



گروه آزمایشی علوم ریاضی و فنی

آزمون دوپینگ ماز | پایه دوازدهم



دوپینگ ماز

ریاضیات

ویژه کنکوری‌های ۱۴۰۵

دفترچه پاسخ

شنبه ۱۶ خردادماه ۱۴۰۵

درس	مسئول درس	طراحان	ویراستاران
ریاضیات	مهرداد کیوان حسین شفیع‌زاده سیدجواد نظری	دپارتمان ریاضی ماز	مائده بادن‌فیروز یزدان نیک‌قدم فاطمه زارع

جامع مثلثات، چندضلعی‌های محاطی و محیطی + تبدیل‌های هندسی و کاربردها، احتمال (جبرانی)	مباحث پایه + جامع تابع و توابع نمایی و لگاریتمی، ترسیم‌های هندسی + تالس + چندضلعی‌ها + دایره، ترکیبیات، آشنایی با مبانی ریاضیات (جبرانی)	الگو و دنباله + توان‌های گویا و عبارت‌های جبری، مقاطع مخروطی + بردارها، آشنایی با نظریه اعداد	جامع مشتق و کاربرد مشتق، ماتریس‌ها، گراف و مدل‌سازی	جامع حد و پیوستگی، روابط طولی در مثلث + ترسیم‌های هندسی و استدلال، آمار توصیفی و استنباطی	جامع مثلثات، چندضلعی‌های محاطی و محیطی + تبدیل‌های هندسی، احتمال
---	--	--	---	---	--



مسیر حرفه‌ای جمع‌بندی تا کنکور ۱۴۰۵



برای شباهت حداکثری به کنکور، صفحه‌آرایی، فونت و حتی اندازه متن در تمامی آزمون‌های ماز، کاملاً یکسان با استاندارد دفترچه‌های کنکور در نظر گرفته می‌شود.

راهنمای پامفله آزمون ها

زمان پاسخگویی:

سریع (زیر ۱ دقیقه) | استاندارد (۱-۲ دقیقه) |
زمان بر (بیشتر از ۲ دقیقه).

پاسخ: گزینه ۱ (متوسط - خط به خط - استاندارد) - صفحه ۳ تا ۶ - ۱۰۰۱

سطح سؤال:

آسان (اعتماد به نفس) | متوسط (محک جدی)
دشوار (چالش رشد).

هشتگ سؤال:

شماره درس + شماره پایه
دسته بندی راحت تر سؤالات

سبک سؤال:

خط به خط (متن کتاب) | ترکیبی (چند مبحث) |
محاسباتی (فرمول ودقت) | مفهومی (درک عمیق).

شماره صفحه:

منبع اصلی رو راحت پیدا کنید.

ویژگی های آزمون دوپینگ

پهروسی سریع



«بابت نگاه صرفه ای، دلیل درست بودن یا نبودن گزینه ها را در لحظه ببینید و درون اقلای وقت، پرونده هر سؤال را با یادگیری کامل ببندید!»

پاسخنامه کامل



«یک نقشه راه دقیق و نام نه نام که پیچیده ترین مسائل موضوع را بازمی کند تا هیچ ابهامی در مسیر موفقیت تان باقی نماند.»

نکات و دام های گنگوری



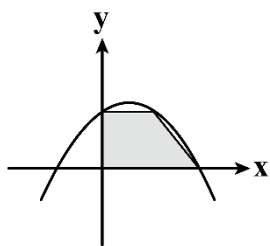
«در دام سؤالات نغیفتید! ما ترغدهای طراحان سوال و مفاهیم کلیدی رو بهتون یاد می دیم تا با آمادگی کامل، همه سؤالات رو جواب بدید.»

کپسول دوپینگ



آماده یک انفجار یادگیری باشید!

«با کپسول دوپینگ "کلید موفقیت در دستان شماست! با مرور سریع و کار بردی نکات، از پس هر سوالی برآید و در آزمون ها بدرخشید!»



۱- نمودار سهمی $f(x) = 8 - 2(x-1)^2$ رسم شده است. مساحت دوزنقه سایه خورده کدام است؟

(۱) ۶

(۲) ۸

(۳) ۱۲

(۴) ۱۵

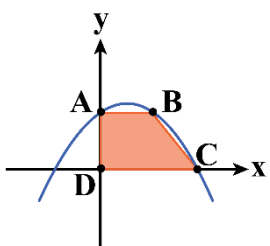
(متوسط - مفهومی/محاسباتی - استاندارد ۵) - ریاضی ۱ صفحه ۸۰ و ۸۱ - ۱۰۰۴

پاسخ: گزینه ۴

مختصات نقاط A، B و C را مشخص می‌کنیم تا طول قاعده‌ها و ارتفاع دوزنقه مشخص شود. طول نقطه A برابر صفر است،

$$f(0) = 8 - 2(0-1)^2 = 6 \Rightarrow y_A = 6 \Rightarrow AD = 6$$

پس:



از طرفی، نقطه B نیز دارای عرض ۶ است، پس طول آن را محاسبه می‌کنیم:

$$f(x) = 8 - 2(x-1)^2 \Rightarrow 6 = 8 - 2(x-1)^2 \Rightarrow 2(x-1)^2 = 2 \Rightarrow (x-1)^2 = 1 \Rightarrow \begin{cases} x = 2 \text{ ق ق} \\ x = 0 \text{ غ ق} \end{cases}$$

پس طول نقطه B نیز برابر ۲ است و از اینجا می‌توان گفت $AB = 2$. حال طول نقطه C را مشخص می‌کنیم، ببینید:

$$f(x) = 8 - 2(x-1)^2 \Rightarrow 0 = 8 - 2(x-1)^2 \Rightarrow 2(x-1)^2 = 8 \Rightarrow (x-1)^2 = 4 \Rightarrow \begin{cases} x = 3 \text{ ق ق} \\ x = -1 \text{ غ ق} \end{cases}$$

پس طول CD نیز برابر ۳ می‌باشد، حاصل مساحت دوزنقه را محاسبه می‌کنیم:

$$S_{ABCD} = \frac{(AB + CD) \times AD}{2} = \frac{(2 + 3) \times 6}{2} = 15$$

••• ilo •••

۲- مجموعه جواب نامعادله $|4x - n| < x$ شامل دقیقاً ۴ عدد صحیح است. حداقل مقدار طبیعی n کدام است؟

(۴) ۴۶

(۳) ۳۱

(۲) ۶۰

(۱) ۳۰

(سخت - مفهومی - استاندارد ۵) - ریاضی ۱ صفحه ۹۳ - ۱۰۰۴

پاسخ: گزینه ۳

اولاً باید $x > 0$ باشد. (چرا؟) حال با کمک ویژگی‌های قدرمطلق داریم:

$$|4x - n| < x \Rightarrow -x < 4x - n < x \Rightarrow \begin{cases} -x < 4x - n \Rightarrow n < 5x \Rightarrow \frac{n}{5} < x \\ 4x - n < x \Rightarrow 3x < n \Rightarrow x < \frac{n}{3} \end{cases} \xrightarrow{\cap} \frac{n}{5} < x < \frac{n}{3}$$

اگر ۴ عدد صحیح درون بازه $(\frac{n}{5}, \frac{n}{3})$ قرار داشته باشد، پس:

$$\frac{n}{3} - \frac{n}{5} > 4 \Rightarrow \frac{5n - 3n}{15} > 4 \Rightarrow \frac{2n}{15} > 4 \Rightarrow n > 30 \Rightarrow n \geq 31$$

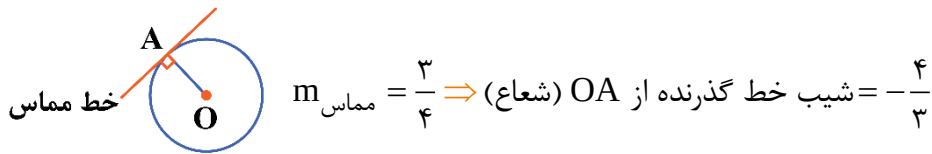
پس حداقل مقدار طبیعی n برابر ۳۱ است.

••• ilo •••

۳- خط $3x - 4y = k$ در نقطه‌ای به طول ۳- بر دایره‌ای به مرکز $O(3, 0)$ مماس است. شعاع دایره کدام است؟
 (۱) ۱۰ (۲) ۸ (۳) $6\sqrt{2}$ (۴) $4\sqrt{2}$

پاسخ: گزینه ۱  متوسط - محاسباتی - استاندارد ۱ - حسابان ۱ صفحه ۳۴ - ۱۱۰۱

می‌دانیم خط مماس در نقطه تماس، بر شعاع دایره عمود است، بنابراین با توجه به شکل فرضی زیر داریم:



حال معادله خط گذرنده از نقاط O و A را می‌نویسیم:

$$O(3, 0), m_{OA} = -\frac{4}{3} \Rightarrow y - y_0 = m(x - x_0) \Rightarrow y - 0 = -\frac{4}{3}(x - 3) \Rightarrow y = -\frac{4}{3}x + 4$$

از آنجایی که طول نقطه تماس یعنی A برابر ۳- است، پس عرض آن برابر است با:

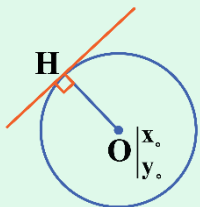
$$y_A = -\frac{4}{3} \times (-3) + 4 = 8$$

پس $A \left(-3, 8 \right)$ و $O \left(3, 0 \right)$ می‌باشد و داریم:

$$R = OA = \sqrt{(-3 - 3)^2 + (8 - 0)^2} = \sqrt{36 + 64} = 10$$

خط مماس بر دایره

اگر خطی بر دایره مماس باشد، در نقطه تماس با دایره، بر شعاع دایره عمود است. برای محاسبه شعاع دایره، فاصله مرکز دایره از خط را محاسبه می‌کنیم. اگر معادله خط به صورت $ax + by + c = 0$ باشد:



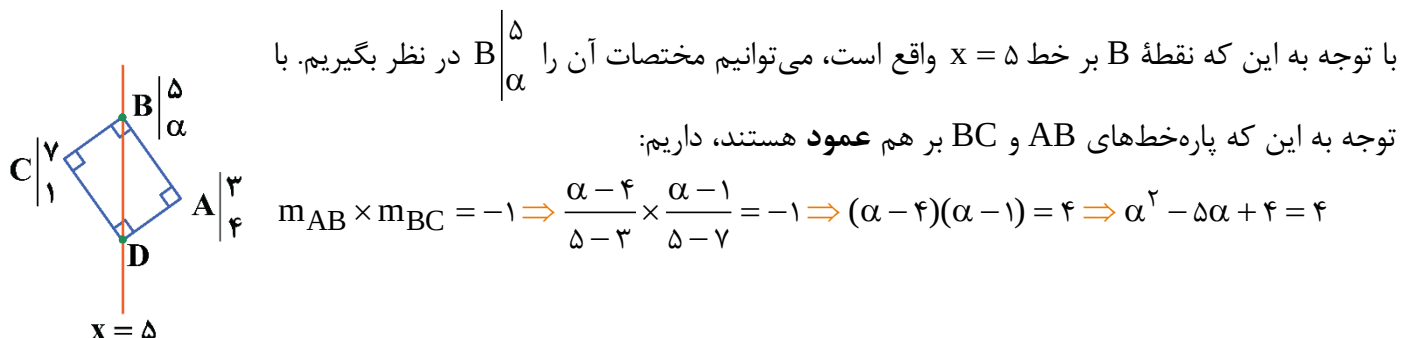
$$R = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$



۴- نقاط $A(3, 4)$ و $C(7, 1)$ دو سر قطر مستطیل ABCD هستند، به طوری که قطر BD بر خط $x = 5$ واقع می‌باشد، محیط این مستطیل کدام است؟

(۱) $8\sqrt{5}$ (۲) $10\sqrt{5}$ (۳) $12\sqrt{5}$ (۴) $6\sqrt{5}$

پاسخ: گزینه ۴  متوسط - محاسباتی - استاندارد ۱ - حسابان ۱ صفحه ۳۱ - ۱۱۰۱



$$\Rightarrow \begin{cases} \alpha = 0 \\ \alpha = 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} B \\ D \end{matrix} \begin{matrix} 5 \\ 0 \end{matrix} \Rightarrow \begin{cases} AB = \sqrt{(5-4)^2 + (5-3)^2} = \sqrt{5} \\ BC = \sqrt{(7-5)^2 + (1-5)^2} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5} \end{cases}$$

بنابراین محیط مستطیل برابر است با:

$$\text{محیط مستطیل} = 2(AB + BC) = 2(\sqrt{5} + 2\sqrt{5}) = 6\sqrt{5}$$



۵- دامنه تعریف تابع $f(x) = \sqrt{x-3} - 2x$ بازه $[\alpha, \beta]$ می‌باشد. مقدار $\beta - \alpha$ کدام است؟

۱ (۴)

۳ (۳)

$\frac{3}{2}$ (۲)

$\frac{1}{2}$ (۱)

(متوسط - محاسباتی/ترکیبی - سریع) حسابان ۱ صفحه ۴۷ - ۱۱۰۲

پاسخ: گزینه ۱

عبارت زیر رادیکال‌ها را بزرگ‌تر یا مساوی صفر قرار می‌دهیم و بین جواب‌ها اشتراک می‌گیریم. ببینید:

$$3 - 2x \geq 0 \Rightarrow x \leq \frac{3}{2}$$

$$x - \sqrt{3 - 2x} \geq 0 \Rightarrow \sqrt{3 - 2x} \leq x \xrightarrow{x > 0} 3 - 2x \leq x^2 \Rightarrow x^2 + 2x - 3 \geq 0 \xrightarrow{\text{تعیین علامت}} \begin{cases} x \geq 1 \text{ قق} \\ x \leq -3 \text{ غ قق} \end{cases}$$

بنابراین دامنه تابع برابر است با:

$$x \geq 1 \cap x \leq \frac{3}{2} \Rightarrow D_f = \left[1, \frac{3}{2}\right] \Rightarrow \begin{cases} \alpha = 1 \\ \beta = \frac{3}{2} \end{cases} \Rightarrow \beta - \alpha = \frac{3}{2} - 1 = \frac{1}{2}$$

دامنه توابع رادیکالی

برای محاسبه دامنه توابع رادیکالی به فرم $f(x) = \sqrt[n]{g(x)}$ به صورت زیر عمل می‌کنیم:

$$D_f = D_g \cap \{x | g(x) \geq 0\}$$



۶- اگر $a > 0$ و $f^{-1}(x) = bx^2 + ax$ ، وارون تابع $f(x) = 2 - \sqrt{-ax + 4}$ باشد، مقدار b کدام است؟

$-\frac{1}{4}$ (۴)

$\frac{1}{2}$ (۳)

$\frac{1}{4}$ (۲)

$-\frac{1}{2}$ (۱)

(سخت - مفهومی/محاسباتی - زمان‌بر) حسابان ۱ صفحه ۵۸ - ۱۱۰۲

پاسخ: گزینه ۱

روش اول

وارون تابع $f(x)$ را محاسبه می‌کنیم، ببینید:

$$f(x) = 2 - \sqrt{-ax + 4} \xrightarrow{R_f = (-\infty, 2]} y = 2 - \sqrt{-ax + 4} \Rightarrow \sqrt{-ax + 4} = 2 - y \xrightarrow{\substack{y \leq 2 \\ \text{توان ۲}}} -ax + 4 = y^2 - 4y + 4$$

$$\Rightarrow -ax = y^2 - 4y \Rightarrow x = -\frac{1}{a}y^2 + \frac{4}{a}y \Rightarrow f^{-1}(x) = -\frac{1}{a}x^2 + \frac{4}{a}x$$

از طرفی:

$$\begin{cases} f^{-1}(x) = bx^2 + ax \\ f^{-1}(x) = -\frac{1}{a}x^2 + \frac{4}{a}x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{4}{a} = a \Rightarrow a^2 = 4 \xrightarrow{a>0} a = 2 \\ b = -\frac{1}{a} \Rightarrow b = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

روش دوم

توجه داریم توابع درجه دوم در بازه $[-\frac{b}{2a}, +\infty)$ یا $(-\infty, -\frac{b}{2a}]$ یک به یک و وارون پذیر هستند، بنابراین:

$$f(x) = 2 - \sqrt{-ax + 4} \xrightarrow{a>0} \begin{cases} R_f = (-\infty, 2] = D_{f^{-1}} \Rightarrow \text{با توجه به تابع } f^{-1}(x) = bx^2 + ax \text{ متوجه می شویم که طول} \\ \text{نقطه رأس در تابع } f^{-1}(x) \text{ برابر 2 می باشد.} \\ D_f = (-\infty, \frac{4}{a}] = R_{f^{-1}} \Rightarrow \text{با توجه به تابع } f^{-1}(x) = bx^2 + ax \text{ و } R_{f^{-1}} \text{ متوجه می شویم} \\ \text{که } b < 0 \text{ بوده و عرض نقطه رأس در تابع } f^{-1} \text{ برابر } \frac{4}{a} \text{ می باشد.} \end{cases}$$

بنابراین:

$$f^{-1}(x) = bx^2 + ax \Rightarrow \begin{cases} x_{\text{رأس}} = -\frac{a}{2b} = 2 \Rightarrow b = -\frac{a}{4} \text{ (I)} \\ y_{\text{رأس}} = -\frac{\Delta}{4b} = -\frac{a^2}{4b} = \frac{4}{a} \Rightarrow a^3 = -16b \text{ (II)} \end{cases}$$

با جای گذاری (I) در (II) داریم:

$$a^3 = -16b \xrightarrow{b = -\frac{a}{4}} a^3 = -16 \times -\frac{a}{4} \Rightarrow a^2 = 4 \xrightarrow{a>0} a = 2 \Rightarrow b = -\frac{2}{4} = -\frac{1}{2}$$

از تابع وارون یادتان باشد که...

۱) اگر $f^{-1}(x)$ تابع وارون $f(x)$ باشد، آن گاه:

$$A \begin{vmatrix} \alpha \\ \beta \end{vmatrix} \in f \Leftrightarrow A' \begin{vmatrix} \beta \\ \alpha \end{vmatrix} \in f^{-1}$$

۲) رابطه دامنه و برد یک تابع با دامنه و برد تابع وارون:

$$D_f = R_{f^{-1}}, R_f = D_{f^{-1}}$$

• • ib • •

۷- اگر f یک تابع خطی با شیب مثبت، $(fog)(x) = 4x^2 + 3$ و $(f^{-1}og)(x) = x^2 + 3$ باشد، مقدار $f(-3)$ کدام است؟
 (۱) ۶ (۲) -۶ (۳) -۹ (۴) ۹

پاسخ: گزینه ۳ (متوسط - محاسباتی - استاندارد) - حسابان ۱ صفحه ۶۹ - ۱۱۰۲

فرض کنید $f(x) = ax + b$ ($a > 0$) باشد، پس $f^{-1}(x) = \frac{x-b}{a}$ می‌باشد، بنابراین:

$$(fog)(x) = ag(x) + b = 4x^2 + 3 \Rightarrow g(x) = \frac{4x^2 + 3 - b}{a}$$

$$(f^{-1}og)(x) = \frac{g(x) - b}{a} = x^2 + 3 \Rightarrow g(x) = ax^2 + 3a + b$$

بنابراین با برابر قرار دادن دو ضابطه به دست آمده برای $g(x)$ داریم:

$$\frac{4x^2 + 3 - b}{a} = ax^2 + 3a + b \Rightarrow 4x^2 + 3 - b = a^2x^2 + 3a^2 + ab$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a^2 = 4 \Rightarrow a = \pm 2 \\ 3 - b = 3a^2 + ab \end{cases} \xrightarrow{a > 0, \text{ شیب تابع خطی } f \text{ مثبت است.}} a = 2$$

حال مقدار b را به دست می‌آوریم:

$$3 - b = 3a^2 + ab \xrightarrow{a=2} 3 - b = 3 \times 2^2 + 2b \Rightarrow 3 - b = 12 + 2b \Rightarrow b = -3$$

ضابطه f تابع $f(x) = 2x - 3$ می‌باشد و $f(-3)$ برابر است با:

$$f(-3) = 2 \times (-3) - 3 = -9$$



۸- اگر $x > 1, x \neq y$ عددی مثبت و غیر یک باشد، از رابطه $\log_{\sqrt{x}}^y - \log_y^x = 2$ کدام نتیجه‌گیری درست است؟

(۱) $x^2y = 2$ (۲) $x\sqrt{y} = 2$ (۳) $y\sqrt{x} = 1$ (۴) $yx^2 = 1$

پاسخ: گزینه ۳ (متوسط - محاسباتی - سریع) - حسابان ۱ صفحه ۸۸ - ۱۱۰۳

ابتدا عبارت داده شده در صورت سؤال را ساده می‌کنیم، ببینید:

$$\frac{2}{1} \log_{\sqrt{x}}^y - 2 \log_y^x = 2 \Rightarrow 4 \log_{\sqrt{x}}^y - 2 \log_y^x = 2 \Rightarrow 2 \log_{\sqrt{x}}^y - \log_y^x = 1 \xrightarrow{\text{تغییر متغیر}} \begin{cases} \log_{\sqrt{x}}^y = A \\ \log_y^x = \frac{1}{A} \end{cases}$$

$$2A - \frac{1}{A} = 1 \xrightarrow{\times A} 2A^2 - 1 = A \Rightarrow 2A^2 - A - 1 = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} A = 1 \Rightarrow \log_{\sqrt{x}}^y = 1 \Rightarrow y = x \text{ غ ق ق} \\ A = -\frac{1}{2} \Rightarrow \log_{\sqrt{x}}^y = -\frac{1}{2} \Rightarrow y = x^{-\frac{1}{2}} \Rightarrow y = \frac{1}{\sqrt{x}} \Rightarrow \sqrt{xy} = 1 \end{cases}$$



$$\log_B^A = C \Leftrightarrow A = B^C \quad (A > 0, B > 0, B \neq 1)$$

$$\log_{B^m} A^n = \frac{n}{m} \log_B A \xrightarrow{\text{مثال}} \log_{\sqrt{8}} 32 = \log_{\frac{2}{2}} 2^5 = \frac{5}{\frac{1}{2}} \log_2 2 = \frac{10}{1}$$

$$\log_B A = \frac{1}{\log_A B} \xrightarrow{\text{مثال}} \log_2 8 = 3 \Rightarrow \log_8 2 = \frac{1}{3}$$

۹- اگر α و β ریشه‌های معادله $3^{x+2} + 18 = 9^x$ باشد، حاصل $|\alpha - \beta|$ کدام است؟

- (۱) $2 \log_3 2$ (۲) $\log_3 2$ (۳) $\frac{1}{2} \log_3 2$ (۴) $3 \log_3 2$

(متوسط - محاسباتی - سریع) حسابان ۱ صفحه ۸۸ - ۱۱۰۳

پاسخ: گزینه ۲

با استفاده از روش تغییر متغیر، معادله $3^{x+2} + 18 = 9^x$ را حل می‌کنیم، ببینید:

$$3^x = A \Rightarrow 9^x = A^2 \xrightarrow{3^x = A \Rightarrow 9^x = A^2} A^2 + 18 = 9A \Rightarrow A^2 - 9A + 18 = 0 \Rightarrow (A - 6)(A - 3) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} A = 6 \Rightarrow 3^x = 6 \Rightarrow x = \log_3 6 \Rightarrow \alpha = \log_3 6 \\ A = 3 \Rightarrow 3^x = 3 \Rightarrow x = 1 \Rightarrow \beta = 1 \end{cases}$$

پس $|\alpha - \beta|$ برابر است با:

$$|\alpha - \beta| = |\log_3 6 - 1| = |\log_3 6 - \log_3 3| = \log_3 2$$

۱۰- رأس سهمی $f(x) = kx^2 + 4x + 6$ روی خط $y = -3x + 7$ واقع شده است. عرض رأس سهمی چه عددی است؟

- (۱) $6/4$ (۲) $-7/2$ (۳) $-4/8$ (۴) $5/6$

(متوسط - مفهومی/محاسباتی - سریع) ریاضی ۱ صفحه ۸۰ - ۱۰۰۴

پاسخ: گزینه ۱

مختصات رأس سهمی را محاسبه می‌کنیم:

$$f(x) = kx^2 + 4x + 6 \Rightarrow S \begin{cases} -\frac{b}{2a} = -\frac{4}{2k} = -\frac{2}{k} \\ -\frac{\Delta}{4a} = -\frac{16 - 24k}{4k} = 6 - \frac{4}{k} \end{cases}$$

نقطه رأس سهمی روی خط $y = -3x + 7$ قرار دارد، پس:

$$y = -3x + 7 \xrightarrow{S(-\frac{2}{k}, 6 - \frac{4}{k})} 6 - \frac{4}{k} = -3(-\frac{2}{k}) + 7 \Rightarrow 6 - \frac{4}{k} = \frac{6}{k} + 7 \Rightarrow \frac{10}{k} = -1 \Rightarrow k = -10$$

پس مختصات رأس سهمی به صورت $S(\frac{2}{10}, \frac{64}{10})$ می‌باشد که عرض آن همان $6/4$ است.

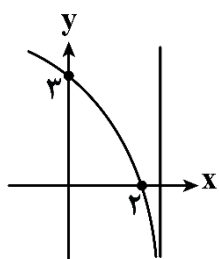
در سهمی به فرم $f(x) = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$) مختصات نقطه رأس (S) از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$S\left(-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a}\right)$$

برای راحتی محاسبه عرض رأس سهمی می‌توانیم طول این نقطه را در معادله سهمی قرار دهیم:

$$f\left(-\frac{b}{2a}\right) = -\frac{\Delta}{4a}$$

••• ibo •••



۱۱- نمودار تابع $f(x) = a + \log_p^{(bx+c)}$ به شکل مقابل است. مقدار $\log_p^{yc}$ کدام است؟

- (۱) ۴
- (۲) $\frac{1}{4}$
- (۳) -۴
- (۴) $-\frac{1}{4}$

(متوسط - محاسباتی - استاندارد) حسابان ۱ صفحه ۸۰ تا ۸۳ - ۱۱۰۳

پاسخ: گزینه ۳

با توجه به نمودار $f(2) = 0$ و $f(0) = 3$ می‌باشد، پس:

$$f(2) = 0 \Rightarrow a + \log_p^{(2b+c)} = 0 \Rightarrow 2b + c = 2^{-a}$$

$$f(0) = 3 \Rightarrow a + \log_p^c = 3 \Rightarrow \log_p^c = 3 - a \Rightarrow c = 2^3 \times 2^{-a}$$

$$2b + c = 2^{-a} \xrightarrow{c=8 \times 2^{-a}} 2b + 8 \times 2^{-a} = 2^{-a} \Rightarrow 2b = -7 \times 2^{-a} \Rightarrow b = -\frac{7}{2} \times 2^{-a}, c = 8 \times 2^{-a}$$

$$\frac{b}{c} = \frac{-\frac{7}{2} \times 2^{-a}}{8 \times 2^{-a}} = \frac{-7}{16} \Rightarrow \frac{-b}{7c} = \frac{1}{16} \Rightarrow \log_p^{\left(\frac{-b}{7c}\right)} = \log_p^{\frac{1}{16}} = -4$$

••• ibo •••

۱۲- به ازای کدام مقدار a ، نمودار وارون تابع $f(x) = 4x + 2\sqrt{x+3a}$ خط $4y - 2x = 0$ را در نقطه‌ای به عرض ۱- قطع می‌کند؟

- (۱) $\frac{2}{3}$
- (۲) $\frac{57}{12}$
- (۳) $\frac{57}{4}$
- (۴) $\frac{9}{4}$

(متوسط - مفهومی/محاسباتی - استاندارد) حسابان ۱ صفحه ۶۱ - ۱۱۰۲

پاسخ: گزینه ۱

اگر عرض نقطه برخورد خط $4y - 2x = 0$ و نمودار تابع $f^{-1}(x)$ برابر ۱- باشد، طول نقطه برخورد برابر است با:

$$4y - 2x = 0 \Rightarrow -4 - 2x = 0 \Rightarrow x = -2$$

↓
-۱

پس تابع $f^{-1}(x)$ و خط $4y - 2x = 0$ در نقطه $A(-2, -1)$ برخورد دارند و می‌توان گفت این نقطه روی تابع $f^{-1}(x)$ نیز قرار دارد، بنابراین نقطه $A'(-1, -2)$ روی خود تابع $f(x)$ است و داریم:

$$f(-1) = -2 \Rightarrow -4 + 2\sqrt{-1+3a} = -2 \Rightarrow 2\sqrt{-1+3a} = 2 \Rightarrow \sqrt{-1+3a} = 1 \Rightarrow a = \frac{2}{3}$$

• • *bi* • •

۱۳- هرگاه $f(x) = \frac{4x}{x+2}$ و $fog(x) = \frac{4x}{5x-2}$ باشد، مقدار $g^{-1}(1)$ چه عددی است؟

$$\frac{4}{3} \quad (4) \quad \frac{1}{3} \quad (3) \quad \frac{2}{3} \quad (2) \quad 1 \quad (1)$$

(متوسط - محاسباتی - استاندارد) - حسابان ۱ صفحه ۶۹ - ۱۱۰۲

پاسخ: گزینه ۱

روش اول

اگر فرض کنیم $g^{-1}(1) = \alpha$ ، آن‌گاه $g(\alpha) = 1$ است، بنابراین:

$$fog(x) = \frac{4x}{5x-2} \Rightarrow fog(\alpha) = \frac{4\alpha}{5\alpha-2} \Rightarrow f(g(\alpha)) = \frac{4\alpha}{5\alpha-2} \Rightarrow f(1) = \frac{4\alpha}{5\alpha-2}$$

با توجه به این که $f(1) = \frac{4}{3}$ می‌باشد، می‌توان گفت:

$$\frac{4\alpha}{5\alpha-2} = \frac{4}{3} \Rightarrow 20\alpha - 8 = 12\alpha \Rightarrow 8\alpha = 8 \Rightarrow \alpha = 1$$

بنابراین $g^{-1}(1) = 1$ می‌باشد.

روش دوم

ابتدا تابع $g(x)$ را محاسبه می‌کنیم، ببینید:

$$fog(x) = f(g(x)) = \frac{4g(x)}{g(x)+2} = \frac{4x}{5x-2} \Rightarrow 4xg(x) + 8x = 20xg(x) - 8g(x) \Rightarrow 16xg(x) - 8g(x) = 8x$$

$$2xg(x) - g(x) = x \Rightarrow g(x) = \frac{x}{2x-1}$$

با فرض $g^{-1}(1) = \alpha$ داریم $g(\alpha) = 1$ ، بنابراین:

$$g(\alpha) = 1 \Rightarrow \frac{\alpha}{2\alpha-1} = 1 \Rightarrow 2\alpha - 1 = \alpha \Rightarrow \alpha = 1 \Rightarrow g^{-1}(1) = 1$$

• • *bi* • •

۱۴- اگر $g(x)$ خارج قسمت تقسیم چندجمله‌ای $f(x) = x^{10} + 2x^4 - 3x^2 + x + a$ بر $x-1$ باشد، مقدار $g(1)$ کدام است؟

$$1 \quad (1) \quad 10 \quad (2) \quad 13 \quad (3) \quad 4 \quad (4) \quad \text{صفر}$$

(سخت - مفهومی/محاسباتی - استاندارد) - حسابان ۲ صفحه ۱۹ - ۱۲۰۱

پاسخ: گزینه ۳

باقی‌مانده تقسیم $f(x)$ بر $x-1$ برابر $f(1)$ می‌باشد، با توجه به قضیه تقسیم داریم:

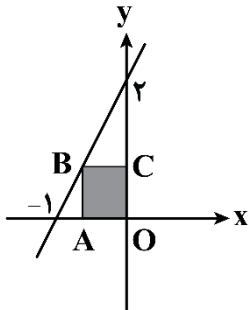
$$\begin{array}{l|l} f(x) & x-1 \\ \hline & g(x) \end{array} \Rightarrow f(x) = (x-1)g(x) + f(1) \xrightarrow{\text{مشتق}} f'(x) = 1 \times g(x) + (x-1)g'(x) \xrightarrow{x=1} f'(1) = g(1)$$

از طرفی $10x^9 + 8x^3 - 6x + 1 = f'(x)$ می‌باشد، پس $g(1)$ برابر است با:

$$g(1) = f'(1) = 10 + 8 - 6 + 1 = 13$$



۱۵- در مستطیل هاشورزده شکل زیر که نسبت طلایی در آن برقرار است، اندازه عرض مستطیل (OA) چقدر است؟



- (۱) $1 - \frac{2\sqrt{5}}{5}$
(۲) $1 - \frac{\sqrt{5}}{5}$
(۳) $1 - \frac{\sqrt{5}}{10}$
(۴) $\frac{\sqrt{5}}{2} - 1$

(متوسط - مفهومی/محاسباتی - استاندارد ۵) - حسابان ۱ صفحه ۱۹-۱۱۰۱

پاسخ: گزینه ۲

معادله خط داده شده به صورت $y = 2x + 2$ می‌باشد. اگر $OA = a$ فرض شود با توجه به این که نسبت طول به عرض در مستطیلی

که نسبت طلایی در آن برقرار است، برابر $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ می‌باشد، داریم:

پس مختصات نقطه B به صورت $B(-a, \frac{\sqrt{5}+1}{2}a)$ می‌باشد. مختصات نقطه B در معادله خط $y = 2x + 2$ صدق می‌کند و داریم:

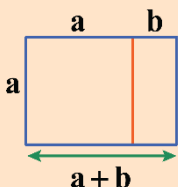
$$y = 2x + 2 \Rightarrow \left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)a = -2a + 2 \Rightarrow (\sqrt{5}+1)a = -4a + 4 \Rightarrow (\sqrt{5}+5)a = 4 \Rightarrow a = \frac{4}{\sqrt{5}+5}$$

پس عرض مستطیل برابر است با:

$$a = \frac{4}{5+\sqrt{5}} = \frac{4(5-\sqrt{5})}{5^2 - \sqrt{5}^2} = \frac{4(5-\sqrt{5})}{20} = 1 - \frac{\sqrt{5}}{5}$$

کیسول دوبینگ | (مستطیل طلایی)

در مستطیل مقابل نسبت طول به عرض $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ می‌باشد.



اگر در این مستطیل، مربعی به طول ضلع a دربرآوریم، مستطیل باقی‌مانده با مستطیل اولیه متشابه می‌باشد:

$$\frac{a+b}{a} = \frac{a}{b} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

را عدد طلایی می‌نامند که جوابی برای معادله $x^2 - x - 1 = 0$ نیز می‌باشد.



۱۶- اگر $A(2, 3)$ و $B(4, 7)$ دو رأس مثلث متساوی‌الاضلاع ABC باشند، آن‌گاه در دستگاه مختصات، عرض نقطه C کدام

است؟

(۴) $5 \pm \sqrt{3}$

(۳) $3 \pm \sqrt{3}$

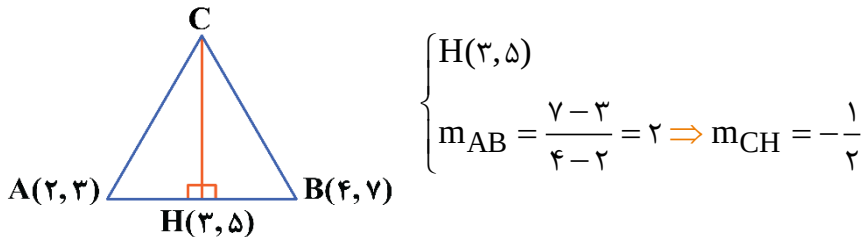
(۲) $6 \pm 2\sqrt{3}$

(۱) $4 \pm 2\sqrt{3}$

(سخت - مفهومی/محاسباتی - زمان ۵ - حسابان ۱ صفحه ۳۰ - ۱۱۰۱)

پاسخ: گزینه ۴

شکل فرضی مقابل را در نظر بگیرید:



حال معادله عمودمنصف پاره‌خط AB یعنی CH را می‌نویسیم:

$$CH \text{ معادله } \Rightarrow y - 5 = -\frac{1}{2}(x - 3) \Rightarrow y = -\frac{1}{2}x + \frac{13}{2}$$

پس مختصات نقطه C به صورت $C(\alpha, -\frac{1}{2}\alpha + \frac{13}{2})$ می‌باشد و داریم:

$$CH = \sqrt{(\alpha - 3)^2 + (-\frac{1}{2}\alpha + \frac{13}{2} - 5)^2} = \sqrt{(\alpha - 3)^2 + (-\frac{1}{2}\alpha + \frac{3}{2})^2} = \sqrt{(\alpha - 3)^2 + (-\frac{1}{2}(\alpha - 3))^2}$$

$$\Rightarrow CH = \sqrt{(\alpha - 3)^2 + \frac{1}{4}(\alpha - 3)^2} = \sqrt{\frac{5}{4}(\alpha - 3)^2} = \frac{\sqrt{5}}{2}|\alpha - 3|$$

از طرفی توجه به این که ارتفاع در مثلث متساوی‌الاضلاع برابر ضلع است، داریم:

$$CH = \frac{\sqrt{3}}{2} AB \Rightarrow \frac{\sqrt{5}}{2}|\alpha - 3| = \frac{\sqrt{3}}{2} \sqrt{(4-2)^2 + (7-3)^2} \Rightarrow \sqrt{5}|\alpha - 3| = \sqrt{3} \times 2\sqrt{5}$$

$$|\alpha - 3| = 2\sqrt{3} \Rightarrow \alpha - 3 = \pm 2\sqrt{3} \Rightarrow \alpha = 3 \pm 2\sqrt{3}$$

$$C \text{ عرض نقطه } = -\frac{1}{2}\alpha + \frac{13}{2} \Rightarrow y_C = -\frac{1}{2}(3 \pm 2\sqrt{3}) + \frac{13}{2} = 5 \pm \sqrt{3}$$

• • •

۱۷- تابع $f(x) = \begin{cases} 1-2x & x < -1 \\ -x^2 + 2ax + 1 & x \geq -1 \end{cases}$ در $\mathbb{R}$ وارون پذیر است. اگر a عددی صحیح باشد، مقدار $f^{-1}(-34)$ کدام است؟

(۴) ۶

(۳) ۳

(۲) ۵

(۱) ۴

(متوسط - ترکیبی/محاسباتی - استاندارد ۵ - حسابان ۱ صفحه ۵۶ و ۵۸ - ۱۱۰۲)

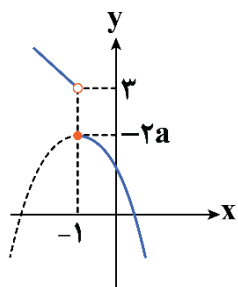
پاسخ: گزینه ۲

باید تابع $f(x)$ یک‌به‌یک باشد، چون ضابطه بالا نشان‌دهنده یک تابع خطی است پس یک‌به‌یک می‌باشد. همین‌طور در ضابطه

پایین باید طول رأس سهمی کوچک‌تر یا مساوی -1 باشد، بنابراین:

$$-1 \leq a \Rightarrow \text{طول رأس سهمی}$$

شکل فرضی مقابل را در نظر بگیرید:



$$a \geq -\frac{3}{2}$$

$$-\frac{3}{2} \leq a \leq -1 \Rightarrow a = -1$$

همچنین باید $-2a \leq 3$ باشد، یعنی:

از اشتراک دو شرط $a \leq -1$ و $a \geq -\frac{3}{2}$ با فرض $a \in \mathbb{Z}$ داریم:

اگر $f^{-1}(-34) = \alpha$ باشد، آن گاه $f(\alpha) = -34$ است و داریم:

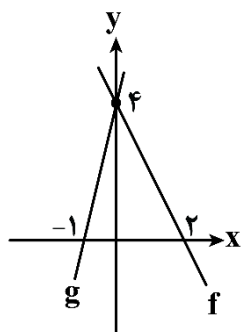
$$f(\alpha) = -\alpha^2 - 2\alpha + 1 = -34 \Rightarrow \alpha^2 + 2\alpha - 35 = 0 \Rightarrow (\alpha + 7)(\alpha - 5) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \alpha = -7 \\ \alpha = 5 \end{cases}$$

یک‌به‌یک بودن در توابع چندضابطه‌ای

اگر تابع $f(x) = \begin{cases} g(x) & x \geq a \\ h(x) & x < a \end{cases}$ یک‌به‌یک باشد حتماً توابع $g(x)$ و $h(x)$ یک‌به‌یک می‌باشند و همچنین در **نقطه مرزی** وضعیت یک‌به‌یک بودن تابع باید بررسی شود.



۱۸- نمودارهای توابع f و g در شکل زیر رسم شده است. نمودار تابع f را نسبت به محور y ها قرینه کرده و سپس ۳ واحد به راست انتقال می‌دهیم. نمودار جدید، نمودار تابع g را در نقطه‌ای با کدام طول قطع می‌کند؟



(۱) -۷

(۲) -۲

(۳) -۳

(۴) -۴

(متوسط - مفهومی/محاسباتی - استاندارد) - حسابان ۲ صفحه ۵ - ۱۲۰۱

پاسخ: گزینه ۳

ضابطه توابع f و g به صورت $f(x) = -2x + 4$ و $g(x) = 4x + 4$ می‌باشد. بنابراین:

$$f(-x) = -2(-x) + 4 \Rightarrow f(-x) = 2x + 4$$

$$\xrightarrow[\text{واحد به راست}]{x \rightarrow x-3} f(-(x-3)) = 2(x-3) + 4 \Rightarrow f(3-x) = 2x - 2$$

حال تقاطع تابع جدید با تابع $g(x)$ را محاسبه می‌کنیم. ببینید:

$$f(3-x) = g(x) \Rightarrow 2x - 2 = 4x + 4 \Rightarrow 2x = -6 \Rightarrow x = -3$$



۱۹- اگر α و β ریشه‌های معادله $ax^3 - (1+b^2)x + b^2 = 0$ و b عددی طبیعی باشد، حداقل مقدار ممکن برای $\alpha^2 + \beta^2$ کدام

است؟

۴ (۴)

۳ (۳)

۱ (۲)

۶ (۱)

(سخت - مفهومی/محاسباتی - استاندارد) - حسابان ۱ صفحه ۱۳ - ۱۱۰۱

پاسخ: گزینه ۳

از آن جایی که $x = 1$ ریشه است پس در معادله صدق می‌کند و داریم:

$$a \times 1^3 - (1+b^2) \times 1 + b^2 = 0 \Rightarrow a - 1 - b^2 + b^2 = 0 \Rightarrow a = 1$$

بنابراین:

$$x^3 - (1+b^2)x + b^2 = 0$$

چون $x = 1$ یک ریشه معادله است، پس $x - 1$ عاملی از طرف غیرصفر معادله است، با تقسیم طرف غیرصفر بر $x - 1$ داریم:

$$\begin{array}{r|l} x^3 - (1+b^2)x + b^2 & x-1 \\ x^3 - x^2 & x^2 + x - b^2 \\ \hline x^2 - (1+b^2)x + b^2 & \\ x^2 - x & \\ \hline -b^2x + b^2 & \\ -b^2x + b^2 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

پس عبارت درجه ۳ به صورت زیر تجزیه می‌شود و بنابراین α و β ریشه‌های معادله درجه دوم به دست آمده هستند:

$$\Rightarrow x^3 - (1+b^2)x + b^2 = 0 \Rightarrow (x-1)(x^2 + \underset{\alpha}{x} - b^2) = 0$$

$$\Rightarrow x^2 + x - b^2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} S = -1 \\ P = -b^2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \alpha^2 + \beta^2 = S^2 - 2P = (-1)^2 - 2(-b^2) = 1 + 2b^2$$

پس حداقل مقدار $\alpha^2 + \beta^2$ یعنی $1 + 2b^2$ با توجه به طبیعی بودن b برابر ۳ است.

در باب محاسبه ریشه‌های معادله

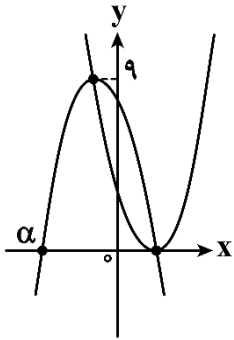
اگر $f(x)$ یک چندجمله‌ای و $x = k$ یک ریشه آن باشد، برای به دست آوردن سایر ریشه‌های معادله کافی است، $f(x)$ را بر $x - k$ تقسیم کنیم:

$$f(x) = 0 \xrightarrow{x=k \text{ یک جواب معادله}} f(x) \left| \begin{array}{l} x-k \\ g(x) \end{array} \right. \Rightarrow f(x) = 0 \Rightarrow g(x) \times (x-k) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x-k=0 \Rightarrow x=k \\ g(x)=0 \end{cases}$$

۲۰- نمودار دو سهمی $f(x) = x^2 - 4x + 4$ و $g(x) = -x^2 + 4ax + 2b$ مطابق شکل مقابل است. هر کدام از سهمی‌ها از رأس

سهمی دیگر عبور کرده‌اند. مقدار α کدام است؟

- (۱) -۶
(۲) -۳
(۳) -۵
(۴) -۴



(متوسط - مفهومی/محاسباتی - استاندارد) - حسابان ۱ صفحه ۱۶ - ۱۱۰۱

پاسخ: گزینه ۴

با توجه به آن که $f(x) = (x-2)^2$ و از آن جا نمودار f در نقطه‌ای با عرض ۹ سهمی g را قطع کرده است، داریم:

$$(x-2)^2 = 9 \Rightarrow x-2 = \pm 3 \Rightarrow \begin{cases} x = 5 \\ x = -1 \end{cases} \text{ غ ق ق}$$

پس رأس سهمی $y = g(x)$ نقطه $S(-1, 9)$ است و داریم:

$$g(x) = -x^2 + 4ax + 2b \Rightarrow x_S = \frac{-4a}{-2} = -1 \Rightarrow 2a = -1 \Rightarrow a = -\frac{1}{2}$$

از طرفی نقطه $A(2, 0)$ روی سهمی $g(x)$ قرار دارد، پس $g(2) = 0$ می‌باشد:

$$g(2) = -2^2 + 4(-\frac{1}{2}) \times 2 + 2b = 0 \Rightarrow -4 - 4 + 2b = 0 \Rightarrow b = 4 \Rightarrow g(x) = -x^2 - 2x + 8$$

α ریشه منفی $g(x)$ است، پس:

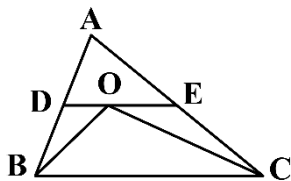
$$g(x) = 0 \Rightarrow -x^2 - 2x + 8 = 0 \Rightarrow -(x+4)(x-2) = 0 \Rightarrow x = \alpha = -4$$



۲۱- در شکل مقابل، $AD=3$ ، $DB=2$ و $EC=4$ است. اگر O محل هم‌مرسی نیم‌ساز زوایای B و C باشد، اندازه BC کدام

است؟ ($DE \parallel BC$)

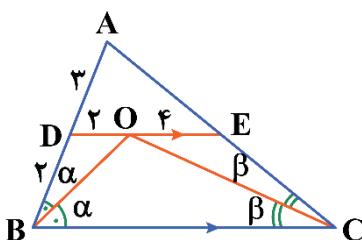
- (۱) ۸
(۲) ۹
(۳) ۱۰
(۴) ۱۱



(متوسط - مفهومی - استاندارد) - هندسه ۱ صفحه ۳۵ - ۱۰۰۲

پاسخ: گزینه ۳

می‌دانیم که O محل هم‌مرسی نیم‌ساز زوایای $\hat{B}$ و $\hat{C}$ است، پس با توجه به قضیه خطوط موازی و مورب داریم:



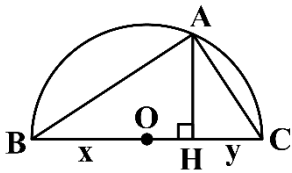
$$DE \parallel BC : \begin{cases} \text{مورب } OB \Rightarrow \hat{DOB} = \alpha \Rightarrow \overset{\Delta}{DOB} \text{ متساوی الساقین} \Rightarrow OD = DB = 2 \\ \text{مورب } OC \Rightarrow \hat{EOC} = \beta \Rightarrow \overset{\Delta}{EOC} \text{ متساوی الساقین} \Rightarrow OE = EC = 4 \end{cases}$$

از طرفی، به کمک تعمیم قضیه تالس، خواهیم داشت:

$$DE \parallel BC \Rightarrow \frac{AD}{AB} = \frac{DE}{BC} \Rightarrow \frac{3}{5} = \frac{6}{BC} \Rightarrow BC = \frac{30}{3} = 10$$

۲۲- در شکل زیر، نیم‌دایره‌ای به شعاع ۳ و به مرکز O رسم شده است. اگر $BH = x$ ، $CH = y$ و $AH = 2\sqrt{2}$ باشد، حاصل

$x^2 + y^2$ کدام است؟



(۱) ۱۲

(۲) ۱۶

(۳) ۲۰

(۴) ۲۴

(آسان - مفهومی - سریع) - هندسه ۱ صفحه ۴۲ - ۱۰۰۲

پاسخ: گزینه ۳

زاویه A، زاویه محاطی روبه‌رو به قطر است، پس $\hat{A} = 90^\circ$ و در نتیجه مثلث ABC قائم‌الزاویه است. طبق روابط طولی در مثلث قائم‌الزاویه ABC داریم:

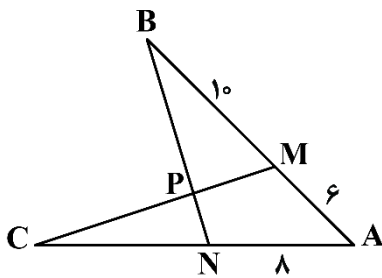
$$AH^2 = BH \times CH \Rightarrow (2\sqrt{2})^2 = xy \Rightarrow xy = 8$$

از طرفی، طول قطر نیم‌دایره یعنی وتر مثلث قائم‌الزاویه برابر ۶ است، پس داریم:

$$BC = x + y = 6 \Rightarrow (x + y)^2 = 36 \Rightarrow x^2 + y^2 + 2xy = 36 \xrightarrow{xy=8} x^2 + y^2 + 2 \times 8 = 36 \Rightarrow x^2 + y^2 = 20$$

•••

۲۳- در شکل زیر، اگر $\hat{B} = \hat{C}$ باشد، نسبت مساحت مثلث BMP به مساحت مثلث CNP کدام است؟



(۱) ۴

(۲) $\frac{25}{9}$

(۳) $\frac{16}{9}$

(۴) $\frac{25}{4}$

(متوسط - مفهومی - استاندارد) - هندسه ۱ صفحه ۴۷ - ۱۰۰۲

پاسخ: گزینه ۴

برای دو مثلث ANB و AMC داریم:

$$\left. \begin{array}{l} \hat{A} = \hat{A} \text{ (مشترک)} \\ \hat{B} = \hat{C} \end{array} \right\} \Rightarrow \triangle ANB \sim \triangle AMC \Rightarrow \frac{AN}{AM} = \frac{AB}{AC} \Rightarrow \frac{8}{6} = \frac{16}{AC} \Rightarrow AC = 12$$

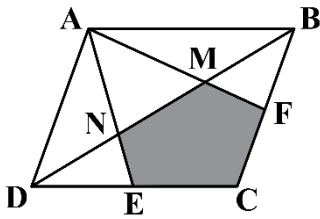
$$CN = AC - AN = 12 - 8 = 4$$

از طرفی، برای دو مثلث BMP و CNP داریم:

$$\left. \begin{array}{l} \hat{B} = \hat{C} \\ \hat{BPM} = \hat{CPN} \end{array} \right\} \Rightarrow \triangle BMP \sim \triangle CNP \Rightarrow \frac{S_{\triangle BMP}}{S_{\triangle CNP}} = \left(\frac{BM}{CN}\right)^2 \Rightarrow \frac{S_{\triangle BMP}}{S_{\triangle CNP}} = \left(\frac{10}{4}\right)^2 = \left(\frac{5}{2}\right)^2 = \frac{25}{4}$$

•••

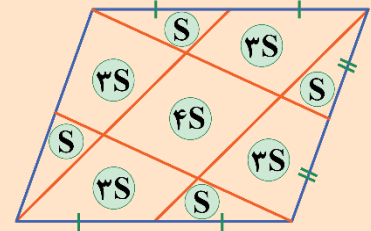
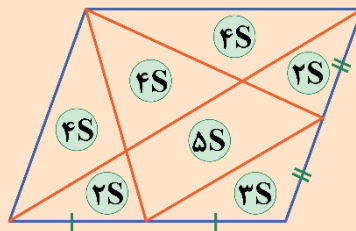
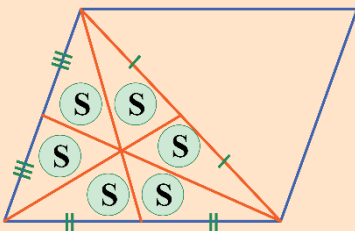
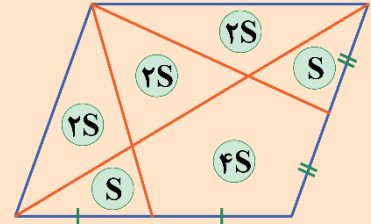
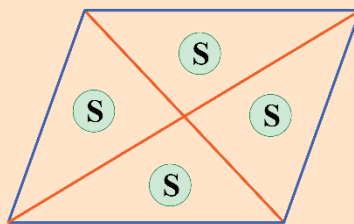
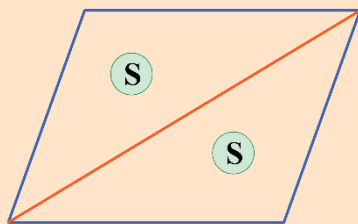
۱۶ واحد مربع باشد، آنگاه مساحت مثلث **AMB** کدام است؟



- 6 (1)
 1 (2)
 4 (3)
 10 (4)

 پاسخ: گزینه ۲

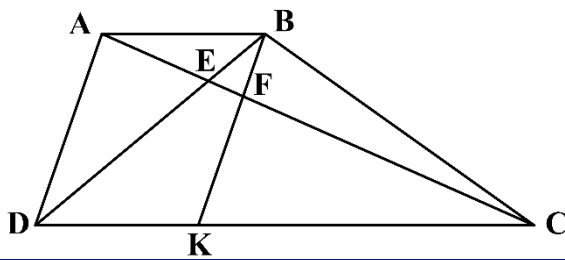
The diagram shows a parallelogram \$ABCD\$ with vertices \$A\$ (top-left), \$B\$ (top-right), \$C\$ (bottom-right), and \$D\$ (bottom-left). Diagonals \$AC\$ and \$BD\$ intersect at point \$M\$. A line segment \$EF\$ passes through \$M\$, where \$E\$ is on side \$DC\$ and \$F\$ is on side \$AB\$. Tick marks indicate \$DE = EC\$ and \$AF = FB\$. Several regions are shaded: triangle \$AMF\$ is blue; triangles \$DMN\$ and \$BMF\$ are red; quadrilateral \$EMCN\$ is red. Circles with numbers represent areas: \$fS\$ in \$AMF\$, \$rS\$ in \$DMN\$, \$rS\$ in \$BMF\$, and \$S\$ in \$EMCN\$. To the right, the equation \$fS = 16 \Rightarrow S = 4\$ is written.

$$2S = 2 \times 4 = 8$$


$$S_1 + S_3 = S_2 + S_4$$

۲۵- در شکل مقابل چهارضلعی ABCD دوزنقه و چهارضلعی ABKD متوازی‌الاضلاع است. اگر $DE = ۳EB$ باشد، نسبت

مساحت چهارضلعی DEFK به مساحت مثلث BEF کدام است؟



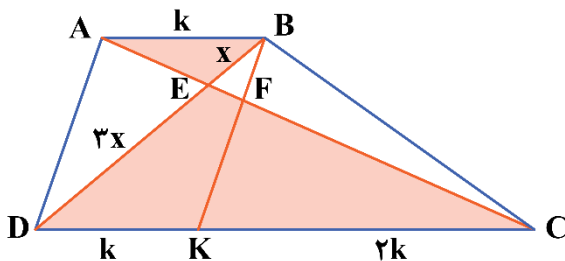
- (۱) ۹
(۲) ۱۰
(۳) ۱۱
(۴) ۱۲

(سخت - ترکیبی/محاسباتی - زمان ۷۰ - هندسه ۱ صفحه ۶۷ - ۱۰۰۳)

پاسخ: گزینه ۳

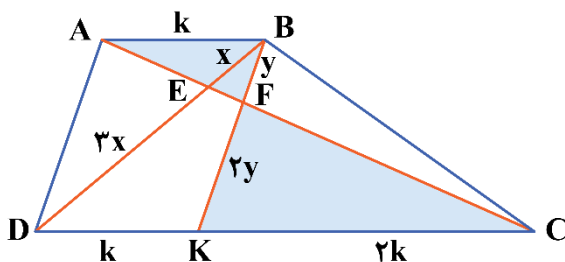
$$DE = ۳EB \Rightarrow \begin{cases} DE = ۳x \\ EB = x \end{cases}$$

مطابق شکل مقابل، دو مثلث AEB و EDC طبق قضیه اساسی تشابه با هم متشابه‌اند، پس:



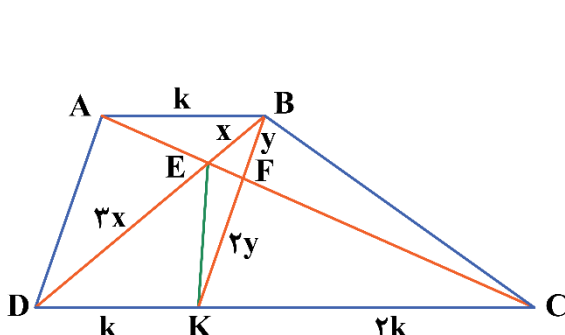
$$\frac{DC}{AB} = ۳ \Rightarrow \begin{cases} DC = ۳k \\ AB = k \end{cases} \Rightarrow KC = ۲k$$

از طرفی دو مثلث ABF و FKC نیز طبق قضیه اساسی تشابه متشابه‌اند، پس:



$$\frac{FK}{FB} = ۲ \Rightarrow \begin{cases} FK = ۲y \\ FB = y \end{cases}$$

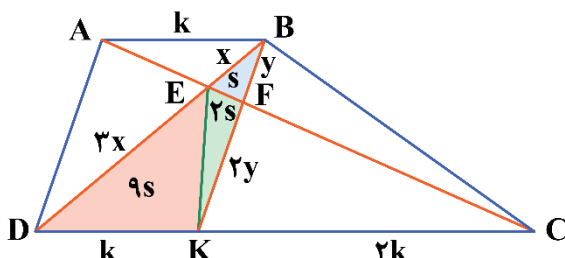
حالا اگر خط کمکی EK را رسم کنیم و مساحت مثلث BEF را برابر S فرض کنیم خواهیم داشت:



$$\frac{S_{\triangle EFK}}{S_{\triangle BEF}} = \frac{FK}{BF} = \frac{۲y}{y} = ۲ \Rightarrow \frac{S_{\triangle EFK}}{S} = ۲ \Rightarrow S_{\triangle EFK} = ۲S$$

$$\frac{S_{\triangle KED}}{S_{\triangle KEB}} = \frac{۳x}{x} = ۳ \Rightarrow \frac{S_{\triangle KED}}{S + ۲S} = ۳ \Rightarrow S_{\triangle KED} = ۹S$$

جمع‌بندی کنیم:



$$\frac{S_{\triangle DEF}}{S_{\triangle BEF}} = \frac{S_{\triangle KED} + S_{\triangle EFK}}{S_{\triangle BEF}} = \frac{9S + 2S}{S} = \frac{11S}{S} = 11$$

در نتیجه:



۲۶- کدام یک از گزینه‌های زیر همواره صحیح است؟

- (۱) اگر خطی بر یکی از خطوط صفحه عمود باشد، بر آن صفحه عمود است.
- (۲) اگر خطی با یک صفحه موازی باشد، با هر خط واقع بر آن صفحه موازی است.
- (۳) اگر دو خط بر هم عمود باشند، هر صفحه موازی با یکی از آن‌ها بر دیگری عمود است.
- (۴) اگر خطی بر دو خط متقاطع از صفحه‌ای در نقطه تقاطع عمود باشد، بر آن صفحه عمود است.

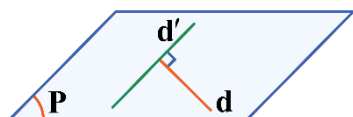
(متوسط - مفهومی/خطبه‌خط - استاندارد ۵) - هندسه ۱ صفحه ۸۳ - ۱۰۰۴

پاسخ: گزینه ۴

بررسی گزینه‌ها:

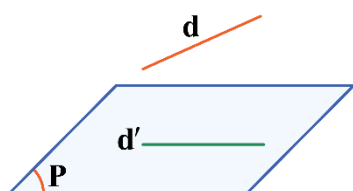
۱

نادرست است. خط d بر خط d' واقع در صفحه P عمود است، اما بر صفحه P عمود نیست.



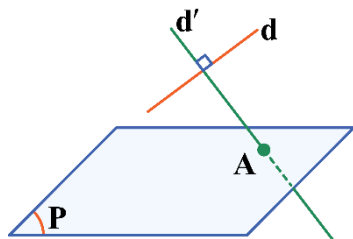
۲

نادرست است. d با P موازی است اما با خط d' واقع در صفحه P متناظر است.



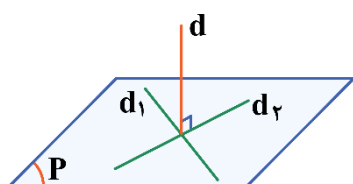
۳

نادرست است. d موازی P است و d' بر d عمود است اما d' با P موازی نیست بلکه در نقطه A متقاطع است.



۴

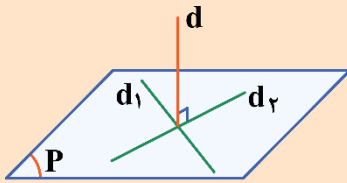
قضیه اساسی تعامد است و همواره درست است.



$$\left. \begin{array}{l} d \perp d_1 \\ d \perp d_2 \\ d_1 \subset P \\ d_2 \subset P \end{array} \right\} \Rightarrow d \perp P$$

کپسول دوبینگ | قضیه اساسی تعامد

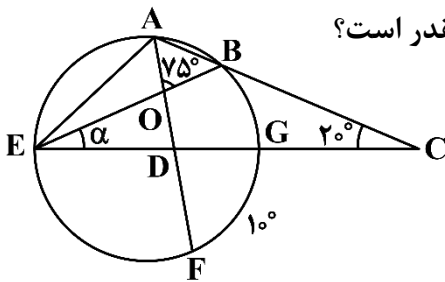
اگر خطی بر دو خط متقاطع از صفحه‌ای در نقطه تقاطع، عمود باشد، بر آن صفحه عمود است.



$$\left. \begin{array}{l} d \perp d_1 \\ d \perp d_2 \\ d_1 \subset P \\ d_2 \subset P \end{array} \right\} \Rightarrow d \perp P$$

•••

۲۷- در دایره مقابل، $\widehat{GF} = 10^\circ$ و $\widehat{BCG} = 20^\circ$ و $\widehat{AOB} = 75^\circ$ ، اندازه زاویه $\widehat{BEC}$ چقدر است؟



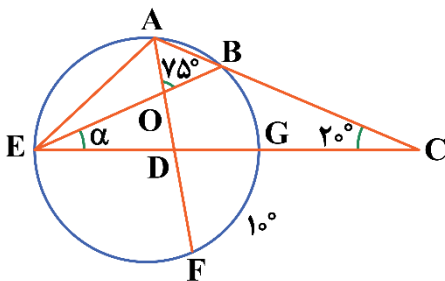
- (۱) 50°
- (۲) 30°
- (۳) 45°
- (۴) 40°

متوسط - مفهومی/محاسباتی - استاندارد (۱۱۰۱ - هندسه ۲ صفحه ۱۶ - ۱۱۰۱)

پاسخ: گزینه ۴

$$\frac{\widehat{AB} + \widehat{EF}}{2} = 75^\circ \Rightarrow \widehat{AB} + \widehat{EF} = 150^\circ$$

از طرفی:



$$\begin{aligned} \widehat{AB} + \widehat{BG} + \widehat{GF} + \widehat{FE} + \widehat{EA} &= 360^\circ \\ \Rightarrow 150^\circ + 10^\circ + \widehat{BG} + \widehat{AE} &= 360^\circ \Rightarrow \widehat{BG} + \widehat{AE} = 200^\circ \end{aligned}$$

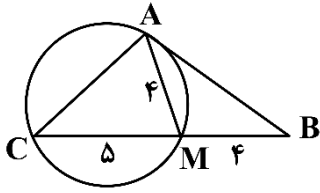
از طرفی:

$$\frac{\widehat{AE} - \widehat{BG}}{2} = 20^\circ \Rightarrow \widehat{AE} - \widehat{BG} = 40^\circ$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \widehat{AE} + \widehat{BG} = 200^\circ \\ \widehat{AE} - \widehat{BG} = 40^\circ \end{cases} \Rightarrow \widehat{AE} = 120^\circ, \widehat{BG} = 80^\circ \Rightarrow \alpha = \frac{\widehat{BG}}{2} = 40^\circ$$

•••

۲۸- در دایره شکل مقابل AB بر دایره مماس است. حاصل $AB + AC$ کدام است؟



(۱) ۱۰

(۲) ۱۲

(۳) ۱۵

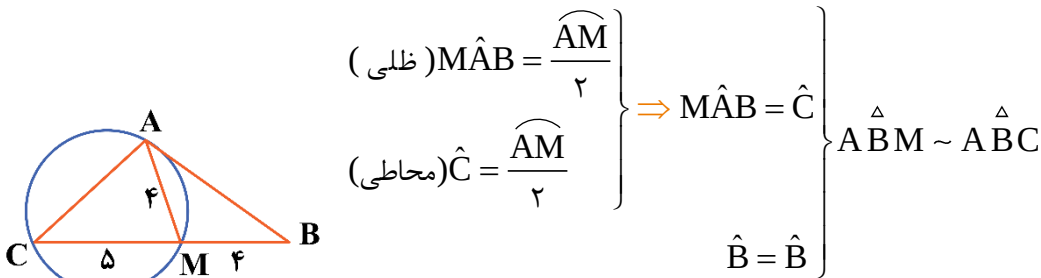
(۴) ۲۰

(متوسط - مفهومی - استاندارد) - هندسه ۲ صفحه ۱۸ - ۱۱۰۱

پاسخ: گزینه ۲

روش اول

برای دو مثلث ABM و ABC داریم:



$$\frac{AM}{AC} = \frac{MB}{AB} = \frac{AB}{BC} \Rightarrow \frac{4}{AC} = \frac{4}{AB} = \frac{AB}{9} \Rightarrow \begin{cases} AB = 6 \\ AC = 6 \end{cases}$$

$$\Rightarrow AB + AC = 12$$

روش دوم

طبق روابط طولی مماس و قاطع در این دایره داریم:

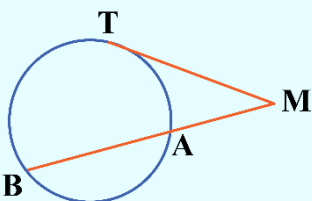
$$AB^2 = BM \times BC = 4 \times 9 = 36 \Rightarrow AB = 6$$

$$\left. \begin{array}{l} AM = BM = 4 \Rightarrow \widehat{MAB} = \widehat{B} \\ \widehat{MAB} = \frac{\widehat{AM}}{2} \text{ (ظلی)} \\ \widehat{C} = \frac{\widehat{AM}}{2} \text{ (محاطی)} \end{array} \right\} \Rightarrow \widehat{MAB} = \widehat{C} \Rightarrow \widehat{B} = \widehat{C} \xrightarrow{\triangle ABC \text{ متساوی الساقین}} AC = AB = 6$$

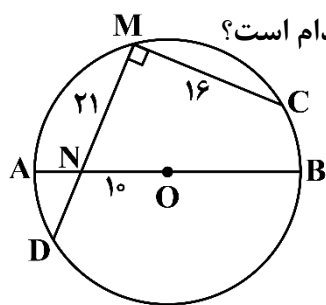
$$AB + AC = 6 + 6 = 12$$

محاسبه طول پاره خط مماس بر دایره

اگر از نقطه M بیرون یک دایره، یک مماس و یک قاطع نسبت به دایره رسم کنیم، آن گاه اندازه مماس واسطه هندسی بین دو قطعه قاطع است.



$$MT^2 = MA \times MB$$



۲۹- در دایره شکل مقابل به مرکز O، $MC = 16$ ، $MN = 21$ و $NO = 10$ می‌باشد. اندازه AN کدام است؟

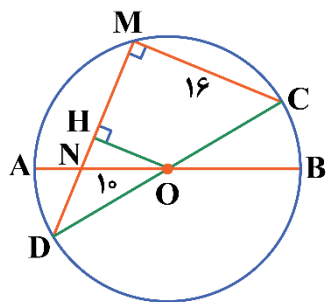
- (۱) ۱۰
(۲) ۷
(۳) ۸
(۴) ۹

(سخت - محاسباتی - زمان‌بر) - هندسه ۲ صفحه ۱۸ - ۱۱۰۱

پاسخ: گزینه ۲

روش اول

از C به D وصل می‌کنیم. CD قطر دایره است، زیرا زاویه محاطی روبه‌رو به آن یعنی M، قائمه است. از O عمود OH را بر MD رسم می‌کنیم. H وسط وتر MD است زیرا خطی که از مرکز دایره بر وتر MD عمود می‌شود، آن را نصف می‌کند.



طبق تعمیم قضیه تالس در مثلث DMC داریم:

$$\frac{OH}{CM} = \frac{DH}{DM} \Rightarrow \frac{OH}{16} = \frac{1}{2} \Rightarrow OH = 8$$

با به کار بستن قضیه فیثاغورس در مثلث ONH داریم:

$$NH = \sqrt{ON^2 - OH^2} \Rightarrow NH = \sqrt{10^2 - 8^2} = 6$$

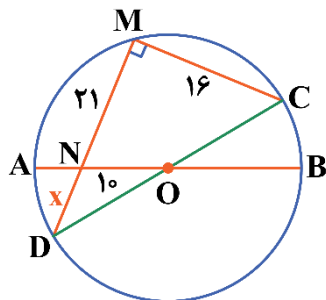
بنابراین:

$$MN = 21, NH = 6 \Rightarrow MH = 21 - 6 = 15 \Rightarrow HD = 15 \Rightarrow OD = R = \sqrt{OH^2 + DH^2} = \sqrt{8^2 + 15^2} = 17$$

$$AN = R - ON = 17 - 10 = 7$$

روش دوم

از D به C وصل می‌کنیم:



$$ND \times NM = NA \times NB \Rightarrow x \times 21 = (R - 10) \times (R + 10) \Rightarrow 21x = R^2 - 100 \quad (I)$$

$$\triangle MDC: MD^2 + MC^2 = DC^2 \Rightarrow (21 + x)^2 + 16^2 = (2R)^2$$

در مثلث MDC داریم:

بنابراین:

$$x^2 + 42x + 441 + 256 = 4R^2 \stackrel{(I)}{=} 4(21x + 100) \Rightarrow x^2 + 42x + 441 + 256 = 84x + 400 \Rightarrow x^2 - 42x + 297 = 0$$

$$\Rightarrow (x - 9)(x - 33) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 9 \\ x = 33 \end{cases}$$

اگر: $x = 9 \Rightarrow R = 17 \Rightarrow AN = R - ON = 17 - 10 = 7$

اگر: $x = 33 \Rightarrow R = \sqrt{793} \Rightarrow AN = R - ON = \sqrt{793} - 10$. با توجه به شکل و گزینه‌ها نمی‌تواند درست باشد.

••• ilo •••

۳۰- دو دایره $C(O, R)$ و $C'(O', R')$ مماس بیرون و شعاع‌های دو دایره ریشه‌های معادله $x^2 - 20x + 25 = 0$ هستند. اگر T و T' نقاط تماس مماس مشترک خارجی با دو دایره باشند، مساحت چهارضلعی $OTT'O'$ کدام است؟

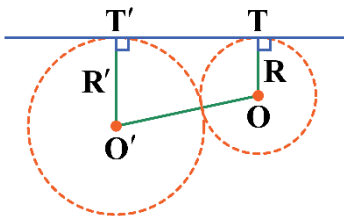
(۱) ۱۰۰ (۲) $50\sqrt{3}$ (۳) $25\sqrt{6}$ (۴) ۲۰۰

(آسان - مفهومی - سریع) - هندسه ۲ صفحه ۲۲ - ۱۱۰۱

پاسخ: گزینه ۱

$$RR' = 25 \text{ و } R + R' = 20$$

با توجه به معادله از حسابان می‌دانیم که:



همچنین چهارضلعی $OTT'O'$ دوزنقه قائم‌الزاویه است.

$$\text{طول مماس مشترک خارجی} = TT' = 2\sqrt{RR'} = 2\sqrt{25} = 10$$

$$S_{OTT'O'} = \frac{(R + R')(TT')}{2} = \frac{(20)(10)}{2} = 100$$

کپسول دوبینگ | (طول مماس‌های مشترک دایره‌ها)

دو دایره $C(O, R)$ و $C'(O', R')$ با طول خط‌المركزین $OO' = d$ را در نظر بگیرید. طول مماس مشترک‌های این دو دایره در صورت وجود از روابط زیر به دست می‌آید:

$$\begin{aligned} \text{طول مماس مشترک خارجی} &= \sqrt{d^2 - (R - R')^2} \\ \text{طول مماس مشترک داخلی} &= \sqrt{d^2 - (R + R')^2} \end{aligned}$$

طول مماس مشترک خارجی دو دایره **مماس خارج** به شعاع‌های R و R' ، برابر $2\sqrt{RR'}$ است.

••• ilo •••

۳۱- اگر ارزش گزاره $(\sim p \Rightarrow q) \Rightarrow (\sim q \vee r)$ نادرست باشد، ارزش کدام‌یک از گزاره‌های زیر همواره نادرست است؟

(۱) $p \Rightarrow (q \Rightarrow r)$ (۲) $(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow r$ (۳) $\sim q \vee (p \Rightarrow r)$ (۴) $(p \Rightarrow r) \Leftrightarrow \sim q$

(متوسط - مفهومی - استاندارد) - آمار و احتمال صفحه ۱۱ - ۱۱۰۱

پاسخ: گزینه ۲

با توجه به فرض سؤال داریم:

$$(\sim p \Rightarrow q) \Rightarrow (\sim q \vee r) \equiv F \Rightarrow \begin{cases} \sim p \Rightarrow q \equiv T \\ \sim q \vee r \equiv F \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sim q \equiv F \Rightarrow q \equiv T \\ r \equiv F \end{cases}$$

با توجه به درستی q و $p \Rightarrow q$ ، ارزش گزاره p را نمی‌توان به‌طور قطعی مشخص کرد.
بررسی گزینه‌ها:

①

در صورت نادرستی p ، گزاره $p \Rightarrow (q \Rightarrow r)$ درست است.

②

گزاره $p \Rightarrow q$ درست و r نادرست است، پس ترکیب دشرطی آن‌ها **همواره نادرست** است.

③

اگر p نادرست باشد، گزاره $p \Rightarrow r$ درست و ترکیب فصلی آن با $\sim q$ درست است.

④

گزاره $\sim q$ نادرست است. از طرفی اگر p درست باشد، گزاره $p \Rightarrow r$ نادرست است، پس در این حالت ترکیب دشرطی آن‌ها درست خواهد بود.

ترکیب شرطی و دو شرطی

ترکیب شرطی $p \Rightarrow q$ تنها در صورتی **نادرست** است که p (مقدم) درست و q (تالی) نادرست باشد. در صورت نادرست بودن p ، ترکیب شرطی $p \Rightarrow q$ همواره **به انتقای مقدم درست** است.
ترکیب دشرطی $p \Leftrightarrow q$ در صورتی **درست** است که ارزش دو گزاره p و q **یکسان** باشد.



۳۲- اگر p و q دو گزاره منطقی باشند و $p \oplus q$ را یک ترکیب از این دو گزاره تعریف کنیم به گونه‌ای که جدول ارزشی این ترکیب به صورت مقابل باشد، آنگاه $p \oplus q$ هم‌ارز با کدام‌یک از گزاره‌های زیر است؟

p	q	$p \oplus q$
T	T	F
T	F	T
F	T	T
F	F	F

(۱) $(p \wedge \sim q) \vee (p \wedge q)$

(۲) $(p \wedge \sim q) \vee (\sim p \wedge q)$

(۳) $\sim (p \wedge \sim q) \vee (\sim p \wedge q)$

(۴) $\sim ((p \wedge \sim q) \vee (p \wedge q))$

(سخت - مفهومی - زمان‌بر ۵) - آمار و احتمال صفحه ۷ - ۱۱۰۱

پاسخ: گزینه ۲

روش اول

گزینه ۲ درست است، یعنی $p \oplus q \equiv (p \wedge \sim q) \vee (\sim p \wedge q)$ و درستی این مطلب با توجه به جدول ارزش گزاره‌ای می‌باشد.

p	q	$\sim p$	$\sim q$	$p \wedge \sim q$	$\sim p \wedge q$	$p \oplus q$	$(p \wedge \sim q) \vee (\sim p \wedge q)$
T	T	F	F	F	F	F	F
T	F	F	T	T	F	T	T
F	T	T	F	F	T	T	T
F	F	T	T	F	F	F	F

همانطور که مشاهده می‌کنید، دو ستون آخر جدول یکسان هستند.

روش دوم

با توجه به جدول، گزاره $p \oplus q$ نقیض گزاره دو شرطی $p \Leftrightarrow q$ است، پس داریم:

$$\sim (p \Leftrightarrow q) \equiv \sim [(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)]$$

$$\begin{aligned} &\equiv \sim (p \Rightarrow q) \vee \sim (q \Rightarrow p) && (\text{دمورگان}) \\ &\equiv \sim (\sim p \vee q) \vee \sim (\sim q \vee p) && (\text{تبدیل ترکیب شرطی به فصلی}) \\ &\equiv (p \wedge \sim q) \vee (q \wedge \sim p) && (\text{دمورگان}) \end{aligned}$$



۳۳- اگر A و B دو مجموعه دلخواه، $C = (A \cap B) \cup (B' - A)$ و $D = (A \cap B)' - B'$ باشند، متمم مجموعه $C \cup D$ کدام است؟
 $A - B$ (۱) $B - A$ (۲) $A' \cup B$ (۳) $A \cup B'$ (۴)

(سخت - مفهومی - زمان بر ۵) - آمار و احتمال صفحه ۲۸ - ۱۱۰۱

پاسخ: گزینه ۱

طبق قوانین جبر مجموعه‌ها داریم:

$$\begin{aligned} C &= (A \cap B) \cup (B' - A) = (A \cap B) \cup (B' \cap A') = (A \cap B) \cup (A' \cap B') \\ D &= (A \cap B)' - B' = (A' \cup B') \cap B = (A' \cap B) \cup (B' \cap B) = A' \cap B \end{aligned}$$

حال مجموعه $C \cup D$ برابر است با:

$$\begin{aligned} C \cup D &= [(A \cap B) \cup (A' \cap B')] \cup (A' \cap B) = (A \cap B) \cup [(A' \cap B') \cup (A' \cap B)] \\ &= (A \cap B) \cup [A' \cap (B' \cup B)] = (A \cap B) \cup A' = (A \cup A') \cap (B \cup A') = A' \cup B \end{aligned}$$

متمم این مجموعه برابر است با:

$$(A' \cup B)' = A \cap B' = A - B$$

قوانین جبر مجموعه‌ها

- ۱) قانون جابه‌جایی

$$\begin{cases} A \cup B = B \cup A \\ A \cap B = B \cap A \end{cases}$$
- ۲) قانون شرکت‌پذیری

$$\begin{cases} (A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C) \\ (A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C) \end{cases}$$
- ۳) قانون توزیع‌پذیری (پخش)

$$\begin{cases} A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C) \\ A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C) \end{cases}$$
- ۴) قانون دمورگان

$$\begin{cases} (A \cup B)' = A' \cap B' \\ (A \cap B)' = A' \cup B' \end{cases}$$
- ۵) قانون جذب

$$\begin{cases} A \cup (A \cap B) = A \\ A \cap (A \cup B) = A \end{cases}$$



۳۴- اگر A و B دو مجموعه باشند به گونه‌ای که تعداد اعضای $A \cap B'$ و B به ترتیب ۶ و ۵ و تعداد اعضای $(A \times B) \cup (B \times A)$ نیز برابر با ۷۶ باشد، مجموعه $(A \times B) - (B \times A)$ چند عضو دارد؟
 ۲۸ (۱) ۳۲ (۲) ۳۶ (۳) ۴۲ (۴)

(متوسط - مفهومی - استاندارد ۵) - آمار و احتمال صفحه ۳۰ - ۱۱۰۱

پاسخ: گزینه ۳

$$n(A \cap B') = n(A - B) = ۶$$

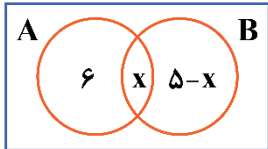
$$n(B) = ۵$$

اگر $n(A \cap B) = x$ را فرض کنیم، خواهیم داشت:

$$n((A \times B) \cup (B \times A)) = 2n(A).n(B) - (n(A \cap B))^2$$

همچنین:

$$n(A) = 6 + x$$



$$\Rightarrow 2(x+6)(5) - x^2 = 76 \Rightarrow 10x + 60 - x^2 = 76$$

$$\Rightarrow x^2 - 10x + 16 = 0 \Rightarrow (x-2)(x-8) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x=2 \checkmark \\ x=8 \text{ غ ق ق} \end{cases}$$

حال خواسته مسئله را به دست می آوریم:

$$n((A \times B) - (B \times A)) = n(A).n(B) - (n(A \cap B))^2 = 8 \times 5 - 2^2 = 36$$

کپسول دوپینگ | (ضرب دکارتی)

حاصل ضرب دکارتی نسبت به اجتماع، اشتراک، تفاضل و تفاضل متقارن خاصیت پخشی دارد، هم از چپ و هم از راست.

$$A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C) \quad (B \cap C) \times A = (B \times A) \cap (C \times A)$$

$$A \times (B - C) = (A \times B) - (A \times C) \quad (B - C) \times A = (B \times A) - (C \times A)$$

$$A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C) \quad (B \cup C) \times A = (B \times A) \cup (C \times A)$$

روابطی در مورد تعداد اعضای مجموعه ضرب دکارتی:

$$n(A \times B) = n(B \times A) = n(A).n(B)$$

$$n[(A \times B) \cap (B \times A)] = [n(A \cap B)]^2$$

$$n[(A \times B) \cup (B \times A)] = n(A \times B) + n(B \times A) - [n(A \cap B)]^2$$

$$n[(A \times B) - (B \times A)] = n(A \times B) - [n(A \cap B)]^2$$



۳۵- با جایگشت حروف کلمه «دوپینگ ماز» چند کلمه ۹ حرفی می توان ساخت که بین دو حرف «د» و «ن» و همچنین بین دو

حرف «م» و «ز» دقیقاً یک حرف قرار گرفته است؟

$$۲۵۶ \times ۵! \quad (۴)$$

$$۶۴۰ \times ۴! \quad (۳)$$

$$۶۴ \times ۸! \quad (۲)$$

$$۲۵۶ \times ۶! \quad (۱)$$

(سخت - مفهومی/محاسباتی - استاندارد) - ریاضی ۱ صفحه ۱۳۰ - ۱۰۰۶

پاسخ: گزینه ۳

اگر حروف کلمه را مجزا بنویسیم، خواهیم داشت: «د و پ ی ن گ م ا ز» و برای به دست آوردن جایگشت‌های آن، خواهیم داشت:

$$۵! \times ۴ \times ۵ \times ۲! \times ۲! \times ۲! = ۸۰ \times ۵!$$

$$\begin{matrix} \text{د، —} & \text{ن، —} & \times & \times & \times & \times & \times \\ \downarrow & \downarrow & & & & & \end{matrix}$$

$$\Rightarrow \text{تعداد حالات این وضعیت} = ۶! \times ۲! \times ۲! \times ۲! = ۴۸ \times ۵!$$

$$\text{م، —} \quad \text{ز، —}$$

$$\text{تعداد حالات} = ۸۰ \times ۵! + ۴۸ \times ۵! = ۱۲۸ \times ۵! = ۶۴۰ \times ۴!$$



۳۶- با ارقام ۱، ۲، ۲، ۴، ۴ چند عدد پنج رقمی می‌توان نوشت به طوری که نه ارقام ۲ پیش هم باشند و نه ارقام ۴؟

(۴) ۲۴

(۳) ۱۸

(۲) ۱۲

(۱) ۱۵

(متوسط - مفهومی/محاسباتی - استاندارد) - گسسته صفحه ۷۳ - ۱۲۰۳

پاسخ: گزینه ۲

$$|\bar{A} \cap \bar{B}| = |S| - |A \cup B|$$

طبق اصل شمول داریم:

تعداد کل جایگشت‌های ۵ رقم را محاسبه می‌کنیم و تعداد حالت‌هایی که حداقل ارقام یکی از دو دسته $\{۴, ۴\}$ و $\{۲, ۲\}$ کنار هم باشند را از آن کم می‌کنیم.

$$|S| = \frac{5!}{2! \times 2!} = \frac{120}{4} = 30$$

$$|2 \cup 4| = |2| + |4| - |2 \cap 4| = \frac{4!}{2!} + \frac{4!}{2!} - 3! = 12 + 12 - 6 = 18$$

$$|\bar{2} \cap \bar{4}| = |S| - |2 \cup 4| = 30 - 18 = 12$$

پس جواب برابر است با:

جایگشت‌های با تکرار

جایگشت n شیء که در آن k تا شیء یکسان وجود دارد برابر است با:

$$\frac{n!}{k!}$$

یعنی جایگشت کل اشیاء را بر جایگشت اشیاء تکراری تقسیم می‌کنیم.

•••

۳۷- به چند طریق می‌توان یک دسته گل شامل ۱۰ شاخه از ۴ نوع گل مریم، رز، نرگس و گلاب انتخاب کرد به طوری که از گل

مریم حداقل ۳ شاخه و از گل رز بیش از یک شاخه انتخاب کنیم؟

(۴) ۷۲

(۳) ۵۶

(۲) ۴۵

(۱) ۲۸

(متوسط - مفهومی - استاندارد) - گسسته صفحه ۶۰ - ۱۲۰۳

پاسخ: گزینه ۳

۴ نوع گل را با x_1, x_2, x_3, x_4 نشان می‌دهیم. تعداد جواب‌های این مسئله با تعداد جواب‌های معادله زیر با شرایط تعیین شده برابر است.

$$\left. \begin{array}{l} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 10 \\ x_1 \geq 3 \\ x_2 > 1 \Rightarrow x_2 \geq 2 \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x_1 = x_1 + 3 \\ x_2 = x_2 + 2 \end{array} \right. \Rightarrow x_1 + 3 + x_2 + 2 + x_3 + x_4 = 10 \Rightarrow x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 5$$

$$\text{تعداد جواب‌های صحیح و غیرمنفی} = \binom{5+4-1}{4-1} = \binom{8}{3} = \frac{8 \times 7 \times 6}{3 \times 2 \times 1} = 56$$

•••

۳۸- در شکل مقابل دو مربع نیمه‌پر A و B لاتین بوده و مربع B حاصل از جایگشت روی درایه‌های A می‌باشد. حاصل $3a+b$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & a & 2 & \\ & & & 3 \\ 3 & & & \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} & & 2 & \\ & 4 & & \\ 1 & & b & \\ & & & 2 \end{bmatrix}$$

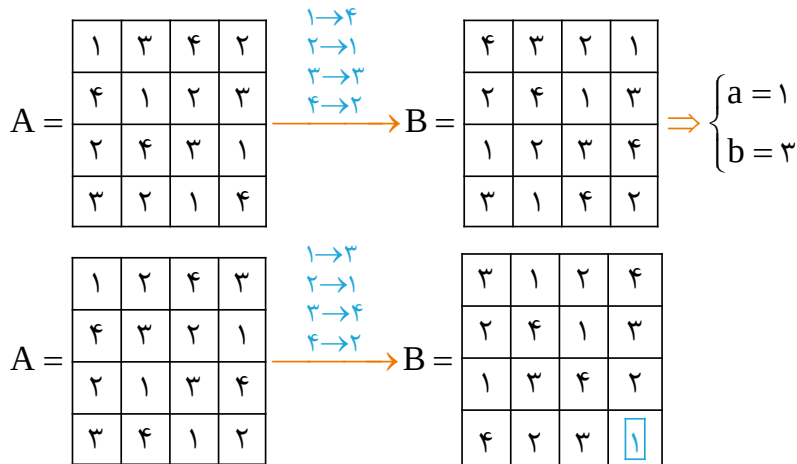
کدام است؟

- (۱) ۶
(۲) ۷
(۳) ۸
(۴) ۹

(متوسط - مفهومی - استاندارد) - گسسته صفحه ۶۴ - ۱۲۰۳

پاسخ: گزینه ۱

مربع A با توجه به موقعیت قرارگیری ۳ها به دو شکل زیر می‌تواند پر شود:



با توجه به مربع لاتین B داده‌شده در صورت سؤال، خانه آبی در مربع B در حالت دوم باید ۲ باشد اما ۱ به‌دست آمده. پس حالت دوم غیرقابل قبول می‌باشد. بنابراین:

$$3a + b = 6$$



۳۹- به چند طریق می‌توان ۶ کتاب مختلف را بین ۳ نفر توزیع کرد به طوری که به هر نفر حداقل یک کتاب برسد؟

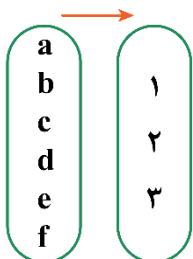
- (۱) ۵۷۰ (۲) ۵۵۰ (۳) ۵۴۰ (۴) ۵۱۰

(متوسط - مفهومی - استاندارد) - گسسته صفحه ۷۷ - ۱۲۰۳

پاسخ: گزینه ۳

روش اول

کافی است تعداد توابع پوشا از یک مجموعه ۶ عضوی به یک مجموعه ۳ عضوی را پیدا کنیم، بنابراین:



A: تعداد توابعی که ۱ را نمی‌پوشاند.

B: تعداد توابعی که ۲ را نمی‌پوشاند.

C: تعداد توابعی که ۳ را نمی‌پوشاند.

$$|A \cup B \cup C| = |S| - |A \cup B \cup C| = 3^6 - (2^6 + 2^6 + 2^6 - 1^6 - 1^6 - 1^6 + 0) = 729 - 189 = 540$$

۶ کتاب را می‌توان به صورت زیر بین ۳ نفر تقسیم کرد. ببینید:

$\frac{1}{4} - \frac{1}{4} - \frac{1}{4}$ یکی از افراد ۴ کتاب و ۲ فرد دیگر هر کدام ۱ کتاب بگیرند:

$$\frac{\binom{3}{1} \times \binom{6}{4} \times \binom{2}{1} \times \binom{2}{1} \times \binom{1}{1} \times \binom{1}{1}}{2!} = \frac{3 \times 15 \times 2 \times 2}{2} = 90$$

$\frac{3}{2} - \frac{2}{2} - \frac{1}{2}$ یکی از افراد ۳ کتاب، دیگری ۲ کتاب و فرد آخر ۱ کتاب بگیرند.

$$\binom{3}{1} \times \binom{6}{3} \times \binom{2}{1} \times \binom{3}{2} \times \binom{1}{1} \times \binom{1}{1} = 3 \times 20 \times 2 \times 3 = 360$$

$\frac{2}{2} - \frac{2}{2} - \frac{2}{2}$ هر کدام از افراد ۲ کتاب بگیرند:

$$\frac{\binom{3}{1} \times \binom{6}{2} \times \binom{2}{1} \times \binom{4}{2} \times \binom{1}{1} \times \binom{2}{2}}{3!} = \frac{3 \times 15 \times 2 \times 6}{6} = 90$$

$$90 + 360 + 90 = 540$$

••• **از** •••

۴۰- از مجموعه $\{1, 2, 3, \dots, 9, 10, 11\}$ یک زیرمجموعه حداقل چند عضوی انتخاب کنیم تا مطمئن شویم حداقل ۲ عضو در این مجموعه وجود دارد که مجموع آن‌ها ۱۲ می‌شود؟

۵ (۴)

۶ (۳)

۷ (۲)

۸ (۱)

(متوسط - مفهومی - استاندارد) - گسسته صفحه ۸۲ - ۱۲۰۳

پاسخ: گزینه ۲ 

ابتدا زیرمجموعه‌هایی ۲ عضوی که مجموع دو عضو آن‌ها ۱۲ می‌شود را مشخص می‌کنیم.

$$\{\{1, 11\}, \{2, 10\}, \{3, 9\}, \{4, 8\}, \{5, 7\}\}$$

اگر از هر کدام از این زیرمجموعه‌ها یک عضو انتخاب شود یعنی ۵ عضو مانند $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ داشته باشیم و همچنین با افزودن عدد ۶ به این مجموعه ۵ عضوی می‌توان گفت که مجموع هیچ دوتایی از آن‌ها ۱۲ نمی‌شود ولی با انتخاب عضو هفتم بنا به اصل لانه کبوتری، عضو جدید حتماً با یکی از اعضای قبلی (غیر از عدد ۶) مجموعشان ۱۲ خواهد شد.

••• **از** •••