گروه آزمایشی علوم ریاضی و فنی

آزمون دوپینگ ماز | پایهٔ دوازدهم

دفترچه پاسخ

چهارشنبه ۶ خردادماه ۱۴۰۵

ریاضیات

ویژه کنکوری‌های ۱۴۰۵

درس	مسئول درس	طراحان	ویراستاران
ریاضیات	حسین شفیع‌زاده مهرداد کیوان سیدجواد نظری	حسین شفیع‌زاده مهرداد کیوان علی منصف‌شکری علیرضا شریف‌خطیبی	ندا فرهختی ـ مائده بادان‌فیروز حمیدرضا ولی‌پور ـ مهرداد اسپیدکار یزدان نیک‌قدم ـ ارسلان حسنوند فاطمه زارع

مباحث پایه (جبر، معادله و نامعادله)، تالس و چندضلعی‌ها، ترکیبیّات

جامع تابع + توابع نمایی و لگاریتمی، تجسم فضایی + دایره، آشنایی با مبانی ریاضیات

جامع مثلثات، چندضلعی‌های محاطی و محیطی + تبدیل‌های هندسی، احتمال

جامع حد وپیوستگی، روابط طولی در مثلث + ترسیم‌های هندسی و استدلال، آمار توصیفی و استنباطی

جامع مشتق و کاربرد مشتق، ماتریس‌ها، گراف و مدل‌سازی

الگو و دنباله + توان‌های گویا و عبارت‌های جبری، مقاطع مخروطی + بردارها، آشنایی با نظریهٔ اعداد

مسیر حرفه‌ای جمع‌بندی تا کنکور ۱۴۰۵

برای شباهت حداکثری به کنکور، صفحه‌آرایی، فونت و حتی اندازهٔ متن در تمامی آزمون‌های ماز، کاملاً یکسان با استاندارد دفترچه‌های کنکور در نظر گرفته می‌شود.

راهنمای پاسخنامه آزمون ها

پاسخ: گزینهٔ ۱ (متوسط ـ خط به خط ـ استاندارد ـ صفحهٔ ۳ تا ۶ ـ ۱۰۰۱)

زمان پاسخگویی:
سریع (زیر ۱ دقیقه) | استاندارد (۱-۲ دقیقه) | زمان‌بر (بیشتر از ۲ دقیقه).

سطح سؤال:
آسان (اعتمادبه‌نفس) | متوسط (محک جدی) | دشوار (چالش رشد).

هشتگ سوال:
شماره درس + شماره پایه
دسته‌بندی راحت‌تر سؤالات

سبک سؤال:
خط به خط (متن کتاب) | ترکیبی (چند مبحث) | محاسباتی (فرمول‌ودقت) | مفهومی (درک عمیق).

شماره صفحه:
منبع اصلی رو راحت پیدا کنید.

ویژگی های آزمون دوپینگ

بررسی سریع

«با یک نگاه حرفه‌ای، دلیلِ درست بودن یا نبودن گزینه‌ها را در لحظه ببینید و بدون اتلاف وقت، پرونده هر سؤال را با یادگیری کامل ببندید!»

پاسخنامه کامل

«یک نقشهٔ راهِ دقیق و گام به گام که پیچیده‌ترین مسائل موضوع را باز می‌کند تا هیچ ابهامی در مسیر موفقیت‌تان باقی نماند.»

نکات و دام‌های کنکوری

«در دام سوالات نیفتید! ما ترفندهای طراحان سوال و مفاهیم کلیدی رو بهتون یاد می‌دیم تا با آمادگی کامل، همه سوالات رو جواب بدید.»

کپسول دوپینگ

آمادهٔ یک انفجار یادگیری باشید!
«با "کپسول دوپینگ" کلید موفقیت در دستان شماست! با مرور سریع و کاربردی نکات، از پس هر سوالی برآیید و در آزمون‌ها بدرخشید!»

داشبورد دوپینگ

مبحث	کتاب	فصل	وضعیت این آزمون	سطح دشواری این آزمون	آخرین وضعیت کنکور ۱۴۰۴
مشتق و کاربرد مشتق	حسابان ۲	۴	۱۰ سؤال مستقیم از مبحث مشتق طراحی شده که اکثراً شبیه‌ساز یا خلاقانه هستند.	★★★★★	۱ سؤال نسبتاً ساده و روان
		۵	۱۰ سؤال از کاربرد مشتق طراحی شده که شبیه‌ساز کنکور سال‌های قبل و یا با الهام از تمرین‌های کتاب درسی هستند.	★★★★	۱ سؤال شمارشی

توصیه‌های دوپینگ

اگر زمان کمی دارید...

حتما مباحث «نقاط اکسترمم» و سؤالات سبک «بهینه‌سازی» در کاربرد مشتق را مطالعه کنید.

اگر دنبال درس‌های آسان‌تر هستید...

تست‌های کنکور چند سال اخیر مربوط به این موضوع را حل کنید و پاسخ تشریحی آن‌ها به‌طور دقیق مطالعه کنید.

پیش‌بینی طراح...

در مجموع ۲ یا ۳ سؤال از این موضوع در کنکور مطرح می‌شود که یک تست می‌تواند به سبک جدید و خلاقانه از مبحث «کاربرد مشتق» باشد.

سخن مسئول درس

سلام به همهٔ دانش‌آموزان عزیز رشتهٔ ریاضی

به دلیل این‌که در سال‌های اخیر، تأثیر معدل سال دوازدهم (معدل نهایی) در کنکور زیاد شده است و به‌خصوص مباحث نیم‌سال دوم حسابان ۲ بیشترین ارزش نمره در امتحان نهایی را داشته‌اند، تعداد سؤالات مشتق و به‌خصوص کاربرد مشتق در کنکور کمتر شده است؛ ولی به هر حال این امر نمی‌تواند از اهمیت این دو موضوع کم کند. همواره سؤالات خلاقانهٔ کنکور در موضوع «کاربرد مشتق» بیشتر دیده شده است. شما می‌توانید در مرحلهٔ اول تست‌های کنکور سال‌های قبل، حداقل ۵ سال گذشته، را در هر دو رشتهٔ ریاضی و تجربی حل کنید و سپس با توجه به اهمیت و تکرار سؤالاتی که مشاهده می‌کنید، سؤالات مشابه دیگر منابع را نیز حل کنید.

حسین شفیع‌زاده – مهرداد کیوان

۱- خط $4y-x=a$ در نقطهٔ $x=3$ بر نمودار تابع $f(x)=\frac{x^2+bx+1}{x-1}$ مماس است. مقدار $a-2b$ کدام است؟

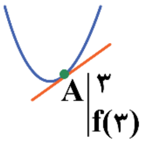
۱) ۲۰ ۲) ۲۱ ۳) ۱۰ ۴) ۱۱

پاسخ: گزینهٔ ۲ (متوسط ـ محاسباتی ـ استاندارد ـ حسابان ۲ صفحهٔ ۷۷ و ۹۵ـ ۱۴۰۴)

روش اول

چون خط بر منحنی در $x=3$ **مماس** است، می‌توان گفت:

شکل فرضی



از معادلهٔ خط $y=\frac{x+a}{4}\xrightarrow{x=3}y(3)=\frac{a+3}{4}$

از معادلهٔ منحنی $f(x)=\frac{x^2+bx+1}{x-1}\xrightarrow{x=3}f(3)=\frac{3b+10}{2}$

$$\Rightarrow \frac{3b+10}{2}=\frac{a+3}{4}\Rightarrow a-6b=17$$

شیب خط مماس از روی معادلهٔ آن برابر است با: $y=\frac{x}{4}+\frac{a}{4}\Rightarrow \text{شیب}=\frac{1}{4}$

از طرفی **شیب خط مماس** همان $f'(3)$ را نشان می‌دهد، پس:

$$f'(x)=\frac{(2x+b)(x-1)-(x^2+bx+1)}{(x-1)^2}\xrightarrow{x=3}f'(3)=\frac{2-b}{4}\Rightarrow\frac{2-b}{4}=\frac{1}{4}\Rightarrow b=1\Rightarrow a=23$$

بنابراین حاصل $a-2b$ برابر است با: $a-2b=23-2=21$

روش دوم

معادلهٔ تلاقی خط و منحنی، **ریشهٔ مضاعف** دارد، یعنی:

$$f(x)=\text{خط مماس}\Rightarrow\frac{x^2+bx+1}{x-1}=\frac{x+a}{4}\Rightarrow 4x^2+4bx+4=x^2+ax-x-a$$

$$\Rightarrow 3x^2+(4b-a+1)x+4+a=0$$

چون $x=3$ ریشهٔ مضاعف معادله است، می‌توان گفت $x=3$ **هم خود معادله** و **هم مشتق** آن را **صفر** می‌کند یا می‌توان گفت در معادله $\Delta=0$ است:

$$3x^2+(4b-a+1)x+4+a=0\xrightarrow{x=3\ \text{در معادله}}27+12b-3a+3+4+a=0\Rightarrow 6b-a=-17$$

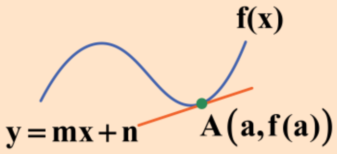
$$6x+(4b-a+1)=0\xrightarrow{x=3\ \text{درمشتق معادله}}6\times3+(4b-a+1)=0\Rightarrow 4b-a=-19$$

$$\Rightarrow\begin{cases}b=1\\a=23\end{cases}$$

پس حاصل $a-2b$ برابر ۲۱ است.

کپسول دوپینگ | (ارتباط مشتق و خط مماس)

اگر خط $y = mx + n$ در نقطهٔ به طول a واقع بر منحنی $f(x)$، بر آن مماس شود، **شیب خط مماس**، همان **مشتق تابع** در نقطهٔ به طول a است. اگر خطی در $x = a$ بر نمودار تابع f مماس شود:



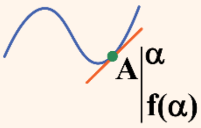
$$\text{شیب خط} = f'(a) = m$$

$$\text{معادلهٔ خط مماس}: y - y_A = m(x - x_A) \Rightarrow y - f(a) = f'(a)(x - a)$$

معادلهٔ تلاقی خط و منحنی، دارای **ریشهٔ مضاعف** است، یعنی $x = a$ هم جواب **معادلهٔ تلاقی** و هم جواب **مشتق معادلهٔ تلاقی** است.

یه نمونهٔ باحال ببین!

اگر خط $y = ax + b$ بر منحنی $f(x) = x^۲ + ۱$ در نقطهٔ به طول $x = ۱$ مماس باشد، مقدار a و b چقدر است؟



$$\text{معادلهٔ تلاقی}: x^۲ + ۱ = ax + b \Rightarrow x^۲ - ax + ۱ - b = ۰ \xrightarrow[\text{در معادلهٔ تلاقی}]{x=۱} ۱ - a + ۱ - b = ۰ \Rightarrow a + b = ۲$$

$$\xrightarrow{\text{مشتق معادلهٔ تلاقی}} ۲x - a = ۰ \xrightarrow{x=۱} ۲ - a = ۰ \Rightarrow a = ۲ \Rightarrow b = ۰$$

ماز

۲- حاصل $\lim\limits_{a\to ۰} \dfrac{\sin ۳x \cos ۲a - \cos ۳x \sin ۲a - \sin ۳x}{a}$ کدام است؟

۱) $-۶\cos ۳x$ ‏ ۲) $۶\cos ۳x$ ‏ ۳) $-۲\cos ۳x$ ‏ ۴) $۲\cos ۳x$

پاسخ: گزینهٔ ۳ — (متوسط ـ مفهومی ـ استاندارد ـ حسابان ۲ صفحهٔ ۹۵ ـ ۱۴۰۴)

قبل از محاسبهٔ حد داده شده توجه کنید که $\sin ۳x \cos ۲a - \cos ۳x \sin ۲a$ همان $\sin(۳x - ۲a)$ می‌باشد. پس:

$$\lim_{a\to ۰} \frac{\overbrace{\sin ۳x \cos ۲a - \cos ۳x \sin ۲a}^{\sin(۳x-۲a)} - \sin ۳x}{a} = \lim_{a\to ۰} \frac{\sin(۳x - ۲a) - \sin ۳x}{a}$$

دقت کنید حد فوق مبهم $(\frac{۰}{۰})$ است که **متغیر آن a می‌باشد نه x** !!

با استفاده از قاعدهٔ هوپیتال داریم:

$$\xrightarrow{HOP} \lim_{a\to ۰} \frac{-۲\cos(۳x - ۲a) - ۰}{۱} = -۲\cos ۳x$$

نسبت‌های مثلثاتی مجموع و تفاضل ۲ زاویه

$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha \cos\beta \mp \sin\alpha \sin\beta$$

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha \cos\beta \pm \cos\alpha \sin\beta$$

$$\tan(\alpha \pm \beta) = \frac{\tan\alpha \pm \tan\beta}{۱ \mp \tan\alpha \times \tan\beta}$$

کپسول دوپینگ | (قضیهٔ HOP)

اگر $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{0}{0}$ و توابع $f(x)$ و $g(x)$ در $x=a$ مشتق‌پذیر باشند، برای محاسبهٔ حد، می‌توانیم از قضیهٔ هوپیتال استفاده کنیم و اگر **مجدداً حد مبهم** $(\frac{0}{0})$ شود باز هم قضیهٔ هوپیتال را **تکرار** می‌کنیم.

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}\ \overset{\frac{0}{0}}{\underset{HOP}{=\!=}}\ \lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

ماز

۳- اگر $f(x)=xg(\sqrt{3+\tan^2 x})$ و $g(2)=2$ و $g'(2)=\frac{4}{\pi}$ باشد، مقدار $f'(\frac{\pi}{4})$ کدام است؟

۱) ۱   ۲) ۲   ۳) ۳   ۴) ۴

پاسخ: گزینهٔ ۳   (متوسط ـ ترکیبی ـ استاندارد ـ حسابان ۲ صفحهٔ ۹۶ ـ ۱۴۰۴)

برای محاسبهٔ $f'(\frac{\pi}{4})$ کافی است از $f(x)$ مشتق بگیریم:

$$f'(x)=1\times g(\sqrt{3+\tan^2 x})+\frac{2\tan x\times(1+\tan^2 x)}{2\sqrt{3+\tan^2 x}}\times g'(\sqrt{3+\tan^2 x})\times x$$

$$\Rightarrow f'(\frac{\pi}{4})=1\times g(\sqrt{3+1})+\frac{1\times(1+1)}{\sqrt{3+1}}\times g'(\sqrt{3+1})\times\frac{\pi}{4}$$

$$\Rightarrow f'(\frac{\pi}{4})=g(2)+g'(2)\times\frac{\pi}{4}=2+\frac{4}{\pi}\times\frac{\pi}{4}=2+1=3$$

قواعد مشتق‌گیری

اگر f، g و u توابعی مشتق‌پذیر برحسب x باشند، آن‌گاه: $(k\in\mathbb{R})$

۱) $y=k\Rightarrow y'=0$ $y=4\Rightarrow y'=0$

۲) $y=kx\Rightarrow y'=k$ $y=4x\Rightarrow y'=4$

۳) $y=kx^n\Rightarrow y'=k\times nx^{n-1}$ $y=4x^5\Rightarrow y'=20x^4$

۴) $y=\sqrt{x}\Rightarrow y'=\frac{1}{2\sqrt{x}}$

۵) $y=(f\pm g)(x)\Rightarrow y'=f'(x)\pm g'(x)$ $y=x^3-7x^2+3x-1\Rightarrow y'=3x^2-14x+3$

۶) $y=(f\times g)(x)\Rightarrow y'=f'(x)\times g(x)+f(x)\times g'(x)$

$$y=(x^2+4)\times(-3x+1)\Rightarrow y'=2x\times(-3x+1)-3\times(x^2+4)$$

۷) $y=(\frac{f}{g})(x)\Rightarrow y'=\frac{f'(x)\times g(x)-g'(x)\times f(x)}{g^2(x)}$ $y=\frac{x^2-7}{1+x^3}\Rightarrow y'=\frac{2x(1+x^3)-3x^2(x^2-7)}{(1+x^3)^2}$

۸) $y=k\times u^n\Rightarrow y'=k\times n\times u^{n-1}\times u'$

$$y=5(x^3+2x^2-7x+1)^3\Rightarrow y'=5\times3\times(x^3+2x^2-7x+1)^2\times(3x^2+4x-7)$$

۹) $y=\sqrt{u} \Rightarrow y'=\dfrac{u'}{۲\sqrt{u}}$ 　　 $y=\sqrt{۴x+۱} \Rightarrow y'=\dfrac{۴}{۲\sqrt{۴x+۱}}$

۱۰) $y=\sqrt[n]{u^m} \xrightarrow{m<n} y'=\dfrac{m\times u'}{n\times \sqrt[n]{u^{n-m}}}$ 　　 $y=\sqrt[۷]{(x^۲+۳x)^۳} \Rightarrow y'=\dfrac{۳\times(۲x+۳)}{۷\sqrt[۷]{(x^۲+۳x)^۴}}$

کپسول دوپینگ | (مشتق ترکیب توابع)

u تابعی برحسب x و مشتق‌پذیر است. $y=f(u) \Rightarrow y'=u'\times f'(u)$

یه نمونهٔ باحال ببین!

اگر $f(\sqrt{x}+۱)=x^۲+۶x-۱$ باشد، $f'(۳)$ چقدر است؟

$$f(\sqrt{x}+۱)=x^۲+۶x-۱ \xrightarrow{\text{مشتق}} \frac{۱}{۲\sqrt{x}}f'(\underbrace{\sqrt{x}+۱}_{۳})=۲x+۶ \xrightarrow{x=۴} \frac{۱}{۲\sqrt{۴}}f'(۳)=۲\times۴+۶$$

$$\Rightarrow \frac{۱}{۴}f'(۳)=۱۴ \Rightarrow f'(۳)=۵۶$$

کپسول دوپینگ | (مهم‌ترین قواعد مشتق)

۱) $y=k\times u^n \Rightarrow y'=k\times n\times u^{n-۱}\times u'$

۲) $y=(f\pm g)(x) \Rightarrow y'=f'(x)\pm g'(x)$

۳) $y=(f\times g)(x) \Rightarrow y'=f'(x)\times g(x)+f(x)\times g'(x)$

۴) $y=(\dfrac{f}{g})(x) \Rightarrow y'=\dfrac{f'(x)\times g(x)-g'(x)\times f(x)}{g^۲(x)}$

ماز

۴- اگر $f(x)=۲x\left[\dfrac{۳}{x}\right]-۱$ و $g(x)=\sqrt[۳]{(x^۲-۱)^۲}$ باشد، حاصل $(gof)'(۲)$ کدام است؟ ([ ] نماد جزءصحیح است.)

۱) ۱۲　　۲) ۴　　۳) ۲　　۴) ۶

پاسخ: گزینهٔ ۲ 　 **(متوسط ـ محاسباتی ـ استاندارد ـ حسابان ۲ صفحهٔ ۹۶ ـ ۱۲۰۴)**

حاصل $(gof)'(۲)$ برابر است با:

$$(gof)'(۲)=f'(۲)\times g'(f(۲)) \xlongequal{f(۲)=۳} f'(۲)\times g'(۳)$$

چون تابع f در یک همسایگی از $x=۲$ پیوسته و مشتق‌پذیر است به **براکت مقداردهی** کرده و بعد $f'(۲)$ را به‌دست می‌آوریم:

$$x=۲ \Rightarrow \left[\frac{۳}{x}\right]=۱ \Rightarrow f(x)=۲x-۱ \Rightarrow f'(۲)=۲$$

از طرفی:

$$g'(x)=\frac{۲\times۲x}{۳\sqrt[۳]{(x^۲-۱)}} \Rightarrow g'(۳)=\frac{۴}{۲}=۲$$

بنابراین:

$$(gof)'(۲)=f'(۲)\times g'(۳)=۲\times۲=۴$$

کپسول دوپینگ | (مشتق‌گیری از توابع جزء صحیح)

در توابع براکتی، برای محاسبهٔ مشتق تابع در $x=a$ بهترین و کم‌خطرترین روش، استفاده از **تعریف مشتق** است.

اگر تابع در $x=a$ پیوسته باشد، **مقدار براکت** را هنگامی که $x \to a^+$ و $x \to a^-$ محاسبه و در تابع قرار می‌دهیم و از تابع، **بدون وجود براکت مشتق** می‌گیریم.

یه نمونهٔ باحال ببین!

مشتق راست تابع $f(x)=x^2[x]$ را در $x=3$ محاسبه کنید.

از آن‌جایی که در $x=3$ تابع $y=[x]$ پیوستگی راست دارد می‌توانیم به جای $[x]$ عدد ۳ را قرار دهیم و بعد مشتق بگیریم.

$$f(x)=3x^2 \Rightarrow f'_+(x)=6x \Rightarrow f'_+(3)=18$$

۵- اگر $f(x)=x^3-3x^2+mx+1$ و باقی‌ماندهٔ تقسیم چندجمله‌ای $f(x)f'(x)$ بر $f''(x)$ برابر ۳ باشد، مجموع مقادیر ممکن برای m کدام است؟

۱) ۴ ۲) ۶ ۳) ۳ ۴) ۲

پاسخ: گزینهٔ ۱ (آسان ـ محاسباتی ـ سریع ـ حسابان ۲ صفحهٔ ۹۸ ـ ۱۲۰۴)

$$f(x)=x^3-3x^2+mx+1 \Rightarrow f'(x)=3x^2-6x+m \Rightarrow f''(x)=6x-6$$

حال برای محاسبهٔ باقی‌ماندهٔ تقسیم $f(x)f'(x)$ بر $f''(x)$ کافی است، **ریشهٔ** $f''(x)$ را در **مقسوم** یعنی $f(x)f'(x)$ قرار دهیم:

ریشهٔ $f''(x)$: $6x-6=0 \Rightarrow x=1$

حال ریشه را جای‌گذاری می‌کنیم:

$$\begin{array}{l|l} f(x)f'(x) & f''(x)=6x-6 \\ \vdots & \\ \overline{R=3} & \end{array} \Rightarrow R=f(1)f'(1)=3$$

$$(1-3+m+1)(3-6+m)=3 \Rightarrow (m-1)(m-3)=3$$

$$\Rightarrow m^2-4m+3=3 \Rightarrow m^2-4m=0 \Rightarrow \begin{cases} m=0 \\ m=4 \end{cases}$$

مجموع مقادیر ممکن برای m برابر ۴ است.

قضیهٔ تقسیم

در تقسیم چندجمله‌ای $A(x)$ بر چندجمله‌ای $B(x)$، اگر خارج‌قسمت $q(x)$ و باقی‌مانده $r(x)$ فرض شود، داریم:

$$\begin{array}{l|l} \overset{\text{مقسوم}}{A(x)} & B(x) \to \text{مقسوم علیه} \\ \vdots & q(x) \to \text{خارج قسمت} \\ \overline{r(x)} & \\ \text{باقی‌مانده} & \end{array}$$

$$\boxed{A(x)=B(x)\times q(x)+r(x)}$$

درجهٔ باقی‌مانده یعنی $r(x)$ باید از **درجهٔ مقسوم‌علیه کمتر** باشد.

به‌طور کلی، اگر مقسوم از درجهٔ n و مقسوم‌علیه از درجهٔ m باشد $(n>m)$، آن‌گاه خارج‌قسمت از درجهٔ $n-m$ و باقی‌مانده حداکثر از درجهٔ $m-1$ است.

قضیهٔ تقسیم با مقسوم‌علیه خطی

اگر مقسوم‌علیه از درجهٔ اول باشد، باقی‌مانده از درجهٔ صفر (عدد) است که برای محاسبهٔ آن، کافی است **ریشهٔ مقسوم‌علیه** را در **مقسوم** **جای‌گذاری** کنیم.

$$\begin{array}{c|c} A(x) & ax+b \\ \hline \vdots & q(x) \\ r & \end{array} \qquad A(x)=(ax+b)\times q(x)+r \xrightarrow{x=-\frac{b}{a}} r=A(-\frac{b}{a})$$

ماز

۶- نمودار توابع $y=۳\sin x$ و $y=۴\cos x+a$ در بازهٔ $(۰,\pi)$ بر هم مماس‌اند. a کدام است؟

۱) $-\frac{۷}{۵}$ ۲) $\frac{۷}{۵}$ ۳) ۵ ۴) -۵

پاسخ: گزینهٔ ۳ **(متوسط ـ محاسباتی ـ استاندارد ـ حسابان ۲ صفحهٔ ۹۵ ـ ۱۲۰۴)**

اگر دو نمودار f و g در نقطه به طول $x=\alpha$ بر هم مماس باشند **عرض‌های دو تابع** و **شیب دو تابع در این نقطه برابرند**، یعنی:

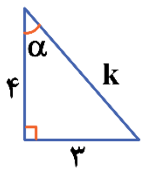
$$f(\alpha)=g(\alpha)$$
$$f'(\alpha)=g'(\alpha)$$

بنابراین:

$$\begin{cases} y=۳\sin x \\ y=۴\cos x+a \end{cases} \Rightarrow ۳\sin\alpha=۴\cos\alpha+a \quad (I)$$

$$\begin{cases} y'=۳\cos x \\ y'=-۴\sin x \end{cases} \Rightarrow ۳\cos\alpha=-۴\sin\alpha \Rightarrow \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=-\frac{۳}{۴} \Rightarrow \tan\alpha=-\frac{۳}{۴}$$

$$\Rightarrow |\tan\alpha|=\frac{۳}{۴} \begin{array}{l} \to \text{مقابل} \\ \to \text{مجاور} \end{array}$$



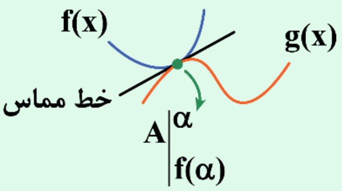
$$\Rightarrow k=۵$$

$$\sin\alpha=+\frac{۳}{۵} \ , \ \cos\alpha=-\frac{۴}{۵}$$

دقت کنید چون $۰<\alpha<\pi$ و $\tan\alpha<۰$ است، پس α در **ناحیهٔ دوم** است. با جای‌گذاری $\sin\alpha$ و $\cos\alpha$ در معادلهٔ (I)، a به‌دست می‌آید:

$$۳\times\frac{۳}{۵}=۴\times\frac{-۴}{۵}+a \Rightarrow a=\frac{۹}{۵}+\frac{۱۶}{۵} \Rightarrow a=۵$$

نمودارهای مماس بر هم



اگر دو منحنی $f(x)$ و $g(x)$ در نقطه‌ای به طول α بر هم مماس باشند:

۱) در نقطهٔ تماس **عرض** دو نقطه با هم **برابر** است. یعنی: $f(\alpha)=g(\alpha)$

۲) **مشتق** توابع f و g در نقطهٔ تماس با هم **برابر** است. یعنی: $f'(\alpha)=g'(\alpha)$

کپسول دوپینگ | (دو تابع مماس بر هم در یک نقطه)

اگر دو تابع $f(x)$ و $g(x)$ در نقطه‌ای به طول α بر هم مماس باشند، در این صورت α **ریشهٔ** دو معادلهٔ حاصل از **برابر قراردادن ضابطهٔ توابع** و **برابر قرار دادن ضابطهٔ مشتقشان** است.

کپسول دوپینگ | (مشتق توابع مثلثاتی)

۱) $y=\sin u \to y'=u'\cos u$

۲) $y=\cos u \to y'=-u'\times\sin u$

۳) $y=\tan u \to y'=u'\times(۱+\tan^۲ u)=\dfrac{u'}{\cos^۲ u}$

۴) $y=\cot u \to y'=-u'\times(۱+\cot^۲ u)=\dfrac{-u'}{\sin^۲ u}$

ماز

۷- اگر $f(x)=\cos^۴ x+\sin^۴ x$ باشد، مقدار $f''(\frac{\pi}{۲۴})$ کدام است؟

۱) ۲ ۲) -۲ ۳) $۲\sqrt{۳}$ ۴) $-۲\sqrt{۳}$

پاسخ: گزینهٔ ۴ (متوسط ـ محاسباتی ـ استاندارد ـ حسابان ۲ صفحهٔ ۱۰۱ ـ ۱۲۰۴)

توجه کنید $\cos^۴ x+\sin^۴ x=۱-\frac{۱}{۲}\sin^۲ ۲x$ می‌باشد، پس:

$$f(x)=۱-\frac{۱}{۲}\sin^۲ ۲x \Rightarrow f'(x)=۰-\frac{۱}{۲}\times ۴\sin ۲x\cos ۲x$$
$$\Rightarrow f'(x)=-\sin ۴x \Rightarrow f''(x)=-۴\cos ۴x$$
$$\Rightarrow f''(\frac{\pi}{۲۴})=-۴\cos\frac{\pi}{۶}=-۴\times\frac{\sqrt{۳}}{۲}=-۲\sqrt{۳}$$

برخی از اتحادهای فرعی مثلثات

$$\cos^۴ x+\sin^۴ x=۱-۲\sin^۲ x\cos^۲ x \Rightarrow \boxed{\cos^۴ x+\sin^۴ x=۱-\frac{۱}{۲}\sin^۲ ۲x}$$

$$\cos^۶ x+\sin^۶ x=۱-۳\sin^۲ x\cos^۲ x \Rightarrow \boxed{\cos^۶ x+\sin^۶ x=۱-\frac{۳}{۴}\sin^۲ ۲x}$$

کپسول دوپینگ | (ساده‌سازی و مشتق‌گیری)

یکی از گام‌ها در مشتق‌گیری، **ساده‌سازی تابع** است. در قدم اول می‌توانیم تابع را ساده کنیم و بعد از آن مشتق بگیریم.

یه نمونهٔ باحال ببین!

مشتق تابع $y=\cos^۴ x-\sin^۴ x$ به‌ازای $x=\frac{\pi}{۱۲}$ چقدر است؟

در گام اول تابع را ساده کرده و بعد از آن مشتق می‌گیریم:

$$y=\cos^۴ x-\sin^۴ x=\underbrace{(\cos^۲ x+\sin^۲ x)}_{۱}\underbrace{(\cos^۲ x-\sin^۲ x)}_{\cos ۲x}=\cos ۲x$$
$$\Rightarrow y'=-۲\sin ۲x \Rightarrow y'(\frac{\pi}{۱۲})=-۲\sin\frac{\pi}{۶}=-۲\times\frac{۱}{۲}=-۱$$

ماز

۸- اگر $f(x)=x+\sqrt[3]{x^{۲}}$ و $\lim\limits_{x\to ۲}\frac{g(x)-g(۲)}{x-۲}=۳$ و g در $\mathbb{R}$ مشتق‌پذیر باشد، حاصل مشتق تابع $y=gof(\frac{۱}{x})$ در نقطهٔ $x=۱$ چقدر است؟

۱) -۵ ۲) ۵ ۳) $\frac{۵}{۳}$ ۴) $-\frac{۵}{۳}$

پاسخ: گزینهٔ ۱ (متوسط ـ ترکیبی ـ استاندارد ـ حسابان ۲ صفحهٔ ۸۰ و ۹۶ ـ ۱۴۰۴)

در قدم اول توجه کنید که $\lim\limits_{x\to ۲}\frac{g(x)-g(۲)}{x-۲}$ همان $g'(۲)$ است که برابر ۳ می‌باشد، پس: $g'(۲)=۳$

همچنین مشتق $f(x)$ برابر است با: $f'(x)=۱+\frac{۲}{۳\sqrt[3]{x}}$

حال مشتق تابع $y=gof(\frac{۱}{x})$ را محاسبه می‌کنیم: $y'=(gof(\frac{۱}{x}))'=(f(\frac{۱}{x}))'\times g'(f(\frac{۱}{x}))$

$$\Rightarrow y'=-\frac{۱}{x^{۲}}f'(\frac{۱}{x})\times g'(f(\frac{۱}{x}))$$

$$\xrightarrow{x=۱} y'=-۱\times f'(۱)\times g'(\underset{\underset{۲}{\downarrow}}{f(۱)})=-f'(۱)\times g'(۲)$$

$$=-(۱+\frac{۲}{۳})\times ۳=-\frac{۵}{۳}\times ۳=-۵$$

تعریف مشتق را همیشه به یاد داشته باشید!

در برخی از سوالات به جای $f'(a)$ عبارت $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ را به ما می‌دهند که همان **تعریف مشتق** در $x=a$، یعنی $f'(a)$ می‌باشد.

یه نمونهٔ باحال ببین!

اگر $f(۲)=۴$، $\lim\limits_{x\to ۲}\frac{f(x)-f(۲)}{x-۲}=-۳$ و $g(x)=x+\sqrt{x}$ باشد، حاصل مشتق تابع $y=(gof)(x)$ در $x=۲$ کدام است؟

توجه کنید $\lim\limits_{x\to ۲}\frac{f(x)-f(۲)}{x-۲}$ همان $f'(۲)$ است که برابر -۳ می‌باشد. $f(۲)=۴\ ,\ f'(۲)=-۳$

$$g(x)=x+\sqrt{x}\Rightarrow g'(x)=۱+\frac{۱}{۲\sqrt{x}}$$

$$y=(gof)(x)\Rightarrow y'=f'(x)\times g'(f(x))\xrightarrow{x=۲} y'(۲)=f'(۲)\times g'(\underset{\underset{۴}{\downarrow}}{f(۲)})=f'(۲)\times g'(۴)=-۳\times\frac{۵}{۴}=-\frac{۱۵}{۴}$$

۹- تابع $f(x)=\frac{\sin x}{1+\cos x}$ مفروض است. اگر برای هر x از دامنهٔ f، رابطهٔ $f'(x)f(x)=kf''(x)$ برقرار باشد، k کدام است؟

۱) $-\frac{1}{4}$ ‏ ۲) $\frac{1}{4}$ ‏ ۳) -1 ‏ ۴) 1

پاسخ: گزینهٔ ۴ (سخت ـ محاسباتی ـ زمان‌بر ـ حسابان ۲ صفحهٔ ۱۰۱ ـ ۱۲۰۴)

روش اول

$$f(x)=\frac{\sin x}{1+\cos x}\Rightarrow f'(x)=\frac{\cos x(1+\cos x)-(-\sin x)\times\sin x}{(1+\cos x)^2}$$

$$\Rightarrow f'(x)=\frac{\cos x+\overbrace{\cos^2 x+\sin^2 x}^{1}}{(1+\cos x)^2}=\frac{1+\cos x}{(1+\cos x)^2}\Rightarrow f'(x)=\frac{1}{1+\cos x}$$

$$\Rightarrow f''(x)=\frac{0\times(1+\cos x)-(-\sin x)\times 1}{(1+\cos x)^2}=\frac{\sin x}{(1+\cos x)^2}$$

حال رابطهٔ $f'(x)f(x)=kf''(x)$ را تشکیل می‌دهیم تا مقدار k به‌دست آید:

$$f'(x)f(x)=kf''(x)\Rightarrow\frac{1}{1+\cos x}\times\frac{\sin x}{1+\cos x}=\frac{k\sin x}{(1+\cos x)^2}\Rightarrow\frac{\sin x}{(1+\cos x)^2}=\frac{k\sin x}{(1+\cos x)^2}\Rightarrow k=1$$

روش دوم

ابتدا f را ساده می‌کنیم و سپس مشتق می‌گیریم:

$$f(x)=\frac{\sin x}{1+\cos x}=\frac{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{2\cos^2\frac{x}{2}}=\frac{\sin\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}}=\tan\frac{x}{2}$$

$$f'(x)=\frac{1}{2}(1+\tan^2\frac{x}{2})$$

$$f''(x)=\frac{1}{2}(0+2\times\frac{1}{2}(\tan\frac{x}{2})(1+\tan^2\frac{x}{2}))=\frac{1}{2}(\tan\frac{x}{2})(1+\tan^2\frac{x}{2})$$

حال از رابطهٔ $f'(x)f(x)=kf''(x)$ داریم:

$$\frac{1}{2}(1+\tan^2\frac{x}{2})(\tan\frac{x}{2})=k\times\frac{1}{2}(\tan\frac{x}{2})(1+\tan^2\frac{x}{2})\Rightarrow k=1$$

یه نکتهٔ طلایی!

$$\boxed{\frac{\sin x}{1+\cos x}=\frac{1-\cos x}{\sin x}=\tan\frac{x}{2}}$$

۱۰- آهنگ متوسط تغییر تابع $f(x)=(x-1)\sqrt{x-1}$ در بازهٔ $[1,a]$ با آهنگ لحظه‌ای تغییر آن در $x=\frac{7}{3}$ برابر است. مقدار a کدام است؟

۱) ۴ ۲) ۳ ۳) ۲ ۴) ۵

پاسخ: گزینهٔ ۱ (متوسط ـ محاسباتی ـ استاندارد ـ حسابان ۲ صفحهٔ ۱۰۴ ـ ۱۲۰۴)

آهنگ متوسط تغییر تابع f در بازهٔ $[1,a]$ برابر است با:

$$\frac{f(a)-f(1)}{a-1}=\frac{(a-1)\sqrt{a-1}-0}{a-1}=\sqrt{a-1}$$

آهنگ لحظه‌ای تغییر تابع در $x=\frac{7}{3}$ همان $f'(\frac{7}{3})$ است، پس:

$$f'(x)=1\times\sqrt{x-1}+\frac{1}{2\sqrt{x-1}}\times(x-1)=\sqrt{x-1}+\frac{x-1}{2\sqrt{x-1}}$$

$$\Rightarrow f'(x)=\sqrt{x-1}+\frac{1}{2}\sqrt{x-1}=\frac{3}{2}\sqrt{x-1}$$

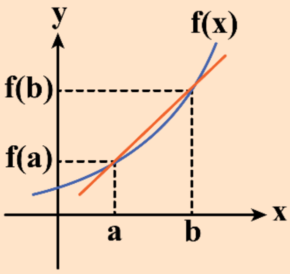
$$\Rightarrow f'(\frac{7}{3})=\frac{3}{2}\sqrt{\frac{7}{3}-1}=\frac{3}{2}\times\frac{2}{\sqrt{3}}=\sqrt{3}$$

پس:

$$f'(\frac{7}{3})=\sqrt{a-1}\Rightarrow\sqrt{3}=\sqrt{a-1}\Rightarrow 3=a-1\Rightarrow a=4$$

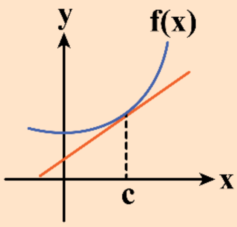
کپسول دوپینگ | (آهنگ تغییرات تابع)

آهنگ متوسط تغییر:



شیب خط قاطع $=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=$ آهنگ متوسط تغییر تابع در بازهٔ $[a,b]$

آهنگ لحظه‌ای تغییر:



شیب خط مماس $=f'(c)=$ آهنگ تغییر لحظه‌ای تابع در $x=c$

یه نمونهٔ باحال ببین!

آهنگ تغییر متوسط تابع $f(x)=x^3-2x$ در بازهٔ $[-1,2]$ چقدر با آهنگ آنی (لحظه‌ای) تابع در $x=1$ فاصله دارد؟

$$\text{آهنگ تغییر متوسط تابع در } [-1,2]=\frac{f(2)-f(-1)}{2-(-1)}=\frac{4-1}{3}=1$$

$$\text{آهنگ تغییر لحظه‌ای تابع در } x=1=f'(1)=3-2=1$$

آهنگ تغییر متوسط تابع در بازهٔ $[-1,2]$ با آهنگ آنی در $x=1$ برابر است.

۱۱- از به‌هم وصل کردن نقاط بحرانی تابع $f(x)=۳\sqrt[۳]{x}+|x|$ در بازهٔ $[-۸,۰]$ یک مثلث تشکیل می‌شود. مساحت این مثلث چقدر است؟

۱) ۹ ۲) ۱۸ ۳) ۸ ۴) ۱۶

پاسخ: گزینهٔ ۱ (متوسط ـ محاسباتی ـ استاندارد ـ حسابان ۲ صفحهٔ ۱۱۷ ـ ۱۲۰۵)

با توجه به این‌که بازهٔ داده شده $[-۸,۰]$ می‌باشد، پس $|x|=-x$ می‌باشد و داریم: $f(x)=۳\sqrt[۳]{x}-x$

$$\Rightarrow f'(x)=۳\times\frac{۱}{۳\sqrt[۳]{x^۲}}-۱=\frac{۱-\sqrt[۳]{x^۲}}{\sqrt[۳]{x^۲}}$$

ریشه‌های صورت و مخرج f' به شرطی‌که در **دامنهٔ تابع** باشند **نقطهٔ بحرانی** محسوب می‌شوند، پس:

ریشه‌های صورت: $۱-\sqrt[۳]{x^۲}=۰\Rightarrow\sqrt[۳]{x^۲}=۱\Rightarrow x^۲=۱\Rightarrow x=\pm۱$

$x=۱$ بحرانی نیست، زیرا در بازهٔ $[-۸,۰]$ قرار ندارد.

ریشهٔ مخرج: $\sqrt[۳]{x^۲}=۰\Rightarrow x^۲=۰\Rightarrow x=۰$

پس نقاط بحرانی تابع $\{-۸,-۱,۰\}$ هستند، در نتیجه:

$$f(۰)=۰$$
$$f(-۱)=-۳-(-۱)=-۲$$
$$f(-۸)=-۶-(-۸)=۲$$

مساحت مثلث ساخته شده برابر است با:

$$S=\frac{۱}{۲}\begin{vmatrix}۱&۱&۱\\۰&-۱&-۸\\۰&-۲&۲\end{vmatrix}=\frac{۱}{۲}|-۲-۱۶|=۹$$

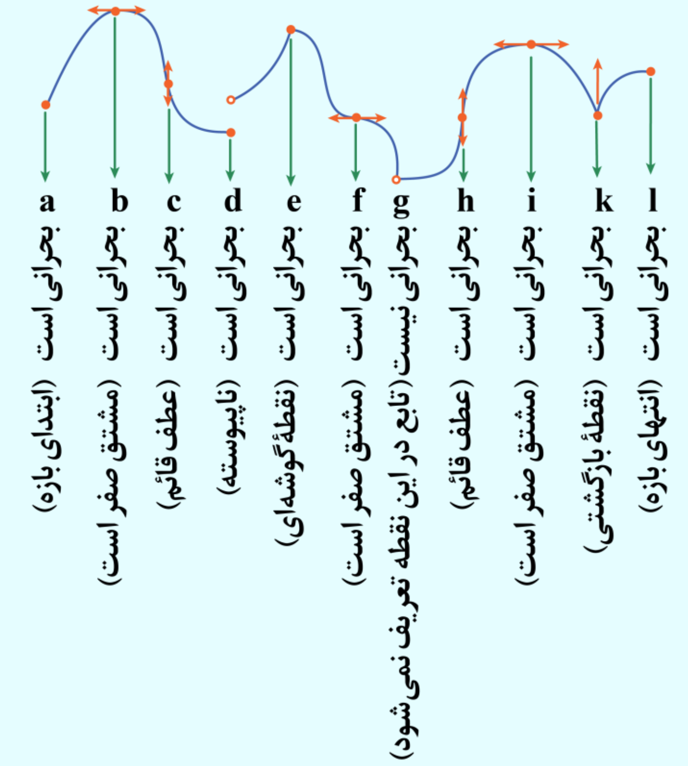
کپسول دوپینگ | (مساحت مثلث با داشتن مختصات سه رأس)

مساحت مثلث ساخته شده با ۳ نقطهٔ $A\begin{vmatrix}x_A\\y_A\end{vmatrix}$، $B\begin{vmatrix}x_B\\y_B\end{vmatrix}$ و $C\begin{vmatrix}x_C\\y_C\end{vmatrix}$ برابر است با:

$$S=\frac{۱}{۲}\begin{vmatrix}۱&۱&۱\\x_A&x_B&x_C\\y_A&y_B&y_C\end{vmatrix}$$

نقاط بحرانی

نقطهٔ $x=c$ را بحرانی می‌گوییم هرگاه این نقطه **عضو دامنهٔ تابع** باشد و **مشتق تابع** در این نقطه **یا صفر باشد** و **یا وجود نداشته باشد**.
با تعریف فوق، تمام نقاطی که در دامنهٔ تابع هستند و تابع در آن نقاط **ناپیوسته** و یا **مشتق‌ناپذیر** (نقاط مشتق‌ناپذیر مانند **زاویه‌دار**، **بازگشتی**، **عطف قائم**) باشد، بحرانی هستند. همچنین نقاطی که در آن‌ها، خط مماس، افقی باشد نیز بحرانی هستند. همچنین اگر نقاط بحرانی تابع $f(x)$ را در بازهٔ $[a,b]$ بخواهند نقاط **ابتدا و انتهای** بازه یعنی $x=a$ و $x=b$ بحرانی هستند.



کپسول دوپینگ | (نقاط بحرانی)

$c \in D_f$ بحرانی $\Leftrightarrow f'(c) = ۰$ **یا** $f'(c)$ وجود نداشته باشد

۱۲- به‌ازای چند مقدار صحیح m تابع $f(x) = \frac{۲x+m}{x+۲m-۳}$ روی بازهٔ $(-\infty, -۳)$ اکیداً صعودی است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) بی‌شمار

پاسخ: گزینهٔ ۱ (متوسط ـ ترکیبی ـ استاندارد ـ حسابان ۲ صفحهٔ ۱۲۱ ـ ۱۲۰۵)

اولاً باید طول مجانب قائم تابع در بازهٔ $(-\infty, -۳)$ نباشد، ببینید:

$$x + ۲m - ۳ = ۰ \Rightarrow x = ۳ - ۲m \Rightarrow ۳ - ۲m \ge -۳ \Rightarrow -۲m \ge -۶ \Rightarrow m \le ۳ \quad (I)$$

از طرفی چون تابع f در بازهٔ $(-\infty, -۳)$ اکیداً صعودی است، باید در این بازه $f'(x) > ۰$ باشد، ببینید:

$$f'(x) = \frac{۲(x+۲m-۳)-(۲x+m)}{(x+۲m-۳)^۲} = \frac{۳m-۶}{(x+۲m-۳)^۲} > ۰ \Rightarrow ۳m - ۶ > ۰ \Rightarrow m > ۲ \quad (II)$$

از طرفی اگر در تابع هموگرافیک نسبت ضرایب x با **نسبت اعداد ثابت** برابر باشد **تابع ثابت** بوده و دیگر اکیداً صعودی **نخواهد** بود، پس:

$$\frac{۲}{۱} \ne \frac{m}{۲m-۳} \Rightarrow ۴m - ۶ \ne m \Rightarrow m \ne ۲ \quad (III)$$

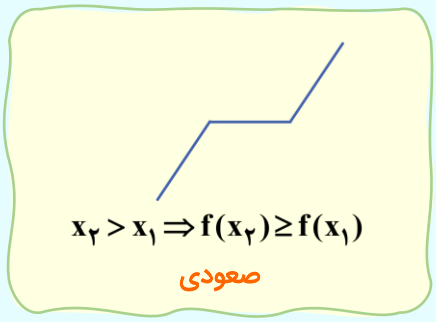
از (I)، (II) و (III) نتیجه می‌گیریم که $۲ < m \le ۳$ می‌باشد پس تنها مقدار صحیح m برابر ۳ می‌باشد. بنابراین یک مقدار صحیح برای m یافت می‌شود.

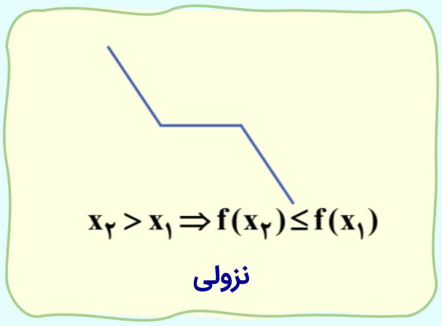
دام تستی!

اگر با به‌دست آوردن مقدار m سریع تست را بزنید و به این‌که تعداد مقادیر صحیح m را خواسته توجه نکنید در دام گزینهٔ ۳ می‌افتید.

یکنوایی

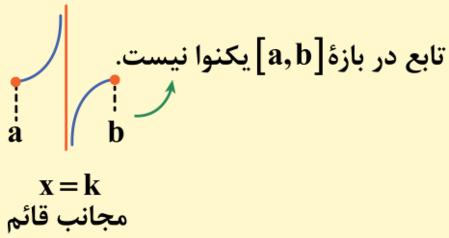
تابع $f(x)$ را **صعودی** می‌گوییم هرگاه با **افزایش x**، **y افزایش** یابد **یا ثابت** بماند، همچنین تابع $f(x)$ را **نزولی** می‌گوییم هرگاه با **افزایش x**، **y کاهش** یابد **یا ثابت** بماند.





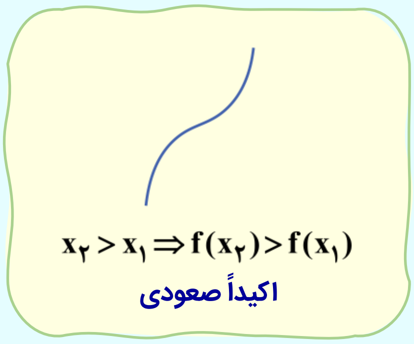
تشخیص یکنوایی با استفاده از مشتق

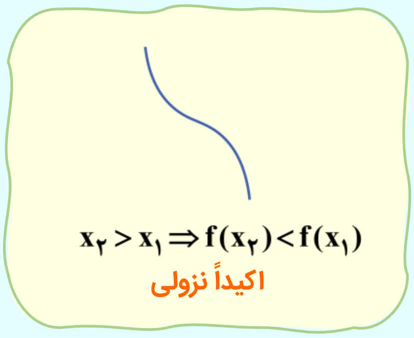
برای تشخیص **یکنوایی تابع مشتق‌پذیر** $f(x)$، کافی است از تابع $f(x)$ مشتق بگیریم، در هر بازه‌ای که $f'(x) \geq 0$ باشد تابع $f(x)$ **صعودی** و در هر بازه‌ای که $f'(x) \leq 0$ باشد، تابع $f(x)$ **نزولی** است. **(توجه داریم که مجانب قائم درون بازه وجود نداشته باشد.)**



یکنوایی اکید

تابع $f(x)$ را **اکیداً صعودی** می‌گوییم هرگاه با **افزایش x**، **y افزایش** یابد، همچنین تابع $f(x)$ را **اکیداً نزولی** می‌گوییم هرگاه با **افزایش x**، **y کاهش** یابد.



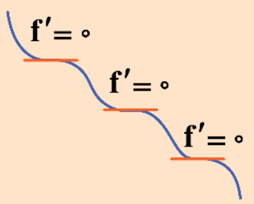


کپسول دوپینگ | (تشخیص یکنوایی اکید با استفاده از مشتق)

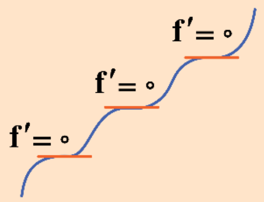
اگر تابع مشتق‌پذیر $f(x)$ **اکیداً صعودی** باشد آن‌گاه $f'(x) > 0$ است. البته می‌تواند در نقاطی هم $f'(x)$ برابر **صفر** شود ولی **نباید** این نقاط **روی یک خط افقی** باشند.

همچنین اگر $f(x)$ **اکیداً نزولی** باشد آن‌گاه $f'(x) < 0$ است. البته می‌تواند در نقاطی هم $f'(x)$ برابر **صفر** شود ولی **نباید** این نقاط **روی یک خط افقی** باشند.

شرط نبود مجانب قائم در بازه را فراموش نکنید.



تابع اکیداً نزولی

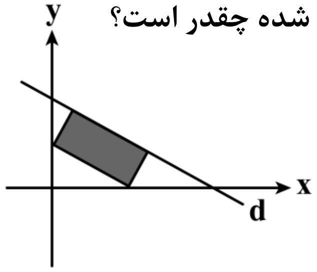


تابع اکیداً صعودی

نکته!

در برخی از توابع مانند **براکتی**، **چندضابطه‌ای** و **قدرمطلق** بهتر است **برای تشخیص یکنوایی** تابع، نمودار آن را **رسم** کنیم.

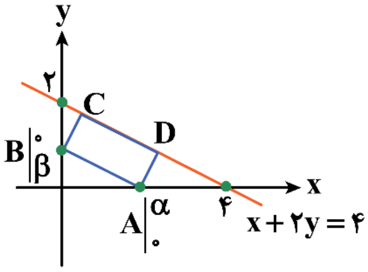
۱۳- خط d به معادلهٔ $x+2y=4$ به‌صورت مقابل مفروض است. بیشترین مساحت مستطیل رنگ شده چقدر است؟



۱) ۱/۵
۲) ۲
۳) ۳
۴) ۲/۵

پاسخ: گزینهٔ ۲ (سخت ـ محاسباتی ـ زمان‌بر ـ حسابان ۲ صفحهٔ ۱۲۶ ـ ۱۲۰۵)

در قدم اول دقت کنید چون شکل رنگ شده مستطیل است، پس فاصلهٔ نقاط A و B از خط $x+2y=4$ برابرند، یعنی:



$$BC = AD \Rightarrow \frac{|0+2\beta-4|}{\sqrt{1^2+2^2}} = \frac{|\alpha-4|}{\sqrt{1^2+2^2}}$$

$$\xrightarrow[\beta<2 \Rightarrow |2\beta-4| = 4-2\beta]{\alpha<4 \Rightarrow |\alpha-4| = 4-\alpha} 4-2\beta = 4-\alpha \Rightarrow \alpha = 2\beta$$

از طرفی:

$$AB = \sqrt{\alpha^2+\beta^2} = \sqrt{(2\beta)^2+\beta^2} = \sqrt{5}\beta$$

$$BC = \frac{4-2\beta}{\sqrt{5}}$$

حال مساحت مستطیل را به‌دست می‌آوریم:

$$S = AB \times BC = \frac{4-2\beta}{\sqrt{5}} \times \sqrt{5}\beta \Rightarrow S = 4\beta - 2\beta^2$$

$$S' = 4-4\beta = 0 \Rightarrow \beta = 1 \Rightarrow S_{max} = 4-2 = 2$$

بهینه‌سازی

در مسائل مربوط به بهینه‌سازی به دنبال محاسبهٔ **ماکزیمم یا مینیمم عبارتی** هستیم که به آن **تابع هدف** می‌گوییم.
کمترین فاصلهٔ یک نقطه از یک منحنی، حجم بزرگ‌ترین استوانهٔ محاط در کره، مساحت بزرگ‌ترین مستطیل محدود به یک منحنی و محورهای مختصات و... نمونه‌هایی از مسائل بهینه‌سازی هستند.

کپسول دوپینگ | (حل مسائل بهینه‌سازی)

در حل مسائلی که به دنبال کمینه‌کردن یا بیشینه کردن یک کمیت هستیم ابتدا باید با استفاده از اطلاعات مسئله یک تابع بسازیم. گاهی این تابع از ابتدا یک متغیره است و گاهی دو متغیره یا بیشتر. وقتی که تابع به‌دست آمده یک متغیره نیست باید با استفاده از روابط موجود بین دو متغیر، تابع را **به تابعی یک متغیره تبدیل** کنیم و بعد برای محاسبهٔ ماکزیمم یا مینیمم مقدار آن، مشتق بگیریم و بعد نقاط بحرانی تابع را بررسی کنیم تا خواستهٔ سؤال محقق شود.

۱۴- ماکزیمم تابع $y=16\sqrt[3]{x}\,|x-a|$ در بازهٔ $[0,a]$ برابر ۳ است. a کدام است؟

۱) $\frac{3}{2}$ ۲) ۲ ۳) ۱ ۴) $\frac{1}{2}$

پاسخ: گزینهٔ ۴ (متوسط ـ محاسباتی ـ زمان‌بر ـ حسابان ۲ صفحهٔ ۱۱۷ و ۱۱۸ ـ ۱۲۰۵)

در ابتدا دقت کنید که در بازهٔ $[0,a]$ عبارت درون قدرمطلق یعنی $x-a$ **نامثبت** می‌شود، پس:

$$|x-a|=-(x-a)$$

$$y=-16\sqrt[3]{x}(x-a)$$

$$\Rightarrow y'=-16\left(\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}\times(x-a)+1\times\sqrt[3]{x}\right)=-16\times\frac{x-a+3x}{3\sqrt[3]{x^2}}$$

$$\Rightarrow y'=-16\times\frac{4x-a}{3\sqrt[3]{x^2}}$$

ریشه‌های صورت و مخرج y' در صورتی‌که **در بازهٔ** $[0,a]$ باشند، **بحرانی** محسوب می‌شوند.

$$4x-a=0\Rightarrow x=\frac{a}{4}\checkmark$$

$$\sqrt[3]{x^2}=0\Rightarrow x^2=0\Rightarrow x=0\checkmark$$

پس $\left\{0,\frac{a}{4},a\right\}$ نقاط بحرانی تابع **در بازهٔ** $[0,a]$ هستند. حال عرض نقاط بحرانی را به‌دست می‌آوریم تا اکسترمم‌های مطلق تابع پیدا شوند.

$$f(0)=f(a)=0$$

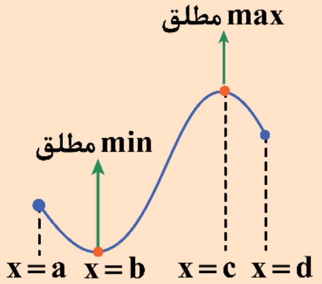
$$f\left(\frac{a}{4}\right)=16\sqrt[3]{\frac{a}{4}}\times\frac{3a}{4}=3\Rightarrow 4a\sqrt[3]{\frac{a}{4}}=1$$

$$\xrightarrow{\text{توان ۳}}64a^3\times\frac{a}{4}=1\Rightarrow 16a^4=1\Rightarrow a^4=\frac{1}{16}$$

$$\xrightarrow{a>0}a=\frac{1}{2}$$

کپسول دوپینگ | (نقاط اکسترمم مطلق)

برای به‌دست آوردن نقاط max و min مطلق تابع پیوستهٔ $f(x)$ در بازهٔ $[a,d]$، کافی است **نقاط بحرانی** تابع $f(x)$ را در این بازه به‌دست آوریم و **عرض نقاط بحرانی** که شامل $x=a$ و $x=d$ نیز می‌شود را محاسبه کرده و با هم **مقایسه** کنیم هر کدام از همه بیشتر بود max مطلق و هر کدام از همه کمتر بود min مطلق است.



یه نمونهٔ باحال ببین!

نقاط اکسترمم مطلق تابع $f(x)=۲x^۳+۳x^۲-۱۲x+۱$ در بازهٔ $[-۳,۲]$ را تعیین کنید.

$$f'(x)=۶x^۲+۶x-۱۲=۰ \Rightarrow \begin{cases} x_۱=۱ \\ x_۲=\dfrac{-۱۲}{۶}=-۲ \end{cases}$$

$$\text{نقاط بحرانی}=\{-۳,-۲,۱,۲\}$$

$$\begin{aligned} &f(-۳)=۱۰ \\ &f(-۲)=۲۱ \rightarrow \max \text{ مطلق} \\ &f(۱)=-۶ \rightarrow \min \text{ مطلق} \\ &f(۲)=۵ \end{aligned}$$

ماز

۱۵- تابع $y=۳x^۲-x|x^۲-۶x|$ چند نقطهٔ اکسترمم نسبی دارد؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

پاسخ: گزینهٔ ۲ (سخت ـ محاسباتی ـ زمان‌بر ـ حسابان ۲ صفحهٔ ۱۲۳ ـ ۱۲۰۵)

تابع f را به‌صورت چندضابطه‌ای می‌نویسیم، برای آن ابتدا **قدرمطلق** را **تعیین علامت** می‌کنیم:

x		۰		۶	
$x^۲-۶x$	+	۰	−	۰	+

$$\Rightarrow f(x)=\begin{cases} ۳x^۲+x(x^۲-۶x)=x^۳-۳x^۲ & ۰\le x\le ۶ \\ ۳x^۲-x(x^۲-۶x)=۹x^۲-x^۳ & x<۰ \cup x>۶ \end{cases}$$

$$\Rightarrow f'(x)=\begin{cases} ۰ & x=۰ \\ ۳x^۲-۶x & ۰<x<۶ \\ ۱۸x-۳x^۲ & x<۰\cup x>۶ \end{cases}$$

حال f' را **تعیین علامت** می‌کنیم تا نقاط اکسترمم نسبی مشخص شوند.

x		۰		۲		۶	
$f'(x)$	−	۰	−	۰	+	‖	−
	$y'=۱۸x-۳x^۲$		$y'=۳x^۲-۶x$				$y'=۱۸x-۳x^۲$

دقت کنید علامت f' در $x=۲$ و $x=۶$ تغییر می‌کند و تابع ۲ نقطهٔ اکسترمم نسبی دارد. (در $x=۶$ تابع پیوسته و مشتق‌ناپذیر است اما $x=۶$ نقطهٔ max نسبی محسوب می‌شود.)

حواست باشه!

برای تعیین علامت f'، ابتدا هر کدام از ضابطه‌ها در f' را تعیین علامت کرده و سپس هر دو ضابطه را به یک جدول منتقل می‌کنیم.

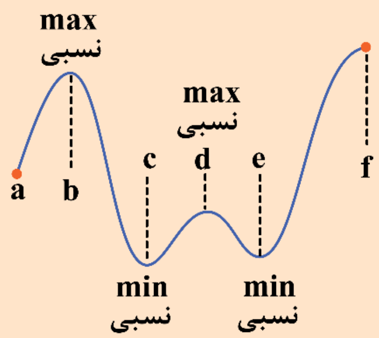
کپسول دوپینگ | (اکسترمم نسبی)

تابع $f(x)$ در $x=c$ **ماکزیمم نسبی** دارد، اگر یک همسایگی شامل نقطهٔ c (مانند (a,b)) موجود باشد که برای هر $x\in(a,b)$، $f(c)\ge f(x)$ باشد.

تابع $f(x)$ در $x=c$ **مینیمم نسبی** دارد، اگر یک همسایگی شامل نقطهٔ c (مانند (a,b)) موجود باشد که برای $x \in (a,b)$ ، $f(c) \le f(x)$ باشد.

نقاط ابتدا و انتهای بازه **نمی‌توانند** اکسترمم نسبی باشند.

دقت کنید که تابع در نقاط اکسترمم **لزوماً مشتق‌پذیر نیست**.



تعیین نقاط اکسترمم نسبی: کافی است از تابع پیوستهٔ $f(x)$ مشتق گرفته و بعد مشتق را تعیین علامت کنیم. اگر در یک نقطه علامت مشتق از چپ به راست از **مثبت به منفی** تغییر کند نقطهٔ **max نسبی** بوده و اگر علامت مشتق از چپ به راست از **منفی به مثبت** تغییر کند نقطهٔ **min نسبی** می‌باشد. اگر علامت مشتق در یک نقطه **تغییر نکند**، آن نقطه، **اکسترمم نسبی نیست**.

یه نمونهٔ باحال ببین!

اکسترمم‌های نسبی تابع $y=x^3-6x^2+9x-1$ را به‌دست آورید.

$y=x^3-6x^2+9x-1 \Rightarrow y'=3x^2-12x+9$

x	$-\infty$		$x=1$		$x=3$		$+\infty$
y'		+	0	−	0	+	
			max نسبی		min نسبی		

$A\begin{vmatrix}1\\3\end{vmatrix}$: ماکزیمم نسبی

$B\begin{vmatrix}3\\-1\end{vmatrix}$: مینیمم نسبی

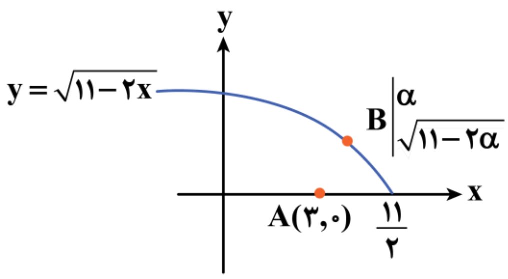
ماز

۱۶- کمترین فاصلهٔ نقطهٔ $A(3,0)$ از نقاط منحنی $y=\sqrt{11-2x}$ چقدر است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۲/۵ ۴) ۲/۲۵

پاسخ: گزینهٔ ۲ (متوسط ـ مفهومی ـ استاندارد) ـ حسابان ۲ صفحهٔ ۱۱۸ و ۱۲۶ ـ ۱۲۰۵)

شکل فرضی مقابل را در نظر بگیرید:



فرض کنید نقطهٔ $B\begin{vmatrix}\alpha\\\sqrt{11-2\alpha}\end{vmatrix}$ کمترین فاصله از A را دارد. بنابراین:

$$AB=\sqrt{(\alpha-3)^2+(\sqrt{11-2\alpha}-0)^2} \Rightarrow AB=\sqrt{\alpha^2-6\alpha+9+11-2\alpha} \Rightarrow AB=\sqrt{\alpha^2-8\alpha+20}$$

چون دنبال کمترین فاصله $(\min_{AB})$ هستیم. پس، از تابع به‌دست آمده برای طول AB **برحسب α** مشتق می‌گیریم:

$$(AB)' = \frac{۲\alpha - ۸}{۲\sqrt{\alpha^۲ - ۸\alpha + ۲۰}} = ۰ \Rightarrow \alpha = ۴$$

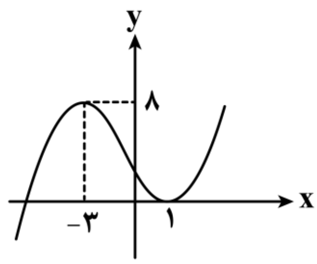
$$\min(AB) = \sqrt{۴^۲ - ۸\times ۴ + ۲۰} = \sqrt{۴} = ۲$$

توجه!

دقت کنید که مخرج مشتق ریشه ندارد. در غیر این صورت باید برای تعیین نقطهٔ مینیمم نسبی، مشتق را تعیین علامت می‌کردیم.

ماز

۱۷- نمودار تابع $f(x) = a(x-\alpha)^۲(x-\beta)$ به‌صورت مقابل است. مقدار $a\beta$ کدام است؟



۱) $-۱/۲۵$
۲) $-۱/۵$
۳) $-۱/۷۵$
۴) -۲

پاسخ: گزینهٔ ۱ (متوسط ـ مفهومی ـ استاندارد) ـ حسابان ۲ صفحهٔ ۱۳۹ و ۱۴۰ ـ ۱۲۰۵)

چون در ضابطهٔ تابع، $(x-\alpha)^۲$ داریم پس α **یکی از ریشه‌های** (صفرهای) تابع f است که در اطراف آن **علامت تابع عوض نمی‌شود** که با توجه به نمودار می‌توان گفت $\alpha = ۱$ است.

از طرفی، $f(-۳) = ۸$ و $f'(-۳) = ۰$ می‌باشد، پس:

$$f(x) = a(x-۱)^۲(x-\beta)$$

$$f'(x) = a\left(۲(x-۱)(x-\beta) + ۱(x-۱)^۲\right)$$

$$\Rightarrow f'(-۳) = a\left(-۸(-۳-\beta) + (-۴)^۲\right) = ۰$$

$$\Rightarrow a(۲۴ + ۸\beta + ۱۶) = ۰ \Rightarrow ۸\beta + ۴۰ = ۰ \Rightarrow \beta = -۵$$

$$f(x) = a(x-۱)^۲(x+۵) \Rightarrow f(-۳) = ۳۲a = ۸$$

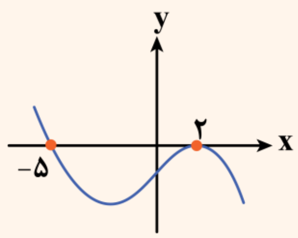
$$\Rightarrow a = \frac{۱}{۴} \Rightarrow a\beta = -\frac{۵}{۴} = -۱/۲۵$$

کپسول دوپینگ | (ریشه‌های مضاعف تابع)

اگر α و β صفرهای تابع چندجمله‌ای $f(x)$ باشند $(f(\alpha) = f(\beta) = ۰)$ در صورتی که α **ریشهٔ مضاعف** باشد یعنی تابع در اطراف $x = \alpha$ **تغییرعلامت ندهد** در این صورت در ضابطهٔ تجزیه شدهٔ تابع f، **عامل $(x-\alpha)^۲$** دیده می‌شود. همچنین اگر β **ریشهٔ ساده** باشد یعنی تابع در اطراف $x = \beta$ **تغییرعلامت بدهد**، در این صورت در ضابطهٔ تجزیه شدهٔ تابع f، **عامل $(x-\beta)$** دیده می‌شود.

یه نمونهٔ باحال ببین!

می‌توان گفت اگر نمودار مقابل مربوط به یک تابع درجهٔ سوم باشد، ضابطهٔ آن به‌صورت $f(x) = k(x-۲)^۲(x+۵)$ می‌باشد.



از توابع چندجمله‌ای یادت باشه!!

در نقاط اکسترمم نسبی در **توابع چندجمله‌ای**، **مشتق** برابر **صفر** می‌شود.

ماز

۱۸- تابع $f(x)=(x+a)(x^{۲}+x+b)$ در نقاطی به طول صفر و -۲ دارای اکسترمم نسبی است. عرض نقطهٔ عطف این تابع کدام است؟

۱) ۶ ۲) -۲ ۳) -۳ ۴) ۴

پاسخ: گزینهٔ ۲ (سخت ـ محاسباتی ـ زمان‌بر ـ حسابان ۲ صفحهٔ ۱۳۶ ـ ۱۲۰۵)

تابع f چندجمله‌ای (درجهٔ سوم) است پس در نقاط اکسترمم نسبی آن، مشتق **صفر** می‌شود، بنابراین:

$$f'(۰)=۰\ ,\ f'(-۲)=۰$$

$$f'(x)=۱(x^{۲}+x+b)+(۲x+۱)(x+a)$$
$$\Rightarrow f'(۰)=b+a=۰$$
$$\Rightarrow f'(-۲)=(۲+b)+(-۳)(-۲+a)=۰\Rightarrow -۳a+b=-۸$$

بنابراین:

$$\begin{cases}a+b=۰\\-۳a+b=-۸\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}b=-۲\\a=۲\end{cases}$$

در نتیجه $f(x)=(x+۲)(x^{۲}+x-۲)$ می‌باشد. کافی است **عرض نقاط اکسترمم نسبی** را تعیین کنیم:

$$f(۰)=-۴$$
$$f(-۲)=۰$$

چون **در تابع درجهٔ سوم** نقطهٔ عطف و نقاط اکسترمم نسبی **روی یک پاره‌خط** واقع بوده و **نقطهٔ عطف** دقیقاً **بین نقاط اکسترمم نسبی** قرار می‌گیرد، پس:

$$y_{\text{عطف}}=\frac{y_{max}+y_{min}}{۲}=\frac{-۴}{۲}=-۲$$

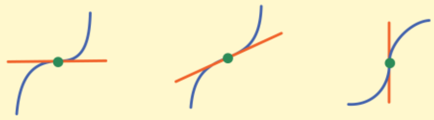
نقطهٔ عطف

نقطهٔ $(c,f(c))$ را نقطهٔ عطف تابع $f(x)$ می‌گوییم هرگاه:

۱) تابع در این نقطه **پیوسته** باشد.
۲) در این نقطه بتوان **خط مماس بر تابع** رسم کرد. (خط مماس از تابع می‌گذرد.)
۳) **جهت تقعر** تابع در این نقطه **عوض** شود.

 x = a	 x = a	 x = a	 x = a
عطف نیست، زیرا نمی‌توان در این نقطه یک خط مماس بر منحنی رسم کرد.	عطف است.	عطف نیست، زیرا تقعر تابع در این نقطه عوض نشده است.	عطف نیست، زیرا تابع در این نقطه پیوسته نیست.

انواع نقطهٔ عطف



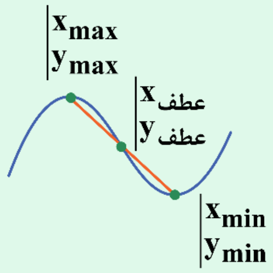
عطف قائم	عطف مایل	عطف افقی
$f'(c)=\infty$	$f'(c)\neq 0$	$f'(c)=0$

مشتق دوم در نقطهٔ عطف یا **صفر** است یا **وجود ندارد**. برای به‌دست آوردن نقطهٔ عطف، مشتق دوم را تعیین علامت می‌کنیم. اگر **علامت** مشتق دوم در نقطه‌ای **عوض شود**، آن نقطه عطف است در صورتی که **شرایط نقطهٔ عطف** در آن نقطه رعایت شود.

نقطهٔ عطف در توابع درجه ۳

در توابع درجهٔ سوم که دارای max و min نسبی هستند، **نقطهٔ عطف دقیقاً وسط max و min** قرار می‌گیرد.

$$\begin{cases} x_{\text{عطف}} = \dfrac{x_{min}+x_{max}}{2} \\ y_{\text{عطف}} = \dfrac{y_{min}+y_{max}}{2} \end{cases}$$



کپسول دوپینگ | (نقطهٔ عطف)

اگر مشتق دوم در نقطه‌ای **صفر** شود یا **وجود نداشته باشد**، و **علامت مشتق دوم** در این نقطه **عوض شود**، به‌شرط این‌که تابع در این نقطه **پیوسته** و **دارای خط مماس** باشد، این نقطه، نقطهٔ عطف تابع است.

در **تابع درجه ۳** نقطه عطف **نقطهٔ وسط** نقاط ماکزیمم و مینیمم نسبی است.

۱۹- اگر $(-1,2)$ بزرگ‌ترین بازه‌ای باشد که نمودار تابع $f(x)=-x^3+ax^2+bx-1$ در آن بازه صعودی و دارای تقعر رو به پایین باشد، مقدار $2a+b$ کدام است؟

۱) ۲۰ ۲) ۱۶ ۳) ۱۵ ۴) ۱۸

پاسخ: گزینهٔ ۴ (متوسط ـ ترکیبی ـ استاندارد ـ حسابان ۲ صفحهٔ ۱۲۸ و ۱۲۹ ـ ۱۲۰۵)

کافی است مشتق اول و مشتق دوم تابع را تعیین علامت کنیم. ببینید:

$$f'(x)=-3x^2+2ax+b$$
$$f''(x)=-6x+2a$$

قطعاً f' دارای ۲ ریشهٔ متمایز است و f'' هم که قطعاً **یک ریشه** دارد که آن ریشه **طول نقطهٔ عطف** تابع است.

از طرفی در تابع درجه سوم نقطهٔ عطف همواره **بین** نقاط اکسترمم قرار دارد.

x		x_1		x_2		x_3	
$f'(x)=-3x^2+2ax+b$	$-$	۰	$+$		$+$	۰	$-$
$f''(x)=-6x+2a$	$+$		$+$	۰	$-$		$-$
		min نسبی		عطف		max نسبی	

با توجه به جدول تعیین علامت، در بازهٔ (x_2,x_3) **تقعر تابع رو به پایین** و **تابع صعودی** است، پس:

$$(x_2,x_3)=(-1,2)\Rightarrow\begin{cases}x_2=-1\\x_3=2\end{cases}$$

در نتیجه طول نقطهٔ عطف $x=-1$ و طول نقطهٔ ماکزیمم نسبی $x=2$ است، در نتیجه $f''(-1)=0$ و $f'(2)=0$ می‌باشد و داریم:

$$f''(-1)=-6(-1)+2a=0\Rightarrow a=-3$$

$$f'(2)=-12+4a+b=0\xrightarrow{a=-3}b=24$$

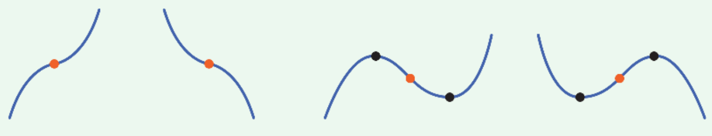
پس $2a+b$ برابر است با:

$$2a+b=-6+24=18$$

رفع ابهام!

از کجا فهمیدیم جدول تعیین علامت به‌صورت بالا پر می‌شود تا بزرگ‌ترین بازه‌ای که تابع درجه ۳ در آن صعودی و دارای تقعر رو به پایین است، به شکل (a,b) باشد؟

چون می‌دانیم تابع درجه ۳ به یکی از ۴ شکل زیر است:



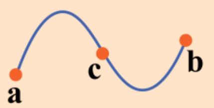
و به‌وضوح فقط وقتی به فرم چهارم باشد چنین بازه‌ای وجود دارد.

کپسول دوپینگ | (جهت تقعر تابع)

اگر تابع $f(x)$ در بازهٔ (a,b) مشتق‌پذیر باشد، در این صورت برای تعیین وضعیت تقعر تابع در این فاصله، مشتق دوم را محاسبه و تعیین علامت می‌کنیم. در هر فاصله‌ای که تقعر تابع $f(x)$ رو به **بالا** باشد، $f''(x)>0$ و در هر فاصله‌ای که تقعر تابع $f(x)$ رو به **پایین** باشد، $f''(x)<0$ است.

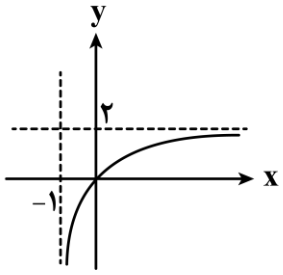
$f''(x)<0 \Rightarrow$ تقعر تابع در بازهٔ (a,c) رو به پایین است.

$f''(x)>0 \Rightarrow$ تقعر تابع در بازهٔ (c,b) رو به بالا است.



۲۰- قسمتی از نمودار تابع هموگرافیک f به‌صورت مقابل است. مجموع طول نقاط اکسترمم نسبی تابع $y=\frac{x+2}{f(x)}$ کدام است؟

۱) -1
۲) 2
۳) صفر
۴) -2



پاسخ: گزینهٔ ۳ (متوسط ـ ترکیبی ـ استاندارد ـ حسابان ۲ صفحهٔ ۱۴۲ و ۱۴۴ ـ ۱۲۰۵)

ضابطهٔ تابع هموگرافیک f را می‌نویسیم:

$$f(x)=\frac{ax+b}{cx+d}\Rightarrow f(0)=0\Rightarrow b=0$$

$x=-۱$ مجانب قائم تابع است، پس مخرج را صفر می‌کند.

$$c(-۱)+d=۰\Rightarrow -c+d=۰\Rightarrow c=d$$

از طرفی $y=۲$ مجانب افقی تابع است، پس:

$$\lim_{x\to\infty} f(x)=\lim_{x\to\infty}\frac{ax}{cx+d}=\frac{a}{c}=۲\Rightarrow a=۲c$$

پس: $f(x)=\dfrac{۲cx}{cx+c}=\dfrac{۲x}{x+۱}$ می‌باشد، در نتیجه:

$$y=\frac{x+۲}{f(x)}\Rightarrow y=\frac{x+۲}{\frac{۲x}{x+۱}}\Rightarrow y=\frac{(x+۱)(x+۲)}{۲x}$$

در دامنهٔ f قرار ندارد

$$y'=\frac{(۲x+۳)\times ۲x-۲(x^۲+۳x+۲)}{۴x^۲}\Rightarrow y'=\frac{۲x^۲-۴}{۴x^۲}\Rightarrow D=\mathbb{R}-\{-۱,۰\}$$

		$-\sqrt{۲}$		$\sqrt{۲}$	
y'	$+$	۰	$-$	۰	$+$
	↗		↘		↗

$x=\sqrt{۲}$ و $x=-\sqrt{۲}$، با توجه به جدول طول نقاط اکسترمم نسبی می‌باشند و مجموع آن‌ها صفر است.

تابع هموگرافیک

تابع $f(x)=\dfrac{ax+b}{cx+d}$ با شرط $\dfrac{b}{d}\neq\dfrac{a}{c}$ و $c\neq ۰$ را تابع هموگرافیک می‌گوییم.

برای رسم نمودار تابع، **مجانب‌های افقی و قائم** را به‌دست می‌آوریم و با مشتق‌گیری، **وضعیت یکنوایی** تابع را مشخص می‌کنیم. برای رسم دقیق‌تر، از نقاط کمکی نیز می‌توانیم استفاده کنیم.

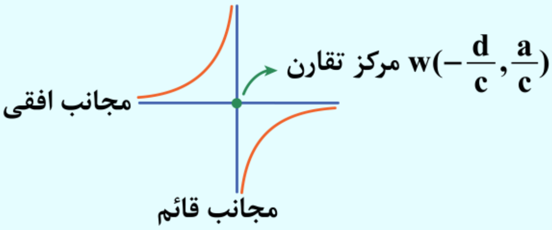
$$f(x)=\frac{ax+b}{cx+d}\Rightarrow\begin{cases} cx+d=۰\Rightarrow x=-\dfrac{d}{c} & \text{مجانب قائم}\\[2ex] y=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{ax+b}{cx+d}\Rightarrow y=\dfrac{a}{c} & \text{مجانب افقی}\end{cases}$$

با مشتق‌گیری وضعیت یکنوایی تابع هموگرافیک مشخص می‌شود. اگر مشتق همواره مثبت بود، تابع در بازه‌هایی که تعریف شده اکیداً صعودی خواهد بود و اگر علامت مشتق همواره منفی بود، تابع در بازه‌هایی که تعریف شده اکیداً نزولی خواهد بود.

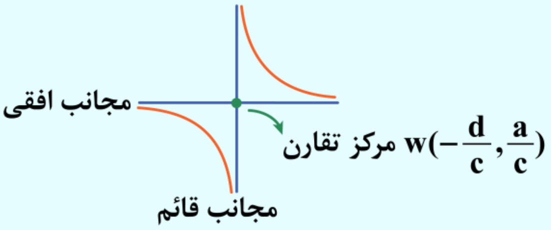
$$f'(x)=\frac{a(cx+d)-c(ax+b)}{(cx+d)^۲}$$

$$f'(x)=\frac{ad-bc}{(cx+d)^۲}$$

۱) نمودار تابع هموگرافیک با مشتق مثبت:

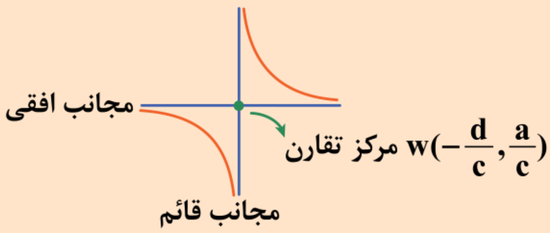


۲) نمودار تابع هموگرافیک با مشتق منفی:

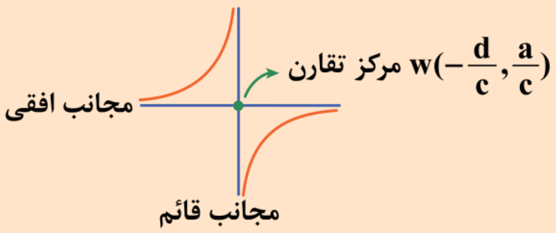


کپسول دوپینگ | (نمودار تابع هموگرافیک)

در تابع هموگرافیک $f(x)=\frac{ax+b}{cx+d}$ با شرط $\frac{b}{d}\neq\frac{a}{c}$ و $c\neq 0$، مرکز تقارن نمودار **محل برخورد مجانب‌هاست**. و نمودار آن به‌صورت زیر معلوم می‌شود:



در هر بازهٔ پیوستگی نزولی ⇔ مشتق منفی



در هر بازهٔ پیوستگی صعودی ⇔ مشتق مثبت

داشبورد دوپینگ

کتاب	فصل	وضعیت این آزمون	سطح دشواری این آزمون	آخرین وضعیت کنکور ۱۴۰۴
هندسه ۳	۱	۵ سؤال مشابه کنکور، ۳ سؤال با ایدهٔ نو و ۳ سؤال با الهام از کتاب درسی طرح شده است.	★★★★	دو سؤال با الهام از کنکورهای گذشته
گسسته	۲	۳ سؤال مشابه کنکور، ۳ سؤال با ایدهٔ نو و ۴ سؤال با الهام از کتاب درسی طرح شده است.	★★★★	یک سؤال سخت و با ایدهٔ نو

توصیه‌های دوپینگ

اگر زمان کمی دارید...

در درس هندسه ۳ تمرکزتان را روی مبحث «دترمینان» و «ماتریس وارون» و در درس گسسته تمرکزتان را روی مبحث «احاطه‌گری» بگذارید.

اگر دنبال درس‌های آسان‌تر هستید...

پس از حل مسائل کتاب درسی، به حل سؤالات کنکور ۱۰ سال اخیر بپردازید.

پیش‌بینی طراح...

در درس هندسه ۳ یک سؤال از «مبحث دترمینان» و در درس ریاضیات گسسته یک سؤال از مبحث «احاطه‌گری» می‌توانند جزء کاندیدهای اصلی سؤالات کنکور ۱۴۰۵ باشند.

سخن مسئول درس

سلام به همهٔ دانش‌آموزان عزیز رشتهٔ ریاضی

مباحث مطرح‌شده در این آزمون معمولاً در مجموع حدود ۲ تا ۳ سؤال از کنکور سراسری را به خود اختصاص می‌دهند؛ به همین دلیل مطالعهٔ هدفمند و تسلط مفهومی بر آن‌ها می‌تواند نقش مهمی در کسب درصد بهتر داشته باشد. در درس هندسه ۳ ، پیشنهاد می‌شود توجه ویژه‌ای به مباحث **«دترمینان»** و **«ماتریس وارون»** داشته باشید. این بخش‌ها از موضوعات مهم و پرتکرار هستند و طراحان کنکور معمولاً سؤالات متنوعی را از این مباحث مطرح می‌کنند. تسلط بر روش‌های محاسباتی و درک مفهومی این بخش‌ها، سرعت و دقت شما را در جلسهٔ آزمون افزایش خواهد داد. در درس ریاضیات گسسته نیز در سال‌های اخیر توجه طراحان بیش از گذشته به مبحث **«احاطه‌گری»** جلب شده است. بنابراین توصیه می‌شود این مبحث را به‌صورت دقیق و مفهومی مطالعه کنید و انواع تیپ‌سؤال‌های مرتبط با آن را مورد بررسی قرار دهید. برای آمادگی بیشتر در این دو درس، پیشنهاد می‌کنیم علاوه بر مرور و تحلیل کنکورهای سال‌های اخیر، بررسی و تحلیل سؤالات این آزمون را نیز در برنامهٔ مطالعاتی خود قرار دهید تا با سبک طراحی سؤالات و ایده‌های جدید و پرتکرار بیشتر آشنا شوید.

سیدجواد نظری

۲۱- اگر A، B و C سه ماتریس مربعی هم‌مرتبه باشند، به‌طوری‌که $A-B=\begin{bmatrix} ۳ & ۰ \\ ۰ & ۳ \end{bmatrix}$ و $CB=\begin{bmatrix} ۱ & -۲ \\ ۳ & ۴ \end{bmatrix}$ باشد، مجموع درایه‌های ماتریس $CAB-CB^۲$ کدام است؟

۱) ۱۵ ۲) ۱۸ ۳) ۲۱ ۴) ۱۲

پاسخ: گزینهٔ ۲ (متوسط ـ مفهومی ـ استاندارد ـ هندسه ۳ صفحهٔ ۲۰ ـ ۱۴۰۱)

در عبارت $CAB-CB^۲$ از ماتریس B **از سمت راست** و از ماتریس C **از سمت چپ** فاکتور می‌گیریم:

$$CAB-CB^۲=C(AB-B^۲)=C(A-B)B$$

$$=C\begin{bmatrix} ۳ & ۰ \\ ۰ & ۳ \end{bmatrix}B=(C)(۳I)(B)=۳CB=۳\begin{bmatrix} ۱ & -۲ \\ ۳ & ۴ \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} ۳ & -۶ \\ ۹ & ۱۲ \end{bmatrix}\Rightarrow \text{مجموع درایه‌ها}=۱۸$$

خواص ضرب ماتریس‌ها

۱) اگر A یک ماتریس مربعی و I ماتریس واحد (همانی) هم‌مرتبه با A باشد، آن‌گاه ماتریس **I عضو بی‌اثر** (خنثی) در عمل ضرب ماتریس‌های مربعی است:

$$AI=IA=A$$

۲) در حالت کلی ضرب ماتریس‌ها دارای خاصیت **جابه‌جایی نیست**؛ یعنی با فرض این‌که حاصل‌ضرب‌های AB و BA برای دو ماتریس A و B انجام‌پذیر باشند، حاصل AB و BA الزاماً با هم برابر نیست:

$$AB\neq BA$$

۳) ضرب ماتریس‌ها روی جمع یا تفریق ماتریس‌ها **توزیع‌پذیر** است، یعنی اگر $A_{m\times p}, B_{p\times n}, C_{p\times n}$ سه ماتریس دلخواه باشند، آن‌گاه داریم:

$$A\times(B\pm C)=(A\times B)\pm(A\times C)$$

۴) عکس قانون پخشی (توزیع‌پذیری) نیز همواره برقرار است. یعنی می‌توان یک ماتریس را **از سمت راست** یا **از سمت چپ** دو عبارت ماتریسی فاکتور گرفت:

$BA+BC=B\times(A+C)$ $\qquad$ $BA+CA=(B+C)\times A$

$AC+CB\Rightarrow$ فاکتور ندارند. $\qquad$ $ABC+ADC=A\times(B+D)\times C$

دقت کنید که در هنگام **فاکتورگیری**، ماتریس موردنظر باید **در یک سمت** دو عبارت (یا چند عبارت) واقع باشد، در ضمن اگر بعد از فاکتورگیری از یک ماتریس مانند A از یکی از عبارت‌ها، اعدادی مانند $۱,۲,۳,...$ باقی بماند، به‌جای آن باید از $I,۲I,۳I,...$ استفاده کنید:

$BA+۲A=BA+۲IA=(B+۲I)\times A$ $\qquad$ $AB+A=AB+AI=A\times(B+I)$

$ABC+CBA\Rightarrow$ فاکتور ندارند. $\qquad$ $ABC-۳AB=AB(C-۳I)$

کپسول دوپینگ | (فاکتورگیری در ماتریس)

در عبارت‌های ماتریسی، اگر بخواهیم از ماتریسی **فاکتور** بگیریم، ماتریس موردنظر باید **در یک سمت** همهٔ عبارات قرار داشته باشد. در غیراین صورت نمی‌توان عمل فاکتورگیری را انجام داد. از طرفی جمع عدد با ماتریس معنی ندارد! یعنی اگر بعد از فاکتورگیری از عبارت‌ها تنها عدد باقی ماند در واقع این عدد **ضریب ماتریس همانی I** است.

۲۲- اگر $A=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 2 & 1\end{bmatrix}$ و داشته باشیم $A^{20}+xA+yI=\bar{O}$، آن‌گاه ماتریس $B=\begin{bmatrix}x+y & x+20\\ y-19 & x-y\end{bmatrix}$ چگونه است؟

۱) قطری غیراسکالر ۲) اسکالر غیرهمانی ۳) همانی ۴) غیرقطری

پاسخ: گزینهٔ ۱ (متوسط ـ مفهومی/محاسباتی ـ استاندارد) ـ هندسه ۳ صفحهٔ ۱۷ ـ ۱۴۰۱)

ابتدا سعی می‌کنیم ماتریس A^{20} را با تشکیل A^2 و A^3 پیدا کنیم:

$$A^2=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 2 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0\\ 2 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 4 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 2(2) & 1\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow A^3=A\times A^2=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 2 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0\\ 4 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 6 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 2(3) & 1\end{bmatrix}$$

بنابراین با توجه به نظم به‌وجودآمده بین درایه‌ها به‌راحتی می‌توان حدس زد که:

$$A^n=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 2n & 1\end{bmatrix}$$

$$A^{20}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 40 & 1\end{bmatrix}\Rightarrow A^{20}+xA+yI=\bar{O}\Rightarrow\begin{bmatrix}1 & 0\\ 40 & 1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}x & 0\\ 2x & x\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}y & 0\\ 0 & y\end{bmatrix}=\bar{O}\Rightarrow\begin{bmatrix}1+x+y & 0\\ 40+2x & 1+x+y\end{bmatrix}=\bar{O}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}1+x+y=0\\ 40+2x=0\Rightarrow x=-20\Rightarrow(-20)+y+1=0\Rightarrow y=19\end{cases}$$

حال ماتریس B را تشکیل می‌دهیم:

$$B=\begin{bmatrix}-1 & 0\\ 0 & -39\end{bmatrix}\Rightarrow \text{قطری غیراسکالر}$$

معرفی چهار نوع ماتریس مهم

چهار نوع ماتریس وجود دارد که شناسایی توان‌های آن‌ها در محاسبات مربوط به توان در ماتریس بسیار کلیدی است:

۱) اگر A **ماتریس متناوب** باشد، یعنی $A^2=I$ خواهیم داشت:

$$\boxed{A^{2k}=I\Leftarrow A^2=I\Rightarrow A^{2k+1}=A}$$

دورهٔ تناوب می‌تواند اعداد مختلفی باشد که در این‌جا دورهٔ تناوب برابر ۲ است.

۲) اگر A **ماتریس پوچ‌توان** باشد، یعنی $A^2=\bar{O}$ خواهیم داشت:

$$\boxed{A^2=\bar{O}\xrightarrow{n\geq 2}A^n=\bar{O}}$$

توان‌های متفاوتی از ماتریس ممکن است برابر با ماتریس صفر باشند، در این‌جا توان دوم ماتریس برابر صفر شد.

۳) اگر A **ماتریس خودتوان** باشد، یعنی $A^2=A$ خواهیم داشت:

$$\boxed{A^2=A\Rightarrow A^n=A}$$

۴) اگر A **ماتریس خودضریب** باشد، یعنی $A^2=kA$ خواهیم داشت:

$$\boxed{A^2=kA\Rightarrow A^n=k^{n-1}A}$$

کپسول دوپینگ | (محاسبهٔ توان‌های بزرگ در ماتریس)

برای محاسبهٔ توان‌های بزرگ ماتریس A (توان پنجم و بالاتر) معمولاً A^2 را تشکیل می‌دهیم اگر به خود A، یا ضریبی از A، یا ماتریس صفر یا همانی رسیدیم، پیدا کردن توان‌های بزرگ بسیار ساده است. در غیر این‌صورت A^3 را نیز تشکیل می‌دهیم و از مقایسهٔ A, A^2, A^3 و **مشاهدهٔ نظم و قاعدهٔ حاصل‌شده**، ماتریس A^n را حدس می‌زنیم.

یه نمونهٔ باحال ببین!

اگر $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ باشد، A^n کدام است؟

همان‌طورکه گفتیم برای محاسبهٔ هر توانی از ماتریس باید ابتدا A^2 را حساب کنیم:

$$A^2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow A^3 = A \times A^2 = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

حال اگر به A, A^2, A^3 نگاه کنید متوجه می‌شوید که درایه‌های قطر اصلی و پایین قطر اصلی هیچ تغییری نمی‌کنند اما درایهٔ بالای قطر اصلی همان توان ماتریس است. یعنی در ماتریس A^n درایه‌های قطر اصلی و پایین آن تغییر نمی‌کنند ولی درایهٔ بالای قطر اصلی برابر توان ماتریس است:

$$A^n = \begin{bmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

یه نمونهٔ باحال ببین!

اگر $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ باشد، مجموع درایه‌های A^{10} کدام است؟

۱) ۲۴ ۲) ۲۰

۳) ۲۲ ۴) ۲۸

پاسخ تشریحی:

ابتدا ماتریس A^2 را تشکیل می‌دهیم، اما چون تشخیص نظم موجود کمی مشکل است پس A^3 را هم می‌سازیم و با مقایسهٔ آن‌ها می‌توانیم A^{10} و حتی A^n را تشخیص دهیم:

$$A^2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow A^3 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 6 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow A^{10} = \begin{bmatrix} 1 & 20 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \text{جمع درایه‌ها} = 22$$

پاسخ: گزینهٔ ۳

۲۳- اگر $A=\begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۱ & a \end{bmatrix}$ و $A^۲=۳A+bI$ باشد، مقدار $a+b$ کدام است؟

۱) صفر ۲) ۶ ۳) ۴ ۴) -۴

پاسخ: گزینهٔ ۱ (آسان ـ مفهومی ـ استاندارد ـ هندسه ۳ صفحهٔ ۱۷ ـ ۱۴۰۱)

روش اول

ابتدا ماتریس $A^۲$ را تشکیل می‌دهیم:

$$A^۲=\begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۱ & a \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۱ & a \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ a+۱ & a^۲ \end{bmatrix}$$

از طرفی می‌دانیم که $A^۲=۳A+bI$ است، پس:

$$\begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ a+۱ & a^۲ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۳ & ۰ \\ ۳ & ۳a \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} b & ۰ \\ ۰ & b \end{bmatrix}\Rightarrow\begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ a+۱ & a^۲ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} b+۳ & ۰ \\ ۳ & ۳a+b \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow\begin{cases} b+۳=۱\Rightarrow b=-۲ \\ a+۱=۳\Rightarrow a=۲ \end{cases}\Rightarrow a+b=۰$$

روش دوم

با استفاده از قضیهٔ کیلی ـ همیلتن داریم:

$$A=\begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۱ & a \end{bmatrix}\Rightarrow A^۲-(a+۱)A+aI=\bar{O}\Rightarrow A^۲=(a+۱)A-aI$$

حال با مقایسهٔ رابطهٔ به‌دست‌آمده با $A^۲=۳A+bI$ خواهیم داشت:

$$\Rightarrow\begin{cases} a+۱=۳ \\ -a=b\Rightarrow a+b=۰ \end{cases}$$

قضیهٔ کیلی ـ همیلتن

اگر A یک ماتریس ۲×۲ به‌صورت کلی $A=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ باشد، آن‌گاه دو اصطلاح مهم در ماتریس A وجود دارد که در بسیاری از روابط استفاده می‌شود:

۱) مجموع درایه‌های قطر اصلی A را با نماد $tr(A)$ نشان می‌دهند و **اثر ماتریس** می‌نامند.

$$\boxed{tr(A)=a+d}$$

۲) حاصل‌ضرب درایه‌های قطر اصلی منهای حاصل‌ضرب درایه‌های قطر فرعی ماتریس A را با نماد $|A|$ نشان می‌دهند و **دترمینان ماتریس** A می‌نامند.

$$\boxed{|A|=ad-bc}$$

اگر A یک ماتریس ۲×۲ باشد، آن‌گاه رابطهٔ زیر که مشهور به قضیهٔ کیلی-همیلتن است همواره بین $I,A,A^۲$ برقرار است:

$$\boxed{A^۲-tr(A)A+|A|I=\bar{O}}$$

از قضیهٔ کیلی-همیلتن وقتی استفاده می‌کنیم که بخواهیم توان‌های یک ماتریس 2×2 را **برحسب توان‌های پایین‌تر** آن ماتریس مخصوصاً A و I به‌دست آوریم.

اگر بخواهیم A^3 را برحسب A و I پیدا کنیم، ابتدا به کمک قضیهٔ کیلی-همیلتُن A^2 را برحسب A و I پیدا می‌کنیم و سپس طرفین تساوی را در A ضرب کرده و در طرف دوم به‌جای A^2 عبارت معادل آن برحسب A و I را جایگذاری می‌کنیم.

اگر بخواهیم A^4 را بر حسب A و I پیدا کنیم، بعد از استفاده از کیلی-همیلتُن طرفین را به توان ۲ می‌رسانیم و ...

کپسول دوپینگ | (نوشتن توان‌های بالاتر یک ماتریس برحسب توان‌های پایین‌تر)

با استفاده از قضیهٔ کیلی ـ همیلتن می‌توانیم ماتریس A^2 را برحسب A و I بنویسیم:

$$A^2 - tr(A)A + |A|I = \bar{O}$$

که در آن $tr(A)$ جمع مقادیر روی قطر اصلی A و $|A|$ دترمینان A است. سپس اگر توان‌های بالاتر را بخواهیم باید تساوی به‌دست آمده را در A ضرب کنیم و از تساوی اول در آن جای‌گذاری کنیم تا توان‌های سمت دیگر تساوی را کوچک‌تر کنیم.

ماز

۲۴- اگر $A=\begin{bmatrix} 0 & -\tan\frac{\pi}{8} \\ \tan\frac{\pi}{8} & 0 \end{bmatrix}$ و I ماتریس همانی مرتبهٔ ۲ باشد، سطر دوم ماتریس $(I-A)^{-1}(I+A)$ کدام است؟

۱) $\begin{bmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}$ ۲) $\begin{bmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}$ ۳) $\begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}$ ۴) $\begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}$

پاسخ: گزینهٔ ۴ **(سخت ـ مفهومی/ترکیبی ـ زمان‌بر ـ هندسه ۳ صفحهٔ ۲۳ ـ ۱۴۰۱)**

ابتدا ماتریس‌های $I-A$ و $I+A$ را به‌دست می‌آوریم:

$$I-A=\begin{bmatrix} 1 & \tan\frac{\pi}{8} \\ -\tan\frac{\pi}{8} & 1 \end{bmatrix} \qquad I+A=\begin{bmatrix} 1 & -\tan\frac{\pi}{8} \\ \tan\frac{\pi}{8} & 1 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow (I-A)^{-1}(I+A)=\frac{1}{1+\tan^2\frac{\pi}{8}}\begin{bmatrix} 1 & -\tan\frac{\pi}{8} \\ \tan\frac{\pi}{8} & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -\tan\frac{\pi}{8} \\ \tan\frac{\pi}{8} & 1 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \text{سطر دوم}=\begin{bmatrix} \frac{2\tan\frac{\pi}{8}}{1+\tan^2\frac{\pi}{8}} & \frac{1-\tan^2\frac{\pi}{8}}{1+\tan^2\frac{\pi}{8}} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \sin\frac{\pi}{4} & \cos\frac{\pi}{4} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}$$

یادآوری مثلثات از حسابان!

$$\cos 2\alpha=\frac{1-\tan^2\alpha}{1+\tan^2\alpha} \qquad \sin 2\alpha=\frac{2\tan\alpha}{1+\tan^2\alpha}$$

وارون ماتریس

ماتریس **مربعی** B را وارون ماتریس A می‌نامند، هرگاه **حاصل‌ضرب آن‌ها برابر I** باشد، وارون ماتریس مربعی A را با نماد A^{-1} نشان می‌دهند.

$$AB = BA = I \Rightarrow A^{-1} = B$$

به‌طورکلی اگر $AB = I$، می‌توان نشان داد که $BA = I$ (کافی است طرفین را از چپ در A^{-1} و از راست در A ضرب کنید).

محاسبهٔ وارون ماتریس‌های مرتبه ۲

اگر $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ باشد، وارون ماتریس A از رابطهٔ زیر به‌دست می‌آید.

$$A^{-1} = \frac{1}{ad - bc}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

عدد $ad - bc$ **دترمینان** ماتریس A نامیده می‌شود،که شرط وارون‌پذیری **صفر نبودن** آن است.

یه نمونهٔ باحال ببین!

وارون ماتریس‌های زیر را به‌دست آورید.

$$A = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{\cos^2\theta + \sin^2\theta}\begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & \tan x \\ \cot x & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{0 - \tan x \cot x}\begin{bmatrix} 0 & -\tan x \\ -\cot x & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \tan x \\ \cot x & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow A^{-1} = A$$

وارون ماتریس‌های شبه‌قطری که درایه‌های قطر فرعی عکس هم باشند با خود ماتریس برابر است.

وارون ماتریس‌های خاص

وارون بعضی ماتریس‌های مهم مانند قطری، شبه‌قطری، واحد و اسکالر به‌صورت زیر است:

۱) $A = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix} \Rightarrow A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{a} & 0 \\ 0 & \frac{1}{b} \end{bmatrix}$

۲) $A = \begin{bmatrix} 0 & a \\ b & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow A^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{b} \\ \frac{1}{a} & 0 \end{bmatrix}$

۳) $A = I \Rightarrow A^{-1} = I$

۴) $A = kI \Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{k}I$

۲۵- اگر دستگاه معادلات $\begin{bmatrix} a+b & ۱ \\ ۵b & a-۱ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۷ \\ ۵a-۱ \end{bmatrix}$ دارای بی‌شمار جواب باشد، دستگاه معادلات $\begin{bmatrix} a+۱ & b \\ -۱ & a-۱ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۱ \\ b \end{bmatrix}$ چند جواب دارد؟

۱) یک جواب منحصربه‌فرد دارد.
۲) فاقد جواب است.
۳) بی‌شمار جواب دارد.
۴) دو دسته جواب متمایز دارد.

پاسخ: گزینهٔ ۱ **(آسان ـ خط‌به‌خط ـ استاندارد ـ هندسه ۳ صفحهٔ ۲۶ ـ ۱۴۰۱)**

برای این‌که دستگاه اولیه دارای بی‌شمار جواب باشد، باید داشته باشیم:

$$\overbrace{\frac{a+b}{۵b}=\frac{۱}{a-۱}}^{(۲)}=\frac{۷}{۵a-۱}$$

$$(۱)\ \ ۵a-۱=۷a-۷\Rightarrow a=۳$$

$$(۲)\ \ \frac{۳+b}{۵b}=\frac{۱}{۳-۱}\Rightarrow ۶+۲b=۵b\Rightarrow b=۲$$

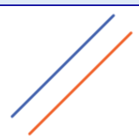
حال دستگاه دوم به‌صورت زیر درمی‌آید:

$$\begin{bmatrix} ۴ & ۲ \\ -۱ & ۲ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۱ \\ ۲ \end{bmatrix}\Rightarrow \frac{۴}{-۱}\neq\frac{۲}{۲}$$

بنابراین دستگاه دوم یک جواب منحصربه‌فرد دارد.

بحث هندسی در تعداد جواب‌های دستگاه

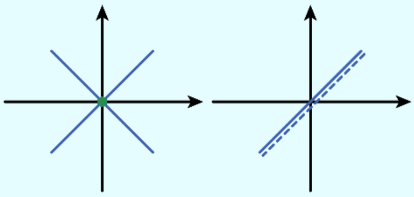
منظور از حل دستگاه دو معادله دو مجهولی $\begin{cases} ax+by=c \\ a'x+b'y=c' \end{cases}$، یافتن نقطهٔ تقاطع دو خط $ax+by=c$ و $a'x+b'y=c'$ است. اگر دو خط **متقاطع** باشند، دستگاه **یک جواب منحصربه‌فرد** خواهد داشت که همان مختصات **نقطهٔ برخورد دو خط** است و اگر دو خط **موازی** باشند، هیچ نقطهٔ برخوردی نخواهند داشت و دستگاه **فاقد جواب** است و اگر **دو خط بر هم منطبق** باشند، دستگاه دارای **بی‌شمار جواب** خواهد بود. به عبارت دیگر:

متقاطع	موازی	منطبق
دستگاه فقط یک جواب دارد.	دستگاه جواب ندارد.	دستگاه بی‌شمار جواب دارد.
		
$\frac{a}{a'}\neq\frac{b}{b'}$	$\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}\neq\frac{c}{c'}$	$\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}=\frac{c}{c'}$

دستگاه‌های معادلات را با نمودار نیز ممکن است ترکیب کنند و تست به‌صورت نموداری مطرح شود.

دستگاه‌هایی که به‌صورت $AX=\bar{O}$ هستند، **دستگاه همگن** نامیده می‌شود، در این دستگاه‌ها دو خط تشکیل‌دهندهٔ دستگاه هر دو از مبدأ می‌گذرند لذا در صورت متقاطع بودن آن‌ها گفته می‌شود دستگاه **فقط یک جواب صفر** دارد [که همان مبدأ مختصات است] و در صورت منطبق بودن گفته می‌شود دستگاه **جواب غیرصفر** دارد. [که منظور نقاطی به غیر از مبدأ است.]

جواب غیرصفر   جواب صفر



$|A|=\circ$ $|A|\neq\circ$

۲۶- اگر $A=\begin{bmatrix}۲ & x & ۱\\ \circ & ۳ & -x\end{bmatrix}$ ، $B=\begin{bmatrix}\log(x+۲) & \log(۲x+۳)\\ \log(۲x+۳) & \log(x+۲)\end{bmatrix}$ ، $C=\begin{bmatrix}\circ & ۱\\ ۱ & x\\ ۲ & y\end{bmatrix}$ و $|CA|=|B|$ باشد، برای x چند جواب وجود دارد؟

۱) ۳   ۲) ۲   ۳) ۱   ۴) صفر

پاسخ: گزینهٔ ۳   (سخت ـ ترکیبی/محاسباتی ـ زمان‌بر ـ هندسه ۳ صفحهٔ ۲۷ ـ ۱۴۰۱)

می‌دانیم اگر $A_{m\times n}$ و $B_{n\times m}$ و $m>n$ باشد، آن‌گاه $|AB|=\circ$ است، بنابراین $|CA|=\circ$ در نتیجه طبق رابطهٔ $|CA|=|B|$ باید $|B|=\circ$ باشد:

$$|B|=(\log(x+۲))^{۲}-(\log(۲x+۳))^{۲}=\circ\Rightarrow \log(x+۲)=\pm\log(۲x+۳)$$

حال در هر یک از دو حالت مقدار x را به‌دست می‌آوریم:

$$۱)\ \log(x+۲)=\log(۲x+۳)\Rightarrow x+۲=۲x+۳\Rightarrow x=-۱\ \checkmark$$

$$۲)\ \log(x+۲)=-\log(۲x+۳)\Rightarrow \log(x+۲)=\log(۲x+۳)^{-۱}$$

$$\Rightarrow x+۲=\frac{۱}{۲x+۳}\Rightarrow (x+۲)(۲x+۳)=۱\Rightarrow ۲x^{۲}+۷x+۶=۱$$

$$\Rightarrow ۲x^{۲}+۷x+۵=\circ\xrightarrow{a+c=b}\begin{cases}x=-۱\ \checkmark\\ x=\frac{-۵}{۲}\ \text{غ ق ق}\end{cases}$$

توجه داشته باشید که **عبارت جلوی لگاریتم همواره مثبت است**، بنابراین:

$$x+۲>\circ\Rightarrow x>-۲$$

$$۲x+۳>\circ\Rightarrow x>-\frac{۳}{۲}$$

در نتیجه $x=-\frac{۵}{۲}$ غیرقابل قبول بوده و تنها جواب قابل قبول برای x، همان (-۱) است.

کپسول دوپینگ | (دترمینان حاصل‌ضرب ماتریس قائم و افقی)

اگر A یک ماتریس ۲×۳ و B یک ماتریس ۳×۲ باشد (اصطلاحاً A را قائم و B را افقی می‌نامند). در این‌صورت دترمینان ماتریس AB همواره **صفر** است و در حالت کلی‌تر داریم:

$$\forall m>n:\left|\begin{bmatrix}\text{قائم}\end{bmatrix}_{m\times n}\times[\text{افقی}]_{n\times m}\right|\underline{\underline{\text{همواره}}}\ \circ$$

نکتهٔ ظریفی که در این قضیه نهفته است و باید به آن دقت کنید این است که ماتریس **قائم** باید اول (**سمت چپ**) قرار گرفته باشد.

نکتهٔ ظریف دیگر این‌که دترمینان ماتریس BA معمولاً صفر نخواهد شد، مگر در موارد خاص.

یه نمونهٔ باحال ببین!

اگر $A=\begin{bmatrix}۱ & m & ۲\\ ۰ & ۳ & ۵\end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix}۵ & m\\ ۳ & ۱\\ ۲ & ۱\end{bmatrix}$ به‌ازای کدام مقدار m دترمینان ماتریس BA برابر صفر است؟

۱) $\mathbb{R}$
۲) $\varnothing$
۳) $\{۱,۲\}$
۴) $\{۲,۳\}$

پاسخ تشریحی:

به‌جای محاسبهٔ ماتریس BA و فروغلتیدن در باتلاق ضرب دو ماتریس کافیست بدانیم ماتریس A یک ماتریس افقی و B یک ماتریس قائم محسوب می‌شود؛ بنابراین دترمینان ماتریس BA همواره صفر خواهد شد و به مقدار m بستگی ندارد؛ یعنی $m\in\mathbb{R}$ است.

پاسخ: گزینهٔ ۱

۲۷- اگر $x\in\mathbb{R}-\{۶\}$، $y\in\mathbb{R}-\{۰\}$ و $\begin{vmatrix}\frac{x}{۲} & y & z\\ ۳ & y & z\\ ۴ & x & y\end{vmatrix}=۰$ باشد، مقدار xyz همواره با مقدار کدام گزینه یکسان است؟

۱) $x+y+z$
۲) صفر
۳) $y^۳$
۴) $xy+yz$

پاسخ: گزینهٔ ۳ (متوسط ـ مفهومی/محاسباتی ـ استاندارد ـ هندسه ۳ صفحهٔ ۲۸ ـ ۱۴۰۱)

دترمینان را حول سطر اول بسط می‌دهیم:

$$\begin{vmatrix}\frac{x}{۲} & y & z\\ ۳ & y & z\\ ۴ & x & y\end{vmatrix}=\frac{x}{۲}(y^۲-xz)-y(۳y-۴z)+z(۳x-۴y)=۰$$

$$\xrightarrow{\times ۲} x(y^۲-xz)-۲y(۳y-۴z)+۲z(۳x-۴y)=۰$$

$$\Rightarrow xy^۲-x^۲z-۶y^۲+\cancel{۸yz}+۶xz-\cancel{۸yz}=۰$$

$$\Rightarrow y^۲(x-۶)-xz(x-۶)=۰\Rightarrow (x-۶)(y^۲-xz)=۰$$

$$\xrightarrow{x\neq ۶} y^۲-xz=۰\Rightarrow y^۲=xz\xrightarrow{y\neq ۰} y^۳=xyz$$

دترمینان ماتریس ۳×۳

برای محاسبهٔ دترمینان ماتریس‌های ۳ × ۳ روش‌های مختلفی وجود دارد که بهترین آن‌ها **بسط دترمینان حول یک سطر یا ستون دلخواه** است. ماتریس $A=\begin{bmatrix}a & b & c\\ d & e & f\\ g & h & i\end{bmatrix}$ را در نظر بگیرید، دترمینان این ماتریس با بسط حول سطر اول به‌صورت زیر خواهد بود:

دترمینان ماتریسی که از حذف سطر و ستون b به‌دست می‌آید.

دترمینان ماتریسی که از حذف سطر و ستون a به‌دست می‌آید.

دترمینان ماتریسی که از حذف سطر و ستون c به‌دست می‌آید.

بسط حول سطر اول: $|A|=a\begin{vmatrix}e & f\\ h & i\end{vmatrix}-b\begin{vmatrix}d & f\\ g & i\end{vmatrix}+c\begin{vmatrix}d & e\\ g & h\end{vmatrix}$

همان‌طورکه ملاحظه می‌کنید، علامت پشت a, b, c **یک‌درمیان مثبت و منفی** است. در حالت کلی این علامت‌ها با توجه به شمارهٔ سطر و ستونی که حذف می‌شوند تعیین می‌شوند، به عنوان مثال برای بسط حول سطر سوم داریم:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \Rightarrow |A| = (-1)^{3+1} a_{31} \times \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} + (-1)^{3+2} a_{32} \times \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix} + (-1)^{3+3} a_{33} \times \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

اگر دترمینان را با بسط دادن حول هر سطر یا ستونی محاسبه کنیم، همواره جواب‌هایی **یکسان** به‌دست می‌آید.

توجه!

برای راحتی بهتر است حول سطر یا ستونی که **تعداد صفرهای بیشتری** دارد، بسط دهیم.

۲۸- اگر A یک ماتریس اسکالر از مرتبهٔ ۳ و $|A+I| = |A| + 19$ باشد، آن‌گاه حداکثر مقدار $|A|$ کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۸ ۳) ۲۷ ۴) ۳

پاسخ: گزینهٔ ۲ (متوسط ـ مفهومی ـ استاندارد ـ هندسه ۳ صفحهٔ ۳۰ ـ ۱۴۰۱)

فرض کنیم $A = \begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & a \end{bmatrix}$ باشد، در این صورت داریم:

$$|A| = a^3$$

$$|A+I| = \begin{vmatrix} a+1 & 0 & 0 \\ 0 & a+1 & 0 \\ 0 & 0 & a+1 \end{vmatrix} = (a+1)^3$$

حالا طبق فرمول $|A+I| = |A| + 19$ خواهیم داشت:

$$(a+1)^3 = a^3 + 19 \Rightarrow a^3 + 3a^2 + 3a + 1 = a^3 + 19$$

$$\Rightarrow 3a^2 + 3a - 18 = 0 \Rightarrow a^2 + a - 6 = 0 \Rightarrow (a+3)(a-2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} a = 2 \\ a = -3 \end{cases}$$

به‌ازای $a = 2$ داریم $|A| = 2^3 = 8$ و به‌ازای $a = -3$ داریم $|A| = (-3)^3 = -27$ بنابراین حداکثر مقدار $|A|$ برابر است با ۸.

دترمینان ماتریس‌های مثلثی و شبه‌مثلثی

دترمینان ماتریس‌های **مثلثی** و **قطری** برابر است با **حاصل‌ضرب درایه‌های قطر اصلی**.

$$\begin{vmatrix} a & 0 & 0 \\ x & b & 0 \\ y & z & c \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & x & y \\ 0 & b & z \\ 0 & 0 & c \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{vmatrix} = abc$$

دترمینان ماتریس‌های **شبه‌مثلثی** و **شبه‌قطری** 3×3 برابر با **قرینهٔ حاصل‌ضرب درایه‌های قطر فرعی** است.

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & a \\ 0 & b & x \\ c & y & z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} y & z & a \\ x & b & 0 \\ c & 0 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & a \\ 0 & b & 0 \\ c & 0 & 0 \end{vmatrix} = -abc$$

۲۹- اگر $A=\begin{bmatrix} ۲ & ۱ \\ ۳ & ۱ \end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix} ۴ & ۲ \\ ۰ & -۱ \end{bmatrix}$ و $AX=B+I+۳X$ باشد، مقدار $\left|X^{-۱}\right|$ کدام است؟

۱) $\frac{۷}{۲}$ ۲) $\frac{-۲}{۷}$ ۳) $\frac{-۷}{۲}$ ۴) $\frac{۲}{۷}$

پاسخ: گزینهٔ ۲ (متوسط ـ مفهومی ـ استاندارد) ـ هندسه ۳ صفحهٔ ۲۷ ـ ۱۴۰۱

ماتریس $۳X$ را به طرف اول می‌بریم و از ماتریس X **از سمت راست فاکتور** می‌گیریم:

$$AX-۳X=B+I \Rightarrow (A-۳I)X=B+I$$

طرفین را از **سمت چپ** در $(A-۳I)^{-۱}$ ضرب می‌کنیم:

$$X=(A-۳I)^{-۱}(B+I)=\begin{bmatrix} -۲ & ۲ \\ ۱ & ۰ \end{bmatrix}^{-۱}\begin{bmatrix} ۳ & ۴ \\ -۱ & ۱ \end{bmatrix}$$

$$X=\begin{bmatrix} ۰ & ۱ \\ \frac{۱}{۲} & ۱ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۳ & ۴ \\ -۱ & ۱ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -۱ & ۱ \\ \frac{۱}{۲} & ۳ \end{bmatrix} \Rightarrow |X|=-۳-\frac{۱}{۲}=-\frac{۷}{۲}$$

$$\Rightarrow \left|X^{-۱}\right|=\frac{۱}{|X|}=\frac{-۲}{۷}$$

کپسول دوپینگ | (معادلات ماتریسی)

اگر یک تساوی متشکل از جمع و ضرب دو یا چند ماتریس باشد و یکی از ماتریس‌های موجود در این تساوی را بخواهند، باید ماتریسی را که مورد سؤال است از تساوی داده‌شده **فاکتور** بگیریم. سپس طرفین را در **وارون ضریب** آن **از سمت مناسب** ضرب کنیم تا آن ماتریس آزاد شود.

اگر بخواهیم ماتریس X را از تساوی زیر به‌دست آوریم، به‌صورت زیر عمل می‌کنیم:

$$AX=B+X \xrightarrow{\text{Xها را به یک طرف می‌بریم.}} AX-X=B \xrightarrow{\text{فاکتور از X}} (A-I)X=B$$

$$\Rightarrow X=(A-I)^{-۱}B$$

ماز

۳۰- اگر $A=\begin{bmatrix} -۱ & ۲ \\ -۲ & ۳ \end{bmatrix}$ و $B=۲\begin{bmatrix} ۳ & -۱ \\ -۵ & ۲ \end{bmatrix}$ باشد، حاصل $\left|\left|-۲A\right|B^{-۱}\right|+\left|(B^{-۱}AB)^{۶}\right|$ کدام است؟

۱) -۳ ۲) ۵ ۳) -۵ ۴) ۳

پاسخ: گزینهٔ ۱ (متوسط ـ ترکیبی/محاسباتی ـ استاندارد) ـ هندسه ۳ صفحهٔ ۲۹ ـ ۱۴۰۱

ابتدا عبارت داده‌شده را ساده‌تر می‌کنیم:

$$\left|\left|-۲A\right|B^{-۱}\right|+\left|(B^{-۱}AB)^{۶}\right|=\left|(-۲)^{۲}|A|B^{-۱}\right|+\left|B^{-۱}\right||A|^{۶}|B|=۴^{۲}\frac{|A|^{۲}}{|B|}+|A|^{۶}$$

حال دترمینان ماتریس A و دترمینان ماتریس B را محاسبه می‌کنیم:

۱) $|A|=(۲)(-۲)-(-۱)(۳)=-۴+۳=-۱$

۲) $|B|=۲^{۲}(۵-۶)=-۴$

بنابراین حاصل عبارت برابر است با:

$$\left|\left|-۲A\right|B^{-۱}\right|+\left|(B^{-۱}AB)^{۶}\right|=-۴+۱=-۳$$

کپسول دوپینگ | (خواص وارون)

اگر A و B دو ماتریس مربعی وارون‌پذیر، k یک عدد حقیقی و n یک عدد طبیعی باشد، آن‌گاه خواهیم داشت:

وارون جای دو ماتریس را در ضرب عوض می‌کند.	وارون ضریب را عکس می‌کند.	جای وارون و توان قابل تعویض است.	وارون وارون ماتریس همان ماتریس است.
$(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}$	$(kA)^{-1}=\frac{1}{k}A^{-1}$	$(A^n)^{-1}=(A^{-1})^n$	$(A^{-1})^{-1}=A$
$(ABC^{-1})^{-1}=CB^{-1}A^{-1}$	$(5A)^{-1}=\frac{1}{5}A^{-1}$	$(A^2)^{-1}=(A^{-1})^2$	$A^{-1}=B\Rightarrow A=B^{-1}$

اگر B یک ماتریس مربعی و A یک ماتریس وارون‌پذیر باشد، آن‌گاه همواره رابطهٔ زیر برقرار است:

$$(A^{-1}BA)^n=A^{-1}B^nA$$

در بعضی از مسائل یک تساوی برحسب یک یا چند ماتریس داده می‌شود و عباراتی که برحسب وارون آن‌هاست، خواسته می‌شود. در این تیپ از مسائل به کمک خواص ماتریس وارون و همچنین ضرب کردن طرفین تساوی داده‌شده در وارون آن ماتریس‌ها می‌توان به جواب رسید.

دترمینان وارونِ ماتریس

دترمینان وارون ماتریس A، عکس دترمینان ماتریس A است.

$$\boxed{|A^{-1}|=\frac{1}{|A|}}$$

بنابراین برای محاسبهٔ دترمینان وارون ماتریس‌های 3×3 و مراتب بالاتر بهتر است ابتدا دترمینان ماتریس A را حساب کنیم و سپس آن را عکس کنیم.

۳۱- فرض کنید G گرافی ۱۰-منتظم و $\bar{G}$ گرافی ۱۱-منتظم باشد، اندازهٔ گراف G کدام است؟

۱) ۸۰ ۲) ۱۱۰ ۳) ۱۱۵ ۴) ۱۲۰

پاسخ: گزینهٔ ۲ (آسان ـ محاسباتی ـ استاندارد ـ گسسته صفحهٔ ۳۸ ـ ۱۴۰۲)

اگر مرتبهٔ G مساوی p باشد، **مجموع درجه‌های هر رأس** در G و $\bar{G}$ مساوی $p-1$ می‌شود، پس:

$10+11=p-1\Rightarrow p=22\Rightarrow$ یعنی گراف G گرافی ۱۰-منتظم از مرتبهٔ ۲۲ است.

$$\Rightarrow q=\frac{rp}{2}=\frac{10\times 22}{2}=110$$

کپسول دوپینگ | (نکات مرتبه و اندازه در گراف)

اگر G گرافی از مرتبهٔ p باشد و $\bar{G}$ مکمل آن و v_i رأسی از گراف باشد، آن‌گاه:

۱) $\deg_G v_i+\deg_{\bar{G}} v_i=p-1$

۲) $\sum_{i=1}^{p}\deg_G v_i+\sum_{i=1}^{p}\deg_{\bar{G}} v_i=p(p-1)$

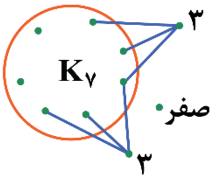
۳) $q_G+q_{\bar{G}}=\frac{p(p-1)}{2}=q_{K_p}$

۳۲- در یک گراف از مرتبهٔ ۱۰ اگر $\delta = ۰$ و فقط دو رأس از درجهٔ ۳ داشته باشیم، مجموع حداکثر و حداقل یال‌های این گراف کدام است؟

۱) ۳۰ ۲) ۳۲ ۳) ۳۵ ۴) ۳۸

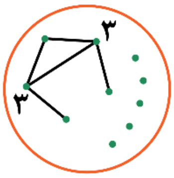
پاسخ: گزینهٔ ۲ (متوسط ـ مفهومی ـ زمان‌بر ـ گسسته صفحهٔ ۳۸ ـ ۱۴۰۲)

برای محاسبهٔ حداکثر یال‌ها، سه رأس را کنار گذاشته و با ۷ رأس دیگر گراف **کامل مرتبهٔ ۷** می‌سازیم، سپس **یک رأس از درجهٔ صفر** و **دو رأس دیگر را از درجهٔ ۳** در نظر می‌گیریم و به گراف کامل وصل می‌کنیم، پس:



$$q_{max} = \overbrace{\binom{۷}{۲}}^{\frac{۷\times۶}{۲}} + ۳ + ۳ = ۲۷$$

و برای محاسبهٔ حداقل یال‌ها کافیست **دو رأس با درجهٔ ۳** که در **یک یال مشترک** هستند رسم کنیم. مطابق شکل:



پس $q_{min} = ۵$، پس: $q_{max} + q_{min} = ۳۲$

قِلِقِش رو یاد بگیر!

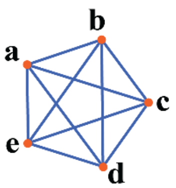
اگر در یک گراف از مرتبهٔ p بخواهیم **حداکثر تعداد یال** را داشته باشیم باید از گراف کامل کمک بگیریم و اگر بخواهیم **حداقل تعداد یال** را با شرایط ذکر شده، داشته باشیم باید سعی کنیم تعداد یال‌های مشترک را بیشتر کنیم تا با کمترین یال رأس‌ها را به هم وصل کنیم.

۳۳- در گراف کامل مرتبهٔ ۵ با رأس‌های $\{a,b,c,d,e\}$ چند مسیر به طول ۳ از رأس a به رأس b وجود دارد؟

۱) ۶ ۲) ۱۲ ۳) ۱۸ ۴) ۲۴

پاسخ: گزینهٔ ۱ (آسان ـ مفهومی ـ سریع ـ گسسته صفحهٔ ۳۸ ـ ۱۴۰۲)

مطابق اصل ضرب در این گراف تعداد مسیرهای به طول ۳ از رأس a به رأس b عبارت است از:



$$\overset{a}{\boxed{۱}} \times \underset{\text{غیر } b,a}{\boxed{۳}} \times \overset{\text{غیر } b,a \text{ و رأس قبلی}}{\boxed{۲}} \times \underset{b}{\boxed{۱}} = ۶$$

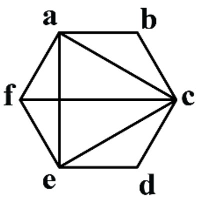
و این ۶ مسیر عبارتند از:

$$\begin{cases} adcb \\ adeb \end{cases}, \begin{cases} aceb \\ acdb \end{cases}, \begin{cases} aecb \\ aedb \end{cases}$$

مسیر

هر مسیر به طول k از a به b، دنباله‌ای شامل $k+1$ رأس متمایز است که شروع آن با a و پایان آن با b است به‌طوری‌که بین هر دو رأس متوالی در دنباله یالی در گراف موجود باشد.

۳۴- گراف مقابل چند دور به طول ۵ دارد؟



۱) ۲
۲) ۳
۳) ۴
۴) ۵

پاسخ: گزینهٔ ۴ (متوسط ـ مفهومی ـ زمان‌بر ـ گسستهٔ صفحهٔ ۳۸ ـ ۱۴۰۲)

دورهای به طول ۵ در این گراف عبارتند از:

afcdea – abcfea

abcefa – acdefa

abcdea

که تعداد آن‌ها برابر با ۵ تا است.

دور

هر دور به طول k در یک گراف مانند G دنباله‌ای شامل k رأس متمایز است که از یک رأس شروع و به همان رأس ختم می‌شود به‌طوری‌که بین هر دو رأس متوالی در دنباله، یالی در گراف موجود باشد.

توجه کنید که جهت چرخش و نقطهٔ شروع و پایان در یک دور، تفاوت و دور جدیدی ایجاد **نمی‌کند**.

۳۵- در یک گراف از مرتبهٔ p و اندازهٔ q اگر مجموعهٔ همسایگی بستهٔ هر رأس ۸ عضوی باشد و رابطهٔ $q=۳p+۴$ برقرار باشد، با حذف چند یال، این گراف به گراف C_p تبدیل می‌شود؟

۱) ۷　　۲) ۱۵　　۳) ۲۰　　۴) ۲۱

پاسخ: گزینهٔ ۳ (آسان ـ مفهومی ـ سریع ـ گسستهٔ صفحهٔ ۳۹ ـ ۱۴۰۲)

وقتی مجموعهٔ **همسایگی بستهٔ هر رأس ۸ عضوی** است، یعنی **درجهٔ هر رأس ۷** است. پس گراف ۷-منتظم است.

پس داریم:

$$\text{مجموع درجات گراف} = rp = ۲q \Rightarrow ۷p = ۲q \xrightarrow{q=۳p+۴} ۷p = ۶p + ۸ \Rightarrow p = ۸ \xrightarrow{q=۳p+۴} q = ۲۸$$

گراف $C_۸$ دارای ۸ یال است پس با حذف ۲۰ یال به گراف $C_۸$ تبدیل می‌شود.

همسایگی یک رأس

همسایگی باز: $N_G(v)$ مجموعهٔ همهٔ رأس‌هایی است که توسط یک یال به v وصل شده‌اند.

$$N_G(v) = \{v_i | vv_i \in E(G)\}$$

همسایگی بسته: $N_G[v]$ مجموعهٔ همهٔ رأس‌های متصل به v به همراه خود v است.

$$N_G[v] = \{v_i | vv_i \in E(G)\} \cup \{v\}$$

کپسول دوپینگ | (تعداد یال‌های گراف r ـ منتظم)

در هر گراف r ـ منتظم، درجهٔ هر رأس r است و بنابراین:

$$\boxed{\text{مجموع درجات گراف} = ۲q = r \times p}$$

۳۶- در گراف کامل با رأس‌های $\{a,b,c,d,e,f\}$ چند زیرگراف ۴ رأسی وجود دارد؟

۱) ۹۶۰ ۲) ۷۲۰ ۳) ۸۰۰ ۴) ۹۰۰

پاسخ: گزینهٔ ۱ (سخت ـ مفهومی ـ استاندارد ـ گسسته صفحهٔ ۳۸ ـ ۱۴۰۲)

ابتدا با $\binom{6}{4}=15$ حالت، ۴ رأس را انتخاب کرده و هر کدام از **یال‌های مربوط به آن** ۴ رأس که $\binom{4}{2}=6$ یال است می‌توانند **رسم بشوند** یا **رسم نشوند** پس تعداد زیرگراف‌های ساخته‌شده برابر است با:

$$\binom{6}{4}\times 2^6=15\times 64=960$$

زیرگراف

اگر G گرافی از مرتبهٔ p و اندازهٔ q باشد، هر زیرگراف از G، شامل زیرمجموعه‌ای از این p رأس و زیرمجموعه‌ای از یال‌های موجود بین رأس‌های انتخابی است.

کپسول دوپینگ | (انتخاب یال‌ها در زیر گراف)

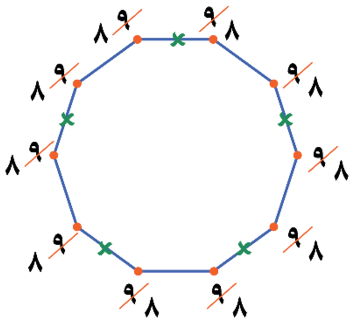
در انتخاب یال‌های زیرگراف باید توجه داشته باشید که هر رأسی و هر یالی نمی‌توانند انتخاب شوند. حتما باید **اول رأس‌ها** انتخاب شوند وسپس **از بین یال‌های موجود بین رأس‌های انتخاب شده** در گراف اصلی می‌توانند در زیر گراف **باشند** یا **نباشند**.

۳۷- در یک گراف از مرتبهٔ ۱۰ اگر عدد احاطه‌گری ۲ باشد، حداکثر اندازهٔ گراف کدام است؟

۱) ۳۶ ۲) ۴۰ ۳) ۴۱ ۴) ۴۵

پاسخ: گزینهٔ ۲ (سخت ـ ترکیبی ـ استاندارد ـ گسسته صفحهٔ ۴۴ ـ ۱۴۰۲)

کافی است ابتدا گراف را **کامل** در نظر بگیریم، در این وضعیت عدد احاطه‌گری یک است، زیرا **هر رأسی** را که انتخاب کنیم **همهٔ رئوس را احاطه می‌کند**. حال برای آن‌که عدد احاطه‌گری ۲ شود، نباید هیچ رأس درجه کاملی داشته باشیم. به همین منظور اگر مطابق شکل زیر **حداقل ۵ یال** از این گراف **حذف** کنیم، دیگر رأس از درجهٔ $p-1=9$ نداریم و برای احاطه کردن کل رأس‌ها دست‌کم ۲ رأس لازم است. دقت کنید که در شکل تمام یال‌های گراف رسم نشده‌اند و فقط یال‌های یک دور به طول ۱۰ رسم شده که برای بررسی و حذف یال تا رسیدن به عدد احاطه‌گری ۲ کافی است.



پس:

$$q_{max}=q_{K_{10}}-5=\frac{10\times 9}{2}-5=40$$

کپسول دوپینگ | (مجموعه‌های احاطه‌گر)

مجموعه‌ای از رئوس یک گراف را یک مجموعهٔ احاطه‌گر می‌نامند، اگر با انتخاب هر رأس دلخواه از گراف، یا **خود رأس** در این مجموعهٔ احاطه‌گر باشد یا **رأسی مجاور با آن** در مجموعهٔ احاطه‌گر باشد.

یک مجموعهٔ احاطه‌گر را **مینیمم** می‌گویند، اگر دارای **کمترین تعداد عضو** از بین مجموعه‌های احاطه‌گر باشد.

یک مجموعهٔ احاطه‌گر را **مینیمال** می‌گویند اگر با **حذف هر عضوی** از آن دیگر احاطه‌گر **نباشد**.

۳۸- گراف P_5 چند مجموعهٔ احاطه‌گر مینیمال دارد؟

۱) ۲   ۲) ۳   ۳) ۴   ۴) ۵

پاسخ: گزینهٔ ۳   **(متوسط ـ مفهومی ـ سریع ـ گسسته صفحهٔ ۴۶ ـ ۱۴۰۲)**

این گراف ۳ مجموعهٔ احاطه‌گر مینیمم به صورت زیر دارد:

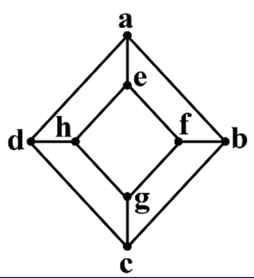
$\{a,d\},\{b,e\},\{b,d\}$

می‌دانیم مجموعهٔ احاطه‌گر مینیمم همیشه مینیمال نیز می‌باشد. پس این سه مجموعه مجموعه‌های احاطه‌گر مینیمال ۲ عضوی‌اند. اما تنها مجموعهٔ احاطه‌گر مینیمال گراف P_5 که احاطه‌گر مینیمم نیست مجموعهٔ سه عضوی $\{a,c,e\}$ است پس گراف P_5، مجموعاً دارای ۴ مجموعهٔ احاطه‌گر مینیمال است.

کپسول دوپینگ | (احاطه‌گر مینیمم یا مینیمال!)

یک مجموعهٔ احاطه‌گر را مینیمال می‌گویند اگر با حذف هر عضو از آن دیگر احاطه‌گر نباشد. بنابراین مجموعه‌های احاطه‌گر **مینیمال ممکن است مینیمم نباشند** و کمترین عضو را نداشته باشند، اما **هر مجموعهٔ احاطه‌گر مینیمم قطعاً مینیمال هم هست**.

۳۹- عدد احاطه‌گری گراف مقابل .... و این گراف .... γ-مجموعه دارد.



۱) ۲ - ۲

۲) ۲ - ۴

۳) ۴ - ۲

۴) ۴ - ۴

پاسخ: گزینهٔ ۲   **(آسان ـ مفهومی ـ استاندارد ـ گسسته صفحهٔ ۵۰ ـ ۱۴۰۲)**

عدد احاطه‌گری این گراف $\gamma = ۲$ است. دلیل:

$$\gamma \geq \left\lceil \frac{n}{\Delta+1} \right\rceil \Rightarrow \gamma \geq \left\lceil \frac{۸}{۴} \right\rceil = \lceil ۲ \rceil \Rightarrow \gamma \geq ۲$$

از طرفی $\{a,g\}$ یک مجموعهٔ احاطه‌گر است پس $\gamma \leq ۲$. در نتیجه $\gamma = ۲$ است.

توجه کنید که مجموعه‌های $\{b,h\},\{c,e\},\{d,f\},\{a,g\}$، ۴ مجموعهٔ احاطه‌گر **مینیمم** آن هستند.

کران پایین عدد احاطه‌گری

در هر گراف از مرتبهٔ p و ماکزیمم درجهٔ Δ، حداقل مقدار γ (عدد احاطه‌گری) برابر است با:

$$\gamma \geq \left\lceil \frac{n}{\Delta+۱} \right\rceil$$

که در آن $\lceil k \rceil$ به معنی کوچک‌ترین عدد صحیح بزرگ‌تر یا مساوی k است.

عدد احاطه‌گری و γ−مجموعه

به **هر مجموعهٔ احاطه‌گر مینیمم** یک γ−مجموعه می‌گویند و به تعداد اعضای آن عدد احاطه‌گری (γ) گفته می‌شود.

۴۰- در یک گراف ۲-منتظم ۱۲ رأسی، عدد احاطه‌گری بیشترین مقدار خود را داراست، این گراف با اضافه کردن حداقل چند یال به گرافی با عدد احاطه‌گری ۳ تبدیل می‌شود؟

۱) ۴ ۲) ۳ ۳) ۲ ۴) ۱

پاسخ: گزینهٔ ۲ **(متوسط ـ ترکیبی ـ استاندارد ـ گسسته صفحهٔ ۵۰ ـ ۱۴۰۲)**

گراف‌های ۲-منتظم شامل n ضلعی‌ها هستند. در بین گراف‌های ۲-منتظم ۱۲ رأسی، اگر **عدد احاطه‌گری بیشترین** مقدار باشد باید گرافی شامل **۳ تا مربع** رسم شود که در این صورت $\gamma = ۶$ است، حال با اضافه کردن حداقل ۳ یال عدد احاطه‌گری $\gamma = ۳$ می‌شود.