دورهٔ جمع‌بندی دوپینگ

دوشنبه
۱۴۰۴/۰۲/۰۱

گروه آزمایشی
علوم ریاضی و فنی

دفترچه پاسخ

دوپینگ ماز

آزمون سراسری ورودی دانشگاه‌های کشور ــ تیرماه خارج ۱۴۰۲

ردیف	درس	تعداد سؤال	از شماره	تا شماره	مدت پاسخگویی
۱	ریاضیات	۴۰	۱	۴۰	۷۰
۲	فیزیک	۳۵	۴۱	۷۵	۴۵
۳	شیمی	۳۰	۷۶	۱۰۵	۳۰

حق چاپ و تکثیر سؤالات به هر روش (الکترونیکی و...) پس از برگزاری آزمون برای تمامی اشخاص حقیقی و حقوقی تنها با مجوز «گروه ماز» مجاز می‌باشد و با متخلفین برابر مقررات رفتار می‌شود.

به دلیل عدم رضایت تیم ماز، هرگونه استفادهٔ غیرقانونی از دفترچه سؤالات و پاسخنامه ماز برای تمامی اشخاص، شرعاً حرام است.

سنجش کلاد
www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshClouds

۱- یک دنباله با جملات غیرصفر، دنباله‌ای حسابی با قدرنسبت d و دنباله‌ای هندسی با قدرنسبت r است. مقدار $r+d$ کدام است؟

۱) $\sqrt{۲}$ ۲) $\frac{۱}{۲}$ ۳) ۱ ۴) صفر

پاسخ: گزینهٔ ۳ (متوسط ـ محاسباتی ـ ۱۰۰۱)

نکته ۱

جملهٔ n ام یک دنبالهٔ حسابی با جملهٔ اول $t_۱$ و قدرنسبت d به صورت $t_n = t_۱ + (n-۱)d$ است.

نکته ۲

b را واسطهٔ حسابی a و c گوییم، هرگاه: $b = \frac{a+c}{۲}$.

نکته ۳

جملهٔ n ام دنبالهٔ هندسی به صورت $t_n = t_۱ r^{n-۱}$ است که در آن $t_۱$ جملهٔ اول و r قدرنسبت می‌باشد. $(t, r \neq ۰)$

نکته ۴

b را واسطهٔ هندسی a و c گوییم، هرگاه: $b^۲ = ac$.

اگر دنباله را به‌صورت $a_۱, a_۲, a_۳, \ldots a_n, \ldots$ فرض کنیم، داریم:

$$\left.\begin{array}{l} \text{واسطه هندسی} \Rightarrow a_۲^۲ = a_۱ a_۳ \\ \text{واسطه حسابی} \Rightarrow ۲a_۲ = a_۱ + a_۳ \end{array}\right\} \Rightarrow \left(\frac{a_۱ + a_۳}{۲}\right)^۲ = a_۱ a_۳$$

$$\Rightarrow \frac{a_۱^۲}{۴} + \frac{a_۳^۲}{۴} + \frac{a_۱ a_۳}{۲} = a_۱ a_۳ \Rightarrow \frac{a_۱^۲}{۴} + \frac{a_۳^۲}{۴} - \frac{a_۱ a_۳}{۲} = ۰ \Rightarrow \left(\frac{a_۱ - a_۳}{۲}\right)^۲ = ۰$$

$$\Rightarrow a_۱ = a_۳$$

$$a_۱ \ , \ a_۱ r \ , \ a_۱ r^۲ \xrightarrow{a_۱ = a_۳} a_۱ = a_۱ r^۲ \Rightarrow r^۲ = ۱ \Rightarrow r = \pm ۱ \quad (۱)$$

$$a_۱ \ , \ a_۱ + d \ , \ a_۱ + ۲d \xrightarrow{a_۱ = a_۳} a_۱ = a_۱ + ۲d \Rightarrow d = ۰ \quad (۲)$$

$$\xrightarrow{(۱),(۲)} r = ۱ \ , \ d = ۰ \Rightarrow r + d = ۱$$

گروه آموزشی ماز

۲- نقاط $(۱, \beta)$ و $(-۵, \beta)$ روی یک سهمی واقع شده‌اند و عرض رأس سهمی برابر $-\frac{۱}{۲}$ است. اگر سهمی محور yها را در نقطه‌ای به عرض $\frac{۳}{۲}$ قطع کند، مقدار β کدام است؟

۱) ۴ ۲) ۳ ۳) -۲ ۴) -۱

پاسخ: گزینهٔ ۱ (متوسط ـ محاسباتی ـ ۱۰۰۴)

نکته ۱

معادلهٔ درجه ۲ با مختصات رأس $S\begin{vmatrix} x_S \\ y_S \end{vmatrix}$ برابر است با:

$$y = a(x - x_S)^۲ + y_S$$

نکته ۲

اگر $A\begin{vmatrix} a_۱ \\ a_۲ \end{vmatrix}$ و $B\begin{vmatrix} b_۱ \\ b_۲ \end{vmatrix}$، دو نقطهٔ هم‌عرض در سهمی باشند $(b_۲ = a_۲)$، آن‌گاه مختصات طول رأس به صورت $x_S = \frac{a_۱ + b_۱}{۲}$ و عرض رأس به صورت $y_S = f(\frac{a_۱ + b_۱}{۲})$ می‌باشد که $y = f(x)$ همان معادله درجه ۲ است. همچنین معادله خط محور تقارن سهمی به صورت $x = \frac{a_۱ + b_۱}{۲}$ است.

کنکور ۱۴۰۴
www.biomaze.ir
www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshClouds

اگر رأس سهمی به‌صورتِ $S\begin{vmatrix}x_S\\y_S\end{vmatrix}$ باشد، آن‌گاه:

$$y=a(x-x_S)^2+y_S$$

$$y_S=-\frac{1}{2},\quad x_S=\frac{-5+1}{2}=-2$$

$$\Rightarrow y=a(x+2)^2-\frac{1}{2}=a(x^2+4x+4)-\frac{1}{2}=ax^2+4ax+\underbrace{4a-\frac{1}{2}}_{\text{عرض از مبدأ سهمی}}$$

$$\Rightarrow 4a-\frac{1}{2}=\frac{3}{2}\Rightarrow 4a=2\Rightarrow a=\frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow y=\frac{1}{2}(x+2)^2-\frac{1}{2}$$

برای به‌دست آوردنِ β، مقدار ۱ یا ۵- را در معادله درجهٔ ۲ جایگذاری می‌کنیم:

$$x=1\Rightarrow y=\frac{1}{2}(1+2)^2-\frac{1}{2}=\frac{9}{2}-\frac{1}{2}=4\Rightarrow \beta=4$$

گروه آموزشی ماز

۳- برای مجموعه‌های $A=\left\{\frac{x}{2},\frac{y}{3},5\right\}$ و $B=\{z,t,1,4\}$، فرض کنید $A\times B=B\times A$ باشد، در چند حالت $x+y+z+t>20$ است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

پاسخ: گزینهٔ ۴ (دشوار ـ محاسباتی ـ ۱۱۰۱)

نکته ۱

اگر $A\times B=B\times A$ باشد، یعنی به‌ازای هر عضوی در مجموعه A، عضوی در مجموعهٔ B است و برعکس، به‌ازای هر عضوی در B، عضوی در A می‌باشد. پس:

$$(A\subseteq B\ ,\ B\subseteq A)\Rightarrow A=B$$

نکته ۲

هیچ مجموعه‌ای نمی‌تواند دارای اعضای تکراری باشد، پس برای مثال مجموعه روبه‌رو، دارای ۳ عضو است، نه ۵ عضو:

$$A=\left\{1,2,(-1)^2,\sqrt{4},3\right\}=\{1,2,3\}$$

دو مجموعه A و B ناتهی هستند و از طرفی $A\times B=B\times A$ است. بنابراین: $A=B$، در نتیجه حالت‌های زیر اتفاق می‌افتد:

(۱) $\begin{cases}\frac{x}{2}=1\Rightarrow x=2\\ \frac{y}{3}=4\Rightarrow y=12\end{cases}$, $\begin{cases}t=5\\z=1\end{cases}$, $\begin{cases}t=5\\z=4\end{cases}$, $\begin{cases}t=5\\z=5\end{cases}$, $\begin{cases}z=5\\t=1\end{cases}$, $\begin{cases}z=5\\t=4\end{cases}$

$x+y+z+t=$	۲۰	۲۳	۲۴	۲۰	۲۳

(۲) $\begin{cases}\frac{x}{2}=4\Rightarrow x=8\\ \frac{y}{3}=1\Rightarrow y=3\end{cases}$, $\begin{cases}t=5\\z=1\end{cases}$, $\begin{cases}t=5\\z=4\end{cases}$, $\begin{cases}t=5\\z=5\end{cases}$, $\begin{cases}z=5\\t=1\end{cases}$, $\begin{cases}z=5\\t=4\end{cases}$

$x+y+z+t=$	۱۷	۲۰	۲۱	۱۷	۲۰

گروه آموزشی ماز

کنکور ۱۴۰۴
www.biomaze.ir
www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshClouds

۴- با توجه به جدول ارزش درستی گزاره‌های زیر، کدام گزارهٔ مرکب زیر می‌تواند هم‌ارز منطقی گزارهٔ X باشد؟

p	q	r	X
د	د	د	ن
د	د	ن	د
د	ن	د	ن
د	ن	ن	ن
ن	د	د	ن
ن	د	ن	د
ن	ن	د	د
ن	ن	ن	ن

۱) $(r \Rightarrow (p \vee q)) \Rightarrow ((p \Rightarrow p) \wedge (q \wedge \sim r))$

۲) $(\sim r \Rightarrow (p \vee \sim q)) \Rightarrow ((p \Rightarrow p) \wedge (\sim q \wedge r))$

۳) $(r \Rightarrow (p \vee q)) \Rightarrow [((p \Rightarrow r) \Rightarrow (\sim p \wedge r)) \wedge q]$

۴) $((p \wedge q) \Rightarrow r) \Rightarrow [(q \Rightarrow (p \vee r)) \Rightarrow \sim ((p \wedge r) \Rightarrow q)]$

پاسخ: گزینهٔ ۱ (دشوار ـ مفهومی ـ ۱۱۰۱)

نکته ۱

دو گزارهٔ $(p \Rightarrow q)$ و $(\sim p \vee q)$ هم‌ارز منطقی یکدیگر می‌باشند. بنابراین از هر کدام از آن‌ها می‌توان به جای دیگری استفاده کرد.

نکته ۲

در گزارهٔ شرطی $(p \Rightarrow q)$، اگر ارزش گزارهٔ p، نادرست باشد، آن‌گاه به ازای هر ارزش برای گزارهٔ q، نتیجه درست خواهد بود.

p	q	p ⇒ q
ن	د	د
ن	ن	د

از این نکته در این تست استفاده خواهیم کرد.

با توجه به جدول، به بررسی گزینه‌ها می‌پردازیم:

سطر سوم را به‌طور دلخواه برای هر ۴ گزینه بررسی می‌کنیم:

۱) (ن ∧ د) ⇒ (د ⇒ د)

د ⇒ ن ≡ ن ✓

۲) د ⇒ (د ∧ د) ≡ د ✗

۳) د ⇒ [(د ⇒ ن) ∧ ن] ≡ ن ✓

۴) د ⇒ [د ⇒ د] ≡ د ✗

سپس سطر پنجم را برای گزینه ۱ و ۳ بررسی می‌کنیم:

۱) د ⇒ (ن ∧ د) ≡ ن ✓

۳) د ⇒ ((د ⇒ د) ∧ د) ≡ د ✗

گروه آموزشی ماز

۵- اگر α و β ریشه‌های معادله $3x^2 - 12x - a = 0$ و $2\alpha^2 + \beta^2 - 4\alpha = 7$ باشد، مقدار a چند برابر ریشه بزرگ‌تر معادله است؟

۱) ۳ ۲) -3 ۳) ۹ ۴) -9

پاسخ: گزینهٔ ۲ (دشوار ـ محاسباتی ـ ۱۱۰۱)

نکته:

اگر α و β ریشه‌های معادلهٔ درجهٔ دو $ax^2 + bx + c = 0$ باشد، آن‌گاه روابط زیر را خواهیم داشت:

$$S = \alpha + \beta = -\frac{b}{a} \qquad P = \alpha \times \beta = \frac{c}{a} \qquad |\alpha - \beta| = \frac{\sqrt{\Delta}}{|a|}$$

عرض رأس سهمی $y_S = -\frac{\Delta}{4a}$ طول رأس سهمی $x_S = -\frac{b}{2a}$

کنکور ۱۴۰۴
www.biomaze.ir
www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshClouds

$$S=\alpha+\beta=-\frac{-۱۲}{۳}=۴$$

$$P=\alpha\beta=\frac{-a}{۳}$$

$$۲\alpha^۲+\beta^۲-۴\alpha=۷\Rightarrow\left(\alpha^۲+\beta^۲\right)+\left(\alpha^۲-۴\alpha\right)=۷\Rightarrow(\alpha+\beta)^۲-۲\alpha\beta+\left(\alpha^۲-۴\alpha\right)=۷\qquad(۱)$$

α ریشهٔ معادلهٔ $۳x^۲-۱۲x-a=۰$ است، پس در آن معادله صدق می‌کند:

$$۳\alpha^۲-۱۲\alpha-a=۰\Rightarrow\alpha^۲-۴\alpha=\frac{a}{۳}\quad(۲)$$

$$\text{جایگذاری (۲) در (۱)}\Rightarrow(\alpha+\beta)^۲-۲\alpha\beta+\frac{a}{۳}=۷\Rightarrow۴^۲-۲\times\left(-\frac{a}{۳}\right)+\frac{a}{۳}=۷\Rightarrow۱۶+\frac{۲a}{۳}+\frac{a}{۳}=۷\Rightarrow a=-۹$$

اکنون معادله را دوباره می‌نویسیم:

$$۳x^۲-۱۲x+۹=۰\Rightarrow x^۲-۴x+۳=۰\Rightarrow(x-۱)(x-۳)=۰\Rightarrow\begin{cases}x_۱=۱\\x_۲=۳\end{cases}$$

اکنون داریم:

$$\frac{a}{x_۲}=\frac{-۹}{۳}=-۳$$

گروه آموزشی ماز

۶- مجموع ریشه‌های معادله $\frac{۱}{x^۲}+\frac{۱}{(۲-x)^۲}=\frac{۴۰}{۹}$ کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۲/۵ ۳) ۴ ۴) ۴/۵

پاسخ: گزینهٔ ۳ (دشوار ـ محاسباتی ـ ۱۱۰۱)

نکته:

برخی از معادلات را می‌توان با یک تغییر متغیر مناسب، به یکی از انواع معادلاتی که می‌شناسیم تبدیل کرد و پس از حل آن و با رجوع به تغییر متغیر، مقادیر مجهول اصلی معادلهٔ اولیه را یافت.

$$\frac{۱}{x^۲}+\frac{۱}{(۲-x)^۲}=\frac{۴۰}{۹}\Rightarrow\frac{(۲-x)^۲+x^۲}{x^۲(۲-x)^۲}=\frac{۴۰}{۹}\Rightarrow\frac{۴+x^۲-۴x+x^۲}{x^۲(۲-x)^۲}=\frac{۴۰}{۹}$$

$$\Rightarrow\frac{۲x^۲-۴x+۴}{\left(۲x-x^۲\right)^۲}=\frac{۴۰}{۹}\Rightarrow\frac{-۲\left(۲x-x^۲\right)+۴}{\left(۲x-x^۲\right)^۲}=\frac{۴۰}{۹}\xrightarrow{۲x-x^۲=t}$$

$$\Rightarrow\frac{-۲t+۴}{t^۲}=\frac{۴۰}{۹}\Rightarrow۴۰t^۲=۹(-۲t+۴)\Rightarrow۴۰t^۲+۱۸t-۳۶=۰\Rightarrow۲۰t^۲+۹t-۱۸=۰$$

اکنون داریم:

$$t'^۲+۹t'-۳۶۰=۰\Rightarrow\begin{cases}t'_۱=-۲۴\\t'_۲=۱۵\end{cases}$$

اکنون ریشه‌های معادلهٔ اصلی یعنی $۲۰t^۲+۹t-۱۸=۰$ عبارت‌اند از:

$$\xrightarrow{\div۲۰}\begin{cases}t_۱=-\frac{۲۴}{۲۰}=-\frac{۶}{۵}\Rightarrow۲x-x^۲=-\frac{۶}{۵}\Rightarrow x^۲-۲x-\frac{۶}{۵}=۰\xrightarrow{\Delta>۰}S_۱=۲\\t_۲=\frac{۱۵}{۲۰}=\frac{۳}{۴}\Rightarrow۲x-x^۲=\frac{۳}{۴}\Rightarrow x^۲-۲x+\frac{۳}{۴}=۰\xrightarrow{\Delta>۰}S_۲=۲\end{cases}$$

جمع کل ریشه‌ها برابر است با:

$$S_۱+S_۲=۴$$

گروه آموزشی ماز

کنکور ۱۴۰۴
www.biomaze.ir
www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshClouds

۷- نقطه $(-۶,۳)$ یکی از رئوس متوازی‌الاضلاعی است که دو ضلع آن منطبق بر خطوط $x-۳y=۴$ و $x+۴y=-۳$ هستند. بیش‌ترین فاصله وسط قطر با اضلاع کدام است؟

۱) $\frac{۱۹}{۲\sqrt{۱۰}}$ ۲) $\frac{۱۹}{\sqrt{۱۰}}$ ۳) $\frac{\sqrt{۶۵}}{۲}$ ۴) $\frac{\sqrt{۶۵}}{\sqrt{۲}}$

پاسخ: گزینهٔ ۱ (متوسط ـ محاسباتی ـ ۱۱۰۱)

نکته ۱

اگر $A\begin{vmatrix}a_۱\\a_۲\end{vmatrix}$ و $B\begin{vmatrix}b_۱\\b_۲\end{vmatrix}$، آن‌گاه مختصات نقطهٔ $M\begin{vmatrix}m_۱\\m_۲\end{vmatrix}$ در وسط ضلع AB برابر است با:

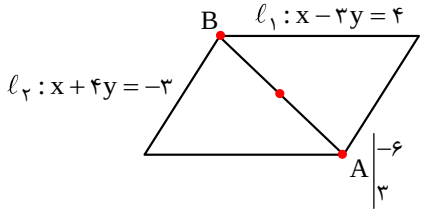
$$m_۱=\frac{a_۱+b_۱}{۲} \qquad m_۲=\frac{a_۲+b_۲}{۲}$$

نکته ۲

فاصلهٔ نقطه از خط: فاصلهٔ نقطهٔ $P\begin{vmatrix}a\\b\end{vmatrix}$ از خط $Ax+By+C=۰$ برابر است با:

$$d=\frac{|Aa+Bb+C|}{\sqrt{A^۲+B^۲}}$$

چون نقطهٔ $A\begin{vmatrix}-۶\\۳\end{vmatrix}$ در هیچ‌یک از دو خط $x-۳y=۴$ و $x+۴y=-۳$ صدق نمی‌کند، پس روی آن‌ها قرار ندارد:



ابتدا نقطهٔ تقاطع دو خط داده شده را به‌دست می‌آوریم تا مختصات نقطهٔ B به‌دست آید:

$$\begin{cases}x-۳y=۴\\-\left(x+۴y=-۳\right)\end{cases}\Rightarrow -۷y=۷\Rightarrow y=-۱\ ,\ x=۱\Rightarrow B\begin{vmatrix}۱\\-۱\end{vmatrix}$$

حال مختصات نقطهٔ M (وسط A و B) را می‌یابیم.

$$x_M=\frac{x_A+x_B}{۲}=\frac{-۶+۱}{۲}=-\frac{۵}{۲}$$

$$y_M=\frac{y_A+y_B}{۲}=\frac{۳-۱}{۲}=۱$$

اکنون فاصلهٔ نقطهٔ $M\begin{vmatrix}-\frac{۵}{۲}\\۱\end{vmatrix}$ را از ۲ خط $\ell_۱: x-۳y=۴$ و $\ell_۲: x+۴y=-۳$ می‌یابیم.

$$\ell_۱ \text{ از } M \text{ فاصلهٔ: } d_۱=\frac{\left|-\frac{۵}{۲}-۳-۴\right|}{\sqrt{۱^۲+۳^۲}}=\frac{\frac{۱۹}{۲}}{\sqrt{۱۰}}=\frac{۱۹}{۲\sqrt{۱۰}}$$

$$\ell_۲ \text{ از } M \text{ فاصلهٔ: } d_۲=\frac{\left|-\frac{۵}{۲}+۴+۳\right|}{\sqrt{۱^۲+۴^۲}}=\frac{\frac{۹}{۲}}{\sqrt{۱۷}}=\frac{۹}{۲\sqrt{۱۷}}$$

$d_۱>d_۲$ پس جواب به‌صورت $\frac{۱۹}{۲\sqrt{۱۰}}$ می‌باشد.

گروه آموزشی ماز

۸- وارون تابع $f(x)=\sqrt{x}\sqrt{mx-۱}$ در دامنه محدود، خط $۱۲x-۱۰y=۵$ را در نقطه‌ای به عرض ۷/۲ قطع می‌کند. مقدار $f(\frac{۴}{m})$ کدام است؟

۱) $۲\sqrt{۳}$ ۲) $۴\sqrt{۳}$ ۳) $۴\sqrt{۱۵}$ ۴) $۲\sqrt{۱۵}$

کنکور ۱۴۰۴
www.biomaze.ir
www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshClouds

پاسخ: گزینهٔ ۲ (متوسط ـ محاسباتی ـ ۱۱۰۲)

نکته:

اگر تابع $f(x)$ وارون‌پذیر باشد، آن‌گاه:

۱) نمودارهای $f(x)$ و $f^{-1}(x)$ نسبت به خط $y=x$ قرینه یکدیگرند.

۲) اگر $\begin{vmatrix}a\\b\end{vmatrix}$ نقطه‌ای در $f(x)$ باشد، آن‌گاه $\begin{vmatrix}b\\a\end{vmatrix}$ نقطه‌ای در $f^{-1}(x)$ خواهد بود.

وارون تابع $f(x)=\sqrt{x}\sqrt{mx-1}$، خط $5y-10x=12$ را در نقطه‌ای به عرض $7/2$ قطع می‌کند، پس:

$$5\times 7/2-10x=12 \Rightarrow x=2/4$$

یعنی نقطهٔ تقاطع f^{-1} و g به‌صورت $(2/4,7/2)$ است، پس:

$$f^{-1}(2/4)=7/2 \Rightarrow f(7/2)=2/4$$

$$\sqrt{7/2}\sqrt{m(7/2)-1}=2/4 \Rightarrow 7/2(7/2m-1)=(2/4)^2$$

$$\Rightarrow 3(7/2m-1)=2/4 \Rightarrow 7/2m-1=0/8 \Rightarrow m=\frac{1/8}{7/2}=\frac{1}{4}$$

اما برای $f\left(\frac{4}{m}\right)$ داریم:

$$f\left(\frac{4}{m}\right)=f\left(\frac{4}{\frac{1}{4}}\right)=f(16)$$

$$f(x)=\sqrt{x}\sqrt{mx-1}=\sqrt{x}\sqrt{\frac{x}{4}-1} \xrightarrow{x=16} f(16)=\sqrt{16}\sqrt{\frac{16}{4}-1}=4\sqrt{3}$$

گروه آموزشی ماز

۹- مقداری از یک عنصر موجود است. اگر عنصر در هر هفته ۱۲/۵ درصد از جرم باقیمانده را از دست بدهد، پس از چند روز، $\frac{1}{7}$ از جرم عنصر باقی خواهد ماند؟ ($\log_7 3=0/6$ و $\log_2 3=1/6$)

۱) ۸ ۲) ۲۸ ۳) ۵۶ ۴) ۱۲۶

پاسخ: گزینهٔ ۳ (دشوار ـ محاسباتی ـ ۱۱۰۳)

نکته ۱

اگر در هر a ساعت، یک عنصر رادیواکتیو $\frac{p}{q}$ از جرم خود را از دست بدهد، تابع مقدار جرم آن برحسب ساعت از رابطهٔ زیر بدست می‌آید:

$$m(t)=A(1-\frac{p}{q})^{\frac{t}{a}}$$

A:جرم اولیه

تبصره: به جای ساعت، می‌توان دقیقه، سال، قرن و یا هر واحد زمان دیگری قرار داد.

نکته ۲

اگر a، b، c اعدادی مثبت بوده و $c\neq 1$، آن‌گاه روابط زیر را داریم:

۱) $\log_c^a+\log_c^b=\log_c^{ab}$ ۲) $\log_c^a-\log_c^b=\log_c^{\frac{a}{b}}$

۳) $\log_{c^n}^{a^m}=\frac{m}{n}\log_c^a$ ۴) $\log_b^a=\frac{\log_c^a}{\log_c^b}\ (b\neq 1)$

۵) $a^{\log_c^b}=b^{\log_c^a}$ ۶) $\log_b^a=\frac{1}{\log_a^b}\ (a,b\neq 1)$

کنکور ۱۴۰۴
www.biomaze.ir
www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshClouds

عنصر موردنظر در هر هفته $\frac{۱۲/۵}{۱۰۰}$ از جرم باقیماندهٔ خود را از دست می‌دهد، پس اگر جرم اولیه را A در نظر بگیریم:

$$m(t)=A\times\left(\frac{۸۷/۵}{۱۰۰}\right)^{\frac{t}{۷}}=A\times\left(\frac{۷}{۸}\right)^{\frac{t}{۷}}$$

حال برای این‌که بدانیم پس از چند روز، $\frac{۱}{۷}$ از جرم عنصر باقی می‌ماند، داریم:

$$\frac{۱}{۷}A=A\times\left(\frac{۷}{۸}\right)^{\frac{t}{۷}}\Rightarrow\frac{۱}{۷}=\left(\frac{۷}{۸}\right)^{\frac{t}{۷}}$$

از طرفین رابطهٔ فوق در مبنای ۳ لگاریتم می‌گیریم:

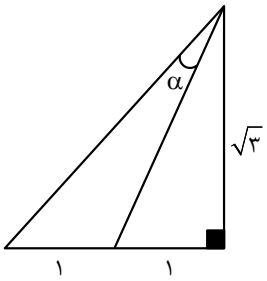
$$\log_۳^{\frac{۱}{۷}}=\log_۳^{\left(\frac{۷}{۸}\right)^{\frac{t}{۷}}}=\frac{t}{۷}\log_۳^{\frac{۷}{۸}}\Rightarrow\log_۳^{۱}-\log_۳^{۷}=\frac{t}{۷}\times\left(\log_۳^{۷}-\log_۳^{۸}\right)\Rightarrow ۰-\frac{۱}{\log_۷^{۳}}=\frac{t}{۷}\times\left(\frac{۱}{\log_۷^{۳}}-\frac{۳}{\log_۲^{۳}}\right)$$

$$\Rightarrow -\frac{۱}{۰/۶}=\frac{t}{۷}\times\left(\frac{۱}{۰/۶}-\frac{۳}{۱/۶}\right)\Rightarrow -\frac{۱۰}{۶}=\frac{t}{۷}\times\left(\frac{۱۰}{۶}-\frac{۳۰}{۱۶}\right)$$

$$\Rightarrow t=۵۶$$

گروه آموزشی ماز

۱۰- در شکل زیر، مقدار $\tan\alpha$ کدام است؟



۱) $\frac{۱}{۵\sqrt{۳}}$

۲) $\frac{۱}{\sqrt{۳}}$

۳) $\frac{\sqrt{۳}}{۲}$

۴) $\frac{\sqrt{۳}}{۵}$

پاسخ: گزینهٔ ۴ (متوسط ـ محاسباتی ـ ۱۲۰۲)

نسبت‌های مثلثاتی مجموع و تفاضل زوایا

$$\sin(a\pm b)=\sin a\cos b\pm\cos a\sin b$$

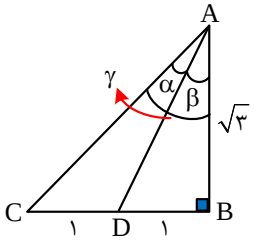
$$\cos(a\pm b)=\cos a\cos b\mp\sin a\sin b$$

$$\tan(a\pm b)=\frac{\tan a\pm\tan b}{۱\mp\tan a\cdot\tan b}$$

$$\cot(a\pm b)=\frac{\cot a\cot b\mp ۱}{\cot b\pm\cot a}$$

$$\alpha=\gamma-\beta$$

$$\tan\alpha=\frac{\tan\gamma-\tan\beta}{۱+\tan\gamma\cdot\tan\beta}$$



اما برای $\tan\gamma$ و $\tan\beta$ داریم:

$$\tan\gamma=\frac{۲}{\sqrt{۳}}\qquad\tan\beta=\frac{۱}{\sqrt{۳}}$$

$$\Rightarrow\tan\alpha=\frac{\frac{۲}{\sqrt{۳}}-\frac{۱}{\sqrt{۳}}}{۱+\frac{۲}{\sqrt{۳}}\times\frac{۱}{\sqrt{۳}}}=\frac{\frac{۱}{\sqrt{۳}}}{۱+\frac{۲}{۳}}=\frac{\frac{۱}{\sqrt{۳}}}{\frac{۵}{۳}}=\frac{\sqrt{۳}}{۵}$$

گروه آموزشی ماز

کنکور ۱۴۰۴
www.biomaze.ir
www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshClouds

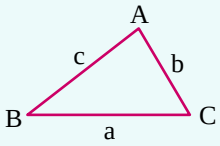
۱۱- در یک مثلث، زاویه بین دو ضلع با اندازه‌های ۵ و ۱۲ برابر α است. اگر مساحت این مثلث ۱۵ باشد، اختلاف بیش‌ترین و کم‌ترین مقدار α کدام است؟

۱) $\frac{۲\pi}{۳}$ ۲) $\frac{\pi}{۳}$ ۳) $\frac{\pi}{۲}$ ۴) $\frac{\pi}{۴}$

پاسخ: گزینهٔ ۱ (آسان ـ محاسباتی ـ ۱۴۰۲)

نکته:

مساحت مثلث $\hat{ABC}$ از روابط زیر به دست خواهد آمد.

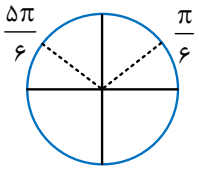


$$S=\frac{۱}{۲}ab\sin\hat{C}=\frac{۱}{۲}ac\sin\hat{B}=\frac{۱}{۲}bc\sin\hat{A}$$

$$S=\frac{۱}{۲}ab\sin\alpha \Rightarrow ۱۵=\frac{۱}{۲}\times۵\times۱۲\times\sin\alpha \Rightarrow \sin\alpha=\frac{۱}{۲}$$

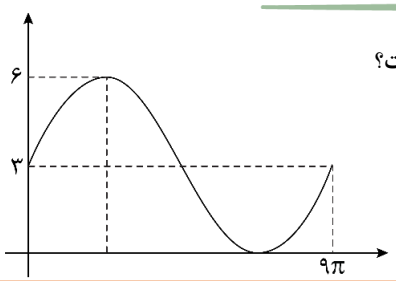
$$\Rightarrow \alpha=\frac{\pi}{۶} \text{ یا } \alpha=\frac{۵\pi}{۶}$$

$$\frac{۵\pi}{۶}-\frac{\pi}{۶}=\frac{۲\pi}{۳}$$



گروه آموزشی ماز

۱۲- اگر شکل زیر، قسمتی از نمودار تابع $f(x)=\frac{۲}{a}-\frac{b}{۱+\tan^۲(cx-\frac{۳\pi}{۴})}$ باشد، مقدار $f(\frac{۳\pi}{۴})$ کدام است؟



۱) ۴
۲) ۴/۵
۳) ۴/۷۵
۴) ۵

پاسخ: گزینهٔ ۲ (دشوار ـ محاسباتی ـ ۱۴۰۲)

نکته ۱

نسبت‌های مثلثاتی ۲ برابر کمان:

$$\sin۲\alpha=۲\sin\alpha\cos\alpha$$

$$\cos۲\alpha=۲\cos^۲\alpha-۱=۱-۲\sin^۲\alpha=\cos^۲\alpha-\sin^۲\alpha$$

$$\tan۲\alpha=\frac{۲\tan\alpha}{۱-\tan^۲\alpha}$$

نکته ۲

نسبت‌های مثلثاتی $(\frac{۳\pi}{۲}-\theta)$:

$$\sin(\frac{۳\pi}{۲}-\theta)=-\cos\theta \qquad \cos(\frac{۳\pi}{۲}-\theta)=-\sin\theta$$

$$\tan(\frac{۳\pi}{۲}-\theta)=\cot\theta \qquad \cot(\frac{۳\pi}{۲}-\theta)=\tan\theta$$

نکته ۳

دورهٔ تناوب توابع مثلثاتی:

m: عددی فرد

۱) $a\sin(bx+c)+d\ ,\ a\cos(bx+c)+d\ ,\ [a\sin(bx+c)+d]^m,[a\cos(bx+c)+d]^m\ ,\ T=\frac{۲\pi}{|b|}$

m: عددی زوج

۲) $[a\sin(bx+c)+d]^m,[a\cos(bx+c)+d]^m,a\tan(bx+c)+d,a\cot(bx+c)+d\ ,\ T=\frac{\pi}{|b|}$

کنکور ۱۴۰۴
www.biomaze.ir
www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshClouds

$$f(x)=\frac{۲}{a}-\frac{b}{۱+\tan^۲\left(cx-\frac{۳\pi}{۴}\right)}=\frac{۲}{a}-\frac{b}{\frac{۱}{\cos^۲\left(cx-\frac{۳\pi}{۴}\right)}}$$

$$\Rightarrow \cos ۲x=۲\cos^۲ x-۱ \Rightarrow \cos^۲ x=\frac{۱+\cos ۲x}{۲} \quad \text{رابطه} *$$

از رابطهٔ * استفاده می‌کنیم.

$$\frac{۲}{a}-b\frac{\left(۱+\cos\left(۲cx-\frac{۳\pi}{۲}\right)\right)}{۲}=\frac{۲}{a}-\frac{b}{۲}-\frac{b}{۲}\cos\left(۲cx-\frac{۳\pi}{۲}\right)=-\frac{b}{۲}\cos\left(\frac{۳\pi}{۲}-۲cx\right)+\left(\frac{۲}{a}-\frac{b}{۲}\right)=\frac{b}{۲}\sin(۲cx)+\left(\frac{۲}{a}-\frac{b}{۲}\right)$$

$$T=\frac{۲\pi}{۲|c|}=۹\pi \Rightarrow |c|=\frac{۱}{۹}$$

طبق شکل
$$\begin{cases} f(۰)=۳ \Rightarrow \frac{۲}{a}-\frac{b}{۲}=۳ \Rightarrow f(x)=\frac{b}{۲}\sin(۲cx)+۳ \\ f\left(\frac{۹\pi}{۴}\right)=۶ \Rightarrow \frac{b}{۲}\sin\left(\pm\frac{۲}{۹}\times\frac{۹\pi}{۴}\right)+\left(\frac{۲}{a}-\frac{b}{۲}\right)=۶ \end{cases}$$

$$\frac{b}{۲}\sin\left(\pm\frac{\pi}{۲}\right)=۳ \Rightarrow \begin{cases} b=۶ \leftarrow c=\frac{۱}{۹} & \text{اگر} \\ b=-۶ \leftarrow c=-\frac{۱}{۹} & \text{اگر} \end{cases}$$

$$f\left(\frac{۳\pi}{۴}\right)=\pm\frac{۶}{۲}\sin\left(\frac{۳\pi}{۴}\times ۲\times\left(\pm\frac{۱}{۹}\right)\right)+۳=۳\sin\frac{\pi}{۶}+۳=۴/۵$$

گروه آموزشی ماز

۱۳- در معادله مثلثاتی $۳\sin x-\sqrt{۳}\cos x+m\sin(۲x+\frac{\pi}{۶})=۱$ اگر $\sin(x-\frac{\pi}{۶})=\frac{۱}{\sqrt{۳}}$ باشد، مقدار m کدام است؟

۱) $\sqrt{۳}$ ۲) $-\sqrt{۳}$ ۳) ۳ ۴) -۳

پاسخ: گزینهٔ ۴ (دشوار ـ محاسباتی ـ ۱۲۰۲)

نسبت‌های مثلثاتی مجموع و تفاضل دو زاویه

۱) $\sin(\alpha\pm\beta)=\sin\alpha\cos\beta\pm\cos\alpha\sin\beta$

۲) $\cos(\alpha\pm\beta)=\cos\alpha\cos\beta\mp\sin\alpha\sin\beta$

۳) $\tan(\alpha\pm\beta)=\frac{\tan\alpha\pm\tan\beta}{۱\mp\tan\alpha\tan\beta}$

$$\sin\left(x-\frac{\pi}{۶}\right)=\sin x\cos\frac{\pi}{۶}-\cos x\sin\frac{\pi}{۶}=\frac{۱}{۲}\left(\sqrt{۳}\sin x-\cos x\right)=\frac{۱}{\sqrt{۳}}$$

$$\Rightarrow \sqrt{۳}\sin x-\cos x=\frac{۲}{\sqrt{۳}} \quad \text{رابطه} *$$

معادله را می‌نویسیم:

$$۳\sin x-\sqrt{۳}\cos x+m\sin\left(۲x+\frac{\pi}{۶}\right)=۱ \Rightarrow \sqrt{۳}\times\frac{۲}{\sqrt{۳}}+m\sin\left(۲x+\frac{\pi}{۶}\right)=۱$$

با استفاده از رابطه * داریم:

$$\Rightarrow m\left(\sin\left(۲x+\frac{\pi}{۶}\right)\right)=-۱ \quad \text{رابطه} **$$

کنکور ۱۴۰۴
www.biomaze.ir
www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshClouds

کافیست مقدار $\sin\left(۲x+\frac{\pi}{۶}\right)$ را به‌دست بیاوریم تا m پیدا شود. داریم:

با استفاده از رابطه * می‌توان نوشت:

$$\left(\sqrt{۳}\sin x-\cos x\right)^۲=\frac{۴}{۳}\Rightarrow ۳\sin^۲x+\cos^۲x-۲\sqrt{۳}\sin x\cos x=\frac{۴}{۳}$$

$$\Rightarrow ۲\sin^۲x-۱+\sin^۲x+\cos^۲x-\sqrt{۳}\sin ۲x=\frac{۴}{۳}-۱\Rightarrow -\cos ۲x+۱-\sqrt{۳}\sin ۲x=\frac{۱}{۳}\Rightarrow \sqrt{۳}\sin ۲x+\cos ۲x=\frac{۲}{۳}$$

$$\Rightarrow \frac{\sqrt{۳}}{۲}\sin ۲x+\frac{۱}{۲}\cos ۲x=\frac{۱}{۳}\Rightarrow \sin\left(۲x+\frac{\pi}{۶}\right)=\frac{۱}{۳}$$

اکنون مقدار $\sin\left(۲x+\frac{\pi}{۶}\right)$ را در معادلهٔ ** جایگذاری می‌کنیم.

$$m\times\frac{۱}{۳}=-۱\Rightarrow m=-۳$$

گروه آموزشی ماز

۱۴- تابع f اکیداً صعودی و دامنه آن، مجموعه‌ای از مقادیر مثبت است. اگر $f\left(۲m^۲-۹m-۲\right)<f\left(m^۲-۴m+۴\right)$ باشد، m دارای چند مقدار صحیح است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۵ ۴) ۶

پاسخ: گزینهٔ ۱ (متوسط ـ محاسباتی ـ ۱۲۰۱)

نکته:

تابع f را نزولی گوییم هرگاه داشته باشیم به ازای هر $x_۱$ و $x_۲$ عضو دامنهٔ $f(x)$:

$$x_۱>x_۲\Leftrightarrow f(x_۱)\le f(x_۲)$$

تابع f را صعودی گوییم هرگاه داشته باشیم به ازای هر $x_۱$ و $x_۲$ عضو دامنهٔ $f(x)$:

$$x_۱>x_۲\Leftrightarrow f(x_۱)\ge f(x_۲)$$

تابع f را نزولی اکید گوییم هرگاه داشته باشیم به ازای هر $x_۱$ و $x_۲$ عضو دامنهٔ $f(x)$:

$$x_۱>x_۲\Leftrightarrow f(x_۱)<f(x_۲)$$

تابع f را صعودی اکید گوییم هرگاه داشته باشیم به ازای هر $x_۱$ و $x_۲$ عضو دامنهٔ $f(x)$:

$$x_۱>x_۲\Leftrightarrow f(x_۱)>f(x_۲)$$

تابع f را غیریکنوا گوییم هرگاه نه صعودی خالص و نه نزولی خالص باشد. یعنی در قسمتی از دامنه، صعودی و در قسمتی دیگر از دامنه، نزولی باشد.

$$f\left(۲m^۲-۹m-۲\right)<f\left(m^۲-۴m+۴\right)\xrightarrow{f\text{ صعودی اکید}}۲m^۲-۹m-۲<m^۲-۴m+۴$$

$$\Rightarrow m^۲-۵m-۶<۰\Rightarrow (m-۶)(m+۱)<۰\Rightarrow -۱<m<۶\qquad (۱)$$

حال شرط دامنهٔ مثبت را بررسی می‌کنیم.

$$(۱)\ ۲m^۲-۹m-۲>۰\Rightarrow m_۱=\frac{۹-\sqrt{۹۷}}{۴}\simeq -۰/۲۱\qquad m_۲=\frac{۹+\sqrt{۹۷}}{۴}\simeq ۴/۷۱$$

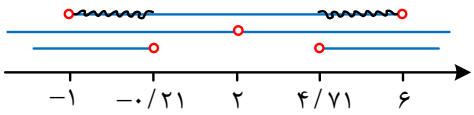
m		$\frac{۹-\sqrt{۹۷}}{۴}$		$\frac{۹+\sqrt{۹۷}}{۴}$	
P	+	○	−	○	+

$$\Rightarrow\begin{cases} m<\frac{۹-\sqrt{۹۷}}{۴} \\ \text{یا} \qquad (۲) \\ m>\frac{۹+\sqrt{۹۷}}{۴}\end{cases}$$

$$(۲)\ m^۲-۴m+۴>۰\Rightarrow (m-۲)^۲>۰\Rightarrow m\neq ۲\qquad (۳)$$

کنکور ۱۴۰۴
www.biomaze.ir
www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshClouds

اکنون اشتراک (۱) و (۲) و (۳) را حساب می‌کنیم.



اشتراک $(۳)\cap(۲)\cap(۱)$ با رنگ سیاه موجدار مشخص شده است. تنها عدد صحیح این بازه، عدد صحیح ۵ می‌باشد.

گروه آموزشی ماز

۱۵- اگر f تابع هموگرافیک و $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{f^{-1}(x)}=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{f^{-1}(x)}{f(x)}$ باشد، کدام مورد می‌تواند محل تقاطع مجانب‌های تابع f باشد؟

۱) $(\sqrt{\pi},\pi)$ ۲) $\left(\frac{۱}{۲},\frac{۳}{۲}\right)$ ۳) $(-۱,۱)$ ۴) $(۱,۲)$

پاسخ: گزینهٔ ۳ (دشوار ـ محاسباتی ـ ۱۲۰۳)

نکته ۱

حد در $\pm\infty$: اگر f و g، دو چندجمله‌ای از درجهٔ m و n باشند، آن‌گاه داریم:

$$f(x)=a_mx^m+a_{m-۱}x^{m-۱}+\ldots+a_۱x+a_۰$$

$$g(x)=b_nx^n+b_{n-۱}x^{n-۱}+\ldots+b_۱x+b_۰$$

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=L$$

۱) $m>n\rightarrow L=\infty$ یا $L=-\infty$

۲) $m<n\rightarrow L=۰$

۳) $m=n\rightarrow L=\frac{a_m}{b_n}$

نکته ۲

مجانب قائم: خط $x=a$ را مجانب قائم نمودار تابع $f(x)$ گویند هرگاه حداقل یکی از شرایط زیر برقرار باشد:

$$\lim_{x\to a^+}f(x)=\pm\infty \quad \text{یا} \quad \lim_{x\to a^-}f(x)=\pm\infty$$

نکته ۳

مجانب افقی: خط $y=L$ را مجانب افقی نمودار $y=f(x)$ می‌نامیم به شرطی که حداقل یکی از دو شرط $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=L$ و یا $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=L$ برقرار باشد.

می‌دانیم که اگر $c\neq ۰$ و $ad\neq bc$، آن‌گاه $f(x)=\frac{ax+b}{cx+d}$ تابعی هموگرافیک است و داریم:

$$f^{-۱}(x)=\frac{-dx+b}{cx-a}$$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{f^{-۱}(x)}{f(x)}=\lim_{x\to-\infty}\frac{\frac{-dx+b}{cx-a}}{\frac{ax+b}{cx+d}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{(-dx+b)(cx+d)}{(cx-a)(ax+b)}$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{-cdx^۲}{acx^۲}=\frac{-cd}{ac}=-\frac{d}{a}$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{f^{-۱}(x)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{ax+b}{cx+d}}{\frac{-dx+b}{cx-a}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{(cx-a)(ax+b)}{(-dx+b)(cx+d)}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{acx^۲}{-cdx^۲}=\frac{ac}{-cd}=-\frac{a}{d}$$

کنکور ۱۴۰۴
www.biomaze.ir
www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshClouds

اما طبق صورت سؤال داریم:

$$-\frac{a}{d}=-\frac{d}{a} \Rightarrow a^{۲}=d^{۲} \Rightarrow a=\pm d$$

حال مجانب‌های قائم و افقی را به‌دست می‌آوریم:

$$\text{قائم: } \lim_{x\to\alpha} f(x)=\pm\infty \Rightarrow \lim_{x\to\alpha}\frac{ax+b}{cx+d}=\pm\infty \Rightarrow \lim_{x\to\alpha} cx+d=۰$$

$$\Rightarrow c\alpha+d=۰ \Rightarrow \alpha=-\frac{d}{c} \Rightarrow x=-\frac{d}{c} \quad \text{مجانب قائم}$$

چون $a=\pm d$ پس:

$$\text{افقی: } \lim_{x\to\pm\infty} f(x)=L \Rightarrow \lim_{x\to\pm\infty}\frac{\pm dx+b}{cx+d}=L \Rightarrow L=\pm\frac{d}{c}$$

$$\Rightarrow y=\pm\frac{d}{c} \quad \text{مجانب افقی}$$

پس ۲ حالت برای محل تقاطع مجانب‌های افقی و قائم وجود دارد.

$$a=d \Rightarrow \left(-\frac{d}{c},\frac{d}{c}\right) \qquad a=-d \Rightarrow \left(-\frac{d}{c},-\frac{d}{c}\right)$$

طبق گزینه‌ها، گزینه ۳ جواب است.

گروه آموزشی ماز

۱۶- برای مقدار مشخص k، تابع $f(x)=\begin{cases}|[-x]-x| & [x] \text{ فرد}\\ k-x+[x] & [x] \text{ زوج}\end{cases}$ در $x=n$ و $x=-n$ پیوسته است. کدام مورد در خصوص n صحیح است؟ $(k,n\in\mathbb{N})$

۱) برای هیچ مقداری از n، پیوسته نیست.
۲) برای جمیع مقادیر n پیوسته است.
۳) n فرد
۴) n زوج

پاسخ: گزینهٔ ۴ (دشوار ـ محاسباتی ـ ۱۱۰۵)

نکته:

برای محاسبهٔ حد چپ و راست در جزء صحیح داریم:

۱) $\lim_{x\to k^{+}}[x]$ ۲) $\lim_{x\to k^{-}}[x]$ ۳) $\lim_{x\to k^{+}}[-x]$ ۴) $\lim_{x\to k^{-}}[-x]$

حالت ۱) اگر $k\notin\mathbb{Z}$، آن‌گاه مقدار تابع داده شده را به ازای $x=k$ حساب می‌کنیم.

مثال:

$$\lim_{x\to\frac{۱}{۲}^{-}}[-x]=\left[-\frac{۱}{۲}\right]=-۱$$

حالت ۲) اگر $k\in\mathbb{Z}$ باشد، داریم:

حد ۱ $=k$
حد ۲ $=k-۱$
حد ۳ $=-k-۱$
حد ۴ $=-k$

اگر n فرد باشد:

$$\begin{cases}\lim_{x\to n^{+}} f(x)=\left|\left[-\left(n^{+}\right)\right]-n^{+}\right|=|-n-۱-n|=۲n+۱\\ f(n)=|[-n]-n|=|-۲n|=۲n\\ \lim_{x\to n^{-}} f(x)=k-n+\left[n^{-}\right]=k-n+n-۱=k-۱\end{cases} \Rightarrow ۲n+۱\neq ۲n$$

پس در $x=n$ اگر n فرد باشد پیوسته نیست.

کنکور ۱۴۰۴
www.biomaze.ir
www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshClouds

اگر n زوج باشد:

$$\begin{cases}\lim\limits_{x\to n^+} f(x)=k-n+\left[n^+\right]=k-n+n=k\\ f(n)=k-n+[n]=k\\ \lim\limits_{x\to n^-} f(x)=\left|\left[-\left(n^-\right)\right]-n^-\right|=|-n-n|=|-2n|=2n\end{cases}\Rightarrow 2n=k$$

$$\begin{cases}\lim\limits_{x\to(-n)^+} f(x)=k-(-n)+\left[(-n)^+\right]=k+n-n=k\\ f(-n)=k-(-n)+[-n]=k+n-n=k\\ \lim\limits_{x\to(-n)^-} f(x)=\left|\left[-\left((-n)^-\right)\right]-\left((-n)^-\right)\right|=|n+n|=|2n|=2n\end{cases}\Rightarrow 2n=k$$

پس n زوج است.

گروه آموزشی ماز

۱۷- اگر $f(x)=\frac{5\cos x}{1-\sin x}$ و $f(x)=xg(x)-2x+5$ باشد، حاصل $\lim\limits_{x\to 0} g(x)$ کدام است؟

۱) ۳ ۲) ۷ ۳) صفر ۴) وجود ندارد.

پاسخ: گزینهٔ ۲ (متوسط ـ محاسباتی ـ ۱۲۰۴)

نکته ۱

قاعدهٔ هوپیتال: اگر $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}$ به صورت $\frac{0}{0}$ در بیاید می‌گوییم حد مبهم است. برای رفع ابهام آن می‌توان از روش زیر کمک گرفت:

اگر f و g مشتق‌پذیر باشند، آنگاه:

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

نکته ۲

شیب خط مماس بر منحنی تابع f در نقطهٔ $A(a,f(a))$ را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم.

$$m=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

این حد را مشتق تابع f در نقطهٔ a ($f'(a)$) می‌نامند.

نکته ۳

برای محاسبهٔ شیب خط مماس از رابطهٔ زیر نیز می‌توان استفاده کرد:

$$m=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

$$\lim_{x\to 0} g(x)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)+2x-5}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-5}{x-0}+\lim_{x\to 0}\frac{2x}{x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}+2=f'(0)+2$$

اکنون باید $f'(0)$ را به‌دست بیاوریم.

$$f(x)=\frac{5\cos x}{1-\sin x}\Rightarrow f'(x)=\frac{-5\sin x(1-\sin x)+\cos x(5\cos x)}{(1-\sin x)^2}$$

$$=\frac{-5\sin x+5\sin^2 x+5\cos^2 x}{(1-\sin x)^2}=\frac{-5\sin x+5}{(1-\sin x)^2}=\frac{5(1-\sin x)}{(1-\sin x)^2}=\frac{5}{1-\sin x}$$

$$f'(0)=5\Rightarrow\lim_{x\to 0} g(x)=5+2=7$$

کنکور ۱۴۰۴
www.biomaze.ir
سنجش کلاد
www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshClouds

۱۸- خط d موازی محور xها، سهمی $y=x^۲-۱$ را در دو نقطه قطع می‌کند و مماس‌های رسم شده در این نقاط بر هم عمودند. مجموع عرض‌های این دو نقطه کدام است؟

۱) $-\frac{۳}{۲}$ ۲) $-\frac{۱}{۲}$ ۳) $-\frac{۱}{۴}$ ۴) $-\frac{۳}{۴}$

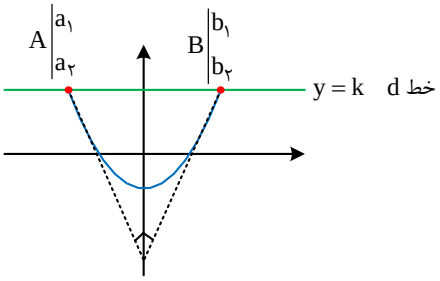
پاسخ: گزینهٔ ۱ (متوسط ـ محاسباتی ـ ۱۲۰۴)

نکته ۱

شیب خط مماس بر نمودار تابع $y=f(x)$ در نقطهٔ $x=a$ برابر است با: $m=f'(a)$

نکته ۲

اگر خطوط d و d' به ترتیب با شیب‌های m و m' برهم عمود باشند، آن‌گاه mm' برابر -۱ خواهد بود.



شیب خط مماس بر سهمی در A و B برابر است با:

$$f(x)=x^۲-۱$$
$$\left.\begin{array}{l} m_۱=f'(a_۱)=۲a_۱ \\ m_۲=f'(b_۱)=۲b_۱ \end{array}\right\} \Rightarrow m_۱m_۲=-۱ \Rightarrow ۲a_۱۲b_۱=-۱ \Rightarrow a_۱b_۱=-\frac{۱}{۴}$$

اما $a_۱=-b_۱$:

$$a_۱(-a_۱)=-\frac{۱}{۴} \Rightarrow a_۱^۲=\frac{۱}{۴}$$
$$\xrightarrow{a_۱<۰} a_۱=-\frac{۱}{۲} \ , \ b_۱=\frac{۱}{۲}$$

حال عرض نقاط را به‌دست می‌آوریم:

$$\left.\begin{array}{l} f(a_۱)=f\left(-\frac{۱}{۲}\right)=\frac{۱}{۴}-۱=-\frac{۳}{۴} \\ f(b_۱)=f\left(\frac{۱}{۲}\right)=\frac{۱}{۴}-۱=-\frac{۳}{۴} \end{array}\right. \Rightarrow -\frac{۳}{۴}-\frac{۳}{۴}=-\frac{۳}{۲}$$

گروه آموزشی ماز

۱۹- به ازای چند مقدار صحیح k، نقطه عطف منحنی $y=\frac{k}{۲}x^۳-(k+۲)x^۲$ در ناحیه سوم محورهای مختصات قرار دارد؟

۱) بیش از ۲ ۲) ۲ ۳) ۱ ۴) صفر

پاسخ: گزینهٔ ۳ (متوسط ـ محاسباتی ـ ۱۲۰۵)

نکته:

تعریف نقطهٔ عطف: فرض کنیم تابع f در نقطهٔ $x=c$ پیوسته است. در این صورت، نقطهٔ $(c,f(c))$ نقطهٔ عطف تابع f است، هرگاه ۲ شرط زیر را داشته باشد:

۱) نمودار f در نقطهٔ $(c,f(c))$ خط مماس داشته باشد.

۲) جهت تقعر f در نقطهٔ $(c,f(c))$ تغییر کند.

تبصره: معمولاً در سوالات کنکور با دو بار مشتق گرفتن از تابع و برابر صفر قرار دادن آن، نقاط عطف پیدا می‌شوند.

$f''(x)=۰$ (طول نقطهٔ عطف x)

کنکور ۱۴۰۴
www.biomaze.ir
www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshClouds

نقطهٔ عطف را به‌دست می‌آوریم:

$$y=\frac{k}{۲}x^۳-(k+۲)x^۲$$

$$y'=\frac{۳k}{۲}x^۲-۲(k+۲)x$$

$$y''=۳kx-۲(k+۲)\Rightarrow y''=۰\Rightarrow x=\frac{۲(k+۲)}{۳k}$$

$$f\left(\frac{۲(k+۲)}{۳k}\right)=\frac{k}{۲}\left(\frac{۲}{۳}\right)^۳\times\frac{(k+۲)^۳}{k^۳}-(k+۲)\left(\frac{۲}{۳}\right)^۲\times\frac{(k+۲)^۲}{k^۲}$$

$$=\frac{۴(k+۲)^۳}{۲۷k^۲}-\frac{۴(k+۲)^۳}{۹k^۲}=\frac{-۸(k+۲)^۳}{۲۷k^۲}$$

پس نقطهٔ عطف به‌صورت $A\left(\frac{۲(k+۲)}{۳k},\frac{-۸}{۲۷}\frac{(k+۲)^۳}{k^۲}\right)$ می‌باشد. چون A در ناحیهٔ سوم مختصات است، پس $x_A<۰$ و $y_A<۰$.

$$x_A<۰\Rightarrow\frac{۲}{۳}\frac{(k+۲)}{k}<۰\Rightarrow -۲<k<۰ \qquad (۱)$$

$$y_A<۰\Rightarrow -\frac{۸}{۲۷}\frac{(k+۲)^۳}{k^۲}<۰\Rightarrow (k+۲)^۳>۰\Rightarrow k+۲>۰$$

$$\Rightarrow k>-۲ \qquad (۲)$$

$$(۱)\cap(۲)=(-۲,۰)$$

تنها عدد صحیح این بازه -۱ است. پس به ازای یک مقدار نقطهٔ عطف منحنی در ناحیهٔ سوم محورهای مختصات قرار دارد.

گروه آموزشی ماز

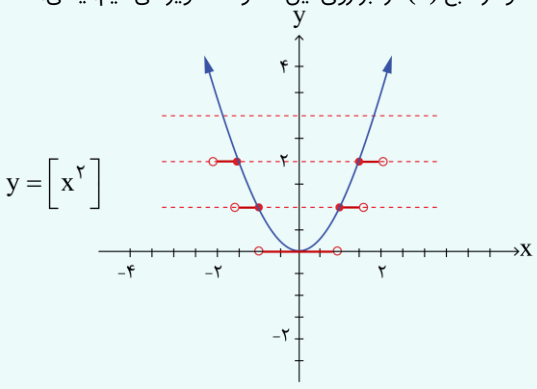
۲۰- کم‌ترین فاصله نقاط واقع بر منحنی $y=-\sqrt{-x-[x^۲]}$ از خط $x-y-۱=۰$ کدام است؟

۱) $\frac{\sqrt{۲}}{۲}$ ۲) $\frac{۳\sqrt{۲}}{۵}$ ۳) $\frac{۳\sqrt{۲}}{۱۰}$ ۴) $\frac{۳\sqrt{۲}}{۸}$

پاسخ: گزینهٔ ۴ (دشوار ـ محاسباتی ـ ۱۲۰۵)

نکته ۱

برای رسم نمودار تابع $y=[f(x)]$، ابتدا نمودار $f(x)$ و خطوط $y=k$ که $k\in\mathbb{Z}$ را رسم کرده و نمودار تابع $f(x)$ را بر روی این خطوط تصویر می‌کنیم. یعنی:



$f(x)\rightarrow$ آبی

$[f(x)]\rightarrow$ قرمز

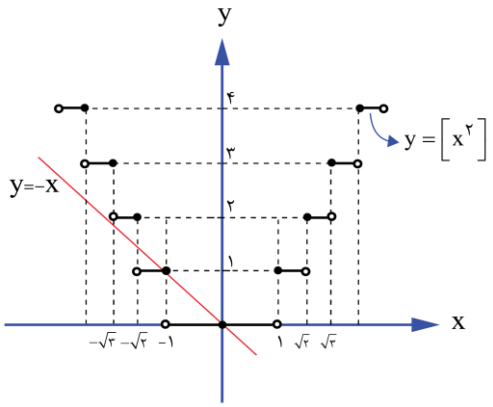
تبصره: نقاط برخورد $y=k$ و $y=f(x)$ را بدون تغییر، دست نخورده باقی می‌گذاریم.

نکته ۲

برای مشخص نمودن اکسترمم‌های مطلق تابع $f(x)$، نقاط بحرانی تابع را مشخص می‌کنیم و از بین تمام نقاط بحرانی و ابتدایی و انتهایی بازه، نقطه یا نقاطی که بیش‌ترین مقدار تابع در آن‌ها اتفاق می‌افتد، نقاط ماکزیمم مطلق تابع و مقدار تابع در این نقاط، مقدار ماکزیمم مطلق تابع است. برای کم‌ترین مقدار نیز به همین صورت است.

کنکور ۱۴۰۴
www.biomaze.ir
www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshClouds

ابتدا نمودار $y=\left[x^{۲}\right]$ و $y=-x$ را در یک دستگاه مختصات رسم می‌کنیم.



دامنهٔ تابع $y=-\sqrt{-x-\left[x^{۲}\right]}$ را به‌دست می‌آوریم:

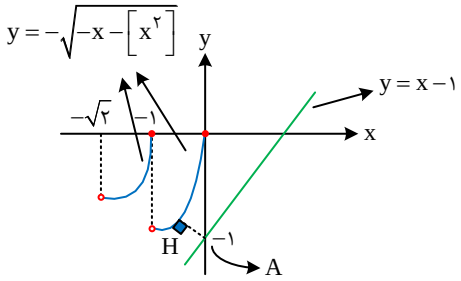
$$-x-\left[x^{۲}\right]\geq ۰ \Rightarrow -x\geq\left[x^{۲}\right]$$

با توجه به نمودار فوق مشخص است که در فاصلهٔ $(-\sqrt{۲},۰]$ نمودار تابع $y=-x$، بالاتر از نمودار تابع $y=\left[x^{۲}\right]$ قرار دارد و یا برابر آن است، پس:

$$-\sqrt{۲}<x\leq -۱ \Rightarrow ۱\leq x^{۲}<۲ \Rightarrow \left[x^{۲}\right]=۱ \Rightarrow y=-\sqrt{-x-۱}$$

$$-۱<x\leq ۰ \Rightarrow ۰\leq x^{۲}<۱ \Rightarrow \left[x^{۲}\right]=۰ \Rightarrow y=-\sqrt{-x}$$

حال، اگر نمودار تابع $y=-\sqrt{-x-\left[x^{۲}\right]}$ و خط $x-y-۱=۰$ را در یک دستگاه رسم کنیم، داریم:



همان‌طور که می‌بینید، کم‌ترین فاصلهٔ نقاط نمودار تابع $y=-\sqrt{-x-\left[x^{۲}\right]}$، از خط $x-y-۱=۰$، مربوط به ضابطهٔ $-۱<x\leq ۰$؛ $y=-\sqrt{-x}$ است. حال اگر نقطهٔ موردنظر را به‌صورت $\begin{vmatrix} x \\ -\sqrt{-x} \end{vmatrix}$ در نظر بگیریم، داریم:

$$AH=\frac{\left|x+\sqrt{-x}-۱\right|}{\sqrt{۱+۱}}=\frac{\left|x+\sqrt{-x}-۱\right|}{\sqrt{۲}}=\frac{۱-x-\sqrt{-x}}{\sqrt{۲}}$$

اگر بخواهیم این فاصله کم‌ترین باشد، باید:

$$(AH)'=\frac{۱}{\sqrt{۲}}\left(-۱+\frac{۱}{۲\sqrt{-x}}\right)=۰ \Rightarrow ۱=\frac{۱}{۲\sqrt{-x}} \Rightarrow \frac{۱}{۲}=\sqrt{-x}$$

$$\Rightarrow x=-\frac{۱}{۴}$$

بنابراین کم‌ترین مقدار AH به ازای $x=-\frac{۱}{۴}$ اتفاق می‌افتد:

$$AH=\frac{۱+\frac{۱}{۴}-\sqrt{\frac{۱}{۴}}}{\sqrt{۲}}=\frac{\frac{۵}{۴}-\frac{۱}{۲}}{\sqrt{۲}}=\frac{۳}{۴\sqrt{۲}}=\frac{۳\sqrt{۲}}{۸}$$

www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshClouds

۲۱- ۴ کتاب متمایز با عنوان ریاضی و ۳ کتاب متمایز با عنوان فیزیک را به چند طریق می‌توان روی هم قرار داد به‌طوری‌که وقتی آن‌ها را یکی‌یکی برمی‌داریم تا در گوشه دیگر اتاق روی هم بچینیم، ترتیب عنوان کتاب‌ها (ریاضی و فیزیک) مانند قبل باشد؟

۱) ۶۳۰ ۲) ۴۳۲ ۳) ۳۱۵ ۴) ۱۴۴

پاسخ: گزینهٔ ۲ (متوسط ـ محاسباتی ـ ۱۰۰۶)

نکته ۱

تعداد حالات قرارگیری n شیء متمایز در n جایگاه برابر $n!$ حالت می‌باشد. تعداد حالات قرارگیری n_1 شیء متمایز در n_1 جایگاه و n_2 شیء متمایز در n_2 جایگاه و ... به‌صورت زیر می‌باشد.

$$n_1!\times n_2!\times n_3!\times\cdots$$

نکته ۲: اصل جمع

اگر کاری را بتوان به k روش انجام داد، به‌طوری که در روش اول k_1 انتخاب، در روش دوم k_2 انتخاب، در روش سوم k_3 انتخاب و ... و در روش r ام k_r انتخاب وجود داشته باشد، برای انجام کار موردنظر $k_1+k_2+\cdots+k_r$ روش وجود دارد.

حالت‌های زیر قابل بررسی است:

۱) r F r F → ۴!۳! = ۱۴۴ r F r

۲) r r F F → ۴!۳! = ۱۴۴ F r r

۳) F r r F → ۴!۳! = ۱۴۴ r r F

⇒ حالت ۴۳۲

گروه آموزشی ماز

۲۲- اگر $P(A-B)=\frac{۳}{۷}$ و $P(B-A)=\frac{۱}{۷}$ باشد، کم‌ترین مقدار $\frac{P(A)}{P(B)}$ کدام است؟

۱) $\frac{۳}{۲}$ ۲) $\frac{۲}{۳}$ ۳) $\frac{۵}{۴}$ ۴) $\frac{۴}{۵}$

کنکور ۱۴۰۴
www.biomaze.ir
www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshClouds

پاسخ: گزینهٔ ۱ (آسان ـ محاسباتی ـ ۱۱۰۲)

نکته:

اگر U مجموعهٔ مرجع باشد، همواره داریم:

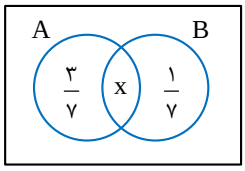
$$\max\big(n(A)\big)=n(U) \Rightarrow \max\big(P(A)\big)=P(U)=۱$$

با توجه به مقادیر داده شده خواهیم داشت:

$$P(A\cup B)\le ۱$$

$$\frac{۴}{۷}+x\le ۱$$

$$x\le \frac{۳}{۷}$$



$$\min\left(\frac{P(A)}{P(B)}\right)=\min\left(\frac{\frac{۳}{۷}+x}{\frac{۱}{۷}+x}\right)\xrightarrow{x=\frac{۳}{۷}}\frac{\frac{۶}{۷}}{\frac{۴}{۷}}=\frac{۶}{۴}=\frac{۳}{۲}$$

گروه آموزشی ماز

۲۳- اعداد ۱ تا ۱۰۰ در یک دسته (دسته اول) قرار دارند. دو عدد از بین اعداد دسته اول را حذف نموده و مقدار اختلاف آن دو عدد را در دسته جدید قرار می‌دهیم. این روند تا جایی ادامه می‌یابد که همه اعداد دسته اول حذف شده و همه اعداد در دسته جدید فرد و غیرتکراری باشند. میانگین داده‌های دسته جدید کدام است؟

۱) ۲۵ ۲) ۲۵/۵ ۳) ۵۰ ۴) ۵۰/۵

پاسخ: گزینهٔ ۳ (متوسط ـ محاسباتی ـ ۱۱۰۳)

نکته ۱

میانگین یا متوسط داده‌ها را با نماد $\bar{x}$ نشان می‌دهیم و داریم:

$$\bar{x}=\frac{\sum_{i=۱}^{n}x_i}{n}=\frac{x_۱+x_۲+\cdots+x_n}{n}$$

نکته ۲

میانگین موزون داده‌ها را با نماد $\bar{x}_w$ تعریف می‌کنیم و به این صورت است که اگر n دادهٔ $x_۱,x_۲,\ldots,x_n$ داشته باشیم، به‌طوری که هریک از این داده‌ها دارای تعداد تکرار $w_۱,w_۲,\ldots,w_n$ باشند، آن‌گاه:

$$\bar{x}_w=\frac{\sum_{i=۱}^{n}x_iw_i}{\sum_{i=۱}^{n}w_i}=\frac{w_۱x_۱+w_۲x_۲+\cdots+w_nx_n}{w_۱+w_۲+\cdots+w_n}$$

اعداد ۱ تا ۱۰۰ را دوبه‌دو به‌صورت زیر از هم کم می‌کنیم تا اعداد دسته جدید به‌دست آید:

$$\begin{cases}۱۰۰-۱=۹۹\\ ۹۹-۲=۹۷\\ ۹۸-۳=۹۵\\ \vdots\\ ۵۱-۵۰=۱\end{cases}$$

بنابراین اعداد دسته جدید عبارتند از:

$$۱,۳,۵,\ldots,۹۵,۹۷,۹۹$$

میانگین $\bar{x}=\frac{۱+۹۹}{۲}=۵۰$

کنکور ۱۴۰۴
www.biomaze.ir
www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshClouds

نکته:

چون اعداد تشکیل دنباله حسابی می‌دهند، میانگین از رابطه زیر به‌دست می‌آید:

$$\bar{x} = \frac{\text{عدد آخر} + \text{عدد اول}}{۲}$$

گروه آموزشی ماز

۲۴- چهار کارت به شماره ۱ تا ۴ با احتمال متناسب با عدد نوشته شده روی آن‌ها در اختیار است. کارتی به تصادف انتخاب شده و سپس به تعداد عدد کارت، یک سکه پرتاب می‌شود. اگر سکه یک‌بار «رو» آمده باشد، با کدام احتمال سکه دقیقاً یک‌بار پرتاب شده است؟

۱) $\frac{۱۲}{۱۹}$ ۲) $\frac{۴}{۱۳}$ ۳) $\frac{۱۲}{۲۳}$ ۴) $\frac{۴}{۲۹}$

پاسخ: گزینهٔ ۴ (دشوار ـ محاسباتی ـ ۱۱۰۲)

نکته:

احتمال شرطی: در صورتی که B پیشامدی باشد که $P(B) > ۰$ ، برای هر پیشامد A، «احتمال A به شرط رخ دادن B» (که آن را «pی A به شرط B» نیز می‌خوانیم) به شکل زیر تعریف می‌شود:

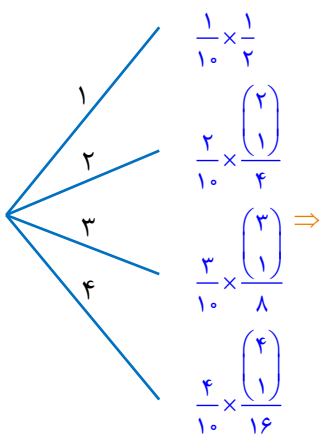
$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

احتمال غیرهم‌شانس: از فضای نمونه‌ای متناهی با احتمال غیرهم‌شانس، اگر $S = \{S_۱, S_۲, ..., S_n\}$ فضای نمونه‌ای و $A = \{a_۱, a_۲, ..., a_k\}$ یک زیرمجموعه k عضوی S باشد، همواره داریم:

۱) $۰ \le P(A) \le ۱$ ۲) $P(S) = ۱$ ۳) $P(A) = P(a_۱) + P(a_۲) + ... + P(a_k)$

$$P(۱) + P(۲) + P(۳) + P(۴) = ۱$$

$$t + ۲t + ۳t + ۴t = ۱ \Rightarrow ۱۰t = ۱ \Rightarrow t = \frac{۱}{۱۰} \begin{cases} P(۱) = \frac{۱}{۱۰} \\ P(۲) = \frac{۲}{۱۰} \\ P(۳) = \frac{۳}{۱۰} \\ P(۴) = \frac{۴}{۱۰} \end{cases}$$



$$\Rightarrow P(\text{یک بار رو آمده} \mid \text{سکه یک بار پرتاب شده}) = \frac{\frac{۱}{۲۰}}{\frac{۱}{۲۰} + \frac{۱}{۱۰} + \frac{۹}{۸۰} + \frac{۱}{۱۰}} = \frac{۴}{۲۹}$$

گروه آموزشی ماز

۲۵- در یک لوزی، هر ضلع واسطه هندسی دو قطر لوزی است. اندازه زاویه بزرگ‌تر لوزی، چند درجه است؟

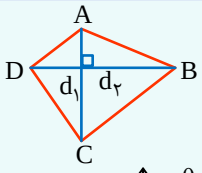
۱) ۱۵۰ ۲) ۱۲۰ ۳) ۱۳۵ ۴) ۱۱۵

کنکور ۱۴۰۴
www.biomaze.ir
www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshClouds

پاسخ: گزینهٔ ۱ (متوسط ـ محاسباتی ـ ۱۰۰۳)

نکته ۱

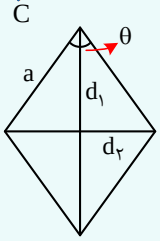
اگر در یک چهارضلعی، ۲ قطر آن عمود بر هم باشند، آن‌گاه داریم:



$$S=\frac{1}{2}d_1d_2$$

نکته ۲

روش‌های محاسبهٔ مساحت لوزی:

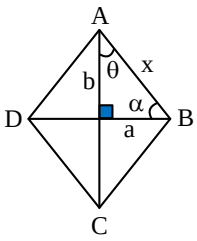


$$S=\frac{1}{2}d_1\,d_2$$

$$S=a^2\sin\theta$$

$$x^2=(2a)(2b)=4ab$$

$$\begin{cases}\text{لوزی } S=\frac{1}{2}(2a)(2b)=2ab\\ \text{لوزی } S=x^2\sin 2\theta\end{cases}$$

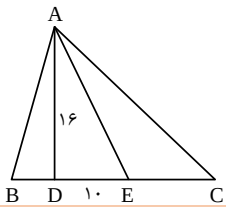


$$\Rightarrow x^2\sin 2\theta=2ab \Rightarrow 4ab\sin 2\theta=2ab$$

$$\Rightarrow \sin 2\theta=\frac{1}{2} \Rightarrow 2\theta=30^\circ \Rightarrow 2\alpha=150^\circ$$

گروه آموزشی ماز

۲۶- در شکل زیر، $\hat{BAD}=\hat{EAC}$ و $BA=BE$ است. طول EC کدام است؟



۱) ۸/۷
۲) ۱۲/۴
۳) ۹/۳
۴) ۱۵/۶

پاسخ: گزینهٔ ۴ (دشوار ـ محاسباتی ـ ۱۰۰۲)

حالت‌های تشابه دو مثلث

حالت ۱) ۲ زاویهٔ برابر:

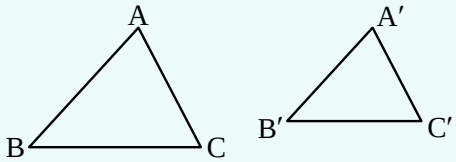
$$(\hat{A}=\hat{A}',\ \hat{B}=\hat{B}')\Rightarrow \triangle ABC\sim\triangle A'B'C'$$

حالت ۲) ۲ ضلع متناسب و زاویهٔ بین ۲ ضلع برابر:

$$(\frac{AB}{A'B'}=\frac{AC}{A'C'},\ \hat{A}=\hat{A}')\Rightarrow \triangle ABC\sim\triangle A'B'C'$$

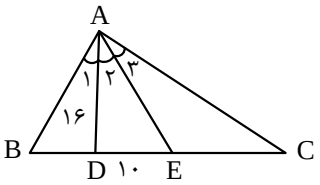
حالت ۳) ۳ ضلع متناسب:

$$(\frac{AB}{A'B'}=\frac{AC}{A'C'}=\frac{BC}{B'C'})\Rightarrow \triangle ABC\sim\triangle A'B'C'$$



$$\left.\begin{array}{l}\hat{AEC}:\text{ زاویهٔ خارجی } \hat{AEB} \Rightarrow \hat{AEB}=\hat{A}_3+\hat{C}\\ BA=BE \xrightarrow{\hat{ABE}} \hat{BAE}=\hat{AEB}\end{array}\right\}\Rightarrow \hat{A}_1+\hat{A}_2=\hat{A}_3+\hat{C}$$

$$\left.\begin{array}{l}\xrightarrow{\hat{A}_1=\hat{A}_2} \hat{A}_2=\hat{C}\\ \hat{D}=\hat{D}\end{array}\right\}\Rightarrow \triangle ADE\sim\triangle CDA \Rightarrow \frac{AD}{CD}=\frac{DE}{AD}\xrightarrow{EC=x}\frac{16}{10+x}=\frac{10}{16}$$



$$\Rightarrow 100+10x=256 \Rightarrow 10x=156 \Rightarrow x=15/6$$

گروه آموزشی ماز

کنکور ۱۴۰۴
www.biomaze.ir
www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshClouds

۲۷- از رئوس دو سر قطر کوچک یک متوازی‌الاضلاع، خط‌هایی عمود بر قطر بزرگ رسم می‌کنیم تا سه پاره‌خط روی آن ایجاد شود و امتداد این خطوط ضلع مقابل را قطع کند. اگر طول پاره‌خط وسطی روی قطر بزرگ نصف طول پاره‌خط‌های کناری باشد، مساحت متوازی‌الاضلاع کوچک حاصل از دو عمود رسم شده چند برابر مساحت کوچک‌ترین مثلث ساخته شده در شکل است؟

۱) ۳ ۲) ۲/۵ ۳) ۲ ۴) ۱/۵

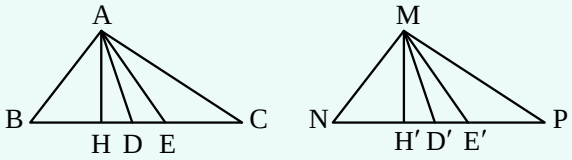
پاسخ: گزینهٔ ۲ (متوسط ـ محاسباتی ـ ۱۰۰۲)

نکته ۱

اگر ۲ مثلث $\overset{\triangle}{ABC}$ و $\overset{\triangle}{MNP}$ متشابه با نسبت تشابه k باشند، آن‌گاه داریم:

MH' و AH : ارتفاع MD' و AD : نیمساز

ME' و AE : میانه

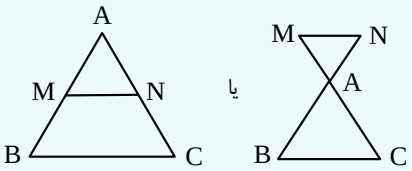


$$\frac{S_{\overset{\triangle}{ABC}}}{S_{\overset{\triangle}{MNP}}}=k^2 \qquad \frac{P_{\overset{\triangle}{ABC}}}{P_{\overset{\triangle}{MNP}}}=k \qquad \frac{AH}{MH'}=\frac{AD}{MD'}=\frac{AE}{ME'}=k$$

نکته ۲

قضیهٔ اساسی تشابه: اگر خط راستی موازی یکی از اضلاع مثلثی، دو ضلع دیگر (یا امتداد آن‌ها) را در دو نقطه قطع کند، مثلثی با آن‌ها تشکیل می‌دهد که با مثلث اصلی متشابه است.

$$MN \parallel BC \Rightarrow \overset{\triangle}{AMN} \sim \overset{\triangle}{ABC}$$



مطابق شکل دو مثلث DHM و $BH'N$ هم‌نهشت هستند. با توجه به این‌که $DH = BH' = 2HH'$ است، داریم:

$$MH \parallel CH' \xrightarrow{\text{قضیه اساسی تشابه}} \overset{\triangle}{DHM} \sim \overset{\triangle}{DH'C} \Rightarrow \frac{S_{DHM}}{S_{DH'C}}=\left(\frac{DH}{DH'}\right)^2$$

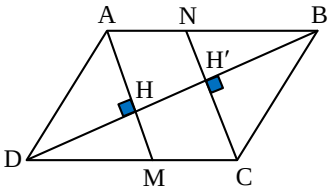
$$\Rightarrow \frac{S_{DHM}}{S_{DH'C}}=\left(\frac{2}{3}\right)^2=\frac{4}{9} \Rightarrow \frac{S_{DHM}}{S_{CMHH'}}=\frac{4}{9-4}=\frac{4}{5} \quad (1)$$

$$NH' \parallel AH \xrightarrow{\text{قضیه اساسی تشابه}} \overset{\triangle}{BH'N} \sim \overset{\triangle}{BHA} \Rightarrow \frac{S_{BH'N}}{S_{BHA}}=\left(\frac{BH'}{BH}\right)^2$$

$$\Rightarrow \frac{S_{BH'N}}{S_{BHA}}=\left(\frac{2}{3}\right)^2=\frac{4}{9} \Rightarrow \frac{S_{BH'N}}{S_{ANH'H}}=\frac{4}{9-4}=\frac{4}{5} \quad (2)$$

$$(1),(2) \Rightarrow \frac{S_{DHM}+S_{BH'N}}{S_{CMHH'}+S_{ANH'H}}=\frac{4}{5} \Rightarrow \frac{2S_{DHM}}{S_{ANCM}}=\frac{4}{5}$$

$$\Rightarrow \frac{S_{ANCM}}{S_{DHM}}=\frac{5}{2}=2/5$$



گروه آموزشی ماز

۲۸- در مثلث ABC، طول دو میانه عمود بر هم رسم شده از رأس‌های B و C به‌ترتیب، ۱۲ و ۹ است. مساحت مثلث ABC کدام است؟

۱) ۳۲ ۲) ۵۴ ۳) ۶۴ ۴) ۷۲

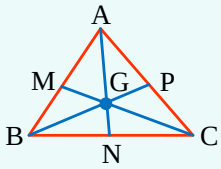
کنکور ۱۴۰۴
www.biomaze.ir
www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshClouds

پاسخ: گزینهٔ ۴ (آسان ـ محاسباتی ـ ۱۰۰۳)

نکته ۱

۳ میانهٔ هر مثلث در نقطه‌ای درون آن مثلث همرس‌اند. به طوری که فاصلهٔ این نقطه تا وسط هر ضلع برابر $\frac{۱}{۳}$ اندازهٔ میانهٔ نظیر آن ضلع است و فاصله‌اش تا هر رأس $\frac{۲}{۳}$ اندازهٔ میانهٔ نظیر آن می‌باشد.

$$MG=\frac{۱}{۳}MC \quad GN=\frac{۱}{۳}AN \quad GP=\frac{۱}{۳}BP$$
$$GC=\frac{۲}{۳}MC \quad AG=\frac{۲}{۳}AN \quad BG=\frac{۲}{۳}BP$$



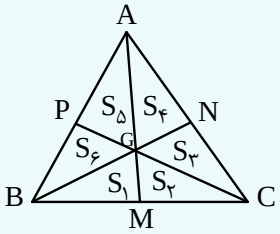
نکته ۲

میانه‌های هر مثلث آن را به ۶ مثلث هم‌مساحت تقسیم می‌کنند.

$$S_۱=S_۲=S_۳=S_۴=S_۵=S_۶$$

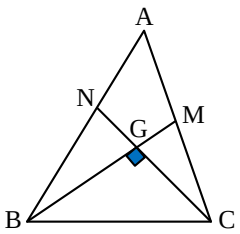
تبصره: در این سؤال داریم:

$$S_۱+S_۲=S_۳+S_۴=S_۵+S_۶$$
$$\Rightarrow S_{\hat{BGC}}=S_{\hat{AGC}}=S_{\hat{AGB}}$$



می‌دانیم میانه‌های هر مثلث یکدیگر را به نسبت ۲ به ۱ قطع می‌کنند، پس داریم:

$$BG=\frac{۲}{۳}BM=\frac{۲}{۳}\times ۱۲=۸$$
$$CG=\frac{۲}{۳}CN=\frac{۲}{۳}\times ۹=۶$$
$$S_{BGC}=\frac{۱}{۲}BG\times CG=\frac{۱}{۲}\times ۸\times ۶=۲۴$$
$$S_{BGC}=\frac{۱}{۳}S_{ABC} \Rightarrow S_{ABC}=۳\times ۲۴=۷۲$$



گروه آموزشی ماز

۲۹- چهارضلعی ABCD در یک دایره محاط شده است. رأس‌های این چهارضلعی، رئوس زوایای ظلی واقع بر دایره هستند. مجموع این زاویه‌های ظلی کدام است؟

۱) ۱۸۰ ۲) ۵۴۰ ۳) ۳۶۰ ۴) ۷۲۰

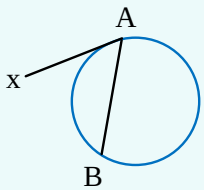
پاسخ: گزینهٔ ۱ (آسان ـ محاسباتی ـ ۱۱۰۱)

زاویهٔ ظلی

زاویه‌ای که رأس آن روی دایره، یک ضلع آن وتر دایره و ضلع دیگرش مماس بر دایره باشد.

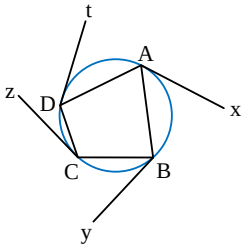
اندازهٔ زاویهٔ ظلی برابر نصف کمان روبه‌رو به آن است، یعنی:

$$x\hat{A}B=\frac{\overset{\frown}{AB}}{۲}$$



نیم‌خط‌های Ax، By، Cz و Dt را مماس بر دایره رسم می‌کنیم. می‌دانیم اندازهٔ هر زاویهٔ ظلی نصف اندازهٔ کمان مقابل آن است، پس داریم:

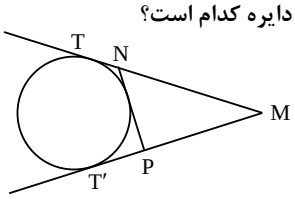
$$\hat{BAx}+\hat{CBy}+\hat{DCz}+\hat{ADt}=\frac{\overset{\frown}{AB}}{۲}+\frac{\overset{\frown}{BC}}{۲}+\frac{\overset{\frown}{CD}}{۲}+\frac{\overset{\frown}{DA}}{۲}$$
$$=\frac{\overset{\frown}{AB}+\overset{\frown}{BC}+\overset{\frown}{CD}+\overset{\frown}{DA}}{۲}=\frac{۳۶۰^\circ}{۲}=۱۸۰^\circ$$



گروه آموزشی ماز

کنکور ۱۴۰۴
www.biomaze.ir
سنجش کلاد
www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshClouds

۳۰- در شکل زیر، از نقطهٔ M دو مماس بر دایره رسم شده است. اگر MT=۱۸، MN=۱۵ و MP=۱۲ باشد، شعاع دایره کدام است؟



۱) ۴
۲) ۶
۳) $۴\sqrt{۵}$
۴) $۶\sqrt{۵}$

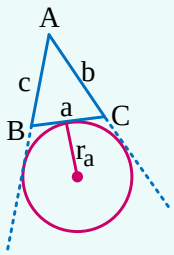
پاسخ: گزینهٔ ۲ (متوسط ـ محاسباتی ـ ۱۱۰۱)

نکته ۱

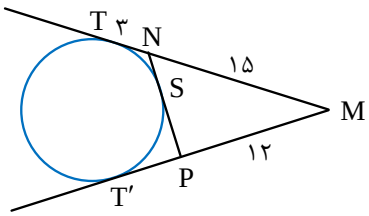
شعاع دایرهٔ محاطی داخلی: اگر یک دایره، محاط در یک n ضلعی به مساحت S و محیط ۲P باشد، آنگاه شعاع دایره محاطی برابر است با: $r=\frac{S}{P}$

نکته ۲

شعاع دایرهٔ محاطی خارجی مثلث: اگر مساحت مثلث $\overset{\triangle}{ABC}$، S و محیط آن ۲P باشد، داریم: $r_a=\frac{S}{P-a}$



می‌دانیم طول مماس‌های رسم شده از یک نقطه بر دایره برابر یکدیگرند، پس داریم:



$$MT'=MT=۱۸ \Rightarrow MP+PT'=۱۸$$
$$\Rightarrow ۱۲+PT'=۱۸ \Rightarrow PT'=۶$$
$$\left.\begin{matrix}NS=NT=۳\\PS=PT'=۶\end{matrix}\right\} \Rightarrow NP=۳+۶=۹$$

بنابراین اضلاع مثلث MNP برابر ۹، ۱۲ و ۱۵ هستند که در رابطهٔ فیثاغورس صدق می‌کنند، در نتیجه:

$$۲P=۹+۱۲+۱۵=۳۶ \Rightarrow P=۱۸$$
$$S=\frac{۱}{۲}\times ۹\times ۱۲=۵۴$$
$$r_a=\frac{S}{P-a}=\frac{۵۴}{۱۸-۹}=\frac{۵۴}{۹}=۶$$

گروه آموزشی ماز

۳۱- پاره‌خط AB به طول ۵ در یک طرف خط d قرار دارد. فاصله دو سر پاره‌خط AB از خط d به‌ترتیب ۱ و ۵ است. نقطه C طوری روی خط d انتخاب می‌شود که محیط مثلث ABC کم‌ترین مقدار باشد، حداقل مجموع اندازه‌های دو ضلع AC و BC کدام است؟

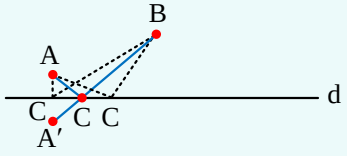
۱) $\sqrt{۵۷}$
۲) $\sqrt{۶۵}$
۳) $۳\sqrt{۵}$
۴) $۴\sqrt{۶}$

پاسخ: گزینهٔ ۳ (آسان ـ مفهومی / محاسباتی ـ ۱۱۰۲)

نکته:

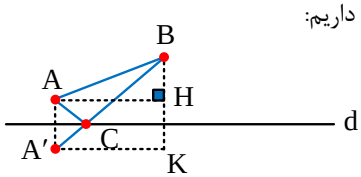
دستور هرون برای پیدا کردن کوتاه‌ترین مسیر:

اگر A و B نقاطی در یک طرف خط d باشند، آن‌گاه کم‌ترین فاصلهٔ گذر از A به B طوری که از خط d نیز عبور کند برابر است با فاصلهٔ A' از B. (A' نقطه‌ای است که از بازتاب A نسبت به خط d به‌دست می‌آید):



$$\min ACB=A'B$$

مطابق شکل در مثلث قائم‌الزاویهٔ AHB داریم:



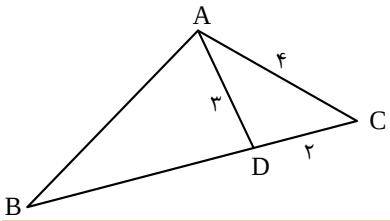
$$AH^۲=AB^۲-BH^۲=۵^۲-۴^۲=۹ \Rightarrow AH=۳$$

کنکور ۱۴۰۴
www.biomaze.ir
www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshClouds

برای پیدا کردن نقطهٔ C کافی است نقطهٔ A' (بازتاب نقطهٔ A نسبت به خط d) را به نقطهٔ B وصل کنیم.
مطابق شکل داریم:

$$A'B^2 = A'K^2 + BK^2 = 3^2 + 6^2 = 45$$
$$\min(AC+CB) = A'C+CB = A'B = \sqrt{45} = 3\sqrt{5}$$

گروه آموزشی ماز

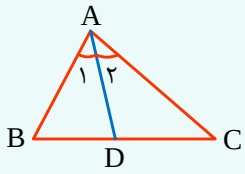


۳۲- در شکل زیر، اگر $\hat{BAD} = 3\hat{DAC}$ باشد، محیط مثلث ABC کدام است؟

۱) ۲۴
۲) ۲۵/۵
۳) ۲۷
۴) ۲۸/۵

پاسخ: گزینهٔ ۲ (دشوار ـ محاسباتی ـ ۱۱۰۳)

قضیهٔ نیمسازها



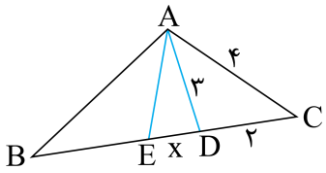
(۱) در هر مثلث، نیمساز هر زاویهٔ داخلی، ضلع روبه‌رو به آن زاویه را به نسبت اندازه‌های ضلع‌های آن زاویه تقسیم می‌کند.

$$\hat{A}_1 = \hat{A}_2 \Rightarrow \frac{AB}{AC} = \frac{BD}{DC}$$

(۲) در هر مثلث، مربع هر نیمساز داخلی برابر است با:

$$AD^2 = AB.AC - BD.DC$$

ابتدا نیمساز زاویهٔ A در مثلث ABC، یعنی پاره‌خط AE را رسم می‌کنیم. در این‌صورت AD نیمساز زاویهٔ EAC است و در نتیجه طبق قضیهٔ نیمسازها داریم:



$$\overset{\triangle}{AEC}: \frac{DE}{DC} = \frac{AE}{AC} \xrightarrow{DE=x} \frac{x}{2} = \frac{AE}{4} \Rightarrow AE = 2x$$

$$AD^2 = AE\times AC - DE\times DC \Rightarrow 3^2 = 2x\times 4 - x\times 2 \Rightarrow 9 = 6x$$

$$\Rightarrow x = \frac{3}{2} \Rightarrow \begin{cases} AE = 3 \\ EC = \frac{3}{2}+2 = \frac{7}{2} \end{cases}$$

$$\overset{\triangle}{ABC}: \frac{BE}{EC} = \frac{AB}{AC} \xrightarrow{BE=y} \frac{y}{\frac{7}{2}} = \frac{AB}{4} \Rightarrow AB = \frac{8y}{7}$$

$$AE^2 = AB\times AC - BE\times EC \Rightarrow 3^2 = \frac{8y}{7}\times 4 - y\times\frac{7}{2}$$

$$\Rightarrow 9 = \frac{32y}{7} - \frac{7y}{2} = \frac{15y}{14} \Rightarrow y = \frac{14\times 9}{15} = \frac{42}{5} = 8/4$$

$$\overset{\triangle}{ABC}\ \text{محیط} = AB+AC+BC$$

$$= \frac{8\times 8/4}{7} + 4 + (8/4 + 3/5) = 25/5$$

گروه آموزشی ماز

۳۳- اگر $a = (\log 25)^2 - (\log 4)^2$ و $\frac{25}{8}$ باشد، مقدار $\left|\frac{1}{3}A\right|$ کدام است؟ $A = \begin{bmatrix} 10^{\frac{a}{4}} & 2^{\frac{a}{2}} \\ 5^{\frac{a}{2}} & 10^{\frac{a}{2}} \end{bmatrix}$

۱) $\frac{25}{8}$
۲) $\frac{75}{8}$
۳) $\frac{25}{24}$
۴) $\frac{75}{24}$

کنکور ۱۴۰۴
www.biomaze.ir
www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshClouds

پاسخ: گزینهٔ ۳ (دشوار ـ محاسباتی ـ ۱۲۰۱)

نکته ۱: دترمینان ماتریس

۱) $1\times 1 \Leftarrow$

$$A=[a]\Rightarrow |A|=a$$

۲) $2\times 2 \Leftarrow$

$$A=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\Rightarrow |A|=ad-bc$$

۳) $3\times 3 \Leftarrow$

$$A=\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{bmatrix}\Rightarrow |A|=a_1\begin{vmatrix} b_2 & b_3 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix}-a_2\begin{vmatrix} b_1 & b_3 \\ c_1 & c_3 \end{vmatrix}+a_3\begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix}$$

نکته ۲

اگر دترمینان ماتریس $A_{n\times n}$ برابر $|A|$ باشد آن‌گاه:

۱) اگر A معکوس‌پذیر باشد، دترمینان ماتریس A^{-1} برابر است با:

$$\left|A^{-1}\right|=\frac{1}{|A|}$$

۲) اگر ماتریس B، ماتریسی باشد که فقط یکی از سطرها یا ستون‌هایش k برابر مقادیر ماتریس A و بقیهٔ درایه‌هایش همان درایه‌های ماتریس A هستند. دترمینان این ماتریس برابر است با:

$$|B|=k|A|$$

به عنوان مثال:

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \qquad B=\begin{bmatrix} ka_{11} & ka_{12} & \cdots & ka_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

۳) دترمینان ماتریس B که همهٔ درایه‌هایش k برابر درایه‌های ماتریس A است، برابر است با:

$$|B|=|kA|=k^n|A| \quad (n:\text{ مرتبه ماتریس } A)$$

$$a=(\log 25)^2-(\log 4)^2=(\log 25-\log 4)(\log 25+\log 4)$$

$$=\log_{10}^{\frac{25}{4}}\times\underbrace{\log_{10}^{4\times 25}}_{\log_{10}^{10^2}=2}=2\log_{10}^{\frac{25}{4}}$$

$$\Rightarrow a=2\log_{10}^{\frac{25}{4}}\Rightarrow \log_{10}^{\frac{25}{4}}=\frac{a}{2}\Rightarrow 10^{\frac{a}{2}}=\frac{25}{4}$$

$$|A|=10^{\frac{3a}{4}}-10^{\frac{a}{2}}=\left(10^{\frac{a}{2}}\right)^{\frac{3}{2}}-10^{\frac{a}{2}}=\left(\frac{25}{4}\right)^{\frac{3}{2}}-\frac{25}{4}=\frac{125}{8}-\frac{25}{4}=\frac{75}{8}$$

$$\left|\frac{1}{3}A\right|=\frac{1}{9}\times|A|=\frac{1}{9}\times\frac{75}{8}=\frac{75}{72}=\frac{25}{24}$$

گروه آموزشی ماز

۳۴- نمودار سهمی با مختصات رأس $(-2,2)$، از نقطه $(-1,1)$ می‌گذرد. طول وتری که از کانون بر محور سهمی عمود رسم می‌شود، کدام است؟

۱) ۳ ۲) ۴ ۳) ۸ ۴) ۹

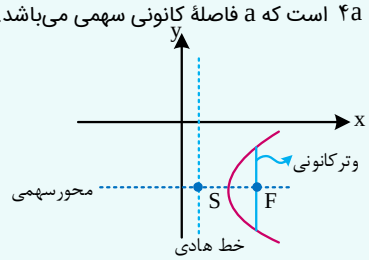
کنکور ۱۴۰۴
www.biomaze.ir
www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshClouds

پاسخ: گزینهٔ ۱ (آسان ـ محاسباتی ـ ۱۲۰۲)

نکته:

به خطی که از کانون سهمی گذشته و بر محور سهمی عمود است، وتر کانونی سهمی می‌گویند. طول وتر کانونی سهمی برابر $۴a$ است که a فاصلهٔ کانونی سهمی می‌باشد.

برای مثال، سهمی افقی زیر را ببینید:



فرض می‌کنیم سهمی افقی و دهانه رو به چپ است (سهمی می‌تواند عمودی هم باشد):

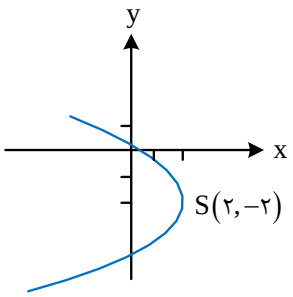
$$(y-\beta)^۲ = -۴a(x-\alpha)$$

$$(y+۲)^۲ = -۴a(x-۲)$$

$$\xrightarrow[(-۱\text{و}۱)\in \text{سهمی}]{} ۹ = -۴a(-۳)$$

$$a = \frac{۳}{۴}$$

$$\text{طول وتر}: ۴a = ۴\left(\frac{۳}{۴}\right) = ۳$$



گروه آموزشی ماز

۳۵- اگر دو بردار ناصفر $\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}-\frac{۳\vec{b}}{|\vec{b}|}$ و $\frac{۹\vec{a}}{|\vec{a}|}+\frac{۷\vec{b}}{|\vec{b}|}$ بر هم عمود باشند، مساحت متوازی‌الاضلاعی را که توسط بردارهای ناصفر $\frac{۳\vec{a}}{|\vec{b}|}+\frac{۲\vec{b}}{|\vec{a}|}$ و $\frac{\vec{a}}{|\vec{b}|}-\frac{۲\vec{b}}{|\vec{a}|}$ ساخته می‌شود، کدام است؟

۱) ۱/۶ ۲) ۳/۲ ۳) ۴/۸ ۴) ۶/۴

پاسخ: گزینهٔ ۴ (دشوار ـ محاسباتی ـ ۱۲۰۳)

نکته ۱: ضرب داخلی

اگر $\vec{a}$ و $\vec{b}$ دو بردار در فضا باشند، آن‌گاه داریم:

θ: زاویهٔ بین ۲ بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$

$$\vec{a}.\vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta$$

نکته ۲:

۲ بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ عمودند اگر و تنها اگر $\vec{a}\cdot\vec{b}=۰$ باشد.

نکته ۳:

اندازهٔ ضرب خارجی: برای ۲ بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ در فضا داریم:

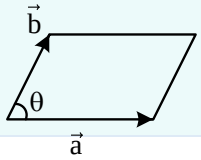
θ: زاویهٔ بین ۲ بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$

$$|\vec{a}\times\vec{b}| = |\vec{a}||\vec{b}|\sin\theta$$

نکته ۴:

مساحت متوازی‌الاضلاعی که توسط دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ ساخته می‌شود، برابر است با:

$$S_{\text{متوازی اضلاع}} = |\vec{a}\times\vec{b}| = |\vec{a}||\vec{b}|\sin\theta$$



کنکور ۱۴۰۴
www.biomaze.ir
www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshClouds

نکته ۵: ویژگی‌های ضرب خارجی

(۱) $\vec{a}\cdot(\vec{a}\times\vec{b})=0$ (۲) $\vec{a}\times\vec{b}=-\vec{b}\times\vec{a}$ (۳) $\vec{a}\times\vec{a}=\vec{0}$

(۴) $r\vec{a}\times\vec{b}=r(\vec{a}\times\vec{b})=\vec{a}\times r\vec{b}$ $\quad r\in\mathbb{R}$

(۵) $\vec{a}\times(\vec{b}+\vec{c})=\vec{a}\times\vec{b}+\vec{a}\times\vec{c}$

$(\vec{a}+\vec{b})\times\vec{c}=(\vec{a}\times\vec{c})+(\vec{b}\times\vec{c})$

(۶) $\vec{a}\times\vec{b}=\vec{0}\Leftrightarrow$ ۲ بردار غیرصفر $\vec{a}$ و $\vec{b}$ موازی هستند

دو بردار بر هم عمودند، ضرب داخلی آن‌ها صفر است:

$$\left(\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}-\frac{3\vec{b}}{|\vec{b}|}\right)\cdot\left(\frac{9\vec{a}}{|\vec{a}|}+\frac{7\vec{b}}{|\vec{b}|}\right)=0$$

$$\Rightarrow 9+\frac{7\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}-\frac{27\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}-21=0\Rightarrow\frac{20\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}=-12\Rightarrow\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}=\frac{-12}{20}=\frac{-3}{5}\Rightarrow\cos\theta=\frac{-3}{5}$$

$$S_{\text{متوازی‌الاضلاع}}=\left|\left(\frac{\vec{a}}{|b|}-\frac{2\vec{b}}{|\vec{a}|}\right)\times\left(\frac{3\vec{a}}{|b|}+\frac{2\vec{b}}{|\vec{a}|}\right)\right|=\left|\frac{2\vec{a}\times\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}+\frac{6\vec{a}\times\vec{b}}{|a||\vec{b}|}\right|=8\frac{|\vec{a}\times\vec{b}|}{|\vec{a}||\vec{b}|}=8\sin\theta=8\left(\frac{4}{5}\right)=\frac{32}{5}=6/4$$

گروه آموزشی ماز

۳۶- خطی به معادله $y+2x=0$، عمود منصف خط‌المرکزین دو دایره است که شعاع یکی نصف شعاع دیگری است. اگر معادلهٔ دایرهٔ بزرگ‌تر به‌صورت $x^2+y^2+6x-2y=a$ و خط مفروض بر دایرهٔ کوچک‌تر مماس باشد، مجموع طول نقاط برخورد دو دایره کدام است؟

۱) $\frac{\sqrt{15}}{2}$ ۲) $-\frac{\sqrt{15}}{2}$ ۳) ۱ ۴) -1

پاسخ: گزینهٔ ۳ (دشوار ـ محاسباتی ـ ۱۲۰۲)

نکته ۱

در معادلهٔ گسترده دایره به فرمول $x^2+y^2+ax+by+c=0$ داریم:

$$\text{مرکز دایره}:\begin{cases}x=-\frac{a}{2}\\ y=-\frac{b}{2}\end{cases}\qquad\text{شعاع دایره}\ r=\frac{1}{2}\sqrt{a^2+b^2-4c}$$

نکته ۲

اگر معادلهٔ گستردهٔ دو دایرهٔ C_1 و C_2 داده شده باشد، و مختصات نقاط برخورد ۲ دایره را بخواهد، می‌توانیم معادله‌های دو دایره را از هم کم کنیم. معادلهٔ جدید را در یکی از معادله‌های دایره‌ها جایگذاری کرده و مختصات نقاط برخورد را به‌دست می‌آوریم.

روش کار در پاسخ توضیح داده شده است.

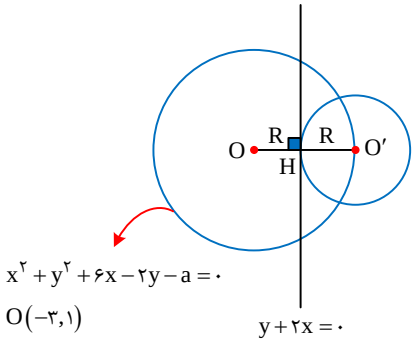
اگر شکل دو دایره را به‌صورت زیر در نظر بگیریم:

$$R=|OH|=\frac{|1-6|}{\sqrt{1+4}}=\frac{5}{\sqrt{5}}=\sqrt{5}\Rightarrow\begin{cases}\text{شعاع دایره کوچک}:\sqrt{5}\\ \text{شعاع دایره بزرگ‌تر}:2\sqrt{5}\end{cases}$$

$$\frac{1}{2}\sqrt{36+4+4a}=2\sqrt{5}$$

$$\Rightarrow\frac{1}{2}\times\sqrt{4(10+a)}=2\sqrt{5}\Rightarrow 10+a=20\Rightarrow a=10$$

معادله دایره بزرگ‌تر: $x^2+y^2+6x-2y-10=0$



کنکور ۱۴۰۴
www.biomaze.ir
www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshClouds

معادله OO' را می‌نویسیم:

$$m_{OO'}=\frac{۱}{۲}$$

$$O(-۳,۱)$$

$$y-۱=\frac{۱}{۲}(x+۳) \Rightarrow y-۱=\frac{۱}{۲}x+\frac{۳}{۲} \Rightarrow y=\frac{۱}{۲}x+\frac{۵}{۲}$$

$$۲y-x=۵$$

این خط را با $y+۲x=۰$ تقاطع می‌دهیم تا نقطه H به‌دست آید:

$$\begin{cases} ۲y-x=۵ \rightarrow ۴y-۲x=۱۰ \\ y+۲x=۰ \end{cases}$$

$$۵y=۱۰ \rightarrow y=۲ \quad H(-۱,۲),\ ۲+۲x=۰ \Rightarrow x=-۱$$

وسط O و O' است $H=\frac{O+O'}{۲} \Rightarrow O'=۲H-O=(-۲,۴)-(-۳,۱)=(۱,۳)$

معادله دایره کوچک‌تر: $(x-۱)^۲+(y-۳)^۲=۵ \Rightarrow x^۲+y^۲-۲x-۶y+۵=۰$

دو رابطه را از هم کم می‌کنیم. $\Rightarrow ۸x+۴y-۱۵=۰ \Rightarrow ۴y=-۸x+۱۵ \Rightarrow y=-۲x+\frac{۱۵}{۴}$

رابطه اخیر را در یکی از دایره‌ها جایگزین می‌کنیم:

$$(x-۱)^۲+\left(-۲x+\frac{۱۵}{۴}-۳\right)^۲=۵$$

$$x^۲-۲x+۱+۴x^۲-۳x+\frac{۹}{۱۶}=۵$$

$$۵x^۲-۵x-\frac{۵۵}{۱۶}=۰ \Rightarrow S=\frac{-b}{a}=\frac{۵}{۵}=۱$$

گروه آموزشی ماز

۳۷- اگر عدد دو رقمی $\overline{aa}$ را بین ارقام a و $۲a$ قرار دهید، عدد جدید ساخته می‌شود، حداکثر چند عدد طبیعی می‌تواند a را عاد کند؟

۱) ۴ ۲) ۳ ۳) ۲ ۴) ۱

پاسخ: گزینهٔ ۲ (آسان ـ مفهومی ـ ۱۲۰۱)

نکته:

ـ عاد کردن: عدد صحیح a که مخالف صفر است، شمارندهٔ عدد b است، (یا a، b را می‌شمارد یا $a|b$ یا b بر a بخش‌پذیر است.) هرگاه عددی صحیح چون q وجود داشته باشد به طوری که $b=aq$.

ـ اعداد اول فقط دارای ۲ شمارندهٔ طبیعی هستند، ۱ و خودش.

چون $۲a$ یک رقم است، پس حداکثر مقدار a برابر ۴ است و همچنین a نمی‌تواند برابر صفر باشد، یعنی a یکی از ارقام ۱، ۲، ۳، ۴ است. در صورتی که $a=۴$ باشد، سه عدد طبیعی ۱، ۲ و ۴، a را عاد می‌کند. به ازای $a=۱$، فقط یک عدد طبیعی و به ازای $a=۲$ یا $a=۳$، دو عدد طبیعی وجود دارد که a را عاد کند، پس حداکثر ۳ عدد طبیعی، عدد a را عاد می‌کند.

گروه آموزشی ماز

۳۸- مجموع ارقام کوچک‌ترین عدد طبیعی سه رقمی x که در معادله $۷۶x+۱۲۴y=۳۶۴$ صدق می‌کند، کدام است؟

۱) ۱۱ ۲) ۱۰ ۳) ۵ ۴) ۴

کنکور ۱۴۰۴
www.biomaze.ir
www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshClouds

پاسخ: گزینهٔ ۱ (متوسط ـ محاسباتی ـ ۱۲۰۱)

نکته ۱

شرط لازم و کافی برای آن‌که معادلهٔ سیالهٔ $ax+by=c$ دارای جواب باشد، آن است که: $(a,b)|c$.

نکته ۲

تبدیل معادله سیاله به یک معادلهٔ هم‌نهشتی:

$$ax+by=c \Rightarrow \begin{cases} ax \overset{|b|}{\equiv} c \\ by \overset{|a|}{\equiv} c \end{cases}$$

نکته ۳

ویژگی‌های هم‌نهشتی:

۱) $a \overset{m}{\equiv} b \Rightarrow \begin{cases} a+c \overset{m}{\equiv} b+c \\ a-c \overset{m}{\equiv} b-c \end{cases}$

۲) $a \overset{m}{\equiv} b \Rightarrow ac \overset{m}{\equiv} bc$

۳) $a \overset{m}{\equiv} b \Rightarrow a^n \overset{m}{\equiv} b^n$

۴) $\left.\begin{matrix} a \overset{m}{\equiv} b \\ c \overset{m}{\equiv} d \end{matrix}\right\} \Rightarrow \begin{cases} ac \overset{m}{\equiv} bd \\ a \pm c \overset{m}{\equiv} b \pm d \end{cases}$

۵) $\left.\begin{matrix} a \overset{m}{\equiv} b \\ b \overset{m}{\equiv} c \end{matrix}\right\} \Rightarrow a \overset{m}{\equiv} c$

۶) $a \overset{m}{\equiv} b \Rightarrow a \pm mt \overset{m}{\equiv} b \pm mk$

۷) $ac \overset{m}{\equiv} bc \ , \ (c,m)=d \Rightarrow a \overset{\frac{m}{d}}{\equiv} b$

$$۷۶x+۱۲۴y=۳۶۴ \xrightarrow{\div ۴} ۱۹x+۳۱y=۹۱$$

$$\Rightarrow ۱۹x \overset{۳۱}{\equiv} ۹۱ \Rightarrow -۱۲x \overset{۳۱}{\equiv} -۲ \xrightarrow[(-۲,۳۱)=۱]{\div(-۲)} ۶x \overset{۳۱}{\equiv} ۱$$

$$\Rightarrow ۶x \overset{۳۱}{\equiv} ۱-۳۱ \overset{۳۱}{\equiv} -۳۰ \xrightarrow[(۶,۳۱)=۱]{\div ۶} x \overset{۳۱}{\equiv} -۵$$

$$\Rightarrow x=۳۱k-۵ \quad (k \in \mathbb{Z})$$

کوچک‌ترین عدد طبیعی سه رقمی x، به ازای $k=۴$ حاصل می‌شود:

$$k=۴ \Rightarrow x=۳۱\times ۴-۵=۱۱۹ \rightarrow \text{مجموع ارقام} = ۱۱$$

گروه آموزشی ماز

۳۹- حداقل چند نوع زوج مرتب (a,b) در باقیماندهٔ تقسیم بر ۳، با مؤلفه‌هایی از اعداد صحیح و مثبت انتخاب کنیم تا مطمئن شویم دو زوج مرتب وجود دارد که مجموع مؤلفه‌های اول و مجموع مؤلفه‌های دوم آن‌ها، مضرب ۳ هستند؟

۱) ۵ ۲) ۶ ۳) ۹ ۴) ۱۰

پاسخ: گزینهٔ ؟ (متوسط ـ مفهومی / محاسباتی ـ ۱۲۰۳)

نکته:

اصل لانهٔ کبوتری: اگر m کبوتر و n لانه داشته باشیم و $m>n$ و همهٔ کبوترها درون لانه‌ها قرار بگیرند، در این صورت، لانه‌ای وجود دارد که حداقل ۲ کبوتر در آن قرار گرفته است.

تعمیم اصل لانهٔ کبوتری: هرگاه $(kn+۱)$ کبوتر یا بیشتر در n لانه قرار بگیرند، در این صورت، لانه‌ای وجود دارد که حداقل $(k+۱)$ کبوتر در آن قرار گرفته است.

کنکور ۱۴۰۴
www.biomaze.ir
www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshClouds

می‌دانیم که باقی‌ماندهٔ تقسیم یک عدد بر ۳، یکی از اعداد ۰، ۱ و ۲ است. حال فرض کنید اعدادی به فرم $3k+1$ را در نظر بگیریم. اگر تمامی زوج‌های مرتب به صورت $(3k'+1$ و $3k+1)$ باشند، هر دو زوج مرتب دلخواهی که انتخاب کنیم، مجموع مؤلفه‌های اول و مجموع مؤلفه‌های دوم آن‌ها به صورت $3t+2$ و $3t'+2$ خواهد بود که مضرب ۳ نیستند. با توجه به اینکه بی‌نهایت عدد به صورت $3k+1$ وجود دارد، لذا بی‌نهایت زوج مرتب می‌توان انتخاب کرد که در خواستهٔ سؤال صدق نکنند، در نتیجه سؤال نادرست است.

گروه آموزشی ماز

۴۰- حاصل‌ضرب درجه رأس‌های گراف G برابر ۴۳۲ است. اگر گراف G با حداقل تعداد یال رسم شود، حاصل $\delta(\bar{G})+q(\bar{G})$ کدام است؟

۱) ۳۱ ۲) ۲۹ ۳) ۲۱ ۴) ۲۳

پاسخ: گزینهٔ ۴ (دشوار ـ محاسباتی ـ ۱۲۰۲)

نکته ۱

مکمل یک گراف: مکمل گراف G، گرافی است که با $\bar{G}$ یا G^c نشان می‌دهیم و مجموعهٔ رئوس آن همان مجموعهٔ رئوس G است. بین دو رأس از $\bar{G}$ یک یال است اگر و تنها اگر بین همان دو رأس در G یالی نباشد.

نکته ۲

اگر گراف G دارای p رأس باشد، داریم:

$$۱)\ q(G)+q(\bar{G})=\binom{p}{۲} \Rightarrow \text{اندازهٔ یک گراف کامل p رأسی}$$

$$\left.\begin{array}{l}۲)\ \delta(G)+\Delta(\bar{G})=p-۱\\ ۳)\ \Delta(G)+\delta(\bar{G})=p-۱\end{array}\right\} \Rightarrow \text{درجهٔ رأس‌های یک گراف کامل p رأسی}$$

با توجه به این‌که $۴۳۲=۲^۴\times ۳^۳$، بنابراین درجات گرافی با حداقل تعداد یال که حاصل‌ضرب درجات برابر ۴۳۲ باشد، به یکی از دو صورت زیر است:

$G_۱: ۴,۴,۳,۳,۳,۱$

$G_۲: ۳,۳,۳,۲,۲,۲,۲,۱$

در هر دو حالت، اندازهٔ گراف برابر ۹ و تعداد یال‌ها حداقل مقدار ممکن است.

به ازای گراف $G_۱$ داریم:

$$q(G_۱)+q(\bar{G}_۱)=\frac{p(p-۱)}{۲} \Rightarrow ۹+q(\bar{G}_۱)=\frac{۶\times ۵}{۲} \Rightarrow q(\bar{G}_۱)=۶$$

$$\Delta(G_۱)=۴ \Rightarrow \delta(\bar{G}_۱)=۵-۴=۱ \Rightarrow \delta(\bar{G}_۱)+q(\bar{G}_۱)=۷$$

به ازای گراف $G_۲$ داریم:

$$q(G_۲)+q(\bar{G}_۲)=\frac{p(p-۱)}{۲} \Rightarrow ۹+q(\bar{G}_۲)=\frac{۸\times ۷}{۲} \Rightarrow q(\bar{G}_۲)=۱۹$$

$$\Delta(G_۲)=۳ \Rightarrow \delta(\bar{G}_۲)=۷-۳=۴ \Rightarrow \delta(\bar{G}_۲)+q(\bar{G}_۲)=۲۳$$

عدد ۲۳ در گزینه‌ها موجود است.

گروه آموزشی ماز

کنکور ۱۴۰۴
www.biomaze.ir
www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshClouds

۴۱- طول یک میلهٔ فولادی چند متر باید باشد تا اگر دمای آن $50^\circ C$ افزایش دهیم، ۳ میلی‌متر بر طولش اضافه شود؟

$\left(\alpha = 1/2\times10^{-5} K^{-1}\right)$

۱) ۵ ۲) ۶ ۳) ۱۰ ۴) ۱۲

پاسخ: گزینهٔ ۱ (آسان ـ محاسباتی ـ ۱۰۰۴)

انبساط طولی

اگر دمای یک میله را مقداری افزایش دهیم، افزایش طول میله از رابطهٔ زیر به‌دست می‌آید:

$$\Delta L = \alpha L_1 \Delta T$$

برای یافتن درصد تغییرات طول، می‌توان از رابطهٔ زیر استفاده نمود:

$$\text{درصد تغییرات طول} = \frac{\Delta L}{L_1}\times100 = \alpha\Delta T\times100$$

در هر دو رابطه، اگر ΔT برحسب $^\circ C$ یا K وارد شود، یکای α برحسب $\frac{1}{^\circ C}$ یا $\frac{1}{K}$ به‌دست می‌آید. اما اگر ΔT برحسب $^\circ F$ وارد گردد مقدار α برحسب $\frac{1}{^\circ F}$ به‌دست خواهد آمد.

طبق رابطهٔ انبساط طولی می‌توان نوشت:

$$\Delta L = L_1.\alpha.\Delta\theta \xrightarrow[\alpha=1/2\times10^{-5}K^{-1},\Delta\theta=50^\circ C]{\Delta L=3mm} 3\times10^{-3} = L_1\times1/2\times10^{-5}\times50 \Rightarrow L_1 = 5m$$

گروه آموزشی ماز

۴۲- اگر $^{238}_{92}U$ واپاشی α انجام دهد، کدام هسته، حاصل این واپاشی خواهد بود؟

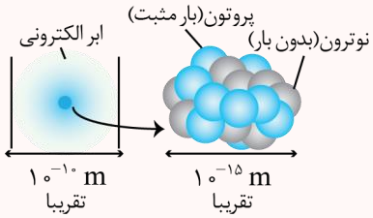
۱) $^{235}_{92}U$ ۲) $^{231}_{91}Pa$ ۳) $^{234}_{90}Th$ ۴) $^{232}_{90}Th$

پاسخ: گزینهٔ ۳ (آسان ـ مفهومی / محاسباتی ـ ۱۲۰۶)

تابش، اتم و ایزوتوپ

در مرکز اتم قسمتی کوچک و بسیار چگال به نام هستهٔ اتم وجود دارد. در مورد هسته نکات زیر را به خاطر داشته باشید:

۱) ابعاد اتم در حدود $10^{-10}m$ و ابعاد هستهٔ اتم در حدود $10^{-15}m$ است. بنابراین می‌توانیم بگوییم، شعاع هسته $\frac{1}{100000}$ شعاع اتم است. به شکل زیر دقت کنید.



۲) هستهٔ اتم از نوترون‌ها و پروتون‌ها تشکیل شده است که به‌طور کلی نوکلئون نامیده می‌شوند.

۳) بار الکتریکی پروتون مثبت بوده و اندازهٔ آن برابر با بار الکتریکی الکترون است. اما جرم پروتون تقریباً ۱۸۳۷ برابر جرم الکترون می‌باشد.

۴) نوترون بار الکتریکی ندارد و جرمش اندکی بیشتر از جرم پروتون است. نوترون توسط چادویک کشف شد.

شیوه نمایش هسته اتم: برای یک عنصر با نماد شیمیایی X، نماد هسته به صورت زیر نشان داده می‌شود:

N: تعداد نوترون‌ها (عدد نوترونی)

X: نماد عنصر $\qquad {}^{\text{عدد جرمی}\to A}_{\text{عدد اتمی}\to Z}X_{N\leftarrow\text{عدد نوترونی}}$

A ← عدد جرمی (مجموع تعداد پروتون‌ها و نوترون‌ها)

Z ← عدد اتمی (تعداد پروتون‌ها)

N ← عدد نوترونی (تعداد نوترون‌ها)

عدد جرمی نیز از رابطهٔ زیر به‌دست می‌آید:

$$A = Z + N$$

A: مجموع تعداد پروتون‌ها و نوترون‌ها (عدد جرمی) Z: تعداد پروتون‌ها (عدد اتمی)

کنکور ۱۴۰۴
www.biomaze.ir
سنجش کلاد
www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshClouds

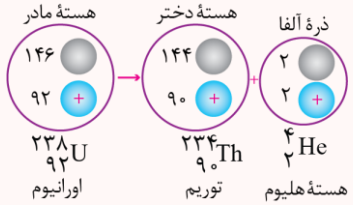
واپاشی α

۱) این واپاشی در هسته‌های سنگین روی می‌دهد.

۲) پرتوهای α ذرات باردار مثبت از جنس هستهٔ اتم هلیم ($_{۲}^{۴}He$) هستند و از دو پروتون و دو نوترون تشکیل شده‌اند.

۳) برد پرتوهای α کوتاه است. این ذرات پس از طی مسافتی کوتاه در حدود ۱cm تا ۲cm در هوا یا هنگام عبور از لایه‌ای نازک از مواد جذب می‌شوند. پرتوهای α کمترین نفوذ را دارند و با ورقهٔ نازک سربی با ضخامت ناچیز (۰/۰۱mm) متوقف می‌شوند.

۴) اگر ذره‌های α از راه تنفس یا دستگاه گوارش وارد بدن شوند، باعث آسیب‌های شدید به بدن خواهند شد. به معادلهٔ این واپاشی و مثالی که مطرح شده است توجه کنید:



$$_{Z}^{A}X \rightarrow {}_{Z-۲}^{A-۴}Y + {}_{۲}^{۴}He \qquad (\text{واپاشی } \alpha)$$

واپاشی β^-

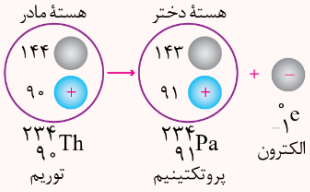
۱) این واپاشی، متداول‌ترین نوع واپاشی در هسته‌ها است.

۲) پرتوهای β^- در واقع همان الکترون‌ها هستند.

۳) پرتوهای β^- مسافت بیشتری را نسبت به پرتوهای α در سرب نفوذ می‌کنند. تقریباً پرتوهای β^- می‌توانند مسافتی در حدود ۰/۱mm در سرب نفوذ کنند.

۴) الکترون گسیل‌شده در این واپاشی یکی از الکترون‌های مداری اتم نیست؛ این الکترون وقتی به‌وجود می‌آید که نوترونی درون هسته، به پروتون و الکترون تبدیل شود.

به معادلهٔ این واپاشی و مثالی که مطرح شده توجه کنید:



$$_{Z}^{A}X \rightarrow {}_{Z+۱}^{A}Y + {}_{-۱}^{۰}e^{-} \qquad (\text{واپاشی } \beta^-)$$

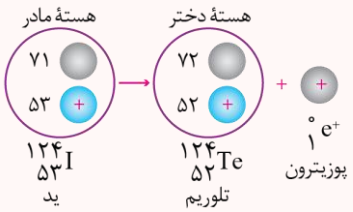
واپاشی β^+

۱) در این واپاشی ذرهٔ گسیل شده توسط هسته، جرم یکسانی با الکترون دارد ولی به جای بار e- دارای بار الکتریکی e+ است. به این الکترون مثبت، پوزیترون می‌گویند و با نماد β^+ یا e^+ نمایش داده می‌شود.

۲) مسافتی که پرتوهای β^+ در سرب نفوذ می‌کنند، مانند β^- در حدود ۰/۱mm است.

۳) هنگام واپاشی β^+ یکی از پروتون‌های درون هسته به یک نوترون و یک پوزیترون تبدیل می‌شود.

به معادلهٔ این واپاشی و مثالی که مطرح شده است توجه کنید:



$$_{Z}^{A}X \rightarrow {}_{Z-۱}^{A}Y + {}_{۱}^{۰}e^{+} \qquad (\text{واپاشی } \beta^+)$$

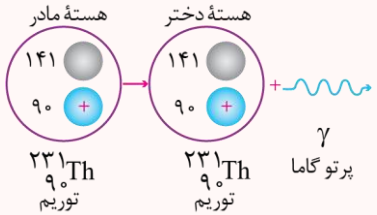
واپاشی γ

۱) اغلب هسته‌ها پس از واپاشی آلفا یا بتا، در حالت برانگیخته قرار می‌گیرند و با گسیل پرتوی گاما به حالت پایه می‌رسند.

۲) پرتوهای گاما از جنس امواج الکترومغناطیسی هستند و دارای بار الکتریکی و جرم نمی‌باشند و از فوتون‌های پرانرژی تشکیل شده‌اند.

۳) پرتوهای گاما بیشترین نفوذ را دارند و می‌توانند از ورقهٔ سربی با ضخامتی در حدود ۱۰۰mm عبور کنند.

به معادلهٔ این واپاشی و مثالی که مطرح شده است، توجه کنید:



$$_{Z}^{A}X^{*} \rightarrow {}_{Z}^{A}X + \gamma \qquad (\text{واپاشی } \gamma)$$

باتوجه به معادلهٔ واپاشی، عدد اتمی و عدد جرمی هستهٔ دختر را به‌دست می‌آوریم.

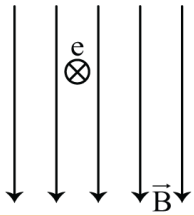
$$_{۹۲}^{۲۳۸}U \rightarrow {}_{Z}^{A}Y + {}_{۲}^{۴}\alpha$$

$$\begin{cases} ۲۳۸ = A + ۴ \Rightarrow A = ۲۳۴ \\ ۹۲ = Z + ۲ \Rightarrow Z = ۹۰ \end{cases}$$

بنابراین هستهٔ دختر $_{۹۰}^{۲۳۴}Y$ بوده که همان هستهٔ $_{۹۰}^{۲۳۴}Th$ است.

کنکور ۱۴۰۴
www.biomaze.ir
سنجش کلاد
www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshClouds

۴۳- در شکل زیر، الکترونی به‌صورت درونسو وارد میدان مغناطیسی یکنواخت می‌شود. در این لحظه، نیروی الکترومغناطیسی وارد بر الکترون به کدام جهت است؟

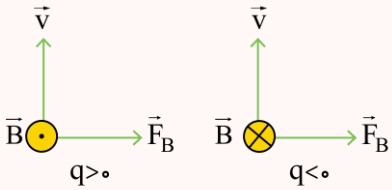


۱) ←
۲) →
۳) ↑
۴) ↓

پاسخ: گزینهٔ ۲ (آسان ـ مفهومی ـ ۱۱۰۳)

نیروی مغناطیسی وارد بر ذرهٔ باردار متحرک در میدان مغناطیسی

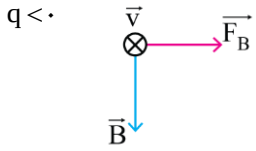
هرگاه ذرهٔ باردار q در میدان مغناطیسی $\vec{B}$ با سرعت $\vec{v}$ در حال حرکت باشد از طرف میدان بر آن نیرویی وارد می‌شود که جهت آن را می‌توان با استفاده از قاعدهٔ دست راست تعیین کرد و اندازهٔ آن را از رابطهٔ زیر به‌دست آورد:



$$F_B = |q| vB\sin\theta$$

طبق قاعدهٔ دست راست، جهت نیروی وارد بر ذرهٔ باردار مثبت به سمت چپ است. از طرفی چون بار ذره منفی است جهت نیروی وارد بر ذره قرینهٔ سمت چپ یعنی به سمت راست خواهد بود.

می‌توانیم برای بار منفی مستقیماً از دست چپ برای تعیین جهت نیرو استفاده کنیم.



گروه آموزشی ماز

۴۴- برای آن‌که تندی اسکی بازی از صفر به V_1 برسد، باید کل کار انجام شده روی آن $120J$ شود. اگر تندی اسکی‌باز از V_1 به $4V_1$ برسد، در این مرحله کل کار انجام شده روی آن چند ژول است؟

۱) ۳۶۰ ۲) ۹۶۰ ۳) ۱۹۲۰ ۴) ۱۸۰۰

پاسخ: گزینهٔ ۴ (متوسط ـ مفهومی / محاسباتی ـ ۱۰۰۳)

قضیهٔ کار و انرژی جنبشی

طبق قضیه کار و انرژی جنبشی، در یک جابه‌جایی، کار کل نیروهای وارد بر یک جسم، با تغییرات انرژی جنبشی جسم در آن جابه‌جایی برابر است. به بیان دیگر:

$$W_t = \Delta K = K_2 - K_1$$

$$\begin{cases} K_1 = \frac{1}{2}mv_1^2 \\ K_2 = \frac{1}{2}mv_2^2 \end{cases} \rightarrow W_t = \frac{1}{2}m(v_2^2 - v_1^2)$$

بنابر قضیهٔ کار ـ انرژی جنبشی می‌توان نوشت:

$$W_t = \Delta K \xrightarrow{\Delta k = \frac{1}{2}m(v^2 - v_0^2)} \begin{cases} W_1 = \frac{1}{2}m\left(v_1^2 - 0\right) = \frac{1}{2}mv_1^2 \\ W_2 = \frac{1}{2}m\left((4v_1)^2 - v_1^2\right) = \frac{15}{2}mv_1^2 \end{cases} \Rightarrow W_2 = 15W_1$$

$$W_2 = 15W_1 \xrightarrow{W_1 = 120J} W_2 = 15 \times 120 = 1800J$$

گروه آموزشی ماز

۴۵- ۶۰۰ گرم آب $20^\circ C$ درون گرماسنجی قرار دارد. درون آن ۴۰۰ گرم آب $80^\circ C$ می‌ریزیم. اگر دمای تعادل به $36^\circ C$ برسد و از مبادلهٔ گرما با خارج مجموعه صرف‌نظر شود، ظرفیت گرمایی گرماسنج در SI چقدر است؟ ($c_{\text{آب}} = 4200 \frac{J}{kg \cdot K}$)

۱) ۱۸۰۰ ۲) ۲۱۰۰ ۳) ۳۶۰۰ ۴) ۴۲۰۰

کنکور ۱۴۰۴
www.biomaze.ir
www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshClouds

پاسخ: گزینهٔ ۲ (متوسط ـ محاسباتی ـ ۱۰۰۴)

باتوجه به اینکه هیچ‌کدام از مواد تغییر حالت ندارند، طبق قانون پایستگی انرژی می‌توان نوشت:

$$\theta_e=\frac{m_1c_1\theta_1+m_2c_2\theta_2+m_3c_3\theta_3}{m_1c_1+m_2c_2+m_3c_3}\xrightarrow[m_3c_3=C_3,\theta_3=\theta_1=20^\circ C,\theta_2=80^\circ C,\theta_e=36^\circ C]{m_1=0/6kg,m_2=0/4kg,c_1=c_2=4200\frac{J}{kg.K}}$$

$$\frac{9}{36}=\frac{\overbrace{\left(0/6\times4200\times\frac{5}{20}\right)}^{11(4200)}+\left(\frac{0/1}{0/4}\times4200\times80\right)+\left(C_3\times\frac{5}{20}\right)}{\underbrace{(0/6\times4200)+(0/4\times4200)}_{4200}+C_3}$$

$$\rightarrow 9(4200)+9C_3=11(4200)+5C_3\rightarrow 4C_3=2(4200)\rightarrow C_3=2100\frac{J}{K}$$

گروه آموزشی ماز

۴۶- متحرکی در مبدأ زمان با سرعت ثابت $\left(8\frac{m}{s}\right)\vec{i}$ از مبدأ محور می‌گذرد، در همان لحظه متحرک دیگری از مکان $x=7m$ از حال سکون با شتاب ثابت $\vec{a}=\left(2\frac{m}{s^2}\right)\vec{i}$ حرکت می‌کند. فاصلهٔ بین این دو متحرک چند بار ۵ متر می‌شود؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

پاسخ: گزینهٔ ۴ (سخت ـ مفهومی / محاسباتی ـ ۱۲۰۱)

معادله مکان - زمان در حرکت با سرعت ثابت

$$x=vt+x_0$$

x: مکان در لحظهٔ t v: سرعت t: زمان x_0: مکان اولیه

معادله جابجایی - زمان حرکت با سرعت ثابت:

$$\Delta x=v\Delta t$$

Δx: جابجایی و مسافت v: سرعت Δt: زمان سپری شده

چون جهت حرکت ثابت است، در این رابطه Δx هم جابجایی و هم مسافت طی شده می‌باشد.

معادله مکان - زمان در حرکت با شتاب ثابت:

معادله‌ای که مکان متحرک را در هر لحظه برای ما مشخص می‌کند:

$$x=\frac{1}{2}at^2+v_0t+x_0$$

x: مکان متحرک در لحظه t a: شتاب ثابت متحرک v_0: سرعت اولیه x_0: مکان اولیه

در حرکت با شتاب ثابت مکان متحرک تابعی درجه دوم از زمان است.

باتوجه اطلاعات مسئله معادلهٔ مکان ـ زمان هر دو متحرک را به‌دست می‌آوریم:

حرکت با سرعت ثابت : متحرک (۱)

$$x=vt+x_0\xrightarrow[x_0=0]{v=8\frac{m}{s}}x_1=8t$$

حرکت با شتاب ثابت : متحرک (۲)

$$x=\frac{1}{2}at^2+v_0t+x_0\xrightarrow[x_0=7m]{a=2\frac{m}{s^2},v_0=0}x_2=\frac{1}{2}(2)t^2+0+7=t^2+7$$

حال برای آن‌که فاصلهٔ دو متحرک ۵m باشد، می‌توان نوشت:

$$|x_2-x_1|=5\Rightarrow|t^2+7-8t|=5\Rightarrow\begin{cases}t^2-8t+7=5\rightarrow t^2-8t+2=0 & \Delta>0\\ t^2-8t+7=-5\rightarrow t^2-8t+12=0 & \Delta>0\end{cases}$$

چون برای هر دو معادله $\Delta>0$ بوده و علی رقم یکسان بودن جمع دو ریشه برای معادله‌ها، ضرب ریشه‌ها متفاوت است؛ بنابراین برای هر معادله دو ریشهٔ مجزا داریم و ریشهٔ مشترکی بین معادله‌ها وجود ندارد. در نتیجه ۴ بار فاصلهٔ دو متحرک از هم ۵m می‌شود.

کنکور ۱۴۰۴
www.biomaze.ir
www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshClouds

۴۷- گلولهٔ A از ارتفاع ۱۳۰ متری زمین رها می‌شود. ۲ ثانیه بعد، گلولهٔ B از همان نقطه رها می‌شود. ۵ ثانیه بعد از حرکت گلولهٔ A، فاصلهٔ دو گلوله از هم چند متر است؟ ($g=۱۰\frac{m}{s^۲}$ و مقاومت هوا ناچیز فرض شود.)

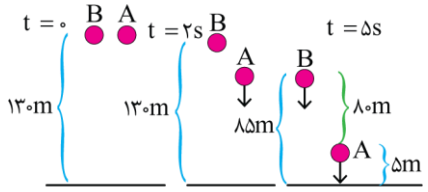
۱) ۶۰ ۲) ۶۵ ۳) ۸۰ ۴) ۸۵

پاسخ: گزینهٔ ۳ (متوسط ـ محاسباتی ـ ۱۲۰۱)

نکته:

اگر متحرک B با $t_۱$ ثانیه تأخیر نسبت به متحرک A شروع به حرکت کند، می‌توان در معادلهٔ مکان ـ زمان حرکت A، زمان را برابر t قرار داد و در معادلهٔ مکان ـ زمان متحرک B، زمان را برابر $t-t_۱$ قرار داد.

باتوجه به معادلهٔ مکان ـ زمان سقوط آزاد می‌توان نوشت:

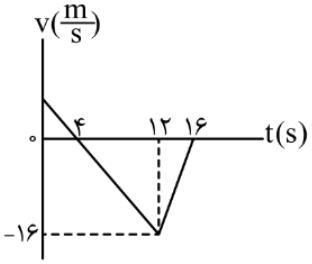


$$\begin{cases} y_A=-\frac{۱}{۲}gt^۲+y_۰ \\ y_B=-\frac{۱}{۲}g(t-۲)^۲+y_۰ \end{cases} \xrightarrow[y_۰=۱۳۰m]{t=۵s} \begin{cases} y_A=-\frac{۱}{۲}(۱۰)(۵^۲)+۱۳۰=۵m \\ y_B=-\frac{۱}{۲}(۱۰)(۵-۲)^۲+۱۳۰=۸۵m \end{cases}$$

فاصلهٔ دو گلوله $=|y_B-y_A|=۸۵-۵=۸۰m$

گروه آموزشی ماز

۴۸- شکل زیر، نمودار سرعت ـ زمان متحرکی است که در مسیر مستقیم حرکت می‌کند. تندی متوسط آن در بازهٔ زمانی $t_۱=۳s$ تا $t_۲=۱۳s$ چند متر بر ثانیه است؟

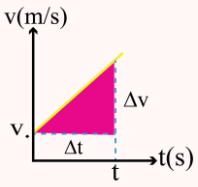


۱) ۷/۹
۲) ۷/۷
۳) ۸/۳
۴) ۸/۱

پاسخ: گزینهٔ ۱ (متوسط ـ نموداری ـ ۱۲۰۱)

شیب نمودار سرعت - زمان

شیب نمودار سرعت زمان ثابت است و برابر با شتاب متحرک می‌باشد.



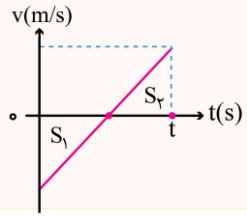
$$\text{شیب نمودار سرعت ـ زمان}=a=\frac{\Delta v}{\Delta t}$$

مساحت زیر نمودار سرعت - زمان

مساحت زیر نمودار سرعت - زمان برابر جابجایی (Δx) می‌باشد.

اگر همه مساحت‌ها را با علامت مثبت جمع کنیم مسافت طی شده (l) به دست می‌آید.

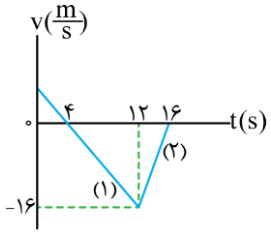
دقت کنید که مساحت زیر نمودار سرعت - زمان جابه‌جایی (Δx) است نه مکان (x).



$$\Delta x=-S_۱+S_۲$$

$$l=S_۱+S_۲$$

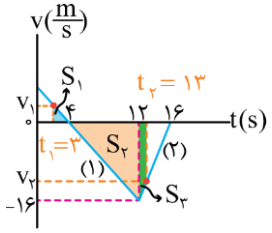
ابتدا باتوجه به نمودار $v-t$ ، شیب دو خط (۱) و (۲) را به‌دست می‌آوریم:



$$\text{شیب}=\frac{\text{تغییر عمودی}}{\text{تغییر افقی}} \begin{cases} \text{شیب}(۱)=\frac{-۱۶-۰}{۱۲-۴}=\frac{-۱۶}{۸}=-۲ \\ \text{شیب}(۲)=\frac{۰-(-۱۶)}{۱۶-۱۲}=\frac{۱۶}{۴}=۴ \end{cases}$$

کنکور ۱۴۰۴
www.biomaze.ir
www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshClouds

سپس با داشتن شیب خط‌های (۱) و (۲) سرعت متحرک در لحظات t_1 و t_2 را به‌دست می‌آوریم:



$$(1)\ \text{شیب} = -۲ = \frac{۰ - v_1}{۴ - ۳} \rightarrow v_1 = ۲\frac{m}{s}$$

$$(2)\ \text{شیب} = ۴ = \frac{۰ - v_2}{۱۶ - ۱۳} \rightarrow v_2 = -۱۲\frac{m}{s}$$

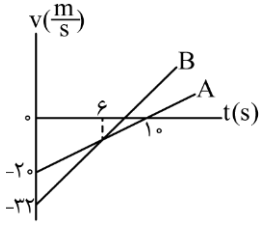
درنهایت مسافت طی شده را به کمک مساحت محصور $v-t$ و پس از آن تندی متوسط را به‌دست می‌آوریم:

$$\ell_1 = S_1 + S_2 + S_3 = \frac{(۴-۳)۲}{۲} + \frac{(۱۲-۴)۱۶}{۲} + \frac{(۱۶+۱۲)(۱۳-۱۲)}{۲} = ۱ + ۶۴ + ۱۴ = ۷۹m$$

$$s_{av} = \frac{\ell_1}{\Delta t} \Rightarrow s_{av} = \frac{۷۹}{۱۳-۳} = ۷/۹\frac{m}{s}$$

گروه آموزشی ماز

۴۹- شکل زیر، نمودار سرعت ـ زمان دو متحرک است که در مبدأ زمان از مبدأ محور می‌گذرند. در بازهٔ زمانی که دو متحرک در خلاف جهت هم حرکت می‌کنند، فاصلهٔ بین آن‌ها چگونه تغییر می‌کند؟



۱) ۸ متر کاهش می‌یابد.
۲) ۸ متر افزایش می‌یابد.
۳) ۱۲ متر افزایش می‌یابد.
۴) ۱۲ متر کاهش می‌یابد.

پاسخ: گزینهٔ ۴ (سخت ـ نموداری ـ ۱۲۰۱)

تحلیل کامل نمودار سرعت - زمان

اگر نمودار بالای محور t باشد	$v > ۰$	متحرک در جهت محور x حرکت می‌کند.
اگر نمودار زیر محور t باشد	$v < ۰$	متحرک خلاف جهت محور x حرکت می‌کند
نقاطی که نمودار محور t را قطع کرده	$v = ۰$	متحرک متوقف شده و ممکن است تغییر جهت دهد.

نمودار سرعت - زمان از محور t دور شود	تندی زیاد می‌شود	حرکت تندشونده
نمودار سرعت-زمان به محور t نزدیک شود	تندی کم می‌شود	حرکت کندشونده
نمودار سرعت-زمان موازی محور t باشد	تندی ثابت می‌ماند	حرکت یکنواخت

نمودار سرعت - زمان از محور t دور شود	$a > ۰$	شتاب و نیرو در جهت محور x است.
نمودار سرعت-زمان به محور t نزدیک شود	$a < ۰$	شتاب و نیرو خلاف جهت محور x است.
نمودار سرعت-زمان موازی محور t باشد	$a = ۰$	شتاب و نیرو صفر شده و متحرک در حال تعادل است
در نقاط ماکسیمم و مینیمم نمودار سرعت - زمان	$a = ۰$	شتاب و نیرو تغییر جهت می‌دهد

شیب نمودار سرعت - زمان افزایش یابد	اندازه شتاب افزایش
شیب نمودار سرعت-زمان کاهش یابد	اندازه شتاب کاهش
شیب نمودار سرعت-زمان ثابت باشد	اندازه شتاب ثابت

کنکور ۱۴۰۴
www.biomaze.ir
www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshClouds

باتوجه به نمودار سرعت ـ زمان دو متحرک درمی‌یابیم در شروع حرکت هر دو متحرک در خلاف جهت محور حرکت می‌کنند. از طرفی متحرک A در لحظهٔ $t=۱۰s$ و متحرک B قبل از لحظهٔ $t=۱۰s$ تغییر جهت می‌دهد. بنابراین از لحظهٔ تغییر جهت متحرک B تا لحظهٔ $t=۱۰s$ دو متحرک در خلاف جهت هم حرکت می‌کنند. حال به کمک نمودار سرعت ـ زمان، معادلهٔ $v-t$ دو متحرک را به‌دست می‌آوریم:

$$A\begin{cases}A\text{ شیب}=a_A=\dfrac{۰-(-۲۰)}{۱۰-۰}=۲\dfrac{m}{s^۲}\\ v_{۰_A}=-۲۰\dfrac{m}{s}\end{cases}\rightarrow v_A=a_At+v_{۰_A}=۲t-۲۰$$

$$\xrightarrow{t=۶s}v_A=v_B\xrightarrow{v_A=۲(۶)-۲۰}v_B=-۸\frac{m}{s}$$

$$B\begin{cases}B\text{ شیب}=a_B=\dfrac{-۸-(-۳۲)}{۶-۰}=\dfrac{۲۴}{۶}=۴\dfrac{m}{s^۲}\\ v_{۰_B}=-۳۲\dfrac{m}{s}\end{cases}\rightarrow v_B=a_Bt+v_{۰_B}=۴t-۳۲\xrightarrow{v_B=۰}۰=۴t-۳۲\Rightarrow t=۸s$$

بنابراین متحرک B در لحظهٔ $t=۸s$ تغییر جهت می‌دهد.

حال معادلهٔ $x-t$ هر دو متحرک را به‌دست می‌آوریم:

$$x=\frac{۱}{۲}at^۲+v_۰t+\cancel{x_۰}^{۰}\Rightarrow\begin{cases}x_A=t^۲-۲۰t\\ x_B=۲t^۲-۳۲t\end{cases}\xrightarrow{t=۸s}\underbrace{\begin{cases}x_A=۸^۲-۲۰(۸)=-۹۶m\\ x_B=۲(۸^۲)-۳۲(۸)=-۱۲۸m\end{cases}}_{\text{فاصله دو متحرک}=۳۲m}$$

$$\xrightarrow{t=۱۰s}\underbrace{\begin{cases}x_A=۱۰^۲-۲۰(۱۰)=-۱۰۰m\\ x_B=۲(۱۰^۲)-۳۲(۱۰)=-۱۲۰m\end{cases}}_{\text{فاصله دو متحرک}=۲۰m}$$

بنابراین فاصلهٔ دو متحرک از لحظهٔ $t=۸s$ تا $t=۱۰s$ ، ۱۲ متر کاهش می‌یابد.

گروه آموزشی ماز

۵۰- گلوله‌ای به جرم ۵۰ گرم روی سطح افقی، مسیر دایره‌ای به شعاع ۲ متر را هر ۱/۵۷s یک دور می‌زند. شتاب مرکزگرای گلوله چند متر بر مربع ثانیه است و اندازهٔ تغییر تکانهٔ آن در مدت نصف دوره، چند کیلوگرم متر بر ثانیه است؟

۱) ۳۲ و ۰/۴ ۲) ۳۲ و ۰/۸ ۳) ۱۶ و ۰/۴ ۴) ۱۶ و ۰/۸

پاسخ: گزینهٔ ۲ (متوسط ـ مفهومی / محاسباتی ـ ۱۲۰۲)

تکانه:

به حاصل‌ضرب جرم جسم در سرعت آن تکانه می‌گویند و آن را با نماد $\vec{p}$ نشان می‌دهند:

$$\vec{p}=m\vec{v}$$

- تکانه یک کمیت برداری است که همواره هم‌جهت با بردار سرعت است.
- برای یک جسم معین، با تغییر بردار سرعت، تکانهٔ آن هم تغییر می‌کند:

$$\Delta\vec{p}=\vec{p}_۲-\vec{p}_۱=m\vec{v}_۲-m\vec{v}_۱=m(\vec{v}_۲-\vec{v}_۱)=m\Delta\vec{v}$$

گام اول:

باتوجه به رابطهٔ شتاب مرکزگرا می‌توان نوشت:

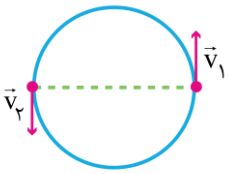
$$a_c=r\omega^۲\xrightarrow{\omega=\frac{۲\pi}{T}}a_c=r\left(\frac{۲\pi}{T}\right)^۲\xrightarrow[T=۱/۵۷s]{r=۲m,\pi=۳/۱۴}a_c=۲\times\left(\frac{۲\times\cancel{۳/۱۴}^{۲}}{\cancel{۱/۵۷}}\right)^۲$$

$$\rightarrow a_c=۲\times۱۶=۳۲\frac{m}{s^۲}$$

کنکور ۱۴۰۴
www.biomaze.ir
سنجش کلاد
www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshClouds

گام دوم:

از طرفی می‌دانیم در حرکت دایره‌ای یکنواخت، در مدت نصف دوره، نصف محیط دایره طی می‌شود:



$$\begin{cases} v_1 = v \\ v_2 = -v \end{cases} \rightarrow |\Delta v| = |-v - v| = 2v$$

$$\vec{v}_1 \uparrow \quad \vec{v}_2 \downarrow \quad \Delta\vec{v} \downarrow$$

$$v = r\omega \xrightarrow[r=2m]{\omega=\frac{2\pi}{T}=4\frac{rad}{s}} v = 2\times 4 = 8\frac{m}{s}$$

$$\rightarrow |\Delta v| = 2v = 16\frac{m}{s}$$

گام سوم:

حال تغییر تکانه را به‌دست می‌آوریم:

$$|\Delta p| = m|\Delta v| \Rightarrow |\Delta p| = 0/05\times 16 = 0/8\frac{kg.m}{s}$$

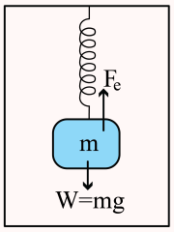
گروه آموزشی ماز

۵۱- فنری به طول ۴۲cm را به سقف آسانسور می‌بندیم و از انتهای آن وزنهٔ ۳ کیلوگرمی آویزان می‌کنیم. اگر ثابت فنر $400\frac{N}{m}$ باشد و آسانسور با شتاب ثابت رو به پایین $2\frac{m}{s^2}$ در حرکت باشد، طول فنر در این شرایط چند سانتی‌متر است؟ $\left(g=10\frac{m}{s^2}\right)$

۱) ۴۹ ۲) ۵۱ ۳) ۴۸ ۴) ۴۶

پاسخ: گزینهٔ ۳ (آسان ـ محاسباتی ـ ۱۴۰۲)

۱) شکل مقابل نیروهای وارد بر جسمی که از یک فنر درون آسانسور آویخته شده است را نشان می‌دهد.



۲) هنگامی که شتاب حرکت آسانسور به سمت بالا است داریم:

$$\begin{cases} F_{net} = F_e - mg \\ F_{net} = ma \end{cases} \rightarrow F_e = m(g+a) \rightarrow k\Delta L = m(g+a)$$

۳) هنگامی که شتاب حرکت آسانسور به سمت پایین است داریم:

$$\begin{cases} F_{net} = mg - F_e \\ F_{net} = ma \end{cases} \rightarrow F_e = m(g-a) \rightarrow k\Delta L = m(g-a)$$

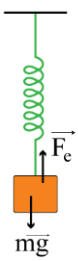
۴) بنابراین به طور خلاصه نیروی فنر برابر است با:

$$F_e = m(g \pm a)$$

(+): شتاب به سمت بالا (-): شتاب به سمت پایین

۵) دقت کنید که در محاسبهٔ نیروی فنر، جهت شتاب آسانسور اهمیت دارد و جهت حرکت آسانسور مهم نیست.

باتوجه به شتاب آسانسور برای جسم متصل به فنر در داخل آسانسور می‌توان گفت:



$$\downarrow \vec{a} = 2\frac{m}{s^2}$$

$$\xrightarrow[F_{net}=mg-F_e]{F_{net}=ma} mg - F_e = ma$$

$$\xrightarrow[a=2\frac{m}{s^2}]{m=3kg} 3(10) - Fe = 3(2)$$

$$\rightarrow F_e = 24N$$

کنکور ۱۴۰۴
www.biomaze.ir
www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshClouds

از طرفی باتوجه به قانون هوک می‌توان نوشت:

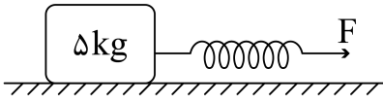
$$F_e = kx \xrightarrow[k=۴۰۰\frac{N}{m}]{F_e=۲۴N} ۲۴ = ۴۰۰ \times x \Rightarrow x = ۰/۰۶m = ۶cm$$

$$x = L_۲ - L_۱ \Rightarrow ۶ = L_۲ - ۴۲ \rightarrow L_۲ = ۴۸cm$$

بنابراین طول فنر در این شرایط به ۴۸cm می‌رسد.

گروه آموزشی ماز

۵۲- در شکل زیر، طول اولیهٔ فنر ۴۰cm و ثابت فنر $۴۰۰\frac{N}{m}$ است و جسم در حال سکون است. نیروی F را به آرامی افزایش می‌دهیم، وقتی طول فنر به ۴۷/۵cm می‌رسد، جسم شروع به حرکت می‌کند و در ادامه اگر طول فنر را همان ۴۷/۵cm نگه داریم (نیروی F ثابت بماند). جسم با شتاب ثابت $۲\frac{m}{s^۲}$ به حرکت خود ادامه می‌دهد. نسبت ضریب اصطکاک ایستایی به ضریب اصطکاک جنبشی، کدام است؟



۱) $\frac{۶}{۵}$

۲) $\frac{۵}{۴}$

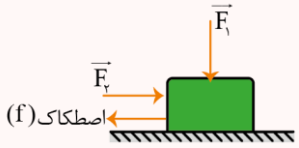
۳) $\frac{۴}{۳}$

۴) $\frac{۳}{۲}$

پاسخ: گزینهٔ ۴ (متوسط ـ مفهومی / محاسباتی ـ ۱۲۰۲)

نیروی اصطکاک

۱) فرض کنید مطابق شکل، یک نیروی قائم و یک نیروی افقی به یک جسم که روی سطح افقی دارای اصطکاک قرار دارد وارد می‌شود.



در این صورت نیروی عکس‌العمل عمودی سطح برابر است با:

$$F_N = mg + F_۱$$

۲) بیشینهٔ نیروی اصطکاک ایستایی برابر است با:

$$f_{s\,max} = \mu_s F_N = \mu_s (mg + F_۱)$$

۳) اگر نیروی افقی $\vec{F}_۲$ کوچک‌تر از $f_{s\,max}$ باشد، جسم حرکت نمی‌کند.

$$F_۲ < f_{s\,max} \rightarrow F_۲ < \mu_s (mg + F_۱) \rightarrow$$ جسم حرکت نمی‌کند

در این حالت اصطکاک ایستایی است و با نیروی $F_۲$ هم‌اندازه خواهد شد.

۴) اگر نیروی $\vec{F}_۲$ هم‌اندازه $f_{s\,max}$ باشد، جسم در آستانهٔ حرکت قرار دارد و مقدار اصطکاک بیشینه است.

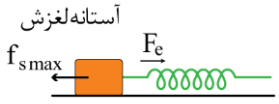
۵) اگر اندازهٔ $\vec{F}_۲$ بزرگ‌تر از $f_{s\,max}$ باشد، جسم حرکت می‌کند و اصطکاک آن از جنس جنبشی خواهد بود.

$$F_۲ > f_{s\,max} \rightarrow F_۲ > \mu_s (mg + F_۱) \rightarrow$$ جسم حرکت می‌کند.

در این حالت اصطکاک برابر است با:

$$f_k = \mu_k F_N = \mu_k (mg + F_۱)$$

باتوجه به اینکه وقتی طول فنر به ۴۷/۵cm برسد، جسم شروع به حرکت می‌کند (آستانهٔ لغزش) می‌توان ضریب اصطکاک ایستایی را به‌دست آورد:

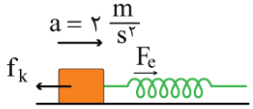


$$f_{s_{max}} = F_e \xrightarrow[F_e=kx]{f_{s\,max}=\mu_s F_N} \mu_s F_N = kx \xrightarrow[k=۴۰۰\frac{N}{m},x=۷/۵cm]{F_N=mg=۵۰N} \mu_s \times ۵۰ = ۴۰۰ \times ۷/۵ \times ۱۰^{-۲}$$

$$\rightarrow \mu_s = \frac{۳}{۵}$$

از طرفی وقتی جسم در حال حرکت است، نیروی اصطکاک وارد بر جسم نیروی اصطکاک جنبشی است:

$$\frac{F_{net}=ma}{F_{net}=F_e-f_k} \rightarrow F_e - f_k = ma \xrightarrow[a=۲\frac{m}{s^۲},m=۵kg]{F_e=۴۰۰\times۷/۵\times۱۰^{-۲}=۳۰N} ۳۰ - f_k = ۵(۲) \rightarrow f_k = ۲۰N$$



$$f_k = \mu_k F_N \xrightarrow[f_k=۲۰N]{F_N=۵۰N} ۲۰ = \mu_k \times ۵۰ \rightarrow \mu_k = \frac{۲}{۵}$$

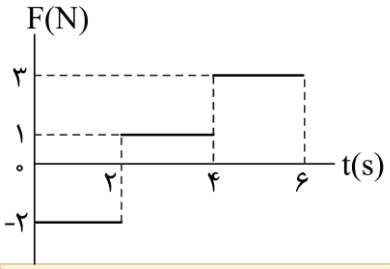
کنکور ۱۴۰۴
www.biomaze.ir
www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshClouds

درنهایت نسبت $\frac{\mu_s}{\mu_k}$ را به‌دست می‌آوریم:

$$\frac{\mu_s}{\mu_k}=\frac{\frac{۳}{۵}}{\frac{۲}{۵}}=\frac{۳}{۲}$$

گروه آموزشی ماز

۵۳- نمودار نیروی خالص وارد بر جسمی به جرم ۵۰۰ گرم که از حال سکون حرکت می‌کند، مطابق شکل است. شتاب متوسط جسم در بازهٔ زمانی $t_۱=۱s$ تا $t_۲=۵s$ در SI چقدر است؟

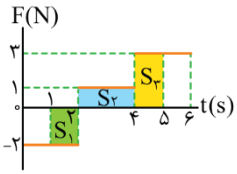


۱) ۱/۵
۲) ۲
۳) ۲/۵
۴) ۳

پاسخ: گزینهٔ ۱ (متوسط ـ نموداری ـ ۱۲۰۲)

گام اول:

ابتدا به کمک مساحت محصور نمودار نیرو ـ زمان، تغییر تکانهٔ جسم را در بازهٔ زمانی $t_۱$ تا $t_۲$ به‌دست می‌آوریم:



$$\begin{cases}S_۱=۱\times۲=۲\\S_۲=۲\times۱=۲\end{cases}\rightarrow\Delta p=-S_۱+S_۲+S_۳$$
$$S_۳=۱\times۳=۳$$

$$\rightarrow\Delta p=-۲+۲+۳=۳\frac{kg.m}{s}$$

گام دوم:

حال با داشتن تغییر تکانه، تغییر سرعت و پس از آن شتاب متوسط را به‌دست می‌آوریم:

$$\Delta p=m.\Delta v\Rightarrow ۳=۰/۵\times\Delta v\rightarrow\Delta v=۶\frac{m}{s}$$

$$\rightarrow a_{av}=\frac{\Delta v}{\Delta t}\xrightarrow[\Delta t=۵-۱=۴s]{\Delta v=۶\frac{m}{s}}a_{av}=\frac{۶}{۴}=۱/۵\frac{m}{s^۲}$$

گروه آموزشی ماز

۵۴- بسامد اصلی یک تار ویولن به طول ۲۰cm برابر ۵۰۰Hz است. طول موج امواج صوتی گسیل شده توسط تار، چند سانتی‌متر است؟ (سرعت صوت را در هوا $۳۴۰\frac{m}{s}$ بگیرید.)

۱) ۸۰
۲) ۶۸
۳) ۴۰
۴) ۳۴

پاسخ: گزینهٔ ۲ (آسان ـ محاسباتی ـ ۱۲۰۴)

مشخصه‌های موج

دورهٔ تناوب (T): مدت زمانی است که طول می‌کشد تا هر ذره از محیط، یک نوسان کامل انجام دهد.

بسامد (f): تعداد نوسان‌های کاملی است که هر ذره از محیط در یک ثانیه انجام می‌دهد. بسامد و دورهٔ تناوب عکس یکدیگر هستند.

$$f=\frac{۱}{T}$$

از قبل می‌دانیم که سرعت انتشار موج را محیط آن تعیین می‌کند و دامنه، بسامد و دورهٔ آن را چشمهٔ موج مشخص می‌کند. کمیت دیگر مربوط به موج که هم به محیط و هم به چشمهٔ موج بستگی دارد، طول موج است. طول موج برابر مسافتی است که موج در مدت یک دورهٔ تناوب پیش‌روی می‌کند.

طول موج: $\lambda=vT=\frac{v}{f}$ ⟵ وابسته به محیط / وابسته به چشمه

کنکور ۱۴۰۴
www.biomaze.ir
www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshClouds

می‌دانیم وقتی موج صوتی از تار وارد هوا می‌شود، بسامد آن ثابت می‌ماند؛ بنابراین می‌توان گفت:

$$\lambda_{هوا}=\frac{v_{هوا}}{f}\xrightarrow[f=۵۰۰Hz]{v_{هوا}=۳۴۰\frac{m}{s}}\lambda_{هوا}=\frac{۳۴۰}{۵۰۰}=۰/۶۸m$$

$$\rightarrow h=۶۸cm$$

گروه آموزشی ماز

۵۵- دو بسامد تشدیدی متوالی یک تار دو انتها ثابت، ۲۴۰ هرتز و ۲۸۰ هرتز است. کدام بسامد برحسب هرتز، از بسامدهای تشدیدی این تار نیست؟

۱) ۶۰ ۲) ۸۰ ۳) ۱۶۰ ۴) ۳۲۰

پاسخ: گزینهٔ ۱ (آسان ـ مفهومی ـ ۱۲۰۴)

می‌دانیم اختلاف دو بسامد تشدیدی متوالی برابر با بسامد اصلی است. از طرفی، بسامد تشدیدی باید مضرب صحیحی از بسامد اصلی باشد؛ بنابراین داریم:

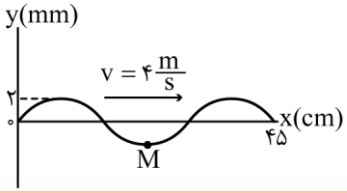
$$f_n-f_{(n-۱)}=f_۱\Rightarrow f_۱=۲۸۰-۲۴۰=۴۰Hz$$

$$\rightarrow f_n=nf_۱\rightarrow n=\frac{f_n}{f_۱}\in\mathbb{Z}$$

بنابراین درمی‌یابیم ۶۰Hz نمی‌تواند بسامد تشدیدی باشد، زیرا نسبت آن به $f_۱=۴۰Hz$، عددی صحیح نیست.

گروه آموزشی ماز

۵۶- شکل زیر، یک موج سینوسی را در لحظهٔ $t=۰$ نشان می‌دهد. تندی متوسط نقطهٔ M از لحظهٔ $t_۱=۰s$ تا لحظهٔ $t_۲=۰/۰۵s$ چند متر بر ثانیه است؟



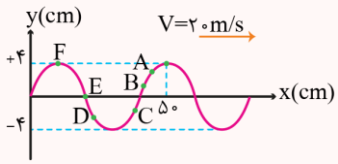
۱) ۰/۰۵
۲) ۰/۰۶
۳) ۰/۰۸
۴) ۰/۱۰

پاسخ: گزینهٔ ۴ (سخت ـ نموداری ـ ۱۲۰۳)

موج

در این بخش می‌خواهیم ببینیم که نمودار جابه‌جایی – مکان یک موج یا همان نقش موج چه اطلاعاتی به ما می‌دهد.

برای فهمیدن این موضوع از یک مثال استفاده می‌کنیم. فرض کنید نقش یک موج عرضی در لحظهٔ $t=۰$



مطابق شکل مقابل باشد و موج با تندی $v=۲۰\frac{m}{s}$ در جهت محور x منتشر شود.

نتایج زیر را می‌توانیم از این نمودار به‌دست بیاوریم:

۱) طول موج: فاصلهٔ دو قلهٔ متوالی یا دو دره متوالی روی محور افقی برابر یک طول موج است. مثلاً در نمودار داده شده یک طول موج به اضافهٔ $\frac{۱}{۴}$ طول موج برابر ۵۰cm شده است، بنابراین طول موج برابر است با:

$$\lambda+\frac{\lambda}{۴}=۵۰cm\Rightarrow\frac{۵\lambda}{۴}=۵۰cm\Rightarrow\lambda=۴۰cm=۰/۴m$$

۲) بسامد موج: با داشتن طول موج و سرعت انتشار موج، محاسبهٔ بسامد کار ساده‌ای است.

$$\lambda=\frac{v}{f}\Rightarrow f=\frac{v}{\lambda}\Rightarrow f=\frac{۲۰}{۰/۴}=۵۰Hz$$

۳) دورهٔ تناوب موج: دورهٔ تناوب برابر عکس بسامد است.

$$T=\frac{۱}{f}\Rightarrow T=\frac{۱}{۵۰}=۰/۰۲sB$$

۴) دامنهٔ موج: بیش‌ترین فاصله تا مکان تعادل برابر دامنهٔ موج است. مثلاً در نمودار داده شده، دامنهٔ موج برابر $A=۴cm$ است.

حتماً به خاطر دارید که هریک از ذرات محیط هنگام عبور موج، حرکت هماهنگ ساده انجام می‌دهند. موارد بعدی در مورد حرکت هماهنگ سادهٔ ذرات محیط است.

کنکور ۱۴۰۴
www.biomaze.ir
www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshClouds

۵) جهت سرعت حرکت ارتعاشی ذرات محیط: برای تعیین جهت حرکت هریک از ذرات کافی است به ذرات قبل از آن نگاه کنیم. مثلاً برای تعیین جهت حرکت ذرهٔ A، به ذرهٔ B که کمی عقب‌تر از آن است نگاه می‌کنیم. چون ذرهٔ B پایین‌تر از A است، نتیجه می‌گیریم که ذرهٔ A در لحظهٔ نشان داده شده به سمت پایین حرکت می‌کند، یعنی جهت بردار سرعت آن در خلاف جهت محور y است یا به عبارت ساده‌تر سرعت آن منفی است. دقت کنید که برای تعیین آن‌که کدام ذره عقب‌تر است باید به جهت انتشار موج نگاه کنیم. چون موج در جهت محور x منتشر می‌شود، ذرهٔ B عقب‌تر از A است ولی اگر موج در خلاف جهت محور x منتشر می‌شد، ذرهٔ A عقب‌تر از بود. باتوجه به این توضیحات، علامت سرعت هر ذره به‌صورت زیر است:

$A \rightarrow$ منفی $\quad B \rightarrow$ منفی $\quad C \rightarrow$ منفی

$D \rightarrow$ مثبت $\quad E \rightarrow$ مثبت $\quad F \rightarrow$ صفر

دقت کنید که هنگام عبور از مکان تعادلی، سرعت بیشینه است و هنگام عبور از نقاط بازگشت، سرعت صفر است، بنابراین سرعت ذرهٔ E بیشینه و سرعت ذرهٔ F صفر است.

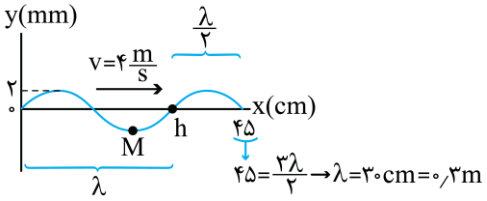
۶) شتاب حرکت ارتعاشی ذرات محیط: هنگامی که مکان ذرات منفی است، یعنی نمودار زیر محور افقی قرار دارد، شتاب مثبت است و در جهت محور y می‌باشد. همچنین هنگامی که مکان ذرات مثبت است، یعنی نمودار بالای محور افقی است، شتاب منفی است و در خلاف جهت محور y می‌باشد. مثلاً در نمودار داده شده، شتاب ذرات A، B و F منفی است، شتاب ذرات C و D مثبت است و شتاب ذرهٔ E صفر است. دقت کنید شتاب در مکان تعادل صفر است و در نقاط بازگشت مثل نقطهٔ F، بیشینه است.

۷) تندشونده یا کندشونده بودن حرکت ارتعاشی ذرات:

با مقایسهٔ علامت سرعت و شتاب از نکات قبلی، می‌توانیم نوع حرکت را هم مشخص کنیم.

ذره	سرعت	شتاب	نوع حرکت
A	منفی	منفی	تندشونده
B	منفی	منفی	تندشونده
C	منفی	مثبت	کندشونده
D	مثبت	مثبت	تندشونده

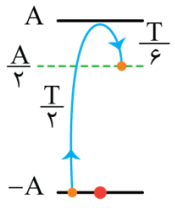
باتوجه به نمودار $y-x$ موج، درمی‌یابیم:



$$T=\frac{\lambda}{v}\Rightarrow T=\frac{۰/۳}{۴}=\frac{۳}{۴۰}s$$

$$\begin{cases} t_۱=۰ \\ t_۲=۰/۰۵s=\frac{۱}{۲۰}s\rightarrow \frac{t_۲}{T}=\frac{\frac{۱}{۲۰}}{\frac{۳}{۴۰}}=\frac{۲}{۳}\rightarrow t_۲=\frac{۲}{۳}T \end{cases}$$

باتوجه به اینکه جهت انتشار موج به سمت راست است، بنابراین هر ذره مانند ذرهٔ قبل از خود (سمت چپ) خود رفتار می‌کند. در مدت زمان $\frac{۲T}{۳}$، ذره ابتدا از مکان $y=-A$ به $y=+A$ می‌رود و پس از تغییر جهت به مکان $y=\frac{A}{۲}$ بازمی‌گردد، بنابراین برای محاسبهٔ تندی متوسط داریم:



$$l=۲A+\frac{A}{۲}=۲/۵A$$

$$\xrightarrow{A=۲mm} l=۲/۵\times ۲=۵mm$$

$$\rightarrow s_{av}=\frac{l}{\Delta t}\Rightarrow s_{av}=\frac{۵\times ۱۰^{-۳}}{۰/۰۵}=۰/۱\frac{m}{s}$$

گروه آموزشی ماز

۵۷- اگر تراز شدت صوت A، ۱۱/۵ دسی‌بل بیش‌تر از تراز شدت صوت B باشد، در آن مکان، شدت صوت A چند برابر شدت صوت B است؟ $(\log ۲=۰/۳)$

۱) $\sqrt{۲۳}$ ۲) $۱۰\sqrt{۲۳}$ ۳) $۱۰\sqrt{۲}$ ۴) $۱۰\sqrt{۳}$

کنکور ۱۴۰۴
www.biomaze.ir
www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshClouds

پاسخ: گزینهٔ ۳ (متوسط ـ محاسباتی ـ ۱۲۰۳)

تراز شدت صوت

برای محاسبهٔ تراز شدت صوت داریم:

$$\beta = ۱۰\log\frac{I}{I_۰}$$

در رابطهٔ فوق $I_۰$ شدت صوت مبنا است.

برای مقایسهٔ تراز شدت دو صوت داریم:

$$\begin{cases}\beta_۱ = ۱۰\log\frac{I_۱}{I_۰}\\ \beta_۲ = ۱۰\log\frac{I_۲}{I_۰}\end{cases} \Rightarrow \boxed{\beta_۲ - \beta_۱ = ۱۰\log\frac{I_۲}{I_۱}}$$

باتوجه به رابطهٔ اختلاف تراز شدت صوت می‌توان نوشت:

$$\beta_A - \beta_B = ۱۰\log\frac{I_A}{I_B} \xrightarrow{\beta_A-\beta_B=۱۱/۵dB} ۱۱/۵ = ۱۰\log\frac{I_A}{I_B}$$

$$\underbrace{۱/۱۵}_{۱+\left(\frac{۱}{۲}\times ۰/۳\right)} = \log\frac{I_A}{I_B} \rightarrow \log ۱۰ + \underbrace{\frac{۱}{۲}\log ۲}_{\log\sqrt{۲}} = \log ۱۰\sqrt{۲} = \log\frac{I_A}{I_B}$$

$$\rightarrow \frac{I_A}{I_B} = ۱۰\sqrt{۲}$$

گروه آموزشی ماز

۵۸- وزنه‌ای به جرم ۱۰۰ گرم با بسامد ۲۰ هرتز روی محور x حرکت هماهنگ ساده انجام می‌دهد و در لحظه‌ای که انرژی پتانسیل کشسانی آن نصف مقدار بیشینه‌اش شود، انرژی جنبشی آن به $۰/۱\pi^۲ J$ می‌رسد. معادلهٔ مکان ـ زمان آن در SI کدام است؟

۱) $x = ۰/۰۵\cos ۴۰\pi t$

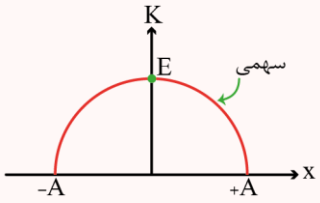
۲) $x = ۰/۰۵\cos ۲۰\pi t$

۳) $x = ۰/۰۲\cos ۴۰\pi t$

۴) $x = ۰/۰۲\cos ۲۰\pi t$

پاسخ: گزینهٔ ۱ (متوسط ـ محاسباتی ـ ۱۲۰۳)

انرژی نوسانگر هماهنگ ساده



بیشینهٔ انرژی پتانسیل کشسانی همان انرژی مکانیکی نوسانگر است.

$$E = U_{max} = \frac{۱}{۲}kA^۲ = \frac{۱}{۲}m\omega^۲A^۲ = ۲\pi^۲A^۲f^۲m$$

اگر انرژی پتانسیل را از انرژی مکانیکی کم کنیم، انرژی جنبشی نوسانگر به‌دست می‌آید.

$$\begin{cases}K = E - U\\ U = \frac{۱}{۲}kx^۲\end{cases} \rightarrow K = E - \frac{۱}{۲}kx^۲ = E - \frac{۱}{۲}m\omega^۲x^۲$$

البته اگر سرعت نوسانگر را بدانیم، می‌توانیم از رابطهٔ $K = \frac{۱}{۲}mv^۲$ هم برای محاسبهٔ انرژی جنبشی کمک بگیریم.

گام اول:

طبق رابطهٔ انرژی مکانیکی برحسب انرژی جنبشی و انرژی پتانسیل می‌توان گفت:

$$E = K + U \xrightarrow{U=\frac{U_{max}}{۲}=\frac{E}{۲}} E = K + \frac{E}{۲} \rightarrow K = \frac{E}{۲} = ۰/۱\pi^۲ J$$

$$\rightarrow E = ۰/۲\pi^۲ J$$

کنکور ۱۴۰۴
www.biomaze.ir
www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshClouds

گام دوم:

حال با داشتن انرژی مکانیکی، جرم و بسامد، می‌توانیم دامنهٔ نوسان را به‌دست آوریم:

$$E=\frac{۱}{۲}m\omega^{۲}A^{۲}=۲\pi^{۲}mf^{۲}A^{۲}\Rightarrow ۰/۲\pi^{۲}=۲\pi^{۲}\times ۰/۱\times\left(۲۰^{۲}\right)\times A^{۲}$$

$$\rightarrow A^{۲}=\frac{۱}{۴۰۰}\rightarrow A=\frac{۱}{۲۰}=۰/۰۵m=۵cm$$

گام سوم:

از طرفی با داشتن بسامد، ω را به‌دست می‌آوریم:

$$\omega=۲\pi f\Rightarrow \omega=۲\pi\times ۲۰=۴۰\pi\frac{rad}{s}$$

گام آخر:

حال با داشتن A و ω، معادلهٔ نوسانگر را به‌دست می‌آوریم:

$$x=A\cos\omega t\xrightarrow[\omega=۴۰\pi\frac{rad}{s}]{A=۰/۰۵m}x=۰/۰۵\cos ۴۰\pi t$$

گروه آموزشی ماز

۵۹- در اتم هیدروژن، کوتاه‌ترین طول موجی که الکترون تابش می‌کند تا به مدار n' برسد، ۱۶۰۰ نانومتر است. این نور در کدام ناحیه از طیف موج‌های الکترومغناطیسی قرار دارد و n' چقدر است؟ $R=۰/۰۱(nm)^{-۱}$

۱) فرابنفش - ۴ ۲) فرابنفش - ۲ ۳) فروسرخ - ۴ ۴) فروسرخ - ۲

پاسخ: گزینهٔ ۳ (متوسط ـ مفهومی/ محاسباتی ـ ۱۲۰۵)

می‌دانیم محدودهٔ طول موج مرئی از حدود ۴۰۰ تا ۷۰۰ نانومتر است و طول موج‌های بزرگ‌تر از آن محدودهٔ فروسرخ است. بنابراین ۱۶۰۰nm در محدودهٔ فروسرخ است. از طرفی می‌دانیم رشته‌های لیمان $(n'=۱)$ و بالمر $(n'=۲)$ طول موج در محدودهٔ فروسرخ ندارند. بنابراین با رد گزینه، گزینهٔ ۳ صحیح است.

$$\frac{۱}{\lambda_{min}}=R(\frac{۱}{n'^{۲}}-\frac{۱}{\infty^{۲}})=\frac{R}{n'^{۲}}\Rightarrow\lambda_{min}=\frac{n'^{۲}}{R}\Rightarrow ۱۶۰۰=\frac{n'^{۲}}{۰/۰۱}\Rightarrow n'=۴$$

گروه آموزشی ماز

۶۰- اگر یک چشمهٔ لیزر با توان ۰/۳ میلی‌وات نوری با طول موج ۶۶۳ نانومتر تولید کند، در هر ثانیه چند فوتون از این چشمه گسیل می‌شود؟

($c=۳\times ۱۰^{۸}\frac{m}{s}$ و $h=۶/۶۳\times ۱۰^{-۳۴}J.s$)

۱) ۳×۱۰^{۱۵} ۲) $۱۰^{۱۵}$ ۳) ۵×۱۰^{۱۳} ۴) $۱۰^{۱۳}$

پاسخ: گزینهٔ ۲ (متوسط ـ محاسباتی ـ ۱۲۰۵)

انرژی فوتون و امواج الکترومغناطیسی

هنگامی که الکترون در پایین‌ترین تراز انرژی $(n=۱)$ قرار گرفته است، در اصطلاح می‌گویند الکترون در حالت پایه قرار دارد و هنگامی که الکترون در ترازهای انرژی بالاتر $(n=۲,۳,...)$ قرار می‌گیرد، در اصطلاح می‌گویند الکترون برانگیخته شده است.

انرژی فوتون‌ها: انرژی n فوتون هم‌بسامد برابر است با:

$$E=nhf\xrightarrow{f=\frac{c}{\lambda}}E=nh\frac{c}{\lambda}$$

نکته:

توان مفید یک لامپ تک‌فام که در مدت t ثانیه، n فوتون مشابه با بسامد f تابش می‌کند از رابطهٔ مقابل به‌دست می‌آید:

$$P=\frac{E}{t}=\frac{nhf}{t}$$

در این رابطه P برحسب وات و h برحسب $J.s$ است.

تذکر: توجه کنید منظور از لامپ تک‌فام، لامپی است که بسامد تمام فوتون‌هایش با هم برابر است.

کنکور ۱۴۰۴
www.biomaze.ir
www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshClouds

باتوجه به دو رابطهٔ $E=n\frac{hc}{\lambda}$ و $E=P.t$ می‌توان نوشت:

$$P.t=n.\frac{hc}{\lambda}\xrightarrow[t=1s,\lambda=663nm]{P=0/3mW=3\times10^{-4}W}3\times10^{-4}\times1=\frac{n\times\cancel{6/63}\times10^{-34}\times\cancel{3}\times10^{8}}{\frac{\cancel{663}\times10^{-9}}{100}}$$

$$\Rightarrow n=10^{-11}\times10^{26}=10^{15}$$

گروه آموزشی ماز

۶۱- نیروی هسته‌ای بین نوکلئون‌ها ..... .

۱) با مربع فاصلهٔ بین دو نوکلئون نسبت عکس دارد

۲) متناسب با تعداد نوکلئون‌های هسته، افزایش می‌یابد

۳) کوتاه‌بُرد است و تنها در فاصله‌ای کوچک‌تر از ابعاد هسته اثر می‌کند

۴) بین دو پروتون از نوع دافعه و بین پروتون و نوترون از نوع جاذبه است

پاسخ: گزینهٔ ۳ (آسان ـ حفظی ـ ۱۲۰۶)

بررسی موارد:

۱) نادرست ـ در فواصل بزرگتر از ابعاد هسته عملاً نیروی هسته‌ای وجود ندارد و صفر است.

۲) نادرست ـ نیروی هسته‌ای هر نوکلئون تنها به نوکلئون‌های مجاور وارد می‌شود و هیچ ربطی به‌صورت مستقیم (رابطهٔ خطی) با تعداد نوکلئون‌های هسته ندارد.

۳) درست

۴) نادرست ـ نیروی هسته‌ای بین هر دو نوکلئون یکسان و به صورت جاذبه است.

گروه آموزشی ماز

۶۲- اختلاف پتانسیل الکتریکی دو سر یک خازن ۲۵ میکروفارادی را ۲۰ درصد افزایش می‌دهیم و ۵۰ میکروکولن بر بار الکتریکی ذخیره‌شده در آن اضافه می‌شود. در این شرایط، انرژی خازن چند میلی‌ژول می‌شود؟

۱) ۳۶۰ ۲) ۳/۶ ۳) ۱۸۰ ۴) ۱/۸

پاسخ: گزینهٔ ۴ (متوسط ـ محاسباتی ـ ۱۱۰۱)

انرژی ذخیره شده در خازن

هنگامی که خازنی به مولد وصل شده است تا در آن بار ذخیره شود، انرژی‌ای که مولد برای پر کردن خازن مصرف می‌کند، به‌صورت انرژی پتانسیل الکتریکی در میدان الکتریکی بین دو صفحهٔ خازن ذخیره می‌شود. این انرژی از رابطه‌های زیر قابل محاسبه است:

$$U=\frac{1}{2}QV=\frac{1}{2}CV^2=\frac{Q^2}{2C}$$

ابتدا به کمک رابطهٔ $Q=C.V$ ، ولتاژ نهایی خازن را به‌دست می‌آوریم:

$$Q=C.V\rightarrow Q_2-Q_1=CV_2-CV_1=C(V_2-V_1)$$

$$\xrightarrow[C=25\times10^{-6}F]{V_2=V_1+\frac{20}{100}V_1=1/2V_1}50\times10^{-6}=25\times10^{-6}(1/2V_1-V_1)$$

$$\rightarrow 2=0/2V_1\rightarrow V_1=10V, V_2=1/2V_1=12V$$

سپس با داشتن ولتاژ نهایی و ظرفیت خازن، انرژی ذخیره شده در خازن را به‌دست می‌آوریم:

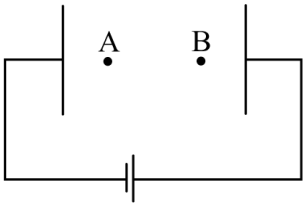
$$U_2=\frac{1}{2}CV_2^2\xrightarrow[C=25\mu F]{V_2=12V}U_2=\frac{1}{2}\times25\times10^{-6}\times(12)^2$$

$$\rightarrow U_2=1800\mu J=1/8mJ$$

گروه آموزشی ماز

کنکور ۱۴۰۴
www.biomaze.ir
www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshClouds

۶۳- در شکل زیر، میدان الکتریکی یکنواخت بین دو صفحه $۱۰^۳ \frac{N}{C}$ است. یک پروتون را از نقطهٔ A با تندی اولیهٔ $۲\times۱۰^۴ \frac{m}{s}$ در خلاف جهت میدان الکتریکی پرتاب می‌کنیم و پروتون در نقطهٔ B متوقف می‌شود. حال اگر جای پایانه‌های باتری را عوض کنیم و پروتون را با همان تندی قبلی از A به سمت نقطهٔ B پرتاب کنیم، تندی آن در نقطهٔ B چند متر بر ثانیه می‌شود؟ (از وزن پروتون و مقاومت هوا صرف‌نظر شود.)



۱) $۲\sqrt{۲}\times۱۰^۴$

۲) $\frac{۱}{۲}\times۱۰^۴$

۳) $\sqrt{۲}\times۱۰^۴$

۴) ۴×۱۰^۴

پاسخ: گزینهٔ ۱ (سخت ـ مفهومی / محاسباتی ـ ۱۱۰۱)

انواع تغییر انرژی پتانسیل الکتریکی
$\Delta U = U_{end} - U_{start}$ در تمام جابجایی‌ها ΔU برابر است با انرژی پتانسیل نقطه انتها منهای انرژی پتانسیل نقطه ابتدا
$\Delta U = -W_E$ در تمام جابجایی‌ها ΔU_E برابر است با قرینه کاری که میدان الکتریکی بر روی بار انجام می‌دهد.
$\Delta U = W_{us}$ اگر جابجایی بار با سرعت ثابت باشد ΔU برابر است با کار ما
$\Delta U = -Fd = -Eqd$ در این رابطه **d** جابه‌جایی در راستای میدان الکتریکی است.
$\Delta U = -\Delta K = -(K_{end} - K_{start})$ در جابجایی‌هایی که فقط نیروی میدان الکتریکی به بار اثر می‌کند، تغییر انرژی پتانسیل الکتریکی برابر است با قرینه تغییرات انرژی جنبشی

در حالت اول با توجه به اینکه پروتون در خلاف جهت میدان (خلاف جهت نیروی الکتریکی) جابجا می‌شود، بنابراین کار میدان الکتریکی بر روی بار منفی بوده و برابر است با:

$$\xrightarrow{\text{قضیه کار - انرژی جنبشی}} W_t = \Delta K \xrightarrow[\Delta K=\frac{۱}{۲}m(v_B^۲-v_A^۲)]{W_t=W_E} W_E = \frac{۱}{۲}m\left(v_B^۲ - v_A^۲\right)$$

$$\rightarrow W_E = \frac{۱}{۲}m\left(۰ - \left(۲\times۱۰^۴\right)^۲\right)$$

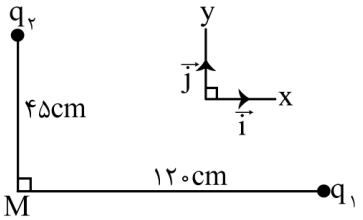
حال اگر جای پایانه‌های باتری را عوض کنیم و تمام شرایط دیگر یکسان باشد، مقدار کار میدان الکتریکی بر روی پروتون قرینهٔ حالت اول خواهد بود:

$$W_t = \Delta K \xrightarrow[\Delta K=\frac{۱}{۲}m(v_B^۲-v_A^۲)]{W_t=W'_E=-W_E} \cancel{\frac{۱}{۲}m}\left(۲\times۱۰^۴\right)^۲ = \cancel{\frac{۱}{۲}m}\left(v_B^۲ - \left(۲\times۱۰^۴\right)^۲\right)$$

$$\rightarrow v_B^۲ = ۲\times\left(۲\times۱۰^۴\right)^۲ \rightarrow v_B = ۲\sqrt{۲}\times۱۰^۴ \frac{m}{s}$$

گروه آموزشی ماز

۶۴- در شکل زیر، بردار میدان الکتریکی حاصل از بارهای نقطه‌ای $q_۱$ و $q_۲$ در نقطهٔ M در SI به‌صورت $\vec{E}=۴/۵\times۱۰^۵\vec{i}-۸\times۱۰^۵\vec{j}$ است. $\frac{q_۱}{q_۲}$ چقدر است؟



۱) -۸

۲) -۴

۳) ۸

۴) ۴

کنکور ۱۴۰۴
www.biomaze.ir
www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshClouds

پاسخ: گزینهٔ ۲ (آسان ـ محاسباتی ـ ۱۱۰۱)

باتوجه به اینکه میدان الکتریکی ناشی از بار q_1 در راستای x به سمت راست (به سمت بار q_1) و میدان الکتریکی ناشی از بار q_2 در راستای محور y به سمت پایین (به سمت خارج بار q_2) است، نتیجه می‌گیریم $q_1<0$ و $q_2>0$ است. از طرفی رابطهٔ میدان الکتریکی برای هر کدام از بارها داریم:

$$\begin{cases} E_1 = 4/5\times10^5 \dfrac{N}{C} \\ E_2 = 8\times10^5 \dfrac{N}{C} \end{cases} \rightarrow E = \frac{k|q|}{r^2} \Rightarrow \frac{E_1}{E_2} = \left|\frac{q_1}{q_2}\right| \times \left(\frac{r_2}{r_1}\right)^2$$

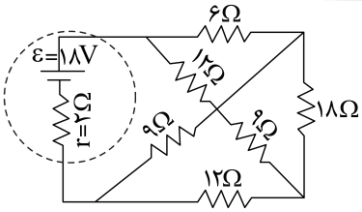
$$\xrightarrow[E_2=8\times10^5\frac{N}{C},r_2=45cm]{E_1=4/5\times10^5\frac{N}{C},r_1=120cm} \frac{4/5\times\cancel{10^5}}{8\times\cancel{10^5}} = \left|\frac{q_1}{q_2}\right| \times \left(\frac{45}{120}\right)^2$$

$$\frac{9}{16}\times\frac{64}{9} = \left|\frac{q_1}{q_2}\right| \rightarrow \left|\frac{q_1}{q_2}\right| = 4$$

$$\xrightarrow[q_2>0]{q_1<0} \frac{q_1}{q_2} = -4$$

گروه آموزشی ماز

۶۵- در مدار شکل زیر، اختلاف پتانسیل الکتریکی دو سر باتری چند ولت است؟

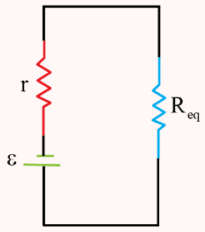


۱) ۱۷
۲) ۱۶
۳) ۱۵
۴) ۱۴

پاسخ: گزینهٔ ۳ (سخت ـ محاسباتی ـ ۱۱۰۲)

جریان عبوری از مدار تک‌حلقه

جریان عبوری از مدار تک‌حلقهٔ نشان داده شده در شکل مقابل از رابطهٔ زیر به‌دست می‌آید:



$$I = \frac{\varepsilon}{R_{eq}+r}$$

آمپرسنج

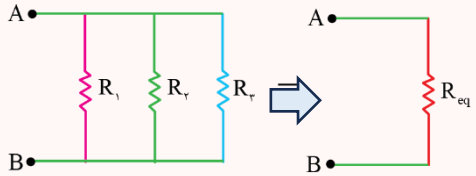
برای اندازه‌گیری جریان گذرنده از یک مدار از آمپرسنج استفاده می‌شود.

مقاومت درونی آمپرسنج ایده‌آل صفر است و بنابراین اختلاف پتانسیل دو سر آن صفر است و همانند یک اتصال کوتاه عمل می‌کند.

مقاومت‌های موازی

مقاومت‌هایی هستند که دو سر آن‌ها به پتانسیل معین بسته شده‌اند و به عبارتی

اختلاف پتانسیل برابری بر روی مقاومت‌ها وجود دارد، در این حالت مقاومت معادل مدار (R_{eq}) از رابطهٔ زیر به‌دست می‌آید:



$$\frac{1}{R_{eq}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}$$

اگر n مقاومت مشابه R به صورت موازی به یکدیگر متصل شده باشند، مقاومت معادل آن‌ها برابر است با:

$$R_{eq} = \frac{R}{n}$$

نکته:

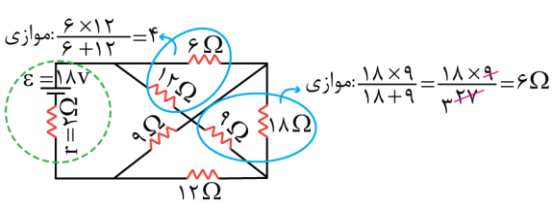
در حالت موازی، مقاومت معادل از تک‌تک مقاومت‌ها کوچک‌تر است:

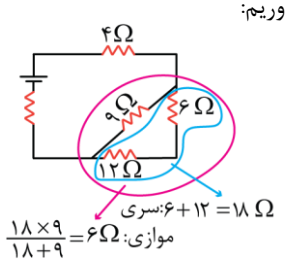
$$R_{eq} < R_1 \ , \ R_{eq} < R_2 \ , ...$$

کنکور ۱۴۰۴
www.biomaze.ir
www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshClouds

گام اول:

ابتدا مقاومت معادل خارجی را به‌دست می‌آوریم:





$$R_{eq}=۴+۶=۱۰\Omega$$

گام دوم:

سپس جریان خروجی از باتری را به‌دست می‌آوریم:

$$I=\frac{\varepsilon}{R_{eq}+r}\xrightarrow[R_{eq}=۱۰\Omega,r=۲\Omega]{\varepsilon=۱۸V}I=\frac{۱۸}{۱۰+۲}=۱/۵A$$

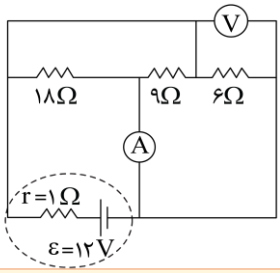
گام سوم:

درنهایت ولتاژ دو سر باتری را به‌دست می‌آوریم:

$$V_{\text{باتری}}=\varepsilon-rI\xrightarrow[r=۲\Omega,I=۱/۵A]{\varepsilon=۱۸V}V_{\text{باتری}}=۱۸-(۲\times۱/۵)=۱۵V$$

گروه آموزشی ماز

۶۶- در مدار شکل زیر، آمپرسنج چند آمپر را نشان می‌دهد؟ (ولت‌سنج و آمپرسنج آرمانی فرض شوند.)



۱) ۱/۵

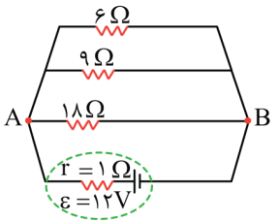
۲) ۳

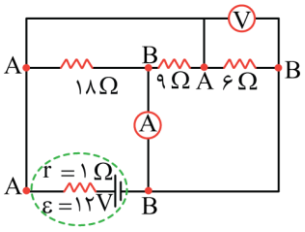
۳) $\frac{۱۲}{۵}$

۴) $\frac{۱۲}{۷}$

پاسخ: گزینهٔ ۱ (متوسط ـ محاسباتی ـ ۱۱۰۲)

ابتدا با قرار دادن سیم به جای آمپرسنج و باز کردن شاخهٔ ولت‌سنج، شکل مدار را ساده می‌کنیم:

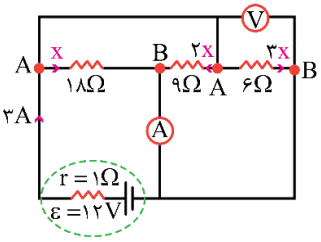




$$\frac{۱}{R_{eq}}=\frac{۱}{۱۸}+\frac{۱}{۹}+\frac{۱}{۶}=\frac{۱+۲+۳}{۱۸}=\frac{۱}{۳}\rightarrow R_{eq}=۳\Omega$$

$$I=\frac{\varepsilon}{R_{eq}+r}\xrightarrow[r=۱\Omega,R_{eq}=۳\Omega]{\varepsilon=۱۲V}I=\frac{۱۲}{۳+۱}=۳A$$

حال جریان گذرنده از مقاومت‌های موازی را تقسیم می‌کنیم. اگر از مقاومت ۱۸Ω جریان x بگذرد، از مقاومت ۹Ω که نصف آن است، جریان ۲x و از مقاومت ۶Ω که $\frac{۱}{۳}$ آن است جریان ۳x خواهد گذشت. [دقت کنید که جهت جریان از A به سمت B است.]



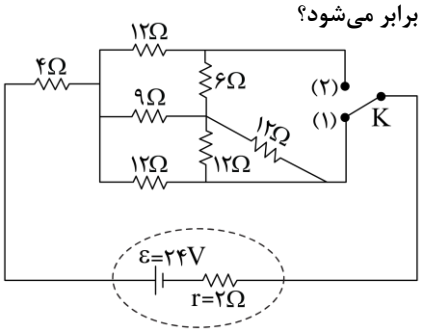
$$I=۳=۶x\rightarrow x=۰/۵A$$

$$\rightarrow \text{عدد آمپرسنج}=x+۲x=۳x=۱/۵A$$

گروه آموزشی ماز

کنکور ۱۴۰۴
www.biomaze.ir
سنجش کلاد
www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshClouds

۶۷- در شکل زیر، اگر کلید را از اتصال (۱) قطع کرده و به (۲) وصل کنیم، توان مصرفی مقاومت ۶ اُهمی چند برابر می‌شود؟



۱) ۳

۲) ۹

۳) $\frac{۴}{۳}$

۴) $\frac{۹}{۴}$

پاسخ: گزینهٔ ۲ (سخت ـ محاسباتی ـ ۱۱۰۲)

توان الکتریکی:

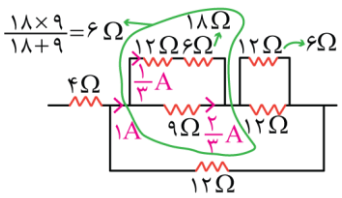
۱) توان الکتریکی هر وسیلهٔ الکتریکی برابر حاصل‌ضرب اختلاف پتانسیل در جریان آن وسیله است.

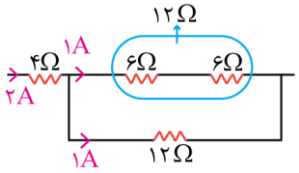
$$P = VI$$

۲) برای یک مقاومت با توجه به رابطهٔ $V = RI$ ، توان مقاومت از روابط زیر قابل محاسبه است.

$$\text{توان مصرفی مقاومت} \begin{cases} P = VI \\ P = RI^۲ \\ P = \frac{V^۲}{R} \end{cases}$$

درحالت اول داریم:



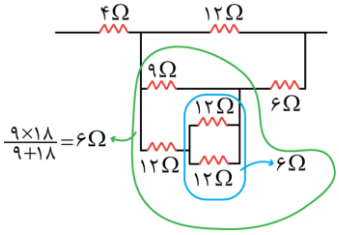


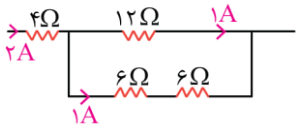
$$R_{eq} = ۴ + ۶ = ۱۰\Omega$$

$$I = \frac{\varepsilon}{R_{eq} + r} = \frac{۲۴}{۱۰ + ۲} = ۲A \rightarrow I_{۶\Omega} = \frac{۱}{۳}A$$

$$P_{۶\Omega} = RI^۲ = ۶ \times \left(\frac{۱}{۳}\right)^۲ = \frac{۲}{۳}W$$

در حالت دوم داریم:





$$R_{eq} = ۴ + ۶ = ۱۰\Omega$$

$$I = \frac{۲۴}{۱۰ + ۲} = ۲A \rightarrow I_{۶\Omega} = ۱A$$

$$P_{۶\Omega} = RI^۲ = ۶ \times (۱)^۲ = ۶W$$

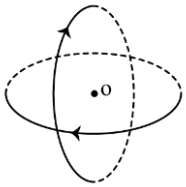
بنابراین توان مصرفی مقاومت ۶Ω در حالت دوم نسبت به حالت اول برابر است با:

$$\frac{P_۲}{P_۱} = \frac{۶}{\frac{۲}{۳}} = ۹$$

کنکور ۱۴۰۴
www.biomaze.ir
www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshClouds

۶۸- مطابق شکل، دو حلقه با جریان یکسان $2A$ که شعاع هریک از آن‌ها $20cm$ است، عمود بر هم و عمود بر این صفحه قرار دارند. بزرگی میدان مغناطیسی خالص در مرکز حلقه‌ها (نقطهٔ O) چند تسلا و در چه جهتی است؟

$(\mu_0 = 12\times10^{-7}\ \frac{T\cdot m}{A})$



۱) $12\sqrt{2}\times10^{-6}$ و ↖

۲) $6\sqrt{2}\times10^{-6}$ و ↖

۳) $12\sqrt{2}\times10^{-6}$ و ↙

۴) $6\sqrt{2}\times10^{-6}$ و ↙

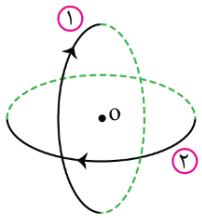
پاسخ: گزینهٔ ۴ (متوسط ـ مفهومی / محاسباتی ـ ۱۱۰۳)

میدان مغناطیسی در مرکز حلقه یا پیچه

$$B=\frac{\mu_0 NI}{2R}$$

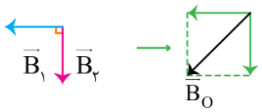
R: شعاع حلقه I: جریان الکتریکی μ_0: ضریب گذردهی مغناطیسی خلاء

ابتدا بزرگی میدان مغناطیسی ناشی از هریک از حلقه‌ها را به‌دست می‌آوریم:



$$B_1=B_2=\frac{\mu_0.N.I}{2R}=\frac{12\times10^{-7}\times1\times2}{2\times0/2}=6\times10^{-6}T$$

باتوجه به قاعدهٔ دست راست برای پیچهٔ حامل جریان، جهت میدان ناشی از هریک از حلقه‌ها را به‌دست آورده و درنهایت میدان برآیند را به‌دست می‌آوریم:



$$\xrightarrow[\theta=90^\circ]{B_1=B_2} B_O=\sqrt{2}B_1=6\sqrt{2}\times10^{-6}T$$

گروه آموزشی ماز

۶۹- بردار میدان مغناطیسی در یک محیط، در SI به‌صورت $\vec{B}=0/05\vec{i}+0/04\vec{j}$ است. اگر در آن محیط، سطح قاب مربع شکلی به ضلع $20cm$ عمود بر محور x باشد، شار مغناطیسی عبوری از آن چند وِبر است؟

۱) ۰/۰۲ ۲) ۰/۱۶ ۳) ۰/۰۱۶ ۴) ۰/۰۰۲

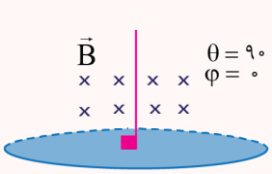
پاسخ: گزینهٔ ۴ (آسان ـ محاسباتی ـ ۱۱۰۴)

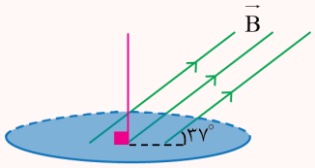
شار مغناطیسی

خطوط مغناطیسی گذرنده از سطح رسانا (دقت کنید واحد سطح نیست)

θ: زاویه بین نیم‌خط عمود بر صفحه با میدان مغناطیسی

$$\varphi=BA\cos\theta$$





یکای شار مغناطیسی (وبر) برحسب یکاهای اصلی:

مطابق رابطهٔ $\varphi=BA\cos\theta$ می‌توان نوشت:

$$\varphi=BA\cos\theta\rightarrow Wb\equiv T\times m^2$$

از قسمت‌های قبل می‌دانیم $T\equiv\frac{kg}{A.s^2}$ است، بنابراین داریم:

$$Wb\equiv T.m^2\equiv\frac{kg}{A.s^2}\times m^2\rightarrow Wb\equiv\frac{kg.m^2}{A.s^2}$$

کنکور ۱۴۰۴
www.biomaze.ir
www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshClouds

باتوجه به اینکه سطح قاب بر محور xها عمود (موازی با محور yها) است. بنابراین شار مغناطیسی عبوری از قاب تنها ناشی از میدان مغناطیسی در راستای x است.

$$\Phi = A.B.\cos\theta = A.B_x \Rightarrow \Phi = (۰/۲)^۲ \times ۰/۰۵ = ۰/۰۰۲Wb$$

گروه آموزشی ماز

۷۰- سیملوله‌ای دارای ۴۰۰ حلقه است و مساحت هر حلقه آن $۱۵cm^۲$ است. درون این سیملوله، میدان مغناطیسی که موازی محور سیملوله است، با آهنگ ۰/۱ تسلا بر ثانیه کاهش می‌یابد. اگر مقاومت الکتریکی آن ۰/۲Ω باشد، جریان الکتریکی القایی آن چند آمپر است؟

۱) ۰/۲ ۲) ۰/۶ ۳) ۰/۳ ۴) ۰/۴

پاسخ: گزینهٔ ۳ (متوسط ـ محاسباتی ـ ۱۱۰۴)

قانون فاراده

با تغییر شار مغناطیسی، نیروی محرکه القایی ایجاد می‌شود.

$$\varepsilon_{av} = -N\frac{\Delta\varphi}{\Delta t} \xrightarrow{\varphi=BA\cos\theta} \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} \rightarrow \begin{cases} \frac{\Delta B}{\Delta t}A\cos\theta & \text{(میدان متغیر)} \\ B\frac{\Delta A}{\Delta t}\cos\theta & \text{(مساحت متغیر)} \\ \frac{BA}{\Delta t}\Delta\cos\theta & \text{(زاویهٔ متغیر)} \end{cases}$$

گام اول:

طبق قانون القای الکترومغناطیس فاراده می‌توان نوشت:

$$\varepsilon_{av} = -N.\frac{\Delta\Phi}{\Delta t} \xrightarrow{\Delta\Phi=A.\cos\theta\Delta B} \varepsilon_{av} = -N.A.\cos\theta.\frac{\Delta B}{\Delta t}$$

$$\xrightarrow[\theta=۰\rightarrow\cos\theta=۱,\ \frac{\Delta B}{\Delta t}=-۰/۱\frac{T}{s}]{N=۴۰۰,A=۱۵\times۱۰^{-۴}m^۲} \varepsilon_{av} = -۴۰۰\times۱۵\times۱۰^{-۴}\times۱\times(-۰/۱) = ۰/۰۶V$$

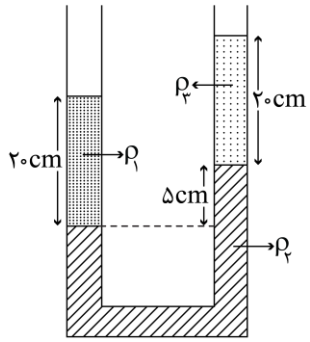
گام دوم:

حال طبق قانون اهم، جریان القایی را به‌دست می‌آوریم:

$$I_{av} = \frac{\varepsilon_{av}}{R} \Rightarrow \bar{I} = \frac{۰/۰۶}{۰/۲} = ۰/۳A$$

گروه آموزشی ماز

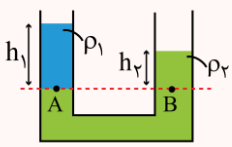
۷۱- در شکل زیر، سه مایع مخلوط نشدنی مطابق شکل به حالت تعادل قرار دارند. اگر $\rho_۱ = ۲\rho_۳$ باشد، نسبت $\frac{\rho_۲}{\rho_۱}$ چقدر است؟



۱) ۱
۲) ۲
۳) ۳
۴) ۴

پاسخ: گزینهٔ ۲ (متوسط ـ مفهومی / محاسباتی ـ ۱۰۰۲)

لوله‌های U شکل



در لوله‌های U شکل، اگر پایین‌ترین مرز مشترک مایع‌ها مشخص شود، فشار نقاط دو طرف روی این مرز مشترک برابر بوده و می‌توان نوشت:

$$P_A = P_B \rightarrow \rho_۱gh_۱ + P_. = \rho_۲gh_۲ + P_. \rightarrow \rho_۱h_۱ = \rho_۲h_۲$$

کنکور ۱۴۰۴
www.biomaze.ir
www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshClouds

نکته:

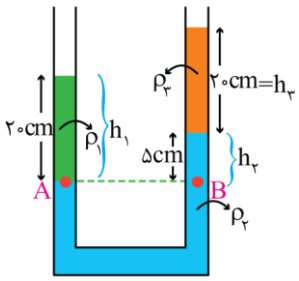
ـ اگر بیشتر از دو مایع درون لوله U شکل باشد، می‌توان گفت جمع ρh مایع‌های دو طرف با هم برابر است.

ـ در این رابطه، نیاز نیست کمیت‌ها برحسب SI عددگذاری شوند، کافی است، یکای کمیت‌های مشابه در طرفین رابطه، یکسان باشد.

ـ فشار هوا از طرفین این رابطه حذف می‌شود، یعنی در لوله‌های U شکلی که دو طرف آن‌ها با هوا در تماس هستند، فشار هوا تأثیری در تعادل مایعات و روابط ریاضی آن‌ها ندارد.

ـ در رابطه هم‌فشاری نوشته شده $(\rho_1 h_1 = \rho_2 h_2)$، قطر و مساحت مقطع لوله‌ها تأثیری ندارد.

باتوجه به شکل، فشار در نقاط هم‌تراز A و B باهم برابرند؛ بنابراین داریم:



$$\xrightarrow{P_A=P_B} \rho_1 h_1 = \rho_2 h_2 + \rho_3 h_3$$

$$۲۰\rho_1 = ۲۰\rho_3 + ۵\rho_2$$

$$\xrightarrow{\rho_1 = ۲\rho_3} ۲۰\rho_1 = ۱۰\rho_1 + ۵\rho_2 \rightarrow ۱۰\rho_1 = ۵\rho_2$$

$$\frac{\rho_2}{\rho_1} = ۲$$

گروه آموزشی ماز

۷۲- مساحت یکی از پنجره‌های یک زیردریایی ۱۲۰۰ سانتی‌مترمربع است. اگر نیروی وارد بر سطح خارجی این پنجره ۷۳۲۰۰ نیوتون باشد، این پنجره در عمق چند متری آب دریا قرار دارد؟

$(P_0 = ۱۰^5 Pa$ ، $g = ۱۰ \frac{m}{s^2}$ و $\rho_{\text{آب دریا}} = ۱۰۲۰ \frac{kg}{m^3})$

۱) ۴۰ ۲) ۴۵ ۳) ۵۰ ۴) ۶۵

پاسخ: گزینهٔ ۳ (متوسط ـ محاسباتی ـ ۱۰۰۲)

نکته:

ـ نیروی وارد بر سطح A درون مایع از رابطه مقابل به‌دست می‌آید: $F = PA$

ـ در این رابطه فشار باید برحسب پاسکال (Pa) و A برحسب مترمربع (m^2) باشد تا نیرو برحسب نیوتن به‌دست آید.

ـ اگر چگالی جیوه در سوال $۱۳/۶ \frac{g}{cm^3}$ داده شود، برای تبدیل cmHg به Pa عدد را در ۱۳۶۰ ضرب می‌کنیم و در صورتی که چگالی جیوه $۱۳/۵ \frac{g}{cm^3}$ داده شود، عدد را در ۱۳۵۰ ضرب می‌کنیم.

طبق رابطهٔ فشار داریم:

$$P = \frac{F}{A} = \frac{۷۳۲۰۰}{۱۲۰۰ \times ۱۰^{-4}} = ۶/۱ \times ۱۰^5 Pa$$

$$P = \rho g h + P_0 \Rightarrow ۶/۱ \times ۱۰^5 = (۱۰۲۰ \times ۱۰ \times h) + ۱۰^5$$

$$\Rightarrow ۱۰۲۰۰ h = ۵/۱ \times ۱۰^5 \rightarrow h = ۵۰ m$$

گروه آموزشی ماز

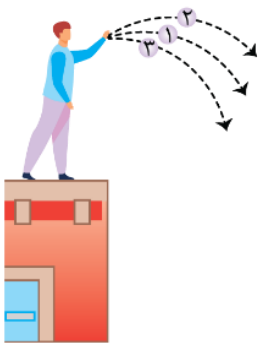
۷۳- در شکل زیر، سه توپ مشابه با تندی یکسان از بالای ساختمانی پرتاب می‌شوند. توپ (۱) در راستای افقی و دو توپ دیگر با زاویه‌های بالاتر و پایین‌تر از سطح افق پرتاب می‌شوند. برای این توپ‌ها، از لحظهٔ پرتاب تا رسیدن به زمین، کدام موارد درست است؟ (از مقاومت هوا صرف‌نظر شود.)

الف: تندی توپ‌های (۱) و (۳) پیوسته افزایش می‌یابند.

ب: تندی توپ‌های (۱) و (۲) ابتدا کاهش و سپس افزایش می‌یابند.

پ: هر سه توپ با تندی یکسان به زمین برخورد می‌کنند.

ت: زمان حرکت هر سه توپ با هم برابر است.



۱) «الف» و «پ» ۲) «الف» و «ت»

۳) «ب» و «ت» ۴) «ب» و «پ»

کنکور ۱۴۰۴
www.biomaze.ir
سنجش کلاد
www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshClouds

پاسخ: گزینهٔ ۱ (متوسط ـ مفهومی ـ ۱۰۰۳)

بررسی موارد:

عبارت «الف» درست ← ارتفاع توپ‌های «۱» و «۳» در طول حرکت کاهش می‌یابد، بنابراین انرژی پتانسیل گرانشی آن‌ها نیز کاهش یافته و طبق اصل پایستگی انرژی، انرژی جنبشی آن‌ها افزایش می‌یابد. با افزایش انرژی جنبشی، تندی آن‌ها نیز افزایش می‌یابد.

عبارت «ب» نادرست ← تندی توپ «۲» ابتدا کاهش، سپس افزایش می‌یابد ولی حرکت توپ «۱» دائماً تندشونده است.

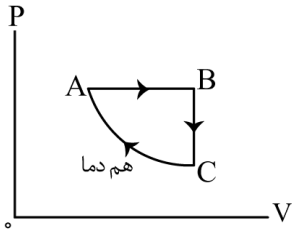
عبارت «پ» درست ← هر سه توپ با تندی یکسان به زمین برخورد می‌کنند، چراکه طبق اصل پایستگی انرژی مکانیکی، انرژی مکانیکی برای هر سه توپ باید از لحظهٔ پرتاب تا لحظهٔ برخورد به زمین یکسان باشد و به دلیل یکسان بودن انرژی جنبشی و پتانسیل اولیه برای هر سه توپ، تندی نهایی برخورد به زمین نیز یکسان است.

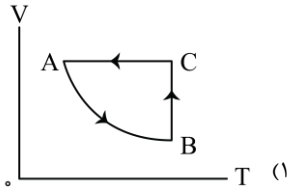
عبارت «ت» نادرست است ← $t_۲ > t_۱ > t_۳$

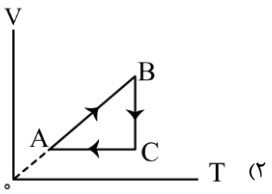
بنابراین عبارت‌های «الف» و «پ» درست هستند.

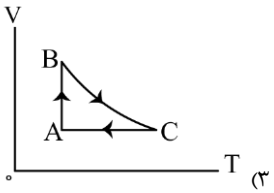
گروه آموزشی ماز

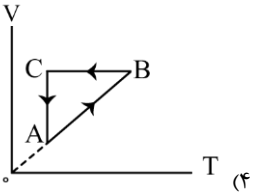
۷۴- نمودار $(P-V)$ مقداری گاز آرمانی مطابق شکل زیر است. نمودار $(V-T)$ی آن کدام است؟



۱)


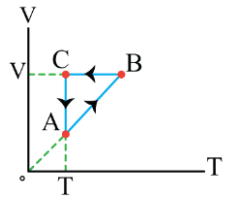
۲)


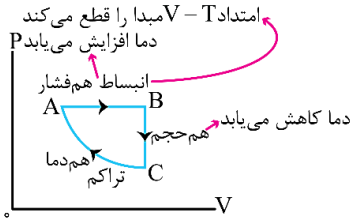
۳)


۴)


پاسخ: گزینهٔ ۴ (متوسط ـ نموداری ـ ۱۰۰۵)

به کمک نمودار $P-V$ هر فرایند، نمودار $V-T$ را رسم می‌کنیم:





گروه آموزشی ماز

۷۵- در کپسولی با حجم ثابت، گاز آرمانی با فشار پیمانه‌ای $۳\times۱۰^۵\,Pa$ و دمای $۴۷^\circ C$ قرار دارد. $\frac{۱}{۵}$ جرم گاز را خارج می‌کنیم و دمای گاز باقیمانده را به $۲۷^\circ C$ می‌رسانیم. فشار پیمانه‌ای گاز چند پاسکال می‌شود؟ $(P_۰ = ۱۰^۵\,Pa)$

۱) $۱۰^۵$ ۲) $۱/۵\times۱۰^۵$ ۳) ۲×۱۰^۵ ۴) $۲/۵\times۱۰^۵$

پاسخ: گزینهٔ ۳ (متوسط ـ محاسباتی ـ ۱۰۰۵)

قانون گازها

همان‌طور که دیدیم، معادله حالت به صورت $\frac{P_۲V_۲}{n_۲T_۲} = \frac{P_۱V_۱}{n_۱T_۱}$ می‌باشد. از طرفی n از حاصل تقسیم تعداد مولکول‌ها به عدد آووگادرو به‌دست می‌آید. بنابراین می‌توان به جای مقدار ماده (n)، تعداد مولکول‌ها (N) را در عبارت بالا جایگذاری کرد و به رابطه مقابل برای معادله حالت رسید:

$$\frac{P_۲V_۲}{N_۲T_۲} = \frac{P_۱V_۱}{N_۱T_۱}$$

www.biomaze.ir
کنکور ۱۴۰۴
www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshClouds

طبق معادلهٔ حالت داریم:

$$\frac{P.V}{nT}=R\Rightarrow\frac{P_1.V_1}{n_1.T_1}=\frac{P_2.V_2}{n_2.T_2}$$

$$\xrightarrow[n_2=n_1-\frac{1}{5}n_1=\frac{4}{5}n_1,T_2=27+273=300K]{P_1=(3+1)\times10^5,V_1=V_2=V,T_1=47+273=320K}\frac{4\times10^5\times\cancel{V}}{n_1\times320}=\frac{P_2\times\cancel{V}}{\frac{4}{5}n_1\times300}$$

$$\Rightarrow P_2=\frac{4}{5}\times300\times\frac{4\times10^5}{320}=3\times10^5\,Pa$$

حال فشار پیمانه‌ای را به‌دست می‌آوریم:

$$P_2=P_{g_2}+P_0\rightarrow3\times10^5=P_{g_2}+10^5\rightarrow P_{g_2}=2\times10^5\,Pa$$

کنکور ۱۴۰۴
www.biomaze.ir
www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshClouds

۷۶- اگر یون $^{A}X^{2-}$، در بیرونی‌ترین زیرلایهٔ خود، ۶ الکترون با عددهای کوانتومی $n=4$ و $l=1$ داشته باشد و تفاوت شمار نوترون‌ها و الکترون‌های آن برابر ۹ باشد، A کدام عدد است و عنصر X با کدام عنصر در جدول تناوبی هم‌گروه است؟

۱) ^{14}Si ،۷۷ ۲) ^{16}S ،۷۷ ۳) ^{14}Si ،۷۹ ۴) ^{16}S ،۷۹

پاسخ: گزینهٔ ۴ (متوسط ـ مفهومی ـ ۱۰۰۱)

آرایش الکترونی یون X^{2-} به صورت زیر است:

$$X^{2-}: 1s^2 2s^2 2p^6 3s^2 3p^6 3d^{10} 4s^2 4p^6$$

با توجه به آرایش الکترونی یون X^{2-}، آرایش الکترونی اتم X به صورت زیر خواهد بود:

$$X: 1s^2 2s^2 2p^6 3s^2 3p^6 3d^{10} 4s^2 4p^4$$

بر این اساس، عدد اتمی عنصر X برابر با ۳۴ بوده و عنصر مورد نظر معادل با $_{34}Se$ است. همانطور که میدانیم، سلنیم در دوره چهارم و گروه شانزدهم جدول تناوبی قرار گرفته و با عنصر گوگرد($_{16}S$) هم‌گروه است.

در قدم بعد، عدد جرمی عنصر X را محاسبه می‌کنیم. برای این منظور ابتدا شمار نوترون‌ها را به‌دست می‌آوریم. با توجه به داده‌های سوال، تفاوت تعداد الکترون و نوترون در یون X^{2-} برابر با ۹ است. از آنجا که تعداد الکترون‌ها در این یون برابر با ۳۶ است، داریم:

$$n - e = 9 \longrightarrow n - 36 = 9 \longrightarrow n = 45$$

پس شمار نوترون‌ها در اتم X برابر با ۴۵ و شمار پروتون‌ها در اتم این عنصر برابر با ۳۴ است. همانطور که می‌دانیم عدد جرمی معادل مجموع تعداد پروتون‌ها و نوترون‌های یک عنصر است. بر این اساس، داریم:

$$A = Z + n \longrightarrow 34 + 45 = 79$$

با توجه به محاسبات انجام‌شده، عدد جرمی عنصر X برابر با ۷۹ است.

گروه آموزشی ماز

۷۷- کدام مورد درست است؟

۱) تفاوت انرژی نور نشر شده از ترکیب‌های لیتیم‌دار با انرژی نور نشر شده از ترکیب‌های سدیم‌دار در شعله، مقدار ثابتی است.
۲) با استفاده از رنگ شعلهٔ پتاسیم نیترات، انرژی نور نشر شده از پتاسیم کلرید در شعله قابل پیش‌بینی نیست.
۳) با استفاده از رنگ شعلهٔ کلسیم سولفات، رنگ شعلهٔ مس (II) سولفات نیز قابل پیش‌بینی است.
۴) انرژی نور نشر شده از فلز سدیم در شعله، کم‌تر از انرژی نور نشر شده از گاز نئون در شعله است.

پاسخ: گزینهٔ ۱ (آسان ـ حفظی / مفهومی ـ ۱۰۰۱)

بسیاری از نمک‌ها، شعله رنگی دارند، به‌طوری که اگر مقداری از محلول نمک را با افشانه روی شعله بپاشیم، رنگ شعله تغییر می‌کند؛ رنگ شعله فلز لیتیم و ترکیب‌های آن به رنگ سرخ است، درحالی که رنگ شعله فلز سدیم و ترکیب‌های آن به رنگ زرد است. از آنجا که رنگ شعله ترکیبات این دو فلز به رنگ مشخص و ثابتی دیده می‌شود، می‌توان گفت که تفاوت انرژی نور نشر شده از ترکیب‌های لیتیم‌دار با انرژی نور نشر شده از ترکیب‌های سدیم‌دار در شعله، مقدار ثابتی است.

بررسی سایر گزینه‌ها:

۲ همانطور که می‌دانیم رنگ شعله یک نمک به عنصر فلزی موجود در آن بستگی دارد. از آنجا که عنصر فلزی هر دو ترکیب پتاسیم نیترات و پتاسیم کلرید مشترک است، پس با توجه به رنگ شعله پتاسیم نیترات، می‌توان انرژی نور نشر شده از پتاسیم کلرید در شعله را پیش‌بینی کرد.

۳ فلز موجود در ترکیب کلسیم سولفات، کلسیم و فلز موجود در ترکیب مس (II) سولفات، مس است. از آنجا که فلزهای این دو ترکیب با هم متفاوتند و با توجه به اینکه رنگ شعله یک نمک به عنصر فلزی موجود در آن بستگی دارد، نمی‌توان با استفاده از رنگ شعله کلسیم سولفات، رنگ شعله مس (II) سولفات را پیش‌بینی کرد.

۴ رنگ شعله فلز سدیم و ترکیبات آن، به رنگ زرد و رنگ شعله گاز نئون قرمز است. توجه داریم که نور قرمز نسبت به نور زرد از طول موج بیشتر و انرژی کمتری برخوردار است.

جدول زیر، رنگ شعله برخی فلزات و ترکیبات مختلف آن‌ها را نشان می‌دهد.

سبز	زرد	سرخ
(مس II نیترات)	سدیم نیترات	لیتیم نیترات
(مس II کلرید)	سدیم کلرید	لیتیم کلرید
(مس II سولفات)	سدیم سولفات	لیتیم سولفات
فلز مس	فلز سدیم	فلز لیتیم

گروه آموزشی ماز

کنکور ۱۴۰۴
www.biomaze.ir
سنجش کلاد
www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshClouds

۷۸- چند اتم زیر با از دست دادن ۳ الکترون به کاتیون پایداری با بار +۳ تبدیل می‌شود و چند کاتیون از میان آن‌ها، آرایش الکترونی اتم گاز نجیب را خواهد داشت؟

• $_{۱۳}A$ • $_{۱۹}D$ • $_{۲۱}E$ • $_{۲۶}X$ • $_{۳۰}Z$

۱) ۴، ۲ ۲) ۴، ۳ ۳) ۳، ۲ ۴) ۳، ۱

پاسخ: گزینهٔ ۳ (آسان ـ حفظی ـ ۱۰۰۱)

فلزات از لحاظ تشکیل کاتیون به دو دسته تقسیم می‌شوند.

۱) فلزاتی که تنها یک نوع کاتیون تشکیل می‌دهند:

فلزات قلیایی(گروه ۱)، با از دست دادن یک الکترون، کاتیون X^+ تشکیل داده و به آرایش گاز نجیب دوره قبلی خود می‌رسند. مانند Na^+، K^+ و ...

فلزات قلیایی خاکی (گروه ۲)، با از دست دادن دو الکترون، کاتیون X^{2+} تشکیل داده و به آرایش گاز نجیب دوره قبلی خود می‌رسند. مانند Mg^{2+}، Ca^{2+} و ...

فلزات گروه ۱۳ جدول تناوبی که با از دست‌دادن سه الکترون، کاتیون X^{3+} تشکیل می‌دهند. به طور کلی در دستهٔ p، آرایش الکترونی یون‌های حاصل از همه فلزهای آن به جز فلز آلومینیم، به آرایش گاز نجیب نمی‌رسد؛ زیرا در آرایش الکترونی فشردهٔ آن‌ها، بعد از نماد گاز نجیب، زیرلایه d نیز وجود دارد که از الکترون‌های ظرفیتی عناصر این دسته نیست. به جز آلومینیم، که هنوز زیرلایهٔ d خود را پر نکرده است، بقیهٔ فلزات این دسته دارای چنین شرایطی هستند. به عنوان مثال، به آرایش الکترونی فلز گالیم و یون آن، دقت کنید:

$$_{۳۱}Ga: [_{۱۸}Ar]۳d^{۱۰}۴s^{۲}۴p^{۱} \longrightarrow Ga^{۳+}: [_{۱۸}Ar]۳d^{۱۰}$$

بنابراین در گروه ۱۳، آلومینیم با تشکیل کاتیون به آرایش گاز نجیب نئون می‌رسد درحالی که گالیم به آرایش الکترونی گاز نجیب نمی‌رسد.

برخی فلزات واسطه مانند Sc^{3+}، Zn^{2+}، Y^{3+} و ...

توجه داریم که در میان فلزات واسطه، تنها آرایش الکترونی یون اسکاندیم (Sc^{3+})، ایتریم (Y^{3+}) و تیتانیم (Ti^{4+}) به آرایش گاز نجیب پیش از خود می‌رسد.

۲) فلزاتی که چند نوع کاتیون تشکیل می‌دهند.

برخی از فلزاتی که بیش از یک کاتیون تشکیل می‌دهند، در جدول زیر نشان داده شده‌اند:

نام عنصر	کروم	منگنز	آهن	کبالت	نیکل	مس	قلع	سرب
انواع کاتیون‌ها	Cr^{2+}	Mn^{2+}	Fe^{2+}	Co^{2+}	Ni^{2+}	Cu^{+}	Sn^{2+}	Pb^{2+}
	Cr^{3+}	Mn^{3+}	Fe^{3+}	Co^{3+}	Ni^{3+}	Cu^{2+}	Sn^{4+}	Pb^{4+}

در میان اتم‌های داده‌شده، $_{۱۳}A$، معرف اتم عنصر آلومینیم بوده که با تشکیل کاتیون Al^{3+}، به آرایش گاز نجیب نئون می‌رسد. $_{۱۹}D$، معرف اتم عنصر پتاسیم است که با تشکیل کاتیون K^+، به آرایش گاز نجیب آرگون می‌رسد. $_{۲۱}E$ معادل با عنصر اسکاندیم است که اولین عنصر واسطه بوده و در دوره چهارم و گروه سوم جدول دوره‌ای قرار گرفته است. این عنصر با تشکیل کاتیون Sc^{3+} به آرایش گاز نجیب آرگون می‌رسد. $_{۲۶}X$ معرف عنصر آهن است که کاتیون‌های Fe^{2+} و Fe^{3+} تشکیل می‌دهد اما به آرایش الکترونی گاز نجیب نمی‌رسد و نهایتا $_{۳۰}Z$، بیانگر عنصر روی است که کاتیون Zn^{2+} تشکیل می‌دهد اما به آرایش الکترونی گاز نجیب پیش از خود نمی‌رسد.

بر این اساس، در میان اتم‌های داده‌شده، سه اتم کاتیون سه بار مثبت تشکیل داده و از میان آن‌ها، دو کاتیون آرایش الکترونی گاز نجیب را خواهند داشت.

گروه آموزشی ماز

۷۹- کربن مونوکسید، فاقد کدام ویژگی است؟

۱) از راه خون و به واسطهٔ مسمومیت، سامانهٔ عصبی بدن انسان را فلج می‌کند.

۲) ترکیبی پایدارتر از کربن دی‌اکسید و گازی بسیار سمّی و کشنده است.

۳) گازی بی‌رنگ و سبک است و به سرعت در همهٔ فضای اتاق پخش می‌شود.

۴) میل ترکیبی آن با هموگلوبین، در مقایسه با اکسیژن، بیش از ۲۰۰ برابر است.

پاسخ: گزینهٔ ۲ (آسان ـ حفظی ـ ۱۰۰۲)

سوختن واکنشی شیمیایی است که در آن، یک ماده با اکسیژن به سرعت واکنش داده و بخشی از انرژی شیمیایی آن، به صورت نور و گرما آزاد می‌شود. در واکنش سوختن مواد آلی، اگر گاز اکسیژن به مقدار کافی باشد، سوختن کامل انجام می‌شود و کربن دی‌اکسید و بخار آب تولید می‌شود. اما اگر مقدار اکسیژن کم باشد، سوختن ناقص انجام شده و گاز کربن مونوکسید به همراه سایر فراورده‌ها تولید خواهد شد. توجه داریم که کربن مونوکسید نسبت به کربن دی‌اکسید ناپایدارتر است، به طوری که کربن مونوکسید تولید شده در واکنش سوختن ناقص، در حضور اکسیژن و در شرایط مناسب دوباره می‌سوزد و به $CO_۲$ تبدیل می‌شود.

کنکور ۱۴۰۴
www.biomaze.ir
سنجش کلاد
www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshClouds

بررسی سایر گزینه‌ها:

۱ میل ترکیبی هموگلوبین با گاز کربن مونوکسید نسبت به گاز اکسیژن بیشتر است. بنابراین مولکول‌های کربن مونوکسید با اتصال به هموگلوبین، مانع از رسیدن اکسیژن به بافت‌های بدن می‌شوند. این ویژگی باعث مسمومیت شده و سامانه عصبی را فلج می‌کند و قدرت هرگونه اقدامی را از فرد مسموم میگیرد و باعث مرگ او می‌شود.

۳ کربن مونوکسید، گازی بی‌رنگ، بی‌بو و بسیار سمی است. چگالی این گاز کمتر از هوا و قابلیت انتشار آن در محیط بسیار زیاد است؛ به‌طوری که به سرعت در فضای اتاق پخش می‌شود.

۴ میل ترکیبی هموگلوبین خون با کربن مونوکسید بسیار زیاد و بیش از ۲۰۰ برابر گاز اکسیژن است.

گروه آموزشی ماز

۸۰- کدام مورد درست است؟

۱) یک معادلهٔ موازنه‌شده، شمار مول‌ها یا مولکول‌های موردنیاز از واکنش‌دهنده(ها) برای انجام یک واکنش را نشان می‌دهد.

۲) مطابق با قانون پایستگی جرم، شمار مولکول‌ها در دو سوی معادلهٔ یک واکنش شیمیایی، برابر است.

۳) معادلهٔ واکنش: $A_2(g)+\frac{1}{2}X_2(g)\rightarrow A_2X(g)$، یک معادلهٔ موازنه‌شده به شمار می‌آید.

۴) قهوه‌ای شدن شکر سفید بر اثر گرما، نمونه‌ای از تغییر فیزیکی به شمار می‌آید.

پاسخ: گزینهٔ ۱ (آسان ـ حفظی / مفهومی ـ ۱۰۰۲)

طبق قانون پایستگی جرم، در یک واکنش شیمیایی نه اتمی به وجود می‌آید و نه اتمی از بین می‌رود؛ بلکه همان اتم‌ها با شیوه‌های دیگری به هم متصل می‌شوند. به دیگر سخن، شمار کل اتم‌ها در یک واکنش شیمیایی ثابت است. بر این اساس، می‌توان گفت:

ـ در یک واکنش شیمیایی، مجموع تعداد اتم‌ها در ساختار مواد واکنش‌دهنده با مجموع تعداد اتم‌ها در ساختار مواد فراورده برابر است.

ـ در هر واکنش شیمیایی، تعداد اتم‌های هر عنصر در دو طرف یک معادله شیمیایی یکسان است.

ـ جرم مواد واکنش‌دهنده با جرم فراورده‌های تولید شده برابر خواهد بود.

در یک معادله موازنه‌شده، شمار مول‌ها یا مولکول‌های مورد نیاز از واکنش‌دهنده‌ها برای انجام یک واکنش، مشخص می‌شود.

بررسی سایر گزینه‌ها:

۲ توجه داریم که بر اساس قانون پایستگی جرم، نمی‌توان گفت که الزاما شمار مولکول‌ها در دو سوی معادلهٔ یک واکنش شیمیایی برابر است. به عنوان مثال، معادله موازنه‌شده سوختن متانول به صورت زیر است:

$$2CH_3OH(l)+3O_2(g)\longrightarrow 2CO_2(g)+4H_2O(l)$$

با توجه به معادله موازنه‌شدهٔ واکنش، شمار مولکول‌ها در سمت واکنش‌دهنده‌ها برابر با ۵ و در سمت فراورده‌ها برابر با ۶ است.

۳ در یک معادله موازنه‌شده، ضریب مواد شرکت‌کننده در واکنش باید کوچکترین عدد صحیح ممکن باشد و به کار بردن ضرایب کسری در معادله موازنه‌شده یک واکنش، قابل قبول نیست.

۴ تغییر شیمیایی می‌تواند با تغییر رنگ، مزه، بو و یا آزادسازی گاز، تشکیل رسوب و گاهی ایجاد نور و صدا همراه باشد. هنگامی که به شکر گرما داده می‌شود، دچار تغییر شیمیایی شده و رنگ آن، تغییر می‌کند.

گروه آموزشی ماز

۸۱- اگر x گرم $(NH_4)_2Cr_2O_7$ بر اثر گرما تجزیه شود، مجموع جرم گازهای تشکیل شده، با مجموع جرم گازهای تشکیل شده از تجزیهٔ ۲۵/۲ گرم سدیم هیدروژن کربنات برابر می‌شود. x به‌تقریب برابر چند گرم است؟

$(H=1, C=12, N=14, O=16, Na=23, Cr=52 : g\cdot mol^{-1})$

$$(NH_4)_2Cr_2O_7(s)\xrightarrow{\Delta}N_2(g)+Cr_2O_3(s)+H_2O(g)$$

(معادلهٔ واکنش‌ها موازنه شود.)

$$NaHCO_3(s)\xrightarrow{\Delta}Na_2CO_3(s)+CO_2(g)+H_2O(g)$$

۱) ۹/۳ ۲) ۱۱/۷ ۳) ۱۸/۶ ۴) ۲۳/۴

پاسخ: گزینهٔ ۴ (سخت ـ مسأله ـ ۱۰۰۲)

در قدم اول، مجموع جرم گازهای تشکیل‌شده از تجزیه ۲۵/۲ گرم سدیم هیدروژن کربنات را محاسبه می‌کنیم. معادله موازنه‌شده این واکنش به صورت زیر است:

$$2NaHCO_3(s)\xrightarrow{\Delta}Na_2CO_3(s)+CO_2(g)+H_2O(g)$$

کنکور ۱۴۰۴
www.biomaze.ir
سنجش کلاد
www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshClouds

طبق معادله موازنه‌شده، به ازای مصرف دو مول سدیم هیدروژن کربنات، یک مول گاز کربن دی‌اکسید(معادل با ۴۴ گرم) و یک مول بخارآب(معادل با ۱۸ گرم) تولید می‌شود. بنابراین می‌توان گفت مجموع جرم گازهای تشکیل‌شده از مصرف دو مول سدیم هیدروژن کربنات برابر با ۶۲ گرم است. با این حساب، مجموع جرم گازهای تشکیل‌شده از تجزیه ۲۵/۲ گرم سدیم هیدروژن کربنات برابر است با:

$$?\,g\ gas = ۲۵/۲\ g\ NaHCO_۳ \times \frac{۱\ mol\ NaHCO_۳}{۸۴\ g\ NaHCO_۳} \times \frac{۶۲\ g\ gas}{۲\ mol\ NaHCO_۳} = ۹/۳\ g$$

بنابراین از تجزیه ۲۵/۲ گرم سدیم هیدروژن کربنات، ۹/۳ گرم گاز تشکیل شده است. پس می‌توان گفت که مجموع جرم گازهای تشکیل‌شده از تجزیه x گرم آمونیوم دی‌کرومات($(NH_۴)_۲Cr_۲O_۷$) نیز برابر با ۹/۳ گرم است. معادله موازنه‌شده واکنش تجزیه این ماده به صورت زیر است:

$$(NH_۴)_۲Cr_۲O_۷(s) \xrightarrow{\Delta} N_۲(g) + Cr_۲O_۳(s) + ۴H_۲O(g)$$

طبق معادله موازنه‌شده، به ازای مصرف هر مول آمونیوم دی‌کرومات، ۱ مول گاز نیتروژن(معادل با ۲۸ گرم) و ۴ مول بخارآب(معادل با ۷۲ گرم) تولید می‌شود. پس می‌توان گفت به ازای تولید ۱۰۰ گرم گاز، یک مول آمونیوم دی‌کرومات مصرف می‌شود.

اکنون مقدار آمونیوم دی‌کرومات مصرف‌شده به ازای تولید ۹/۳ گرم گاز را محاسبه می‌کنیم:

$$?\,g\ (NH_۴)_۲Cr_۲O_۷ = ۹/۳\ g\ gas \times \frac{۱\ mol\ (NH_۴)_۲Cr_۲O_۷}{۱۰۰\ g\ gas} \times \frac{۲۵۲\ g\ (NH_۴)_۲Cr_۲O_۷}{۱\ mol\ (NH_۴)_۲Cr_۲O_۷} \simeq ۲۳/۴\ g$$

بنابراین مقدار آمونیوم دی‌کرومات($(NH_۴)_۲Cr_۲O_۷$) مصرف‌شده به تقریب برابر با ۲۳/۴ گرم است.

گروه آموزشی ماز

۸۲- با توجه به نقاط جوش مواد $Cl_۲$، $Br_۲$، $I_۲$، HF، HCl و HBr در فشار ۱atm، کدام مورد درست است؟

۱) میزان گشتاور دوقطبی مولکول‌های جورهسته، مهم‌ترین عامل تعیین کنندهٔ روند تغییر نقطهٔ جوش در آن‌هاست.
۲) عامل تعیین روند تغییر نقطهٔ جوش در مولکول‌های قطبی و عامل تعیین این روند در مولکول‌های ناقطبی، متفاوت است.
۳) روند تغییر نقطهٔ جوش در مواد با مولکول‌های ناقطبی، مشابه روند تغییر نقطهٔ جوش در مواد با مولکول‌های قطبی است.
۴) حالت فیزیکی دست‌کم دو ماده در دمای اتاق، مایع است.

پاسخ: گزینهٔ ۲ (متوسط ـ حفظی / مفهومی ـ ۱۰۰۳)

ابتدا درسنامه زیر را بادقت بخوانید.

مولکول‌های ناقطبی شرایط زیر را دارند:

ـ مولکول‌های دارای دو اتم یکسان مانند $O_۲$ و $Cl_۲$. به این مولکول‌ها، مولکول‌های دو اتمی جورهسته گفته می‌شود.

ـ مولکول‌هایی با اتم‌های مشابه پیرامون اتم مرکزی و فاقد الکترون ناپیوندی روی اتم مرکزی مانند $CO_۲$، $SO_۳$ و $CH_۴$.

مولکول‌های قطبی دارای یکی از شرایط زیر هستند:

ـ مولکول‌های دواتمی که شامل دو اتم متفاوت هستند مانند HF و CO. به این مولکول‌ها، مولکول‌های دواتمی ناجورهسته گفته می‌شود.

ـ مولکول‌هایی که دارای اتم‌های متفاوت پیرامون اتم مرکزی خود هستند مانند $CHCl_۳$.

ـ مولکول‌هایی که دارای اتم‌های مشابه پیرامون اتم مرکزی خود هستند اما بر روی اتم مرکزی، زوج الکترون ناپیوندی قرار دارد. مانند $SO_۲$ و $NH_۳$.

عوامل موثر بر نیروی بین مولکولی به شرح زیر هستند:

۱) قطبیت مولکول: با افزایش قطبیت مولکول، میزان نیروهای بین مولکولی افزایش پیدا می‌کند. میزان قطبیت مولکول‌ها را با کمیتی به نام گشتاور دوقطبی مقایسه می‌کنیم.

نکته:

ـ بین دو ماده قطبی و ناقطبی با جرم مولی نزدیک به هم، ماده قطبی از نیروی بین مولکولی بیشتری برخوردار است. به عنوان مثال CO و $N_۲$ جرم مولی مشابهی دارند. اما CO به علت قطبی بودن از نیروی بین مولکولی بیشتری برخوردار است.

ـ در مقایسه گشتاور دوقطبی دو ماده قطبی، ماده‌ای که در ساختار خود دارای پیوند هیدروژنی باشد، نسبت به ماده دیگر گشتاور دوقطبی بالاتری دارد. به عنوان مثال، $H_۲O$ و $H_۲S$ قطبی هستند اما $H_۲O$ با وجود جرم مولی کمتر، به علت داشتن پیوند هیدروژنی در ساختار خود، از نیروی بین مولکولی بیشتری برخوردار است به طوری که نقطه جوش $H_۲O$ معادل با ۱۰۰ درجه سانتی‌گراد و نقطه جوش $H_۲S$ برابر با ۶۰- درجه سانتی گراد است.

۲) جرم و حجم مولکول: با افزایش جرم و حجم مولکول، نیروی بین مولکولی افزایش می‌یابد.

نکته:

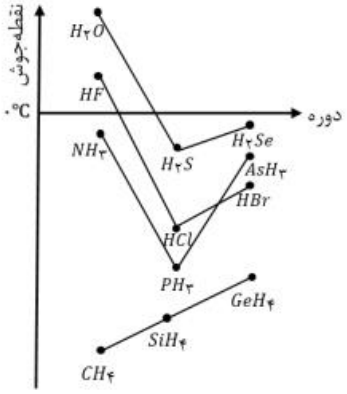
ـ در بین دو ماده ناقطبی، ماده‌ای که از جرم و حجم بیشتری برخوردار است، میزان نیروی بین مولکولی بیشتری دارد. به عنوان مثال در میان $F_۲$ و $Cl_۲$، گاز کلر به علت جرم و حجم بیشتر نسبت به فلوئور از نیروی بین مولکولی بیشتری برخوردار است.

ـ هرچه نقطه جوش یک گاز بیشتر باشد، آن گاز راحت‌تر به مایع تبدیل می‌شود. به دیگر سخن، هرچه نقطه جوش یک گاز بالاتر باشد، مایع کردن آن در دمای بالاتری انجام می‌شود.

کنکور ۱۴۰۴
www.biomaze.ir
سنجش کلاد
www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshClouds

همانطور که می‌دانیم، با افزایش نیروهای بین مولکولی در یک مولکول، نقطه جوش آن مولکول افزایش می‌یابد. در مولکول‌های قطبی، مولکولی که در ساختار خود دارای پیوند هیدروژنی باشد، حتی با وجود جرم و حجم کمتر، از نیروهای بین مولکولی قوی‌تری برخوردار است و نقطه جوش آن بیشتر است. اما در میان مواد ناقطبی به طور قطع می‌توان گفت که ماده‌ای که دارای جرم و حجم بیشتری است، از نیروهای بین مولکولی قوی‌تری برخوردار است.

بررسی سایر گزینه‌ها:



۱ مولکول‌های جورهسته ناقطبی بوده و گشتاور دوقطبی این مولکول‌ها برابر با صفر است. مهم‌ترین عامل در تعیین نقطه جوش مواد ناقطبی، جرم و حجم این مولکول‌ها است.

۳ در مواد ناقطبی با افزایش جرم و حجم مولکول‌ها، نیروی بین مولکولی نیز افزایش می‌یابد. اما در مولکول‌های قطبی اگر ماده‌ای در ساختار خود دارای پیوند هیدروژنی باشد، نسبت به ماده‌ای که فاقد پیوند هیدروژنی در ساختار خود است، نیروهای بین مولکولی بیشتری دارد حتی اگر جرم و حجم کمتری داشته باشد. بنابراین روند تغییر نقطه جوش در مولکول‌های قطبی و ناقطبی را نمی‌توان مشابه هم دانست. نمودار زیر، نقطه جوش ترکیبات هیدروژن دار گروه ۱۴ تا ۱۷ را نشان می‌دهد.

۴ در میان مواد داده‌شده، تنها برم در دمای اتاق به حالت مایع وجود دارد.

گروه آموزشی ماز

۸۳- اگر ۲۰۰ میلی‌لیتر محلول NaClO، با غلظت ۱۸۶۲۵ppm موجود باشد، چند میلی‌لیتر محلول ۰/۸ مولار HCl برای واکنش کامل با آن (مطابق معادلهٔ زیر) لازم است؟ (چگالی محلول برابر با چگالی آب در نظر گرفته شود، $O=16, Na=23, Cl=35/5 : g\cdot mol^{-1}$)

$$HCl(aq)+NaClO(aq)\rightarrow NaCl(aq)+Cl_2(g)+H_2O(l)$$

۱) ۷۵ ۲) ۳۷/۵ ۳) ۱۲۵ ۴) ۶۲/۵

پاسخ: گزینهٔ ۳ (متوسط ـ مسأله ـ ۱۰۰۳)

ابتدا جرم $NaClO$ موجود در محلول را محاسبه می‌کنیم. با توجه به اینکه چگالی محلول برابر با ۱ گرم بر میلی‌لیتر است، می‌توان گفت جرم محلول برابر با ۲۰۰ گرم است. بر این اساس، داریم:

$$ppm \text{ غلظت} = \frac{\text{جرم حل‌شونده}}{\text{جرم محلول}} \times ۱۰^۶ \Rightarrow ۱۸۶۲۵ = \frac{x\ g}{۲۰۰\ g} \times ۱۰^۶ \Rightarrow x = ۳/۷۲۵\ g\ NaClO$$

حال باید ببینیم ۳/۷۲۵ گرم $NaClO$ با چند میلی‌لیتر محلول ۰/۸ مولار هیدروکلریک اسید واکنش می‌دهد. معادله موازنه‌شده واکنش به صورت زیر است:

$$۲HCl(aq) + NaClO(aq) \longrightarrow NaCl(aq) + Cl_۲(g) + H_۲O(l)$$

طبق معادله موازنه‌شدهٔ واکنش، هر مول $NaClO$ با دو مول HCl واکنش می‌دهد. بر این اساس، داریم:

$$?\ mL\ HCl = ۳/۷۲۵\ g\ NaClO \times \frac{۱\ mol\ NaClO}{۷۴/۵\ g\ NaClO} \times \frac{۲\ mol\ HCl}{۱\ mol\ NaClO} \times \frac{۱\ L\ HCl}{۰/۸\ mol\ HCl} \times \frac{۱۰۰۰\ mL\ HCl}{۱\ L\ HCl} = ۱۲۵\ mL$$

بنابراین ۱۲۵ میلی‌لیتر از محلول ۰/۸ مولار هیدروکلریک اسید برای واکنش کامل با این محلول لازم است.

گروه آموزشی ماز

۸۴- چند مورد از موارد زیر، دربارهٔ عنصرهای جدول تناوبی، نادرست است؟

- **در دستهٔ p، همهٔ عنصرهای هم‌دوره با یک عنصر فلزی و دارای شعاع اتمی کوچک‌تر از آن، به یقین نافلزند.**
- **اگر M، یک عنصر گازی با فعالیت شیمیایی زیاد باشد، سایر عنصرهای هم‌گروه آن، به یقین مایع یا جامدند.**
- **شمار عنصرهای فلزی دستهٔ s، ۳ برابر شمار عنصرهای گازی‌شکل شرکت‌کننده در واکنش‌های شیمیایی در کل جدول است.**
- **تفاوت عدد اتمی آخرین عنصر فلزی از دورهٔ چهارم با عدد اتمی عنصر Q، ۲۴ برابر با عدد اتمی نخستین نافلز دورهٔ دوم است.**

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

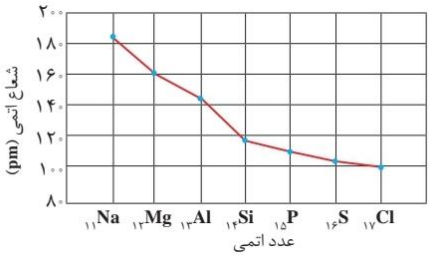
پاسخ: گزینهٔ ۴ (سخت ـ مفهومی ـ ۱۰۰۱)

همه عبارت‌های داده‌شده نادرست هستند.

کنکور ۱۴۰۴
www.biomaze.ir
سنجش کلاد
www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshClouds

بررسی موارد:

مورد اول: در دسته p، عنصرهای فلزی، شبه‌فلزی و نافلزی وجود دارد. به عنوان مثال در میان عناصر دسته p دوره سوم جدول تناوبی، فلز آلومینیم بیشترین شعاع اتمی را دارد. در این دوره، پس از آلومینیم، سیلیسیم بیشترین شعاع را در میان عناصر دسته p دارد که یک شبه فلز است. نمودار زیر روند تغییرات شعاع اتمی عناصر دوره سوم را نشان می‌دهد:



مورد دوم: فلوئور یک عنصر گازی با فعالیت شیمیایی زیاد است و در گروه هفدهم جدول تناوبی گرفته است. در این گروه عناصر دیگری مانند کلر، برم و ید نیز وجود دارد. همانطور که می‌دانیم کلر نیز مانند فلوئور به حالت گازی وجود دارد. گاز کلر خاصیت رنگ‌بری و گندزدایی دارد و در دمای اتاق، به آرامی با گاز هیدروژن واکنش می‌دهد.

مورد سوم: دستهٔ s، شامل ۱۴ عنصر است که از این چهارده عنصر، هیدروژن و هلیم نافلز بوده و ۱۲ عنصر دیگر فلزی هستند و در گروه اول و دوم جدول تناوبی قرار گرفته‌اند. درمیان عناصر گازی جدول تناوبی، گازهای نجیب واکنش‌پذیری بسیار ناچیزی داشته و در واکنش‌های شیمیایی شرکت نمی‌کنند. بنابراین می‌توان گفت که عناصر فلوئور، کلر، اکسیژن، نیتروژن و هیدروژن از جمله عناصر گازی بوده که در واکنش‌های شیمیایی شرکت می‌کنند. بر این اساس شمار عنصرهای گازی شکل جدول تناوبی که در واکنش‌های شیمیایی شرکت می‌کنند برابر با ۵ و بیشتر از $\frac{۱}{۳}$ عناصر فلزی دسته s است.

مورد چهارم: آخرین عنصر فلزی دوره چهارم، گالیم با عدد اتمی ۳۱ بوده که عدد اتمی آن نسبت به $_{۲۴}Q$، ۷ عدد بیشتر است. همانطور که می‌دانیم عدد اتمی عنصر نیتروژن برابر با ۷ است درحالی که نخستین نافلز دورهٔ دوم جدول تناوبی، کربن است که عدد اتمی آن برابر با ۶ است.

گروه آموزشی ماز

۸۵- اگر از واکنش محلول دو ماده با مقدار بیش از ۰/۱ گرم در ۱۰۰ گرم آب از هرکدام، در شرایط مناسب، نمک نقره کلرید تشکیل شود، کدام مورد درست است؟

۱) غلظت این نمک در آب، تنها می‌تواند به غلظت یکی از واکنش‌دهنده‌ها در آب (در آغاز واکنش) نزدیک باشد.
۲) حالت فیزیکی فراوردهٔ موردنظر، مانند حالت فیزیکی واکنش‌دهنده‌ها (در آغاز واکنش) است.
۳) با انجام واکنش، یک محلول سیرنشده از فراوردهٔ موردنظر تشکیل می‌شود.
۴) انجام این واکنش، نمونه‌ای از تبدیل یک محلول به یک مخلوط است.

پاسخ: گزینهٔ ۴ (متوسط ـ مفهومی ـ ۱۰۰۳)

ابتدا به درسنامه زیر دقت کنید.

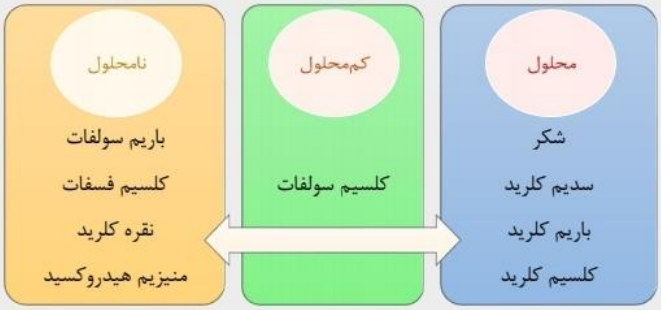
شیمی‌دان‌ها مواد حل‌شوندهٔ جامد را بر اساس مقدار انحلال‌پذیری آن‌ها در آب و در دمای اتاق، به ۳ دسته تقسیم می‌کنند:

ـ مواد محلول در آب: موادی که انحلال‌پذیری آن‌ها بیشتر از ۱ گرم حل‌شونده در ۱۰۰ گرم آب است.

ـ مواد کم‌محلول در آب: موادی که انحلال‌پذیری آن‌ها بین ۰/۰۱ گرم تا ۱ گرم حل‌شونده در ۱۰۰ گرم آب است.

ـ مواد نامحلول در آب: موادی که انحلال‌پذیری آن‌ها کمتر از ۰/۰۱ گرم حل‌شونده در ۱۰۰ گرم آب است.

در تصویر زیر، انحلال‌پذیری چند مورد از ترکیب‌های مختلف در آب آمده است:



به طور کلی، اکثر ترکیب‌های یونی که در ساختار خود یون آمونیوم(NH_4^+)، یون نیترات(NO_3^-) و کاتیون‌های فلزهای گروه اول جدول دوره‌ای را دارند، در آب محلول هستند.

کنکور ۱۴۰۴
www.biomaze.ir
www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshClouds

موادی که دارای انحلال‌پذیری بیشتر از ۰/۱ گرم در ۱۰۰ گرم آب هستند، می‌توانند جزء مواد محلول یا کم‌محلول باشند درحالی که نقره کلرید یک نمک نامحلول است و با انجام این واکنش به صورت رسوب تولید خواهد شد. بنابراین می‌توان گفت که انجام این واکنش، نمونه‌ای از تبدیل یک محلول به یک مخلوط است.

بررسی سایر گزینه‌ها:

۱ نقره کلرید در آب نامحلول بوده و انحلال‌پذیری آن از ۰/۰۱ گرم در ۱۰۰ گرم آب کمتر است. درحالی که غلظت مواد واکنش‌دهنده بیشتر از ۰/۱ گرم در ۱۰۰ گرم آب است.

۲ همانطور که گفته شد، طی این واکنش، رسوب نقره کلرید تولید خواهد شد. رسوب یک نمونه از حالت فیزیکی جامد(s) به شمار می‌رود، در حالی که حالت فیزیکی مواد واکنش‌دهنده، محلول در آب (aq) است.

۳ فراورده مورد نظر(نقره کلرید) در آب نامحلول بوده و به حالت رسوب تولید می‌شود.

گروه آموزشی ماز

۸۶- مجموع ضرایب استوکیومتری مواد در معادلهٔ واکنش زیر، پس از موازنه کدام است و اگر با مصرف ۸۹/۲۵ گرم قلع در این واکنش، ۱۲۴/۲ گرم گاز نیتروژن دی‌اکسید تشکیل شود، بازده درصدی واکنش کدام است؟

$\left(N=14, O=16, Sn=119 : g\cdot mol^{-1}\right)$

$$HNO_3(aq)+HCl(aq)+Sn(s)\rightarrow H_2SnCl_6(aq)+NO_2(g)+H_2O(l)$$

۱) ۲۰، ۸۰ ۲) ۲۰، ۹۰ ۳) ۱۸، ۸۰ ۴) ۱۸، ۹۰

پاسخ: گزینهٔ ۲ (متوسط ـ مسأله ـ ۱۱۰۱)

معادله موازنه‌شدهٔ واکنش به صورت زیر است:

$$4HNO_3(aq)+6HCl(aq)+Sn(s)\longrightarrow H_2SnCl_6(aq)+4NO_2(g)+4H_2O(l)$$

بنابراین مجموع ضرایب مواد شرکت‌کننده در واکنش برابر با ۲۰ است.

بسیاری از واکنش‌ها با آن بازده یا راندمانی(R) که ما می‌خواهیم پیشرفت نمی‌کنند و معمولا مقدار فراورده‌های به دست آمده در عمل، کمتر از مقدار فراورده‌هایی است که ما انتظار داریم تولید شوند. به همین دلیل، برای پیشرفت واکنش از کمیتی به نام بازده درصدی استفاده می‌شود. به مقدار فراوردهٔ مورد انتظار در هر واکنش، مقدار نظری می‌گویند که از محاسبات استوکیومتری بدست می‌آید و به مقدار فراورده‌ای که در عمل تولید می‌شود، مقدار عملی می‌گویند. فرمول بازدهٔ درصدی یک واکنش به صورت زیر است:

$$\text{بازده درصدی واکنش } (R) = \frac{\text{مقدار عملی}}{\text{مقدار نظری}} \times ۱۰۰$$

در اغلب واکنش‌های شیمیایی، مقدار فراورده‌ای که در عمل به‌دست می‌آید(مقدار عملی)، کمتر از مقدار نظری است. در نتیجه بازده اغلب واکنش‌های شیمیایی کمتر از ۱۰۰ درصد است. برای حل سوالات بازده درصدی به روش کسر تبدیل، اگر از واکنش‌دهنده به فراورده رسیدیم، واکنش را در کسر ($\frac{\text{بازده درصدی}}{۱۰۰}$) ضرب کرده و اگر از فراورده به واکنش‌دهنده رسیدیم، واکنش را در کسر($\frac{۱۰۰}{\text{بازده درصدی}}$) ضرب می‌کنیم.

طبق معادله موازنه‌شده، به ازای مصرف هر مول قلع، چهار مول گاز نیتروژن دی‌اکسید تولید می‌شود. بر این اساس، داریم:

$$\text{بازده درصدی؟} = ۸۹/۲۵\ g\ Sn \times \frac{۱\ mol\ Sn}{۱۱۹\ g\ Sn} \times \frac{۴\ mol\ NO_2}{۱\ mol\ Sn} \times \frac{۴۶\ g\ NO_2}{۱\ mol\ NO_2} \times \frac{X}{۱۰۰} = ۱۲۴/۲\ g \longrightarrow X = ۹۰٪$$

به منظور محاسبه بازده درصدی واکنش می‌توانیم از روش تناسب نیز کمک بگیریم:

$$\left[\frac{Sn\ \text{جرم} \times \text{بازده درصدی}}{\text{جرم مولی} \times \text{ضریب}}\right] = \left[\frac{NO_2\ \text{جرم}}{\text{جرم مولی} \times \text{ضریب}}\right] \Longrightarrow \frac{۸۹/۲۵\ g\ Sn \times X}{۱ \times ۱۱۹\ g\ Sn} = \frac{۱۲۴/۲\ g\ NO_2}{۴ \times ۴۶\ g\ NO_2} \longrightarrow X = ۹۰٪$$

بر این اساس، بازده درصدی واکنش معادل با ۹۰ درصد است.

گروه آموزشی ماز

۸۷- چند مورد زیر، نادرست است؟

- **بخش اعظم گونه‌های فلزی موجود در طبیعت در قاره‌ها تجمع یافته‌اند.**
- **واکنش ترمیت، واکنشی به شدت گرماگیر است که یکی از فراورده‌های آن، آهن مذاب است.**
- **برای استخراج آهن از سنگ معدن آن در مقیاس آزمایشگاهی، نمی‌توان از سدیم استفاده کرد.**
- **استفاده از نقره به جای آلومینیم در واکنش ترمیت، می‌تواند مقدار فراورده(ها) را افزایش دهد.**

۱) ۴ ۲) ۳ ۳) ۲ ۴) ۱

کنکور ۱۴۰۴
www.biomaze.ir
سنجش کلاد
www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshClouds

پاسخ: گزینهٔ ۱ (متوسط ـ حفظی / مفهومی ـ ۱۱۰۱)

تمامی عبارت‌های داده‌شده نادرست هستند.

بررسی موارد:

• غلظت بیشتر گونه‌های فلزی در کف اقیانوس نسبت به ذخایر زمینی آن بیشتر است. این موضوع نوید این را می‌دهد که اکتشاف و بهره‌برداری از منابع شیمیایی بستر دریا به یکی از صنایع کلیدی و تاثیرگذار در روابط کشورها تبدیل شود.

• واکنش ترمیت واکنشی است که در آن، فلز آلومینیم با آهن(III) اکسید واکنش داده و فلز آهن و آلومینیم اکسید تولید می‌شود. معادله موازنه‌شدهٔ واکنش به صورت زیر است:

$$۲Al(s) + Fe_۲O_۳(s) \longrightarrow Al_۲O_۳(s) + ۲Fe(l)$$

این واکنش، یک واکنش گرماده بوده و گرمای تولید شده به قدری بالا است که آهن به صورت مذاب تولید می‌شود.

• واکنش‌پذیری فلز سدیم نسبت به آهن بیشتر است و می‌تواند این عنصر را از ترکیبات آن جدا کند. البته توجه داریم که استفاده از سدیم برای استخراج آهن از سنگ معدن، در صنعت صرفه اقتصادی ندارد و به جای آن، از کربن برای استخراج آهن از سنگ معدن استفاده می‌شود.

• واکنش‌پذیری عنصر آلومینیم نسبت به آهن بیشتر بوده و می‌تواند آهن را از ترکیبات آن جدا کند. به عنوان مثال در واکنش ترمیت، عنصر آلومینیم می‌تواند آهن را از آهن(III) اکسید جدا کند، درحالی که واکنش‌پذیری نقره نسبت به آهن کمتر بوده و جایگزینی آن با فلز آلومینیم باعث می‌شود که واکنش انجام نشود.

گروه آموزشی ماز

۸۸- با توجه به واکنش گرماشیمیایی گازی: $۲NH_۳ + ۳Cl_۲ \rightarrow N_۲ + ۶HCl + ۴۴۰kJ$، آنتالپی پیوند $N-H$ به‌تقریب برابر چند کیلوژول بر مول است؟ (آنتالپی پیوندهای $Cl-Cl$ و $H-Cl$ به‌ترتیب برابر ۲۴۰ و ۴۳۰ کیلوژول بر مول و آنتالپی پیوند $N\equiv N$، ۲/۴ برابر میانگین آنتالپی پیوند $N-H$ در نظر گرفته شود.)

۱) ۱۱۸۵ ۲) ۹۴۵ ۳) ۵۳۹ ۴) ۳۹۴

پاسخ: گزینهٔ ۴ (متوسط ـ مسأله ـ ۱۱۰۲)

معادله موازنه‌شده واکنش به صورت زیر است:

$$۲NH_۳(g) + ۳Cl_۲(g) \longrightarrow N_۲(g) + ۶HCl(g)$$

برای تعیین آنتالپی یک واکنش از طریق آنتالپی پیوند از رابطه زیر استفاده می‌کنیم:

$$\text{واکنش } \Delta H = \left[\text{مجموع آنتالپی پیوندها در مواد واکنش‌دهنده}\right] - \left[\text{مجموع آنتالپی پیوندها در مواد فراورده}\right]$$

طبق این رابطه در صورتی که ΔH بزرگتر از صفر باشد، واکنش گرماگیر بوده و Q در سمت واکنش‌دهنده‌ها قرار می‌گیرد، در حالی که اگر ΔH کوچکتر از صفر باشد، واکنش گرماده بوده و Q در سمت فراورده‌ها قرار می‌گیرد.

با توجه به اینکه در این واکنش Q در سمت فراورده‌ها قرار دارد، واکنش گرماده بوده و ΔH آن کوچکتر از صفر است. از این رو ΔH واکنش معادل با $-۴۴۰\ kJ$ است. اگر آنتالپی پیوند $N-H$ را برابر با x فرض کنیم، آنتالپی پیوند $N \equiv N$ معادل با $۲/۴x$ خواهد بود. بر این اساس، داریم:

$$-۴۴۰ = ۶x + (۳ \times ۲۴۰) - ۲/۴x - (۶ \times ۴۳۰) \longrightarrow ۳/۶x = ۱۴۲۰ \longrightarrow x \simeq ۳۹۴/۴$$

با توجه به محاسبات انجام‌شده، آنتالپی پیوند $N-H$ به تقریب برابر با ۳۹۴ کیلوژول بر مول است.

گروه آموزشی ماز

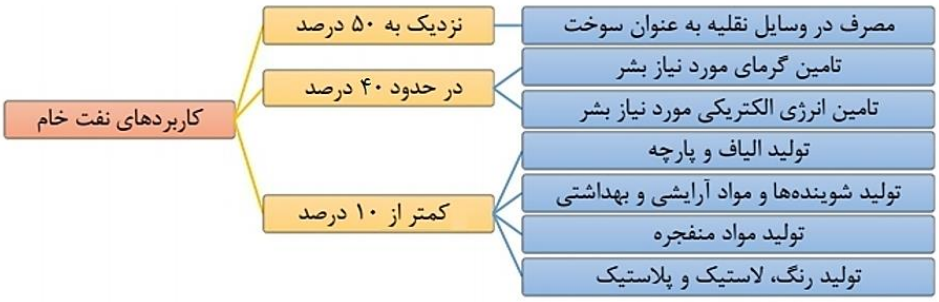
۸۹- کدام مقایسه دربارهٔ موارد کاربرد و مصرف نفت خام در صنعت درست است؟

۱) سوخت وسایل نقلیه > تولید پلاستیک > تأمین گرما و انرژی الکتریکی
۲) تولید شوینده‌ها > سوخت وسایل نقلیه > تأمین گرما و انرژی الکتریکی
۳) تولید الیاف و پارچه > تأمین گرما و انرژی الکتریکی > سوخت وسایل نقلیه
۴) تأمین گرما و انرژی الکتریکی > تولید الیاف و پارچه > > سوخت وسایل نقلیه

کنکور ۱۴۰۴
www.biomaze.ir
سنجش کلاد
www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshClouds

پاسخ: گزینهٔ ۳ (آسان ـ حفظی ـ ۱۱۰۱)

نفت خام در دنیای کنونی دو نقش اساسی ایفا می‌کند. نقش نخست آن، منبع تامین انرژی بوده و در نقش دوم، مادهٔ اولیه برای تهیهٔ بسیاری از مواد و کالاهایی است که در صنایع گوناگون از آن‌ها استفاده می‌شود. حدود نیمی(حدود ٪۵۰) از نفتی که از چاه‌های نفت بیرون کشیده می‌شود، به عنوان سوخت در وسایل نقلیه استفاده می‌شود. بخش اعظم نیم دیگر آن(حدود ٪۴۰)، برای تامین گرما و انرژی الکتریکی مورد نیاز ما به کار می‌رود و کمتر از ٪۱۰ نفت خام مصرفی دنیا، در تهیه بسیاری از مواد و کالاها مانند الیاف و پارچه، شوینده‌ها و... به کار می‌رود. نمودار زیر، کاربردهای مختلف نفت خام را نشان می‌دهد:



گروه آموزشی ماز

۹۰- کدام مورد، نادرست است؟

۱) رادیکال‌هایی که اتم آن‌ها از قاعدهٔ هشتایی پیروی می‌کند، در مقایسه با سایر رادیکال‌ها، پایداری بیش‌تری دارند.
۲) وجود رادیکال‌ها در بدن، خطر ابتلا به سرطان را از طریق افزایش میزان واکنش‌های ناخواسته بالا می‌برد.
۳) برای افزایش زمان ماندگاری موادغذایی، از بنزوئیک اسید به‌عنوان نگهدارنده می‌توان استفاده کرد.
۴) لیکوپن، یک هیدروکربن به شمار می‌آید که رادیکال‌ها را جذب می‌کند.

پاسخ: گزینهٔ ۱ (آسان ـ حفظی ـ ۱۱۰۲)

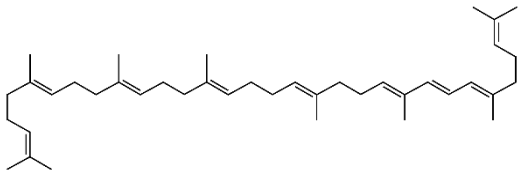
رادیکال‌ها، گونه‌های فعال و ناپایداری هستند که در ساختار خود الکترون جفت‌نشده دارند. رادیکال‌ها محتوی اتم‌هایی هستند که از قاعده هشت‌تایی پیروی نمی‌کنند. NO و NO_2 نمونه‌ای از رادیکال‌ها به شمار می‌روند و ساختار لوویس این دو گونه به صورت زیر است:

بررسی سایر گزینه‌ها:

۲ در بدن ما به دلیل انجام واکنش‌های متنوع و پیچیده، رادیکال‌هایی به وجود می‌آیند که اگر به وسیلهٔ بازدارنده‌ها جذب نشوند، می‌توانند با انجام واکنش‌های سریع به بافت‌های بدن آسیب برسانند. بنابراین وجود رادیکال‌ها در بدن، خطر ابتلا به سرطان را افزایش می‌دهد.

۳ بنزوئیک اسید یک کربوکسیلیک اسید آروماتیک است که در تمشک و توت فرنگی وجود دارد. بنزوئیک اسید جزء مواد نگهدارنده است. نگهدارنده‌ها، سرعت واکنش‌های شیمیایی که منجر به فساد مواد غذایی می‌شوند را کاهش می‌دهند و باعث افزایش ماندگاری مواد غذایی می‌شوند.

۴ لیکوپن نوعی هیدروکربن با فرمول $C_{۴۰}H_{۵۶}$ است که در هندوانه و گوجه فرنگی وجود دارد. لیکوپن نوعی بازدارنده است و همانطور که می‌دانیم، مصرف خوراکی‌های محتوی بازدارنده‌ها سبب خواهد شد که رادیکال‌ها به دام بیفتند تا با کاهش مقدار آن‌ها، از سرعت واکنش‌های ناخواسته کاسته شود. ساختار لیکوپن به صورت زیر است:



با توجه به ساختار رسم‌شده، در ساختار این ماده، ۱۳ پیوند دوگانه و ۱۰۸ پیوند اشتراکی وجود دارد.

گروه آموزشی ماز

۹۱- رابطهٔ زیر، برای تغییر غلظت مولی مواد گازی شرکت کننده در یک واکنش در یک بازهٔ زمانی معیّن برقرار است. اگر این رابطه، معادل سرعت واکنش باشد، معادلهٔ موازنه نشدهٔ این واکنش و مجموع ضرایب استوکیومتری فراورده‌های آن، کدام است؟

$$\frac{\Delta[N_2]}{\Delta t}=-\frac{1}{2}\frac{\Delta[NO]}{\Delta t}=\frac{1}{2}\frac{\Delta[H_2O]}{\Delta t}=-\frac{1}{2}\frac{\Delta[H_2]}{\Delta t}$$

۱) $N_2+H_2O\rightarrow NO+H_2$ ، ۴
۲) $NO+H_2\rightarrow N_2+H_2O$ ، ۳
۳) $N_2+H_2\rightarrow NO+H_2O$ ، ۴
۴) $NO+H_2O\rightarrow N_2+H_2$ ، ۳

کنکور ۱۴۰۴
www.biomaze.ir
سنجش کلاد
www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshClouds

پاسخ: گزینهٔ ۲ (متوسط ـ مفهومی ـ ۱۱۰۲)

برای محاسبهٔ سرعت متوسط مصرف یا تولید مواد شرکت‌کننده در یک واکنش شیمیایی، باید از کمیت‌های قابل اندازه‌گیری مواد شرکت‌کننده در آن واکنش مانند جرم، فشار، غلظت و یا حجم استفاده کنیم. رابطهٔ سرعت متوسط مصرف یا تولید یک ماده در یک واکنش شیمیایی به صورت زیر است:

$$R = \frac{|n_۲ - n_۱|}{\Delta t} = \frac{|\Delta n|}{\Delta t}$$

در این رابطه R معادل با سرعت متوسط مصرف یا تولید یک ماده، Δt بیانگر طول یک بازهٔ زمانی و Δn معادل تغییر مقدار کمیت مورد نظر در طول آن بازهٔ زمانی است. به‌علاوه، می‌دانیم که سرعت متوسط مصرف یا تولید مواد شرکت‌کننده در یک واکنش، متناسب با ضرایب استوکیومتری آن‌ها خواهد بود. به عبارت دیگر، اگر ضرایب استوکیومتری مواد شرکت‌کننده در واکنش یکسان نباشد، سرعت متوسط آن‌ها نیز، متفاوت از یکدیگر خواهد بود. از این رو، شیمی‌دان‌ها برای درک آسان‌تر روند پیشرفت واکنش‌ها در واحد زمان، از یک مفهوم کاربردی به نام سرعت واکنش استفاده می‌کنند. سرعت واکنش، از تقسیم سرعت متوسط مصرف یا تولید هر یک از مواد شرکت‌کننده در واکنش بر ضریب استوکیومتری آن ماده بدست می‌آید. برای مثال معادلهٔ زیر را در نظر بگیرید:

$$۲A + B \longrightarrow ۳C + ۲D$$

برای محاسبه سرعت متوسط واکنش در بازهٔ زمانی Δt به صورت زیر عمل می‌کنیم:

$$\overline{R}_{\text{واکنش}} = \frac{|\Delta n_A|}{۲ \times \Delta t} = \frac{|\Delta n_B|}{\Delta t} = \frac{|\Delta n_C|}{۳ \times \Delta t} = \frac{|\Delta n_D|}{۲ \times \Delta t} \Longrightarrow \overline{R}_{\text{واکنش}} = \frac{\overline{R}_A}{۲} = \frac{\overline{R}_B}{۱} = \frac{\overline{R}_C}{۳} = \frac{\overline{R}_D}{۲}$$

با توجه به توضیحات داده‌شده، ضریب استوکیومتری $N_۲$ در معادله موازنه‌شده، نصف سایر مواد شرکت‌کننده در واکنش و برابر با ۱ است. از این رو، ضریب استوکیومتری سایر مواد شرکت‌کننده در واکنش برابر با ۲ است. از طرفی، با توجه به علامت منفی NO و $H_۲$ در رابطه داده‌شده، این دو ماده بایستی در یک طرف معادله قرار داشته باشند. بنابراین معادله موازنه‌شده واکنش به صورت زیر خواهد بود:

$$۲NO(g) + ۲H_۲(g) \longrightarrow ۲H_۲O(g) + N_۲(g)$$

بر اساس معادله موازنه‌شده، مجموع ضرایب فراورده‌های واکنش برابر با ۳ است.

گروه آموزشی ماز

۹۲- اگر واکنش: $CaCO_۳(s) + ۲HCl(aq) \rightarrow CaCl_۲(aq) + CO_۲(g) + H_۲O(l)$، پس از گذشت ۳۰ دقیقه پایان پذیرد اما ۱۸/۷۵ گرم کلسیم کربنات باقی بماند و ۱۶/۸ لیتر گاز کربن دی‌اکسید در شرایط STP تشکیل شده باشد، چند درصد جرمی کلسیم کربنات در واکنش شرکت کرده است و سرعت واکنش برابر چند مول بر دقیقه بوده است؟

($C=۱۲$ ، $O=۱۶$ ، $Ca=۴۰ : g \cdot mol^{-۱}$)

۱) ۶۰، $۶/۲۵ \times ۱۰^{-۳}$
۲) ۶۰، $۲/۵ \times ۱۰^{-۲}$
۳) ۸۰، $۶/۲۵ \times ۱۰^{-۳}$
۴) ۸۰، $۲/۵ \times ۱۰^{-۲}$

پاسخ: گزینهٔ ۴ (متوسط ـ مسأله ـ ۱۱۰۲)

معادله موازنه‌شدهٔ واکنش به صورت زیر است:

$$CaCO_۳(s) + ۲HCl(aq) \longrightarrow CaCl_۲(aq) + CO_۲(g) + H_۲O(l)$$

در قدم اول، سرعت واکنش را محاسبه می‌کنیم. برای این منظور ابتدا شمار مول کربن دی‌اکسید تولیدشده را محاسبه می‌کنیم. می‌دانیم که در شرایط استاندارد(STP)، هر مول از گازهای گوناگون حجمی معادل ۲۲/۴ لیتر دارند. بر این اساس، شمار مول ۱۶/۸ لیتر کربن‌دی‌اکسید برابر است با:

$$?\, mol\ CO_۲ = ۱۶/۸\ L\ \ CO_۲ \times \frac{۱\ mol\ CO_۲}{۲۲/۴\ L\ \ CO_۲} = ۰/۷۵\ mol$$

به منظور محاسبهٔ سرعت واکنش، سرعت تولید یا مصرف یک ماده را بر ضریب استوکیومتری آن ماده تقسیم می‌کنیم. از آنجا که ضریب استوکیومتری $CO_۲$ برابر با ۱ است، سرعت تولید این ماده با سرعت واکنش برابر خواهد بود. بر این اساس، داریم:

$$\overline{R}_{\text{واکنش}} = \frac{\Delta n_{CO_۲}}{\Delta t} \longrightarrow \overline{R}_{\text{واکنش}} = \frac{۰/۷۵\ mol}{۳۰\ min} = ۲/۵ \times ۱۰^{-۲}\ mol.min^{-۱}$$

حال به حل قسمت دوم سوال می‌پردازیم. به ازای تولید هر مول کربن دی‌اکسید در معادله موازنه‌شده، یک مول کلسیم کربنات مصرف می‌شود. با توجه به اینکه در این واکنش، ۰/۷۵ مول کربن دی‌اکسید تولید شده است، جرم کلسیم کربنات مصرف‌شده را به‌دست می‌آوریم:

$$?\, g\ CaCO_۳ = ۰/۷۵\ mol\ CO_۲ \times \frac{۱\ mol\ CaCO_۳}{۱\ mol\ CO_۲} \times \frac{۱۰۰\ g\ CaCO_۳}{۱\ mol\ CaCO_۳} = ۷۵\ g$$

بنابراین طی واکنش انجام‌شده، ۷۵ گرم کلسیم کربنات مصرف شده است و ۱۸/۷۵ گرم از آن باقی مانده است. بنابراین جرم کلسیم کربنات اولیه برابر با ۹۳/۷۵ گرم بوده است. بر این اساس درصد جرمی کلسیم کربنات شرکت‌کننده در واکنش برابر با $(\frac{۷۵}{۹۳/۷۵} \times ۱۰۰) = ۸۰٪$ است.

گروه آموزشی ماز

کنکور ۱۴۰۴
www.biomaze.ir
سنجش کلاد
www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshClouds

۹۳- اگر به ۲۰۰ میلی‌لیتر محلول سدیم هیدروکسید با غلظت ۰/۰۲ مولار، ..... میلی‌لیتر آب اضافه شود، ۲۰ میلی‌لیتر از محلول حاصل می‌تواند ۱۰ میلی‌لیتر محلول هیدروکلریک اسید با غلظت ..... مولار را خنثی کند.

۱) ۶۰۰، ۰/۰۲
۲) ۶۰۰، ۰/۰۱
۳) ۳۰۰، ۰/۰۱
۴) ۳۰۰، ۰/۰۲

پاسخ: گزینهٔ ۲ (متوسط ـ مسأله ـ ۱۲۰۱)

یکی از رفتارهای جالب و پرکاربرد اسیدها و بازها، واکنش‌هایی است که بین این دو دسته از مواد انجام می‌شود. به این گروه از واکنش‌ها، به اصطلاح واکنش‌های خنثی‌شدن گفته می‌شود. طی واکنش‌های خنثی‌شدن، یون‌های هیدروکسید حاصل از بازها با یون‌های هیدرونیوم حاصل از اسیدها بر اساس معادله شیمیایی $OH^-(aq) + H_3O^+(aq) \longrightarrow 2H_2O(l)$ واکنش داده و مولکول‌های آب را تولید می‌کنند. هرگاه حجم V_a از محلول اسیدی با غلظت مولی M_a و ظرفیت n_a با حجم V_b از محلول بازی با غلظت مولی M_b و ظرفیت n_b به طور کامل واکنش بدهد، به طوری که هر دو محلول کاملا مصرف شوند، رابطه زیر میان این دو محلول برقرار می‌شود:

$$M_a \times n_a \times V_a = M_b \times n_b \times V_b$$

ابتدا شمار مول یون هیدروکسید را در محلول اولیه محاسبه می‌کنیم:

$$mol\ OH^- = M \times n \times V \longrightarrow ۰/۰۲ \times ۱ \times ۰/۲ = ۴ \times ۱۰^{-۳}\ mol$$

با توجه به گزینه‌های داده‌شده، غلظت محلول هیدروکلریک‌اسید لازم برای خنثی‌شدن محلول سدیم هیدروکسید را در صورت افزودن ۶۰۰ میلی‌لیتر و ۳۰۰ میلی‌لیتر آب به محلول سدیم هیدروکسید محاسبه می‌کنیم:

- با افزودن ۶۰۰ میلی‌لیتر آب به محلول سدیم هیدروکسید، حجم محلول برابر با ۸۰۰ میلی‌لیتر خواهد شد. از این‌رو، غلظت جدید یون هیدروکسید در محلول برابر است با:

$$[OH^-] = \frac{۴ \times ۱۰^{-۳}\ mol}{۰/۸\ L} = ۰/۰۰۵\ mol.L^{-۱}$$

بنابراین غلظت یون هیدروکسید در محلول جدید برابر با ۰/۰۰۵ مول بر لیتر خواهد بود. بر این اساس، به کمک رابطه خنثی‌شدن، مولاریته محلول هیدروکلریک اسید را محاسبه می‌کنیم. توجه داریم که هیدروکلریک اسید(HCl)، اسیدی قوی با ظرفیت ۱ است. بر این اساس، داریم:

$$M_a \times n_a \times V_a = M_b \times n_b \times V_b \longrightarrow M_a \times ۱ \times ۰/۰۱ = ۰/۰۰۵ \times ۱ \times ۰/۰۲ \longrightarrow M_a = ۰/۰۱\ mol.L^{-۱}$$

بنابراین درصورتی که ۶۰۰ میلی‌لیتر آب به محلول اولیه سدیم هیدروکسید اضافه شود، مولاریته محلول هیدروکلریک اسید برای خنثی کردن این محلول باید برابر با ۰/۰۱ مول بر لیتر باشد.

- با افزودن ۳۰۰ میلی‌لیتر آب به محلول سدیم هیدروکسید، حجم محلول برابر با ۵۰۰ میلی‌لیتر خواهد شد. از این‌رو، غلظت جدید یون هیدروکسید در محلول برابر است با:

$$[OH^-] = \frac{۴ \times ۱۰^{-۳}\ mol}{۰/۵\ L} = ۰/۰۰۸\ mol.L^{-۱}$$

بنابراین غلظت یون هیدروکسید در محلول جدید برابر با ۰/۰۰۸ مول بر لیتر خواهد بود. بر این اساس، به کمک رابطه خنثی‌شدن، مولاریته محلول هیدروکلریک اسید را محاسبه می‌کنیم:

$$M_a \times n_a \times V_a = M_b \times n_b \times V_b \longrightarrow M_a \times ۱ \times ۰/۰۱ = ۰/۰۰۸ \times ۱ \times ۰/۰۲ \longrightarrow M_a = ۰/۰۱۶\ mol.L^{-۱}$$

با توجه به گزینه‌های داده‌شده، تنها در گزینه ۲ غلظت هیدروکلریک اسید به درستی محاسبه شده است.

گروه آموزشی ماز

۹۴- کدام مورد، نادرست است؟

۱) محلول اتیلن گلیکول همانند محلول استون در آب، غیرالکترولیت است.
۲) در محلول اسید HX با $K_a = ۰/۰۱$، اگر درجهٔ یونش ۰/۱ باشد، غلظت آغازی اسید، ۰/۹ مولار است.
۳) از انحلال ۰/۱ مول باریم اکسید و ۰/۱ مول لیتیم اکسید در نیم‌لیتر آب مقطر، به‌ترتیب ۰/۱۵ و ۰/۲ مول یون تشکیل می‌شود.
۴) با اضافه کردن آب مقطر به محلول آمونیاک در دمای ثابت، غلظت یون‌ها و pH کاهش می‌یابد و K_b ثابت می‌ماند.

پاسخ: گزینهٔ ۳ (متوسط ـ مفهومی ـ ۱۲۰۱)

معادله موازنه‌شده انحلال باریم اکسید و لیتیم اکسید در آب به صورت زیر است:

$$BaO(s) + H_2O(l) \longrightarrow Ba^{2+}(aq) + 2OH^-(aq)$$
$$Li_2O(s) + H_2O(l) \longrightarrow 2Li^+(aq) + 2OH^-(aq)$$

با توجه به معادله موازنه‌شده واکنش‌ها، به ازای انحلال هر مول باریم اکسید در آب، ۳ مول یون و به ازای انحلال هر مول لیتیم اکسید در آب، ۴ مول یون تولید خواهد شد. بنابراین می‌توان نتیجه گرفت که به ازای انحلال ۰/۱ مول باریم اکسید، ۰/۳ مول یون و به ازای انحلال ۰/۱ مول لیتیم اکسید، ۰/۴ مول یون تولید شود.

کنکور ۱۴۰۴
www.biomaze.ir
سنجش کلاد
www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshClouds

بررسی سایر گزینه‌ها:

۱ اتیلن گلیکول($C_2H_6O_2$) یک الکل دو عاملی است که همانند استون به صورت کاملا مولکولی در آب حل می‌شود. همانطور که می‌دانیم، موادی که به صورت کاملا مولکولی در آب حل می‌شوند، غیرالکترولیت هستند.

۲ ثابت یونش یک اسید را می‌توان به کمک رابطه $K_\alpha = \frac{M\alpha^2}{1-\alpha}$ محاسبه کرد. با توجه به اینکه ثابت یونش اسید HX برابر با ۰/۰۱ و درجه یونش این اسید، برابر با ۰/۱ است، داریم:

$$K_\alpha = \frac{M\alpha^2}{1-\alpha} \longrightarrow 0/01 = \frac{M \times (0/1)^2}{1-0/1} \longrightarrow M = 0/9\ mol.L^{-1}$$

بنابراین غلظت اولیه اسید برابر با ۰/۹ مول بر لیتر بوده است.

۴ محلول آمونیاک محلولی با خاصیت بازی است که اضافه کردن آب به این محلول، باعث کاهش غلظت یون‌ها و کاهش خاصیت بازی محلول می‌شود. همانطور که می‌دانیم، هر چه محلولی خاصیت بازی بیشتری داشته باشد، pH آن بزرگتر است. بنابراین با کاهش خاصیت بازی محلول، pH آن نیز کاهش می‌یابد. توجه داریم که در دمای ثابت، ثابت یونش تغییری نخواهد کرد و ثابت می‌ماند.

گروه آموزشی ماز

۹۵- چند مورد از موارد زیر، درست است؟

- **آرنیوس مدل خود را براساس تغییر غلظت یون‌های $H^+(aq)$ و $OH^-(aq)$ ارائه داد.**
- **شیر منیزی شامل محلول منیزیم هیدروکسید است و می‌تواند اسید معده را خنثی کند.**
- **هر محلول آبی که در آن غلظت یون‌های هیدرونیوم و هیدروکسید برابر باشد، خنثی است.**
- **در مدل آرنیوس، هر مولکولی که در ساختار خود هیدروژن بیش‌تری داشته باشد، در شرایط یکسان دما و غلظت، pH محلول را بیش‌تر کاهش می‌دهد.**
- **آرنیوس نخستین کسی بود که ویژگی‌های اسیدها و بازها را شناخت و براساس یافته‌های تجربی، میزان رسانایی الکتریکی محلول‌های آبی را بررسی کرد.**

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۵

پاسخ: گزینهٔ ۱ (متوسط ـ حفظی / مفهومی ـ ۱۲۰۱)

عبارت‌های اول و سوم درست هستند.

بررسی موارد:

مورد اول: طبق مدل آرنیوس، موادی که با حل‌شدن در آب، غلظت یون هیدرونیوم را افزایش می‌دهند، اسید آرنیوس و موادی که با حل‌شدن در آب، غلظت یون هیدروکسید را افزایش می‌دهند، باز آرنیوس به شمار می‌روند.

مورد دوم: اگر مقدار اسید معده به هر دلیلی بیش از اندازه باشد، دیواره داخلی معده بیش از مقدار طبیعی یون‌های هیدرونیوم را جذب می‌کند و این موضوع سبب درد، التهاب و گاهی خونریزی معده می‌شود. از این رو کسانی که به این بیماری مبتلا هستند، از داروهایی به نام ضداسید استفاده می‌کنند. شیرمنیزی یکی از رایج‌ترین ضداسیدها است که شامل منیزیم هیدروکسید است. این ضداسید، اسید معده را خنثی کرده و سبب کاهش مقدار اسید معده می‌شود. توجه داریم که منیزیم هیدروکسید یک محلول به شمار نمی‌رود.

مورد سوم: اگر در یک سامانه، غلظت یون‌های هیدرونیوم و هیدروکسید با هم برابر شود، آن سامانه حالت خنثی دارد.

مورد چهارم: با توجه به مدل آرنیوس، هر مولکولی که در شرایط یکسان دما و غلظت، با انحلال خود در آب یون هیدرونیوم بیشتری تولید کند، خاصیت اسیدی بیشتری دارد. به عنوان مثال اگرچه فسفریک اسید(H_3PO_4) نسبت به هیدروکلریک اسید(HCl) شمار هیدروژن بیشتری در هر مولکول خود دارد اما به علت اینکه یک اسید ضعیف بوده و درجه یونش آن کوچک است، نسبت به هیدروکلریک اسید که یک اسید قوی بوده و درجه یونش آن برابر با ۱ است، خاصیت اسیدی بسیار کمتری دارد.

مورد پنجم: آرنیوس نخستین کسی بود که اسیدها و بازها را بر یک مبنای علمی توصیف کرد. توجه داریم که قبل از آرنیوس و پیش از آن که ساختار اسیدها و بازها شناخته شود، شیمی‌دان‌ها افزون بر ویژگی‌های اسیدها و بازها، با برخی از واکنش‌های آن‌ها نیز آشنا بودند.

گروه آموزشی ماز

۹۶- در دمای ۲۵°C، ۱/۲ گرم باز ضعیف DOH در ۲۵۰ میلی‌لیتر آب مقطر حل می‌شود. اگر درصد یونش باز برابر ۲۰ باشد، کدام مورد، نادرست است؟ $(DOH = 80\ g.mol^{-1})$

۱) $[H^+]$ این محلول به‌تقریب برابر $8/3\times10^{-13}$ است.

۲) $[OH^-]$ در این محلول با $[H^+]$ در ۱۲۵ میلی‌لیتر از محلول اسید قوی HA با غلظت ۰/۰۱۲ مولار، برابر است.

۳) اگر ۰/۸ گرم باز DOH به این محلول اضافه شود، بدون تغییر حجم، pH محلول، ۰/۳ واحد افزایش می‌یابد.

۴) محلول حاصل از مخلوط کردن ۵۰ میلی‌لیتر از این محلول با همین حجم از محلول HCl با غلظت ۰/۰۲ مولار، خاصیت اسیدی دارد.

کنکور ۱۴۰۴
www.biomaze.ir
سنجش کلاد
www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshClouds

پاسخ: گزینهٔ ۳ (سخت ـ مسأله ـ ۱۲۰۱)

معادله یونش باز ضعیف DOH به صورت زیر است:

$$DOH(aq) \rightleftharpoons D^+(aq) + OH^-(aq)$$

ابتدا مولاریته باز DOH را محاسبه می‌کنیم:

$$[DOH] = \frac{\text{مول}}{\text{لیتر}} \rightarrow \frac{(\frac{۱/۲}{۸۰})}{۰/۲۵} = ۰/۰۶\ mol.L^{-۱}$$

در مرحله بعد، غلظت یون هیدروکسید محلول را به‌دست می‌آوریم. با توجه به اینکه DOH یک باز ضعیف است و غلظت یون هیدروکسید تولیدشده از رابطه $[OH^-] = M\alpha$ به‌دست می‌آید، داریم:

$$? [OH^-] = ۰/۰۶ \times ۲ \times ۱۰^{-۱} = ۱۲ \times ۱۰^{-۳}\ mol.L^{-۱}$$

بنابراین غلظت یون هیدروکسید در این محلول برابر با $۱۲ \times ۱۰^{-۳}\ mol.L^{-۱}$ است.

بررسی گزینه‌ها:

۱) همانطور که می‌دانیم در یک محلول آبی در دمای ۲۵°C، حاصل‌ضرب غلظت یون‌های هیدرونیوم و هیدروکسید برابر با $۱۰^{-۱۴}\ mol^۲.L^{-۲}$ است. بر این اساس، داریم:

$$[H^+] \times [OH^-] = ۱۰^{-۱۴} \Longrightarrow X \times ۱۲ \times ۱۰^{-۳} = ۱۰^{-۱۴} \Longrightarrow X \simeq ۸/۳۳ \times ۱۰^{-۱۳}\ mol.L^{-۱}$$

بنابراین غلظت یون هیدرونیوم در این محلول به تقریب برابر با $۸/۳ \times ۱۰^{-۱۳}$ مول بر لیتر است.

۲) همانطور که محاسبه کردیم، غلظت یون هیدروکسید در محلول باز DOH، برابر با ۰/۰۱۲ مول بر لیتر است. همچنین با توجه به اینکه HA یک اسید قوی و با درجه یونش ۱ است، غلظت یون هیدرونیوم در آن با غلظت اسید برابر و معادل ۰/۰۱۲ مولار است. بنابراین غلظت یون هیدروکسید در محلول باز DOH با غلظت یون هیدرونیوم در محلول اسید قوی HA برابر است.

۳) اگر غلظت یک باز ضعیف را n برابر کنیم، pH آن، به اندازهٔ $\frac{۱}{۲}\log n$ افزایش می‌یابد. با توجه به اینکه $۱۰^{۰/۳} = ۲$، برای افزایش pH محلول به اندازه ۰/۳ واحد، باید غلظت باز را چهار برابر کنیم. در این صورت برای چهار برابر کردن غلظت باز باید به اندازهٔ دو برابر جرم DOH حل‌شده در ابتدا یعنی ۲/۴ گرم DOH به محلول اضافه شود.

۴) هرگاه حجم V_a از محلول اسیدی با غلظت مولی M_a و ظرفیت n_a با حجم V_b از محلول بازی با غلظت مولی M_b و ظرفیت n_b به طور کامل واکنش بدهد، به طوری که هر دو محلول کاملا مصرف شوند، رابطه زیر میان این دو محلول برقرار می‌شود:

$$M_a \times n_a \times V_a = M_b \times n_b \times V_b$$

با توجه برابر بودن حجم محلول و ظرفیت باز DOH و اسید HA، برای تعیین اسیدی یا بازی بودن محلول، باید مولاریته این دو محلول را با هم مقایسه کرد. از آنجا که مولاریته محلول اسید HCl برابر با ۰/۰۲ مولار و مولاریته محلول باز DOH برابر با ۰/۰۱۲ مولار است، می‌توان نتیجه گرفت که محلول نهایی خاصیت اسیدی خواهد داشت.

گروه آموزشی ماز

۹۷- کدام مورد درست است؟

۱) در بسیاری از واکنش‌های بسپارش، مانند تشکیل پلی‌اتن و تفلون، واکنش‌دهندهٔ مایع به فراوردهٔ جامد تبدیل می‌شود.
۲) به دلیل سبک‌تر بودن مولکول اتن نسبت به پروپن، جرم مولی پلی‌اتن از جرم مولی پلی‌پروپن، کم‌تر خواهد بود.
۳) بسپارش، واکنشی است که واکنش‌دهنده‌های سیرنشده را به فراورده‌های سیرشده تبدیل می‌کند.
۴) شمار اتم‌ها در مونومر سازندهٔ پنبه، با شمار اتم‌ها در مونومر سازندهٔ گندم برابر است.

پاسخ: گزینهٔ ۴ (متوسط ـ حفظی / مفهومی ـ ۱۱۰۳)

گندم غنی از نشاسته است. نشاسته، پلی ساکاریدی است که از اتصال مولکول‌های گلوکز به یکدیگر تشکیل شده است. پنبه از پلیمر سلولز ایجاد شده که هر مولکول سلولز نیز، خود از اتصال تعداد زیادی مولکول گلوکز به هم ایجاد شده است. ساختار یک نمونه از سلولز به صورت زیر است:

با توجه به اینکه مونومر سازنده پنبه و گندم یکسان است، شمار اتم‌ها در مونومر سازنده آن‌ها (گلوکز($C_۶H_{۱۲}O_۶$)) نیز یکسان خواهد بود.

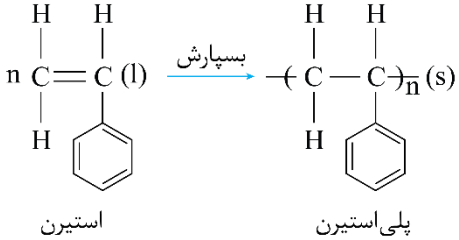
کنکور ۱۴۰۴
www.biomaze.ir
سنجش کلاد
www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshClouds

بررسی سایر گزینه‌ها:

۱ مونومر سازنده پلی‌اتن، گاز اتن بوده که با حرارت‌دادن آن در فشار بالا، جامد سفید رنگی پدید می‌آید که جرم مولی آن، اغلب ده‌ها هزار گرم بر مول است. همچنین تفلون، ماده‌ای جامد است که از پلیمری شدن گاز تترافلوئورواتن پدید می‌آید.

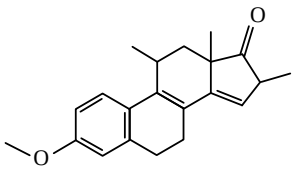
۲ تعیین شمار دقیق مونومرهای شرکت‌کننده در واکنش بسپارش یک ماده امکان‌پذیر نیست و تاکنون هیچ قاعده‌ای برای اتصال شمار مونومرها به یکدیگر ارائه نشده است. با توجه به این موضوع، تعیین جرم مولی یک پلیمر امکان‌پذیر نخواهد بود و از این رو، نمی‌توان جرم مولی پلی‌اتن و پلی‌پروپن را با یکدیگر مقایسه کرد.

۳ در فرایند بسپارش، همواره فراورده‌ای سیرشده تشکیل نمی‌شود. به عنوان مثال در فرایند بسپارش استیرن، پلی‌استیرن پدید می‌آید که در ساختار خود دارای حلقهٔ بنزنی با پیوندهای دوگانه کربن-کربن است و سیرنشده محسوب می‌شود. واکنش تولید این پلیمر به صورت زیر است:



گروه آموزشی ماز

۹۸- دربارهٔ ترکیبی با ساختار داده شده، کدام‌یک از موارد زیر درست است؟ $\left(H=1\,g\cdot mol^{-1}\right)$



الف: عدد اکسایش اتم‌های کربنی که به اتم اکسیژن متصل‌اند، برابر است.

ب: هر مول از آن برای سوختن کامل، به ۲۶ مول گاز اکسیژن نیاز دارد.

پ: شمار گروه‌های متیل در مولکول آن، ۴ برابر شمار این گروه در ساختار مونومر سازندهٔ سرنگ است.

ت: هر مول از آن در شرایط مناسب، می‌تواند در واکنش با ۶ گرم گاز هیدروژن، به یک ترکیب سیرشده تبدیل شود.

۱) «ب» و «پ» ۲) «الف» و «ت» ۳) «الف» و «پ» ۴) «ب» و «ت»

پاسخ: گزینهٔ ۱ (متوسط ـ مفهومی ـ ۱۱۰۳)

فرمول مولکولی ترکیب موردنظر به صورت $C_{21}H_{24}O_2$ است. بر این اساس، عبارت‌های «ب» و «پ» درست هستند.

برای تعیین تعداد هیدروژن‌ها در ساختار یک ترکیب آلی با فرمول مولکولی C_nH_m از رابطه زیر بهره می‌بریم:

$$\text{تعداد اتم } H = 2n+2 - 2\times(\text{تعداد حلقه} + \text{تعداد پیوند دوگانه}) - 4\times(\text{تعداد پیوند سه‌گانه}) - \overbrace{X}^{\text{تعداد هالوژن‌ها}} + \overbrace{N}^{\text{تعداد نیتروژن‌ها}}$$

در این رابطه، N تعداد اتم‌های نیتروژن و X تعداد اتم‌های هالوژن‌ها را نشان می‌دهد.

بررسی موارد:

الف: در این ترکیب، سه اتم کربن به اتم اکسیژن متصل شده‌اند که عدد اکسایش آن‌ها، ۱+ ، ۲+ و ۲− است. بنابراین عدد اکسایش اتم‌های کربن متصل به اتم اکسیژن در این ترکیب با هم متفاوت است.

ب: معادله موازنه‌شده سوختن کامل این ترکیب به صورت زیر است:

$$C_{21}H_{24}O_2(s) + 26O_2(g) \longrightarrow 21CO_2(g) + 12H_2O(g)$$

با توجه به معادله موازنه‌شده، به ازای سوختن هر مول از این ترکیب، ۲۶ مول گاز اکسیژن مصرف خواهد شد.

پ: مونومر سازنده سرنگ، پروپن است که در ساختار خود یک گروه متیل دارد. از طرفی ترکیب داده‌شده، دارای چهار گروه متیل در ساختار خود است. بر این اساس می‌توان گفت که شمار گروه‌های متیل در این ترکیب، چهار برابر تعداد گروه‌های متیل در مونومر سازنده سرنگ است.

ت: با توجه به اینکه در این ترکیب ۵ پیوند دوگانه کربن-کربن وجود دارد، هر مول از آن در شرایط مناسب با پنج مول گاز H_2 (معادل با ۱۰ گرم) واکنش می‌دهد.

گروه آموزشی ماز

کنکور ۱۴۰۴
www.biomaze.ir
سنجش کلاد
www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshClouds

۹۹- با توجه به واکنش‌های زیر، پس از موازنهٔ معادلهٔ آن‌ها، کدام مورد، نادرست است؟

$$(I)\ CO(g)+H_2(g)\rightarrow CH_3OH(l)$$
$$(II)\ CH_4(g)+H_2O(g)\rightarrow CO(g)+H_2(g)$$

۱) فراوردهٔ ناقطبی، فرم کاهش یافتهٔ گونهٔ اکسنده در واکنش (II) است.
۲) تفاوت ضرایب استوکیومتری عامل کاهنده در دو واکنش، برابر یک است.
۳) عدد اکسایش اتم کربن در واکنش (I)، ۳ واحد کاهش و در واکنش (II)، ۶ واحد افزایش یافته است.
۴) در شرایط مناسب انجام واکنش‌ها، فراورده‌های واکنش (II) به ازای مصرف یک مول متان، برای تهیهٔ یک مول متانول کفایت می‌کند.

پاسخ: گزینهٔ ۳ (متوسط ـ مفهومی ـ ۱۲۰۴)

معادله موازنه‌شده واکنش‌های (I) و (II) به صورت زیر است:

$$(I):\ CO(g)+2H_2(g)\longrightarrow CH_3OH(l)$$
$$(II):\ CH_4(g)+H_2O(g)\longrightarrow CO(g)+3H_2(g)$$

در واکنش (I)، عدد اکسایش کربن در کربن مونوکسید برابر با $+2$ و عدد اکسایش کربن در ساختار متانول برابر با -2 است. بنابراین با انجام این واکنش، عدد اکسایش کربن به اندازهٔ ۴ واحد کاهش می‌یابد. از طرفی در واکنش (II)، عدد اکسایش کربن در متان برابر با -4 و عدد اکسایش کربن در کربن مونوکسید برابر با $+2$ است. پس می‌توان گفت که عدد اکسایش کربن در این واکنش، ۶ واحد افزایش پیدا کرده است.

بررسی سایر گزینه‌ها:

۱ در واکنش (II)، H_2O گونهٔ اکسنده بوده و H_2 فرم کاهش یافتهٔ آن است. توجه داریم که H_2، گازی ناقطبی است و در میدان الکتریکی، جهت‌گیری نمی‌کند.

۲ در واکنش (I)، عامل کاهنده، H_2 و در واکنش (II)، عامل کاهنده، CH_4 است. با توجه به معادله‌های موازنه‌شده، ضریب گاز هیدروژن در واکنش (I) برابر با ۲ و ضریب گاز متان در واکنش (II) معادل با ۱ است. بنابراین تفاوت ضریب استوکیومتری این دو ماده برابر با ۱ می‌شود.

۴ به ازای مصرف هر مول متان در معادله موازنه‌شده واکنش (II)، یک مول کربن مونوکسید و سه مول گاز هیدروژن تولید می‌شود. توجه داریم که بر اساس واکنش (I) برای تولید هر مول متانول، به یک مول گاز کربن مونوکسید و دو مول گاز هیدروژن احتیاج داریم.

گروه آموزشی ماز

۱۰۰- دربارهٔ فرایند زنگ زدن آهن، چند مورد از موارد زیر درست است؟

- تبدیل فلز آهن به زنگ آهن، از دو واکنش اکسایش آن تشکیل شده است.
- فراورده‌های نیم‌واکنش‌های اکسایش و کاهش، هر دو محلول در آب‌اند.
- مجموع ضرایب استوکیومتری مواد در واکنش کلی، برابر ۱۷ است.
- وجود یون هیدرونیوم، سبب افزایش سرعت انجام فرایند می‌شود.

۱) ۴ ۲) ۳ ۳) ۲ ۴) ۱

پاسخ: گزینهٔ ۱ (متوسط ـ مفهومی ـ ۱۲۰۲)

به ترد شدن، خرد شدن و فروریختن فلزها بر اثر یک واکنش اکسایش-کاهش خوردگی گفته می‌شود. هنگامی که وسایل آهنی در هوای مرطوب قرار می‌گیرند، یک واکنش اکسایش-کاهش ناخواسته رخ می‌دهد که باعث اکسایش آهن شده و از زیبایی و استحکام آن می‌کاهد. فراورده نهایی خوردگی، زنگ آهن $(Fe(OH)_3)$ است. بر این اساس، هر چهار عبارت داده‌شده درست هستند.

بررسی موارد:

• در فرایند زنگ زدن آهن، اتم آهن اکسایش یافته و به یون Fe^{2+} تبدیل می‌شود. در ادامه، با توجه به اینکه زنگ آهن، حاوی یون Fe^{3+} است، Fe^{2+} خود نیز اکسایش یافته و Fe^{3+} تشکیل خواهد شد.

• معادله موازنه‌شده نیم‌واکنش اکسایش و کاهش در فرایند زنگ‌زدن آهن به صورت زیر است:

نیم واکنش اکسایش: $Fe(s)\longrightarrow Fe^{2+}(aq)+2e^-$

نیم‌واکنش کاهش: $O_2(g)+2H_2O(l)+4e^-\longrightarrow 4OH^-(aq)$

فراوردهٔ نیم‌واکنش اکسایش، یون Fe^{2+} و فراورده نیم‌واکنش کاهش، یون هیدروکسید است که هر دو در آب محلول هستند.

• معادله موازنه‌شده واکنش کلی زنگ‌زدن آهن به صورت زیر است:

$$4Fe(s)+3O_2(g)+6H_2O(l)\longrightarrow 4Fe(OH)_3(s)$$

با توجه به معادله موازنه‌شده، مجموع ضرایب استوکیومتری مواد برابر با ۱۷ است.

کنکور ۱۴۰۴
www.biomaze.ir
www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshClouds

• معادله موازنه‌شده نیم‌واکنش کاهش اکسیژن در محیط اسیدی و خنثی به صورت زیر است:

محیط اسیدی : $O_2(g) + 4H^+(aq) + 4e^- \longrightarrow 2H_2O(l) \qquad E^\circ = +1/23V$

محیط خنثی : $O_2(g) + 2H_2O(l) + 4e^- \longrightarrow 4OH^-(aq) \qquad E^\circ = +0/4V$

با توجه به نیم‌واکنش‌های نوشته‌شده، E° مربوط به نیم‌واکنش کاهش اکسیژن محیط اسیدی از محیط خنثی بیشتر است. بنابراین می‌توان گفت که سرعت خوردگی آهن در محیط اسیدی نسبت به محیط غیراسیدی بیشتر است و وجود یون هیدرونیوم، سبب افزایش سرعت فرایند زنگ زدن آهن می‌شود.

گروه آموزشی ماز

۱۰۱- اگر واکنش: $4NH_3(g)+5O_2(g) \rightleftharpoons 4NO(g)+6H_2O(g)$، در یک سیلندر مجهز به پیستون روان و با ۲ مول از هریک از اجزا در حال تعادل باشد، با کاهش فشار روی پیستون، در تعادل جدید، چند مول بخار آب در ظرف واکنش می‌تواند وجود داشته باشد؟ (دما ثابت است.)

۱) ۴/۴۵ ۲) ۳/۲۰ ۳) ۱/۵۰ ۴) ۰/۸۵

پاسخ: گزینهٔ ۲ (متوسط ـ مفهومی ـ ۱۲۰۴)

ابتدا درسنامه زیر را با دقت بخوانید.

بر اساس قانون لوشاتلیه، اگر تغییری موجب بر هم زدن تعادل در یک سامانه تعادلی شود، تعادل در جهتی جابه‌جا می‌شود که تا حد امکان، اثر آن تغییر را جبران کند. بر اساس این اصل، در صورت افزایش غلظت یکی از گونه‌های شرکت‌کننده در یک تعادل شیمیایی، تعادل در جهتی پیش می‌رود که تا حد امکان مقداری از آن ماده را مصرف کند و سامانه مجددا به حالت تعادل برسد. در نقطه مقابل، در صورت کاهش غلظت یکی از گونه‌های شرکت‌کننده در یک تعادل شیمیایی، تعادل در جهتی پیش می‌رود که تا حد امکان مقداری از آن ماده را تولید کند و سامانه مجددا به حالت تعادل برسد. توجه داریم که در این جابه‌جایی مقدار K ثابت باقی می‌ماند.

از تغییر حجم سامانه واکنش، می‌توان برای تغییر غلظت مواد گازی شرکت‌کننده در واکنش کمک گرفت. برای آن‌که تغییر حجم بر جابه‌جایی تعادل یک واکنش شیمیایی موثر باشد، باید حداقل یکی از اجزای شرکت‌کننده در واکنش گازی شکل باشد و تعداد مول‌های گازی در دو طرف معادله واکنش نیز برابر نباشند. یکی از راه‌های تغییر حجم سامانه‌های گازی، تغییر فشار است. درواقع با افزایش فشار اعمال‌شده بر یک تعادل گازی، حجم اشغال‌شده توسط گازها کاهش پیدا می‌کند و با کاهش فشار اعمال‌شده بر یک تعادل گازی نیز حجم اشغال‌شده توسط گازها افزایش پیدا می‌کند.

تغییر دمای سامانه‌های تعادلی، یکی از روش‌های مورد استفاده برای جابه‌جا کردن تعادل‌های شیمیایی است. تغییر دما افزون بر جابه‌جا کردن تعادل، مقدار ثابت تعادل واکنش را نیز تغییر می‌دهد. اثر تغییر دما بر تعادل‌های گوناگون یکسان نیست و به گرماده یا گرماگیر بودن آن واکنش‌ها بستگی دارد. با افزایش دمای یک سامانه در حالت تعادل، واکنش در جهت مصرف گرما پیش می‌رود تا دمای سامانه را مجددا کاهش دهد. اگر این واکنش گرماگیر باشد، تعادل در جهت رفت جابه‌جا شده و مقدار فراورده‌ها افزایش پیدا می‌کند. در نقطه مقابل، اگر این واکنش گرماده باشد، با افزایش دما تعادل در جهت برگشت پیش رفته و مقدار واکنش‌دهنده‌ها افزایش پیدا می‌کند. با کاهش دمای یک سامانه در حالت تعادل، واکنش در جهت تولید گرما پیش می‌رود تا دمای سامانه را دوباره افزایش دهد. اگر این واکنش گرماگیر باشد، تعادل در جهت برگشت جابه‌جا شده و مقدار واکنش‌دهنده‌ها افزایش پیدا می‌کند. در صورتی که این واکنش گرماده باشد، با کاهش دما تعادل در جهت رفت پیش می‌رود و مقدار فراورده‌ها افزایش پیدا می‌کند.

با کاهش فشار روی پیستون، حجم اشغال‌شده توسط گازها افزایش پیدا می‌کند که این موضوع موجب کاهش غلظت گونه‌های شرکت‌کننده در واکنش می‌شود. طبق اصل لوشاتلیه، به منظور جبران این تغییر، تعادل در جهتی جا به جا می‌شود که شمار مول‌های گازی آن بیشتر است. با توجه به اینکه مجموع شمار مول‌های مواد گازی در سمت واکنش‌دهنده‌ها برابر ۹ و در سمت فراورده‌ها برابر با ۱۰ است، تعادل در جهت رفت جا به جا می‌شود. بنابراین شمار مول‌های بخارآب افزایش پیدا خواهد کرد. بر این اساس، گزینه‌های سوم و چهارم نادرست هستند.

اگر در این واکنش ۲ مول گاز اکسیژن به صورت کامل مصرف شود، شمار مول‌های بخار آب تولیدشده برابر است با:

$$?\,mol\ H_2O = 2\ mol\ O_2 \times \frac{6\ mol\ H_2O}{5\ mol\ O_2} = 2/4\ mol$$

بنابراین حتی اگر کل ۲ مول اکسیژن موجود در مخلوط هم مصرف شود، ۲/۴ مول بخار آب تولید شده و شمار مول‌های بخار آب نهایتا به ۴/۴ مول خواهد رسید که این مقدار از ۴/۴۵ کمتر است. بر این اساس گزینه اول نیز نادرست است و پاسخ صحیح سوال، گزینه دو خواهد بود.

گروه آموزشی ماز

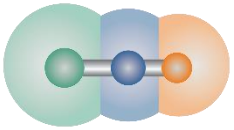
کنکور ۱۴۰۴
www.biomaze.ir
www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshClouds

۱۰۲- ترکیب‌های کدام مورد می‌تواند نمایندهٔ مناسبی برای ساختارهای داده شده باشد؟

۱) $a: SCO \, ، b: SiF_4 \, ، d: CHCl_3$
۲) $a: HCN \, ، b: CH_4 \, ، c: H_2S$
۳) $b: SiH_4 \, ، c: OF_2 \, ، d: NH_3$
۴) $a: HF \, ، c: H_2O \, ، d: SO_3$

پاسخ: گزینهٔ ۳ (آسان ـ مفهومی ـ ۱۲۰۳)

شیمی‌دان‌ها برای نمایش توزیع الکترون‌ها و بررسی تراکم بار الکتریکی روی اتم‌های سازنده یک گونه شیمیایی، از شکل‌هایی به نام نقشه پتانسیل الکتروستاتیکی استفاده می‌کنند. در این نقشه‌ها، رنگ آبی تراکم کمتر الکترون‌ها(بار جزئی مثبت) و رنگ قرمز، تراکم بیشتر الکترون‌ها (بار جزئی منفی) را نشان می‌دهد. به عنوان مثال نقشه پتانسیل الکتروستاتیکی کربن دی‌اکسید به صورت زیر است:



در مولکول خطی کربن دی‌اکسید، تراکم بار الکتریکی بر روی اتم‌های اکسیژن بیشتر از اتم کربن است، از این رو به اتم‌های اکسیژن بار جزئی منفی$(-\delta)$ و به اتم کربن، بار جزئی مثبت $(+\delta)$ نسبت داده می‌شود. به علت توزیع متقارن بار الکتریکی پیرامون اتم مرکزی، این مولکول در میدان الکتریکی جهت‌گیری نمی‌کند و گشتاور دوقطبی آن برابر با صفر است.

شکل a یک مولکول دواتمی ناجورهسته را نشان می‌دهد. بنابراین نقشه پتانسیل الکتروستاتیکی ترکیبی می‌تواند همانند شکل a باشد که از دو اتم متفاوت تشکیل شده است. بنابراین گزینه‌های اول و دوم نادرست هستند.

شکل b یک مولکول چهار اتمی مسطح را نشان می‌دهد. در مولکول‌های چهاراتمی، اگر هیچ الکترون ناپیوندی بر روی اتم مرکزی وجود نداشته باشد، مولکول موردنظر ساختار مسطح پیدا می‌کند. بنابراین نقشه پتانسیل الکتروستاتیکی CH_4، SiH_4 و SiF_4 می‌تواند به فرم b باشد.

شکل c، یک مولکول سه اتمی غیرخطی را نشان می‌دهد. در مولکول‌های سه اتمی، اگر یک یا چند الکترون ناپیوندی بر روی اتم مرکزی وجود داشته باشد، مولکول موردنظر ساختار خمیده پیدا کرده و اتم‌های سازنده آن در یک راستا قرار نمی‌گیرند. بر این اساس، نقشه پتانسیل الکتروستاتیکی OF_2، H_2S و H_2O همانند شکل c خواهد بود.

شکل d، یک مولکول چهاراتمی غیرمسطح را نشان می‌دهد. در مولکول‌های چهاراتمی، اگر یک یا چند الکترون ناپیوندی بر روی اتم مرکزی قرار داشته باشند، این مولکول‌ها حالت غیرمسطح (هرمی) پیدا می‌کنند. بر این اساس در بین مولکول‌های نام برده در گزینه‌ها، تنها نقشه پتانسیل الکتروستاتیکی NH_3 می‌تواند به شکل d باشد. بنابراین گزینه چهارم نیز نادرست بوده و پاسخ صحیح، گزینه سوم است.

گروه آموزشی ماز

۱۰۳- در یک ظرف ۵۰۰ میلی‌لیتری دربسته، مخلوطی از ۰/۵۵ مول گاز متان و ۰/۲ مول گاز هیدروژن سولفید را تا برقرار شدن تعادل: $CH_4(g)+2H_2S(g) \rightleftharpoons CS_2(g)+4H_2(g)$ گرما می‌دهیم. اگر در حالت تعادل، ۸ گرم گاز متان در مخلوط گازها وجود داشته باشد، ثابت تعادل در شرایط آزمایش کدام است؟ $(H=1, C=12: g \cdot mol^{-1})$

۱) $6/4 \times 10^{-2}$
۲) 4×10^{-3}
۳) ۱۵/۶۲۵
۴) ۲۵۰

پاسخ: گزینهٔ ۱ (متوسط ـ مسأله ـ ۱۲۰۴)

معادله موازنه‌شده واکنش و روند تغییرات مواد به صورت زیر است:

	$CH_4(g)$	+	$2H_2S(g)$	⇌	$CS_2(g)$	+	$4H_2(g)$	
در ابتدای واکنش :	۰/۵۵		۰/۲		۰		۰	
در لحظه تعادل :	$۰/۵۵-x$		$۰/۲-2x$		x		$4x$	

در حالت تعادل، ۸ گرم گاز متان(معادل با ۰/۵ مول) داریم، بر این اساس، خواهیم داشت:

$$۰/۵۵ - x = ۰/۵ \longrightarrow x = ۰/۰۵$$

از آنجا که حجم سامانه در حالت تعادل برابر با ۵۰۰ میلی‌لیتر است، ثابت تعادل واکنش را می‌توانیم به صورت زیر بنویسیم:

$$K = \frac{[H_2]^4[CS_2]}{[H_2S]^2[CH_4]} = \frac{(۰/۲)^4 \times ۰/۰۵}{(۰/۱)^2 \times ۰/۵} \times (\frac{۱}{۰/۵})^{۵-۳} = ۶/۴ \times ۱۰^{-2}$$

کنکور ۱۴۰۴
www.biomaze.ir
سنجش کلاد
www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshClouds

به منظور محاسبهٔ ثابت تعادل واکنش $aA + bB \rightleftharpoons cC + dD$ می‌توانیم از رابطهٔ زیر استفاده کنیم:

$$K = \frac{(n_C)^c \times (n_D)^d}{(n_A)^a \times (n_B)^b} \times \left(\frac{1}{V}\right)^{\Delta n} \quad \text{و} \quad \Delta n = (c+d) - (a+b)$$

دقت کنید که در محاسبهٔ Δn صرفا ضرایب مواد گازی و مواد در حالت محلول را در نظر بگیرید. در این حالت، اگر مجموع ضرایب واکنش‌دهنده‌های گازی یا محلول با مجموع ضرایب فراورده‌های گازی یا محلول برابر باشد، Δn برابر با صفر شده و مقدار ثابت تعادل مستقل از حجم ظرف می‌شود. در این حالت، رابطهٔ ثابت تعادل به صورت زیر خواهد بود:

$$K = \frac{(n_C)^c \times (n_D)^d}{(n_A)^a \times (n_B)^b}$$

گروه آموزشی ماز

۱۰۴- جدول زیر، مقدار آنتالپی فروپاشی شبکهٔ بلوری تشکیل شده از کاتیون‌ها و آنیون‌های بیست عنصر اول جدول تناوبی (با یکای کیلوژول بر مول) را نشان می‌دهد. با توجه به آن، کدام‌یک از موارد زیر درست است؟

کاتیون \ آنیون	A	D
X	۷۸۰	M
Y	۹۵۰	۲۵۰۰
Z	۲۹۰۰	۳۸۰۰

الف: مقدار عددی M از ۹۵۰ کم‌تر است.

ب: شعاع یونی X، بزرگ‌تر از شعاع یونی Y است.

پ: عنصر سازندهٔ آنیون A، می‌تواند یک هالوژن باشد.

ت: عنصر سازندهٔ کاتیون Z، می‌تواند یک فلز قلیایی باشد.

۱) «الف» و «ت»
۲) «ب» و «ت»
۳) «ب» و «پ»
۴) «الف» و «پ»

پاسخ: گزینهٔ ۳ (متوسط ـ مفهومی ـ ۱۲۰۳)

ابتدا به درسنامه زیر دقت کنید:

به گرمای لازم در فشار ثابت برای فروپاشی شبکهٔ بلوری یک مول جامد یونی و تبدیل آن به یون‌های گازی(بر حسب کیلوژول بر مول)، آنتالپی فروپاشی شبکه می‌گویند و آن را با نماد $\Delta H_{\text{فروپاشی}}$ نشان می‌دهند. هر چه چگالی بار یون‌های سازندهٔ ترکیب یونی بیشتر باشد، نیروی جاذبهٔ میان یون‌ها قوی‌تر بوده و استحکام و پایداری شبکه بیشتر است. در نتیجه برای فروپاشی شبکه به انرژی بیشتری نیاز است. به کمک روش زیر، می‌توان آنتالپی فروپاشی شبکهٔ ترکیب‌های یونی را با هم مقایسه کرد.

گام اول: هر چه مجموع قدرمطلق بار یک کاتیون و یک آنیون در یک ترکیب یونی بزرگ‌تر باشد، آنتالپی فروپاشی شبکهٔ آن ترکیب بزرگ‌تر است. به عنوان مثال، دو ترکیب $MgCl_2$ و MgO را در نظر بگیرید. کاتیون دو ترکیب یکسان است اما از آنجا که قدرمطلق بار O^{2-} نسبت به Cl^- بیشتر است، بنابراین آنتالپی فروپاشی منیزیم اکسید نسبت به منیزیم کلرید بیشتر خواهد بود.

گام دوم: اگر مجموع قدرمطلق بار یک کاتیون و یک آنیون برای دو ترکیب یونی برابر باشد، شعاع یون‌ها را با هم مقایسه می‌کنیم. هر چه شعاع یون‌ها کوچکتر باشد، آنتالپی فروپاشی شبکه بزرگتر است. به عنوان مثال دو ترکیب Na_3N و Na_3P را درنظر بگیرید. کاتیون دو ترکیب و بار آنیون‌ها یکسان است، اما از آنجا که شعاع یون N^{3-} کوچکتر از یون P^{3-} است، آنتالپی فروپاشی سدیم نیترید نسبت به سدیم فسفید بیشتر خواهد بود.

موارد «ب» و «پ» درست هستند.

بررسی موارد:

الف: با توجه به جدول داده‌شده، آنتالپی فروپاشی ترکیب حاصل از کاتیون‌های Y و Z با آنیون D نسبت به آنتالپی فروپاشی ترکیب حاصل از کاتیون این دو عنصر با آنیون A تفاوت زیادی دارد. بر این اساس می‌توان نتیجه گرفت که بار آنیون D نسبت به بار آنیون A بیشتر است. از طرفی، با توجه به تفاوت کم آنتالپی فروپاشی دو ترکیب XA و YA، می‌توان نتیجه گرفت که بار الکتریکی دو کاتیون X و Y با یکدیگر برابر بوده و این دو کاتیون، تنها در اندازهٔ شعاع یونی، با یکدیگر تفاوت دارند. بنابراین بار ترکیب حاصل از X و D، نسبت به ترکیب حاصل از Y و A بیشتر بوده و از این‌رو، انتظار می‌رود که آنتالپی فروپاشی ترکیب حاصل از X و D، بیشتر از ۹۵۰ کیلوژول بر مول باشد.

ب: آنتالپی فروپاشی ترکیب حاصل از X و A برابر با ۷۸۰ کیلوژول بر مول و آنتالپی فروپاشی ترکیب حاصل از Y و A معادل ۹۵۰ کیلوژول بر مول است. با توجه به یکسان بودن آنیون سازنده در این دو ترکیب و تفاوت کم آنتالپی فروپاشی آن‌ها، می‌توان نتیجه گرفت که شعاع یون X نسبت به یون Y بزرگتر است.

پ: با توجه به داده‌های جدول، آنتالپی فروپاشی ترکیب حاصل از کاتیون‌های داده‌شده با آنیون A تفاوت زیادی نسبت به ترکیب حاصل از این کاتیون‌ها با آنیون D دارد. بنابراین می‌توان نتیجه گرفت که بار آنیون D نسبت به بار آنیون A بیشتر است. بر این اساس، آنیون D نمی‌تواند متعلق به یک هالوژن باشد اما آنیون A می‌تواند یک هالوژن باشد.

ت: با توجه به داده‌های جدول، آنتالپی فروپاشی ترکیب حاصل از Z و A نسبت به ترکیب حاصل از دو کاتیون دیگر با آنیون A، تفاوت زیادی دارد. بنابراین می‌توان نتیجه گرفت که بار کاتیون‌های X و Y، با هم مشابه و نسبت به کاتیون Z کمتر است. بر این اساس، کاتیون Z، نمی‌تواند متعلق به یک فلز قلیایی با بار (+۱) باشد.

گروه آموزشی ماز

کنکور ۱۴۰۴
www.biomaze.ir
سنجش کلاد
www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshClouds

۱۰۵- کدام مورد درست است؟

۱) در واکنش تبدیل یک هیدروکربن به فراوردهٔ آلی اکسیژن‌دار، (مجموع) عدد اکسایش اتم(های) کربن، کاهش می‌یابد.

۲) یکی از روش‌های بازیافت شیمیایی PET ، واکنش آن با متانول در شرایط مناسب و تبدیل آن به مواد مفید است.

۳) یک واکنش شیمیایی هنگامی از دیدگاه اتمی به صرفه است که شمار بیش‌تری از واکنش‌دهنده‌ها به فراورده تبدیل شوند.

۴) واکنش: $2CH_4(g) \rightarrow C_2H_6(g) + H_2(g)$ ، یک واکنش گرماگیر با مقدار انرژی فعال‌سازی منفی است.

پاسخ: گزینهٔ ۲ (آسان ـ حفظی / مفهومی ـ ۱۲۰۴)

یکی از مواد پلاستیکی قابل بازیافت، پلی اتیلن ترفتالات است. برای این منظور، باید آن‌ها را جداگانه جمع‌آوری و سپس با انجام فرایندهای فیزیکی و شیمیایی، به مواد قابل استفاده تبدیل کرد. از آنجا که سالانه حجم انبوهی از پسماندهای این پلیمر تولید می‌شود، بازیافت شیمیایی آن، بسیار ضروری و ارزشمند است. شیمی‌دان‌ها با بررسی‌های فراوان پی بردند که PET در شرایط مناسب با متانول واکنش می‌دهد و به مواد مفیدی تبدیل می‌شود؛ موادی که می‌توان آن‌ها را برای تولید پلیمرها به کار برد.

بررسی سایر گزینه‌ها:

۱ در واکنش تبدیل یک هیدروکربن به فراورده آلی اکسیژن‌دار، مجموع عدد اکسایش اتم‌های کربن افزایش خواهد یافت.

۳ یک واکنش شیمیایی هنگامی از دیدگاه اتمی به صرفه‌تر است که شمار بیشتری از اتم‌های واکنش‌دهنده به فراورده‌های سودمند تبدیل شود.

۴ برای آغاز هر واکنش شیمیایی، مقدار معینی از انرژی لازم است که به آن، انرژی فعال‌سازی واکنش می‌گوییم. انرژی فعال‌سازی همواره مقداری مثبت دارد و نمی‌تواند یک عدد منفی باشد.

گروه آموزشی ماز

کنکور ۱۴۰۴
www.biomaze.ir
www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshClouds