=2z-k(z-1)=2z-kz+k\end{cases}$$

$$\Rightarrow \text{شرط صعودی بودن}: 2z-kz\geq 2z-kz+k\Rightarrow k\leq 0$$

(حسابان ۲- تابع؛ صفحه‌های ۱۵ تا ۱۸)

۵۳- **گزینهٔ «۴»** *(سروش موئینی)*

نمودار تابع f را رسم می‌کنیم:



$$x\geq 0\Rightarrow x^3-6x^2+12x=(x-2)^3+8$$

$$x<0\Rightarrow x^3+6x^2+12x=(x+2)^3-8$$

همانطور که می‌بینید تابع در دامنهٔ خود، اکیداً صعودی است.

(حسابان ۲- تابع؛ صفحه‌های ۱۳ تا ۱۸)

۵۴- **گزینهٔ «۱»** *(طاهر دادستانی)*

$$x+1=0\Rightarrow x=-1: a(-1)^5+b(-1)^4+2(-1)=4$$

$$\Rightarrow a-b=-6 \qquad (1)$$

$$x-2=0\Rightarrow x=2: r=(2)^3+a(2)^2-2b(2)=8+4a-4b$$

$$=8+4(a-b)\xrightarrow{(1)}8+4(-6)=-16$$

(حسابان ۲- تابع؛ صفحه‌های ۱۸ تا ۲۲)

۵۵- **گزینهٔ «۲»** *(عادل حسینی)*

$$p(x)=(x+1)(x+2)q(x)+2x+1$$

$$\Rightarrow\begin{cases}p(x-1)=x(x+1)q(x-1)+2x-1\\ p(x-2)=x(x-1)q(x-2)+2x-3\end{cases}$$

$$\Rightarrow p(x-1)-p(x-2)=x\big[(x+1)q(x-1)-(x-1)q(x-2)\big]+2$$

در نتیجه باقی‌ماندهٔ تقسیم مورد نظر، برابر ۲ است.

(حسابان ۲- تابع؛ صفحه‌های ۱۸ تا ۲۲)

۵۶- **گزینهٔ «۱»** *(محمد پیمانی)*

$$f(x)=\frac{\sin 3x}{\cos 3x}+\frac{\cos 3x}{\sin 3x}-1=\frac{\sin^2 3x+\cos^2 3x}{\sin 3x\cos 3x}-1$$

$$=\frac{1}{\frac{1}{2}\sin 6x}-1=\frac{2}{\sin 6x}-1$$

$$\Rightarrow f(x)=\frac{2}{\sin 6x}-1$$

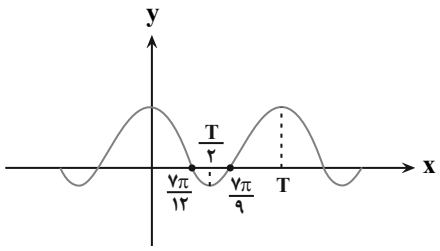
به راحتی می‌توان نشان داد که اگر دورهٔ تناوب تابع g برابر T باشد، دورهٔ تناوب تابع $\frac{1}{g}$ (با شرط متناوب بودن) نیز T است. بنابراین در این سؤال، دورهٔ تناوب تابع f و دورهٔ تناوب تابع $y=\sin 6x$ یکسان هستند.

$$\Rightarrow T_f=\frac{2\pi}{6}=\frac{\pi}{3}$$

(حسابان ۲- مثلثات؛ صفحهٔ ۲۷)

۵۷- **گزینهٔ «۲»** *(توحید اسدی)*

مطابق شکل تابع در فاصلهٔ $[0,T]$ تکرار می‌شود (T دورهٔ تناوب) همچنین در $[0,\frac{T}{2}]$ مقدار تابع از ماکزیمم به مینیمم خود می‌رسد، پس $\frac{T}{2}$ میانگین ریشه‌های تابع است یعنی:



$$\frac{T}{۲}=\frac{\frac{۷\pi}{۱۲}+\frac{۷\pi}{۹}}{۲}\rightarrow T=\frac{۴۹\pi}{۳۶}$$

(حسابان ۲- مثلثات؛ صفحه‌های ۲۴ تا ۲۹)

۵۸- **گزینهٔ «۲»** (محسن اسماعیل‌پور)

$$y=a-\cos(\frac{۱}{۲}+bx)\pi=a-\cos(\frac{\pi}{۲}+b\pi x)$$

$$y=a+\sin b\pi x \qquad (۱)$$

طبق نمودار min تابع صفر است پس:

$$۰=-۱+a\Rightarrow a=۱$$

از طرفی طبق نمودار دورهٔ تناوب تابع داده شده برابر ۸ است پس:

$$T=\frac{۲\pi}{|b\pi|}=۸\Rightarrow\begin{cases}b=\frac{۱}{۴}\\ b=\frac{-۱}{۴}\end{cases}$$

در نقطهٔ شروع تابع روی محور yها تابع نزولی است، پس یا باید ضریب sin منفی باشد یا ضریب کمان. چون ضریب sin در (۱) مثبت است پس $b=-\frac{۱}{۴}$ درست است.

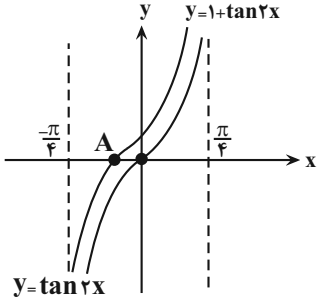
$$y=۱+\sin\frac{-\pi}{۴}x=۱-\sin\frac{\pi}{۴}x$$

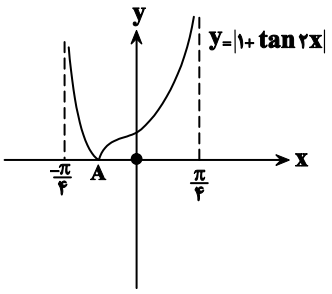
$$f(۱۵)-۱=-\sin\frac{۱۵\pi}{۴}=-\sin(۴\pi-\frac{\pi}{۴})=\sin\frac{\pi}{۴}=\frac{\sqrt{۲}}{۲}$$

(حسابان ۲- مثلثات؛ صفحه‌های ۲۴ تا ۲۹)

۵۹- **گزینهٔ «۳»** (سروش موئینی)

نمودار را رسم می‌کنیم:





$$y_A=۰\Rightarrow\tan۲x=-۱\Rightarrow۲x=\frac{-\pi}{۴}\Rightarrow x=\frac{-\pi}{۸}$$

پس طول بازه می‌شود:

$$\frac{\pi}{۴}-(\frac{-\pi}{۸})=\frac{۳\pi}{۸}$$

(حسابان ۲- مثلثات؛ صفحه‌های ۲۹ تا ۳۴)

۶۰- **گزینهٔ «۲»** (بهرام حلاج)

از روی شکل واضح است که اندازهٔ قاعده مثلث یعنی پاره‌خط AC همان مقدار دورهٔ تناوب تابع است که داریم:

$$AC=T=\frac{\pi}{۲}$$

برای یافتن ارتفاع مثلث نیز کافیست عرض نقطهٔ B را حساب کنیم:

$$f(۰)=\tan\frac{\pi}{۴}=۱$$

$$S=\frac{۱}{۲}\times۱\times\frac{\pi}{۲}=\frac{\pi}{۴}$$

نکته: دورهٔ تناوب تابع $y=\tan(ax)$ به‌صورت $T=\frac{\pi}{|a|}$ است.

(حسابان ۲- مثلثات؛ صفحه‌های ۲۹ تا ۳۲)

هندسه ۳

۶۱- **گزینهٔ «۲»** *(محمدابراهیم کیتی‌زاده)*

ستون دوم ماتریس AB، یک ماتریس ستونی است که از ضرب کردن تمام سطرهای ماتریس A در ستون دوم ماتریس B به‌دست می‌آید. به همین ترتیب ستون دوم ماتریس BA، یک ماتریس ستونی است که از ضرب کردن تمام سطرهای ماتریس B در ستون دوم ماتریس A به دست می‌آید.

$$\begin{bmatrix}۲ & ۱ & -۱\\ ۱ & ۳ & -۲\\ ۰ & ۲ & ۴\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۳\\ ۱\\ -۱\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۸\\ ۸\\ -۲\end{bmatrix}$$

AB مجموع درایه‌های ستون دوم $= ۸+۸-۲=۱۴$

$$\begin{bmatrix}۱ & ۳ & ۲\\ ۲ & ۱ & ۱\\ -۳ & -۱ & ۰\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۱\\ ۳\\ ۲\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۱۴\\ ۷\\ -۶\end{bmatrix}$$

$\Rightarrow BA$ مجموع درایه‌های ستون دوم $= ۱۴+۷-۶=۱۵$

بنابراین نسبت خواسته شده برابر $\frac{۱۴}{۱۵}$ است.

(هندسه ۳- ماتریس و کاربردها؛ صفحه‌های ۱۷ تا ۲۱)

۶۲- **گزینهٔ «۲»** *(محمد هجری)*

ماتریس A به‌صورت زیر می‌باشد:

$$A=\begin{bmatrix}۱ & ۱ & \dots & ۱\\ ۴ & ۴ & \dots & ۴\\ ۷ & ۷ & \dots & ۷\\ ۱۰ & ۱۰ & \dots & ۱۰\\ ۱۳ & ۱۳ & \dots & ۱۳\end{bmatrix}$$

مجموع درایه‌های هر ستون برابر $۱+۴+۷+۱۰+۱۳=۳۵$ است. در نتیجه:

$$۳۵\times n=۲۱۰\Rightarrow n=۶$$

(هندسه ۳- ماتریس و کاربردها؛ صفحه‌های ۱۰ و ۱۱)

۶۳- **گزینهٔ «۳»** *(امیرحسین ابومحبوب)*

$$A^۲=\begin{bmatrix}۱ & -۱\\ ۱ & ۱\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۱ & -۱\\ ۱ & ۱\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۰ & -۲\\ ۲ & ۰\end{bmatrix}$$

$$A^۴=\begin{bmatrix}۰ & -۲\\ ۲ & ۰\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۰ & -۲\\ ۲ & ۰\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-۴ & ۰\\ ۰ & -۴\end{bmatrix}=-۴I$$

$$A^{۱۶}=\left(A^۴\right)^۴=(-۴I)^۴=۲۵۶I$$

$$A^{۱۶}-A^۴=۲۵۶I+۴I=۲۶۰I=\begin{bmatrix}۲۶۰ & ۰\\ ۰ & ۲۶۰\end{bmatrix}$$

بنابراین مجموع درایه‌های $A^{۱۶}-A^۴$ برابر ۵۲۰ است.

(هندسه ۳- ماتریس و کاربردها؛ صفحه‌های ۱۷ تا ۲۱)

۶۴- **گزینهٔ «۱»** *(سهام مجیری‌پور)*

$$BA-I=C\Rightarrow BA=I+C\Rightarrow A=B^{-۱}(I+C)\quad (۱)$$

$$B=\begin{bmatrix}۳ & -۴\\ ۱ & ۰\end{bmatrix}\Rightarrow B^{-۱}=\frac{۱}{۴}\begin{bmatrix}۰ & ۴\\ -۱ & ۳\end{bmatrix}\quad (۲)$$

$$(۱),(۲)\Rightarrow A=\frac{۱}{۴}\begin{bmatrix}۰ & ۴\\ -۱ & ۳\end{bmatrix}\left(\begin{bmatrix}۱ & ۰\\ ۰ & ۱\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}۱ & -۱\\ -۱ & ۱\end{bmatrix}\right)$$

$$=\frac{۱}{۴}\begin{bmatrix}۰ & ۴\\ -۱ & ۳\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۲ & -۱\\ -۱ & ۲\end{bmatrix}=\frac{۱}{۴}\begin{bmatrix}-۴ & ۸\\ -۵ & ۷\end{bmatrix}$$

بنابراین مجموع درایه‌های سطر اول ماتریس A برابر است با:

$$\frac{۱}{۴}(-۴+۸)=۱$$

(هندسه ۳- ماتریس و کاربردها؛ صفحه‌های ۲۲ تا ۲۵)

۶۵- **گزینهٔ «۱»** *(امیرحسین ابومحبوب)*

دستگاه معادلات $\begin{cases}ax+by=c\\ a'x+b'y=c'\end{cases}$ در صورتی فاقد جواب است که $\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}\neq\frac{c}{c'}$ باشد.

$$\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}\Rightarrow\frac{۱}{m+۱}=\frac{۱-m}{-۳}\Rightarrow ۱-m^۲=-۳$$

$$\Rightarrow m^۲=۴\Rightarrow m=\pm ۲$$

حال به ازای هر یک از مقادیر به دست آمده، برقراری رابطهٔ $\frac{b}{b'}\neq\frac{c}{c'}$ را بررسی می‌کنیم.

دستگاه جواب ندارد. $m=۲ \Rightarrow \frac{۱-۲}{-۳} \neq \frac{-۲}{۲}$

دستگاه جواب ندارد. $m=-۲ \Rightarrow \frac{۱-(-۲)}{-۳} \neq \frac{-۲}{-۲}$

هر دو مقدار ۲ و ۲- برای m قابل قبول است و مجموع مقادیر m برابر صفر می‌شود.

(هندسه ۳- ماتریس و کاربردها؛ صفحه ۲۶)

۶۶- **گزینهٔ «۱»** *(امیرحسین ابومحبوب)*

$$|A|=k(-k+۲)-۱=-k^۲+۲k-۱=-(k-۱)^۲$$

$$A^{-۱}=\frac{۱}{-(k-۱)^۲}\begin{bmatrix}-k+۲ & -۱\\ -۱ & k\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow A^{-۱}\text{ مجموع درایه‌های }=\frac{-۱}{(k-۱)^۲}\underbrace{(-k+۲-۱-۱+k)}_{۰}=۰$$

(هندسه ۳- ماتریس و کاربردها؛ صفحه‌های ۲۲ و ۲۳)

۶۷- **گزینهٔ «۴»** *(یاسین سپهر)*

برای ماتریس قطری $B=\begin{bmatrix}r_۱ & ۰ & ۰\\ ۰ & r_۲ & ۰\\ ۰ & ۰ & r_۳\end{bmatrix}$ رابطهٔ $B^n=\begin{bmatrix}r_۱^n & ۰ & ۰\\ ۰ & r_۲^n & ۰\\ ۰ & ۰ & r_۳^n\end{bmatrix}$ برقرار است. بنابراین اگر n فرد باشد،

$A^n=\begin{bmatrix}-۱ & ۰ & ۰\\ ۰ & ۱ & ۰\\ ۰ & ۰ & -۱\end{bmatrix}$ و در صورتی که n زوج باشد،

$A^n=\begin{bmatrix}۱ & ۰ & ۰\\ ۰ & ۱ & ۰\\ ۰ & ۰ & ۱\end{bmatrix}$ است. یعنی مجموع درایه‌های ماتریس A^n در صورت زوج یا فرد بودن عدد n، به‌ترتیب برابر ۳ و (-۱) است. در نتیجه داریم:

مجموع درایه‌های $(A^{۱۴۰۳}+A^{۱۴۰۲}+\ldots+A^{۱۳۹۴})$

$$=\underbrace{(-۱)+۳}_{۲}+\ldots+\underbrace{(-۱)+۳}_{۲}=۵\times۲=۱۰$$

(هندسه ۳- ماتریس و کاربردها؛ صفحه‌های ۱۷ تا ۲۱)

۶۸- **گزینهٔ «۴»** *(علی ایمانی)*

دستگاه $\begin{cases}ax+۳y=۵\\ ۲x+y=۷\end{cases}$ جواب ندارد، بنابراین $\frac{a}{۲}=\frac{۳}{۱}\neq\frac{۵}{۷}$، در نتیجه $a=۶$ است.

با جایگذاری در دستگاه معادلات خطی دوم خواهیم داشت:

$$\begin{cases}۲x-ay=-۲a\\ -x+۳y=a\end{cases}\xrightarrow{a=۶}\begin{cases}۲x-۶y=-۱۲\\ -x+۳y=۶\end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{۲}{-۱}=\frac{-۶}{۳}=\frac{-۱۲}{۶}$$

پس این دستگاه بی‌شمار جواب دارد.

(هندسه ۳- ماتریس و کاربردها؛ صفحهٔ ۲۶)

۶۹- **گزینهٔ «۲»** *(محمد غدران)*

$$\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۴ & ۲\\ ۳ & -۲\end{bmatrix}\begin{bmatrix}m\\ -m\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۲m\\ ۵m\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \frac{x}{y}=\frac{۲m}{۵m}=\frac{۲}{۵}$$

(هندسه ۳- ماتریس و کاربردها؛ صفحه‌های ۲۳ تا ۲۶)

۷۰- **گزینهٔ «۴»** *(محمدمهدی ابوترابی)*

اگر $A=\begin{bmatrix}۲ & a\\ ۵ & -b\end{bmatrix}$، $X=\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix}۴\\ ۷\end{bmatrix}$ باشد، آنگاه داریم:

$$A^{-۱}=\frac{۱}{|A|}\begin{bmatrix}-b & -a\\ -۵ & ۲\end{bmatrix}\xrightarrow{|A|=۶}A^{-۱}=\frac{۱}{۶}\begin{bmatrix}-b & -a\\ -۵ & ۲\end{bmatrix}$$

$$X=A^{-۱}B=\frac{۱}{۶}\begin{bmatrix}-b & -a\\ -۵ & ۲\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۴\\ ۷\end{bmatrix}=\frac{۱}{۶}\begin{bmatrix}-۴b-۷a\\ -۶\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{-۴b-۷a}{۶}\\ -۱\end{bmatrix}\Rightarrow y=-۱$$

(هندسه ۳- ماتریس و کاربردها؛ صفحه‌های ۲۲ تا ۲۶)

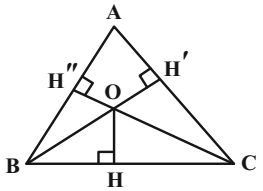
هندسه ۱

۷۱- **گزینهٔ «۴»** *(امیرحسین ابومحبوب)*

می‌دانیم مجموع فواصل هر نقطهٔ واقع در درون یک مثلث متساوی‌الاضلاع از سه ضلع آن برابر طول ارتفاع مثلث است، پس داریم:

$$h_a = ۲+۱+\sqrt{۳} = ۳+\sqrt{۳} \Rightarrow \frac{\sqrt{۳}}{۲}a = ۳+\sqrt{۳}$$

مطابق فرض فاصلهٔ نقطهٔ O از ضلع BC، برابر $OH = \sqrt{۳}$ است، بنابراین داریم:



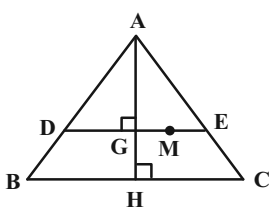
$$S_{OBC} = \frac{۱}{۲}OH \times BC = \frac{۱}{۲} \times \sqrt{۳} \times a$$

$$= \frac{\sqrt{۳}}{۲}a = ۳+\sqrt{۳}$$

(هندسه ۱- چندضلعی‌ها؛ صفحهٔ ۶۸)

۷۲- **گزینهٔ «۳»** *(امیرحسین ابومحبوب)*

پاره‌خط DE موازی ضلع BC رسم شده است، پس طبق قضیهٔ اساسی تشابه، دو مثلث ADE و ABC متشابه‌اند. در دو مثلث متشابه نسبت ارتفاع‌ها برابر نسبت تشابه (نسبت اضلاع متناظر) است. از طرفی می‌دانیم میانه‌های هر مثلث یکدیگر را به نسبت ۲ به ۱ قطع می‌کنند، بنابراین داریم:



$$\overset{\Delta}{ADE} \sim \overset{\Delta}{ABC} \Rightarrow \frac{DE}{BC} = \frac{AG}{AH} \Rightarrow \frac{DE}{۳} = \frac{۲}{۳} \Rightarrow DE = ۲$$

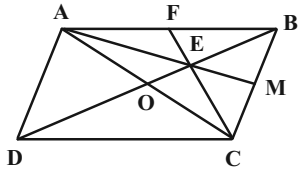
مثلث ADE متساوی‌الاضلاع است. از طرفی هر مثلث متساوی‌الاضلاع یک مثلث متساوی‌الساقین محسوب می‌شود، پس مجموع فواصل هر نقطهٔ واقع بر ضلع DE از اضلاع AD و AE، برابر اندازهٔ ارتفاع رسم شده از رأس D در این مثلث است. با توجه به این‌که ارتفاع‌های مثلث متساوی‌الاضلاع برابر یکدیگرند، پس این مقدار برابر طول ارتفاع AG، یعنی برابر است با:

$$\frac{\sqrt{۳}}{۲}DE = \frac{\sqrt{۳}}{۲} \times ۲ = \sqrt{۳}$$

(هندسه ۱- چندضلعی‌ها؛ صفحه‌های ۶۷ و ۶۸)

۷۳- **گزینهٔ «۳»** *(امیرحسین ابومحبوب)*

مطابق شکل قطر AC را رسم می‌کنیم. همچنین از C به E وصل کرده و ادامه می‌دهیم تا AB را در نقطهٔ F قطع کند. پاره‌خط‌های AM، BO و CF میانه‌های مثلث ABC هستند. می‌دانیم از برخورد میانه‌های هر مثلث، شش مثلث هم‌مساحت ایجاد می‌شود، بنابراین با فرض $S_{ABC} = S$ داریم:



$$S_{\overset{\Delta}{BEM}} = \frac{۱}{۶}S_{\overset{\Delta}{ABC}} = \frac{۱}{۶}S \qquad (۱)$$

از طرفی در مثلث ADC، DO میانهٔ وارد بر ضلع AC است، پس داریم:

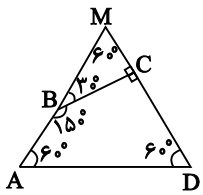
$$S_{OCD} = \frac{۱}{۲}S_{ADC} \xrightarrow{S_{ADC}=S_{ABC}} S_{OCD} = \frac{۱}{۲}S \qquad (۲)$$

$$\xrightarrow{(۱)\,,\,(۲)} \frac{S_{BEM}}{S_{EMCD}} = \frac{\frac{۱}{۶}S}{\frac{۱}{۳}S+\frac{۱}{۲}S} = \frac{\frac{۱}{۶}S}{\frac{۵}{۶}S} = \frac{۱}{۵}$$

(هندسه ۱- چندضلعی‌ها؛ صفحه‌های ۶۶ و ۶۷)

۷۴- **گزینهٔ «۴»** *(جواد حاتمی)*

دو ضلع AB و CD را امتداد می‌دهیم تا یکدیگر را در نقطهٔ M قطع کنند. مثلث MAD متساوی‌الاضلاع است. همچنین با توجه به اندازهٔ زوایای داده شده، BC بر CD عمود و مثلث MCB قائم‌الزاویه است. اگر $BC = x$ باشد، آن‌گاه $AD = x + ۲$ و داریم:



$$\overset{\Delta}{MCB} : \tan ۶۰^\circ = \frac{BC}{MC} \Rightarrow \sqrt{۳} = \frac{x}{MC} \Rightarrow MC = \frac{x}{\sqrt{۳}}$$

$$S_{ABCD} = S_{MAD} - S_{MCB} = \frac{\sqrt{۳}}{۴}AD^۲ - \frac{۱}{۲}BC \times MC$$

$$= \frac{\sqrt{۳}}{۴}(x+۲)^۲ - \frac{۱}{۲}(x)(\frac{x}{\sqrt{۳}}) = \frac{\sqrt{۳}}{۴}(x+۲)^۲ - \frac{\sqrt{۳}}{۶}x^۲$$

$$= \frac{\sqrt{۳}}{۱۲}(۳x^۲ + ۱۲x + ۱۲ - ۲x^۲) = \frac{\sqrt{۳}}{۱۲}(x^۲ + ۱۲x + ۱۲)$$

طبق فرض داریم:

$$\frac{\sqrt{۳}}{۱۲}(x^۲ + ۱۲x + ۱۲) = \frac{۱۹}{۴}\sqrt{۳}$$

$$\Rightarrow x^۲ + ۱۲x + ۱۲ = ۵۷ \Rightarrow x^۲ + ۱۲x - ۴۵ = ۰$$

$$\Rightarrow (x-۳)(x+۱۵) = ۰$$

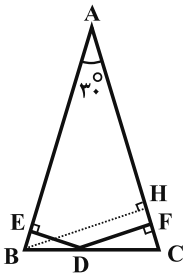
در نتیجه $BC = x = ۳$.

(هندسه ۱- چندضلعی‌ها؛ صفحه ۶۵)

۷۵- **گزینهٔ «۳»** *(رضا عباسی‌اصل)*

از B بر AC عمود رسم می‌کنیم. در مثلث قائم‌الزاویهٔ ABH داریم:

$$\hat{A} = ۳۰^\circ \Rightarrow BH = \frac{۱}{۲}AB$$



از طرفی می‌دانیم مجموع فاصله‌های هر نقطهٔ واقع بر قاعدهٔ مثلث متساوی‌الساقین از دو ساق آن، برابر طول ارتفاع وارد بر ساق است، پس داریم:

$$DE + DF = BH \Rightarrow ۳ + ۵ = \frac{۱}{۲}AB \Rightarrow AB = ۱۶$$

(هندسه ۱- چندضلعی‌ها؛ صفحهٔ ۶۸)

۷۶- **گزینهٔ «۲»** *(فرزانه خاکپاش)*

اگر تعداد نقاط مرزی و درونی یک چندضلعی شبکه‌ای به ترتیب برابر b و i باشد، آن‌گاه طبق فرمول پیک، مساحت این چندضلعی برابر $S = \frac{b}{۲} + i - ۱$ است؛ از طرفی طبق فرض $i = ۲b - ۱$، پس:

$$۱۳ = \frac{b}{۲} + ۲b - ۱ - ۱ \Rightarrow \frac{۵b}{۲} = ۱۵ \Rightarrow b = ۶$$

این چندضلعی شبکه‌ای، شش نقطهٔ مرزی دارد.

(هندسه ۱- چندضلعی‌ها؛ صفحه‌های ۶۹ تا ۷۱)

۷۷- **گزینهٔ «۱»** *(رحیم مشتاق‌نظم)*

فرض کنید مساحت شکل‌های بیرونی و درونی را به ترتیب با S و S' نمایش دهیم. در این صورت طبق فرمول پیک داریم:

$$S=\frac{b}{۲}+i-۱=\frac{۵}{۲}+۱۴-۱=۱۵/۵$$

$$S'=\frac{b'}{۲}+i'-۱=\frac{۵}{۲}+۰-۱=۱/۵$$

$$\text{مساحت قسمت سایه زده}=S-S'=۱۵/۵-۱/۵=۱۴$$

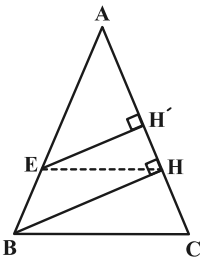
(هندسه ۱- چندضلعی‌ها؛ صفحه‌های ۶۹ تا ۷۱)

۷۸- **گزینهٔ «۴»** *(محمد خندان)*

$EH \parallel BC$ است، پس دو مثلث AEH و ABC متشابه‌اند، یعنی مثلث AEH نیز متساوی‌الساقین است. مجموع فواصل هر نقطهٔ دلخواه روی EH تا ساق‌ها برابر ارتفاع وارد بر ساق مثلث AEH است. اگر $AB=۵x$ فرض شود، آنگاه $AH=۳x$ است و داریم:

$$\overset{\Delta}{AHB}: BH^۲=AB^۲-AH^۲=۲۵x^۲-۹x^۲=۱۶x^۲$$

$$\Rightarrow BH=۴x$$



$$\overset{\Delta}{AHB}: EH' \parallel BH \xrightarrow{\text{تعمیم قضیهٔ تالس}} \frac{EH'}{BH}=\frac{AE}{AB}$$

$$\Rightarrow \frac{EH'}{۴x}=\frac{۳x}{۵x} \Rightarrow EH'=\frac{۱۲}{۵}x=\frac{۱۲}{۲۵}(۵x)=\frac{۱۲}{۲۵}AC$$

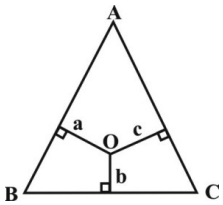
(هندسه ۱- چندضلعی‌ها؛ صفحهٔ ۶۸)

۷۹- **گزینهٔ «۳»** *(محمدابراهیم کیتی‌زاده)*

مجموع فاصله‌های هر نقطهٔ درون مثلث متساوی‌الاضلاعی به طول ضلع x از سه ضلع آن، برابر طول ارتفاع مثلث یعنی $\frac{\sqrt{۳}}{۲}x$ است.

$$\begin{cases} a+b+c=\frac{\sqrt{۳}}{۲}\times ۲۰\sqrt{۳}=۳۰ \\ a+b-c=۱۰ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a+b+c=۳۰ \\ -a-b+c=-۱۰ \end{cases}$$

$$\Rightarrow ۲c=۲۰ \Rightarrow c=۱۰$$

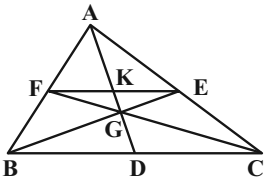


(هندسه ۱- چندضلعی‌ها؛ صفحه‌های ۶۸ و ۶۹)

۸۰- **گزینهٔ «۴»** *(علی ایمانی)*

$$\frac{AF}{FB}=\frac{AE}{EC}=۱$$

$$\xrightarrow{\text{عکس قضیهٔ تالس}} FE \parallel BC$$



$$\Rightarrow \frac{EF}{BC}=\frac{AE}{AC}=\frac{۱}{۲}$$

با توجه به موازی بودن FE و BC، دو مثلث EGF و BGC به دلیل تساوی زاویه‌ها متشابه هستند. از طرفی GK و GD میانه‌های نظیر اضلاع EF و BC در این دو مثلث هستند، بنابراین داریم:

$$\frac{GD}{GK}=\frac{BC}{EF}=۲ \Rightarrow GD=۲GK=۶$$

از طرفی G نقطهٔ همرسی میانه‌های مثلث ABC است، پس داریم:

$$GD=\frac{۱}{۳}AD \Rightarrow ۶=\frac{۱}{۳}AD \Rightarrow AD=۱۸$$

(هندسه ۱- چند ضلعی‌ها؛ صفحهٔ ۶۷)

ریاضیات گسسته

۸۱- **گزینهٔ «۲»** *(مختار منصوری)*

$$\frac{a^۲}{b}+\frac{b^۲}{a}\geq a+b \Leftrightarrow \frac{a^۳+b^۳}{ab}\geq a+b$$

$$\xleftarrow{ab>۰} a^۳+b^۳\geq ab(a+b)$$

$$\Leftrightarrow (a+b)(a^۲-ab+b^۲)\geq ab(a+b)$$

$$\xleftarrow{a+b>۰} a^۲-ab+b^۲\geq ab$$

$$\Leftrightarrow a^۲-۲ab+b^۲\geq ۰ \Leftrightarrow (a-b)^۲\geq ۰$$

(ریاضیات گسسته- آشنایی با نظریهٔ اعداد؛ صفحه‌های ۶ تا ۸)

۸۲- **گزینهٔ «۳»** *(علیرضا شریف‌طبیبی)*

با مثال مقابل می‌توان گزینه‌های نادرست را مشخص کرد $\underset{۴\times ۳=۶\times ۲}{b\ c\ a\ d}$

گزینهٔ «۱» نادرست است. $۳^۲ \not| \ ۶\times ۲$

گزینهٔ «۲» نادرست است. $۶\neq ۳$ و $۲\neq ۴$

گزینهٔ «۴» نادرست است. $۴\times ۹ \not| \ ۶\times ۲$

اثبات درستی گزینهٔ «۳» $ad=bc \Rightarrow a\mid bc \Rightarrow a\mid bc^۲$

(ریاضیات گسسته- آشنایی با نظریهٔ اعداد؛ صفحه‌های ۹ تا ۱۲)

۸۳- **گزینهٔ «۳»** *(علی اکبر علی‌زاده)*

$$\frac{n^۳(n+۱)^۳}{۸}=(\frac{n(n+۱)}{۲})^۳=۷ \text{ مضرب} \Rightarrow \frac{n(n+۱)}{۲}=۷k$$

$$\Rightarrow n(n+۱)=۱۴k$$

هر کدام از اعداد n یا $n+۱$ مضرب ۷ باشد، $n(n+۱)$ مضرب ۱۴ خواهد بود. زیرا قطعاً یکی از آنها زوج است.

مقادیر قابل قبول n: $n=۶,۷,۱۳,۱۴,۲۰,۲۱,۲۷,۲۸$

(ریاضیات گسسته- آشنایی با نظریهٔ اعداد؛ صفحه‌های ۴ و ۵)

۸۴- **گزینهٔ «۲»** *(علی ایمانی)*

$$۳\mid a+۲b \xrightarrow{\text{به توان ۲}} ۳^۲\mid (a+۲b)^۲ \Rightarrow ۹\mid a^۲+۴ab+۴b^۲$$

$$\xrightarrow{\times ۴} \left.\begin{matrix} ۹\mid ۴a^۲+۱۶ab+۱۶b^۲ \\ ۹\mid ۱۸b^۲+۲۷ab \end{matrix}\right\} \xrightarrow{\text{تفاضل}} ۹\mid ۴a^۲-۱۱ab-۲b^۲$$

$$\Rightarrow k=-۱۱$$

(ریاضیات گسسته- آشنایی با نظریهٔ اعداد؛ صفحه‌های ۹ تا ۱۲)

۸۵- **گزینهٔ «۳»** *(نیلوفر مهدوی)*

۱۱ عددی فرد و اول است که به صورت هیچ‌یک از فرم‌های $۲^n+۱$ و $۲^n-۱$ نوشته نمی‌شود، بنابراین گزینهٔ «۳» نادرست است. حال به اثبات دیگر گزینه‌ها می‌پردازیم:

گزینهٔ «۱»:

$$a=۲k+۱,(k\in\mathbb{Z}) \Rightarrow a^۲=(۲k+۱)^۲ \Rightarrow a^۲=۴k^۲+۴k+۱$$

$$=۴\underbrace{k(k+۱)}_{۲k'}+۱=۸k'+۱$$

گزینهٔ «۲»:

$$a=k(k+۱),(k\in\mathbb{N}) \Rightarrow ۴a+۱=۴k(k+۱)+۱$$

$$=۴k^۲+۴k+۱=(۲k+۱)^۲$$

گزینه «۴»:

$$a=۲k-۱,(k\in\mathbb{Z}) \Rightarrow a^۲=(۲k-۱)^۲=۴k^۲-۴k+۱$$

$$=۲(\underbrace{۲k^۲-۲k}_{k'})+۱=۲k'+۱$$

$$a^۳=(۲k-۱)^۳=۸k^۳-۱۲k^۲+۶k-۱=۲(\underbrace{۴k^۳-۶k^۲+۳k}_{k''})-۱=۲k''-۱$$

(ریاضیات گسسته- آشنایی با نظریهٔ اعداد؛ صفحه‌های ۲، ۳ و ۸)

۸۶- **گزینهٔ «۴»** *(هومن نورائی)*

$$\left.\begin{matrix} ۲x+۳y\overset{۷}{\equiv}۴ \xrightarrow{\times ۲} ۴x+۶y\overset{۷}{\equiv}۸ \\ ۵x+۶y\overset{۷}{\equiv}۳ \end{matrix}\right\} \xrightarrow{\text{تفاضل}} x\overset{۷}{\equiv}-۵\overset{۷}{\equiv}۲$$

$$\Rightarrow x=۷k+۲ \ (k\in Z)$$

(ریاضیات گسسته- آشنایی با نظریهٔ اعداد؛ صفحه‌های ۱۸ تا ۲۲)

۸۷- **گزینهٔ «۳»** *(افشین خاصه خان)*

$$\left.\begin{matrix} d\mid ۲a-۵ \xrightarrow{\times ۲} d\mid ۴a-۱۰ \\ d\mid ۴a+۴ \end{matrix}\right\} \xrightarrow{\text{تفاضل}} d\mid ۱۴$$

با توجه به اینکه $۲a-۵$ عددی فرد است، پس d قطعاً فرد بوده و چون $d\neq ۱$، پس $d=۷$ است.

رقم یکان هر عدد طبیعی با خود عدد به پیمانهٔ ۱۰ هم‌نهشت است، پس داریم:

$$۱۳\overset{۱۰}{\equiv}۳ \Rightarrow ۱۳^۷\overset{۱۰}{\equiv}۳^۷$$

$$۳^۲\overset{۱۰}{\equiv}۹\overset{۱۰}{\equiv}-۱ \xrightarrow{\text{به توان ۳}} ۳^۶\overset{۱۰}{\equiv}-۱ \xrightarrow{\times ۳} ۳^۷\overset{۱۰}{\equiv}-۳\overset{۱۰}{\equiv}۷$$

$$\Rightarrow ۱۳^۷\overset{۱۰}{\equiv}۷$$

(ریاضیات گسسته- آشنایی با نظریهٔ اعداد؛ صفحه‌های ۹ تا ۱۴ و ۱۸ تا ۲۱)

۸۸- **گزینهٔ «۱»** *(امیرحسین ابومحبوب)*

با توجه به اینکه تعداد روزهای هفته برابر ۷ است، کافی است تعداد روزهای بین ۱۵ خرداد تا ۱۳ آبان را به‌دست آورده و باقی‌ماندهٔ تقسیم آن را بر ۷ بیابیم.

$$\text{تعداد روزها} = \underset{\text{خرداد}}{۱۶} + \underset{\text{تیرتاشهریور}}{۳۱\times ۳} + \underset{\text{مهر}}{۳۰} + \underset{\text{آبان}}{۱۳} = ۱۵۲ \Rightarrow ۱۵۲ \overset{۷}{\equiv} ۵$$

یکشنبه	شنبه	جمعه	پنجشنبه	چهارشنبه	سه‌شنبه	دوشنبه
۶	۵	۴	۳	۲	۱	۰

حال مطابق جدول اگر روز مبدأ یعنی دوشنبه را معادل صفر فرض کنیم، روز شنبه معادل ۵ است، پس ۱۳ آبان باید روز شنبه باشد.

(ریاضیات گسسته- آشنایی با نظریهٔ اعداد؛ صفحهٔ ۲۴)

۸۹- **گزینهٔ «۱»** *(فرزانه خاکپاش)*

دو عدد $۹+۲a$ و $۴-۷a$ در یک دسته هم‌نهشتی به پیمانه ۱۱ قرار دارند، پس این دو عدد به پیمانه ۱۱ هم‌نهشت هستند.

$$۷a-۴ \overset{۱۱}{\equiv} ۲a+۹ \Rightarrow ۵a \overset{۱۱}{\equiv} ۱۳ \overset{۱۱}{\equiv} ۱۳+۲\times ۱۱ \overset{۱۱}{\equiv} ۳۵$$

$$\xrightarrow[(۵,۱۱)=۱]{+۵} a \overset{۱۱}{\equiv} ۷$$

$$a \overset{۱۱}{\equiv} ۷ \xrightarrow{\text{به توان }۳} a^۳ \overset{۱۱}{\equiv} ۳۴۳ \overset{۱۱}{\equiv} ۳-۴+۳ \overset{۱۱}{\equiv} ۲$$

$$a \overset{۱۱}{\equiv} ۷ \xrightarrow{\text{به توان }۲} a^۲ \overset{۱۱}{\equiv} ۴۹ \overset{۱۱}{\equiv} ۵$$

$$a \overset{۱۱}{\equiv} ۷ \xrightarrow{\times ۳} ۳a \overset{۱۱}{\equiv} ۲۱ \overset{۱۱}{\equiv} ۱۰$$

$$a^۳+a^۲+۳a+b \overset{۱۱}{\equiv} ۷ \Rightarrow ۲+۵+۱۰+b \overset{۱۱}{\equiv} ۷$$

$$\Rightarrow b \overset{۱۱}{\equiv} -۱۰ \overset{۱۱}{\equiv} ۱ \Rightarrow b = ۱۱k+۱ \ (k \in Z)$$

پس به ازای $b=۱$، عدد $a^۳+a^۲+۳a+b$ به $[۷]_{۱۱}$ تعلق دارد.

(ریاضیات گسسته- آشنایی با نظریهٔ اعداد، صفحه‌های ۱۸ تا ۲۵)

۹۰- **گزینهٔ «۱»** *(علیرضا کلانتری)*

اگر $n \geq ۴$ باشد، آنگاه $n! \overset{۱۲}{\equiv} ۰$ است، بنابراین داریم:

$$x\left(۱!+۲!+۳!+۰+۰+\ldots+۰\right) \overset{۱۲}{\equiv} ۳ \Rightarrow ۹x \overset{۱۲}{\equiv} ۳$$

$$\Rightarrow ۹x \overset{۱۲}{\equiv} ۳ \overset{۱۲}{\equiv} -۹ \xrightarrow[(۹,۱۲)=۳]{+۹} x \overset{۴}{\equiv} -۱ \overset{۴}{\equiv} ۳ \Rightarrow x = ۴k+۳ \ (k \in \mathbb{Z})$$

$$۱۰ \leq ۴k+۳ \leq ۹۹ \Rightarrow ۷ \leq ۴k \leq ۹۶ \Rightarrow ۲ \leq k \leq ۲۴$$

$$\Rightarrow \text{تعداد مقادیر } k = ۲۳$$

(ریاضیات گسسته- آشنایی با نظریهٔ اعداد؛ صفحه‌های ۲۴ و ۲۵)

ریاضیات گسسته- آشنا

۹۱- **گزینهٔ «۴»** *(کتاب آبی)*

تمام اعداد طبیعی به جز اعدادی که به صورت توانی از ۲ هستند را می‌توان به صورت مجموع حداقل دو عدد طبیعی متوالی نوشت. در بین گزینه‌ها تنها $۲^۶ = ۶۴$ را نمی‌توان به‌صورت مجموع اعداد طبیعی متوالی نوشت.

(ریاضیات گسسته- آشنایی با نظریهٔ اعداد؛ صفحه‌های ۲ و ۳)

۹۲- **گزینهٔ «۲»** *(کتاب آبی)*

$$a^۲c^۲+a^۲d^۲+b^۲c^۲+b^۲d^۲ \geq a^۲c^۲+b^۲d^۲+۲acbd$$

$$\Leftrightarrow a^۲d^۲-۲acbd+b^۲c^۲ \geq ۰ \Leftrightarrow (ad-bc)^۲ \geq ۰$$

(ریاضیات گسسته- آشنایی با نظریهٔ اعداد؛ صفحه‌های ۷ و ۸)

۹۳- **گزینهٔ «۳»** *(کتاب آبی)*

$$xy+۵ = ۲(x+y) \Rightarrow xy+۵ = ۲x+۲y$$

$$\Rightarrow xy-۲y = ۲x-۵ \Rightarrow y(x-۲) = ۲x-۵ \Rightarrow y = \frac{۲x-۵}{x-۲}$$

حال برای آن‌که y مقداری طبیعی باشد، باید صورت بر مخرج بخش‌پذیر باشد، یعنی:

$$\left.\begin{array}{l} x-۲ \mid ۲x-۵ \\ x-۲ \mid x-۲ \xrightarrow{\times ۲} x-۲ \mid ۲x-۴ \end{array}\right\}$$

$$\xrightarrow{\text{تفاضل}} x-۲ \mid (۲x-۵)-(۲x-۴) \Rightarrow x-۲ \mid -۱$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x-۲=۱ \Rightarrow x=۳ \Rightarrow y=\dfrac{۶-۵}{۳-۲}=۱ \\ x-۲=-۱ \Rightarrow x=۱ \Rightarrow y=\dfrac{۲-۵}{۱-۲}=۳ \end{cases}$$

بنابراین دو نقطه با مختصات طبیعی روی این منحنی یافت می‌شود.

(ریاضیات گسسته- آشنایی با نظریهٔ اعداد؛ صفحه‌های ۹ تا ۱۲)

۹۴- **گزینهٔ «۴»** *(کتاب آبی)*

$$\left.\begin{array}{l} d \mid ۳n+۵ \xrightarrow{\times n} d \mid ۳n^۲+۵n \\ \qquad\qquad d \mid ۳n^۲-۲n+۶ \end{array}\right\}$$

$$\xrightarrow{\text{تفاضل}} d \mid ۷n-۶$$

$$\left.\begin{array}{l} d \mid ۳n+۵ \xrightarrow{\times ۷} d \mid ۲۱n+۳۵ \\ d \mid ۷n-۶ \xrightarrow{\times ۳} d \mid ۲۱n-۱۸ \end{array}\right\}$$

$$\xrightarrow{\text{تفاضل}} d \mid ۵۳ \xrightarrow{d\neq ۱} d = ۵۳$$

(ریاضیات گسسته- آشنایی با نظریهٔ اعداد؛ صفحه‌های ۹ تا ۱۴)

۹۵- **گزینهٔ «۳»** *(کتاب آبی)*

چون $r = q$ پس داریم: $a = bq + q$ و با توجه به مفروضات مسئله می‌توان نوشت: $a = (b-۳)(q+۵)+۰$

$$bq + q = bq + ۵b - ۳q - ۱۵ \Rightarrow ۴q = ۵(b-۳)$$

از این رابطه معلوم می‌شود که طرف چپ مضرب ۵ است. یعنی $۵ \mid ۴q$ و چون ۴ مضربی از ۵ نیست، پس q باید مضرب ۵ باشد.

(ریاضیات گسسته- آشنایی با نظریهٔ اعداد؛ صفحهٔ ۱۴)

۹۶- **گزینهٔ «۳»** *(کتاب آبی)*

اگر خارج قسمت و باقی مانده را به ترتیب با q و r نمایش دهیم، داریم:

$$q + r = ۱۷ \Rightarrow q = ۱۷ - r$$

$$a = ۱۳q + r = ۱۳(۱۷ - r) + r = ۲۲۱ - ۱۲r$$

$$\Rightarrow a - ۸ = ۲۱۳ - ۱۲r = ۱۹۲ - ۱۲r + ۲۱ = ۱۲(۱۶ - r) + ۲۱$$

با توجه به فرض، $۰ \le r \le ۱۲$ بوده یعنی فضای نمونه شامل ۱۳ عضو است. برای اینکه باقی مانده تقسیم $a - ۸$ بر عدد ۳۶، برابر ۲۱ باشد، لازم است $۱۶ - r$ مضرب ۳ شود که در این صورت مقادیر ۱، ۴، ۷ و ۱۰ برای r قابل قبول است، یعنی پیشامد تصادفی شامل ۴ عضو بوده و احتمال مورد نظر برابر $\frac{۴}{۱۳}$ است.

(ریاضیات گسسته- آشنایی با نظریهٔ اعداد؛ صفحهٔ ۱۴)

۹۷- **گزینهٔ «۳»** *(کتاب آبی)*

کوچک‌ترین عددی به صورت $n!$ که مضرب ۳۶ باشد، عدد $۹!$ است، پس داریم:

$$۱۰ - m = ۶ \Rightarrow m = ۴$$

بنابراین باید باقی مانده تقسیم $۴^{۱۲۳}$ را بر ۱۵ به دست آوریم:

$$۴^{۲} \overset{۱۵}{\equiv} ۱ \xrightarrow{\text{به توان ۶۱}} ۴^{۱۲۲} \overset{۱۵}{\equiv} ۱ \xrightarrow{\times ۴} ۴^{۱۲۳} \overset{۱۵}{\equiv} ۴$$

(ریاضیات گسسته- آشنایی با نظریهٔ اعداد؛ صفحه‌های ۱۸ تا ۲۲)

۹۸- **گزینهٔ «۱»** *(کتاب آبی)*

$$\left.\begin{array}{l} A \overset{۲۳}{\equiv} ۵ \Rightarrow A = ۲۳q + ۵ \\ ۲A \overset{۱۷}{\equiv} ۹ \overset{۱۷}{\equiv} ۲۶ \Rightarrow A \overset{۱۷}{\equiv} ۱۳ \end{array}\right\} \Rightarrow ۲۳q + ۵ \overset{۱۷}{\equiv} ۱۳$$

$$۶q + ۵ \overset{۱۷}{\equiv} ۱۳ \Rightarrow ۶q \overset{۱۷}{\equiv} ۸ \overset{۱۷}{\equiv} ۴۲ \xrightarrow[(۶,۱۷)=۱]{\div ۶} q \overset{۱۷}{\equiv} ۷$$

$$\Rightarrow q = ۱۷k + ۷$$

$$A = ۲۳(۱۷k + ۷) + ۵ = ۳۹۱k + ۱۶۶$$

$$A \overset{۱۲}{\equiv} ۳۹۱k + ۱۶۶ \overset{۱۲}{\equiv} ۷k - ۲$$

با توجه به آن‌که A عددی سه رقمی است پس حداکثر k برابر با ۲ می‌باشد. در نتیجه داریم: $A \overset{۱۲}{\equiv} ۱۲ \overset{۱۲}{\equiv} ۰$

(ریاضیات گسسته- آشنایی با نظریهٔ اعداد؛ صفحه‌های ۱۸ تا ۲۲)

۹۹- **گزینهٔ «۲»** *(کتاب آبی)*

ابتدا مشخص می‌کنیم فاصلهٔ ۱۵ آبان با اول فروردین چند روز است و سپس باقی‌ماندهٔ آن‌را بر ۷ پیدا می‌کنیم.

$$d = \underbrace{۳۰}_{\text{فروردین}} + \underbrace{۵\times ۳۱}_{\text{اردیبهشت تا شهریور}} + \underbrace{۳۰}_{\text{مهر}} + \underbrace{۱۵}_{\text{آبان}} = ۲۳۰ \Rightarrow ۲۳۰ \overset{۷}{\equiv} ۶$$

حال اگر مبدأ را چهارشنبه در نظر بگیریم.

متوجه می‌شویم که ۱۵ آبان، سه‌شنبه است.

۳شنبه	۲شنبه	۱شنبه	شنبه	جمعه	۵شنبه	۴شنبه
۶	۵	۴	۳	۲	۱	۰

(ریاضیات گسسته- آشنایی با نظریهٔ اعداد؛ صفحهٔ ۲۴)

۱۰۰- **گزینهٔ «۱»** *(کتاب آبی)*

$$m = \overline{aa} + ۱۰۰ \times ۵ \times \overline{aa} = ۵۰۱(۱۰a + a)$$

$$= ۵۰۱ \times ۱۱a = ۵۵۱۱a = ۱۸۳۷ \times ۳a \overset{۱۸۳۷}{\equiv} ۰$$

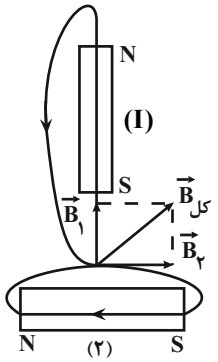
تذکر: وقتی عدد $\overline{aa}$ دو رقم به سمت چپ منتقل می‌شود یعنی $\overline{aa۰۰}$، مقدار آن ۱۰۰ برابر می‌گردد.

(ریاضیات گسسته- آشنایی با نظریهٔ اعداد؛ مشابه فعالیت صفحهٔ ۲۲)

فیزیک ۲

۱۰۱- **گزینهٔ «۳»** *(محمود منصوری)*

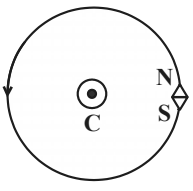
با توجه به این‌که خطوط میدان مغناطیسی در خارج آهنربا از قطب N خارج و به قطب S وارد می‌شود، بردار برایند میدان در نقطهٔ P به صورت زیر خواهد بود:



(فیزیک ۲- مغناطیس؛ صفحه‌های ۸۴ تا ۸۷)

۱۰۲- **گزینهٔ «۲»** *(علیرضا گونه)*

با توجه به شکل، اگر انگشت شست دست راست را در جهت جریان الکتریکی قرار دهیم، جهت خم شدن چهار انگشت دست راست جهت N را نشان می‌دهد یا به عبارت دیگر، باید انگشت شست دست راست را طوری در امتداد سیم قرار دهیم که چهار انگشت دست راست که جهت خط‌های میدان مغناطیسی را نشان می‌دهد، وارد قطب S عقربهٔ مغناطیسی شود. بنابراین، باید جریان الکتریکی در سیم برون‌سو باشد.



در ضمن با انتقال عقربهٔ مغناطیسی از نقطهٔ A به نقطهٔ B، عقربه از حالت افقی در نقطهٔ A به حالت عمودی در نقطهٔ B تغییر می‌کند. بنابراین عقربهٔ مغناطیسی ۹۰ درجه چرخیده است.

(فیزیک ۲- مغناطیس؛ صفحه‌های ۹۴ تا ۹۷)

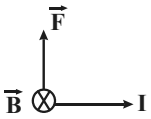
۱۰۳- **گزینهٔ «۲»** *(عبدالرضا امینی‌نسب)*

با استفاده از رابطهٔ نیروی وارد بر سیم حامل جریان در میدان مغناطیسی، می‌توان نیرو را به‌دست آورد.

$$F = I\ell B\sin\theta \xrightarrow[B=100G=100\times10^{-4}T=10^{-2}T,\theta=90^\circ]{I=5A,\ell=120cm=1/2m}$$

$$F = 5\times1/2\times10^{-2}\times\sin90^\circ \Rightarrow F = 6\times10^{-2}\times1 = F = 0/06N$$

با توجه به جهت میدان مغناطیسی و جهت جریان الکتریکی، نیروی مغناطیسی وارد بر سیم به طرف بالا است. دقت کنید، جهت شمال را با علامت ⊗ و جهت جنوب را با علامت ⊙ نشان می‌دهیم.



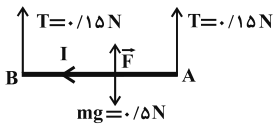
(فیزیک ۲- مغناطیس؛ صفحه‌های ۹۱ تا ۹۴)

۱۰۴- **گزینهٔ «۴»** *(خسرو ارغوانی‌فرد)*

با توجه به شکل باید برای تعادل میله، طبق قانون اول نیوتون نیروی مغناطیسی به بزرگی ۰/۲N رو به بالا به آن وارد شود. با توجه به جهت جریان و نیروی مغناطیسی جهت میدان مغناطیسی برون‌سو می‌باشد. چون جرم میله ۵۰ گرم و جرم هر متر آن ۱۰ گرم است، طول میله ۵ متر می‌باشد.

$$F_T = ma = 0 \Rightarrow 2T + F = mg$$

$$\Rightarrow 0/3 + F = 0/5 \Rightarrow F = 0/2N$$



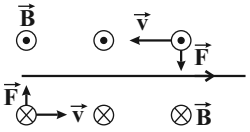
$$F = BIL\sin\alpha$$

$$0/2 = B\times 4\times 5\times 1 \Rightarrow B = 0/01T$$

(فیزیک ۲- مغناطیس؛ صفحه‌های ۹۱ تا ۹۴)

۱۰۵- **گزینهٔ «۳»** *(شهرام امدی دارانی)*

بنابر قاعدهٔ دست راست و با توجه به جهت جریان در سیم، جهت میدان مغناطیسی در بالای سیم برون‌سو و در زیر سیم درون‌سو است. از طرف دیگر بنابر قاعدهٔ دست راست برای تعیین جهت نیرو، نیروی وارد بر هر دو بار به طرف سیم است، لذا هر دو بار الکتریکی جذب سیم می‌شوند. دقت کنید که بار q_1 منفی است.



(فیزیک ۲- مغناطیس؛ صفحه‌های ۸۹ و ۹۰)

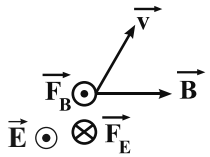
۱۰۶- **گزینهٔ «۴»** *(زهره آقامحمدی)*

برای اینکه ذره بدون انحراف به حرکت خود ادامه دهد، باید نیروی خالص وارد بر آن صفر شود. بنابراین نیرویی که از طرف میدان‌های مغناطیسی و الکتریکی بر آن وارد می‌شود باید هم‌اندازه و در خلاف جهت یکدیگر باشند.

$$F_B = F_E \Rightarrow |q|vB\sin\theta = |q|E \Rightarrow E = vB\sin\theta$$

$$\Rightarrow E = 2\times 10^5 \times 40\times 10^{-4}\times\frac{1}{2} = 400\frac{N}{C}$$

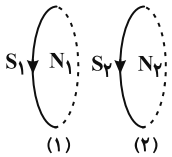
مطابق شکل زیر و با استفاده از قاعدهٔ دست راست، جهت نیروی مغناطیسی وارد بر الکترون از طرف میدان مغناطیسی، برون‌سو است. بنابراین جهت نیروی الکتریکی باید درون‌سو باشد. چون بر بار منفی در خلاف جهت میدان الکتریکی نیرو وارد می‌شود، لذا جهت میدان الکتریکی باید برون‌سو باشد.



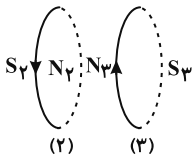
(فیزیک ۲- مغناطیس؛ صفحه‌های ۸۹ و ۹۰)

۱۰۷- **گزینهٔ «۲»** *(مهدی میراب‌زاده)*

وقتی دو حلقهٔ حامل جریان (۱) و (۲) یکدیگر را جذب می‌کنند، جهت جریان دو حلقه هم‌جهت می‌باشند.



دو حلقهٔ (۲) و (۳) یکدیگر را دفع می‌کنند، بنابراین جهت جریان دو حلقه در خلاف جهت یکدیگر است. درنتیجه جهت جریان I_2 موافق I_1 و جهت جریان I_3 مخالف I_1 است.



(فیزیک ۲- مغناطیس؛ صفحه‌های ۹۶ تا ۹۸)

۱۰۸- **گزینهٔ «۳»** *(عبدالرضا امینی‌نسب)*

ابتدا به کمک رابطهٔ اندازهٔ میدان مغناطیسی در مرکز پیچهٔ تخت، تعداد دورهای پیچه را محاسبه می‌کنیم، داریم:

$r = ۵cm = ۵\times۱۰^{-۲}m$

$B = \frac{\mu_۰ NI}{۲r} \xrightarrow{B=۴G=۴\times۱۰^{-۴}T}$

$۴\times۱۰^{-۴} = \frac{۴\pi\times۱۰^{-۷}\times N\times ۱}{۲\times۵\times۱۰^{-۲}}$

$\Rightarrow ۴\times۱۰^{-۴} = ۴\pi\times۱۰^{-۶}\times N \Rightarrow N = \frac{۴\times۱۰^{-۴}}{۴\pi\times۱۰^{-۶}}$

$\Rightarrow N = \frac{۱۰۰}{\pi}$ تعداد دورپیچه

اکنون به کمک رابطهٔ $L = ۲\pi rN$ طول سیم را محاسبه می‌کنیم، داریم:

$L = ۲\pi rN = ۲\pi\times۵\times\frac{۱۰۰}{\pi} = ۱۰۰۰cm = ۱۰m$

(فیزیک ۲- مغناطیس؛ صفحه‌های ۹۷ تا ۹۹)

۱۰۹- **گزینهٔ «۴»** *(مصطفی واثقی)*

با توجه به رابطهٔ بزرگی میدان مغناطیسی درون یک سیملولهٔ آرمانی داریم:

$B_Q = \mu_۰ \frac{N_Q}{\ell_Q} I_Q = ۱۲\times۱۰^{-۷}\times\frac{۱۵۰}{۰/۵}\times۴ \Rightarrow B_Q = ۱۴/۴G$

با توجه به این‌که میدان‌های B_Q و B_P در نقطهٔ M در خلاف جهت یک‌دیگر هستند و در صورت سؤال بزرگی میدان خالص را داده است و جهت آن‌را مشخص نکرده است، پس باید هر دو حالت زیر بررسی شود:

حالت (۱): $B_Q > B_P$

$B_T = B_Q - B_P \Rightarrow ۲/۴ = ۱۴/۴ - B_P$

$\Rightarrow B_P = ۱۲G = ۱۲\times۱۰^{-۴}T$

$B_P = \mu_۰ \frac{N_P}{\ell_P} I_P \Rightarrow ۱۲\times۱۰^{-۴} = ۱۲\times۱۰^{-۷}\times\frac{۱۰۰}{۰/۵}\times I_P$

$\Rightarrow I_P = ۵A$

حالت (۲): $B_P > B_Q$

$B_T = B_P - B_Q \Rightarrow ۲/۴ = B_P - ۱۴/۴$

$\Rightarrow B_P = ۱۶/۸G = ۱۶/۸\times۱۰^{-۴}T$

$B_P = \mu_۰ \frac{N_P}{\ell_P} I_P \Rightarrow ۱۶/۸\times۱۰^{-۴} = \frac{۱۲\times۱۰^{-۷}\times۱۰۰}{۰/۵}\times I_P$

$\Rightarrow I_P = ۷A$

(فیزیک ۲- مغناطیس؛ صفحه‌های ۹۹ و ۱۰۰)

۱۱۰- **گزینهٔ «۳»** *(احسان ایرانی)*

بررسی گزینه‌ها:

۱) آلیاژهای آهن جزو مواد فرومغناطیس سخت می‌باشند که حجم حوزهٔ مغناطیسی آن‌ها به سختی تغییر می‌کند.

۲) نیکل جزء مواد فرومغناطیس می‌باشد و دارای حوزهٔ مغناطیسی است.

۳) موادی نظیر نقره، مس، بیسموت و سرب به‌طور ذاتی فاقد خاصیت مغناطیسی هستند.

۴) مواد دیامغناطیس به‌طور ذاتی فاقد خاصیت مغناطیسی هستند. این مواد شامل نقره، مس و بیسموت است. آلومینیم و سدیم از جمله مواد پارامغناطیس هستند.

(فیزیک ۲- مغناطیس؛ صفحه‌های ۱۰۱ تا ۱۰۳)

فیزیک ۱

۱۱۱- **گزینهٔ «۱»** *(محمد اکبری)*

دماسنج ترموکوپل به‌دلیل دقت کم‌تر نسبت به دماسنج‌های معیار از مجموعهٔ این دسته از دماسنج‌ها کنار گذاشته شد.

(فیزیک ۱- دما و گرما؛ صفحه‌های ۸۶ و ۸۷)

۱۱۲- **گزینهٔ «۴»** *(حسین مفرومی)*

با استفاده از رابطهٔ بین دماهای فارنهایت و کلوین با دمای سلسیوس، داریم:

$$F=\frac{۹}{۵}\theta+۳۲\Rightarrow \Delta F=\frac{۹}{۵}\Delta\theta \quad (۱)$$

$$T=۲۷۳+\theta\Rightarrow \Delta T=\Delta\theta \quad (۲)$$

$$\xrightarrow{(۱),(۲)}\Delta F=\frac{۹}{۵}\Delta T\Rightarrow -۰/۰۹F_۱=\frac{۹}{۵}\times(-۷)\Rightarrow F_۱=۱۴۰^\circ F$$

بنابراین:

$$F_۱=\frac{۹}{۵}\theta_۱+۳۲\Rightarrow ۱۴۰=\frac{۹}{۵}\theta_۱+۳۲\Rightarrow \theta_۱=۶۰^\circ C$$

(فیزیک ۱- دما و گرما؛ صفحه‌های ۸۴ تا ۸۶)

۱۱۳- **گزینهٔ «۱»** *(رامین آرامش‌اصل)*

با توجه به نمودار، به ازای تغییر دمای $\Delta\theta=\theta-۰=\theta$، تغییر طول میلهٔ A برابر $\Delta L_A=۱۲/۸-۱۲=۰/۸cm$ و تغییر طول میلهٔ B برابر $\Delta L_B=۱۲/۸-۱۰=۲/۸cm$ است. بنابراین با استفاده از رابطهٔ $\Delta L=\alpha L_۱\Delta\theta$ می‌توان نوشت:

$$\frac{\Delta L_A}{\Delta L_B}=\frac{\alpha_A L_{۱A}\Delta\theta_A}{\alpha_B L_{۱B}\Delta\theta_B}\xrightarrow[L_{۱A}=۱۲cm,\,L_{۱B}=۱۰cm]{\Delta\theta_A=\Delta\theta_B=\theta}$$

$$\frac{۰/۸}{۲/۸}=\frac{\alpha_A\times ۱۲\times\theta}{\alpha_B\times ۱۰\times\theta}\Rightarrow\frac{\alpha_B}{\alpha_A}=\frac{۱۲\times ۲/۸}{۱۰\times ۰/۸}=\frac{۲۱}{۵}$$

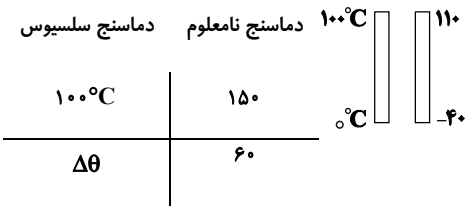
$$\Rightarrow\frac{\alpha_A}{\alpha_B}=\frac{۵}{۲۱}$$

(فیزیک ۱- دما و گرما؛ صفحه‌های ۸۸ تا ۹۰)

۱۱۴- **گزینهٔ «۴»** *(امیرحسین برادران)*

ابتدا با یک تناسب ساده، میزان افزایش دمای میله را برحسب درجهٔ سلسیوس به‌دست می‌آوریم:

$$\text{تغییر دمای دماسنج نامعلوم}=۱۱۰-(-۴۰)=۱۵۰$$



$$\Rightarrow\Delta\theta=۶۰\times\frac{۱۰۰}{۱۵۰}=\frac{۶۰۰}{۱۵}=۴۰^\circ C$$

اکنون ضریب انبساط طولی میله را در SI به‌دست می‌آوریم: $\Delta L=L_۱\alpha\Delta\theta$

$$\xrightarrow[\Delta\theta=۴۰^\circ C]{\Delta L=\frac{۰/۳}{۱۰۰}L_۱}\frac{۰/۳}{۱۰۰}L_۱=L_۱\times\alpha\times ۴۰\Rightarrow\alpha=\frac{۳}{۴}\times۱۰^{-۴}\,\frac{۱}{^\circ C}$$

$$\xrightarrow{۱^\circ C=\frac{۹}{۵}^\circ F}\alpha=\frac{۳}{۴}\times۱۰^{-۴}\times\frac{۱}{\frac{۹}{۵}^\circ F}=\frac{۳}{۴}\times۱۰^{-۴}\times\frac{۵}{۹}\,\frac{۱}{^\circ F}$$

$$=\frac{۵}{۱۲}\times۱۰^{-۴}\,\frac{۱}{^\circ F}$$

$$\Rightarrow \text{ضریب انبساط سطحی}=۲\alpha=۲\times\frac{۵}{۱۲}\times۱۰^{-۴}=\frac{۵}{۶}\times۱۰^{-۴}\,\frac{۱}{^\circ F}$$

(فیزیک ۱- دما و گرما؛ صفحه‌های ۸۴ تا ۹۴)

۱۱۵- **گزینهٔ «۱»** *(امیر پورسیف)*

ابتدا با استفاده از رابطهٔ تغییر طول در اثر انبساط گرمایی و با توجه به این‌که تغییر شعاع و تغییر دمای دو کره یکسان است، رابطهٔ بین شعاع اولیهٔ کره و هم‌چنین حجم ظاهری اولیهٔ آن‌ها را می‌یابیم:

$$\Delta R_A=\Delta R_B\xrightarrow{\Delta R=\alpha R_۱\Delta\theta}\alpha_A R_{۱A}\Delta\theta_A=\alpha_B R_{۱B}\Delta\theta_B$$

$$\xrightarrow[\alpha_A=\alpha_B]{\Delta\theta_A=\Delta\theta_B}R_{۱A}=R_{۱B}\xrightarrow{V_{\text{ظاهری}}=\frac{۴}{۳}\pi R^۳}$$

$$V_{۱A\,\text{ظاهری}}=V_{۱B\,\text{ظاهری}}$$

می‌بینیم حجم ظاهری دو کره با هم برابر است.

اکنون با استفاده از رابطهٔ $Q = mc\Delta\theta$، رابطهٔ بین جرم کره‌ها را پیدا می‌کنیم، چون گرمای داده شده به کره‌ها با هم برابر و $\Delta\theta_A = \frac{۷}{۸}\Delta\theta_B$ می‌باشد، می‌توان نوشت:

$$Q_A = Q_B \Rightarrow m_A c_A \Delta\theta_A = m_B c_B \Delta\theta_B$$

$$\xrightarrow[c_A = c_B]{\Delta\theta_A = \frac{۷}{۸}\Delta\theta_B} m_A \times \frac{۷}{۸} = m_B$$

از طرف دیگر، بنا به رابطهٔ $m = \rho V$ و با توجه به این‌که در این رابطه V حجم واقعی است، می‌توان نوشت:

$$m_B = \frac{۷}{۸} m_A \xrightarrow{m=\rho V} \rho_B V_{B\text{واقعی}} = \frac{۷}{۸}\rho_A V_{A\text{واقعی}}$$

$$\xrightarrow{\rho_A = \rho_B} V_{B\text{واقعی}} = \frac{۷}{۸} V_{A\text{واقعی}}$$

می‌بینیم، حجم واقعی کرهٔ B $\frac{۷}{۸}$ برابر حجم واقعی کرهٔ A است. چون کرهٔ A توپر است، حجم واقعی و ظاهری آن یکسان می‌باشد؛ بنابراین، حجم حفرهٔ درون کرهٔ B برابر $\frac{۱}{۸}$ حجم ظاهری کرهٔ A است. یعنی:

$$V_{B\text{حفره}} = V_A - \frac{۷}{۸}V_A = \frac{۱}{۸}V_A \xrightarrow{V_A = \frac{۴}{۳}\pi R^۳} V_{B\text{حفره}} = \frac{۱}{۸} \times \frac{۴}{۳}\pi R^۳$$

$$\xrightarrow[\pi = ۳]{R = ۱۲cm} V_{B\text{حفره}} = \frac{۱}{۸} \times \frac{۴}{۳} \times ۳ \times ۱۲^۳ \Rightarrow V_{B\text{حفره}} = ۸۶۴cm^۳$$

(فیزیک ۱- دما و گرما؛ صفحه‌های ۸۸ تا ۹۰ و ۹۶ تا ۹۹)

۱۱۶- **گزینهٔ «۴»** *(عباس موتاب)*

ابتدا با استفاده از تعریف بازده، توان خروجی گرمکن الکتریکی را می‌یابیم:

$$R_a = \frac{P_{\text{خروجی}}}{P_{\text{ورودی}}} \times ۱۰۰ \Rightarrow ۶۰ = \frac{P_{\text{خروجی}}}{۲۰۰۰} \times ۱۰۰$$

$$P_{\text{خروجی}} = ۱۲۰۰W$$

اکنون با توجه به طرح‌وارهٔ زیر، مقدار گرمای لازم برای تبدیل یخ $۰^\circ C$ به آب $۴۰^\circ C$ را می‌یابیم:

$$\boxed{۰^\circ C \text{ یخ}} \xrightarrow{Q_۱ = mL_F} \boxed{۰^\circ C \text{ آب}} \xrightarrow{Q_۲ = mc\Delta\theta} \boxed{۴۰^\circ C \text{ آب}}$$

$$Q = Q_۱ + Q_۲ \Rightarrow Q = mL_F + mc\Delta\theta$$

$$\xrightarrow[\Delta\theta = ۴۰ - ۰ = ۴۰^\circ C]{L_F = ۳۳۶۰۰۰\frac{J}{kg}, c = ۴۲۰۰\frac{J}{kg.^\circ C}}$$

$$Q = m \times ۳۳۶۰۰۰ + m \times ۴۲۰۰ \times ۴۰ \Rightarrow Q = ۵۰۴۰۰۰ \times m$$

در نهایت با استفاده از رابطهٔ توان خروجی، به‌صورت زیر، m را می‌یابیم:

$$P_{\text{خروجی}} = \frac{Q}{t} \xrightarrow{t = ۷h = ۷ \times ۶۰ \times ۶۰s} ۱۲۰۰ = \frac{۵۰۴۰۰۰m}{۷ \times ۶۰ \times ۶۰}$$

$$\Rightarrow m = ۶۰kg$$

(فیزیک ۱- دما و گرما؛ صفحه‌های ۹۶ تا ۹۸ و ۱۰۳ تا ۱۰۶)

۱۱۷- **گزینهٔ «۱»** *(عباس اصغری)*

ابتدا، برای سادگی محاسبه، مقادیر یخ c، L_F و L_V را برحسب آب c می‌نویسیم و با توجه به طرح‌وارهٔ زیر جرم آب را می‌یابیم. دقت کنید، چون در نهایت $۲kg$ آب $۱۰۰^\circ C$ داریم، بنابراین نیمی از جرم اولیّه یخ تبدیل به بخار آب $۱۰۰^\circ C$ شده است.

$$L_F = ۸۰c_{\text{آب}} \text{ و } c_{\text{یخ}} = \frac{c_{\text{آب}}}{۲} \text{ و } L_V = ۵۴۰c_{\text{آب}}$$

$$\boxed{-۱۰^\circ C \text{ یخ}} \xrightarrow{mc_{\text{یخ}}\Delta\theta} \boxed{۰^\circ C \text{ یخ}} \xrightarrow{mL_F}$$

$$\boxed{۰^\circ C \text{ آب}} \xrightarrow{mc_{\text{آب}}\Delta\theta'} \boxed{۱۰۰^\circ C \text{ آب}} \xrightarrow{\frac{m}{۲} \times L_V} \boxed{۱۰۰^\circ C \text{ بخار}}$$

$$Q = mc_{\text{یخ}}\Delta\theta + mL_F + mc_{\text{آب}}\Delta\theta' + \frac{m}{۲}L_V$$

$$\xrightarrow[m = ۴kg]{\Delta\theta = ۱۰^\circ C, \Delta\theta' = ۱۰۰^\circ C}$$

$$Q = ۴(\frac{c_{\text{آب}}}{۲} \times ۱۰ + ۸۰c_{\text{آب}} + ۱۰۰c_{\text{آب}} + ۵۴۰c_{\text{آب}} \times \frac{۱}{۲}) = ۴ \times c_{\text{آب}} \times ۴۵۵$$

$$\Rightarrow Q = ۱۸۲۰c_{\text{آب}}$$

اکنون مشخص می‌کنیم گرمای داده شده به یخ، دمای چند کیلوگرم آب را به اندازهٔ $۳۵^\circ C$ افزایش می‌دهد:

$$Q = m'c_{\text{آب}}\Delta\theta'' \xrightarrow[\Delta\theta''=35^\circ C]{Q=1820c_{\text{آب}}} 1820c_{\text{آب}} = m'\times c_{\text{آب}}\times 35$$

$$\Rightarrow m' = 52kg$$

(فیزیک ۱- دما و گرما؛ صفحه‌های ۹۸ تا ۱۱۱)

۱۱۸- **گزینهٔ «۴»** *(مصطفی کیانی)*

با توجه به طرح‌وارهٔ زیر و استفاده از رابطهٔ تعادل گرمایی، گرمای ویژهٔ مس را می‌یابیم. دقت کنید، چون در ابتدا آب و گرماسنج در تعادل گرمایی‌اند، دمای اولیهٔ گرماسنج و آب یکسان و برابر $10^\circ C$ است.

گرماسنج $\theta_1 = 10^\circ C$	$Q_1 = C\Delta\theta$ →	گرماسنج $\theta = 20^\circ C$
آب $\theta_2 = 10^\circ C$	$Q_2 = mc\Delta\theta$ →	آب $\theta = 20^\circ C$
مس $\theta_3 = 120^\circ C$	$Q_3 = mc\Delta\theta$ →	مس $\theta = 20^\circ C$

$$Q_1 + Q_2 + Q_3 = 0 \Rightarrow C_{\text{گرماسنج}}(\theta-\theta_1) + m_2c_{\text{آب}}(\theta-\theta_2) + m_3c_{\text{مس}}(\theta-\theta_3) = 0$$

$$\xrightarrow[c_{\text{آب}}=4200\frac{J}{kg.^\circ C}]{C_{\text{گرماسنج}}=150\frac{J}{K}, m_2=0/5kg, m_3=0/6kg} 150\times(20-10) + 0/5\times4200\times(20-10) + 0/6\times c_{\text{مس}}(20-120) = 0$$

$$\Rightarrow 1500 + 21000 = 60c_{\text{مس}} \Rightarrow 22500 = 60c_{\text{مس}}$$

$$\Rightarrow c_{\text{مس}} = 375\frac{J}{kg.^\circ C}$$

(فیزیک ۱- دما و گرما؛ صفحه‌های ۹۶ تا ۱۰۲)

۱۱۹- **گزینهٔ «۱»** *(مصطفی کیانی)*

بررسی گزینه‌ها:

۱) نادرست – در هر فرایند انتقال گرما، ممکن است هر سه سازوکار رسانش، همرفت و تابش گرمایی دخالت داشته باشند.

۲) درست – در فلزات افزون بر ارتعاش‌های اتمی، الکترون‌های آزاد نیز در انتقال گرما نقش دارند اما سهم الکترون‌های آزاد در رسانش گرما بیشتر از اتم‌هاست.

۳) درست – انتقال گرما در مایعات و گازها که معمولاً رساناهای گرمایی خوبی نیستند، عمدتاً به روش همرفت، یعنی همراه با جابه‌جایی بخشی از خود ماده، انجام می‌گیرد. این پدیده براثر کاهش چگالی شاره با افزایش دما صورت می‌گیرد.

۴) درست – تابش گرمایی از سطح هر جسم علاوه بر دما به مساحت، میزان صیقلی بودن و رنگ سطح آن بستگی دارد. سطوح صاف و درخشان با رنگ‌های روشن تابش گرمایی کمتری دارند، در حالی‌که تابش گرمایی سطوح تیره، ناصاف و مات بیشتر است.

(فیزیک ۱- دما و گرما؛ صفحه‌های ۱۱۱ تا ۱۱۷)

۱۲۰- **گزینهٔ «۲»** *(زهره آقامحمدی)*

چون حجم محفظه ثابت است، پس این فرایند در حجم ثابت صورت می‌گیرد. طبق قانون گازهای آرمانی داریم:

$$PV = nRT$$

اگر در حجم ثابت دما و فشار تغییر کنند، می‌توان نوشت:

$$\Delta P = \frac{nR}{V}\Delta T \xrightarrow[\Delta T=187-37=150^\circ C]{n=0/5mol, V=8L=8\times10^{-3}m^3}$$

$$\Delta P = \frac{0/5\times8}{8\times10^{-3}}\times150 = 75\times10^3 = 0/75\times10^5 Pa = 0/75atm$$

(فیزیک ۱- دما و گرما؛ صفحه‌های ۱۱۷ تا ۱۲۳)

فیزیک ۳

۱۲۱- **گزینهٔ «۲»** *(عباس اصغری)*

شیب خط مماس بر نمودار مکان- زمان برابر با سرعت لحظه‌ای متحرک است. با استفاده از رابطهٔ سرعت لحظه‌ای که در این‌جا برابر شیب خط مماس بر نمودار در لحظهٔ $t = ۲۰s$ است، مکان متحرک در لحظهٔ $t = ۲۰s$ را به دست می‌آوریم.

$$v_{t=۲۰s} = \frac{x_{t=۲۰s} - ۰}{۲۰-۱۵} \xrightarrow{v_{t=۲۰s}=۲/۴\frac{m}{s}} x_{t=۲۰s} = ۱۲m$$

اکنون تندی متوسط متحرک را در ۲۰s اول حرکت به دست می‌آوریم:

$$s_{av} = \frac{\ell}{\Delta t} = \frac{|-۳-۵|+|۱۲-(-۳)|}{۲۰} = ۱/۱۵\frac{m}{s}$$

(فیزیک ۳- حرکت بر خط راست؛ صفحه‌های ۲ تا ۱۰)

۱۲۲- **گزینهٔ «۳»** *(عباس اصغری)*

ابتدا معادلهٔ حرکت متحرک‌های A و B را می‌یابیم. به همین منظور باید سرعت و مکان اولیهٔ آن‌ها را حساب کنیم. دقت کنید، ثانیهٔ دوم، بازهٔ زمانی $t_۱ = ۱s$ تا $t_۲ = ۲s$ و ۴ ثانیهٔ دوم، بازهٔ زمانی $t'_۱ = ۴s$ تا $t'_۲ = ۸s$ است.

برای متحرک A می‌توان نوشت:

$$v_A = v_{av,A} = \frac{x_۲ - x_۱}{t_۲ - t_۱} \xrightarrow{x_۲=۰, x_۱=-۲۰m}$$

$$v_A = \frac{۰-(-۲۰)}{۲-۱} = ۲۰\frac{m}{s}$$

$$x_A = v_A t + x_{۰A} \xrightarrow{t_۲=۲s, x_۲=۰} ۰ = ۲۰\times۲ + x_{۰A} \Rightarrow x_{۰A} = -۴۰m$$

بنابراین معادلهٔ حرکت متحرک A برابر است با:

$$x_A = ۲۰t - ۴۰$$

برای متحرک B می‌توان نوشت:

$$v_B = v_{av,B} = \frac{x'_۲ - x'_۱}{t'_۲ - t'_۱} \xrightarrow[t'_۲=۸s, t'_۱=۴s]{x'_۱=۶۰m, x'_۲=۲۰m} v_B = \frac{۲۰-۶۰}{۸-۴} = -۱۰\frac{m}{s}$$

$$x_B = v_B t + x_{۰B} \xrightarrow[x'_۱=۶۰m]{t'_۱=۴s} ۶۰ = (-۱۰\times۴) + x_{۰B} \Rightarrow x_{۰B} = ۱۰۰m$$

بنابراین معادلهٔ حرکت متحرک B برابر است با:

$$x_B = -۱۰t + ۱۰۰$$

در آخر، وقتی دو متحرک در یک مکان باشند، $x_A = x_B$ است. بنابراین داریم:

$$x_A = x_B \Rightarrow ۲۰t - ۴۰ = -۱۰t + ۱۰۰ \Rightarrow ۳۰t = ۱۴۰ \Rightarrow t = \frac{۱۴}{۳}s$$

(فیزیک ۳- حرکت بر خط راست؛ صفحه‌های ۱۳ تا ۱۵)

۱۲۳- **گزینهٔ «۱»** *(میثم رشتیان)*

با داشتن a، $v_۰$ و v، از معادلهٔ سرعت – جابه‌جایی (مستقل از زمان) استفاده می‌کنیم.

$$v^۲ - v_۰^۲ = ۲a\Delta x \xrightarrow[a=۴\frac{m}{s^۲}]{v_۰=۰, v=۱۶\frac{m}{s}} ۱۶^۲ - ۰ = ۲\times۴\times\Delta x \Rightarrow \Delta x = ۳۲m$$

$$\xrightarrow{x_۰=۰} x = ۳۲m$$

(فیزیک ۳- حرکت بر خط راست؛ صفحه‌های ۱۶ تا ۲۱)

۱۲۴- **گزینهٔ «۱»** *(محمدعلی راست‌پیمان)*

اگر کل زمان سقوط گلوله را t ثانیه فرض کنیم، با فرض در نظر گرفتن محل رها شدن گلوله به عنوان مبدأ مکان و جهت پایین به عنوان جهت مثبت، جابه‌جایی گلوله در ۲ ثانیهٔ اول و ۲ ثانیهٔ آخر حرکت برابر است با:

جابه‌جایی در ۲ ثانیهٔ اول: $y_۱ = \frac{۱}{۲}gt_۱^۲ = \frac{۱}{۲}g\times۲^۲ \Rightarrow y_۱ = \frac{۱}{۲}g\times۴$

جابه‌جایی در ۲ ثانیهٔ آخر: $y_t - y_{t-۲} = \frac{۱}{۲}g[t^۲ - (t-۲)^۲]$

طبق فرض سؤال، داریم:

$$\frac{۱}{۲}g[t^۲ - (t-۲)^۲] = ۶\times\frac{۱}{۲}g\times۴ \Rightarrow t = ۷s$$

بنابراین تندی گلوله در لحظهٔ برخورد به زمین برابر است با:

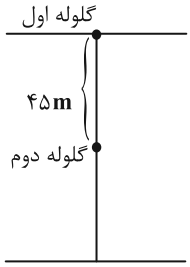
$$v = gt = ۱۰\times۷ \Rightarrow v = ۷۰\frac{m}{s}$$

(فیزیک ۳- حرکت بر خط راست؛ صفحه‌های ۲۱ تا ۲۴)

۱۲۵- **گزینهٔ «۱»** *(رامین شادلویی)*

گلوله اول ۲ ثانیه زودتر حرکت کرده، یعنی ۲ ثانیه بیشتر در راه بوده است.

$$t_۱ = (t_۲ + ۲)s \quad (I)$$



در ضمن، مکان گلولهٔ اول ۴۵ متر، بالاتر بوده $(y_1 = y_2 + 45m)$ و جهت مثبت را رو به پایین فرض می‌کنیم.

$$y_1 = y_2 + 45 \Rightarrow \frac{1}{2}gt_1^2 = \frac{1}{2}gt_2^2 + 45$$

$$\overset{(I)}{\Rightarrow} 5(t_2+2)^2 = 5t_2^2 + 45 \Rightarrow t_2^2 + 4t_2 + 4 = t_2^2 + 9$$

$$\Rightarrow t_2 = 1/25s \Rightarrow t_1 = t_2 + 2 \Rightarrow t_1 = 1/25 + 2 = 3/25s$$

(فیزیک ۳- حرکت بر خط راست؛ صفحه‌های ۲۱ تا ۲۴)

۱۲۶- **گزینهٔ «۲»** *(عباس اصغری)*

گزینهٔ «۱»: نادرست. نیروهای کنش و واکنش به دو جسم متفاوت اثر می‌کنند، بنابراین نمی‌توان از آن‌ها برایند گرفت.

گزینهٔ «۲»:درست. به گلوله‌ای که در هوا سقوط می‌کند، نیروهای مقاومت هوا و نیروی وزن از جانب هوا و زمین وارد می‌شود؛ بنابراین واکنش این نیروها به هوا و زمین وارد خواهد شد.

گزینهٔ «۳»: نادرست. وزن گلدان به خود گلدان وارد می‌شود.

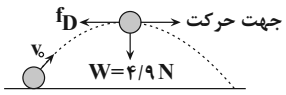
گزینهٔ «۴»: نادرست. نیروی وزن هر جسمی، نیروی گرانشی است که زمین به آن جسم وارد می‌کند، به عبارتی، وزن هر جسمی به خود آن جسم وارد می‌شود و عکس‌العمل آن نیز به زمین وارد می‌شود.

(فیزیک ۳- دینامیک و حرکت دایره‌ای؛ صفحه‌های ۳۰ تا ۳۵)

۱۲۷- **گزینهٔ «۴»** *(زهره آقامحمدی)*

ابتدا نیروهای وارد بر جسم را در بالاترین نقطهٔ مسیر رسم می‌کنیم. با توجه به اینکه نیروی مقاومت هوا در خلاف جهت حرکت توپ است، در بالاترین نقطهٔ مسیر، جهت نیروی مقاومت هوا در خلاف جهت محور x خواهد شد. بنابراین، با توجه به قانون دوم نیوتون، بزرگی نیروی f_D را محاسبه می‌کنیم:

$$\begin{cases} F_{net} = ma \\ F_{net} = \sqrt{f_D^2 + W^2} \end{cases}$$



$$ma = \sqrt{f_D^2 + W^2} \xrightarrow[W=4/9N]{a=8/5\frac{m}{s^2},\ m=600g=0/6kg}$$

$$0/6 \times 8/5 = \sqrt{f_D{}^2 + 4/9^2}$$

$$\Rightarrow 5/1^2 - 4/9^2 = f_D{}^2 \Rightarrow (5/1-4/9)(5/1+4/9) = f_D^2$$

$$\Rightarrow f_D^2 = 0/2 \times 10 = 2 \Rightarrow f_D = \sqrt{2}N \Rightarrow \vec{f}_D = -\sqrt{2}\,\vec{i}\,(N)$$

(فیزیک ۳- دینامیک و حرکت دایره‌ای؛ صفحه‌های ۳۰ تا ۳۳)

۱۲۸- **گزینهٔ «۲»** *(امیرحسین برادران)*

با توجه به قانون دوم نیوتون داریم:

$$\vec{F}_{net} = m\vec{a} \xrightarrow[m'=2m]{\vec{a}'=-3\vec{a}} \vec{F}'_{net} = -6m\vec{a}$$

$$\xrightarrow[\vec{F}_1 = m\vec{a}]{\vec{F}'_{net} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2} \vec{F}_1 + \vec{F}_2 = -6\vec{F}_1 \Rightarrow \vec{F}_2 = -7\vec{F}_1$$

(فیزیک ۳- دینامیک و حرکت دایره‌ای؛ صفحه‌های ۳۰ تا ۳۴)

۱۲۹- **گزینهٔ «۲»** *(زهره آقامحمدی)*

طبق قانون اول نیوتون، هرگاه نیروهای وارد بر جسمی متوازن باشند، اگر جسم ساکن باشد همچنان ساکن باقی می‌ماند و اگر در حال حرکت باشد، سرعت جسم تغییر نمی‌کند و ثابت می‌ماند. به این خاصیت اجسام که میل دارند وضعیت حرکت خود را هنگامی‌که نیروی خالص وارد بر آن‌ها صفر است، حفظ کنند، لختی می‌گویند.

(فیزیک ۳- دینامیک و حرکت دایره‌ای؛ صفحه‌های ۳۰ و ۳۱)

۱۳۰- **گزینهٔ «۲»** *(حسین ناصحی)*

ابتدا با استفاده از قانون دوم نیوتون، برایند نیروها (نیروی خالص) را می‌یابیم:

$$F_{net} = ma \xrightarrow[a=8/5\frac{m}{s^2}]{m=2kg} F_{net} = 2 \times 8/5 = 17N$$

اکنون می‌توان نیروی F_2 را به‌دست آورد. چون دو نیروی F_1 و F_2 برهم عمودند، می‌توان نوشت:

$$F_{net}^2 = F_1^2 + F_2^2 \xrightarrow[F_{net}=17N]{F_1=8N} 289 = 64 + F_2^2$$

$$\Rightarrow F_2^2 = 225 \Rightarrow F_2 = 15N$$

(فیزیک ۳- دینامیک و حرکت دایره‌ای؛ صفحه‌های ۳۳ و ۳۴)

شیمی ۲

۱۳۱- **گزینهٔ «۲»** *(امین نوروزی)*

فقط مورد (پ) درست است.

بررسی موارد نادرست:

آ) آلکن‌ها مولکول‌هایی سیرنشده هستند و با محلول قرمز رنگ برم واکنش داده و باعث کاهش رنگ قرمز آن می‌شوند. همچنین محلول پتاسیم پرمنگنات در واکنش با اسیدهای آلی در دمای بالا به سرعت بی‌رنگ می‌شود.

ب) انفجار واکنش شیمیایی بسیار سریعی است که در آن از مقدار کمی مادّهٔ منفجرشونده به حالت جامد یا مایع، حجم زیادی از گازهای داغ تولید می‌شود.

ت) استیک‌اسید با فرمول CH_3COOH دارای ۲ اتم کربن است.

(شیمی ۲- در پی غذای سالم: صفحه‌های ۴۰، ۴۱، ۷۷ تا ۸۰، ۸۳ و ۸۴)

۱۳۲- **گزینهٔ «۳»** *(عین‌اله ابوالفتحی)*

همانطور که وجود پوست در خشکبار مانع از رسیدن اکسیژن به مواد واکنش‌دهنده می‌شود، نگه‌داری فلزات گروه اول زیر نفت نیز مانع از رسیدن اکسیژن به مواد واکنش‌دهنده می‌شود.

بررسی سایر گزینه‌ها:

گزینهٔ «۱»: ((الیاف آهن در هوا نمی‌سوزد ولی در ارلن پر از اکسیژن می‌سوزد)) بیانگر تأثیر غلظت بالای اکسیژن در ارلن است در حالی‌که احتمال آتش‌سوزی در انبار گندم به دلیل سطح تماس کمتر اکسیژن با گندم، کمتر از انبار آرد است.

گزینهٔ «۲»: سدیم به دلیل واکنش‌پذیری بیشتر، در شرایط یکسان سریعتر از منیزیم با محلول نیم‌مولار هیدروکلریک‌اسید واکنش می‌دهد.

گزینهٔ «۴»: مورد اول همان‌طوری که اشاره شد به تأثیر سطح تماس اشاره دارد ولی مورد دوم به تأثیر غلظت (زیر آب غلظت اکسیژن خیلی کمتر از هوای آزاد است) اشاره دارد.

(شیمی ۲- در پی غذای سالم: صفحه‌های ۷۸، ۸۲ و ۸۳)

۱۳۳- **گزینهٔ «۲»** *(حسن رحمتی‌کوکنده)*

فقط مورد (ت) نادرست است.

بررسی عبارت‌ها:

آ) رادیکال، گونهٔ فعال و ناپایداری است که در ساختار خود، الکترون جفت‌نشده دارد، در واقع محتوی اتم یا اتم‌هایی است که از قاعدهٔ هشت‌تایی پیروی نمی‌کنند.

(ب و پ) سبزیجات و میوه‌ها محتوی ترکیب‌های آلی سیرنشده‌ای به نام ریزمغذی ها هستند، ترکیب‌هایی که در حفظ سلامت بافت‌ها و اندام‌ها دخالت دارند و برخی از آن‌ها به عنوان بازدارنده از انجام واکنش‌های ناخواسته به دلیل حضور رادیکال‌ها جلوگیری می‌کنند. لیکوپن نمونه‌ای از بازدارنده‌ها می‌باشد که در گوجه‌فرنگی و هندوانه وجود دارد.

ت) با ریزتر کردن ذرات حجم تغییر نمی‌کند اما با افزایش سطح تماس ذرات، سرعت واکنش سوختن زغال افزایش می‌یابد.

(شیمی ۲- در پی غذای سالم: صفحه‌های ۸۴، ۸۵ و ۹۱)

۱۳۴- **گزینهٔ «۱»** *(سهراب صادقی‌زاده)*

فقط مورد آخر درست است.

بررسی موارد:

مورد اول) غلظت مواد جامد و مایع خالص در طول واکنش ثابت است و تغییر نمی‌کند. (نادرست)

مورد دوم) روند تغییرات مول واکنش‌دهنده‌ها، سرعت تولید فراورده‌ها و تغییرات غلظت فراورده‌ها نزولی است. دقت کنید که غلظت فراورده‌ها صعودی است ولی تغییرات غلظت و سرعت تولید فراورده‌ها نزولی است. (نادرست)

مورد سوم) C فراوردهٔ واکنش است و به‌کار بردن عبارت سرعت مصرف برای آن نادرست است. (نادرست)

مورد چهارم) سرعت واکنش از تقسیم کردن سرعت مصرف یا تولید مواد شرکت‌کننده بر ضریب استوکیومتری آن‌ها در واکنش موازنه‌شده به‌دست می‌آید، بنابراین سرعت واکنش با سرعت تولید C برابر و $\frac{۱}{۳}$ سرعت مصرف A است. (نادرست)

مورد پنجم) با توجه به ضرایب مواد A و D داریم: $\frac{-\Delta[A]}{۳\Delta t}=\frac{\Delta[D]}{۴\Delta t}$ (درست)

(شیمی ۲- در پی غذای سالم؛ صفحه‌های ۸۵ تا ۹۰ و ۹۴)

۱۳۵- **گزینهٔ «۳»** *(اکبر هنرمند)*

موارد اول، دوم و سوم درست‌اند.

عبارت اول: کاتالیزگر بر حجم گاز $O_۲$ اثری ندارد بلکه زمان رسیدن به مقدار مشخصی از آن را کوتاه می‌کند.

عبارت دوم: در ظرف A، با افزودن کاتالیزگر و افزایش دما، سرعت واکنش بیشتر افزایش پیدا می‌کند.

عبارت سوم: از آنجا که آنتالپی واکنش تابع مقادیر واکنش‌دهنده است، پس با نصف شدن مقدار مول $H_۲O_۲$، گرمای آزاد شده نیز نصف خواهد شد.

عبارت چهارم: سرعت متوسط واکنش در ظرف A بیش‌تر است، اما با توجه به این‌که ضریب $H_۲O$ در معادلهٔ واکنش دو برابر $O_۲$ است، نمی‌توان به‌طور قطع گفت که سرعت تولید $O_۲$ در ظرف A بیش‌تر از سرعت تولید $H_۲O$ در ظرف B است.

(شیمی ۲- در پی غذای سالم؛ صفحه‌های ۸۰، ۸۱، ۸۳ و ۹۰)

۱۳۶- **گزینهٔ «۱»** *(بهنام قازانچایی)*

ابتدا باید واکنش را موازنه کنیم:

$$MnO_۲(s)+۴HCl(aq)\rightarrow MnCl_۲(aq)+Cl_۲(g)+۲H_۲O(l)$$

پس باید حجم گاز $Cl_۲$ تولید شده در زمان مورد نظر را حساب کنیم. کافی است مول به ضریب HCl و $Cl_۲$ را برابر هم قرار بدیم:

$$۲۰۰۰g\ \text{محلول}\times\frac{۳۵۰۰g\ HCl\ \text{خالص}}{۱۰^۶g\ \text{محلول}}\times\frac{۱mol\ HCl}{۳۶/۵g\ HCl}$$

$$\times\frac{۱mol\ Cl_۲}{۴mol\ HCl}\times\frac{۲۲۴۰۰mL\ Cl_۲}{۱mol\ Cl_۲}\times\frac{۷۵}{۱۰۰}\simeq ۸۰۵/۵mL\ Cl_۲$$

این حجم گاز کلر در مدت ۱۰دقیقه (۱۰×۶۰ثانیه) حاصل شده است.

$$\Rightarrow R_{Cl_۲}=\frac{۸۰۵/۵mL}{۱۰\times۶۰(s)}\simeq ۱/۳\frac{mL}{s}$$

(شیمی ۲- در پی غذای سالم؛ صفحه‌های ۸۷ تا ۹۰، ۹۲ و ۹۳)

۱۳۷- **گزینهٔ «۱»** *(محمد خائرنیا)*

$$۲N_۲O_۵(g)\rightleftharpoons ۴NO_۲(g)+O_۲(g)$$

مقدار $N_۲O_۵$ مصرف شده طی یک ساعت انجام واکنش برابر است با:

$$۲۸gO_۲\times\frac{۱molO_۲}{۳۲gO_۲}\times\frac{۲molN_۲O_۵}{۱molO_۲}\times\frac{۱۰۸gN_۲O_۵}{۱molN_۲O_۵}=۱۸۹gN_۲O_۵$$

لذا مقدار اولیه $N_۲O_۵$ برابر است با:

$$۱۸۹+۵۶=۲۴۵gN_۲O_۵$$

هر ۲۰ دقیقه سرعت واکنش ۵۰٪ کاهش می‌یابد، یعنی مقدار فرآورده تولیدی در هر ۲۰ دقیقه، نصف مقدار فرآوردهٔ تولیدی در ۲۰ دقیقه قبل است، لذا داریم:

زمان (دقیقه)	۰ – ۲۰	۲۰ – ۴۰	۴۰ – ۶۰
مول تولیدی O_2	Z	$0/5Z$	$0/25Z$
مول تولیدی NO_2	$4Z$	$2Z$	Z

با توجه به جرم اکسیژن در انتهای واکنش، مقدار Z را به‌دست می‌آوریم:

$$(Z+0/5Z+0/25Z)\text{mol}\,O_2\times\frac{32\text{g}\,O_2}{1\text{mol}\,O_2}=28\text{g}\,O_2$$

$$\Rightarrow Z=0/5\text{mol}$$

بنابراین مقدار گرم NO_2 تولید شده در ۲۰ دقیقه دوم واکنش برابر است با:

$$2Z\times\frac{0/5\text{mol}\,NO_2}{Z}\times\frac{46\text{g}\,NO_2}{1\text{mol}\,NO_2}=46\text{g}\,NO_2$$

(شیمی ۲- در پی غذای سالم؛ صفحه‌های ۸۵ تا ۹۰، ۹۲ و ۹۳)

۱۳۸- **گزینهٔ «۲»** (مسعود طبرسا)

جدول تغییرات مول مواد شرکت‌کننده در واکنش به‌صورت زیر است:

	$2A$	$\rightarrow B+$	$2C$
اولیه	a	0	0
تغییرات	$-2x$	$+x$	$+2x$
نهایی(باقی‌مانده)	$a-2x$	x	$2x$

$$\bar{R}_A=\frac{-\Delta n_A}{\Delta t}\Rightarrow 0/1=\frac{-\Delta n_A}{50}\Rightarrow \Delta n_A=-5\text{mol}\,A$$

$$2x=5\text{mol}\Rightarrow x=2/5\text{mol}$$

$$\text{مول کل باقی‌مانده}=a-2x+x+2x=a+x=a+2/5$$

$$a+2/5=8/7\Rightarrow a=6/2\text{mol}$$

(شیمی ۲- در پی غذای سالم؛ صفحه‌های ۸۵ تا ۹۰)

۱۳۹- **گزینهٔ «۱»** (ارژنگ خاندری)

$$H_2+I_2\rightarrow 2HI$$

$$\bar{R}\text{ واکنش}=\bar{R}_{H_2}\qquad t=20\,\text{min تا } t=40\,\text{min}$$

$$\bar{R}_{H_2}=\frac{-\Delta nH_2}{V.\Delta t}=\frac{-(5-6)(0/5)\text{mol}}{2\text{L}\times\frac{20}{60}\text{h}}=0/75\text{mol}.\text{L}^{-1}.\text{h}^{-1}$$

$$t=0\,\text{min تا } t=40\,\text{min}$$

$$\bar{R}_{H_2}=\frac{-\Delta nH_2}{V.\Delta t}=\frac{-(5-8)(0/5)\text{mol}}{2\text{L}\times\frac{40}{60}\text{h}}$$

$$=1/125\text{mol}.\text{L}^{-1}.\text{h}^{-1}$$

$$\frac{\bar{R}_{H_2}(t=20\,\text{min تا } t=40\,\text{min})}{\bar{R}_{H_2}(t=0\,\text{min تا } t=40\,\text{min})}=\frac{0/75}{1/125}\simeq 0/66$$

(شیمی۲- در پی غذای سالم؛ صفحه‌های ۸۵ تا ۹۰، ۹۲ و ۹۳)

۱۴۰- **گزینهٔ «۴»** (بهمان شاهی‌بیکباغی)

بررسی برخی از گزینه‌ها:

گزینهٔ «۲»: لیکوپن با جذب رادیکال‌ها فعالیت آن‌ها را کاهش می‌دهد.

گزینهٔ «۴»: نگهدارنده‌ها سرعت واکنش‌هایی که منجر به فساد مواد غذایی می‌شوند را کاهش می‌دهند و نه اینکه آن‌ها را متوقف کنند.

(شیمی ۲- در پی غذای سالم؛ صفحه‌های ۸۳، ۸۴، ۹۱، ۹۲، ۹۴ و ۹۵)

شیمی ۱

۱۴۱- **گزینهٔ «۱»** *(حسن رحمتی‌کوکنده)*

مقایسهٔ غلظت برخی یون‌های حل شده در آب دریا به‌صورت زیر است:

$$Br^- < CO_3^{2-} < K^+ < Ca^{2+} < Mg^{2+} < SO_4^{2-} < Na^+ < Cl^-$$

بنابراین غلظت کاتیون Ca^{2+}، بیشتر از غلظت کاتیون K^+ است.

(شیمی ۱- آب، آهنگ زندگی؛ صفحه‌های ۸۶ تا ۸۹)

۱۴۲- **گزینهٔ «۲»** *(حسن عیسی‌زاده)*

نسبت شمار کاتیون به آنیون در باریم فسفات $(Ba_3(PO_4)_2)$ برابر $\frac{3}{2}$ است. نسبت شمار آنیون به کاتیون در هریک از ترکیبات عبارتند از:

آ) $\frac{3}{2}$ ب) $\frac{3}{1}$ پ) $\frac{2}{3}$

ت) $\frac{3}{2}$ ث) $\frac{3}{2}$ ج) $\frac{2}{3}$

(شیمی ۱- آب، آهنگ زندگی؛ صفحه‌های ۸۹، ۹۰، ۹۱ و ۹۲)

۱۴۳- **گزینهٔ «۳»** *(مسعود طبرسا)*

تنها عبارت (ت) نادرست است؛ چگالی گازها با دما رابطهٔ عکس دارد.

$$\frac{d_2}{d_1} \propto \frac{V_1}{V_2} \quad , \quad \frac{V_1}{V_2} \propto \frac{T_1}{T_2} \quad , \quad \frac{d_2}{d_1} \propto \frac{T_1}{T_2}$$

(شیمی ۱- ردپای گازها در زندگی؛ صفحه‌های ۷۷ و ۷۸)

۱۴۴- **گزینهٔ «۴»** *(امیرمحمّد سعیدی)*

$$d = \frac{m}{V} \Rightarrow 1/2 = \frac{m}{4} \Rightarrow m = 4/8\,g$$

$$\%\frac{w}{w} = \frac{\text{جرم حل‌شونده}}{\text{جرم محلول}} \times 100 \Rightarrow 25 = \frac{x\,g\,NaOH}{4/8} \times 100$$

$$\Rightarrow x\,g\,NaOH = 1/2\,g$$

$$?\,g\,Na^+ = 1/2\,g\,NaOH \times \frac{1\,mol\,NaOH}{40\,g\,NaOH} \times \frac{1\,mol\,Na^+}{1\,mol\,NaOH}$$

$$\times \frac{23\,g\,Na^+}{1\,mol\,Na^+} = 0/69\,g\,Na^+$$

$$\Rightarrow ppm = \frac{\text{جرم } Na^+}{\text{جرم محلول}} \times 10^6 = \frac{0/69}{920} \times 10^6 = 0/75 \times 10^3 = 750\,ppm\,Na^+$$

(شیمی ۱- آب، آهنگ زندگی؛ صفحه‌های ۹۳ تا ۹۶)

۱۴۵- **گزینهٔ «۱»** *(امیرعلی بیات)*

هر شبانه‌روز از $24 \times 60\,min$ تشکیل شده است:

$$?\,mol\,O_2 = 24\,h \times \frac{60\,min}{1\,h} \times \frac{\text{بار تنفس } 17}{1\,min} \times \frac{\text{هوا } 0/5\,Lit}{\text{بار تنفس } 1}$$

$$\times \frac{\text{داخل ریه } 20\,Lit\,O_2}{100\,Lit \text{ هوا}} \times \frac{\text{جذب } 5\,Lit\,O_2}{\text{داخل ریه } 100\,Lit\,O_2}$$

$$\times \frac{1\,mol\,O_2}{22/4\,Lit\,O_2} \simeq 5/5\,mol\,O_2 \text{ جذب می‌شود}$$

(شیمی ۱- ردپای گازها در زندگی؛ صفحه‌های ۷۹ تا ۸۱)

۱۴۶- **گزینهٔ «۲»** *(آرمان اکبری)*

فقط مورد (آ) درست است.

بررسی موارد:

مورد (آ): مطابق جدول صفحهٔ ۸۷ کتاب درسی، انتظار داریم در یک نمونه آب دریا غلظت Mg^{2+} بیشتر از Ca^{2+} باشد، پس با رسوب دادن همزمان این دو یون، غلظت Ca^{2+}، زودتر به صفر می‌رسد.

مورد (ب): $\text{درصد جرمی آب} = \frac{18g}{(18+46)g} \times 100 \simeq 28\%$

مورد (پ): برای تهیهٔ فلز منیزیم، کلرید آن را با تبلور به‌دست نمی‌آورند، بلکه نخست آن را به‌صورت $Mg(OH)_2$ رسوب می‌دهند و سپس به $MgCl_2$ مایع تبدیل و با جریان برق جداسازی می‌کنند.

مورد (ت): تعاملات بخش‌های سازندهٔ زمین به‌صورت فیزیکی و شیمیایی است و نه صرفاً فیزیکی.

(شیمی ۱- آب، آهنگ زندگی؛ صفحه‌های ۸۶، ۸۷، ۹۶ و ۹۸)

۱۴۷- **گزینهٔ «۳»** *(میرحسن حسینی)*

$$\text{درصد جرمی} = \frac{\text{جرم حل‌شونده}}{\text{جرم محلول}} \times 100$$

$$\left.\begin{array}{l} 20 = \frac{x}{45} \times 100 \Rightarrow x = 9g\,MgCl_2 \\ \text{جرم حلال} = 45 - 9 = 36g \end{array}\right\} \text{محلول اولیه}$$

$$\frac{1}{9} \times 9 = 1g \Rightarrow \text{جرم جدید حل‌شونده} = 9 + 1 = 10g\,MgCl_2$$

$$\frac{1}{10} \times 36 = 3/6 \Rightarrow \text{جرم جدید حلال} = 36 - 3/6 = 32/4g\,H_2O$$

$$\Rightarrow \text{درصد جرمی محلول جدید } MgCl_2 = \frac{10g}{(32/4+10)} \times 100$$

$$= \frac{10}{42/4} \times 100 \simeq \%23/6$$

(شیمی ۱- آب، آهنگ زندگی؛ صفحهٔ ۹۶)

۱۴۸- **گزینهٔ «۱»** *(عبدالرضا دارخواه)*

عبارت (آ): درست.

$$(NH_4)_2CO_3 \rightarrow 2NH_4^+ + CO_3^{2-} \quad (\text{۳ مول یون})$$

$$Li_2SO_4 \rightarrow 2Li^+ + SO_4^{2-} \quad (\text{۳ مول یون})$$

عبارت (ب): نادرست. در محلول‌های آبی، حالت فیزیکی و ترکیب شیمیایی مانند رنگ و غلظت در سرتاسر محلول، یکسان و یکنواخت است.

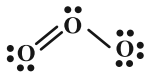
عبارت (پ): نادرست. اتیلن‌گلیکول (ضدیخ) و محلول آبی گلاب، انحلال مولکولی دارند، از این رو با حل شدن در آب، یون تولید نمی‌کنند.

عبارت (ت): درست. خواص محلول‌ها به خواص حلال، حل‌شونده و مقدار هریک از آن‌ها بستگی دارد.

(شیمی ۱- آب، آهنگ زندگی؛ صفحه‌های ۹۱ تا ۹۳)

۱۴۹- **گزینهٔ «۳»** *(امیرعلی بیات)*

مطابق ساختارهای لوئیس کشیده شده شمار الکترون‌های ناپیوندی و پیوندی O_3 از O_2 بیشتر است. نقطه جوش اوزون ۱۱۲- درجهٔ سانتی‌گراد می‌باشد که از O_2 بیشتر است $(-183^\circ C)$. اما به دلیل ناپایداری O_3 واکنش‌پذیری آن از O_2 بیشتر است.



(شیمی ۱- ردپای گازها در زندگی؛ صفحه‌های ۷۳ تا ۷۶)

۱۵۰- **گزینهٔ «۳»** *(مسعود جعفری)*

درصد جرمی نفتالن را برابر a در نظر می‌گیریم:

$$?g\,H = 200g \text{ محلول} \times \frac{ag\,C_{10}H_8}{100g \text{ محلول}} \times \frac{8g\,H}{128g\,C_{10}H_8} = \frac{a}{8}g\,H$$

$$?g\,H = 200g \text{ محلول} \times \frac{(100-a)g\,C_7H_8}{100g \text{ محلول}}$$

$$\times \frac{8g\,H}{92g\,C_7H_8} = \frac{4(100-a)}{23}g\,H$$

$$14/75g = \frac{a}{8}g + \frac{4(100-a)}{23}g \xrightarrow{\times 92} 1357 = 11/5a + 1600 - 16a$$

$$\Rightarrow a = \%54$$

(شیمی ۱- آب، آهنگ زندگی؛ صفحهٔ ۹۶)

شیمی ۳

۱۵۱- **گزینهٔ «۳»** *(حمیدرضا نقی‌لو)*

بررسی گزینه‌های نادرست:

گزینهٔ «۱»: H متصل به گروه کربوکسیل آن‌ها می‌تواند به‌صورت یون هیدرونیوم وارد محلول شود.

گزینهٔ «۲»: در سامانه‌های تعادلی غلظت واکنش‌دهنده‌ها و فراورده‌ها در لحظهٔ تعادل ثابت است. (نه لزوماً برابر!)

گزینهٔ «۴»: قدرت اسیدی تابع غلظت نیست و فقط از روی ثابت یونش اسیدی (K_a) مقایسه می‌شود.

(شیمی ۳- مولکول‌ها در خدمت تندرستی؛ صفحه‌های ۱۶ تا ۲۴)

۱۵۲- **گزینهٔ «۱»** *(سراسری تجربی ۸۴)*

با توجه به شکل ۲ ماده (SO_2 و O_2) در حال مصرف شدن هستند، پس واکنش‌دهنده بوده و باید در سمت چپ معادلهٔ واکنش باشند (رد گزینهٔ ۲ و ۳)، همچنین مقدار عددی K به صورت زیر تعیین می‌شود:

$$K=\frac{[SO_3]^2}{[SO_2]^2\times[O_2]}=\frac{(0/06)^2}{(0/3)^2\times 0/2}=0/2\,mol.L^{-1}$$

(شیمی ۳- مولکول‌ها در خدمت تندرستی؛ صفحهٔ ۲۲)

۱۵۳- **گزینهٔ «۳»** *(محمدرضا یوسفی)*

بررسی گزینه‌ها:

گزینهٔ «۱»: پاک‌کننده‌های غیرصابونی در صنعت و با استفاده از مواد پتروشیمیایی و طی واکنش‌های پیچیده‌ای تولید می‌شوند.

گزینهٔ «۲»:

پاک‌کننده غیرصابونی: $C_{19}H_{31}SO_3Na=362\,g.mol^{-1}$

پاک‌کننده صابونی: $C_{17}H_{35}COONa=306\,g.mol^{-1}$

گزینهٔ «۳»: نیروی بین مولکولی غالب در اتیلن‌گلیکول از نوع پیوند هیدروژنی بوده که در پاک‌کننده غیرصابونی وجود ندارد.

گزینهٔ «۴»: با اضافه کردن صابون یا پاک‌کننده غیرصابونی به مخلوط آب و روغن، یک کلوییدِ پدید می‌آید که ناهمگن و پایدار بوده و قابلیت پخش نور را دارد.

(شیمی ۳- مولکول‌ها در خدمت تندرستی؛ صفحه‌های ۱ تا ۱۲)

۱۵۴- **گزینهٔ «۳»** *(فرزاد نبفی‌کرمی)*

بررسی موارد:

آ) اسیدهایی همانند فورمیک‌اسید و استیک‌اسید و بسیاری از اسیدهای دیگر تک‌پروتون‌دار هستند ولی تعداد اتم‌های هیدروژن در ساختار آن‌ها بیش از یک عدد می‌باشد.

ب) درجهٔ یونش برابر شمار مولکول‌های اسید یونیده شده به شمار کل مولکول‌های اولیه است.

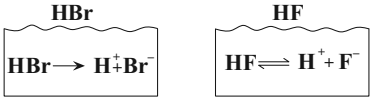
پ) ثابت یونش تنها با دما تغییر می‌کند.

ت) HF اسیدی ضعیف است و دارای ثابت یونش و درجهٔ یونش کمی است و تعداد مولکول‌هایی از آن‌که یونش می‌یابند، کم است.

(شیمی ۳- مولکول‌ها در خدمت تندرستی؛ صفحه‌های ۱۶ تا ۲۳)

۱۵۵- **گزینهٔ «۱»** *(حامد رمضانیان)*

فقط مورد (پ) برابر نمی‌باشد.



$$pH=4$$

$$[H^+]=10^{-4}\,mol.L^{-1}\rightarrow[OH^-]=10^{-10}\,mol.L^{-1}$$

$$[Br^-]=10^{-4}\,mol.L^{-1}$$

$$pH=4$$

$$[H^+]=10^{-4}\,mol.L^{-1}\rightarrow[OH^-]=10^{-10}\,mol.L^{-1}$$

$$[F^-]=10^{-4}\,mol.L^{-1}$$

با توجه به رابطهٔ $[H^+]=M.\alpha$، در می‌یابیم غلظت اولیهٔ HBr برابر غلظت نهایی H^+ یعنی 10^{-4} مولار است. (چون HBr یک اسید قوی است) $(\alpha\cong 1)$. امّا محلول HF که یک اسید ضعیف است، غلیظ‌تر بوده که تنها مقدار یونیده شدهٔ آن 10^{-4} مولار است. بنابراین در واکنش با منیزیم حجم گاز آزاد شده از محلول HF بیشتر از HBr خواهد بود.

توجه: سرعت واکنش در نخستین لحظه فقط به غلظت H^+ در نخستین لحظه وابسته است و تابع مستقیم قدرت اسید نیست. بنابراین سرعت واکنش با Mg برای هر دو در نخستین لحظه برابر است.

(شیمی ۳- مولکول‌ها در خدمت تندرستی؛ صفحه‌های ۲۰ تا ۲۸)

۱۵۶- **گزینهٔ «۴»** *(مسعود طبرسا)*

الگوی یونش اسیدهای ضعیف به صورت زیر است:

$$HA \rightleftharpoons H^+ + A^-$$

غلظت اولیه	M	۰	۰
تغییرات غلظت	$-x$	$+x$	$+x$
غلظت نهایی	$M-x$	x	x

$$\Rightarrow \begin{cases} M-x=۱۷۵ \\ \xrightarrow{M=۲۰۰} ۲۰۰-x=۱۷۵ \\ \Rightarrow x=۲۵ \end{cases}$$

$M-x$: مولکول‌های یونیده نشده — x: یون‌های حاصل

$$\alpha=\frac{\text{تعداد مولکول‌های یونیده شده}}{\text{تعداد مولکول‌های اولیه}} \Rightarrow \alpha=\frac{۲۵}{۲۰۰}=\frac{۱}{۸}$$

$$\alpha_{\text{اولیه}}=\frac{[H^+]}{[HA]} \Rightarrow \frac{۱}{۸}=\frac{[H^+]}{۰/۰۴} \Rightarrow [H^+]=۵\times۱۰^{-۳}\,mol.L^{-۱}$$

$$pH=-\log[H^+] \Rightarrow pH=-\log ۵\times۱۰^{-۳}$$

$$=-(\log ۵+\log ۱۰^{-۳})=-(۰/۷-۳)=۲/۳$$

(شیمی ۳- مولکول‌ها در خدمت تندرستی؛ صفحه‌های ۱۶، ۱۸، ۱۹، ۲۲، ۲۴ و ۲۵)

۱۵۷- **گزینهٔ «۳»** *(سینا رحمانی‌تبار)*

قدرت اسیدی $HNO_۳$ از $HNO_۲$ بیشتر بوده و ثابت یونش آن بزرگ‌تراست. درنتیجه میزان یون هیدرونیوم بیشتری در محلول آن وجود داشته و خاصیت اسیدی آن بیشتر و pH محلول آن کمتر است.

(در محلول اسیدهای قوی، تقریباً مولکول‌های اسید یونیده نشده یافت نمی‌شوند.)

(شیمی ۳- مولکول‌ها در خدمت تندرستی؛ صفحه‌های ۲۰ تا ۲۵)

۱۵۸- **گزینهٔ «۱»** *(امیرحسین طیبی)*

تنها مورد پنجم درست است. بررسی همهٔ موارد:

مورد اول: ذرات سازندهٔ ترکیبات مولکولی، اتم‌ها هستند نه یون‌ها! ترکیب مولکولی، یون سازنده ندارد؛ تعریف درست یونش: به فرایندی که در آن یک ترکیب مولکولی در آب به یون‌های مثبت و منفی تبدیل می‌شود یونش می‌گویند.

مورد دوم: قدرت اسیدی به K_a بستگی دارد و رسانایی نیز به غلظت یون‌های موجود در محلول بستگی دارد. ممکن است مولاریتهٔ اولیهٔ یک اسید ضعیف آنقدری زیاد باشد که غلظت یون‌ها و رسانایی آن از محلول اسیدی که K_a بیشتری دارد نیز بیشتر شود.

مورد سوم: می‌توان نتیجه گرفت در غلظت ثابت هر چه K_a بزرگ‌تر باشد درجه یونش نیز بزرگ‌تر است. اما به این معنا نیست که K_a بیشتر به‌طور حتم باعث α بیشتر شود. در صورتی این قضیه صادق است که غلظت دو محلول برابر باشد.

مورد چهارم: در سامانه‌های تعادلی، پس از برقراری تعادل نیز واکنش‌های رفت و برگشت با سرعت یکسان در حال انجام هستند.

مورد پنجم: نظریهٔ آرنیوس دربارهٔ اسیدها و بازهای محلول در آب می‌تواند توضیح دهد. در این واکنش HCl و $NH_۳$ حالت فیزیکی گازی دارد و در نظریهٔ آرنیوس، بحث نمی‌شود.

(شیمی ۳- مولکول‌ها در خدمت تندرستی؛ صفحه‌های ۱۴، ۱۵ و ۱۸ تا ۲۴)

۱۵۹- **گزینهٔ «۲»** *(امیر حاتمیان)*

$$HX(aq) \rightleftharpoons H^+(aq)+X^-(aq)$$

$$K_a=\frac{[H^+]\times[X^-]}{[HX]}=\frac{۴/۲۵\times۱۰^{-۳}\times۴/۲۵\times۱۰^{-۳}}{۰/۴-\underbrace{۴/۲۵\times۱۰^{-۳}}_{\text{قابل صرف‌نظر کردن}}}$$

$$\simeq ۴/۵\times۱۰^{-۵}\,\frac{mol}{L}$$

$$\text{روش سریع محاسبهٔ} \Rightarrow \begin{cases} [H^+]=a\times۱۰^{-b} \\ pH=b-\log a \end{cases}$$

$$[H^+]=۴/۲۵\times۱۰^{-۳} \Rightarrow \begin{cases} pH=۳-\log ۴/۲۵=۳-(\log ۵+\log ۰/۸۵) \\ pH=۳-(۰/۷-۰/۰۷)=۲/۳۷ \end{cases}$$

(شیمی ۳- مولکول‌ها در خدمت تندرستی؛ صفحه‌های ۲۲ تا ۲۸)

۱۶۰- **گزینهٔ «۱»** *(امیرحسین معروفی)*

ظرف ۱: $pH=۳/۷ \Rightarrow [H^+]=۱۰^{-۳/۷}=۱۰^{-۴}\times۱۰^{۰/۳}$

$$=۲\times۱۰^{-۴}\,mol.L^{-۱}=M\alpha$$

$$K_a=\frac{M\alpha^۲}{۱-\alpha} \Rightarrow ۲\times۱۰^{-۵}=\frac{M.\alpha.\alpha}{۱-\alpha}=\frac{۲\times۱۰^{-۴}\alpha}{۱-\alpha}$$

$$۰/۱=\frac{\alpha}{۱-\alpha} \Rightarrow \alpha\simeq۰/۰۹ \Rightarrow [H^+]=M\alpha \Rightarrow ۲\times۱۰^{-۴}=M\times۹\times۱۰^{-۲}$$

$$\Rightarrow M\simeq ۲/۲\times۱۰^{-۳} \Rightarrow n=M.V=۲/۲\times۱۰^{-۳}\times۱$$

$$=۲/۲\times۱۰^{-۳}\,mol$$

جرم مولی $CH_۳COOH=۲۴+۳۲+۴=۶۰\,g.mol^{-۱}$

$$?g\,CH_۳COOH=۲/۲\times۱۰^{-۳}\,mol\,CH_۳COOH$$

$$\times\frac{۶۰g\,CH_۳COOH}{۱mol\,CH_۳COOH}=۰/۱۳۲g\ CH_۳COOH$$

ظرف ۲: $pH=۱۱ \Rightarrow [H^+]=۱۰^{-۱۱} \Rightarrow [OH^-]=۱۰^{-۳}=M\alpha$

$$\xrightarrow{\alpha=۱} M=۱۰^{-۳}\,mol.L^{-۱}$$

$$n=M.V=۱۰^{-۳}\times۱=۱۰^{-۳}\,mol$$

$$\Rightarrow ?mg\,NaOH=۱۰^{-۳}\,mol\ NaOH\times\frac{۴۰g\ NaOH}{۱mol\,NaOH}\times\frac{۱۰^۳mg}{۱g}=۴۰mg\ NaOH$$

(شیمی ۳- مولکول‌ها در خدمت تندرستی؛ صفحه‌های ۲۳ تا ۲۷)