کدکنترل

121

A

پنجشنبه

۱۴۰۳/۰۲/۲۷

گروه آموزشی ماز

پاسخنامه آزمون الکترونیکی کنکوری‌های ریاضی ــ مرحله ۱۹

درس	مسئول درس	طراحان	ویراستاران
ریاضیات	محدثه شیخعلی	محمد خانگلدی ـ رسول حاجی‌زاده ـ نوید یکتا	مهرداد اسپیدکار ـ حمیدرضا ولی‌پور رضا قانع
فیزیک	سجاد صادقی‌زاده	کامران ابراهیمی ـ سجاد صادقی‌زاده	مروارید شاه حسینی ـ نرجس تیمناک امیرهوشنگ کیانی ـ علیرضا ملک‌حسینی محمدصادقی فرد
شیمی	فرشاد هادیان‌فرد	فرشاد هادیان‌فرد ـ سعید نوری سعیده محبی ـ علی ترابی	فرهنگ امیری ـ سجاد سیف‌اللهی محمد داوودآبادی‌فراهانی ـ عالیه میرزایی
مدیر آزمون: رسول خنجری			

حق چاپ و تکثیر سوالات به هر روش (الکترونیکی و...) پس از برگزاری آزمون برای تمامی اشخاص حقیقی و حقوقی تنها با مجوز «گروه ماز» مجاز می‌باشد و با متخلفین برابر مقررات رفتار می‌شود.

به دلیل عدم رضایت تیم ماز، هرگونه استفادهٔ غیرقانونی از دفترچه سوالات و پاسخنامه ماز برای تمامی اشخاص، شرعاً حرام است.

در کنکور سراسری هر سال بیش از یک میلیون نفر شرکت کرده و برای به‌دست آوردن صندلی دانشگاه‌های برتر با هم رقابت می‌کنند.

یکی از وظایف کنکور، متمایز کردن این افراد از هم می‌باشد. متمایز کردن به این معناست که کنکور باید طوری طراحی شود که تا جای ممکن، دو نفر از داوطلبان رتبهٔ یکسانی کسب نکنند. همین ماجرا باعث می‌شود که طراحان کنکور سراسری مجبور شوند هر سال سؤالات خود را از سال گذشته سخت‌تر طراحی کنند. به همین دلیل هست که هر سال شاهد نوآوری‌های جدیدی در کنکور هستیم.

یکی از ویژگی‌های ثابت کنکور در سالیان اخیر، سخت شدن یک دفعه‌ای بعضی درس‌هاست. به این معنی که در هر سال به صورت تصادفی، تعدادی از دروس سخت‌تر از حد معمول طراحی می‌شوند.

ما در آزمون‌های ماز نیز تا کنکور همین کار را خواهیم کرد و روند طراحی سؤالات ما دقیقاً به همین صورت خواهد بود. در هر آزمون به صورت تصادفی چند درس سخت‌تر از حد معمول طراحی خواهند شد تا بتوانیم شما را به چالش بکشیم و کنکور را دقیق‌تر از هر جای دیگری، برای شما شبیه‌سازی کنیم.

در این آزمون دروس ریاضی و شیمی سخت‌تر طراحی شدند.

گروه آموزشی ماز

دوست مازی من، سلام!

برای اینکه ما نظرت رو در رابطه با آزمون بدونیم نیاز هست که در نظرسنجی شرکت کنی.

برای شرکت در نظرسنجی فقط کافیه روی لینک زیر بزنی یا QR کد زیر رو اسکن کنی تا صفحهٔ نظرسنجی برات باز بشه!

ممنون که نظرت رو به ما میگی و بهمون برای بهتر شدن آزمون‌ها کمک می‌کنی :)

https://B2n.ir/h48988

مازی‌ها؛ میدونین که جلوی هر سوال ما براتون ویژگی و آدرس اون سوال رو میذاریم، حالا واسه اینکه کامل یادش بگیرید میخوام براتون بگم که چجوری اینا رو براتون چیدیم:

(سطح سوال ـ سبک سوال ـ آدرس سوال)

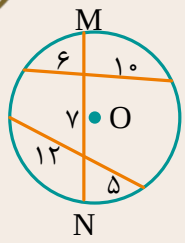
آسان ـ متوسط ـ سخت

مفهومی ـ مساله و ...

مثلا: ۱۱۰۱ یعنی فصل ۱ پایه یازدهم

خاطره بازی...

۲۱- در شکل مقابل، اندازه وتر MN کدام است؟

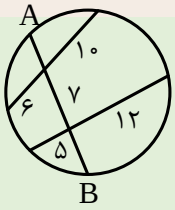


۱) ۱۶
۲) ۱۷ ✓
۳) ۱۸
۴) ۲۰

(مرحله ۱۲ آزمون‌های سالیانه ـ ریاضیات رشته ریاضی)

علت مطابقت:
این سؤال از آزمون ماز، بدون تغییر اعداد و حتی بدون تغییر خواسته سؤال توی کنکور اومد. این دیگه اسمش مطابقت نیست این خودِ خودِ سؤاله!!!!

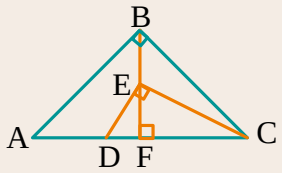
۳۰- در شکل زیر، طول وتر AB کدام است؟



۱) ۱۶
۲) ۱۷ ✓
۳) ۱۸
۴) ۱۹

(کنکور اردیبهشت ۱۴۰۳ـ ریاضیات رشته ریاضی)

۲۷- در شکل مقابل، $EB=۶$ و $BF=۴$ است. اگر $DC=۷$ باشد، حاصل $AC-AF$ کدام است؟

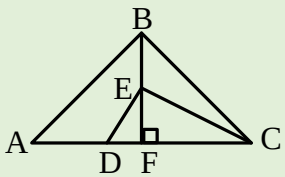


۱) $۲\sqrt{۳}$
۲) $۴\sqrt{۳}$ ✓
۳) $۶\sqrt{۳}$
۴) $۸\sqrt{۳}$

(مرحله ۱۲ آزمون‌های سالیانه ـ ریاضیات رشته ریاضی)

علت مطابقت:
در هر دو سؤال باید از روابط طولی در مثلث قائم‌الزاویه استفاده کنیم و مجهول موردنظرو به دست بیاریم. اگه توجه بکنی شکل سؤال‌ها هم دقیقاً مثل همِ...

۲۹- در شکل زیر، $A\hat{B}C=C\hat{E}D=۹۰^\circ$ است. اگر $AD=۳$، $EF=۴$ و $DF=۱$ باشد، اندازه BC کدام است؟



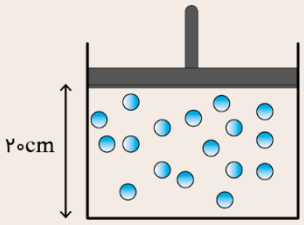
۱) $۴\sqrt{۶}$
۲) $۱۰\sqrt{۲}$
۳) $۶\sqrt{۳}$
۴) $۸\sqrt{۵}$ ✓

(کنکور اردیبهشت ۱۴۰۳ـ ریاضیات رشته ریاضی)

خاطره بازی...

۷۱- در شکل زیر، پیستونی به جرم ۲kg و سطح مقطع ۱۰۰cm^۲ روی مقداری گاز آرمانی در حال تعادل قرار دارد. اگر مکعبی از جنس طلا به ضلع ۱۰cm روی پیستون قرار دهیم، در دمای ثابت، پیستون ۳cm پایین می‌آید و دوباره به تعادل می‌رسد. حجم حفرهٔ درون مکعب چند سانتی‌متر مکعب است؟

$(\rho_{طلا}=۲۰\frac{g}{cm^۳}\ ,\ g=۱۰\frac{N}{kg}\ ,\ P_۰=۱۰۰kPa)$



۱) ۱۰۰ ✓

۲) ۲۰۰

۳) ۵۰

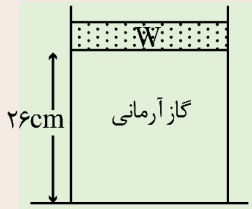
۴) مکعب توپر است.

(مرحله ۸ آزمون‌های سالیانه ـ فیزیک رشته ریاضی)

علت مطابقت:

توی هر دو سؤال، روی پیستون یک جسم قرار داده شده که باعث پایین آمدن اون میشه. فقط سؤال ما یه کم سختره و باعث حفره توی مبحث چگالی هم ترکیب شده .

۷۵- مطابق شکل، زیر پیستون آزاد به وزن W = ۴۰N گاز آرمانی قرار دارد و فشار هوا ۱۰^۵ پاسکال است. روی پیستون وزنهٔ ۸۰ نیوتونی قرار می‌دهیم، در دمای ثابت، وزنه ۴cm پایین می‌آید و دوباره به حال تعادل قرار می‌گیرد. سطح قاعدهٔ پیستون چند سانتی‌متر مربع است؟



۱) ۶۰

۲) ۴۰ ✓

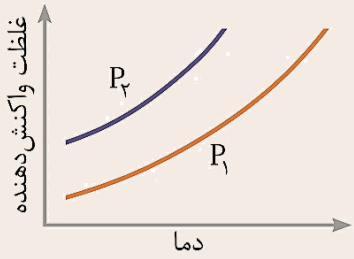
۳) ۳۰

۴) ۲۰

(کنکور اردیبهشت ۱۴۰۳ـ فیزیک رشته ریاضی)

خاطره بازی...

۱۰۰- نمودار مقابل، روند تغییر غلظت واکنش‌دهنده در واکنش $A(g) \rightleftharpoons B(g) + C(g)$ بر حسب تغییر دما را نشان می‌دهد. در رابطه با این واکنش، کدام مورد درست است؟

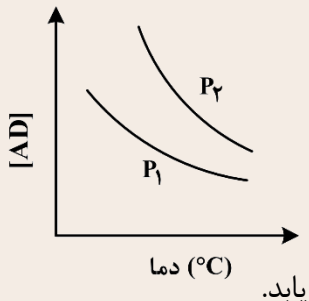


۱) واکنش مورد نظر، برخلاف واکنش کلی فرایند هابر، گرماده است.
۲) در شرایط آزمایش، فشار P_2 در مقایسه با فشار P_1، کمتر است.
۳) با کاهش دمای سامانه واکنش، مقدار ثابت تعادل کاهش می‌یابد.
۴) پس از افزودن گاز B به سامانه، با جابه‌جایی تعادل، مقداری گرما مصرف می‌شود. ✓

(مرحله ۱۷ آزمون‌های سالیانه ـ شیمی رشته ریاضی)

علت مطابقت:
مشابهت نمودار داده شده در کنکور و نکات مطرح شده از نمودار، با نمودار و نکات مطرح شده در آزمون ماز

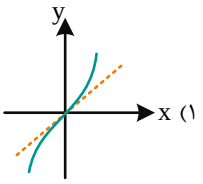
۱۰۵- نمودار زیر، تغییر غلظت مولی فراورده را برای واکنش: $A(g)+D(g) \rightleftharpoons AD(g)$، در دو شرایط متفاوت نشان می‌دهد. کدام مورد درست است؟ (P، فشار است.)

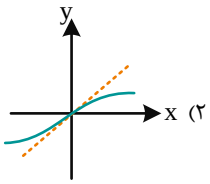


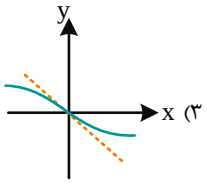
۱) $P_1 < P_2$ و با کاهش دما، مقدار K واکنش افزایش می‌یابد. ✓
۲) $P_2 < P_1$ و با افزایش فشار، تعادل به سمت راست جابه‌جا می‌شود.
۳) $P_2 < P_1$ و با کاهش دما، مقدار A و D، به یک نسبت تغییر می‌کند.
۴) $P_1 < P_2$ و با افزایش حجم ظرف، غلظت گاز A و مقدار گاز AD افزایش می‌یابد.

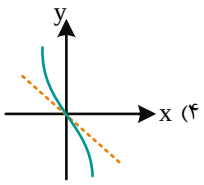
(کنکور اردیبهشت ۱۴۰۳ـ شیمی رشته ریاضی)

۱- تابع f اکیداً نزولی است. اگر مجموعه جواب نامعادلهٔ $fog(x) < f(x)$ فاصلهٔ $(0,+\infty)$ باشد، نمودار $g(x)$ به کدام صورت می‌تواند باشد؟

۱) 

۲) 

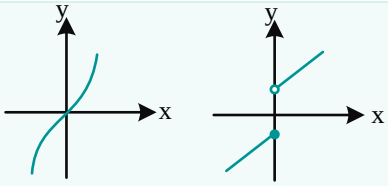
۳) 

۴) 

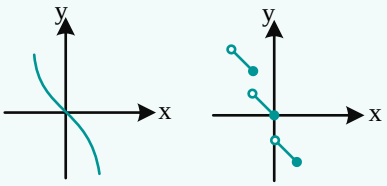
پاسخ: گزینه ۱ (متوسط ـ مفهومی ـ ۱۲۰۱)

دربارهٔ توابع اکیداً یکنوا:

تابع f اکیداً صعودی است $\Rightarrow f(\alpha) \geq f(\beta) \Leftrightarrow \alpha \geq \beta$



تابع f اکیداً نزولی است $\Rightarrow f(\alpha) \geq f(\beta) \Leftrightarrow \alpha \leq \beta$



پاسخ تشریحی:

تابع f اکیداً نزولی است. بنابراین: $fog(x) < f(x) \Rightarrow f\big(g(x)\big) < f(x) \Rightarrow g(x) > x$

پس تابع g باید در بازهٔ $(0,+\infty)$ بالاتر از خط $y = x$ قرار گیرد که نمودار موجود در گزینه اول این شرایط را دارد.

سوالات منتخب:

اگر $f(x) = 2^x$ باشد، دامنهٔ تابع $y = \sqrt{f(\frac{1}{x}) - f(x)}$ به کدام صورت است؟

۱) $\mathbb{R} - (-1,1)$ ۲) $[-1,0) \cup (0,1]$ ۳) $[-1,0) \cup [1,+\infty)$ ۴) $(-\infty,-1] \cup (0,1]$ ✓

گروه آموزشی ماز

۲- تابع $f(x) = 2 - \sqrt{2x-2}$ مفروض است. اگر $a > b$ و دامنه و برد تابع $y = af(bx) - 2$ برابر باشند، $a - b$ کدام است؟

۱) $\frac{1}{b}$ ۲) $\frac{1}{2b}$ ۳) $\frac{2}{b}$ ۴) $\frac{2}{3b}$

پاسخ: گزینه ۲ (متوسط ـ ترکیبی / مفهومی ـ ۱۲۰۱)

درباب روش انتقال در رسم نمودار:

فرض کنید برد تابع $y = f(x)$ بازهٔ $[a,b]$ باشد. $(k > 0)$

نوع تبدیل	تابع جدید	برد تابع جدید
k واحد انتقال عمودی به بالا	$f(x) + k$	$[a+k, b+k)$
k واحد انتقال عمودی به پایین	$f(x) - k$	$[a-k, b-k)$
انبساط عمودی	$kf(x)$ $(k > 1)$	$[ka, kb)$
انقباض عمودی	$kf(x)$ $(0 < k < 1)$	$[ka, kb)$
قرینه نسبت به محور xها	$-f(x)$	$(-b, -a]$

www.biomaze.ir

فرض کنید دامنهٔ تابع $y=f(x)$ بازهٔ $[a,b)$ باشد. $(k>0)$

نوع تبدیل	تابع جدید	دامنهٔ تابع جدید
k واحد انتقال افقی به راست	$f(x-k)$	$[a+k,b+k)$
k واحد انتقال افقی به چپ	$f(x+k)$	$[a-k,b-k)$
انبساط افقی	$f(kx)\ \ (0<k<1)$	$[\frac{a}{k},\frac{b}{k})$
انقباض افقی	$f(kx)\ (k>1)$	$[\frac{a}{k},\frac{b}{k})$
قرینه نسبت به محور yها	$f(-x)$	$(-b,-a]$

پاسخ تشریحی:

دامنه و برد تابع $f(x)$ به ترتیب بازه‌های $D_f=[1,+\infty)$ و $R_f=(-\infty,2]$ می‌باشد. بدیهی است اگر دامنه و برد تابع $y=af(bx)-2$ با هم برابر شوند، a و b غیرهم‌علامت هستند و چون $a>b$ می‌باشد، در نتیجه $a>0$ و $b<0$ است.

$$y=af(bx)-2=a\times(2-\sqrt{2bx-2})-2$$

$$f(x)\le 2\Rightarrow f(bx)\le 2\xrightarrow{\times a} af(bx)\le 2a\xrightarrow{-2} af(bx)-2\le 2a-2\Rightarrow R=(-\infty,2a-2]$$

$$bx\ge 1\xrightarrow{\div b} x\le\frac{1}{b}\Rightarrow D=(-\infty,\frac{1}{b}]$$

بنابراین:

$$2a-2=\frac{1}{b}\Rightarrow a-1=\frac{1}{2b}$$

سوالات منتخب:

اگر برد تابع f برابر $R_f=\left[-\sqrt{3},2\right]$ باشد، برد تابع $g(x)=\sqrt{2}f(x-1)+1$ شامل چند عدد صحیح است؟

۱) ۵ ✓ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

گروه آموزشی ماز

۳- تابع $f(x)=\begin{cases}-x^2+ax & x<2\\ (6-a)x+4 & x\ge 2\end{cases}$ اکیداً صعودی است. به ازای بیشترین مقدار a، باقی‌ماندهٔ تقسیم $f(x)$ بر $5x+5$ کدام است؟

۱) -2 ۲) -4 ۳) -6 ۴) -8

پاسخ: گزینه ۳ (متوسط ـ ترکیبی / مفهومی ـ ۱۲۰۱)

تقسیم:

برای محاسبهٔ باقی‌ماندهٔ تقسیم $f(x)$ بر دو جمله‌ای $ax+b$ کافی است ریشهٔ مقسوم‌علیه یعنی $-\frac{b}{a}$ را در مقسوم $(f(x))$ قرار دهیم.

$$\begin{array}{c}f(x)\\ \vdots\\ \hline R\end{array}\ \Big|\ ax+b\Rightarrow R=f(-\frac{b}{a})$$

پاسخ تشریحی:

در ضابطهٔ اول نباید رأس سهمی درون بازهٔ دامنهٔ تابع قرار داشته باشد. (چرا؟) بنابراین:

$$\frac{a}{2}\ge 2\Rightarrow a\ge 4\ \ (I)$$

حد ضابطهٔ بالا در $x=2$ باید کوچک‌تر یا مساوی مقدار ضابطهٔ پایین در $x=2$ باشد، یعنی:

$$\lim_{x\to 2^-} f(x)\le f(2)\Rightarrow 12-2a+4\ge -4+2a\Rightarrow a\le 5\ \ (II)$$

از طرفی، شیب خط در ضابطه دوم باید مثبت باشد، یعنی:

$$6-a>0\Rightarrow a<6\ \ (III)$$

پس:

$$(I)\cap(II)\cap(III)\Rightarrow 4\le a\le 5$$

باقی‌ماندهٔ تقسیم $f(x)$ بر $5x+5$ همان $f(-1)$ است که برای به دست آوردن آن از ضابطهٔ بالا استفاده می‌کنیم.

$$f(x)=-x^2+ax\xrightarrow[x=-1]{a=5} R=f(-1)=-1-5=-6$$

www.biomaze.ir

۴- اگر تابع $f(x)=(x-1)(x^2-5x+7)$ را a واحد به سمت چپ و b واحد به سمت پایین انتقال دهیم، تابع $g(x)=x(x^2+3x+3)$ حاصل می‌شود. مقدار $2a-b$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

پاسخ: گزینه ۴ (متوسط ـ مفهومی ـ ۱۴۰۱)

پاسخ تشریحی:

$f(x)=(x-1)(x^2-5x+7) \Rightarrow f(x)=x^3-6x^2+12x-7 \Rightarrow f(x)=(x-2)^3+1$

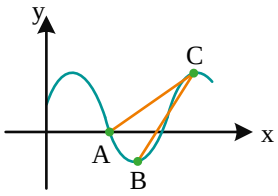
$g(x)=x(x^2+3x+3) \Rightarrow g(x)=x^3+3x^2+3x \Rightarrow g(x)=(x+1)^3-1$

اگر تابع $f(x)$ را سه واحد به چپ و ۲ واحد به پایین منتقل کنیم، تابع $g(x)$ حاصل می‌شود. پس:

$a=3, b=2 \Rightarrow 2a-b=4$

گروه آموزشی ماز

۵- قسمتی از نمودار تابع $f(x)=2\cos(\pi x-\frac{\pi}{4})$ رسم شده است. $\tan A\hat{C}B$ کدام است؟



۱) $\frac{8}{17}$ ۲) $\frac{8}{19}$ ۳) $\frac{1}{2}$ ۴) $\frac{9}{17}$

پاسخ: گزینه ۲ (متوسط ـ مفهومی ـ ۱۴۰۲)

باز هم توابع مثلثاتی:

در رابطه با نمودار توابع $y=a\sin(bx+c)+d$ و یا $y=a\cos(bx+c)+d$ می‌توان گفت:

۱) دورهٔ تناوب $T=\frac{2\pi}{|b|}$

۲) $\begin{cases} y_{max}=d+|a| \\ y_{min}=d-|a| \end{cases}$ دو معادله دو مجهول $\rightarrow \begin{cases} d=\frac{y_{max}+y_{min}}{2} \\ |a|=\frac{y_{max}-y_{min}}{2} \end{cases}$

تانژانت زاویهٔ بین دو خط: اگر شیب خطوط d_1 و d_2 به ترتیب برابر m_1 و m_2 باشد، تانژانت زاویهٔ بین دو خط برابر است با: $\tan\hat{\alpha}=\left|\frac{m_1-m_2}{1+m_1m_2}\right|$

پاسخ تشریحی:

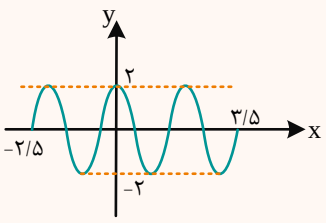
دورهٔ تناوب تابع برابر $T=\frac{2\pi}{\pi}=2$ است. فاصلهٔ طولی A و C برابر $\frac{3}{2}=\frac{3T}{4}$ و فاصلهٔ طولی B و C برابر $\frac{T}{2}=1$ است.

عرض نقاط B و C همان min و max تابع یعنی -2 و ۲ است.

$$\left.\begin{matrix} m_{AC}=\frac{2}{\frac{3}{2}}=\frac{4}{3} \\ m_{BC}=\frac{4}{1}=4 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \tan A\hat{C}B=\left|\frac{m_1-m_2}{1+m_1m_2}\right|=\left|\frac{\frac{4}{3}-4}{1+\frac{4}{3}\times 4}\right|=\frac{\frac{8}{3}}{1+\frac{16}{3}}=\frac{\frac{8}{3}}{\frac{19}{3}}=\frac{8}{19}$$

سوالات منتخب:

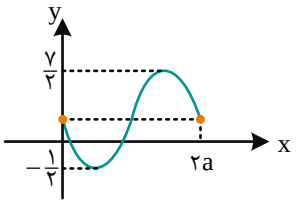
شکل روبه‌رو، قسمتی از نمودار تابع $y=a\sin\pi(\frac{1}{2}+bx)$ است. $a.b$ کدام است؟ $(b>0)$



۱) ۲ ✓
۲) ۲/۵
۳) ۳
۴) ۳/۵

گروه آموزشی ماز

۶- نمودار تابع $f(x)=a\cos\pi(bx+c)+c$ به صورت مقابل است. حاصل $a+۲b+۳c$ کدام است؟



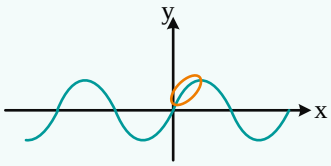
۱) ۵/۵
۲) ۶
۳) ۷
۴) ۷/۵

پاسخ: گزینه ۱ (متوسط ـ مفهومی / محاسباتی ـ ۱۲۰۲)

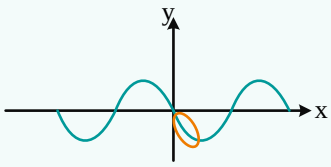
آنچه باید دربارهٔ نمودار sin و cos بدانید:

$f(x)=a\sin(bx)+c$

- a و b هم‌علامت هستند. ← در سمت راست $x=۰$ تابع صعودی می‌باشد.



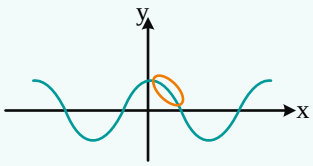
- a و b غیرهم‌علامت هستند. ← در سمت راست $x=۰$ تابع نزولی می‌باشد.



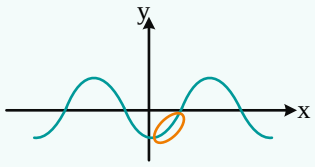
جابه‌جایی روی محور x وجود ندارد.

$f(x)=a\cos(bx)+c$

- $a>۰$ (علامت b تاثیر ندارد.) ← در سمت راست $x=۰$ تابع نزولی می‌باشد.

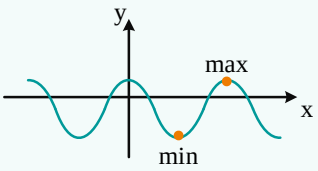


- $a<۰$ (علامت b تاثیر ندارد.) ← در سمت راست $x=۰$ تابع صعودی می‌باشد.

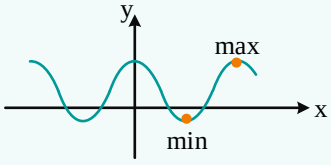


در هر نمودار $y=a\sin(bx)+c$ یا $y=a\cos(bx)+c$ می‌توان گفت:

نقطهٔ max به محور x نزدیک‌تر از نقطهٔ min است. $\Rightarrow c<۰$



نقطهٔ min به محور x نزدیک‌تر از نقطهٔ max است. $\Rightarrow c>۰$



پاسخ تشریحی:

مقادیر ماکزیمم و مینیمم تابع به ترتیب $\frac{۷}{۲}$ و $-\frac{۱}{۲}$ است.

$$\begin{cases}\max=|a|+c=\frac{۷}{۲}\\ \min=-|a|+c=-\frac{۱}{۲}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}c=\frac{۳}{۲}\\ |a|=۲\end{cases}$$

با توجه به نمودار $۲a$ مثبت است، پس $a=۲$ می‌باشد. $\Rightarrow$

تابع را مرتب می‌کنیم. ببینید:

$$f(x)=۲\cos\pi(bx+\frac{۳}{۲})+\frac{۳}{۲}\Rightarrow f(x)=۲\cos(\pi bx+\frac{۳\pi}{۲})+\frac{۳}{۲}\Rightarrow f(x)=۲\sin(\pi bx)+\frac{۳}{۲}$$

تابع در $x=۰$ نزولی و در نتیجه ضریب x باید منفی باشد، پس $b<۰$ است. از طرفی، دورهٔ تناوب تابع برابر $T=۲a=۴$ است.

www.biomaze.ir

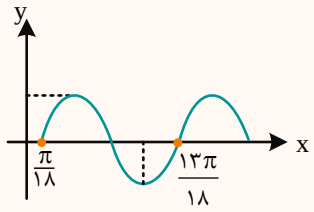
$T=\frac{۲\pi}{|b\pi|}=۴\Rightarrow|b|=\frac{۱}{۲}\xrightarrow{b<۰}b=-\frac{۱}{۲}$

پس حال $a+۲b+۳c$ برابر است با:

$a+۲b+۳c=۲+۲(-\frac{۱}{۲})+۳(\frac{۳}{۲})=۲-۱+\frac{۹}{۲}=\frac{۱۱}{۲}=۵/۵$

سوالات منتخب:

شکل زیر، قسمتی از نمودار تابع با ضابطهٔ $y=a-۲\cos(bx+\frac{\pi}{۲})$ است. $a+b$ کدام است؟



۱) $\frac{۱}{۲}$ ۲) ۱ ۳) $\frac{۳}{۲}$ ✓ ۴) ۲

۷- مجموع جواب‌های معادلهٔ $\cot(\frac{۳\pi}{۲}-x)(۱+\cos ۲x)+\cos ۲x=-۱$ در فاصلهٔ $[۰,۲\pi]$ کدام است؟

۱) $\frac{۵\pi}{۲}$ ۲) ۴π ۳) $\frac{۹\pi}{۲}$ ۴) ۹π

پاسخ: گزینه ۱ (متوسط ـ مفهومی / محاسباتی ـ ۱۴۰۲)

پند مثلثاتی:

اگر $\sin x\pm\cos x=\pm۱$ باشد یا $\sin x=۰$ است و یا $\cos x=۰$.

پاسخ تشریحی:

معادله را تا حد امکان ساده می‌کنیم. دامنهٔ تابع $y=\cot(\frac{۳\pi}{۲}-x)$ برابر $\mathbb{R}-\{x=k\pi+\frac{\pi}{۲},k\in\mathbb{Z}\}$ است. پس نباید نقاط $k\pi+\frac{\pi}{۲}\ (k\in\mathbb{Z})$ در مجموعه جواب‌های معادله باشند. ببینید:

$\cot(\frac{۳\pi}{۲}-x)(۱+\cos ۲x)+\cos ۲x=-۱\Rightarrow\tan x\times ۲\cos^۲x+\cos ۲x=-۱\Rightarrow ۲\sin x\cos x+\cos ۲x=-۱$

$\Rightarrow\sin ۲x+\cos ۲x=-۱$

این معادله جزء حالت‌های خاص است و به صورت زیر حل می‌شود:

$\sin ۲x=-۱,\cos ۲x=۰\Rightarrow ۲x=۲k\pi-\frac{\pi}{۲}\Rightarrow x=k\pi-\frac{\pi}{۴}\Rightarrow\begin{cases}x=\frac{۳\pi}{۴}\\x=\frac{۷\pi}{۴}\end{cases}$

در این حالت، $\cot(\frac{۳\pi}{۲}-x)$ یا $\tan x$ تعریف نمی‌شود. $\cos ۲x=-۱,\sin ۲x=۰\Rightarrow ۲x=۲k\pi+\pi\Rightarrow x=k\pi+\frac{\pi}{۲}$

بنابراین مجموع جواب‌های معادله برابر است با: $\frac{۳\pi}{۴}+\frac{۷\pi}{۴}=\frac{۵\pi}{۲}$

سوالات منتخب:

جواب کلی معادلهٔ مثلثاتی $\tan(\frac{۳\pi}{۲}-x)=\cos\frac{۴\pi}{۳}(\sin x-\tan x)$ کدام است؟

۱) $x=k\pi-\frac{\pi}{۶}$ ۲) $x=k\pi+\frac{\pi}{۳}$ ۳) $x=۲k\pi\pm\frac{\pi}{۳}$ ✓ ۴) $x=۲k\pi\pm\frac{\pi}{۶}$

۸- جواب کلی معادلهٔ $\sin ۲x\sin ۳x+\sin\frac{\pi}{۶}=\cos ۲x\cos ۳x-\cos\frac{\pi}{۳}$ به کدام صورت است؟

۱) $۲k\pi$ ۲) $\frac{۲k\pi}{۵}$ ۳) $k\pi+\frac{\pi}{۲}$ ۴) $\frac{k\pi}{۵}+\frac{\pi}{۱۰}$

www.biomaze.ir

پاسخ: گزینه ۲ (متوسط ـ ترکیبی / محاسباتی ـ ۱۲۰۲)

نسبت‌های مثلثاتی مجموع و تفاضل دو زاویه:

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\sin\beta$$
$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha\cos\beta \mp \sin\alpha\sin\beta$$
$$\tan(\alpha \pm \beta) = \frac{\tan\alpha \pm \tan\beta}{1 \mp \tan\alpha\tan\beta}$$

حل معادلات مثلثاتی در حالت خاص:

$\sin x = 0 \Rightarrow x = k\pi$

$\cos x = 0 \Rightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{2}$

$\sin x = 1 \Rightarrow x = 2k\pi + \frac{\pi}{2}$

$\cos x = 1 \Rightarrow x = 2k\pi$

$\sin x = -1 \Rightarrow x = 2k\pi - \frac{\pi}{2}$

$\cos x = -1 \Rightarrow x = (2k+1)\pi$

پاسخ تشریحی:

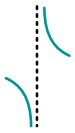
معادله را ساده می‌کنیم. ببینید:

$$\sin 2x\sin 3x + \sin\frac{\pi}{6} = \cos 2x\cos 3x - \cos\frac{\pi}{3} \Rightarrow \underbrace{\cos 2x\cos 3x - \sin 2x\sin 3x}_{\cos(2x+3x)} = \underbrace{\sin\frac{\pi}{6} + \cos\frac{\pi}{3}}_{1}$$

$$\Rightarrow \cos 5x = 1 \Rightarrow 5x = 2k\pi \Rightarrow x = \frac{2k\pi}{5}$$

گروه آموزشی ماز

۹- نمودار تابع $f(x) = \frac{x-1}{x^2(x^2-16)\cos(x-2)}$ در $x=a$ به صورت مقابل است. a کدام است؟



۱) صفر ۲) ۲
۳) ۴ ۴) -4

پاسخ: گزینه ۴ (متوسط ـ مفهومی / محاسباتی ـ ۱۲۰۳)

حد بی‌نهایت:

اگر $\lim_{x\to a} f(x) = L > 0$, $\lim_{x\to a} g(x) = 0$ و $g(x)$ در یک همسایگی a مثبت باشد، آن‌گاه:

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = +\infty$$

در حالت کلی می‌توان گفت حدهایی که صورت آن، عددی غیرصفر و مخرج آن ۰ (حدی) می‌شود دارای حاصل ∞ هستند. ببینید:

$$\frac{\text{عدد منفی}}{0^-} = +\infty \quad \frac{\text{عدد منفی}}{0^+} = -\infty \quad \frac{\text{عدد مثبت}}{0^+} = +\infty \quad \frac{\text{عدد مثبت}}{0^-} = -\infty$$

پاسخ تشریحی:

$x = a$ قطعاً ریشهٔ مخرج است. به بررسی گزینه‌ها می‌پردازیم:

بررسی گزینه‌ها:

۱) $x = 0$ ریشهٔ مضاعف مخرج است، یعنی علامت تابع در اطراف آن تغییر نمی‌کند، پس هر دو شاخه به یک سمت حرکت می‌کنند. بنابراین $a = 0$ نمی‌باشد.

۲) $x = 2$ ریشهٔ مخرج کسر نمی‌باشد.

۳) $x = ۴$ ریشهٔ مخرج کسر است. حدهای راست و چپ تابع را در $x = ۴$ محاسبه می‌کنیم.

$$\lim_{x\to ۴^+} \frac{x-۱}{x^۲(x-۴)(x+۴)\cos(x-۲)} = \frac{۳}{۱۶\times ۰^+ \times ۸\times \underbrace{\cos ۲}_{-}} = \frac{۳}{۰^-} = -\infty$$

$$\lim_{x\to ۴^-} \frac{x-۱}{x^۲(x-۴)(x+۴)\cos(x-۲)} = \frac{۳}{۱۶\times ۰^- \times ۸\times \underbrace{\cos ۲}_{-}} = \frac{۳}{۰^+} = +\infty$$

بنابراین $a = ۴$ نمی‌باشد.

۴) $x = -۴$ ریشهٔ مخرج کسر است. حدهای راست و چپ را در $x = -۴$ محاسبه می‌کنیم.

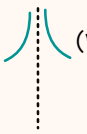
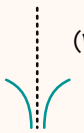
$$\lim_{x\to -۴^+} \frac{x-۱}{x^۲(x-۴)(x+۴)\cos(x-۲)} = \frac{-۵}{۱۶\times (-۸)\times ۰^+ \times \underbrace{\cos(-۶)}_{+}} = \frac{-۵}{۰^-} = +\infty$$

$$\lim_{x\to -۴^-} \frac{x-۱}{x^۲(x-۴)(x+۴)\cos(x-۲)} = \frac{-۵}{۱۶\times (-۸)\times ۰^- \times \underbrace{\cos(-۶)}_{+}} = \frac{-۵}{۰^+} = -\infty$$

با توجه به نمودار تابع $a = -۴$ می‌باشد.

سوالات منتخب:

نمودار تابع با ضابطهٔ $y = \frac{x+۱}{x^۳+x}$ در نزدیکی مجانب قائم خود به کدام صورت است؟

۱) 
۲) 
۳) ✓
۴)

گروه آموزشی ماز

۱۰- اگر $\lim_{x\to k} \frac{\sin^۲ x}{a-\sin x} = -\infty$ و $۰ \le x \le ۲\pi$ باشد، حاصل $\lim_{x\to -\infty} \frac{x^{[k]}+ax^۲}{۲ax^{[k]}-x^۲}$ کدام است؟

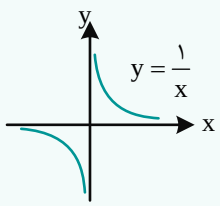
۱) ۱ ۲) -۱ ۳) $\frac{۱}{۲}$ ۴) $-\frac{۱}{۲}$

پاسخ: گزینه ۴ (سخت ـ مفهومی / محاسباتی ـ ۱۲۰۳)

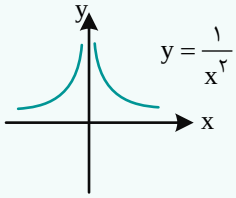
نمودار تابع در همسایگی ریشه‌های ساده و مضاعف مخرج:

اگر مخرج دارای ریشهٔ ساده (مرتبهٔ اول) باشد و عبارت درون مخرج، درون قدرمطلق نباشد و ریشهٔ مخرج، صورت را صفر نکند، در این صورت، در همسایگی مخرج یکی از شاخه‌ها به سمت $+\infty$ و شاخهٔ دیگر به سمت $-\infty$ می‌رود. حال اگر مخرج دارای ریشهٔ مضاعف باشد، یا عبارت درون مخرج در قدرمطلق باشد و ریشهٔ مخرج، صورت را صفر نکند، در این صورت، در همسایگی ریشهٔ مخرج هر دو شاخه به یک سمت $+\infty$ یا $-\infty$ میل می‌کنند.

به عنوان مثال:



$$\lim_{x\to ۰^+} \frac{۱}{x} = +\infty \qquad \lim_{x\to ۰^-} \frac{۱}{x} = -\infty$$



$$\lim_{x\to ۰^+} \frac{۱}{x^۲} = +\infty \qquad \lim_{x\to ۰^-} \frac{۱}{x^۲} = +\infty$$

نکته:

اگر نمودار تابعی در همسایگی نقطهٔ a به یکی از دو صورت زیر باشد، یعنی در مخرج ریشهٔ مضاعف (مکرر مرتبهٔ زوج) داریم و یا عبارت درون مخرج، در قدرمطلق قرار دارد (ریشهٔ مخرج، نباید صورت را صفر کند).

www.biomaze.ir

پاسخ تشریحی:

$x=k$ ریشهٔ مضاعف مخرج کسر است، زیرا حاصل حد در هر دو طرف k برابر $-\infty$ شده است.

از طرفی، معادلهٔ $\sin x=a$ هنگامی ریشهٔ مضاعف دارد که $a=1$ یا $a=-1$ باشد. هر دو حالت را بررسی می‌کنیم:

$a=1 \Rightarrow \lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 x}{1-\sin x}=\frac{1}{0^+}=+\infty$ غ‌ق‌ق $\Rightarrow$ پس $a=1$ نمی‌باشد.

$a=-1 \Rightarrow \lim\limits_{x\to\frac{3\pi}{2}} \frac{\sin^2 x}{-1-\sin x}=\frac{1}{0^-}=-\infty$ ق‌ق $\Rightarrow$ پس $a=-1$ و $k=\frac{3\pi}{2}$ است.

بنابراین:

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{x^{[k]}+ax^2}{2ax^{[k]}-x^2} \xrightarrow{[k]=4} \lim_{x\to-\infty}\frac{x^4-x^2}{-2x^4-x^2}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^4}{-2x^4}=-\frac{1}{2}$$

سوالات منتخب:

اگر $\lim\limits_{x\to2}\frac{2x-5}{x^2+ax+b}=-\infty$ باشد، $a+b$ کدام است؟

۱) -1 ۲) صفر ✓ ۳) ۱ ۴) ۲

گروه آموزشی ماز

۱۱- اگر $y=1$ یکی از مجانب‌های افقی تابع $y=\frac{ax+\sqrt{4x^2+bx}}{\sqrt{a}x+2}$ باشد، مجانب قائم آن کدام است؟

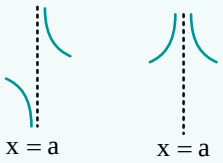
۱) $x=1$ ۲) $x=-1$ ۳) $x=\frac{1}{2}$ ۴) $x=-\frac{1}{2}$

پاسخ: گزینه ۲ (متوسط ـ مفهومی / محاسباتی ـ ۱۴۰۳)

محاسبهٔ حد در ∞ و قاعدهٔ پرتوان:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{ax^n+bx^{n-1}+cx^{n-2}+\dots}{a'x^m+b'x^{m-1}+c'x^{m-2}+\dots}=\begin{cases}\infty & n>m\\ \frac{a}{a'} & n=m\\ 0 & n<m\end{cases}$$

مجانب قائم: فرض کنید f در حداقل یک همسایگی (چپ و یا راست) a تعریف شده باشد، خط $x=a$ را مجانب قائم تابع f می‌نامیم. هرگاه: $\lim\limits_{x\to a^+ \text{یا} a^-} f(x)=\pm\infty$



برای به دست آوردن مجانب‌های قائم کسری f، ریشه‌های مخرج کسر را به دست می‌آوریم به شرطی که صورت را صفر نکنند و در حداقل یک همسایگی آن‌ها تابع تعریف شود.

مجانب افقی: خط $y=b$ را مجانب افقی تابع f نامیم، هرگاه: $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)=b$

پاسخ تشریحی:

دو حالت وجود دارد:

۱) $\frac{ax+\sqrt{4x^2+bx}}{\sqrt{a}x+2}=1 \Rightarrow \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{ax+|2x|}{\sqrt{a}x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{(a+2)x}{\sqrt{a}x}=1 \Rightarrow \frac{a+2}{\sqrt{a}}=1 \Rightarrow a+2=\sqrt{a} \xrightarrow{\text{توان ۲}} a^2+4a+4=a$

$\Rightarrow a^2+3a+4=0 \Rightarrow \Delta<0 \Rightarrow$ مقداری برای a پیدا نمی‌شود.

۲) $\frac{ax+\sqrt{4x^2+bx}}{\sqrt{a}x+2}=1 \Rightarrow \lim\limits_{x\to-\infty}\frac{ax+|2x|}{\sqrt{a}x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{(a-2)x}{\sqrt{a}x}=1 \Rightarrow \frac{a-2}{\sqrt{a}}=1 \Rightarrow a-2=\sqrt{a} \xrightarrow{\text{توان ۲}} a^2-4a+4=a$

www.biomaze.ir

$$a^۲-۵a+۴=۰ \Rightarrow (a-۱)(a-۴)=۰ \Rightarrow \begin{cases} a=۱ \text{ غ ق} \\ a=۴ \text{ ق ق} \end{cases}$$

پس: $f(x)=\dfrac{۴x+\sqrt{۴x^۲+bx}}{۲x+۲} \Rightarrow x=-۱$ مجانب قائم

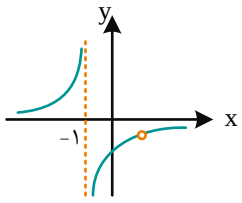
سوالات منتخب:

در تابع با ضابطهٔ $f(x)=\dfrac{ax^n+۱۵}{۳x-\sqrt{۴x^۲+۱۵x}}$، اگر $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-۱$ باشد، آن‌گاه $\lim\limits_{x\to ۳} f(x)$ کدام است؟

۱) -۶ ✓ ۲) -۴ ۳) ۳ ۴) ۵

گروه آموزشی ماز

۱۲- نمودار تابع $f(x)=\dfrac{x+a}{bx^۲+x+۳}$ به صورت مقابل است. $b-۲a$ کدام است؟



۱) صفر ۲) ۱

۳) -۱ ۴) $\dfrac{۱}{۲}$

پاسخ: گزینه ۲ (متوسط ـ مفهومی / محاسباتی ـ ۱۲۰۳)

پاسخ تشریحی:

$x=-۱$ مجانب قائم است، پس مخرج را صفر می‌کند. ببینید:

$$bx^۲+x+۳\big|_{x=-۱}=۰ \Rightarrow b-۱+۳=۰ \Rightarrow b=-۲ \Rightarrow -۲x^۲+x+۳=۰ \Rightarrow \begin{cases} x=-۱ \\ x=\dfrac{۳}{۲} \end{cases}$$

$x=\dfrac{۳}{۲}$ نیز ریشهٔ مخرج است اما تابع در $x=\dfrac{۳}{۲}$ مجانب قائم ندارد، پس $x=\dfrac{۳}{۲}$ صورت را هم صفر می‌کند.

$$x+a\Big|_{x=\frac{۳}{۲}}=۰ \Rightarrow \frac{۳}{۲}+a=۰ \Rightarrow a=-\frac{۳}{۲}$$

بنابراین جواب برابر است با:

$$b-۲a=-۲-۲(-\frac{۳}{۲})=-۲+۳=۱$$

گروه آموزشی ماز

۱۳- اگر معادلهٔ خط مماس بر منحنی تابع $y=f(x)$ در $x=۲$ به صورت $y=۳x-۱$ باشد، معادلهٔ خط مماس بر منحنی $y=fog(x)$ در $x=-۲$ با فرض $g(x)=x^۲+x$ کدام است؟

۱) $y=-۳x-۱$ ۲) $y=-۹x-۱۳$ ۳) $y=۳x+۱۱$ ۴) $y=۹x+۲۳$

پاسخ: گزینه ۲ (متوسط ـ ترکیبی / محاسباتی ـ ۱۲۰۴)

مشتق ترکیب توابع:

$y=f(u) \Rightarrow y'=u'\times f'(u)$	u تابعی برحسب x و مشتق‌پذیر است.
$y=fog(x) \Rightarrow y'=g'(x)\times f'(g(x))$	شرط مشتق‌پذیری دو تابع رعایت شود.
$y=gof(x) \Rightarrow y'=f'(x)\times g'(f(x))$	شرط مشتق‌پذیری دو تابع رعایت شود.

پاسخ تشریحی:

با توجه به این که معادلهٔ خط مماس بر نمودار تابع $y=f(x)$ در $x=۲$ به صورت $y=۳x-۱$ است، پس $f(۲)=۵$ و $f'(۲)=۳$ است.

از طرفی، مشتق تابع $g(x)=x^۲+x$ در $x=-۲$ برابر است با:

$$g(x)=x^۲+x \Rightarrow g'(x)=۲x+۱ \Rightarrow g'(-۲)=-۳$$

www.biomaze.ir

حال معادلهٔ خط مماس بر منحنی تابع $y = fog(x)$ را در $x = -۲$ می‌نویسیم . ببینید:

$$\left.\begin{array}{l} y = fog(-۲) = f(\underbrace{g(-۲)}_{۲}) = f(۲) = ۵ \\ y' = (fog)'(-۲) = g'(-۲) \times f'(\underbrace{g(-۲)}_{۲}) = -۳ \times f'(۲) = -۳ \times ۳ = -۹ \end{array}\right\} \Rightarrow y - y_{۰} = m(x - x_{۰}) \Rightarrow y - ۵ = -۹(x + ۲) \Rightarrow y = -۹x - ۱۳$$

سوالات منتخب:

خط به معادلهٔ $y = ۳x - ۵$ در نقطهٔ $x = ۲$ بر نمودار تابع $y = g(x)$ مماس است. اگر $\lim\limits_{x \to ۱} \dfrac{f(x) - f(۱)}{۲x - ۲} = \dfrac{۲}{۳}$ باشد، $(fog)'(۲)$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ✓ ۴) ۴

گروه آموزشی ماز

۱۴- در تابع $f(x) = \dfrac{|x+a|}{x^{۲}+b}$ رابطهٔ $f'_{+}(۳) - f'_{-}(۳) = ۱$ برقرار است. $f'(-۳)$ کدام است؟

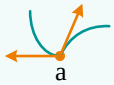
۱) ۸/۵ ۲) ۸/۵- ۳) ۹/۵ ۴) ۹/۵-

پاسخ: گزینه ۱ (متوسط ـ مفهومی / محاسباتی ـ ۱۲۰۴)

نقطهٔ زاویه‌دار (گوشه):

نقطه‌ای است که در آن تابع پیوسته است ولی نیم‌مماس‌های راست و چپ (مشتق‌های راست و چپ) در آن نقطه هم‌راستا نیستند.

در توابعی به فرم $y = |(x-a)g(x)|$ $\left(g(a) \neq ۰\right)$ نقطهٔ $x = a$ گوشه است.



عامل صفرشونده در مشتق: فرض کنید g در $x = a$ مشتق‌پذیر و $g(a) = ۰$ باشد، آن‌گاه:

$$f(x) = g(x) \times h(x) \Rightarrow f'(a) = g'(a) \times \lim_{x \to a} h(x)$$

پاسخ تشریحی:

مشتق‌های راست و چپ در $x = ۳$ برابر نیستند، بنابراین $x = ۳$ نقطهٔ گوشه است. می‌دانیم ریشهٔ مرتبهٔ اول (ساده) داخل قدرمطلق نقطهٔ گوشه می‌باشد، در نتیجه $a = -۳$ است.

$$f(x) = \frac{|x-۳|}{x^{۲}+b} \Rightarrow \begin{cases} x \to ۳^{+} \Rightarrow f(x) = \dfrac{x-۳}{x^{۲}+b} \xrightarrow{\text{با مشتق عامل صفرشونده}} f'_{+}(۳) = \dfrac{۱}{۹+b} \\ x \to ۳^{-} \Rightarrow f(x) = \dfrac{-(x-۳)}{x^{۲}+b} \xrightarrow{\text{با مشتق عامل صفرشونده}} f'_{-}(۳) = \dfrac{-۱}{۹+b} \end{cases}$$

بنابراین:

$$f'_{+}(۳) - f'_{-}(۳) = ۱ \Rightarrow \frac{۱}{۹+b} - \frac{-۱}{۹+b} = ۱ \Rightarrow \frac{۲}{۹+b} = ۱ \Rightarrow ۹ + b = ۲ \Rightarrow b = -۷$$

پس ضابطهٔ تابع $f(x)$ به صورت $f(x) = \dfrac{|x-۳|}{x^{۲}-۷}$ می‌باشد، در همسایگی $x = -۳$ ، ضابطهٔ $f(x)$ به صورت $f(x) = \dfrac{-(x-۳)}{x^{۲}-۷}$ می‌باشد. بنابراین:

$$f'(x) = \frac{-۱(x^{۲}-۷) - ۲x(-x+۳)}{(x^{۲}-۷)^{۲}} = \frac{x^{۲}-۶x+۷}{(x^{۲}-۷)^{۲}} \Rightarrow f'(-۳) = \frac{۳۴}{۴} = ۸/۵$$

سوالات منتخب:

در تابع $f(x) = x\sqrt{x} + |x-۱|$ ، مقدار $f'_{+}(۱) + ۳f'_{-}(۱)$ کدام است؟

۱) ۵ ۲) ۳ ✓ ۳) ۴ ۴) ۲

گروه آموزشی ماز

۱۵- در تابع $f(x) = \dfrac{x^{۲} - \sqrt[۳]{x^{۴}}}{۱ - \sqrt[۳]{x^{۲}}}$ آهنگ تغییر لحظه‌ای $f'(x)$ در $x = ۸$ کدام است؟

۱) $\dfrac{۸}{۳}$ ۲) $-\dfrac{۸}{۳}$ ۳) $\dfrac{۱}{۹}$ ۴) $-\dfrac{۱}{۹}$

پاسخ: گزینه ۴ (متوسط ـ ترکیبی / محاسباتی ـ ۱۲۰۴)

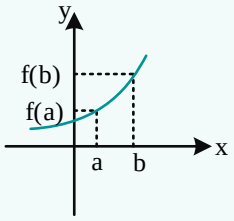
فرمول‌های پایه‌ای مشتق:

اگر f و g توابعی مشتق‌پذیر باشند، آن‌گاه:

$$(f\pm g)'=f'\pm g' \quad (f.g)'=f'g+g'.f \quad (\frac{f}{g})'=\frac{f'.g-g'.f}{g^2} \quad g\neq 0$$

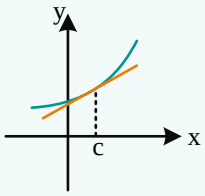
آهنگ تغییرات تابع:

آهنگ تغییرات متوسط تابع:



شیب خط قاطع = آهنگ تغییر متوسط تابع در بازهٔ $[a,b]$ $=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$

آهنگ تغییر لحظه‌ای تابع:



شیب خط مماس $=f'(c)=$ آهنگ تغییر لحظه‌ای تابع در $x=c$

پاسخ تشریحی:

ابتدا ضابطهٔ تابع را ساده می‌کنیم. ببینید:

$$f(x)=\frac{x^{\frac{4}{3}}\times(x^{\frac{2}{3}}-1)}{1-\sqrt[3]{x^2}}\Rightarrow f(x)=\frac{-1(1-\sqrt[3]{x^2})x^{\frac{4}{3}}}{1-\sqrt[3]{x^2}}\Rightarrow f(x)=-x^{\frac{4}{3}}$$

برای محاسبهٔ آهنگ تغییر لحظه‌ای تابع $f'(x)$ باید $f''(x)$ را محاسبه کنیم. پس:

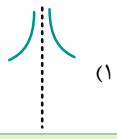
$$f'(x)=-\frac{4}{3}x^{\frac{1}{3}}\Rightarrow f''(x)=-\frac{4}{3}\times\frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}\Rightarrow f''(x)=-\frac{4}{9}x^{-\frac{2}{3}}\Rightarrow f''(x)=-\frac{4}{9\sqrt[3]{x^2}}$$

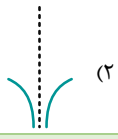
پس آهنگ تغییر لحظه‌ای تابع $f'(x)$ در $x=8$ برابر است با:

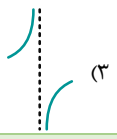
$$f''(8)=\frac{-4}{9\times\sqrt[3]{8^2}}=\frac{-4}{9\times4}=-\frac{1}{9}$$

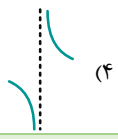
گروه آموزشی ماز

۱۶- نمودار مشتق تابع $y=\sqrt[3]{x^3-1}$ در مجاورت $x=1$ چگونه است؟

۱) 

۲) 

۳) 

۴) 

پاسخ: گزینه ۱ (متوسط ـ مفهومی / محاسباتی ـ ۱۲۰۴)

فرمول‌های پرکاربرد مشتق:

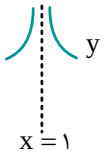
u تابعی مشتق‌پذیر بر حسب x است.

$$y=\sqrt{u}\Rightarrow y'=\frac{u'}{2\sqrt{u}} \qquad y=\sqrt[3]{u}\Rightarrow y'=\frac{u'}{3\sqrt[3]{u^2}} \qquad y=\frac{1}{u}\Rightarrow y'=-\frac{u'}{u^2}$$

پاسخ تشریحی:

y' را محاسبه می‌کنیم:

$$y'=\frac{3x^2}{3\sqrt[3]{(x^3-1)^2}}\Rightarrow \lim_{x\to1}y'=\lim_{x\to1}\frac{x^2}{3\sqrt[3]{(x^3-1)^2}}=\frac{1}{0^+}=+\infty$$



www.biomaze.ir

۱۷- حاصل‌ضرب طول نقاط بحرانی تابع $f(x)=|x^۲-۴|\times\sqrt[۳]{x+۱}$ کدام است؟

۱) $\frac{۴}{۷}$ ۲) $-\frac{۴}{۷}$ ۳) $\frac{۱۶}{۷}$ ۴) $-\frac{۱۶}{۷}$

پاسخ: گزینه ۴ (متوسط ـ مفهومی / محاسباتی ـ ۱۲۰۵)

نقاط بحرانی:

نقطهٔ $x=c$ را بحرانی می‌گوییم هرگاه این نقطه عضو دامنهٔ تابع باشد و مشتق تابع در این نقطه یا صفر باشد و یا وجود نداشته باشد.

$c\in D_f \Rightarrow f'(c)=۰$ یا $f'(c)=$ وجود نداشته باشد.

با تعریف فوق، تمام نقاطی که در دامنهٔ تابع هستند و تابع در آن نقطه ناپیوسته و یا مشتق‌ناپذیر (نقاط مشتق‌ناپذیر مانند زاویه‌دار، بازگشتی، عطف قائم) باشد، بحرانی هستند. همچنین نقاطی که در آن‌ها، خط مماس، افقی باشد نیز بحرانی هستند. همچنین اگر نقاط بحرانی تابع $f(x)$ را در بازهٔ $[a,b]$ بخواهند نقاط ابتدا و انتهای بازه یعنی $x=a$ و $x=b$ بحرانی هستند.

پاسخ تشریحی:

ریشه‌های داخل قدرمطلق همواره بحرانی هستند: $x=\pm۲$

اگر از قدرمطلق، $x^۲-۴$ و یا قرینهٔ آن خارج شود، در ریشه‌های مشتق تاثیری ندارد. بنابراین قدرمطلق را برمی‌داریم. ببینید:

$$y=(x^۲-۴)\sqrt[۳]{x+۱}\Rightarrow y'=۲x\sqrt[۳]{x+۱}+\frac{x^۲-۴}{۳\sqrt[۳]{(x+۱)^۲}}=\frac{۶x(x+۱)+x^۲-۴}{۳\sqrt[۳]{(x+۱)^۲}}=\frac{۷x^۲+۶x-۴}{۳\sqrt[۳]{(x+۱)^۲}}$$

با توجه به این که دامنهٔ تابع $D_f=\mathbb{R}$ است، پس ریشه‌های صورت و مخرج مشتق بحرانی‌اند.

$$۷x^۲+۶x-۴=۰\Rightarrow \text{ریشه‌ها}=\alpha,\beta\Rightarrow \alpha\beta=\frac{-۴}{۷}\Rightarrow \text{حاصل‌ضرب طول نقاط بحرانی}=(-۲)\times(۲)\times(-۱)\times(\alpha)\times(\beta)=۴\alpha\beta=۴\times\frac{-۴}{۷}=\frac{-۱۶}{۷}$$

سوالات منتخب:

مجموعهٔ طول‌های نقاط بحرانی تابع با ضابطهٔ $f(x)=|x-۲|\sqrt[۳]{x^۲}$ کدام است؟

۱) $\left\{۰,\frac{۴}{۵},۲\right\}$ ✓ ۲) $\left\{۰,\frac{۲}{۳},۲\right\}$ ۳) $\{۰,۱\}$ ۴) $\left\{\frac{۲}{۳},۲\right\}$

گروه آموزشی ماز

۱۸- نقطهٔ $A(۱,-۱)$ اکسترمم نسبی تابع $f(x)=x^۳-ax^۲+bx-۱$ است. عرض نقطهٔ عطف کدام است؟

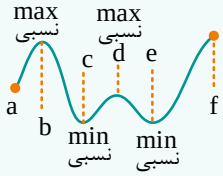
۱) $\frac{۲۵}{۲۷}$ ۲) $-\frac{۲۵}{۲۷}$ ۳) $\frac{۲۷}{۲۵}$ ۴) $-\frac{۲۷}{۲۵}$

پاسخ: گزینه ۲ (متوسط ـ مفهومی / محاسباتی ـ ۱۲۰۵)

اکسترمم نسبی:

تابع $f(x)$ در $x=c$ ماکزیمم نسبی دارد، اگر یک همسایگی شامل نقطهٔ c (مانند (a,b)) موجود باشد که برای هر $x\in(a,b)$، $f(c)\geq f(x)$ باشد. همچنین تابع $f(x)$ در $x=c$ مینیمم نسبی دارد اگر یک همسایگی شامل نقطهٔ c (مانند (a,b)) موجود باشد که برای هر $x\in(a,b)$، $f(c)\leq f(x)$ باشد.

نقاط ابتدا و انتهای بازه نمی‌توانند اکسترمم نسبی باشند.



برای تعیین نقاط اکسترمم نسبی تابع پیوستهٔ $f(x)$، کافی است از تابع مشتق گرفته و بعد مشتق را تعیین علامت کنیم. اگر علامت مشتق از چپ به راست از مثبت به منفی تغییر کند نقطه max نسبی بوده و اگر علامت مشتق از چپ به راست از منفی به مثبت تغییر کند، نقطه min نسبی می‌باشد. اگر علامت مشتق در یک نقطه تغییر نکند، آن نقطه، اکسترمم نسبی نیست.

www.biomaze.ir

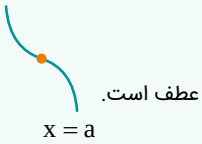
نقطهٔ عطف:

نقطهٔ $(c, f(c))$ را نقطهٔ عطف تابع $f(x)$ می‌گوییم هرگاه:

۱) تابع در این نقطه پیوسته باشد.

۲) در این نقطه بتوان خط مماس بر تابع رسم کرد. (خط مماس از تابع می‌گذرد.)

۳) جهت تقعر در این نقطه عوض شود.

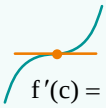

عطف است.

عطف نیست. زیرا نمی‌توان در این نقطه یک خط مماس بر منحنی رسم کرد.

عطف نیست. زیرا تابع در این نقطه پیوسته نیست.

عطف نیست. زیرا تقعر تابع در این نقطه عوض نشده است.

انواع نقطهٔ عطف:


$f'(c) = 0$
عطف افقی

$f'(c) \neq 0$
عطف مایل

$f'(c) = \infty$
عطف قائم

مشتق دوم در نقطهٔ عطف یا صفر است و یا وجود ندارد. برای به دست آوردن نقطهٔ عطف، مشتق دوم را تعیین علامت می‌کنیم. اگر علامت مشتق دوم در نقطه‌ای عوض شود، آن نقطه عطف است در صورتی که شرایط نقطهٔ عطف در آن نقطه رعایت شود.

پاسخ تشریحی:

$$f(x) = x^3 - ax^2 + bx - 1 \Rightarrow f'(x) = 3x^2 - 2ax + b$$

نقطهٔ $A(1,-1)$ اکسترمم نسبی تابع f است. پس:

$$f'(1) = 0 \Rightarrow 3\times 1^2 - 2a\times 1 + b = 0 \Rightarrow 3 - 2a + b = 0 \Rightarrow 2a - b = 3$$

$$f(1) = -1 \Rightarrow 1^3 - a\times 1^2 + b\times 1 - 1 = -1 \Rightarrow a - b = 1 \Rightarrow a = 2\,,\, b = 1$$

بنابراین:

$$f(x) = x^3 - 2x^2 + x - 1 \Rightarrow f'(x) = 3x^2 - 4x + 1 \Rightarrow f''(x) = 6x - 4 \Rightarrow$$

x		$\frac{2}{3}$	
$f''(x)$	$-$	0	$+$

پس $x = \frac{2}{3}$ طول نقطهٔ عطف است و عرض آن برابر است با:

$$f\left(\frac{2}{3}\right) = \left(\frac{2}{3}\right)^3 - 2\left(\frac{2}{3}\right)^2 + \left(\frac{2}{3}\right) - 1 = \frac{8}{27} - \frac{8}{9} + \frac{2}{3} - 1 = -\frac{25}{27}$$

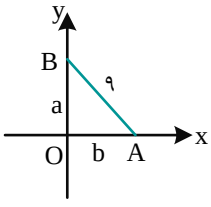
سوالات منتخب:

تابع با ضابطهٔ $f(x) = \frac{a}{x} + bx^2$ در نقطهٔ $(-2,1)$ دارای اکسترمم نسبی است. عدد a و نوع اکسترمم نسبی کدام است؟

۱) $\max, \frac{4}{3}$ ✓ ۲) $\max, -\frac{4}{3}$ ۳) $\min, \frac{4}{3}$ ۴) $\min, -\frac{4}{3}$

گروه آموزشی ماز

۱۹- پاره‌خط AB را حول محور عرض‌ها دوران می‌دهیم. اگر مخروط حاصل بیشترین حجم ممکن را داشته باشد، مساحت مثلث $\overset{\triangle}{OAB}$ کدام است؟



۱) $\frac{9\sqrt{3}}{2}$
۲) $9\sqrt{2}$
۳) $\frac{27\sqrt{2}}{2}$
۴) $9\sqrt{3}$

پاسخ: گزینه ۳ (متوسط ـ مفهومی / محاسباتی ـ ۱۲۰۵)

پاسخ تشریحی:

در مثلث $\overset{\triangle}{OAB}$ با کمک قضیهٔ فیثاغورس داریم:

$$a^2 + b^2 = 81 \Rightarrow b^2 = 81 - a^2$$

$$V_{\text{مخروط}} = \frac{\pi}{3}b^2 a = \frac{\pi}{3}(81 - a^2)a = \frac{\pi}{3}(81a - a^3) \Rightarrow V' = \frac{\pi}{3}(81 - 3a^2) = 0 \Rightarrow 3a^2 = 81 \Rightarrow a^2 = 27 \Rightarrow a = 3\sqrt{3}$$

www.biomaze.ir

طول b را به دست می‌آوریم:

$$b^۲ = ۸۱ - a^۲ \xrightarrow{a^۲=۲۷} b^۲ = ۵۴ \Rightarrow b = \sqrt{۵۴} = ۳\sqrt{۶}$$

بنابراین مساحت مثلث $\overset{\triangle}{OAB}$ برابر است با:

$$S_{\overset{\triangle}{OAB}} = \frac{b \times a}{۲} = \frac{۳\sqrt{۶} \times ۳\sqrt{۳}}{۲} = \frac{۹\sqrt{۱۸}}{۲} = \frac{۲۷\sqrt{۲}}{۲}$$

گروه آموزشی ماز

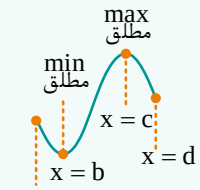
۲۰- برد تابع $f(x) = \frac{\sin x}{۲\cos^۲ x + ۱}$ کدام است؟

۱) $[-۱, ۱]$ ۲) $[-\sqrt{۲}, \sqrt{۲}]$ ۳) $[-\frac{\sqrt{۲}}{۲}, \frac{\sqrt{۲}}{۲}]$ ۴) $[-\frac{۱}{۲}, \frac{۱}{۲}]$

پاسخ: گزینه ۱ (متوسط ـ ترکیبی / محاسباتی ـ ۱۲۰۵)

نقاط اکسترمم مطلق:

برای به دست آوردن نقاط max و min مطلق تابع پیوستهٔ $f(x)$ در بازهٔ $[a, b]$ کافی است نقاط بحرانی تابع $f(x)$ را در این بازه به دست آوریم و عرض نقاط بحرانی که شامل $x = a$ و $x = b$ نیز می‌شود را محاسبه کرده و با هم مقایسه کنیم. هر کدام بیشتر بود max مطلق و هر کدام کمتر بود min مطلق است.



اگر تابع $f(x)$ روی بازهٔ $[a, b]$ پیوسته باشد، آن‌گاه f روی این بازه هم max مطلق و هم min مطلق دارد.

برد تابع: اگر تابع $f(x)$ در بازهٔ $[a, b]$ پیوسته باشد، آن‌گاه برد آن به صورت $R_f = [y_{min}, y_{max}]$ خواهد بود.

پاسخ تشریحی:

$$f(x) = \frac{\sin x}{۲\cos^۲ x + ۱} \Rightarrow f'(x) = \frac{\cos x(۲\cos^۲ x + ۱) - (-۴\sin x \cos x) \times \sin x}{(۲\cos^۲ x + ۱)^۲}$$

$$f'(x) = \frac{\cos x(۲\cos^۲ x + ۱) + ۴\cos x \sin^۲ x}{(۲\cos^۲ x + ۱)^۲} = \frac{\cos x(\overbrace{۲\cos^۲ x + ۱ + ۴\sin^۲ x}^{\neq ۰})}{(۲\cos^۲ x + ۱)^۲} = ۰ \Rightarrow \cos x = ۰$$

اگر $\cos x = ۰, \sin x = ۱ \Rightarrow f(x) = ۱ \Rightarrow \max(f) = ۱$

اگر $\cos x = ۰, \sin x = -۱ \Rightarrow f(x) = -۱ \Rightarrow \min(f) = -۱$

$$\Rightarrow R_f = [-۱, ۱]$$

گروه آموزشی ماز

۲۱- مجموع درایه‌های سطر دوم حاصل ماتریس $\begin{bmatrix} ۰ & ۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱ \\ ۱ & ۰ & ۰ \end{bmatrix}^{۱۰۰} \begin{bmatrix} ۱ & ۲ & ۳ \\ ۴ & ۵ & ۶ \\ ۷ & ۸ & ۹ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ۰ & ۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱ \\ ۱ & ۰ & ۰ \end{bmatrix}^{۱۰۱}$ کدام است؟

۱) ۶ ۲) ۱۲ ۳) ۱۵ ۴) ۲۴

پاسخ: گزینه ۴ (سخت ـ مفهومی / محاسباتی ـ ۱۲۰۱)

پاسخ تشریحی:

ابتدا توان‌های دوم و سوم ماتریس $\begin{bmatrix} ۰ & ۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱ \\ ۱ & ۰ & ۰ \end{bmatrix}$ را حساب می‌کنیم:

$$\begin{bmatrix} ۰ & ۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱ \\ ۱ & ۰ & ۰ \end{bmatrix}^۲ = \begin{bmatrix} ۰ & ۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱ \\ ۱ & ۰ & ۰ \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} ۰ & ۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱ \\ ۱ & ۰ & ۰ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۰ & ۰ & ۱ \\ ۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۱ & ۰ \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} ۰ & ۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱ \\ ۱ & ۰ & ۰ \end{bmatrix}^۳ = \begin{bmatrix} ۰ & ۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱ \\ ۱ & ۰ & ۰ \end{bmatrix}^۲ \times \begin{bmatrix} ۰ & ۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱ \\ ۱ & ۰ & ۰ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۰ & ۰ & ۱ \\ ۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۱ & ۰ \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} ۰ & ۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱ \\ ۱ & ۰ & ۰ \end{bmatrix} = I \Rightarrow \begin{bmatrix} ۰ & ۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱ \\ ۱ & ۰ & ۰ \end{bmatrix}^۳ = I$$

پس:

$$\begin{bmatrix}0&1&0\\0&0&1\\1&0&0\end{bmatrix}^{100}=\begin{bmatrix}0&1&0\\0&0&1\\1&0&0\end{bmatrix}^{3\times33}\times\begin{bmatrix}0&1&0\\0&0&1\\1&0&0\end{bmatrix}=I^{33}\times\begin{bmatrix}0&1&0\\0&0&1\\1&0&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&1&0\\0&0&1\\1&0&0\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}0&1&0\\0&0&1\\1&0&0\end{bmatrix}^{101}=\begin{bmatrix}0&1&0\\0&0&1\\1&0&0\end{bmatrix}^{100}\times\begin{bmatrix}0&1&0\\0&0&1\\1&0&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&1&0\\0&0&1\\1&0&0\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}0&1&0\\0&0&1\\1&0&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&0&1\\1&0&0\\0&1&0\end{bmatrix}$$

پس:

$$\begin{bmatrix}0&1&0\\0&0&1\\1&0&0\end{bmatrix}^{100}\begin{bmatrix}1&2&3\\4&5&6\\7&8&9\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&1&0\\0&0&1\\1&0&0\end{bmatrix}^{101}=\begin{bmatrix}0&1&0\\0&0&1\\1&0&0\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}1&2&3\\4&5&6\\7&8&9\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}0&0&1\\1&0&0\\0&1&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4&5&6\\7&8&9\\1&2&3\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}0&0&1\\1&0&0\\0&1&0\end{bmatrix}$$

بنابراین جواب برابر است با:

$$=\begin{bmatrix}5&6&4\\8&9&7\\2&3&1\end{bmatrix}\Rightarrow \text{مجموع درایه‌های سطر دوم}=8+9+7=24$$

گروه آموزشی ماز

۲۲- اگر $A^3=(A^2)^{-1}$ باشد، وارون A^8 کدام است؟

۱) A ۲) A^2 ۳) A^3 ۴) A^4

پاسخ: گزینه ۲ (متوسط ـ مفهومی / محاسباتی ـ ۱۲۰۱)

پاسخ تشریحی:

وارون $(A^2)^{-1}$ ماتریس A^2 است. دو طرف رابطه $A^3=(A^2)^{-1}$ را در A^2 ضرب می‌کنیم.

$$A^3=(A^2)^{-1}\xrightarrow{\times A^2}A^3\times A^2=(A^2)^{-1}\times A^2\Rightarrow A^5=I$$

در ماتریس A^8 ماتریس A^5 را جدا می‌کنیم و به جای آن I قرار می‌دهیم. ببینید:

$$A^8=A^5\times A^3=I\times A^3=A^3$$

A^3 همان ماتریس A^8 است. از طرفی، A^5 برابر با I است. اگر A^3 را در A^2 ضرب کنیم حاصل A^5 یا همان I است، یعنی وارون A^3 ماتریس A^2 است.

$$A^3\times\underbrace{A^2}_{(A^3)^{-1}}=I\Rightarrow(A^3)^{-1}=A^2$$

گروه آموزشی ماز

۲۳- اگر $A=\begin{bmatrix}1&2\\0&1\end{bmatrix}$ و B ماتریس وارون‌پذیر باشد به طوری که $A-B=AB$ باشد، $|B|$ کدام است؟

۱) $\frac{1}{4}$ ۲) $\frac{1}{2}$ ۳) $-\frac{1}{2}$ ۴) -4

پاسخ: گزینه ۱ (متوسط ـ مفهومی / محاسباتی ـ ۱۲۰۳)

پاسخ تشریحی:

تساوی $A-B=AB$ را از چپ در A^{-1} و از راست در B^{-1} ضرب می‌کنیم:

$$A-B=AB\xrightarrow{A^{-1}\times}\underbrace{A^{-1}\times A}_{I}-A^{-1}\times B=\underbrace{A^{-1}\times A}_{I}B\xrightarrow{\times B^{-1}}B^{-1}-A^{-1}\underbrace{BB^{-1}}_{I}=\underbrace{B\times B^{-1}}_{I}$$

$$\Rightarrow B^{-1}-A^{-1}=I\Rightarrow B^{-1}=A^{-1}+I$$

حال A^{-1} را محاسبه می‌کنیم:

$$|A|=\begin{vmatrix}1&2\\0&1\end{vmatrix}=1\Rightarrow A^{-1}=\frac{1}{1}\begin{bmatrix}1&-2\\0&1\end{bmatrix}\Rightarrow A^{-1}=\begin{bmatrix}1&-2\\0&1\end{bmatrix}$$

پس B^{-1} برابر است با:

$$B^{-1}=I+A^{-1}=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1&-2\\0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2&-2\\0&2\end{bmatrix}$$

www.biomaze.ir

حال $\left|B^{-1}\right|$ را حساب می‌کنیم:

$$\left|B^{-1}\right| = \begin{vmatrix} ۲ & -۲ \\ ۰ & ۲ \end{vmatrix} = ۴ \Rightarrow |B| = \frac{۱}{\left|B^{-1}\right|} = \frac{۱}{۴}$$

گروه آموزشی ماز

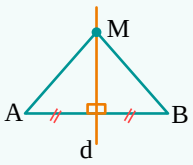
۲۴- مجموعه مکان هندسی نقاطی از صفحه که از دو نقطه $A(۳,۰)$ و $B(۲,۱)$ به یک فاصله باشند و از محور yها فاصله ۱ داشته باشند، شامل دو نقطهٔ C و D است. فاصله C و D کدام است؟

۱) ۱ ۲) $\sqrt{۲}$ ۳) ۲ ۴) $۲\sqrt{۲}$

پاسخ: گزینه ۴ (متوسط ـ مفهومی ـ ۱۲۰۲)

مکان هندسی‌های معروف:

مکان هندسی نقاطی از صفحه که از دو سر پاره‌خط به یک فاصله‌اند، عمودمنصف آن پاره‌خط است. $MA = MB$

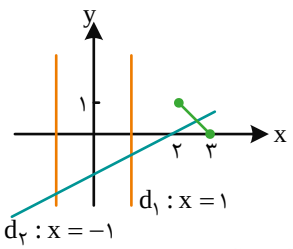


مکان هندسی نقاطی از صفحه که از خط d به فاصلهٔ معلوم k باشند، دو خط موازی d و به فاصلهٔ k از آن است.

پاسخ تشریحی:

مکان هندسی نقاطی که از محور yها به فاصلهٔ ۱ باشند، دو خط $d_۱ : x = ۱$ و $d_۲ : x = -۱$ است و مکان هندسی نقاطی از صفحه که از ۲ نقطهٔ A و B به یک فاصله باشند، عمودمنصف پاره‌خط AB است که خط L به معادلهٔ $y = x - ۲$ است. خط L خطوط $d_۱ : x = ۱$ و $d_۲ : x = -۱$ را در نقاط $C(۱,-۱)$ و $D(-۱,-۳)$ قطع می‌کند. فاصلهٔ این دو نقطه جواب مسئله است.

$$|CD| = \sqrt{(-۱-۱)^۲ + (-۱+۳)^۲} = \sqrt{۸} = ۲\sqrt{۲}$$



گروه آموزشی ماز

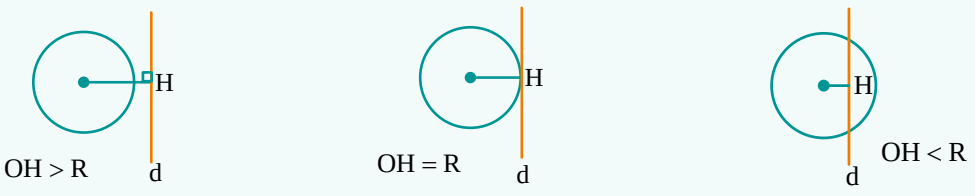
۲۵- دایرهٔ $C: x^۲ + y^۲ - ۴x - ۴y + ۴ = ۰$ بر کدام‌یک از خط‌های زیر مماس نیست؟

۱) محور xها ۲) محور yها ۳) $x - y = ۴ + ۲\sqrt{۲}$ ۴) $x + y = ۴ - ۲\sqrt{۲}$

پاسخ: گزینه ۳ (متوسط ـ مفهومی / محاسباتی ـ ۱۲۰۲)

وضعیت خط نسبت به دایره:

خط d نسبت به دایرهٔ C دارای ۳ وضعیت به صورت زیر است:



۱) خط دایره را در ۲ نقطه قطع می‌کند. ۲) خط بر دایره مماس است. ۳) خط با دایره تماس ندارد. (متخارج)

نکته:

برای تعیین وضعیت خط d نسبت به دایرهٔ C می‌توانیم از معادلهٔ خط y را برحسب x پیدا کرده و در معادلهٔ دایره قرار دهیم تا این که معادلهٔ تلاقی خط و دایره به دست آید که یک معادلهٔ درجهٔ ۲ برحسب x است. اگر در این معادله تلاقی $\Delta > ۰$ باشد خط، دایره را در ۲ نقطه قطع می‌کند (معادله ۲ ریشه دارد) و اگر $\Delta = ۰$ باشد، خط بر دایره مماس است (معادله ۱ ریشه دارد) و اگر $\Delta < ۰$ باشد، خط، دایره را قطع نمی‌کند. (معادله ریشه حقیقی ندارد.)

پاسخ تشریحی:

گزینه‌ها را بررسی می‌کنیم. برای گزینه‌های ۱ و ۲ از قسمت دوم درسنامه استفاده می‌کنیم.

www.biomaze.ir

بررسی گزینه‌ها:

۱) معادله فوق ریشهٔ مضاعف ۲ دارد، یعنی محور xها در $(۲,۰)$ بر دایرهٔ C مماس است.

$$\left.\begin{array}{l}\text{محور x ها} \Rightarrow y=۰\\ x^۲+y^۲-۴x-۴y+۴=۰\end{array}\right\} \Rightarrow x^۲+۰-۴x+۴=۰ \Rightarrow (x-۲)^۲=۰ \Rightarrow x=۲$$

۲) معادله فوق ریشهٔ مضاعف ۲ دارد، یعنی محور yها در $(۰,۲)$ بر دایرهٔ C مماس است.

$$\left.\begin{array}{l}\text{محور y ها} \Rightarrow x=۰\\ x^۲+y^۲-۴x-۴y+۴=۰\end{array}\right\} \Rightarrow ۰+y^۲+۰-۴y+۴=۰ \Rightarrow (y-۲)^۲=۰ \Rightarrow y=۲$$

۳) فاصلهٔ مرکز دایره $O(۲,۲)$ از خط $x-y=۲\sqrt{۲}+۴$ برابر است با:

$$d_۳=\frac{|۲-۲-(۲\sqrt{۲}+۴)|}{\sqrt{۲}}=\frac{۲\sqrt{۲}+۴}{\sqrt{۲}}=۲+۲\sqrt{۲}>\text{شعاع}$$

پس خط دایره را قطع نمی‌کند.

۴) فاصلهٔ مرکز دایره $O(۲,۲)$ از خط $x+y=۴-۲\sqrt{۲}$ برابر است با:

$$d_۴=\frac{|۲+۲-(۴-۲\sqrt{۲})|}{\sqrt{۲}}=۲=\text{شعاع دایره}$$

گروه آموزشی ماز

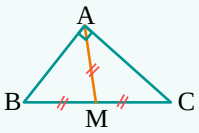
۲۶- مجموعهٔ A مکان هندسی نقاطی از صفحه است که مجموع فواصل آن‌ها از $F(۵,۰)$ و $F'(-۵,۰)$ برابر با ۱۴ است و مجموعهٔ B مکان هندسی نقاطی از صفحه است که فاصلهٔ آن‌ها از مبدأ مختصات برابر با ۵ است. دورترین نقاط $A\cap B$ از F چه فاصله‌ای از F' دارد؟

۱) ۱۲ ۲) ۶ ۳) ۸ ۴) ۳

پاسخ: گزینه ۲ (سخت ـ مفهومی / محاسباتی ـ ۱۴۰۲)

مثلث قائم‌الزاویه:

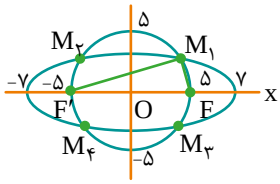
در مثلث قائم‌الزاویه، میانهٔ وارد بر وتر، نصف وتر است و برعکس. $AM=\frac{BC}{۲}$



پاسخ تشریحی:

مجموعهٔ A نقاط یک بیضی افقی به مرکز مبدأ مختصات است که در آن $a=۷$ ، $c=۵$ و $b=\sqrt{۴۹-۲۵}=\sqrt{۲۴}$ است.

مجموعهٔ B نقاط یک دایره به مرکز مبدأ مختصات و شعاع ۵ است که مانند شکل، بیضی را در ۴ نقطه $M_۱$ ، $M_۲$ ، $M_۳$ و $M_۴$ قطع می‌کند و از کانون‌های بیضی می‌گذرد.



مثلث‌های $\triangle F'M_iF$ که $۱\le i\le ۴$ است، مثلث‌های قائم‌الزاویه هستند که وتر آن‌ها FF' است. چرا؟ (چون M_iO میانهٔ وارد بر FF' و نصف آن است، پس طبق درسنامه $\triangle M_iFF'$ قائم‌الزاویه است) بنابراین داریم:

$$\left.\begin{array}{l}M_iF+M_iF'=۱۴\\ M_iF^۲+M_iF'^۲=۱۰^۲\end{array}\right\} \Rightarrow M_iF=۶, M_iF'=۸ \text{ یا } M_iF=۸, M_iF'=۶$$

پس جواب ۶ می‌باشد.

گروه آموزشی ماز

۲۷- کانون یک سهمی نقطه $F(-۲,۰)$ و خط هادی آن $x=۲$ است. دایره‌ای به مرکز کانون، چنان رسم می‌کنیم تا بر خط هادی مماس شود. این دایره سهمی را در نقاط B و C قطع می‌کند. فاصلهٔ B و C کدام است؟

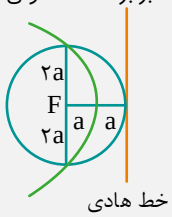
۱) ۴ ۲) $۴\sqrt{۲}$ ۳) ۶ ۴) ۸

www.biomaze.ir

پاسخ: گزینه ۴ (متوسط ـ مفهومی ـ ۱۲۰۲)

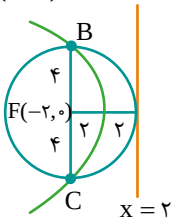
نکتهٔ زیبا از سهمی:

خطی که از کانون موازی خط هادی سهمی رسم می‌شود، سهمی را در ۲ نقطه قطع می‌کند. فاصله این ۲ نقطه، ۴ برابر فاصله کانونی است و این دو نقطه دو سر قطر دایره‌ای است که به مرکز کانون و مماس بر خط هادی رسم می‌شود. به این خط وتر کانونی می‌گویند. واضح است که شعاع این دایره، ۲ برابر فاصلهٔ کانونی است.



پاسخ تشریحی:

طبق درسنامه، نقاط B و C دو سر قطر دایره گفته شده در صورت سوال و وتر کانونی است. فاصلهٔ B و C چهار برابر فاصلهٔ کانونی است. فاصلهٔ $F(-۲,۰)$ از $x=۲$ برابر ۴ (همان ۲a) است، پس طول وتر کانونی یا همان فاصلهٔ B و C برابر ۴a یعنی ۸ است.



گروه آموزشی ماز

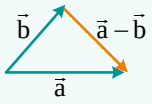
۲۸- $\vec{a}$، $\vec{b}$ و $\vec{c}$ بردارهایی در فضای $\mathbb{R}^۳$ هستند. اگر $|\vec{a}|=|\vec{b}|=|\vec{c}|$ و $\vec{a}+\vec{b}=\vec{c}$ باشد، زاویهٔ بین بردارهای $\vec{a}$ و $\vec{b}$ کدام است؟

۱) صفر ۲) ۶۰° ۳) ۹۰° ۴) ۱۲۰°

پاسخ: گزینه ۴ (متوسط ـ مفهومی / محاسباتی ـ ۱۲۰۳)

تفاضل دو بردار:

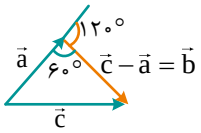
اگر دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ را از یک نقطه رسم کنیم، بردار $\vec{a}-\vec{b}$ یا $\vec{b}-\vec{a}$ برداری است که دو سر $\vec{b}$ و $\vec{a}$ را به هم وصل می‌کند. یعنی بردارهای $\vec{a}$، $\vec{b}$، $\vec{a}-\vec{b}$ تشکیل یک مثلث می‌دهند.



روش اول:

از $\vec{a}+\vec{b}=\vec{c}$ نتیجه می‌شود $\vec{b}=\vec{c}-\vec{a}$. یعنی بردار $\vec{b}$، ضلع سوم مثلثی است که توسط $\vec{a}$ و $\vec{c}$ ساخته می‌شود.

از طرفی $|\vec{c}|=|\vec{b}|=|\vec{c}|$ یعنی زوایای داخلی مثلث تولید شده توسط آن‌ها، هر کدام ۶۰° است. اما زاویهٔ بین بردارهای $\vec{b}$ و $\vec{a}$ همانطور که در شکل مشخص شده است زاویهٔ خارجی این مثلث است و برابر با ۱۲۰° می‌باشد.



روش دوم:

$$\vec{a}+\vec{b}=\vec{c} \Rightarrow |\vec{a}+\vec{b}|^۲=|\vec{c}|^۲ \Rightarrow |\vec{a}|^۲+|\vec{b}|^۲+۲|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta=|\vec{c}|^۲ \xrightarrow{|\vec{a}|=|\vec{b}|=|\vec{c}|} |\vec{b}|^۲+۲|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta=۰$$

$$\Rightarrow |\vec{b}|^۲(۱+۲\cos\theta)=۰ \Rightarrow \cos\theta=-\frac{۱}{۲} \Rightarrow \theta=۱۲۰^\circ$$

گروه آموزشی ماز

www.biomaze.ir

۲۹- اندازهٔ تصویر بردار $\vec{a}=۴\vec{i}+۲\vec{j}+۳\vec{k}$ در امتداد بردار $\vec{b}=(۲,۲,۱)$ کدام است؟

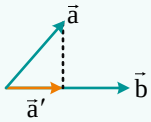
۱) ۵ ۲) ۳ ۳) $۲\sqrt{۵}$ ۴) $\sqrt{۲۹}$

پاسخ: گزینه ۱ (متوسط ـ مفهومی / محاسباتی ـ ۱۴۰۳)

این شما و این تصویر قائم بردار $\vec{a}$ روی بردار $\vec{b}$:

مختصات تصویر قائم بردار $\vec{a}$ در امتداد بردار $\vec{b}$ برابر است با: $\vec{a}'=\frac{\vec{a}.\vec{b}}{\vec{b}.\vec{b}}\vec{b}$ (تصویر قائم $\vec{a}$ روی $\vec{b}$)

اندازهٔ تصویر قائم بردار $\vec{a}$ در امتداد بردار $\vec{b}$ برابر است با: $|\vec{a}'|=\left|\frac{\vec{a}.\vec{b}}{|\vec{b}|}\right|$



پاسخ تشریحی:

$\vec{a}=۴\vec{i}+۲\vec{j}+۳\vec{k}\Rightarrow\vec{a}=(۴,۲,۳)$

$\vec{a}.\vec{b}=(۴,۲,۳).(۲,۲,۱)=۸+۴+۳=۱۵$

$|\vec{b}|=\sqrt{۲^۲+۲^۲+۱^۲}=۳$

$|\vec{a}'|=\left|\frac{\vec{a}.\vec{b}}{|\vec{b}|}\right|=\frac{۱۵}{۳}=۵$

پس جواب برابر است با:

گروه آموزشی ماز

۳۰- اگر $\vec{a}$ و $\vec{b}$ دو بردار و مساحت مثلث تولید شده توسط این دو بردار برابر با ۳ باشد، حجم متوازی‌السطوح تولید شده توسط بردارهای $\vec{a}$، $\vec{a}-\vec{b}$ و $\vec{a}\times\vec{b}$ کدام است؟

۱) ۳۶ ۲) ۲۷ ۳) ۲۴ ۴) ۲۱۶

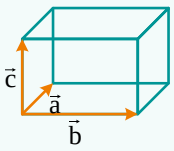
پاسخ: گزینه ۱ (متوسط ـ ترکیبی / محاسباتی ـ ۱۴۰۳)

ویژگی مهم از ضرب داخلی و خارجی:

$\vec{a}\times\vec{a}=۰\Rightarrow\vec{a}\times(\vec{a}+\vec{b})=\vec{a}\times(\vec{b}-\vec{a})=\vec{a}\times\vec{b}$ $\qquad$ $\vec{a}.\vec{a}=|\vec{a}|^۲$

مساحت مثلث: مساحت مثلث تولید شده توسط بردارهای $\vec{a}$ و $\vec{b}$ برابر است با: $S=\frac{|\vec{a}\times\vec{b}|}{۲}$

حجم متوازی‌السطوح: حجم متوازی‌السطوح تولید شده توسط بردارهای $\vec{a}$، $\vec{b}$ و $\vec{c}$ برابر است با: $V=|\vec{c}.(\vec{a}\times\vec{b})|$



پاسخ تشریحی:

مساحت مثلث تولید شده توسط بردارهای $\vec{a}$ و $\vec{b}$ برابر ۳ است. یعنی:

$S=\frac{|\vec{a}\times\vec{b}|}{۲}=۳\Rightarrow|\vec{a}\times\vec{b}|=۶$

حجم متوازی‌السطوح تولید شده توسط بردارهای $\vec{a}$، $\vec{a}-\vec{b}$ و $\vec{a}\times\vec{b}$ برابر است با:

$V=|(\vec{a}\times\vec{b}).(\underbrace{(\vec{a}\times(\vec{a}-\vec{b}))}_{-\vec{a}\times\vec{b}})|=|(\vec{a}\times\vec{b}).(-(\vec{a}\times\vec{b}))|=|\vec{a}\times\vec{b}|^۲=۶^۲=۳۶$

گروه آموزشی ماز

۳۱- تعداد اعداد طبیعی دو رقمی مانند k که به ازای هر یک از آن‌ها حاصل $۴k+۱$ مربع کامل باشد را t و تعداد اعداد طبیعی مضرب ۳ و کوچک‌تر از ۵۰ مانند n که به ازای هر یک از آن‌ها حاصل $\frac{n^۲.(n+۱)^۲}{۴}$ عددی زوج شود را S می‌نامیم. حاصل $۴t+۵s$ به کدام‌یک از اعداد زیر بخش‌پذیر است؟

۱) ۷ ۲) ۱۱ ۳) ۱۳ ۴) ۱۷

www.biomaze.ir

پاسخ: گزینه ۴ (متوسط ـ مفهومی / محاسباتی ـ ۱۲۰۱)

پاسخ تشریحی:

$۴k+۱$ وقتی مربع کامل می‌شود که k به صورت حاصل‌ضرب دو عدد طبیعی متوالی باشد. ببینید:

$$k=n(n+۱)\Rightarrow ۴k+۱=۴n(n+۱)+۱\Rightarrow ۴k+۱=(۲n+۱)^۲$$

در بین اعداد طبیعی دو رقمی، اعداد $۴\times۵,۳\times۶,۴\times۷,۵\times۸,۶\times۹,۷\times۱۰,۸$، این ویژگی را دارند که تعدادشان ۷ تاست، پس $t=۷$ می‌باشد. از

از طرف دیگر $\frac{n^۲.(n+۱)^۲}{۴}$ وقتی زوج است که n به یکی از دو فرم $۴k$ یا $۴k+۳$ باشد. (چرا؟)

در بین مضارب ۳ کوچک‌تر از ۵۰ اعداد $۴۸,۳۹,۳۶,۲۷,۲۴,۱۵,۱۲,۳$ این ویژگی را دارند که تعدادشان ۸ تاست، پس $s=۸$ می‌باشد.

بنابراین $۴t+۵s=۶۸$ است و در بین اعداد داده شده فقط بر ۱۷ بخش‌پذیر است.

گروه آموزشی ماز

۳۲- اگر بدانیم $([۲۱,k],۲۷۰)=۱۸$، آن‌گاه به جای k چند عدد طبیعی دو رقمی می‌توان قرار داد؟

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۵

پاسخ: گزینه ۲ (متوسط ـ مفهومی / محاسباتی ـ ۱۲۰۱)

پاسخ تشریحی:

چون $۱۸\times۱۵=۲۷۰$ است، بنابراین $[۲۱,k]$ باید به فرم $۱۸q$ باشد و q هیچ‌یک از عوامل ۳ و ۵ را نباید داشته باشد.

$$k=۱۸\times۴ \text{ یا } k=۱۸\times۲ \text{ یا } k=۱۸\times۱$$

گروه آموزشی ماز

۳۳- اگر عدد طبیعی d چنان باشد که هر سه عدد $۴n+۱۵, ۷n-۲۱, ۵n+۳$ را عاد کند، آن‌گاه d کدام می‌تواند باشد؟

۱) ۲۱ ۲) ۱۸ ۳) ۱۵ ۴) ۱۲

پاسخ: گزینه ۱ (آسان ـ مفهومی / محاسباتی ـ ۱۲۰۱)

یادآوری از رابطهٔ عاد:

اگر d اعداد a، b و c را عاد کند، هر ترکیب خطی از آن‌ها را عاد می‌کند. یعنی:

$$\left.\begin{array}{l} d\mid a \\ d\mid b \\ d\mid c \end{array}\right\}\Rightarrow d\mid ma\pm nb\pm kc \qquad m,n,k\in\mathbb{Z}$$

روش اول:

$$d\mid ۵n+۳ \xrightarrow{\text{سمت راست در } -۴ \text{ ضرب}} d\mid -۲۰n-۱۲$$
$$d\mid ۴n+۱۵ \xrightarrow{\text{سمت راست در } ۵ \text{ ضرب}} d\mid ۲۰n+۷۵$$
$$\xrightarrow[\text{با هم جمع می‌کنیم}]{\text{سمت راست روابط را}} d\mid ۷۵-۱۲\Rightarrow d\mid ۶۳$$

شرط $d\mid ۷n-۲۱$ اضافی است و به حل سوال کمکی نمی‌کند و با شرط قبلی در تعارض نیست. در بین گزینه‌ها فقط ۲۱ شمارنده‌ای از ۶۳ است، پس d می‌تواند ۲۱ باشد.

روش دوم:

$$\left.\begin{array}{l} d\mid ۵n+۳ \\ d\mid ۴n+۱۵ \\ d\mid ۷n-۲۱ \end{array}\right\}\Rightarrow d\mid ۲(۵n+۳)+(۴n+۱۵)-۲(۷n-۲۱)\Rightarrow d\mid ۶۳\Rightarrow$$

با توجه به گزینه‌ها، d می‌تواند ۲۱ باشد.

گروه آموزشی ماز

۳۴- اگر معادلهٔ هم‌نهشتی $۷۹۲\equiv ۴۸x^{۳۰}$ جوابی مانند $x_۰$ داشته و $x_۰$ در تقسیم بر ۱۱ باقی‌ماندهٔ ۳ داشته باشد، آن‌گاه رقم دهگان کوچک‌ترین مقدار طبیعی ممکن برای $x_۰$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

www.biomaze.ir

پاسخ: گزینه ۱ (متوسط ـ مفهومی / محاسباتی ـ ۱۲۰۱)

روش اول:

با توجه به این که $(۴۸,۳۰)$ برابر ۶ می‌باشد. پس دو طرف معادلهٔ هم‌نهشتی را بر ۶ تقسیم می‌کنیم.

$$\overset{۳۰}{۴۸x\equiv۷۹۲}\Rightarrow\overset{۵}{۸x\equiv۱۳۲}\Rightarrow\overset{۵}{۳x+۵x\equiv۱۳۲}\Rightarrow\overset{۵}{۳x\equiv۱۳۲}\xrightarrow[(۳,۵)=۱]{\text{دو طرف بر ۳ تقسیم}}\overset{۵}{x\equiv\overset{۵}{۴۴}\equiv۴}$$

$$\left.\begin{matrix}\overset{۵}{x\equiv\overset{۵}{۴}\equiv۱۴}\\ \overset{۱۱}{x\equiv\overset{۱۱}{۳}\equiv۱۴}\end{matrix}\right\}\Rightarrow\overset{۵۵}{x\equiv۱۴}\Rightarrow x=۵۵k+۱۴$$

با جایگذاری $k=۰$ کوچک‌ترین مقدار طبیعی ممکن برای x به دست می‌آید که ۱۴ است و رقم دهگان ۱ است.

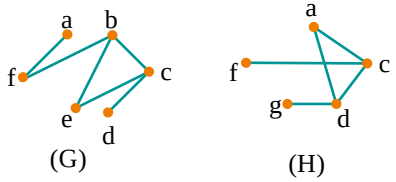
روش دوم:

هنگامی که به رابطهٔ $\overset{۵}{x\equiv۴}$ رسیدیم می‌توانیم بنویسیم $۵\mid x-۴$ یعنی $x=۵k+۴$ که با جای‌گذاری $k=۲$ در این رابطه، کوچک‌ترین عدد طبیعی برای x به دست می‌آید که جواب معادله بوده و در تقسیم بر ۱۱ باقی‌ماندهٔ ۳ می‌دهد. پس جواب $x=۱۴$ است و رقم دهگان آن ۱ است.

گروه آموزشی ماز

۳۵- گراف‌های G و H داده شده‌اند. چند گراف مانند I از مرتبهٔ ۳ می‌توان کشید که زیرگرافی از هر دو گراف G و H باشند؟

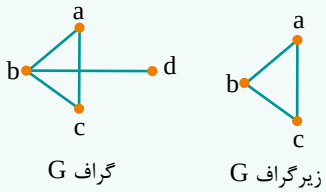
۱) ۴
۲) ۵
۳) ۶
۴) ۷



پاسخ: گزینه ۳ (متوسط ـ مفهومی / محاسباتی ـ ۱۲۰۲)

زیرگراف:

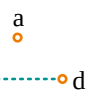
یک زیرگراف از گراف G، گرافی است که مجموعهٔ رئوس آن زیرمجموعه‌ای از مجموعهٔ رئوس گراف G و مجموعهٔ یال‌های آن زیرمجموعه‌ای از مجموعهٔ یال‌های G باشد.



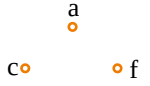
پاسخ تشریحی:

رئوس مشترک دو گراف G و H، رئوس a، c، d و f هستند که باید سه رأس از آن چهار رأس را برای زیرگراف انتخاب کنیم که مسئله را به $\binom{۴}{۳}$ یعنی ۴ دسته تقسیم می‌کنیم. ببینید:

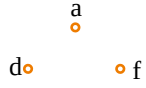
۱) رئوس a، c و d انتخاب شوند: در این حالت، فقط یال cd در هر دو گراف G و H مشترک است که می‌تواند در I باشد یا نباشد و $۲^۱$ گراف پدید می‌آید.



۲) رئوس a، c، f انتخاب شوند: در این حالت هیچ یال مشترکی بین دو گراف G و H وجود نداشته و فقط ۱ گراف می‌تواند به جای I قرار گیرد. (گراف تهی)

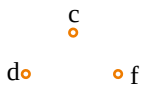


۳) رئوس a، d، f انتخاب شوند: در این حالت نیز هیچ یال مشترکی بین دو گراف G و H وجود نداشته و فقط ۱گراف می‌تواند به جای I قرار گیرد. (گراف تهی)



www.biomaze.ir

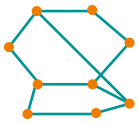
۴) رئوس c، d و f انتخاب شوند: در این حالت فقط یال cd در هر دو گراف G و H متشترک است که می‌تواند در I باشد یا نباشد و 2^1 گراف پدید می‌آید.



پس در مجموع ۲+۱+۱+۲ یعنی ۶ زیرگراف مشترک برای گراف‌های G و H یافت می‌شود.

گروه آموزشی ماز

۳۶- در گراف مقابل، دورهایی با طول m وجود دارد. تمام مقادیر ممکن برای m، مجموعه‌ای ۴ عضوی به صورت $A=\{m_1,m_2,m_3,m_4\}$ می‌شود. اگر مجموع اعضای A را t بنامیم، آن‌گاه t کدام می‌شود؟



۱) ۲۵
۲) ۲۶
۳) ۲۷
۴) ۲۸

پاسخ: گزینه ۴ (متوسط ـ مفهومی / محاسباتی ـ ۱۲۰۲)

پاسخ تشریحی:

گراف را به صورت مقابل باز ترسیم می‌کنیم:

پاسخ این سوال مانند جواب تمرین ۱۲ قسمت ب از صفحه ۴۲ کتاب درسی می‌شود که در آن دورهایی با طول ۹,۸,۶,۵ وجود دارد و دوری با طول‌های دیگر در آن دیده نمی‌شود. بنابراین جواب برابر $t=5+6+8+9=28$ می‌شود.

گروه آموزشی ماز

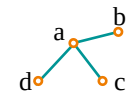
۳۷- گرافی از مرتبهٔ ۴ و اندازهٔ q مجموعهٔ احاطه‌گر مینیمم منحصر به فرد دارد. q کدام یک از اعداد زیر نمی‌تواند باشد؟

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۵

پاسخ: گزینه ۴ (متوسط ـ مفهومی / محاسباتی ـ ۱۲۰۲)

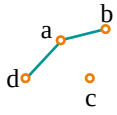
پاسخ تشریحی:

گراف‌های با مرتبهٔ ۴ و اندازه‌های ۵,۴,۳,۲ می‌کشیم و نشان می‌دهیم گراف با اندازهٔ ۵ مجموعهٔ احاطه‌گر مینیمم یکتا ندارد. ببینید:



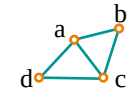
G_2

مجموعهٔ احاطه‌گر مینیمم $=\{a\}$



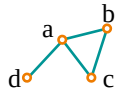
G_1

مجموعهٔ احاطه‌گر مینیمم $=\{a,c\}$



G_4

مجموعه‌های احاطه‌گر مینیمم $=\{a\},\{c\}$



G_3

مجموعهٔ احاطه‌گر مینیمم $=\{a\}$

توجه کنید گراف‌های مرتبهٔ۴ با اندازه‌های ۴,۳,۲ می‌توانند مجموعهٔ احاطه‌گر مینیمم یکتا داشته باشند و یا نداشته باشند، اما گراف مرتبهٔ ۴ با اندازهٔ ۵ قطعاً مجموعهٔ احاطه‌گر مینیمم یکتا ندارد.

گروه آموزشی ماز

۳۸- جعبه‌ای شامل ۶ مهرهٔ زرد مشابه، ۹ مهرهٔ سبز مشابه و ۱۲ مهرهٔ قرمز مشابه است. به چند طریق می‌توانیم ۷ مهره از آن جعبه را انتخاب کنیم؟

۱) ۳۶ ۲) ۳۵ ۳) ۳۴ ۴) ۳۳

پاسخ: گزینه ۲ (متوسط ـ مفهومی / محاسباتی ـ ۱۲۰۳)

درسنامه

تعداد جواب‌های صحیح و نامنفی معادلهٔ $x_1+x_2+\ldots+x_k=n$ برابر با $\binom{n+k-1}{k-1}$ است.

تعداد جواب‌های طبیعی معادلهٔ $x_1+x_2+\ldots+x_k=n$ برابر با $\binom{n-1}{k-1}$ است.

www.biomaze.ir

پاسخ تشریحی:

تعداد مهره‌های زرد، سبز و قرمز انتخاب شده را به ترتیب x_1, x_2, x_3 می‌نامیم و تعداد جواب‌های معادلهٔ $x_1+x_2+x_3=7$ را به دست می‌آوریم. در بین تمامی جواب‌های به دست آمده فقط جواب $x_2=x_3=0$ و $x_1=7$ قابل قبول نیست زیرا ۷ مهرهٔ زرد نداریم. پس:

$$\text{جواب}=\binom{7+3-1}{3-1}-1=\binom{9}{2}-1=36-1=35$$

گروه آموزشی ماز

۳۹- سطر اول از مربع لاتین ۵×۵ به صورت کامل و سطر دوم آن مطابق جدول مقابل، ناقص پر شده‌اند. در ادامه سطر دوم آن به چند طریق قابل پر شدن است؟

a	b	c	d	e
		e		c

۱) صفر
۲) ۱
۳) ۲
۴) ۳

پاسخ: گزینه ۳ (متوسط ـ مفهومی / محاسباتی ـ ۱۲۰۳)

روش اول:

باید حروف d, b, a را در ۳ خانهٔ خالی چنان پر کنیم که هیچ‌یک از حروف در زیر حرف هم‌نام خود قرار نگیرد. اگر تعداد طرق پرکردن خانه‌ها به طوری که حرف x در زیر حرف هم‌نام خود قرار گیرد را x بنامیم، آن‌گاه هدف یافتن تعداد اعضای $\bar{A}\cap\bar{B}\cap\bar{D}$ است که از اصول شمول و عدم شمول به دست می‌آید. ببینید:

$$|\bar{A}\cap\bar{B}\cap\bar{D}|=|U|-|A\cup B\cup D|\Rightarrow|U|-|A|-|B|-|D|+|A\cap B|+|A\cap D|+|B\cap D|-|A\cap B\cap D|$$

$$|\bar{A}\cap\bar{B}\cap\bar{D}|=3!-3\times2!+3\times1!-1\times0!=2$$

روش دوم:

می‌توانیم مستقیم، خانه‌های خالی سطر دوم را با حروف a، b و d پر کنیم که این کار به ۲ طریق امکان‌پذیر است اما روش اول بهتر است زیرا قابل تعمیم است.

گروه آموزشی ماز

۴۰- در یک اجتماع، حداقل چند نفر حضور داشته باشد تا یقین حاصل کنیم در آن اجتماع دست‌کم ۱۵ نفر وجود دارد که هم روز تولدشان در ایام هفته و هم ماه تولدشان در ماه‌های شمسی یکسان است؟

۱) ۱۱۷۷
۲) ۱۱۷۶
۳) ۱۲۶۰
۴) ۱۲۶۱

پاسخ: گزینه ۱ (آسان ـ مفهومی / محاسباتی ـ ۱۲۰۳)

تعمیم اصل لانهٔ کبوتری:

هرگاه $(kn+1)$ کبوتر یا بیشتر در n لانه قرار گیرند در این صورت لانه‌ای وجود دارد که حداقل $(k+1)$ کبوتر در آن قرار گرفته است.

پاسخ تشریحی:

طبق اصل لانهٔ کبوتری ۷×۱۲ یعنی ۸۴ لانه داریم. بنابراین:

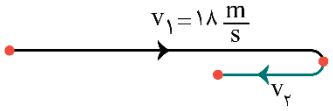
$$m\geq n.(k-1)+1\Rightarrow m\geq(12\times7).(15-1)+1\Rightarrow m\geq1177$$

گروه آموزشی ماز

www.biomaze.ir

۴۱- مطابق شکل، متحرکی مسیری را روی خط راست طی می‌کند. سرعت در مسیر رفت ثابت و برابر $v_1 = 18\frac{m}{s}$ و در مسیر برگشت v_2 است، اگر مدت زمان برگشت دو برابر مدت زمان رفت باشد، مجموع بزرگی سرعت متوسط و تندی متوسط $(|\vec{v}_{av}| + s_{av})$ در کل مسیر حرکت چند $\frac{m}{s}$ است؟

۱) ۶
۲) ۱۲
۳) ۱۸
۴) ۲۴

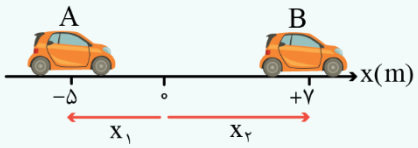


پاسخ: گزینه ۲ (متوسط ـ محاسباتی ـ ۱۲۰۱)

بردار مکان

برداری که از مبدأ مختصات به مکان متحرک وصل می‌شود.

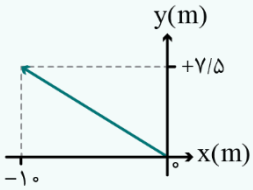
مثال: متحرکی روی محور x ها از B به A می‌رود.



بردار مکان ثانویه : $x_2 = +7i$ بردار مکان اولیه : $x_1 = -5i$

در کتاب درسی شما چون فقط حرکت یک بعدی روی محور x ها تدریس شده است بردار مکان را می‌توان با x هم نمایش داد و نیازی به نوشتن i و j هم نیست. (ولی علامت را حتماً قرار دهید.)

مثال: شخصی در نقطه A در صفحه xoy قرار دارد.



بردار مکان شخص: $\vec{r} = -10i + 7/5j$

فاصله متحرک از مبدأ مختصات : $r = \sqrt{(-10)^2 + 7/5^2} = 12/5$ بردار مکان شخص : $\vec{r} = -10i + 7/5j$

فاصله متحرک از مبدأ مختصات طول (اندازه) بردار مکان می‌باشد.

مسافت طی شده (L):

«مجموعه طول‌های پیموده شده در مسیر حرکت را مسافت طی شده گویند.»

مسافت طی شده یک کمیت نرده‌ای نامنفی می‌باشد.

جابه‌جایی (d):

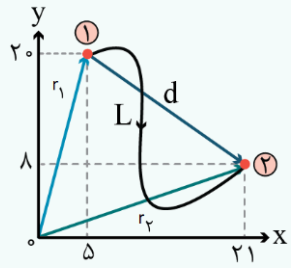
«به برداری که نقطه شروع حرکت را به نقطه پایان حرکت وصل می‌کند، بردار جابه‌جایی گفته می‌شود.»

جابه‌جایی یک کمیت برداری است که می‌تواند مثبت یا منفی یا صفر باشد.

اندازه بردار جابه‌جایی $(\vec{d})$ را به اختصار جابه‌جایی می‌نامند.

مسافت و جابه‌جایی هر دو از جنس طول‌اند و بر حسب متر اندازه‌گیری می‌شوند.

مثال: در شکل مقابل جابه‌جایی و مسافت طی شده متحرک را مشخص کنید.



بردار مکان ثانویه : $\vec{r}_2 = 21i + 8j$

بردار مکان اولیه : $\vec{r}_1 = 5i + 20j$

بردار جابه‌جایی : $\vec{d} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1 = (21-5)i + (8-20)j$

اندازه جابه‌جایی : $d = \sqrt{(16)^2 + (-12)^2} = 20$

نحوه محاسبه جابه‌جایی و مسافت طی شده:

۱ـ برای محاسبه مسافت طی شده همه طول‌هایی که متحرک طی کرده است را با هم جمع می‌کنیم:

$$L = L_1 + L_2 + \cdots$$

۲ـ برای محاسبه جابه‌جایی ابتدا شروع حرکت را به پایان حرکت وصل کرده و به هر روشی که می‌توانیم طول این بردار را به دست می‌آوریم.

الف: اگر در صورت سؤال بردار مکان ابتدا و انتهای حرکت را به ما بدهند:

$$\Delta x = x_2 - x_1$$

ب: اگر در مسئله چند بردار جابه‌جایی را بدهند:

$$\Delta x = \Delta x_1 + \Delta x_2 + \cdots$$

(در کتاب درسی شما چون فقط حرکت یک بعدی روی محور x ها تدریس شده است در این نوع حرکت ابتدا مکان اولیه و نهایی را همراه با علامت به‌دست آورده و در نهایت از هم کم می‌کنیم.)

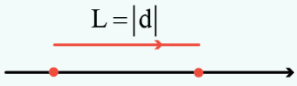
www.biomaze.ir

جابه‌جایی (d)	مسافت طی شده (L)
برداری است که ابتدای حرکت را به انتهای حرکت وصل می‌کند.	مجموع طول‌های پیموده شده متحرک را مسافت طی شده گویند.
برداری است.	نرده‌ای است.
هر عددی می‌تواند باشد (مثبت، منفی و صفر)	نامنفی است. (مثبت و صفر)
بردار جابه‌جایی به مسیر حرکت بستگی ندارد و فقط تابع نقاط شروع و پایان حرکت است.	مسافت طی شده به کل مسیر حرکت وابسته است.
بردار جابه‌جایی اطلاع دقیقی از مسیر حرکت به ما نمی‌دهد و در واقع کوتاه‌ترین فاصله بین مبدأ و مقصد است.	کل مسیر حرکت را مشخص می‌کند ولی جهت حرکت و جابه‌جایی را نشان نمی‌دهد.

مسافت طی شده همواره بزرگ‌تر مساوی اندازه جابه‌جایی است:

$$L \geq |d|$$

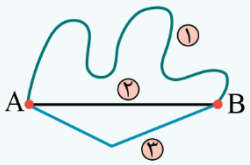
اگر متحرکی روی خط راست حرکت کند و تغییر جهت هم نداشته باشد مسافت طی شده و اندازه جابه‌جایی برابر خواهد شد:



در این حالت متحرک روی بردار جابه‌جایی حرکت کرده است و کمترین مقدار مسافت طی شده را خواهیم داشت.

مثال: در شکل مقابل سه متحرک ۱ و ۲ و ۳ از A به B رفته‌اند:

چون مبدأ و مقصد هر سه مسیر یکسان است جابه‌جایی هر سه مسیر برابر است.



$$d_1 = d_2 = d_3$$

در مسیر ۲ متحرک روی بردار جابه‌جایی حرکت کرده است و کمترین مقدار مسافت طی شده را خواهیم داشت.

$$L_2 = |d|_2 , L_1 > |d|_1 , L_3 > |d|_3 \qquad L_1 > L_2 > L_3$$

سرعت و تندی:

سرعت متوسط: نسبت جابه‌جایی به مدت زمان صرف شده را سرعت متوسط گویند.

$$\vec{v}_{av} = \frac{d}{\Delta t}$$

$\vec{v}_{av}$: سرعت متوسط d : جابه‌جایی Δt : زمان سپری شده

اگر متحرک روی محور x حرکت کند می‌توان نوشت:

$$\vec{v}_{av} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1}$$

تندی متوسط: نسبت مسافت طی شده به مدت زمان صرف شده را تندی متوسط گویند.

$$s_{av} = \frac{L}{\Delta t}$$

s_{av} : تندی متوسط

L : مسافت طی شده

Δt : زمان سپری شده

تندی لحظه‌ای (v): تندی متحرک در هر لحظه را تندی لحظه‌ای گویند.

یکای تندی و سرعت در SI متر بر ثانیه می‌باشد.

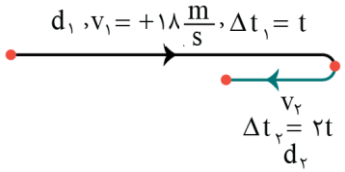
تندی متوسط و تندی لحظه‌ای هر دو کمیت نرده‌ای و نامنفی می‌باشند یعنی جهت ندارند.

می‌دانیم که حاصل‌ضرب عدد در بردار برابر بردار است و اگر عدد مثبت باشد بردار حاصل و بردار اولیه هم‌جهت می‌باشند پس: «سرعت متوسط یک کمیت برداری است و همواره در جهت جابه‌جایی می‌باشد.»

سرعت لحظه‌ای یک کمیت برداری است و مماس بر مسیر حرکت و در جهت حرکت می‌باشد.

پاسخ تشریحی:

با توجه به شکل مقابل می‌توان نوشت:



سرعت متوسط در مسیر رفت:

$$v_1 = \frac{\Delta x}{\Delta t} \rightarrow ۱۸ = \frac{d_1}{t}$$

سرعت متوسط در کل مسیر حرکت:

$$\begin{cases} v_{av} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{d_1 - d_2}{t + 2t} = \frac{d_1 - d_2}{3t} \\ s_{av} = \frac{L}{\Delta t} = \frac{d_1 + d_2}{t + 2t} = \frac{d_1 + d_2}{3t} \end{cases}$$

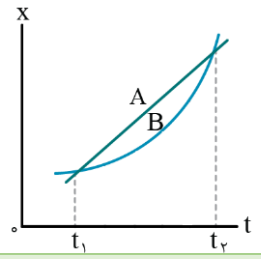
مجموع سرعت و تندی متوسط در کل مسیر:

$$v_{av} + s_{av} = \frac{d_1 - d_2}{3t} + \frac{d_1 + d_2}{3t} = \frac{2}{3}\frac{d_1}{t}$$

$$\rightarrow v_{av} + s_{av} = \frac{2}{3} \times 18 = 12 \frac{m}{s}$$

گروه آموزشی ماز

۴۲- شکل زیر نمودار مکان ـ زمان دو خودرو را نشان می‌دهد که بر روی محور x در حرکت‌اند. چه تعداد از موارد زیر در مورد حرکت این دو خودرو نادرست است؟



الف: حرکت A با سرعت ثابت و حرکت B شتابدار تندشونده است.

ب: در بازه t_1 تا t_2، مسافت طی‌شده توسط دو خودرو با هم برابر است.

ج: در لحظات t_1 و t_2 دو خودرو از کنار یکدیگر عبور می‌کنند.

د: در بازهٔ t_1 تا t_2، بردارهای مکان و سرعت هر دو خودرو در جهت مثبت محور x هستند.

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

پاسخ: گزینه ۱ (آسان ـ نموداری ـ ۱۲۰۱)

بررسی موارد:

الف: نمودار مکان ـ زمان خودرو A خط راست است، پس شیب آن یعنی سرعت ثابت است ولی نمودار خودرو B خط راست نمی‌باشد و اندازهٔ شیب آن یعنی سرعت در حال افزایش است پس حرکت خودرو B شتابدار و تندشونده است. (✓)

ب: هر دو حرکت بر روی خط راست و بدون تغییر جهت انجام شده است، پس برای هر دو حرکت اندازهٔ جابه‌جایی و مسافت طی‌شده برابر است. (✓)

برای خودرو A : $L_A = |\Delta \vec{x}|_A$ ، $s_{av_A} = |\vec{v}_{av}|_A$

برای خودرو B : $L_B = |\Delta \vec{x}|_B$ ، $s_{av_B} = |\vec{v}_{av}|_B$

از طرفی چون نقاط شروع و پایان حرکت هر دو خودرو در بازهٔ t_1 تا t_2 برابر است، پس جابه‌جایی، مسافت طی شده، سرعت متوسط و تندی متوسط هر دو خودرو در این بازه با هم برابر است.

در بازهٔ t_1 تا t_2 :

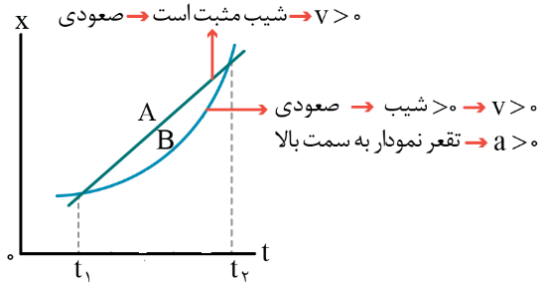
$$\begin{cases} L_A = L_B \\ \Delta x_A = \Delta x_B \\ s_{av_A} = s_{av_B} \\ v_{av_A} = v_{av_B} \end{cases}$$

ج: در لحظات t_1 و t_2 هر دو خودرو در یک مکان قرار دارند. (✓)

$$t_1 : x_{1_A} = x_{1_B}$$

$$t_2 : x_{2_A} = x_{2_B}$$

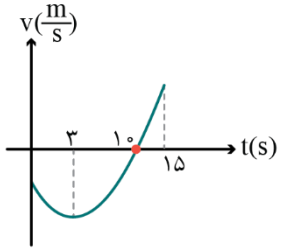
د: (✓)



گروه آموزشی ماز

www.biomaze.ir

۴۳- نمودار سرعت ـ زمان متحرکی که روی محور x حرکت می‌کند، یک سهمی مطابق شکل می‌باشد. چه تعداد از موارد زیر در مورد حرکت این متحرک در این ۱۵ ثانیه نادرست است؟



الف: در بازهٔ زمانی صفر تا $t=10s$، تندی متوسط بیشتر از بزرگی سرعت متوسط است.

ب: بزرگی شتاب متوسط در ثانیهٔ دوم، هم‌اندازهٔ بزرگی شتاب متوسط در بازهٔ زمانی $t=4s$ تا $t=5s$ است.

ج: مجموعاً ۱۰ ثانیه نیروی خالص وارد بر متحرک در خلاف جهت محور x است.

د: در مدتی که متحرک در جهت محور x حرکت می‌کند، بزرگی شتاب پیوسته در حال کاهش است.

۱) ۴ ۲) ۳ ۳) ۲ ۴) ۱

پاسخ: گزینه ۲ (متوسط ـ نموداری ـ ۱۲۰۱)

تحلیل کامل نمودار سرعت.زمان

۱ـ اگر نمودار بالای محور t باشد: متحرک در جهت محور x حرکت می‌کند $(v>0)$

۲ـ اگر نمودار زیر محور t باشد: متحرک خلاف جهت محور x حرکت می‌کند $(v<0)$

۳ـ نقاطی که نمودار محور t را قطع کرده: متحرک متوقف شده و ممکن است تغییر جهت دهد $(v=0)$

۴ـ نمودار سرعت ـ زمان از محور t دور شود: تندی زیاد می‌شود (حرکت تندشونده)

۵ـ نمودار سرعت ـ زمان به محور t نزدیک شود: تندی کم می‌شود (حرکت کندشونده)

۶ـ نمودار سرعت ـ زمان موازی محور t باشد: تندی ثابت می‌ماند (حرکت یکنواخت)

۷ـ نمودار سرعت ـ زمان صعودی باشد: شتاب و نیرو در جهت محور x است $(a>0)$

۸ـ نمودار سرعت ـ زمان نزولی باشد: شتاب و نیرو خلاف جهت محور x است $(a<0)$

۹ـ نمودار سرعت ـ زمان افقی باشد: شتاب و نیرو صفر شده است $(a=0)$

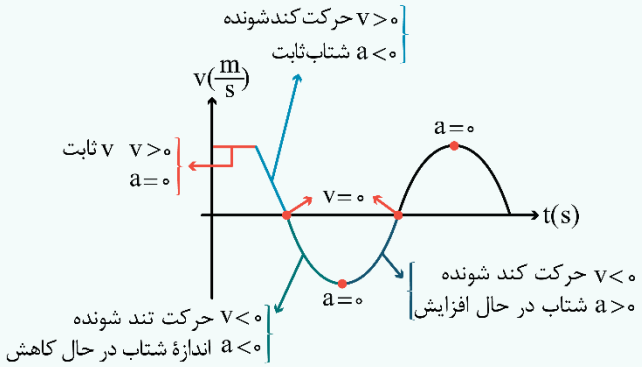
۱۰ـ در مقاطع ماکسیمم و مینیمم نمودار سرعت ـ زمان: شتاب و نیرو تغییر جهت می‌دهد $(a=0)$

۱۱ـ نمودار سرعت ـ زمان در حال قائم شدن باشد: اندازه شتاب افزایش

۱۲ـ نمودار سرعت ـ زمان در حال افقی شدن باشد: اندازه شتاب کاهش

۱۳ـ نمودار سرعت ـ زمان خط راست باشد: اندازه شتاب ثابت

مثال:



بررسی موارد:

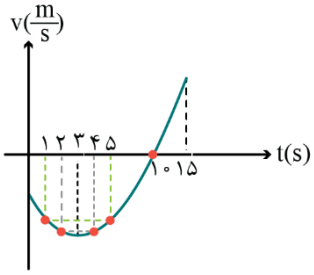
الف: با توجه به اینکه در بازهٔ زمانی صفر تا $t=10s$ متحرک تغییر جهت نداده است، بزرگی سرعت متوسط و تندی متوسط برابر است. (✗)

ب: چون سهمی نسبت به رأس متقارن است، پس:

۱ـ بزرگی سرعت در لحظات $t=1s$ و $t=5s$ برابر است.

۲ـ بزرگی سرعت در لحظات $t=2s$ و $t=4s$ برابر است.

پس شتاب متوسط در ثانیه دوم و ثانیه پنجم هم‌اندازه است. (✓)

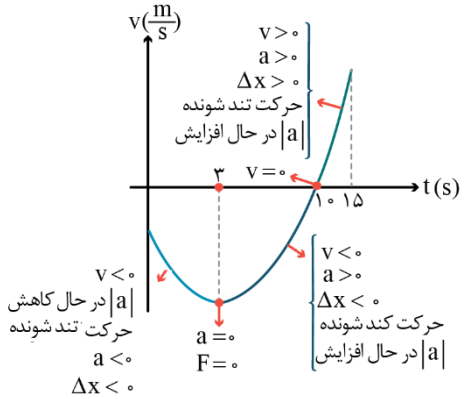


ج: در بازه صفر تا $t=3s$ چون نمودار نزولی است، پس شیب آن یعنی شتاب منفی است پس نیرو در این بازه منفی است، یعنی نیرو ۳ ثانیه خلاف جهت محور x است. (✗)

www.biomaze.ir

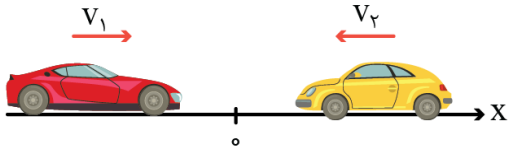
د: در بازه $t = ۱۰s$ تا $t = ۱۵s$ سرعت مثبت و متحرک در جهت محور x حرکت می‌کند. همان‌طور که مشخص است در این بازه شیب (شتاب) در حال افزایش است. (✗)

تحلیل کلی نمودار:



گروه آموزشی ماز

۴۴- مطابق شکل دو متحرک (۱) و (۲) با سرعت ثابت به سمت هم در حال حرکت‌اند. در لحظه t که متحرک (۱) از مبدأ محور عبور می‌کند، فاصله دو متحرک از هم ۲۴۰m است و ۱۲ ثانیه بعد که متحرک (۲) از مبدأ محور عبور می‌کند، فاصلهٔ دو متحرک از هم ۴۸m است. در فاصلهٔ چند متری از مبدأ محور، دو متحرک از کنار هم عبور می‌کنند؟



۱) ۴۵
۲) ۴۰
۳) ۳۵
۴) ۳۰

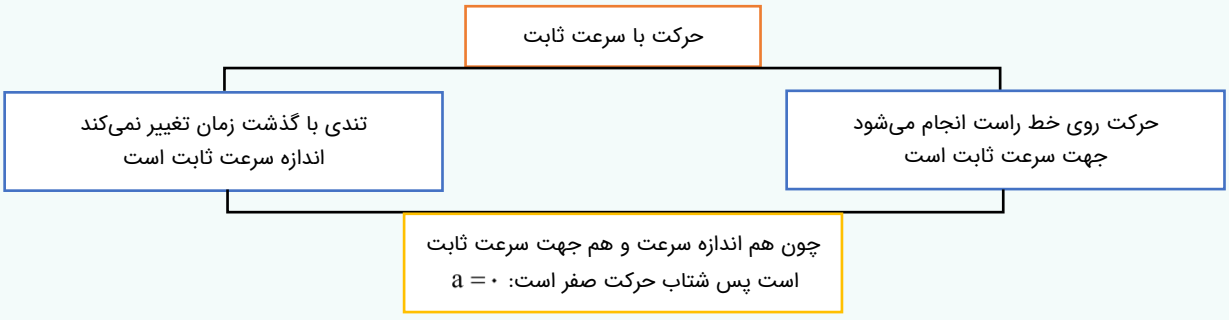
پاسخ: گزینه ۲ (متوسط ـ محاسباتی ـ ۱۲۰۱)

حرکت با سرعت ثابت

در این نوع حرکت اندازه و جهت سرعت متحرک در طول مسیر ثابت است

پس در حرکت با سرعت ثابت سرعت متوسط متحرک در هر بازه زمانی دلخواه برابر سرعت لحظه‌ای آن است:

بزرگی سرعت متوسط = تندی متوسط = بزرگی سرعت لحظه‌ای = تندی لحظه‌ای

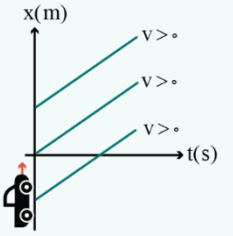


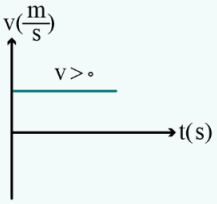
معادله مکان زمان در حرکت با سرعت ثابت $x = vt + x_0$

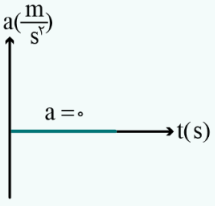
معادله جابه‌جایی زمان حرکت با سرعت ثابت $\Delta x = v\Delta t$

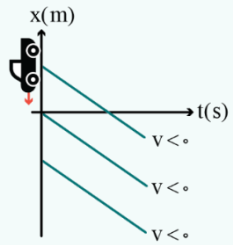
چون جهت حرکت ثابت است در این رابطه Δx هم جابه‌جایی و هم مسافت طی شده می‌باشد.

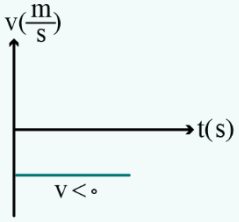
نمودارهای حرکت با سرعت ثابت

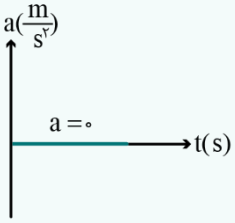








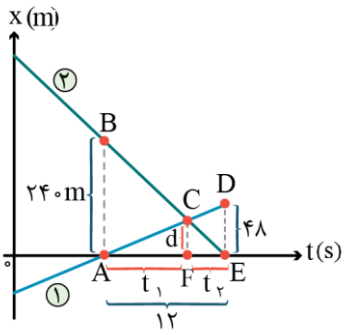




www.biomaze.ir

گام اول:

ابتدا نمودار مکان ـ زمان دو متحرک را رسم می‌کنیم:



گام دوم:

دو مثلث ABC و CDE متشابه‌اند، پس:

$$\frac{۲۴۰}{۴۸}=\frac{t_۱}{t_۲}\rightarrow t_۱=۵t_۲$$

$$t_۱+t_۲=۱۲\rightarrow ۵t_۲+t_۲=۱۲\rightarrow \begin{cases} t_۲=۲s \\ t_۱=۱۰s \end{cases}$$

گام سوم:

با توجه به تشابه دو مثلث ACF و ADE داریم:

$$\frac{d}{۱۰}=\frac{۴۸}{۱۲}\rightarrow d=۴۰m$$

گروه آموزشی ماز

۴۵- متحرکی با شتاب ثابت روی محور x در حال حرکت است. سرعت متوسط این متحرک در بازهٔ زمانی صفر تا ۴t صفر است. اگر جابه‌جایی این متحرک در بازه ۴t تا ۵t برابر ۲۵m باشد، مسافت طی شده در بازه صفر تا ۶t چند متر است؟

۱) ۶۰ ۲) ۶۵ ۳) ۱۰۰ ۴) ۱۵۰

پاسخ: گزینه ۳ (متوسط ـ محاسباتی ـ ۱۲۰۱)

حرکت با شتاب ثابت

هرگاه شتاب متحرکی در لحظه‌های مختلف یکسان باشد حرکت جسم را حرکت با شتاب ثابت می‌نامیم.

این حرکت یک بعدی و فقط روی یک محور انجام می‌شود.

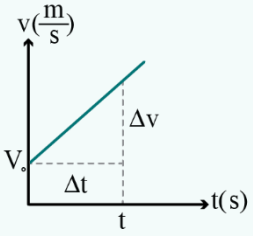
ویژگی‌های حرکت با شتاب ثابت

۱ـ سرعت متحرک با زمان به صورت خطی تغییر می‌کند پس تغییرات v نسبت به t به صورت یک تابع خطی است به همین دلیل سرعت متوسط متحرک در بازهٔ زمانی صفر تا t برابر است با میانگین سرعت متحرک در این دو لحظه، یعنی:

معادله سرعت متوسط در حرکت با شتاب ثابت:

$$\vec{v}_{av}=\frac{\Delta x}{\Delta t}=\frac{x_۲-x_۱}{t_۲-t_۱}\xrightarrow{\text{فقط برای حرکت با شتاب ثابت}}\vec{v}_{av}=\frac{\vec{v}_۱+\vec{v}_۲}{۲}$$

۲ـ شیب نمودار سرعت زمان ثابت است و برابر با شتاب متحرک می‌باشد.



$$\text{شیب نمودار سرعت زمان}=\vec{a}=\vec{a}_{av}=\frac{\Delta v}{\Delta t}$$

۳ـ شتاب متوسط در بازه‌های زمانی مختلف یکسان است.

شتاب متوسط در هر بازه زمانی برابر شتاب لحظه‌ای متحرک است، یعنی:

$$\vec{a}=\vec{a}_{av}=\frac{\Delta v}{\Delta t}$$

۴ـ معادله مکان ـ زمان در حرکت با شتاب ثابت:

معادله‌ای که مکان متحرک را در هر لحظه برای ما مشخص می‌کند:

$$x=\frac{۱}{۲}at^۲+v_۰t+x_۰$$

x : مکان متحرک در لحظه t — a : شتاب ثابت متحرک

$v_۰$: سرعت اولیه — $x_۰$: مکان اولیه

www.biomaze.ir

در حرکت با شتاب ثابت مکان متحرک تابعی درجه دوم از زمان است

۵ـ معادله سرعت ـ زمان در حرکت با شتاب ثابت:

معادله‌ای است که سرعت متحرک را در هر لحظه برای ما مشخص می‌کند:

$$v = at + v_0$$

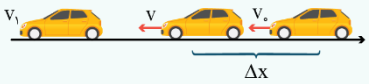
v : سرعت متحرک در لحظه t

a : شتاب ثابت متحرک

v_0 : سرعت اولیه

۶ـ معادله سرعت ـ جابه‌جایی (مستقل از زمان) در حرکت با شتاب ثابت:

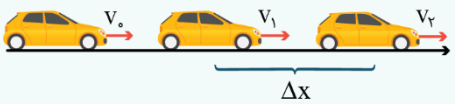
در این معادله زمان وجود ندارد، پس بهتر است در سؤالاتی که زمان را نمی‌دهند و نمی‌خواهند از این معادله استفاده کنیم.



$$v^2 - v_0^2 = 2a(x - x_0)$$

۷ـ معادله مستقل از شتاب در حرکت با شتاب ثابت:

در این معادله شتاب وجود ندارد، پس بهتر است در سؤالاتی که شتاب را نمی‌دهند و نمی‌خواهند از این معادله استفاده کنیم.



$$\Delta\vec{x} = \frac{\vec{v}_1 + \vec{v}_2}{2}\Delta t$$

۸ـ روش‌های محاسبه جابه‌جایی در حرکت با شتاب ثابت:

الف: معادله جابه‌جایی زمان:

$$\Delta x = \frac{1}{2}a\Delta t^2 + v_0\Delta t$$

ب: استفاده از فرمول جابه‌جایی در T ثانیه n ام:

$$\Delta x_{n,T} = (n - 0/5)aT^2 + v_0T$$

حالت خاص: جابه‌جایی در ثانیه n ام:

$$\Delta x_n = (n - 0/5)a + v_0$$

۹ـ جابه‌جایی‌های انجام شده توسط متحرک در T ثانیه‌های متوالی تشکیل یک تصاعد حسابی با قدر نسبت aT^2 می‌دهند.

جابه‌جایی در T ثانیه n ام : $\Delta x_{n,T} = (n - 0/5)aT^2 + v_0T$

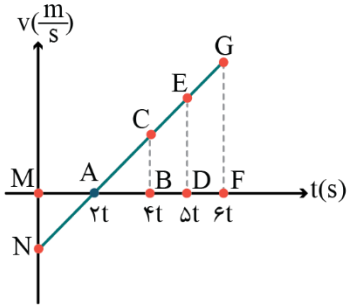
جابه‌جایی در T ثانیه اول : $\Delta x_{T,1} = 0/5aT^2 + v_0T$

جابه‌جایی در T ثانیه دوم : $\Delta x_{T,2} = 1/5aT^2 + v_0T$

جابه‌جایی در T ثانیه سوم : $\Delta x_{T,3} = 2/5aT^2 + v_0T$

جابه‌جایی در T ثانیه چهارم : $\Delta x_{T,4} = 3/5aT^2 + v_0T$

گام اول:



سرعت متوسط در بازه صفر تا $4t$ صفر است پس جابجایی در این بازه صفر است و با توجه به تقارن در حرکت شتاب ثابت متوجه می‌شویم متحرک در لحظه $2t$ تغییر جهت داده است. حال نمودار سرعت ـ زمان متحرک را رسم می‌کنیم.

گام دوم:

طبق قضیهٔ تالس می‌دانیم که نسبت مساحت‌ها برابر توان دوم نسبت تشابه است از طرفی مساحت زیر نمودار سرعت ـ زمان، جابه‌جایی است، پس:

$$\frac{S_{ABC}}{S_{ADE}} = \left(\frac{2t}{3t}\right)^2 \xrightarrow{S_{ADE} = S_{ABC} + 25} \frac{S_{ABC}}{S_{ABC} + 25} = \frac{4}{9} \rightarrow S_{ABC} = 20$$

گام سوم:

مساحت مثلث AMN با ABC برابر است، پس:

$$S_{AMN} = 20$$

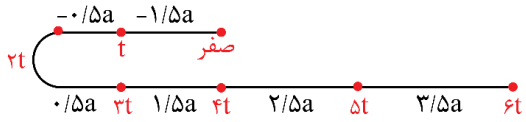
$$\frac{S_{ABC}}{S_{AFG}} = \left(\frac{2t}{4t}\right)^2 \rightarrow \frac{20}{S_{AFG}} = \frac{1}{4} \rightarrow S_{AFG} = 80$$

www.biomaze.ir

مسافت طی شده در بازه صفر تا $۶t$: $L = S_{AMN} + S_{AFG} = ۲۰ + ۸۰ = ۱۰۰m$

روش دوم:

چون سرعت متوسط در بازهٔ صفر تا $۴t$ صفر شده است، می‌توان فهمید در وسط این بازه، یعنی لحظهٔ $۲t$، سرعت صفر است. با استفاده از جابه‌جایی در ثانیه‌های متوالی داریم:



$۲/۵a = ۲۵ \Rightarrow a = ۱۰\frac{m}{s^۲}$

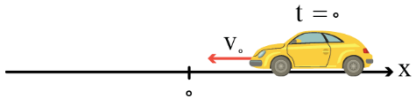
مسافت : $L = ۰/۵a + ۱/۵a + ۰/۵a + ۱/۵a + ۲/۵a + ۳/۵a$

$\Rightarrow L = ۱۰a = ۱۰ \times ۱۰ = ۱۰۰m$

گروه آموزشی ماز

۴۶- مطابق شکل متحرکی در لحظهٔ $t = ۰$ با شتاب ثابت $a_۱$ به صورت کند شونده از مکان $x_۰ = +۵m$ عبور می‌کند و پس از طی مسافت $۱۳m$ سرعت خود را ثابت کرده و به مدت ۴ ثانیه با سرعت ثابت حرکت می‌کند و در نهایت با شتاب $a_۲ = -۴\frac{m}{s^۲}$ حرکت خود را کند کرده و در لحظه t متوقف می‌شود. این متحرک مجموعاً ۷ ثانیه در جهت محور x حرکت کرده و در مدت این ۷ ثانیه مسافت $۲۲m$ را طی کرده است. سرعت اولیه متحرک چند متر بر ثانیه است؟

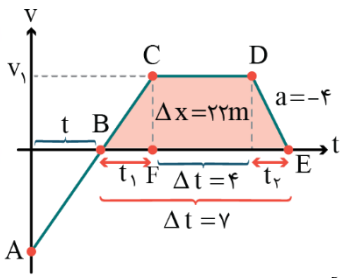
۱) ۳-
۲) ۴-
۳) ۶-
۴) ۸-



پاسخ: گزینه ۳ (سخت ـ محاسباتی ـ ۱۴۰۱)

پاسخ تشریحی:

ابتدا نمودار سرعت ـ زمان متحرک را رسم می‌کنیم:



با توجه به اینکه مساحت زیر نمودار سرعت ـ زمان برابر جابه‌جایی است. مساحت ذوزنقه را نوشته و $v_۱$ را به‌دست می‌آوریم:

$۲۲ = \frac{۴+۷}{۲} \times v_۱ \rightarrow v_۱ = ۴\frac{m}{s}$

در قسمت DE : $a_{av} = \frac{\Delta v}{\Delta t} \rightarrow -۴ = \frac{۰-۴}{t_۲} \rightarrow t_۲ = ۱s$

$\rightarrow t_۱ + ۴ + ۱ = ۷ \rightarrow t_۱ = ۲s$

در قسمت BC : $a = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{۴-۰}{۲} \rightarrow a = ۲\frac{m}{s^۲}$

در قسمت AB : $a = \frac{\Delta v}{\Delta t} \rightarrow ۲ = \frac{۰-v_۰}{t} \rightarrow v_۰ = -۲t$

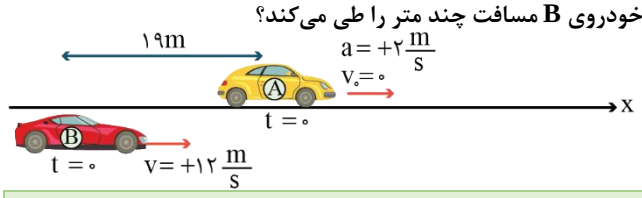
طبق صورت مسئله مسافت طی شده در مسیر ABC برابر $۱۳m$ است، پس:

$۱۳ = \frac{t \times ۲t}{۲} + \frac{۲ \times ۴}{۲} \rightarrow t = ۳s \rightarrow v_۰ = -۲t = -۶\frac{m}{s}$

گروه آموزشی ماز

www.biomaze.ir

۴۷- شکل زیر وضعیت دو خودرو **A** و **B** را در لحظهٔ $t=0$ نشان می‌دهد. در لحظه $t=3s$ دو خودرو حرکت خود را تغییر می‌دهند به‌طوری‌که خودرو **A** حرکت خود را یکنواخت کرده و با سرعت ثابت به مسیر خود ادامه می‌دهد و خودرو **B** حرکت خود را شتاب‌دار کرده و با شتاب $-4\frac{m}{s^2}$ به حرکت خود ادامه می‌دهد. از لحظهٔ $t=0$ تا لحظه‌ای که دو خودرو برای بار دوم به هم می‌رسند، خودروی **B** مسافت چند متر را طی می‌کند؟

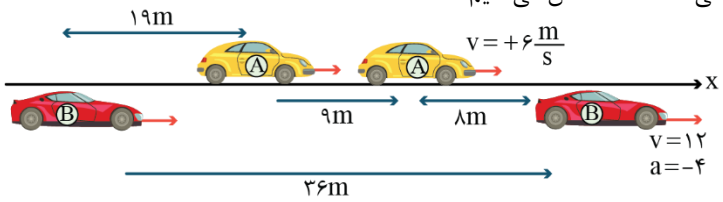


۱) ۳۳
۲) ۳۷
۳) ۵۲
۴) ۵۶

پاسخ: گزینه ۴ (سخت ـ محاسباتی ـ ۱۲۰۱)

روش اول:

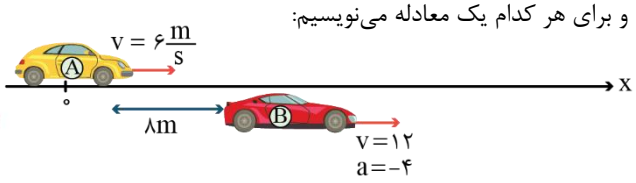
در حل چنین سؤالاتی وضعیت دو متحرک را تا لحظه تغییر نوع حرکت یعنی، $t=3$ مشخص می‌کنیم.



$$(A)\begin{cases}\Delta x=\frac{1}{2}at^2+v_0t\rightarrow\Delta x_A=\frac{1}{2}\times2\times3^2\rightarrow\Delta x_A=9m\\ v=at+v_0\rightarrow v_A=2\times3+0\rightarrow v_A=6\frac{m}{s}\end{cases}$$

$$(B)\ \Delta x=v\Delta t\rightarrow\Delta x_B=12\times3\rightarrow\Delta x_B=36m$$

حال که وضعیت دو متحرک مشخص شده، مکان متحرک **A** را مبدأ مختصات گرفته و برای هر کدام یک معادله می‌نویسیم:



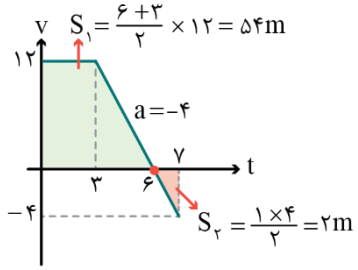
$$(A)\ x=vt+x_0\rightarrow x_A=6t$$

$$(B)\ x=\frac{1}{2}at^2+v_0t+x_0\rightarrow x_B=-2t^2+12t+8$$

شرط به هم رسیدن : $x_A=x_B\rightarrow6t=-2t^2+12t+8$

$$\rightarrow2t^2-6t-8=0\rightarrow t^2-3t-4=0\rightarrow\begin{cases}t=-1s\ \text{غ ق ق}\\ t=4s\end{cases}$$

پس ۴ ثانیه پس از تغییر نوع حرکت، دو متحرک برای بار دوم به هم می‌رسند. حال نمودار سرعت ـ زمان متحرک **B** را رسم کرده و از طریق مساحت زیر نمودار مسافت طی شده را محاسبه می‌کنیم:



$$L=54+2=56m$$

دقت کنید چون ۳s هم قبل از تغییر نوع حرکت، دو متحرک حرکت کرده‌اند، باید مسافت طی شده تا لحظهٔ $t=7s$ را محاسبه کنیم.

گروه آموزشی ماز

۴۸- یک خودرو با سرعت $20\frac{m}{s}$ در یک جادهٔ مستقیم با ضریب اصطکاک $\mu_k=0/2$ در حال حرکت است که رانندهٔ آن مانعی را در فاصلهٔ ۱۲۰ متری می‌بیند و ترمز می‌گیرد. اتومبیل در فاصلهٔ چندمتری مانع متوقف می‌شود؟ $(g=10\frac{N}{kg})$

۱) ۵
۲) ۲۰
۳) ۲۵
۴) ۲۸

پاسخ: گزینه ۲ (آسان ـ محاسباتی ـ ۱۲۰۳)

گام اول:

شتاب ترمز برابر است با:

$$a=-\mu_kg=-0/2\times10=-2\frac{m}{s^2}$$

www.biomaze.ir

گام دوم:

مسافت توقف برابر است با:

$$L=\frac{v_{\circ}^{۲}}{|۲a|}=\frac{۲۰^{۲}}{۲\times ۲}=۱۰۰m$$

بنابراین اتومبیل در فاصلهٔ ۲۰ متری مانع متوقف می‌شود.

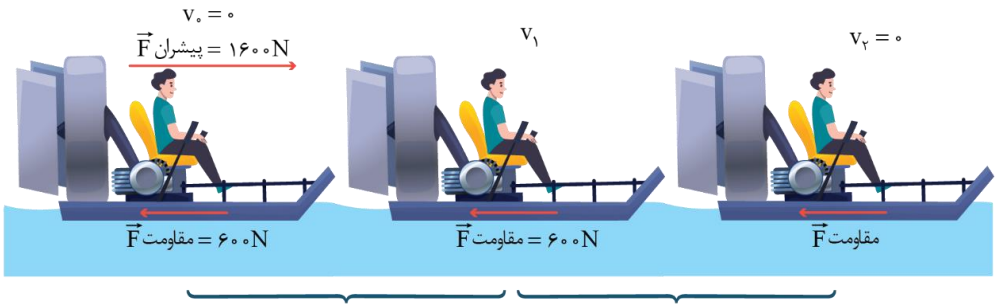
گروه آموزشی ماز

۴۹- یک قایق موتوری به جرم ۵۰۰kg روی سطح آب ساکن است. اگر نیروی موتور (پیشران) ۱۶۰۰ نیوتون بر این قایق وارد شود و پس از ۱۵ ثانیه حذف شود، این قایق از ابتدای حرکت تا توقف کامل چند متر مسافت طی می‌کند؟ (نیروی مقاومت را در کل مسیر ۶۰۰ نیوتون در نظر بگیرید.)

۱) ۲۲۵ ۲) ۴۵۰ ۳) ۶۰۰ ۴) ۱۲۰۰

پاسخ: گزینه ۳ (متوسط ـ مفهومی و محاسباتی ـ ۱۴۰۲)

پاسخ تشریحی:



$$F_{net}=ma$$

$$۱۶۰۰-۶۰۰=۵۰۰a_{۱}\rightarrow a_{۱}=۲\frac{m}{s^{۲}}$$

$$v_{۱}=at+v_{\circ}$$

$$v_{۱}=۲\times ۱۵+\circ\rightarrow v_{۱}=۳۰\frac{m}{s}$$

$$\Delta x_{۱}=\frac{v_{۱}+v_{\circ}}{۲}\Delta t=\frac{۳۰+\circ}{۲}\times ۱۵\rightarrow \Delta x_{۱}=۲۲۵m$$

$$F_{net}=ma$$

$$-۶۰۰=۵۰۰a\rightarrow a=-۱/۲\frac{m}{s^{۲}}$$

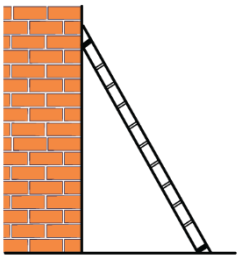
$$v_{۲}^{۲}-v_{۱}^{۲}=۲a\Delta x_{۲}$$

$$\circ^{۲}-۳۰^{۲}=۲\times(-۱/۲)\Delta x_{۲}\rightarrow \Delta x_{۲}=۳۷۵m$$

$$\Delta x_{t}=۲۲۵+۳۷۵=۶۰۰m$$

گروه آموزشی ماز

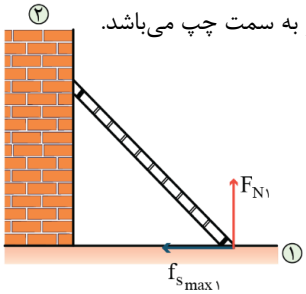
۵۰- مطابق شکل پایه نردبانی روی سطح افقی در آستانهٔ سر خوردن است. اگر از طرف سطح افقی نیروی $۸۰\sqrt{۵}$ نیوتون به پای نردبان وارد شود، جرم نردبان چند کیلوگرم است؟ ($\mu_s=۰/۵$ ، $g=۱۰\frac{N}{kg}$ و دیوار قائم بدون اصطکاک است.)



۱) ۱۶
۲) ۱۶۰
۳) ۱۸
۴) ۱۸۰

پاسخ: گزینه ۱ (متوسط ـ مفهومی و محاسباتی ـ ۱۴۰۲)

پاسخ تشریحی:



چون در راستای افق نردبان در آستانه سر خوردن قرار دارد پس نیروی اصطکاک آن بیشینه و برابر $f_{s\,max}=F_N\mu_s$ و به سمت چپ می‌باشد.

$$f_{s\,max_{۱}}=F_N\mu_s=۰/۵F_{N_{۱}}$$

$$\text{نیروی سطح افقی به نردبان}: R_{۱}=\sqrt{f_{max_{۱}}^{۲}+F^{۲}{}_{N_{۱}}}$$

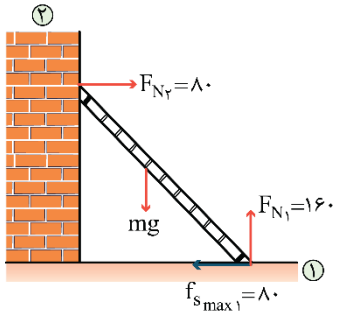
www.biomaze.ir

$$\rightarrow ۸۰\sqrt{۵} = \sqrt{(۰/۵F_{N_۱})^۲ + (F_{N_۱})^۲}$$

$$\rightarrow ۶۴۰۰ \times ۵ = \frac{۱}{۴}F_{N_۱}^۲ + F_{N_۱}^۲$$

$$\rightarrow F_{N_۱} = ۱۶۰N \rightarrow f_{s\,max_۱} = ۰/۵ \times ۱۶۰ = ۸۰N$$

چون نردبان ساکن است در راستای افق و قائم نیروی خالص صفر است:



در راستای افق : $F_{N_۲} = f_{s\,max_۱} = ۸۰N$

در راستای قائم : $F_{N_۱} = mg \Rightarrow mg = ۱۶۰N \Rightarrow m = ۱۶kg$

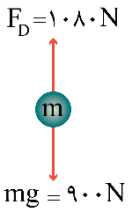
گروه آموزشی ماز

۵۱- چتربازی به جرم ۹۰kg، چتر خود را باز می‌کند. اگر در این لحظه، نیروی مقاومت هوای وارد بر چتر باز به ۱۰۸۰N برسد، بزرگی شتاب چترباز در این لحظه چند متر بر مربع ثانیه است؟ $(g = ۱۰\frac{N}{kg})$

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

پاسخ: گزینه ۲ (آسان ـ محاسباتی ـ ۱۴۰۲)

پاسخ تشریحی:



با استفاده از قانون دوم نیوتون می‌توان نوشت:

$$F_{net} = ma \Rightarrow ۱۰۸۰ - ۹۰۰ = ۹۰a$$

$$\Rightarrow ۱۸۰ = ۹۰a \Rightarrow a = ۲\frac{m}{s^۲}$$

گروه آموزشی ماز

۵۲- دو قطعه چوب A و B را روی سطح افقی پرتاب می‌کنیم. ضریب اصطکاک جنبشی چوب A با سطح افقی ۲۰ درصد کمتر از ضریب اصطکاک چوب B با سطح افقی می‌باشد و سرعت اولیهٔ چوب B نصف سرعت اولیهٔ چوب A است. اگر جرم چوب A سه برابر جرم چوب B باشد، مسافت پیموده شده توسط چوب A چند برابر مسافت پیموده شده توسط چوب B است؟

۱) ۱/۶ ۲) ۲/۵ ۳) ۳/۲ ۴) ۵

پاسخ: گزینه ۴ (متوسط ـ مفهومی و محاسباتی ـ ۱۴۰۲)

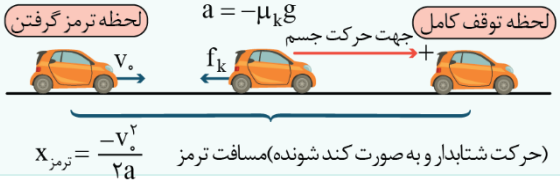
بررسی حرکت‌های شتابدار کندشونده روی سطح افقی (حرکت‌هایی که تنها نیروی وارد بر جسم نیروی اصطکاک است.)

انواع حرکت‌های کندشونده‌ای که پس از مدتی متوقف می‌شوند:

۱ـ حرکت خودرو از لحظه ترمز گرفتن تا توقف کامل (مسافت ترمز)

۲ـ پرتاب یک جسم روی یک سطح افقی

جهت مثبت محور را در جهت حرکت فرض می‌کنیم. پس چون حرکت کندشونده است شتاب خلاف جهت حرکت است. یعنی علامت آن منفی خواهد شد.



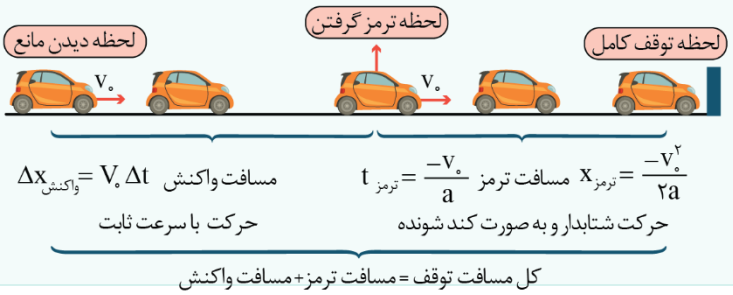
$x_{ترمز} = \frac{-v_۰^۲}{۲a}$ (حرکت شتابدار و به صورت کند شونده) مسافت ترمز

www.biomaze.ir

محاسبه مسافت توقف:

مسافتی که خودرو از لحظه دیدن مانع تا ترمز گرفتن طی می‌کند را مسافت واکنش گویند.

مسافتی که خودرو از لحظه ترمز گرفتن تا توقف کامل طی می‌کند را مسافت ترمز گویند.

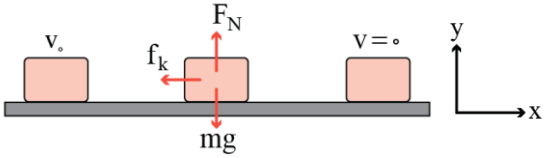


پاسخ تشریحی:

جهت مثبت محور x را به سمت راست انتخاب می‌کنیم، شتاب چوب را به‌دست می‌آوریم:

$$F_{net} = ma \rightarrow -f_k = ma \rightarrow -F_N\mu_k = ma$$

$$\xrightarrow{F_N = mg} -mg\mu_k = ma \rightarrow a = -g\mu_k$$



$$v^2 - v_0^2 = 2a\Delta x \rightarrow 0^2 - v_0^2 = 2a\Delta x$$

$$\rightarrow \Delta x = -\frac{v_0^2}{2a} \xrightarrow{a=-g\mu_k} \Delta x = \frac{v_0^2}{2g\mu_k}$$

به Δx اصطلاحاً مسافت ترمز گفته می‌شود که در تمامی حرکت‌های روی سطح افقی که تنها نیروی وارد بر جسم اصطکاک باشد، می‌توان از این رابطه استفاده کرد.

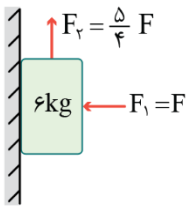
$$\Delta x = \frac{v_0^2}{2g\mu_k} \rightarrow \frac{\Delta x_A}{\Delta x_B} = \left(\frac{v_{0A}}{v_{0B}}\right)^2 \times \left(\frac{\mu_{k_B}}{\mu_{k_A}}\right)$$

$$\rightarrow \frac{\Delta x_A}{\Delta x_B} = \left(\frac{v_{0A}}{\frac{1}{2}v_{0A}}\right)^2 \times \left(\frac{\mu_{k_B}}{\mu_{k_B} - \frac{20}{100}\mu_{k_B}}\right)$$

$$\rightarrow \frac{\Delta x_A}{\Delta x_B} = 2^2 \times \frac{1}{0/8} \rightarrow \frac{\Delta x_A}{\Delta x_B} = 5$$

گروه آموزشی ماز

۵۳- در شکل زیر، جسم در آستانهٔ حرکت به سمت بالا قرار دارد. اگر نیروی F_2 را ۶۰ نیوتون کاهش دهیم، نیرویی که جسم به سطح وارد می‌کند چند برابر خواهد شد؟ $(g = 10\frac{N}{kg}, \mu_k = 0/4\ ,\ \mu_s = 0/5)$



۱) $\frac{2\sqrt{85}}{17}$

۲) $0/08\sqrt{145}$

۳) $0/1\sqrt{85}$

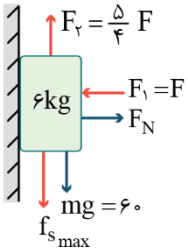
۴) ۱

www.biomaze.ir

پاسخ: گزینه ۳ (سخت ـ محاسباتی ـ ۱۲۰۲)

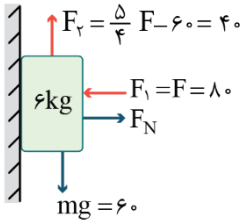
پاسخ تشریحی:

چون جسم در آستانهٔ حرکت به سمت بالا قرار دارد، پس نیروی اصطکاک $f_{s\max}$ و به سمت پایین است:

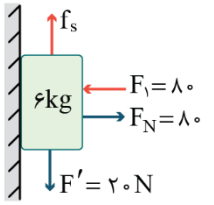


$$F_N=F_۱\rightarrow F_N=F$$
$$f_{s\max}=F_N\mu_s\rightarrow f_{s\max}=۰/۵F$$
$$F_۲=mg+f_{s\max}$$
$$\frac{۵}{۴}F=۶۰+۰/۵F$$
$$\rightarrow F=۸۰N\rightarrow\begin{cases}F_N=F=۸۰N\\ f_{s\max}=۰/۵F=۴۰N\end{cases}$$
$$R_۱=\sqrt{F_N^۲+f_{s\max}^۲}=\sqrt{۸۰^۲+۴۰^۲}=۴۰\sqrt{۵}N$$

اگر نیروی $F_۲$ را ۶۰ نیوتون کاهش دهیم:



برآیند $F_۲$ و mg برابر ۲۰N به سمت پایین می‌شود و چون کمتر از $f_{s\max}$ است، پس جسم ساکن و نیروی اصطکاک f_s و به سمت بالا خواهد شد.



$$\begin{cases}F_N=F_۱=۸۰N\\ f_s=۲۰N\end{cases}$$
$$R_۲=\sqrt{F_N^۲+f_s^۲}=\sqrt{۸۰^۲+۲۰^۲}=۲۰\sqrt{۱۷}N$$
$$\frac{R_۲}{R_۱}=\frac{۲۰\sqrt{۱۷}}{۴۰\sqrt{۵}}=\frac{۲۰\sqrt{۱۷}}{۴۰\sqrt{۵}}\times\frac{\sqrt{۵}}{\sqrt{۵}}=\frac{۲۰\sqrt{۸۵}}{۲۰۰}\rightarrow\frac{R_۲}{R_۱}=\frac{\sqrt{۸۵}}{۱۰}$$

گروه آموزشی ماز

۵۴- وزنه‌ای به جرم ۲kg را به یک فنر با ثابت $k=۲۰۰\frac{N}{m}$ و طول عادی ۵۰cm می‌بندیم و از سقف یک آسانسور ساکن آویزان می‌کنیم. آسانسور با شتاب چند $\frac{m}{s^۲}$ حرکت کند تا طول فنر ۵۴cm شود؟ $(g=۱۰\frac{m}{s^۲})$

۱) $a=-۶\vec{j}$ ۲) $a=+۶\vec{j}$ ۳) $a=-۸\vec{j}$ ۴) $a=+۸\vec{j}$

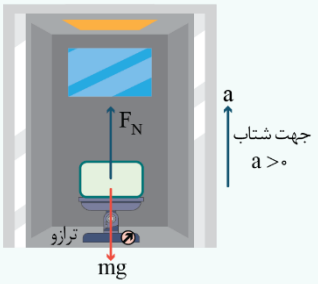
www.biomaze.ir

پاسخ: گزینه ۱ (آسان ـ محاسباتی ـ ۱۲۰۲)

آسانسور

سؤالاتی که بر جسم درون آسانسور فقط و فقط دو نیرو وارد شود (یکی نیروی mg و دیگری F_N یا T) را می‌توان از دو روش زیر حل کرد:

۱ـ اگر در صورت سؤال جهت شتاب را بدهند:



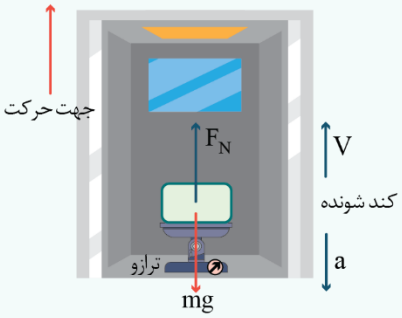
$$F_N = m(g \pm |a|)$$

(+): جهت شتاب به سمت بالا

(-): جهت شتاب به سمت پایین

در استفاده از این رابطه نیازی به دانستن جهت حرکت نیست.

۲ـ اگر در صورت سؤال جهت حرکت و نوع حرکت را بدهند:



$$F_N = m(g \pm (\pm |a|))$$

(+) اول: جهت حرکت به سمت بالا

(+) دوم: تندشونده

(-) اول: جهت حرکت به سمت پایین

(-) دوم: کندشونده

اگر بر جسم درون آسانسور بیشتر از دو نیرو وارد شود دیگر نمی‌توان از روابط بالا استفاده کرد.

وزن ظاهری و واقعی:

ترازو: عددی که یک ترازو نشان می‌دهد همان نیروی عمودی سطح (F_N) است.

هر چه بر سطح ترازو نیروی بیشتری وارد شود ترازو عدد بزرگ‌تری را نشان می‌دهد.

نیروسنج فنری: عددی که یک نیروسنج فنری نشان می‌دهد همان نیروی کشسانی فنر (F_e) است.

هر چه فنر بیشتر کشیده شود عددی که نیروسنج نشان می‌دهد بزرگ‌تر خواهد بود.

به عددی که ترازو و نیروسنج فنری نشان می‌دهند وزن ظاهری گفته می‌شود.

وزن واقعی جسم همان $W = mg$ است.

پاسخ تشریحی:

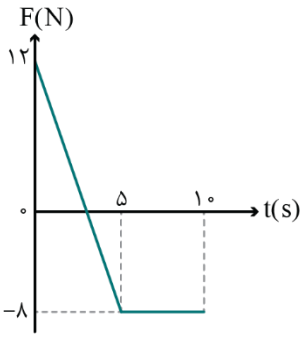
تغییر طول فنر نسبت به طول عادی ۴cm است، بنابراین داریم:

$$F_e = m(g+a) \Rightarrow ۲۰۰\times ۰/۰۴ = ۲(۱۰+a) \rightarrow ۸ = ۲(۱۰+a) \rightarrow a = -۶\frac{m}{s^۲}$$

پس جهت شتاب آسانسور به سمت پایین است. (یعنی آسانسور یا به صورت تندشونده پایین می‌رود یا به‌صورت کندشونده بالا می‌رود)

گروه آموزشی ماز

۵۵- نمودار نیروی خالص وارد بر جسمی به جرم ۵kg که با سرعت اولیهٔ $v_۰ = -۰/۸\frac{m}{s}$ روی محور x حرکت می‌کند، مطابق شکل است. سرعت متحرک در لحظهٔ $t = ۲s$ در SI کدام است؟



۱) -۳/۲

۲) ۳/۲

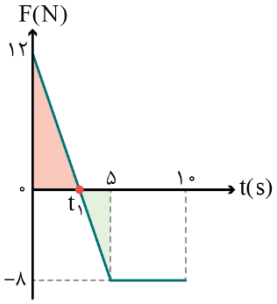
۳) -۲/۴

۴) ۲/۴

www.biomaze.ir

پاسخ: گزینه ۴ (متوسط ـ نموداری ـ ۱۲۰۲)

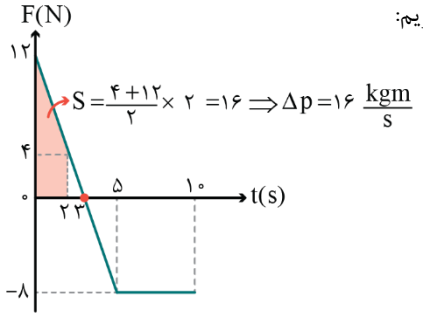
پاسخ تشریحی:



مساحت زیر نمودار نیرو ـ زمان برابر تغییر تکانه $(\Delta\vec{p})$ است. ابتدا با تشابه مثلث‌ها t_1 را محاسبه می‌کنیم:

$$\frac{۱۲}{۸}=\frac{t_۱}{۵-t_۱}\rightarrow t_۱=۳s$$

برای محاسبهٔ سرعت در لحظهٔ $t=۲$ ابتدا مساحت زیر نمودار را در بازهٔ زمانی صفر تا $t=۲$ به‌دست می‌آوریم:

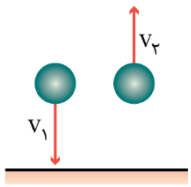


$$\Delta\vec{p}=m\Delta\vec{v}\rightarrow ۱۶=۵(v_۲-v_۰)$$

$$\rightarrow ۳/۲=v_۲-(-۰/۸)\rightarrow v_۲=+۲/۴\frac{m}{s}$$

گروه آموزشی ماز

۵۶- مطابق شکل توپی به جرم ۲۰۰g با تکانه $\vec{p}=(-۰/۸\frac{kg.m}{s})\vec{j}$ به سطح زمین برخورد می‌کند و با انرژی جنبشی ۰/۹J در راستای قائم برمی‌گردد. اگر مدت زمان تماس توپ با زمین ۰/۱ ثانیه باشد، نیروی خالص متوسط وارد بر توپ در این مدت، چند نیوتون است؟



۱) ۲
۲) ۸
۳) ۱۴
۴) ۳

پاسخ: گزینه ۳ (متوسط ـ محاسباتی ـ ۱۲۰۲)

تکانه

حاصل‌ضرب جرم جسم (m) در سرعت آن (v) تکانه جسم (p) نامیده می‌شود:

$$\vec{p}=m\vec{v} \qquad \text{یکای تکانه در SI}=\frac{kg.m}{s}$$

تکانه یک کمیت برداری و فرعی است. جهت تکانه همان جهت سرعت است.

اگر سرعت جسم تغییر کند تغییر تکانه جسم از رابطه زیر به دست می‌آید: (دقت کنید که جرم جسم ثابت است.)

$$\Delta\vec{p}=m\Delta\vec{v}$$

قانون دوم نیوتن بر حسب تکانه برای نیروی ثابت:

نیروی خالص وارد بر جسم برابر با تغییر تکانه جسم تقسیم بر زمان تغییر آن است:

$$\vec{F}_{net}=\frac{\Delta\vec{p}}{\Delta t}$$

تغییر تکانه برابر با حاصل‌ضرب نیرو در مدت زمان تأثیر آن است:

$$\Delta\vec{p}=\vec{F}_{net}\Delta t$$

سه نکته مهم:

۱ـ اگر بر جسمی چند نیرو وارد شود باید برایند نیروها را به صورت برداری محاسبه کرد و آن را به جای F_{net} در رابطه قرار داد.

$$\vec{F}_{net}=\vec{F}_۱+\vec{F}_۲+\vec{F}_۳+\cdots\leftarrow\vec{F}_{net}=\frac{\Delta\vec{p}}{\Delta t}$$

۲ـ اگر نیرو ثابت نباشد در یک بازه زمانی باید نیروی خالص متوسط F_{av} را در رابطه قرار داد.

$$\vec{F}_{av}=\frac{\Delta\vec{p}}{\Delta t}$$

www.biomaze.ir

۳ـ در تمامی روابط این قسمت الزاماً باید تمامی محاسبات را به صورت برداری انجام دهید، یعنی تمامی کمیت‌های برداری را بر حسب $\vec{i}$ و $\vec{j}$ و همراه با علامت در رابطه‌ها قرار دهید. (حتی در سؤالاتی که اندازه یک بردار را می‌خواهند باید ابتدا تمامی محاسبات را برداری انجام دهید و بعد از اتمام حل مسئله، اندازه بردار مورد نظر را به دست آورید.)

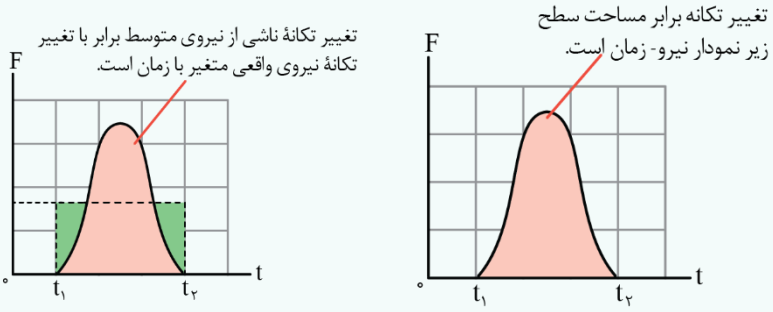
$$\Delta\vec{p} = \vec{p}_2 - \vec{p}_1 \qquad \Delta\vec{v} = \vec{v}_2 - \vec{v}_1 \qquad \vec{F}_{net} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 + \cdots$$

$$\vec{F} = F_x\vec{i} + F_y\vec{j} \Rightarrow |\vec{F}| = \sqrt{F_x^2 + F_y^2}$$

روابط بین اندازه تکانه و انرژی جنبشی:

$$\begin{cases} p = mv \\ K = \frac{1}{2}mv^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} K = \frac{1}{2}pv \\ K = \frac{p^2}{2m} \end{cases}$$

مساحت زیر نمودار نیروی خالص بر حسب زمان برابر تغییرات تکانه جسم می‌باشد:



تنها تفاوت نیرو و شتاب m است

۱ـ شکل ظاهری نمودار نیرو زمان و نمودار شتاب زمان دقیقاً یکی است.

۲ـ نیرو همواره هم‌جهت شتاب می‌باشد.

۳ـ نیرو متناسب با شتاب است اگر یکی افزایش یابد دیگری هم زیاد می‌شود و برعکس

۴ـ مساحت زیر نمودار نیرو زمان برابر $m\Delta v$ است.

نتیجه‌گیری:

اگر نیرو را بر m تقسیم کنیم شتاب به دست می‌آید و اگر شتاب را در m ضرب کنیم نیرو به دست می‌آید.

شیب نمودار تکانه بر حسب زمان برابر نیروی خالص وارد بر جسم می‌باشد:

تنها تفاوت تکانه و سرعت m است

۱ـ شکل ظاهری نمودار تکانه زمان و نمودار سرعت زمان دقیقاً یکی است.

۲ـ تکانه همواره هم‌جهت سرعت و هر دو هم‌جهت حرکت‌اند.

۳ـ تکانه متناسب با سرعت است اگر یکی افزایش یابد دیگری هم زیاد می‌شود و برعکس

۴ـ مساحت زیر نمودار تکانه زمان برابر $m\Delta x$ است.

نتیجه‌گیری کلی:

اگر تکانه را بر m تقسیم کنیم سرعت به دست می‌آید و اگر سرعت را در m ضرب کنیم تکانه به دست می‌آید.

پاسخ تشریحی:

برای محاسبهٔ نیروی خالص وارد بر توپ می‌توان نوشت:

$$\vec{p}_1 = -0/8\,j$$

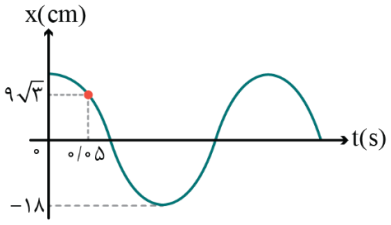
$$K_2 = \frac{p_2^2}{2m} \rightarrow 0/9 = \frac{p_2^2}{2\times 0/2}$$

$$\rightarrow p_2^2 = 0/36 \rightarrow p_2 = 0/6 \rightarrow \vec{p}_2 = +0/6\,j$$

$$F_{net} = \frac{\Delta p}{\Delta t} \rightarrow F_{net} = \frac{0/6\,j - (-0/8\,j)}{0/1} = +14\,j$$

www.biomaze.ir

۵۷- نمودار مکان ـ زمان یک حرکت هماهنگ ساده مطابق شکل است. شتاب متوسط نوسانگر در بازهٔ زمانی $t_1 = ۰/۳s$ تا $t_2 = ۰/۷۵s$ چند $\frac{m}{s^2}$ می‌باشد؟ $(\pi \simeq ۳)$



۱) +۲
۲) -۲
۳) +۴
۴) -۴

پاسخ: گزینه ۴ (متوسط ـ نموداری ـ ۱۲۰۳)

روش حل تست‌های مربوط به شناسه تابع کسینوس

تیپ اول: سؤالاتی که مسیر مورد نظر مضرب صحیحی از نصف دوره باشد.

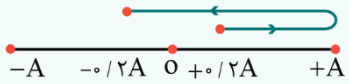
(باید داده‌های سؤال الزاماً مضارب صحیحی از $\Delta t = \frac{T}{۲}$ یا $\Delta\theta = \pi$ یا $L = ۲A$ باشند.)

می‌دانیم که یک نوسانگر در مدت زمان نصف دوره یعنی $\Delta t = \frac{T}{۲}$ مسافتی برابر $L = ۲A$ را طی می‌کند پس به راحتی می‌توان این‌گونه سؤالات را با یک تناسب ساده به شیوه زیر حل کرد:

$\Delta t = \frac{T}{۲}$	$L = ۲A$
$\Delta t = ?$	$L = ?$

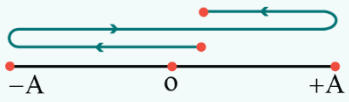
مثال: یک پاره‌خط

$L = ۱ \times (۲A)$ $\quad \Delta t = ۱ \times (\frac{T}{۲})$



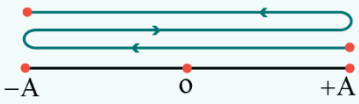
دو پاره‌خط

$L = ۲ \times (۲A)$ $\quad \Delta t = ۲ \times (\frac{T}{۲})$



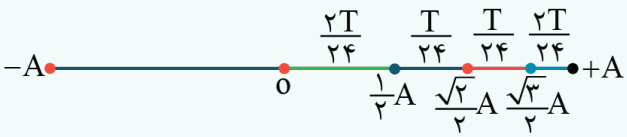
سه پاره‌خط

$L = ۳ \times (۲A)$ $\quad \Delta t = ۳ \times (\frac{T}{۲})$

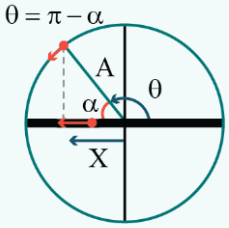


توجه کنید که اگر مسیر مورد نظر مضرب صحیحی از $\frac{T}{۲}$ یا $۲A$ نباشد، هرگز نمی‌توان از تناسب سؤال را حل کرد و باید با یکی از روش‌های تیپ دو و سه سؤال را حل کنید.

تیپ دوم: اگر مسیر مورد نظر مضرب صحیحی از نصف دوره نبود با استفاده از الگوی شکل زیر سؤال را حل کنید: در این شکل یک پاره‌خط نوسان ترسیم شده است و مدت زمان هر قسمت از پاره‌خط نوسان نوشته شده است ابتدا مسیر مورد نظر را مشخص کنید و سپس طبق الگو زمان آن را به دست آورید.



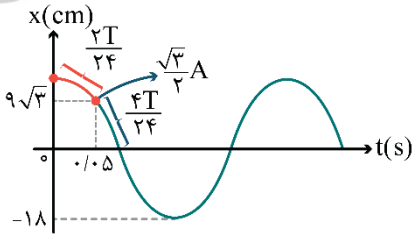
تیپ سوم: اگر مسیر مورد نظر مضرب صحیحی از نصف دوره نباشد و مکان‌های داده شده جزء اعداد رند الگوی حالت دوم نباشد: در این صورت الزاماً باید از طریق محاسبه فاز سؤال را حل کرد. در این تیپ سؤال الزاماً $\cos\theta$ را در صورت سؤال به ما می‌دهند.



$$\cos(\theta) = \frac{X}{A}$$

www.biomaze.ir

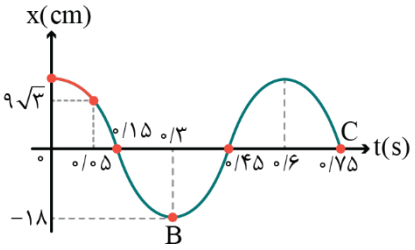
پاسخ تشریحی:



طبق الگوی زمانی، مدت زمانی که طول می‌کشد نوسانگر مسیر قرمزرنگ را طی کند $\Delta t = \frac{2T}{24}$ است، پس:

$$\frac{2T}{24} = \frac{5}{100} \rightarrow T = 0/6s \rightarrow \frac{T}{4} = 0/15s$$

حال بازه زمانی موردنظر را روی نمودار مشخص می‌کنیم.



در نقطهٔ B سرعت صفر و در نقطه C سرعت بیشینه و برابر $v_C = -A\omega$ می‌باشد.

$$v_B = 0, v_C = -A\omega = -\frac{18}{100} \times \frac{2\pi}{0/6} = -1/8 \frac{m}{s}$$

$$a_{av} = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{-1/8 - 0}{0/75 - 0/3} = \frac{-1/8}{0/45} = -4 \frac{m}{s^2}$$

گروه آموزشی ماز

۵۸- در یک حرکت هماهنگ ساده سامانهٔ جرم ـ فنر، حداقل و حداکثر طول فنر در حین نوسان به ترتیب ۴۰cm و ۵۰cm می‌باشد. در لحظه‌ای که سرعت نوسانگر $\frac{1}{3}$ سرعت بیشینه است، انرژی پتانسیل نوسانگر ۲۵ میلی‌ژول کمتر از انرژی جنبشی در نقطهٔ تعادل است. ثابت فنر چند $\frac{N}{m}$ است؟

۱) ۵۰ ۲) ۱۰۰ ۳) ۱۸۰ ۴) ۲۰۰

پاسخ: گزینه ۳ (متوسط ـ محاسباتی ـ ۱۲۰۳)

انرژی در حرکت هماهنگ ساده

سامانه جرم ـ فنر در راستای افق	سامانه جرم ـ فنر در راستای قائم
$k = m\omega^2 \quad T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$	$k = m\omega^2 \quad T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$
$A = \frac{L_{max} - L_{min}}{2}$	$A = \frac{L_{max} - L_{min}}{2}$
$L_{.} = \frac{L_{max} + L_{min}}{2}$	×
نقطه تعادل نوسانگر طول عادی فنر می‌باشد.	نقطه تعادل نوسانگر جایی است که نیروی کشسانی فنر و نیروی وزن یکدیگر را خنثی می‌کنند: $mg = k\Delta y$

انرژی جنبشی : $K = \frac{1}{2}mv^2$

انرژی پتانسیل : $U = \frac{1}{2}m(v_m^2 - v^2)$

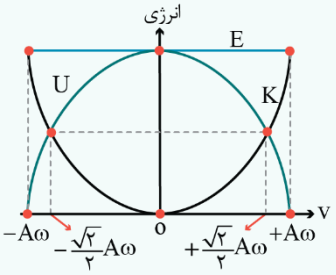
انرژی مکانیکی : $E = U + K = K_m = U_m = \frac{1}{2}m\omega^2 A^2$

نسبت انرژی‌ها

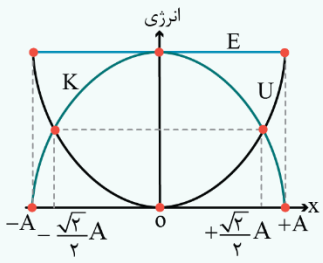
$$\frac{K}{E} = (\frac{v}{v_m})^2 \qquad \frac{U}{E} = 1 - (\frac{v}{v_m})^2$$

www.biomaze.ir

نمودار انرژی بر حسب سرعت



نمودار انرژی بر حسب مکان



پاسخ تشریحی:

$$A=\frac{L_{max}-L_{min}}{2}=\frac{50-40}{2}=5cm\ ,\ \frac{v}{v_m}=\frac{1}{3}$$

انرژی جنبشی در نقطهٔ تعادل حداکثر است

$$E=U_m=K_m$$

طبق صورت سؤال

$$U=E-25mJ$$

$$\frac{U}{E}=1-(\frac{v}{v_m})^2\rightarrow\frac{E-25}{E}=1-(\frac{1}{3})^2$$

$$\rightarrow\frac{E-25}{E}=\frac{8}{9}\rightarrow E=225mJ$$

$$E=\frac{1}{2}kA^2\rightarrow 225\times10^{-3}=\frac{1}{2}k(\frac{5}{100})^2$$

$$\rightarrow 450\times10^{-3}=k\times\frac{25}{10^4}\rightarrow 4500=25k\rightarrow k=180\frac{N}{m}$$

گروه آموزشی ماز

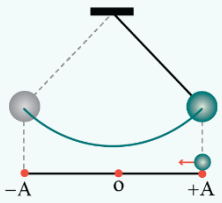
۵۹- یک ساعت آونگ‌دار در سطح زمین در حال نوسان است. اگر این ساعت را در ارتفاع $\frac{1}{2}R_e$ از سطح زمین ببریم و طول نخ آونگ را ۶۴ درصد کاهش دهیم، این ساعت در هر شبانه‌روز ..... دقیقه ..... می‌افتد. (شتاب جاذبهٔ گرانش در سطح زمین $10\frac{N}{kg}$ است و R_e شعاع زمین می‌باشد.)

۱) ۱۶۰ ـ جلو ۲) ۱۶۰ ـ عقب ۳) ۱۸۰ ـ جلو ۴) ۱۸۰ ـ عقب

پاسخ: گزینه ۱ (متوسط ـ مفهومی و محاسباتی ـ ۱۲۰۳)

آونگ ساده

آونگ ساده شامل وزنه کوچکی است که از نخی بدون جرم و کش نیامدنی آویزان است.



دوره تناوب آونگ ساده فقط به شتاب گرانشی و طول آونگ بستگی دارد و از رابطه زیر به‌دست می‌آید:

دوره تناوب آونگ ساده $T=2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$

دوره تناوب آونگ ساده به جرم و دامنه آن بستگی ندارد.

عوامل مؤثر بر دوره تناوب آونگ ساده

۱ـ تغییر دما: با افزایش دما طول نخ آونگ افزایش می‌یابد و همین باعث افزایش دوره تناوب آونگ می‌شود

$$\theta\uparrow\Rightarrow L\uparrow\Rightarrow\uparrow T=2\pi\sqrt{\frac{L\uparrow}{g}}$$

www.biomaze.ir

۲ـ تغییر ارتفاع از سطح زمین (یا تغییر سیاره): هرچه از سطح زمین دور شویم شتاب جاذبه گرانش کاهش می‌یابد و باعث می‌شود دوره تناوب افزایش یابد:

$$g_h = \frac{Gm_e}{(R_e + h)^2}$$

گام اول:

ابتدا شتاب گرانش و طول نخ را در دو حالت مقایسه می‌کنیم:

$$g = \frac{GM_e}{(R_e + h)^2} \rightarrow \frac{g_2}{g_1} = \left(\frac{R_e + h_1}{R_e + h_2}\right)^2 = \left(\frac{R_e}{R_e + \frac{1}{2}R_e}\right)^2 = \frac{4}{9}$$

$$L_2 = L_1 - \frac{64}{100}L_1 = \frac{36}{100}L_1 \rightarrow \frac{L_2}{L_1} = \frac{36}{100} = \frac{9}{25}$$

گام دوم:

نسبت دورهٔ تناوب در دو حالت برابر است با:

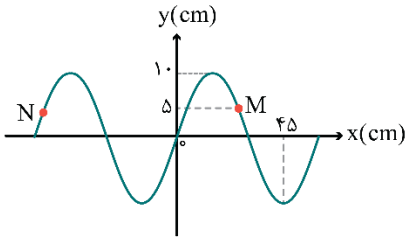
$$T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}} \rightarrow \frac{T_1}{T_2} = \sqrt{\frac{L_1}{L_2} \times \frac{g_2}{g_1}}$$

$$\rightarrow \frac{T_1}{T_2} = \sqrt{\frac{25}{9} \times \frac{4}{9}} \rightarrow \frac{T_1}{T_2} = \frac{10}{9}$$

دورهٔ تناوب آونگ در حالت دوم، $\frac{9}{10}$ حالت اول، یعنی ساعت سریع تر کار میکند و در مدت ۲۴ ساعت، زمان $\frac{10}{9} \times 24 = \frac{80}{3}h$ را نشان می‌دهد و به مدت $\frac{8}{3}h = 160\,min$ جلو می‌افتد.

گروه آموزشی ماز

۶۰- نقش یک موج عرضی در لحظه $t = 0$ مطابق شکل است. در این لحظه حرکت ذرهٔ N کندشونده است. اگر تندی انتشار موج $v = 50\frac{cm}{s}$ باشد، اختلاف مسافتی که موج و ذرهٔ M در بازهٔ زمانی صفر تا $t = 0/8\,s$ طی می‌کنند، چند سانتی‌متر است؟



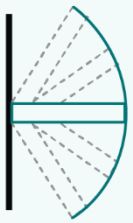
۱) صفر
۲) ۱۰
۳) $\frac{40}{3}$
۴) ۱۵

پاسخ: گزینه ۲ (سخت ـ نموداری ـ ۱۲۰۳)

موج و مشخصه‌های آن

محیط کشسان:

محیطی که اگر تغییر شکلی در آن محیط ایجاد کنیم نیروهای کشسانی ایجاد شده بین اجزای محیط آن را به حالت اولیه بر می‌گردانند.



موج:

هرگاه در ناحیه‌ای از محیط کشسان ارتعاشی به وجود آید موجب پدید آمدن ارتعاش‌های پی‌درپی دیگری می‌شود که از محل شروع ارتعاش دور و دورترند و به این ترتیب موج بوجود می‌آید.

موج انتقال انرژی بدون انتقال ماده است.

انتشار موج:

انتقال تأخیری حرکت نوسانی از نقطه‌ای به نقطهٔ دیگر است.

در موج دو حرکت وجود دارد:

www.biomaze.ir

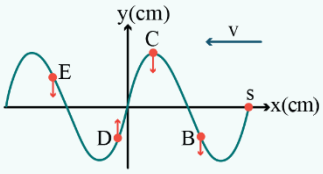
۱ـ حرکت نوسانی ذرات: تمامی ذرات با یک بسامد ثابت سر جای خود یک حرکت هماهنگ ساده با معادلهٔ زیر انجام می‌دهند:

$$x = A\cos\omega t$$

هر ذره موج حرکت منبع را با یک تأخیر زمانی تکرار می‌کند. پس:

جهت نوسان هر ذره به سمت ذره قبل (ذره‌ای که به منبع نزدیک‌تر است) می‌باشد.

مثال:

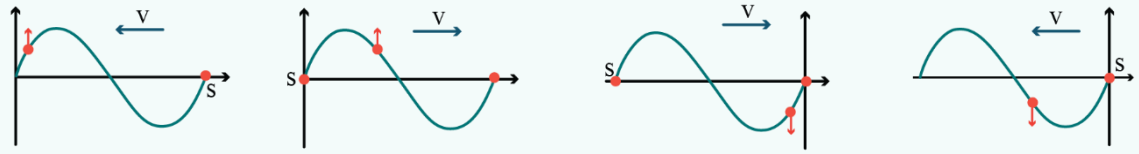


۲ـ انتشار موج: موج با یک تندی ثابت از منبع به سمت محیط منتشر می‌شود.

تندی حرکت موج را تندی انتشار گویند.

جهت انتشار موج از منبع به سمت محیط است. موج همواره از منبع دور می‌شود.

مثال:



اگر موج در مدت زمان Δt مسافت L را طی کند داریم:

$$\Delta x = v\Delta t$$

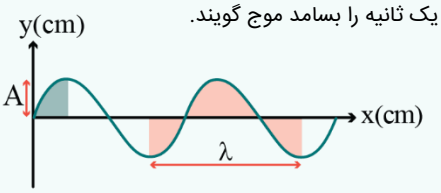
طول موج (λ): یکا در SI متر (m): فاصله‌ی بین دو برآمدگی یا دو فرورفتگی مجاور را طول موج گویند. (فاصلهٔ بین دو نقطه هم‌شکل متوالی)

طول موج مسافتی است که موج در مدت یک دوره تناوب چشمه طی می‌کند.

دامنه (A): یکا در SI متر (m): بیشینه فاصله‌ی یک ذره از مکان تعادل، دامنه موج نامیده می‌شود. (فاصلهٔ قله یا دره نسبت به سطح آرام یا ساکن)

دوره‌ی تناوب (T): یکا در SI ثانیه (s): مدت زمانی که هر ذره محیط (یا چشمه موج) یک نوسان کامل انجام می‌دهد.

بسامد (f): یکا در SI هرتز (Hz) : تعداد نوسان‌های انجام شده توسط هر ذره از محیط (یا چشمه موج) در یک ثانیه را بسامد موج گویند.



می‌دانیم که موج در مدت یک دوره‌ی تناوب مسافت λ را طی می‌کند پس:

$$\Delta x = v\Delta t \xrightarrow[\Delta t = T]{\Delta x = \lambda} \lambda = vT = \frac{v}{f}$$

تندی انتشار موج عرضی در طناب:

تندی انتشار موج عرضی در یک فنر، تار و یا ریسمان به نیروی کشش و چگالی خطی جرم بستگی دارد.

$$v = \sqrt{\frac{F}{\mu}} \qquad \mu = \frac{m}{L} = \rho A$$

v : تندی انتشار — F : نیروی کشش طناب — μ : چگالی خطی جرم

m : جرم — L : طول

نکته۱:

چگالی خطی جرم برای یک ریسمان یا تار همگن مستقل از طول و مقداری ثابت است

یعنی اگر طول طنابی را n برابر کنیم جرم طناب هم n برابر شده و μ ثابت می‌ماند:

$$\mu = \frac{m}{L} \leftarrow \text{ثابت} \quad \begin{matrix} m \rightarrow n \text{ برابر} \\ L \rightarrow n \text{ برابر} \end{matrix}$$

نکته۲:

اگر طنابی را بکشیم یا آن را از ابزاری عبور دهیم طوری که جرم ثابت بماند:

۱ـ اگر طول طناب n برابر شود: ← چگالی خطی جرم $\frac{1}{n}$ برابر و تندی $\sqrt{n}$ برابر می‌شود.

۲ـ اگر قطر مقطع طناب n برابر شود: ← سطح n^2 برابر و تندی $\frac{1}{n}$ برابر می‌شود.

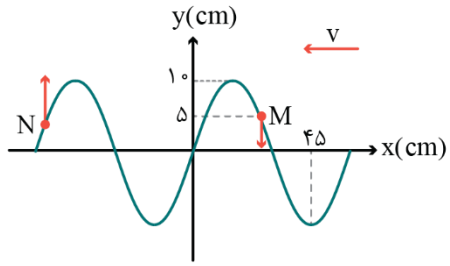
www.biomaze.ir

پاسخ تشریحی:

$$\frac{3\lambda}{4}=45\rightarrow\lambda=60cm$$

$$\lambda=vT\rightarrow 60=50\times T\rightarrow T=1/2s$$

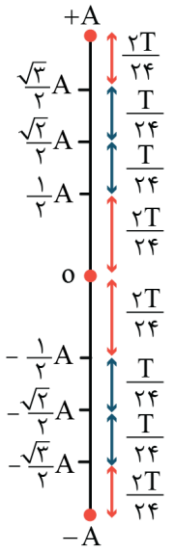
حرکت ذرهٔ N کندشونده است پس این ذره به سمت بالا حرکت می‌کند. به همین دلیل جهت انتشار موج به سمت چپ و ذرهٔ M به سمت پایین حرکت می‌کند.

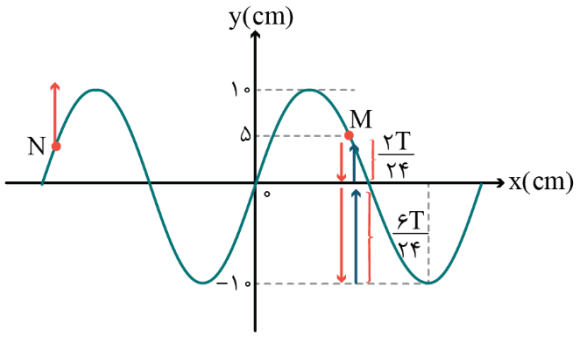


ابتدا بررسی می‌کنیم بازه زمانی موردنظر چه مضربی از T است.

$$\frac{\Delta t}{T}=\frac{0/8}{1/2}=\frac{2}{3}\rightarrow\Delta t=\frac{2}{3}T\rightarrow\Delta t=\frac{16T}{24}$$

حال طبق الگوی زمانی نوسان مسیر ذرهٔ M را مشخص می‌کنیم:





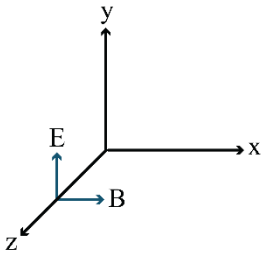
مسافتی که ذرهٔ M طی کرده است: $L=5+10+10+5\rightarrow L=30cm$

مسافتی که موج طی می‌کند: $\Delta x=v\Delta t=50\times 0/8=40cm$

اختلاف مسافت $=40-30=10cm$

گروه آموزشی ماز

۶۱- جهت میدان مغناطیسی و میدان الکتریکی یک موج الکترومغناطیسی که با طول موج ۵۰۰nm و بسامد $5\times10^{14}Hz$ در یک محیط منتشر شده است، مطابق شکل می‌باشد. این موج در مدت ۵ دقیقه چه مسافتی بر حسب کیلومتر را در این محیط طی می‌کند و جهت انتشار موج کدام است؟



۱) $7/5\times10^{7}$، در جهت محور z

۲) $7/5\times10^{7}$، خلاف جهت محور z

۳) $12/5\times10^{5}$، در جهت محور z

۴) $12/5\times10^{5}$، خلاف جهت محور z

پاسخ: گزینه ۲ (آسان ـ مفهومی و محاسباتی ـ ۱۲۰۳)

امواج الکترومغناطیسی

بار الکتریکی، میدان الکتریکی ایجاد می‌کند و جریان الکتریکی، میدان مغناطیسی تولید می‌کند.

اگر بارهای الکتریکی ساکن باشند، میدان الکتریکی حاصل از آن‌ها با زمان تغییر نمی‌کند. اگر جریان الکتریکی ثابت باشد میدان مغناطیسی حاصل از آن ثابت و بدون تغییر می‌شود.

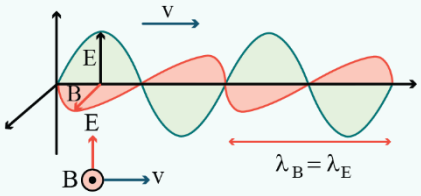
امواج الکترومغناطیسی از رابطه متقابل میدان الکتریکی و مغناطیسی به وجود می‌آیند. یعنی هر تغییری در میدان الکتریکی در هر نقطه از فضا، میدان مغناطیسی متغیری ایجاد می‌کند و این میدان مغناطیسی متغیر، خود میدان الکتریکی متغیری به وجود می‌آورد. این رابطه متقابل میدان‌ها سبب انتقال نوسان‌های میدان الکتریکی و مغناطیسی از یک نقطه فضا به نقاط دیگر و یا همان انتشار موج الکترومغناطیسی می‌شود.

نظریه مایکل فاراده: ایجاد میدان الکتریکی به علت تغییر میدان مغناطیسی همان القای الکترومغناطیسی است.

www.biomaze.ir

نظریه ماکسول: تولید میدان مغناطیسی بر اثر تغییر میدان الکتریکی

نظریه ماکسول: امواج الکترومغناطیسی باید لزوماً ناشی از تغییرات هم‌زمان میدان‌های الکتریکی و مغناطیسی (اصطلاحاً میدان الکترومغناطیسی) باشد.



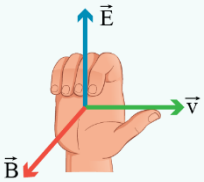
ویژگی امواج الکترومغناطیسی

۱ـ میدان الکتریکی همواره عمود بر میدان مغناطیسی است.

۲ـ میدان‌های الکتریکی و مغناطیسی همواره بر جهت حرکت موج عمودند و در نتیجه موج الکترومغناطیسی یک موج عرضی است.

۳ـ میدان‌ها با بسامد یکسان و هم‌گام با یکدیگر تغییر می‌کنند.

جهت انتشار امواج الکترومغناطیسی را مطابق شکل با قاعده دست راست تعیین می‌کنیم.



تندی انتشار امواج الکترومغناطیسی در خلأ از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \varepsilon_0}}$$

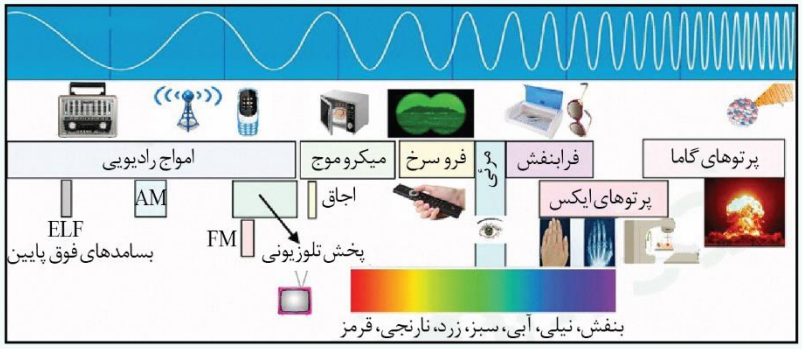
طیف امواج الکترومغناطیسی

ویژگی طول موج‌های مختلف طیف امواج الکترومغناطیسی

۱ـ هیچ گسستگی در این طیف وجود ندارد.

۲ـ شباهت: مشخصه‌های یکسانی دارند و رفتار آن‌ها از قاعده‌های کلی پیروی می‌کند. مثلاً همگی با تندی نور در خلأ حرکت می‌کنند و ...

۳ـ تفاوت: منشأ طول موج‌های مختلف امواج الکترومغناطیسی متفاوت است. (تفاوت فراوان در روش‌های تولید و کاربردهای آن‌ها)



امواج الکترومغناطیسی برای انتشار نیاز محیط مادی ندارند و در خلأ هم منتشر می‌شوند.

امواج الکترومغناطیسی انرژی را نه به صورت انرژی جنبشی و نه به صورت انرژی پتانسیل ذرات محیط، بلکه به صورت انرژی میدان‌های الکتریکی و مغناطیسی منتقل می‌کنند.

گام اول:

تندی انتشار و مسافت طی شده برابر است با:

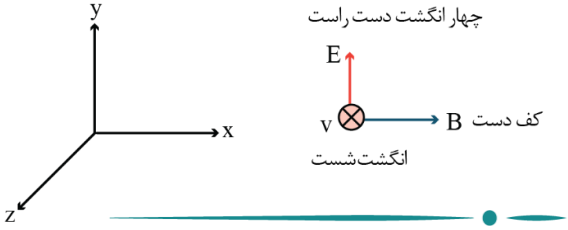
$$\lambda = \frac{v}{f} \rightarrow ۵۰۰\times۱۰^{-۹} = \frac{v}{۵\times۱۰^{۱۴}} \rightarrow v = ۲/۵\times۱۰^{۸}\ \frac{m}{s}$$

$$\Delta x = v\Delta t \rightarrow \Delta x = ۲/۵\times۱۰^{۸}\times۵\times۶۰ = ۷/۵\times۱۰^{۱۰}\ m$$

$$\rightarrow \Delta x = ۷/۵\times۱۰^{۷}\ km$$

گام دوم:

تعیین جهت انتشار موج



پس جهت انتشار موج درون‌سو یعنی خلاف جهت محور z می‌باشد.

۶۲- در محلی که تراز شدت صوت ۸۰dB است، گیرنده‌ای با مساحت $۲cm^۲$ که عمود بر راستای انتشار صوت قرار دارد، در هر دقیقه چند ژول انرژی صوتی دریافت می‌کند؟ $(I_. = ۱۰^{-۱۲} \frac{W}{m^۲})$

۱) $۱/۲\times۱۰^{-۶}$ ۲) $۱/۲\times۱۰^{-۸}$ ۳) ۶×۱۰^{-۸} ۴) ۶×۱۰^{-۶}

پاسخ: گزینه ۱ (آسان ـ محاسباتی ـ ۱۲۰۳)

شدت و تراز شدت صوت

اگر یک چشمه صوتی با توان P در مدت t ثانیه، انرژی کل صوتی E را در محیط گسیل کند داریم:

توان چشمه صوتی : $P = \frac{E}{t}$

شدت صوت $\Leftarrow I = \frac{P}{A_{av}} \Rightarrow I = \frac{E}{At}$

شدت صوت

شدت یک موج صوتی (I) در یک سطح، برابر با آهنگ متوسط انرژی‌ای است که توسط موج به واحد سطح، عمود بر راستای انتشار صوت می‌رسد یا از آن عبور می‌کند.

شدت صوت برای تمامی گیرنده‌هایی که روی یک جبهه موج قرار دارند با هم برابر و برابر با شدت صوت کل همان جبهه می‌باشد:

$$I_۱ = \frac{E}{At}$$

عوامل مؤثر بر شدت صوت

۱ـ منبع:

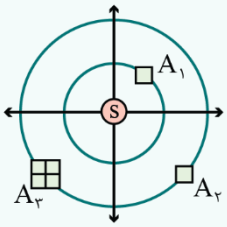
شدت صوت با مجذور بسامد رابطه مستقیم دارد.

شدت صوت با مجذور دامنه رابطه مستقیم دارد.

$$I \propto \frac{A^۲ f^۲}{r^۲}$$

۲ـ فاصله تا منبع: شدت صوت با مجذور فاصله رابطه عکس دارد.

مثال:



$$\begin{cases} I_۱ > I_۲ = I_۳ \\ E_۱ > E_۲ \\ E_۳ > E_۲ \end{cases}$$

تراز شدت صوت:

$$\beta = (۱۰dB)\log(\frac{I}{I_.})$$

شدت مرجع $(I_.)$: حد پایین گستره شنیداری انسان

مقایسه تراز شدت دو صوت:

$$\beta_۲ - \beta_۱ = (۱۰dB)\log(\frac{I_۲}{I_۱})$$

به صوت حاصل از چشمه‌هایی مثل دیاپازون (که به دلیل میرایی کم به حرکت هماهنگ ساده نزدیک است.) تُن موسیقی یا به اختصار تُن گویند.

از نظر ادراک شنوایی ما هر تُن موسیقی دارای دو ویژگی مهم است:

۱ـ ارتفاع: ارتفاع بسامدی است که گوش انسان درک می‌کند.

ارتفاع یک تُن همان زیر و بمی آن است.

هرچه بسامدی که گوش درک می‌کند بیشتر باشد آن صدا زیرتر است و می‌گوییم ارتفاع بیشتری دارد. هر چه این بسامد کمتر باشد آن صوت بم‌تر است و می‌گوییم ارتفاع کمتری دارد.

گوش انسان تُن‌هایی با بسامد بین ۲۰ تا ۲۰۰۰۰ هرتز را می‌تواند بشنود اما دستگاه شنوایی انسان نسبت به بسامدهای مختلف این گستره حساسیت‌های متفاوتی دارد.

مثلا حساسیت گوش انسان به بسامدهای در گستره ۲۰۰۰ تا ۵۰۰۰ هرتز بیشتر از سایر بسامدها است.

۲ـ بلندی: بلندی شدتی است که گوش انسان از صوت درک می‌کند.

بلندی متفاوت با شدت است شدت را می‌توان با یک آشکارساز اندازه گرفت در حالی که بلندی چیزی است که ما حس می‌کنیم.

www.biomaze.ir

گام اول:

شدت صوت برابر است با:

$$\beta = ۱۰\log\frac{I}{I_۰} \Rightarrow ۸۰ = ۱۰\log\frac{I}{I_۰}$$

$$\Rightarrow \log\frac{I}{I_۰} = ۸ \Rightarrow I = ۱۰^{۸} I_۰ = ۱۰^{۸} \times ۱۰^{-۱۲} = ۱۰^{-۴}\ \frac{W}{m^۲}$$

گام دوم:

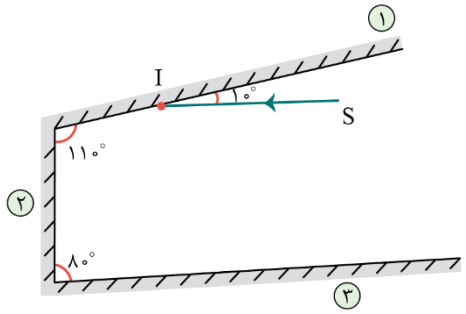
انرژی صوتی برابر است با:

$$I = \frac{E}{A.t} \Rightarrow ۱۰^{-۴} = \frac{E}{۲\times۱۰^{-۴}\times۶۰} \Rightarrow E = ۱/۲\times۱۰^{-۶}\ J$$

گروه آموزشی ماز

۶۳- در شکل زیر پرتو SI به سطح آینه (۱)برخورد می‌کند و پس از بازتاب‌های متوالی از سطح سه آینه خارج می‌شود. زاویهٔ بازتاب در دومین برخورد به آینهٔ(۳) چند درجه است؟

۱) ۱۰
۲) ۲۰
۳) ۷۰
۴) ۸۰



پاسخ: گزینه ۳ (متوسط ـ محاسباتی ـ ۱۲۰۴)

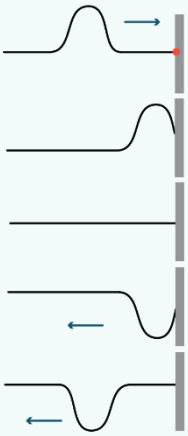
بازتاب موج

الف: بازتاب در یک بعد: بازتاب موج ایجاد شده در فنر یا ریسمان

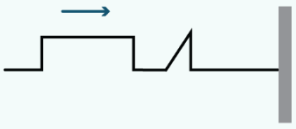
اگر تپی را در یک فنر یا ریسمان کشیده بلند که یک سر آن بر تکیه‌گاهی ثابت شده است روانه کنیم، وقتی تب به تکیه‌گاه (مرز) می‌رسد، نیرویی به آن وارد می‌کند و طبق قانون سوم نیوتن تکیه‌گاه نیز نیروی با اندازه برابر و در جهت مخالف به فنر وارد می‌آورد این نیرو در محل تکیه‌گاه تپی در فنر ایجاد می‌کند که روی فنر در جهت مخالف تب تابیده حرکت می‌کند.

۱ـ در انتهای ثابت طبق قانون سوم نیوتن تپ به صورت وارونه بازتاب می‌شود.

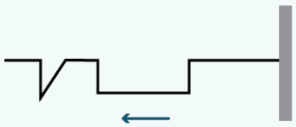
۲ـ چون حرکت موج با تندی ثابت انجام می‌شود قسمتی از تب که زودتر ساخته می‌شود همواره جلوتر است. (هم در رفت و هم در برگشت)



مثال: بازتاب تب زیر را رسم کنید.



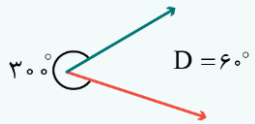
پاسخ:



نکات مربوط به محاسبه زاویه‌ها

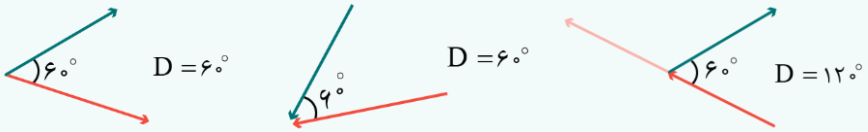
برای به‌دست آوردن زاویهٔ بین دو بردار دو قرارداد وجود دارد:

۱ـ زاویهٔ بین دو بردار باید بین صفر و ۱۸۰ درجه باشد.

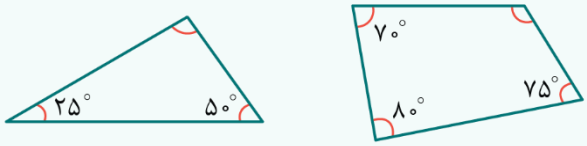


www.biomaze.ir

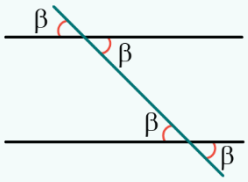
۲ـ زاویهٔ بین دو بردار همواره باید زاویه بین دو ابتدا یا زاویه بین دو انتها باشد.



مجموع زوایای داخلی یک مثلث ۱۸۰ درجه و چهارضلعی ۳۶۰ درجه است.



اگر یک خط مورب دو خط موازی را قطع کند، زوایای متقابل به رأس دو به دو با هم برابر خواهند شد.



برای محاسبه زاویه انحراف پرتو اولیه و پرتو نهایی را ادامه می‌دهیم تا یکدیگر را قطع کنند زاویه ساخته شده همان زاویه انحراف است.

چگونه می‌توان تشخیص داد یک پرتو با یکی از آینه‌های متقاطع برخورد خواهد کرد؟

ابتدا پرتو را با آینه مورد نظر برخورد دهید اگر مجموع زوایای مثلث ایجاد شده بزرگ‌تر از ۱۸۰ درجه شد چون چنین چیزی امکان‌پذیر نیست پس نتیجه می‌گیریم این پرتو نمی‌تواند این آینه را قطع کند.

مبدأ سنجش زاویه در مبحث بازتاب و شکست چیست؟

۱ـ برای جبهه موج، زاویه جبهه موج با مرز یا مانع مهم است.

۲ـ برای پرتو، زاویه پرتو با خط عمود مهم است.

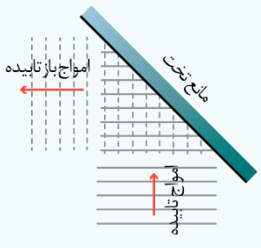
θ = زاویه جبهه موج با مرز

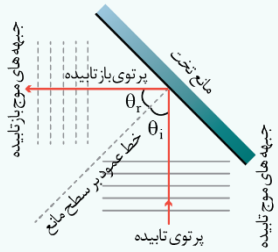
θ = زاویه پرتو با خط عمود

اگر جبهه موج با یک خط زاویه(β)بسازد پرتو با همان خط زاویه $90^\circ - \beta$ می‌سازد.

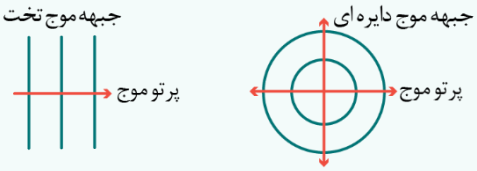
روش‌هایی که می‌توان بازتاب در دو بعد را نشان داد:

الف: طرح جبهه‌های موج ب: طرح نمودار پرتویی





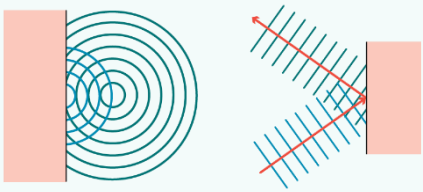
یک پرتو موج پیکان مستقیمی عمود بر جبهه‌های موج است که جهت انتشار موج را نشان می‌دهد.



بازتاب در دو بعد: بازتاب موج در سطح آب درون تشت موج

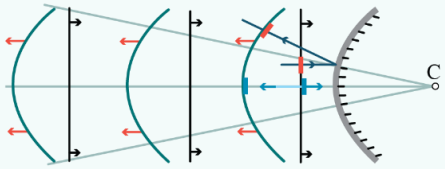
اگر یک موج تخت در سطح آب به یک مانع تخت (که طول آن در مقایسه با طول موج بسیار بزرگ است.) برخورد کند این امواج پس از برخورد با این مانع باز می‌تابند.

۱ـ مانع تخت: نوع موج پس از بازتاب از مانع تخت تغییر نمی‌کند یعنی موج تخت به صورت خط و موج دایره‌ای به صورت دایره‌ای بازتاب می‌شود.

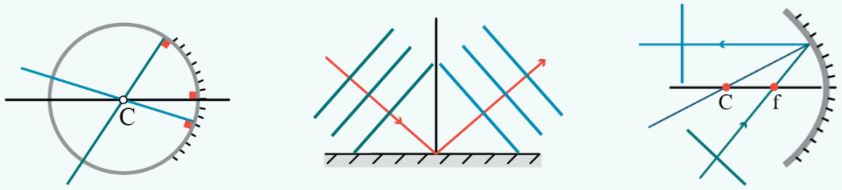


www.biomaze.ir

۲ـ مانع کروی: موج بازتابیده از موانع کروی بسته به نوع موج (تخت یا دایره‌ای) و مکان چشمه موج (مرکز یا کانون) حالت‌های مختلفی دارد.



در آینه‌های کروی شعاع کره (خطی که از مرکز کره می‌گذرد.) بر سطح کره عمود است.

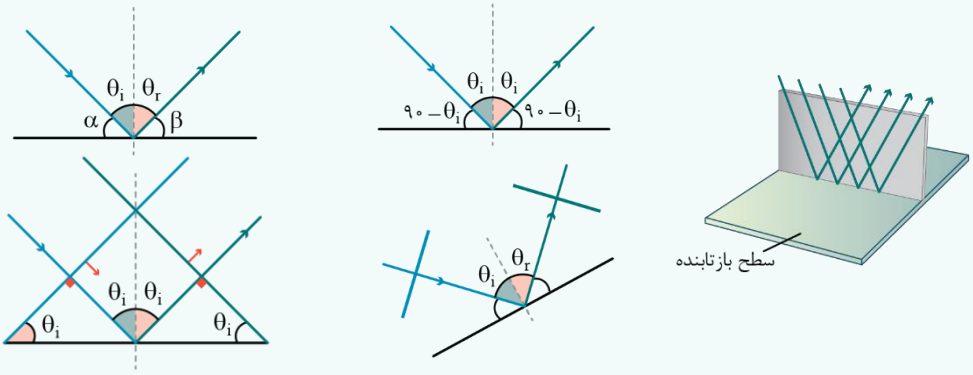


قانون بازتاب عمومی

برای هر وضعیت مانع و برای هر نوع موجی همواره زاویه بازتابش برابر با زاویه تابش است. $\theta_i = \theta_r$

قانون بازتاب عمومی برای هر نوع مانع (هموار، ناهموار، تخت و ...) و برای هر نوع موجی (مکانیکی، الکترومغناطیسی، طولی، عرضی و ...) و برای هر رنگی (قرمز، نارنجی و ...) صادق است و طول موج و بسامد موج پس از بازتابش تغییر نمی‌کند.

پرتو تابش، پرتو بازتابش و خط عمود بر سطح بازتابنده، در هر تابشی در یک صفحه واقع‌اند.



θ_i = زاویه جبهه‌های موج تابیده با سطح مانع تخت

θ_r = زاویه جبهه‌های موج بازتابیده با سطح مانع تخت

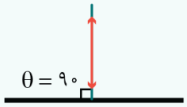
$۱۸۰ - ۲\theta_i$ و $۲\theta_i$ = زاویه بین جبهه‌های موج تابیده و بازتابیده

θ_i = زاویه تابش

θ_r = زاویه بازتابش

$۲\theta_i$ ، $۱۸۰ - ۲\theta_i$ = زاویه بین راستای پرتو تابش با پرتو بازتابش

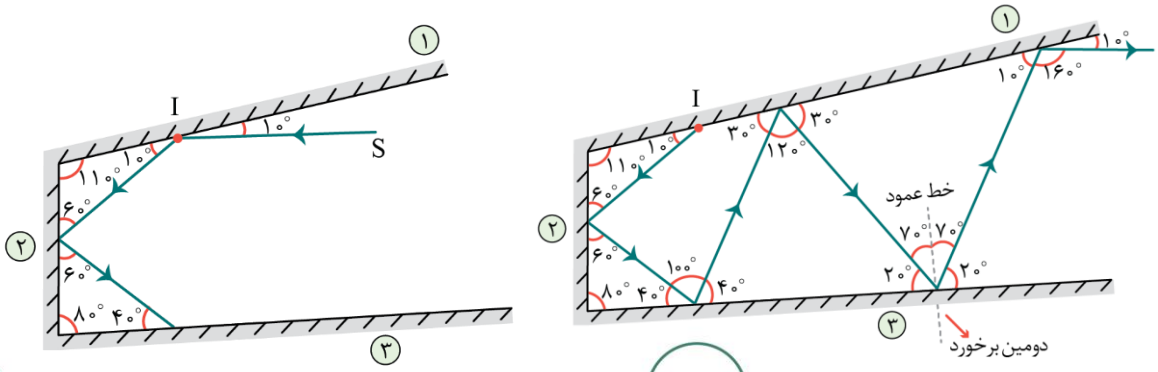
$۱۸۰ - ۲\theta_i$ = زاویه انحراف



اگر پرتو تابش بر سطح مانع عمود شود، پرتو بازتابش در امتداد همان پرتو تابش باز می‌گردد.

پاسخ تشریحی:

مسیر پرتوهای نور را در دو شکل ترسیم کرده‌ایم:



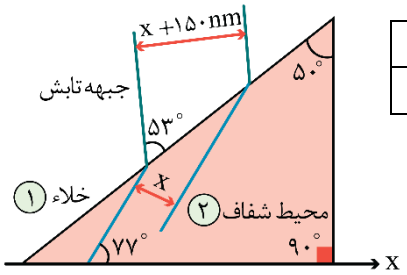
www.biomaze.ir

۷۰° = زاویه بازتاب دومین برخورد به آینهٔ (۳)

نکته: هدف از طرح این سؤال این است که روش ترسیم پرتوها را یاد بگیرید و صرفاً به فرمول‌های تستی در این مبحث اکتفا نکنید.

گروه آموزشی ماز

۶۴- مطابق شکل یک دسته جبهه موج الکترومغناطیسی از خلأ وارد محیط شفافی شده است. بسامد این موج چند هرتز است؟ $(c = ۳\times ۱۰^۸ \frac{m}{s})$



θ	۳۰°	۳۷°	۴۵°	۵۳°	۶۰°
sin θ	۰/۵	۰/۶	۰/۷	۰/۸	۰/۸۵

۱) ۵×۱۰^{۱۴}

۲) $\frac{۲}{۳}\times ۱۰^{۱۵}$

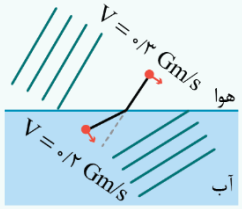
۳) ۵×۱۰^{۵}

۴) $\frac{۲}{۳}\times ۱۰^{۶}$

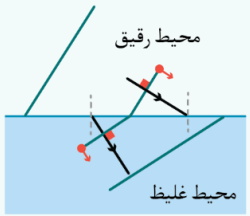
پاسخ: گزینه ۱ (متوسط ـ مفهومی و محاسباتی ـ ۱۲۰۴)

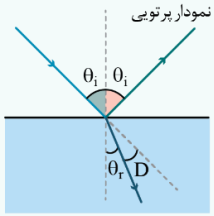
شکست موج

اگر موج از یک محیط وارد محیط دیگر شود در مرز دو محیط تندی قسمت‌های مختلف جبهه موج متفاوت شده و این تغییر تندی باعث شکست جبهه موج می‌شود.

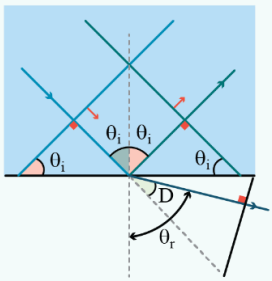


اگر نور از محیط رقیق وارد محیط غلیظ شود تندی قسمتی از موج که در محیط دو قرار دارد کاهش می‌یابد و همین امر باعث عقب افتادن آن می‌شود پس زاویه جبهه موج با مرز کاهش می‌یابد و پرتو به خط عمود نزدیک می‌شود.





اگر نور از محیط غلیظ به رقیق بتابد از خط عمود دور می‌شود.



شرایط شکست موج

۱ـ محیط تغییر کند. (تندی موج و طول موج تغییر کند.)

۲ـ جبهه‌های موج موازی با مرز دو محیط نباشد. (پرتو موج عمود بر مرز نتابد.)

روابط مربوط به شکست موج

$$\uparrow \text{غلظت} \propto \uparrow n \propto \frac{۱}{\downarrow \sin(\theta)} \propto \frac{۱}{\downarrow v} \propto \frac{۱}{\downarrow \lambda}$$

هر چه محیط غلیظ‌تر باشد ضریب شکست آن محیط بیشتر است پس زاویه پرتو با خط عمود در آن محیط کمتر خواهد شد و در نهایت تندی و طول موج نور در آن محیط کمتر خواهد بود.

در پدیده شکست موج؛ بسامد، بسامد زاویه‌ای، دوره تناوب، انرژی فوتون‌ها و رنگ نور ثابت می‌ماند.

ضریب شکست: ضریب شکست یک محیط برابر با نسبت تندی نور در خلأ به تندی نور در آن محیط است

ضریب شکست : $n = \frac{c}{v}$

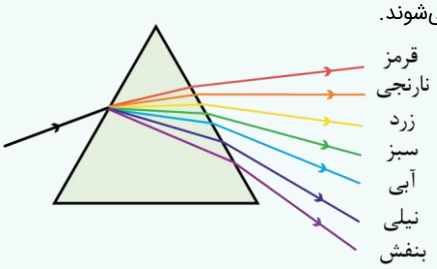
www.biomaze.ir

قانون شکست اسنل : $n_1 \sin(\theta_1) = n_2 \sin(\theta_2)$

قانون شکست عمومی : $\frac{\sin(\theta_2)}{\sin(\theta_1)} = \frac{v_2}{v_1}$

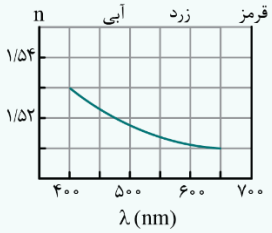
پاشندگی نور

اگر باریکهٔ نور سفید از هوا بر یک سطح شیشه‌ای فرود آید بر اثر شکست نور، مؤلفه‌های سازنده باریکه نور سفید هر کدام به میزان متفاوتی خم می‌شوند که البته این تفاوت چندان محسوس نیست. برای افزایش جدایی رنگ‌ها در پاشندگی نور، معمولاً از یک منشور با سطح مقطع مثلثی استفاده می‌کنیم پاشندگی ناچیز در سطح اول، سپس با پاشندگی در سطح دوم افزایش می‌یابد و مؤلفه‌های رنگی نور سفید به طور محسوسی از هم جدا می‌شوند.



وقتی باریکهٔ نور سفید خورشید به وجهی از یک منشور می‌تابد در عبور از منشور به رنگ‌های مختلفی تجزیه می‌شود. دلیل این پدیده آن است که ضریب شکست هر محیطی به‌جز خلأ به طول موج نور بستگی دارد؛ یعنی وقتی باریکه نوری شامل پرتوهایی با طول موج‌های مختلف باشد این پرتوها هنگام عبور از مرز دو محیط در زاویه‌های مختلفی شکسته می‌شوند به این پخش‌شدگی نور، پاشندگی نور می‌گویند.

عموماً ضریب شکست یک محیط معین برای طول موج‌های کوتاه‌تر بیشتر است. نمودار زیر این وابستگی ضریب شکست به طول موج نور را برای شیشه معمولی نشان می‌دهد. با توجه به این نمودار اگر مثلاً دو باریکه نور آبی و قرمز با زاویه تابش یکسانی از هوا وارد شیشه شوند باریکه آبی بیشتر از باریکه قرمز می‌شکند.



ضریب شکست یک محیط افزون بر جنس محیط به طول موج (رنگ) نور تابیده به آن هم بستگی دارد.

ببخشین! اگه این‌طور باشه که باید همیشه وقتی نور سفید شکست پیدا می‌کنه رنگ‌های سازنده‌اش از هم جدا بشن! مثلاً نوری که از شیشه پنجره‌مون

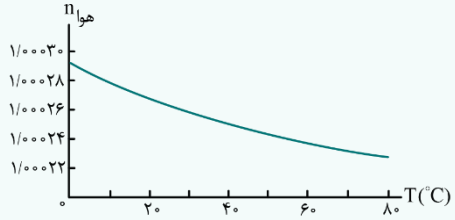
سؤال: آیا همیشه وقتی نور سفید شکست پیدا می‌کند و رنگ‌های سازنده‌اش از هم جدا می‌شوند؟ (مثلاً نوری که از تیغه شیشه‌ای عبور می‌کند آیا در طرف دیگر تیغه پاشندگی نور را مشاهده خواهیم کرد؟)

جواب: بله همین‌طور است البته باید توجه کنید که اختلاف ضریب شکست یک محیط شفاف برای رنگ‌های مختلف بسیار جزئی است و به همین دلیل اغلب پاشندگی نور به اندازه‌ای نیست که بتوان با چشم آن را مشاهده کرد به همین خاطر است که در عمل برای وضوح پاشندگی نور از یک منشور شیشه‌ای با سطح مقطع مثلثی استفاده در شکل بالا دیدید که با دو بار شکست نور هنگام ورود به منشور و خروج از آن رنگ‌های سازنده آن به خوبی از هم جدا شده‌اند.

سراب

در روزهای خیلی گرم دمای هوا در ارتفاع‌های مختلف از سطح زمین یکسان نیست هوایی که با سطح داغ زمین در تماس است دمای بالایی دارد و هر چه از سطح زمین بالاتر می‌رویم دمای هوا کاهش می‌یابد نمودار زیر ارتباط ضریب شکست هوا را با دما نشان می‌دهد:

هر چه دمای هوا بیشتر باشد چگالی (غلظت) آن کمتر است و به همین دلیل ضریب شکست کمتری نیز دارد.



چون ضریب شکست هوای نزدیک زمین کمتر است تندی انتشار نور در آن بیشتر است و همین موضوع سبب می‌شود تا بخشی از جبهه‌های موج که به زمین نزدیک‌ترند با تندی بیشتری حرکت کنند. تندی بیشتر قسمت پایینی جبهه‌های موج همان‌گونه که شکل زیر نشان می‌دهد باعث می‌شود پرتوها رو به بالا خم شوند و به چشم شخص برسند. در این حال چشم تصور می‌کند تصویر درخت در زیر آن افتاده است؛ درست مانند تصویر درختانی که لب یک دریاچه‌اند. به همین دلیل است که مغز به اشتباه تصور می‌کند که بر سطح زمین آب وجود دارد.

www.biomaze.ir

گام اول:

نسبت طول موج در دو محیط برابر است با:

$$\frac{\lambda_2}{\lambda_1}=\frac{\sin\theta_2}{\sin\theta_1}\rightarrow\frac{x}{x+150}=\frac{0/6}{0/8}\rightarrow\frac{x}{x+150}=\frac{3}{4}$$

$$\rightarrow 4x=3x+450\rightarrow x=450\rightarrow\begin{cases}\lambda_1=600\,nm\\ \lambda_2=450\,nm\end{cases}$$

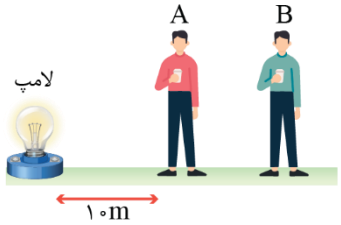
گام دوم:

بسامد موج برابر است با:

$$\text{در محیط (۱) (خلأ)}:\lambda_1=\frac{c}{f}\rightarrow 600\times10^{-9}=\frac{3\times10^8}{f}\rightarrow f=5\times10^{14}\,Hz$$

گروه آموزشی ماز

۶۵- مطابق شکل یک لامپ با توان مفید $60W$ امواج الکترومغناطیسی با طول موج $600nm$ را در همهٔ جهت‌ها به صورت یکنواخت در محیط گسیل می‌کند. شدت تابشی دریافتی توسط شخص B $10\frac{mW}{m^2}$ کمتر از شدت تابشی در مکان شخص A است. اگر قطر مردمک چشمان شخص B، $2mm$ باشد، در هر دقیقه چند فوتون وارد چشمان شخص B می‌شود؟ (از جذب و اتلاف انرژی توسط محیط صرف‌نظر شود، $h=6\times10^{-34}\,J.s$، $\pi\simeq3$ و $c=3\times10^8\frac{m}{s}$)



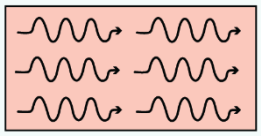
۱) $4/8\times10^{13}$
۲) $2/4\times10^{13}$
۳) $4/8\times10^{16}$
۴) $2/4\times10^{16}$

پاسخ: گزینه ۱ (متوسط ـ محاسباتی ـ ۱۲۰۵)

انرژی امواج الکترومغناطیسی

هر موج الکترومغناطیسی با بسامد f از مجموعه‌ای از بسته‌های انرژی ساخته شده است که به هر یک از این بسته‌ها فوتون می‌گوییم.

$$E=hf$$



E : انرژی هر فوتون
h : ثابت پلانک
f : بسامد موج

انرژی موج الکترومغناطیسی کمیتی است کوانتومی که مضرب درستی از انرژی یک فوتون (hf) است.

$$E=n(hf)$$

E : انرژی موج الکترومغناطیسی
n : تعداد فوتون‌ها
hf : انرژی یک فوتون

اگر در سؤال طول موج را بدهند به جای بسامد، مقدار آن را بر حسب طول موج قرار می‌دهیم.

$$E=nhf\xrightarrow{f=\frac{c}{\lambda}}E=\frac{nhc}{\lambda}$$

پاسخ تشریحی:

شدت تابش در محل شخص A برابر است با:

$$I=\frac{P}{A}=\frac{60}{4\pi r^2}=\frac{60}{4\times3\times1^2}=0/05\frac{W}{m^2}$$

www.biomaze.ir

شدت تابشی شخص B $۱۰\frac{mW}{m^۲}$ یا $۰/۰۱\frac{W}{m^۲}$ کمتر است:

$$I_B = ۰/۰۵ - ۰/۰۱ = ۰/۰۴\frac{W}{m^۲}$$

برای محاسبهٔ تعداد فوتون‌ها می‌توان نوشت:

$$\text{مساحت دو چشم شخص} = ۲\times\pi r^۲ = ۲\times۳\times(۱\times۱۰^{-۳})^۲ = ۶\times۱۰^{-۶}\,m^۲$$

$$I_B = \frac{E}{At} \xrightarrow{E=\frac{nhc}{\lambda}} I_B = \frac{n_B hc}{\lambda At} \rightarrow n_B = \frac{I_B \lambda At}{hc}$$

$$\rightarrow n_B = \frac{۰/۰۴\times۶۰۰\times۱۰^{-۹}\times۶\times۱۰^{-۶}\times۶۰}{۶\times۱۰^{-۳۴}\times۳\times۱۰^{۸}} \rightarrow n_B = ۴/۸\times۱۰^{۱۳}$$

گروه آموزشی ماز

۶۶- طبق مدل اتمی بور، کدام عبارت صحیح است؟

۱) با افزایش n، شعاع مدارهای مانا به هم نزدیک و نزدیک‌تر می‌شود.

۲) با جهش الکترون از تراز n به n' $(n' < n)$ فوتونی تابش می‌شود که انرژی آن کوچک‌تر از اختلاف انرژی این دو تراز است.

۳) در دمای اتاق، اغلب الکترون‌ها در حالت پایه قرار دارند.

۴) به حداقل انرژی مورد نیاز برای بردن الکترون از تراز $n=۱$ به $n=۲$، انرژی یونش می‌گویند.

پاسخ: گزینه ۳ (آسان ـ مفهومی و خط‌به‌خط کتاب درسی ـ ۱۲۰۵)

بررسی گزینه‌ها:

۱) با افزایش n، شعاع مدارهای مانا از هم دور و دورتر می‌شود. (×)

۲) با جهش الکترون از تراز n به n' $(n' < n)$ فوتونی تابش می‌شود که انرژی آن برابر با اختلاف انرژی این دو تراز است. (×)

۳) در دمای اتاق، اغلب الکترون‌ها در حالت پایه قرار دارند. (✓)

۴) به حداقل انرژی مورد نیاز برای بردن الکترون از تراز $n=۱$ به $n=\infty$، انرژی یونش می‌گویند. (×)

گروه آموزشی ماز

۶۷- شکل مقابل، تعدادی از ترازهای انرژی اتم هیدروژن را نشان می‌دهد. شعاع مدار پنجم هیدروژن ۱۳/۲۵ آنگستروم است. اگر در یک گذار، یک فوتون با طول موج ۵۰۰nm گسیل شود، در این گذار، شعاع مدار چند آنگستروم تغییر کرده است؟

$$(c = ۳\times۱۰^{۸}\,\frac{m}{s}\ ,\ h = ۴/۲۵\times۱۰^{-۱۵}\,eV.s)$$

۰ eV
−۰/۵۴۴eV
−۰/۸۵eV
−۱/۵۱eV
−۳/۴eV
−۱۳/۶eV

۱) ۲/۲۵
۲) ۲/۵
۳) ۶/۳۶
۴) ۶

پاسخ: گزینه ۳ (متوسط ـ محاسباتی ـ ۱۲۰۵)

الگوی اتمی بور

مدل بور: ۱ـ مسئله ناپایداری اتم را در مدل رادرفورد حل کرد.

۲ـ معادله ریدبرگ برای طیف خطی اتم هیدروژن را نیز نتیجه داد.

بور پیشنهاد داد در مقیاس اتمی قوانین مکانیک کلاسیک و الکترومغناطیس باید توسط قوانین دیگری جایگزین یا تکمیل شود.

اصول و مفروضات مدل بور

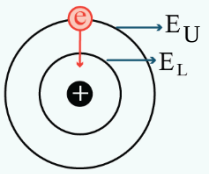
۱ـ مدارها و انرژی‌های الکترون‌ها در هر اتم کوانتیده‌اند، یعنی فقط مدارها و انرژی‌های گسسته معینی مجاز هستند.

$$r_n = a_۰ n^۲ \qquad E_n = \frac{-E_R}{n^۲}$$

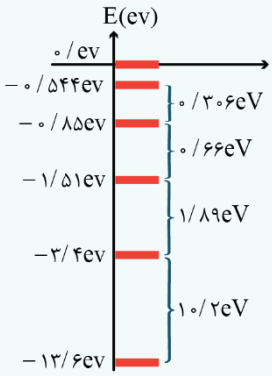
۲ـ وقتی یک الکترون در یکی از مدارهای مجاز است هیچ نوع تابش الکترومغناطیسی گسیل نمی‌شود، از این رو گفته می‌شود الکترون در مدار مانا یا حالت مانا قرار دارد.

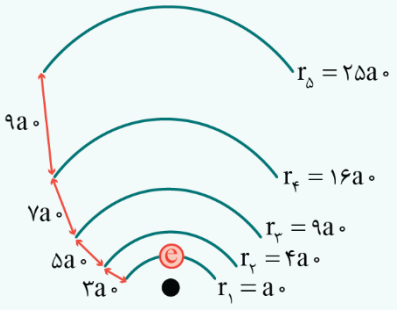
www.biomaze.ir

۳ـ الکترون می‌تواند از یک حالت مانا به حالت مانای دیگر برود. هنگام گذار الکترون از یک حالت مانا با انرژی بیشتر به یک حالت مانا با انرژی کمتر یک فوتون تابش می‌شود در این صورت انرژی فوتون تابش شده برابر اختلاف انرژی بین دو مدار اولیه و مدار نهایی است.



$$hf = E_U - E_L$$





با دور شدن از هسته:

۱ـ شعاع مدارهای مانا زیاد می‌شود.

۲ـ مدارهای مانا از هم دور می‌شوند.

۳ـ انرژی مدارها افزایش می‌یابد.

۴ـ ترازهای انرژی به هم نزدیک می‌شوند.

با اینکه فاصله مدارهای نزدیک هسته خیلی کم است ولی برای جهش الکترون انرژی زیادی لازم است چون در این مدارها نیروی جاذبه الکتریکی قوی است.

پاسخ تشریحی:

انرژی فوتون گسیل شده:

$$hf = \frac{hc}{\lambda} = \frac{۴/۲۵\times۱۰^{-۱۵}\times۳\times۱۰^{۸}}{۵۰۰\times۱۰^{-۹}} = ۲/۵۵\,eV$$

طبق اعداد داده شده در ترازهای انرژی، انرژی فوتون اختلاف تراز انرژی مدارهای ۴ و ۲ است. پس خط دوم سری بالمر گسیل شده است.

توجه کنید که طول موج ۵۰۰nm در ناحیهٔ مرئی است، پس از همان ابتدا سراغ رشتهٔ بالمر بروید.

شعاع مدار پنجم:

$$r_۵ = n^۲a_۰ \rightarrow ۱۳/۲۵ = ۵^۲a_۰ \rightarrow a_۰ = \frac{۱۳/۲۵}{۲۵}$$

شعاع مدار چهارم:

$$r_۴ = ۴^۲a_۰ = ۱۶a_۰$$

شعاع مدار دوم:

$$r_۲ = ۲^۲a_۰ = ۴a_۰$$

تغییر شعاع:

$$\Delta r = ۱۶a_۰ - ۴a_۰ = ۱۲a_۰$$

$$\Delta r = ۱۲\times\frac{۱۳/۲۵}{۲۵} = ۶/۳۶A^{\circ}$$

گروه آموزشی ماز

۶۸- در مدل بور برای اتم هیدورژن، اختلاف طول موج کوتاه‌ترین فوتون قابل رؤیت و کوتاه‌ترین طول موج رشته بالمر $(n'=۲)$ تقریباً چند نانومتر است؟ $(R=۰/۰۱۱nm^{-۱})$

۱) ۲۰ ۲) ۱۰۰ ۳) ۸۵ ۴) ۴۵

پاسخ: گزینه ۴ (متوسط ـ محاسباتی ـ ۱۲۰۵)

پاسخ تشریحی:

کوتاه‌ترین طول موج مرئی هیدروژن $n=۶$ به $n'=۲$ است.

www.biomaze.ir

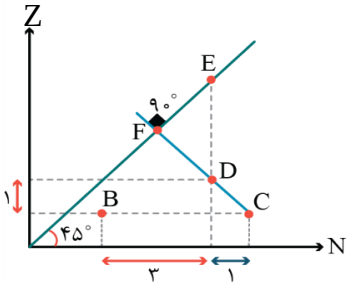
کوتاه‌ترین طول موج رشته بالمر $n=\infty$ به $n'=۲$ است.
اختلاف این دو موج برابر است با:

$$\frac{۱}{\lambda}=R\left(\frac{۱}{n'^{۲}}-\frac{۱}{n^{۲}}\right)\rightarrow\begin{cases}\frac{۱}{\lambda_۱}=\frac{۱۱}{۱۰۰۰}(\frac{۱}{۲^{۲}}-\frac{۱}{۶^{۲}})\\ \frac{۱}{\lambda_۲}=\frac{۱۱}{۱۰۰۰}(\frac{۱}{۲^{۲}}-\frac{۱}{\infty})\end{cases}$$

$$\rightarrow\begin{cases}\lambda_۱=\frac{۴۵۰۰}{۱۱}\text{nm}\\ \lambda_۲=\frac{۴۰۰۰}{۱۱}\text{nm}\end{cases}\Rightarrow\lambda_۱-\lambda_۲=\frac{۵۰۰}{۱۱}\text{nm}\simeq ۴۵\text{nm}$$

گروه آموزشی ماز

۶۹- نمودار مربوط به تغییرات Z برحسب N برای تعدادی هسته مطابق شکل است. کدام یک از موارد زیر نادرست است؟



۱) هستهٔ D با گسیل یک پوزیترون به هسته C تبدیل می‌شود.
۲) هستهٔ C با گسیل یک آلفا و دو بتای منفی به هسته B تبدیل می‌شود.
۳) هستهٔ B و C خواص شیمیایی یکسانی دارند و جداسازی آن‌ها با روش‌های فیزیکی امکان دارد.
۴) عدد جرمی هستهٔ F بیشتر از عدد جرمی هستهٔ D است.

پاسخ: گزینه ۴ (متوسط ـ مفهومی ـ ۱۲۰۶)

پرتوزایی

کشف پرتوزایی طبیعی توسط هانری بکرل، آغازی برای پی بردن به وجود هسته اتم بود.
وقتی یک هسته ناپایدار یا پرتوزا به طور طبیعی (یا اصطلاحاً خودبه‌خود) واپاشی می‌کند نوع معینی از ذرات یا فوتون‌های پر انرژی آزاد می‌شوند. این فرایند واپاشی پرتوزایی طبیعی نامیده می‌شود.
در پرتوزایی طبیعی سه نوع پرتو ایجاد می‌شود:
۱ـ پرتوهای آلفا (α): پرتوهای آلفا کمترین نفوذ را دارند و با ورقه نازک سربی با ضخامت ناچیز ($۰/۰۱\ \text{mm}$) متوقف می‌شوند.
پرتوهای آلفا ذرات باردار مثبت از جنس هسته هلیم هستند و از دو پروتون و دو نوترون تشکیل شده‌اند.
ذره‌های آلفا سنگین‌اند و بار مثبت دارند. برد این ذره‌ها کوتاه است. این ذرات پس از طی مسافت کوتاهی در هوا (۱ تا ۲ سانتی‌متر) و یا هنگام عبور از لایه‌ای نازک از مواد جذب می‌شوند اگر این ذره‌ها از راه تنفسی یا دستگاه گوارش وارد بدن شوند باعث آسیب شدید به بافت‌های بدن می‌شوند بنابراین باید مراقب بود که مواد آلفازا هرگز وارد بدن نشوند.
۲ـ پرتوهای بتا (β) : پرتوهای بتا مسافت خیلی بیشتری ($۰/۱\ \text{mm}$) را در سرب نفوذ می‌کنند.
۳ـ پرتوهای گاما (γ) : پرتوهای گاما بیشترین نفوذ را دارند و می‌توانند از ورقه‌های سربی به ضخامت قابل ملاحظه‌ای ($۱۰۰\ \text{mm}$) بگذرند.
در تمام فرایندهای واپاشی پرتوزا مشاهده شده است که تعداد نوکلئون‌ها در طی فرایند واپاشی هسته‌ای ثابت است یعنی:
تعداد نوکلئون‌ها پیش از فرایند با تعداد نوکلئون‌ها پس از فرآیند مساوی است.
روش تولید الکترون در واکنش‌های هسته‌ای: نوترون در هسته شکافته شده و به پروتون و الکترون تبدیل می‌شود.

$${}^{۱}_{۰}n\rightarrow{}^{۱}_{+۱}p+{}^{۰}_{-۱}e^{-}$$

روش تولید پوزیترون در واکنش‌های هسته‌ای: پروتون شکافته شده و یک نوترون و یک پوزیترون تولید می‌کند.

$${}^{۱}_{+۱}p\rightarrow{}^{۱}_{۰}n+{}^{۰}_{+۱}e^{+}$$

ذرات مهمی که باید عدد اتمی و عدد جرمی آن‌ها را حفظ کنیم:
آلفا: همان هسته هلیم است (هلیم دو بار یونیده شده).
بتای منفی: همان الکترون است.
بتای مثبت (پوزیترون): پوزیترون یک ذره گسیل شده توسط هسته که جرم یکسان با الکترون و بار یکسان با پروتون دارد به این الکترون مثبت پوزیترون گویند.
پروتون: یکی از ذرات هسته با بار مثبت می‌باشد.
نوترون: یکی از ذرات هسته است که فاقد بار می‌باشد.
گاما: گاما یک موج الکترومغناطیسی با فوتون‌های پر انرژی می‌باشد که فاقد جرم و بار است.
پس در میدان‌های الکتریکی و مغناطیسی منحرف نمی‌شود.

$${}^{۰}_{۰}\gamma\quad {}^{۰}_{-۱}\beta\quad {}^{۰}_{-۱}e^{-}\quad {}^{۰}_{+۱}e^{+}\quad {}^{۱}_{+۱}p\quad {}^{۴}_{۲}\alpha\quad {}^{۴}_{۲}He\quad {}^{۱}_{۰}n$$

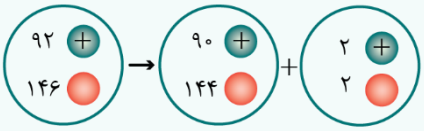
www.biomaze.ir

۱ـ واپاشی آلفا (α) :

واپاشی آلفا در هسته‌های سنگین صورت می‌گیرد.

در واپاشی آلفا یک هسته مادر ناپایدار آلفا گسیل می‌کند و هسته متفاوتی (هسته دختر) به وجود می‌آید:

$$^{A}_{Z}X \rightarrow {}^{A-۴}_{Z-۲}Y + {}^{۴}_{۲}He$$



با گسیل ذره آلفا دو نوترون و دو پروتون از هسته کم می‌شود پس از عدد جرمی ۴ واحد کم خواهد شد.

۲ـ واپاشی بتا (β) :

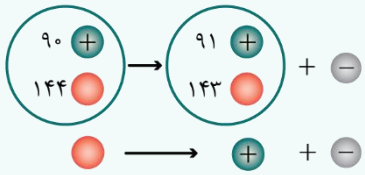
واپاشی بتا نخستین مورد پرتوزایی بود که توسط هانری بکرل مشاهده شد.

این واپاشی متداول‌ترین نوع واپاشی در هسته‌هاست و ذرات گسیل شده در این نوع واپاشی را ذرات بتا می‌نامند.

انواع واپاشی بتا (β^-):

۱) واپاشی β^- : الکترون گسیل شده در این واپاشی در هسته مادر وجود ندارد همچنین یکی از الکترون‌های مداری اتم نیست این الکترون وقتی به وجود می‌آید که نوترونی درون هسته به پروتون و الکترون تبدیل شود:

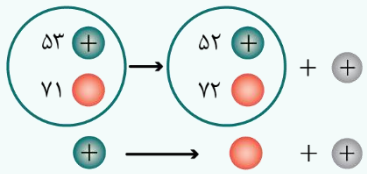
$$^{A}_{Z}X \rightarrow {}^{A}_{Z+۱}Y + {}^{۰}_{-۱}e^{-}$$



یکی از نوترون‌های هسته کم شده و به پروتون و الکترون تبدیل می‌شود، الکترون گسیل شده و پروتون به هسته اضافه می‌شود. پس در این واپاشی عدد جرمی ثابت می‌ماند ولی عدد اتمی یک واحد افزایش می‌یابد.

۲ـ واپاشی β^+ : این واپاشی وقتی رخ می‌دهد که پروتون در یک هسته مادر ناپایدار به نوترون و پوزیترون تبدیل شود پوزیترون به صورت ذره گسیل می‌شود و نوترون به هسته اضافه می‌شود.

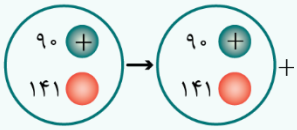
$$^{A}_{Z}X \rightarrow {}^{A}_{Z-۱}Y + {}^{۰}_{+۱}e^{+}$$



یک پروتون کم می‌شود در عوض یک نوترون اضافه می‌شود پس عدد جرمی ثابت می‌ماند.

واپاشی گاما: هسته‌ها پس از واپاشی آلفا یا بتا در حالت برانگیخته قرار می‌گیرند و با گسیل فوتون‌های پر انرژی پرتو گاما به حالت پایه می‌رسند در این فرایند عدد جرمی و عدد اتمی تغییر نمی‌کند بلکه هسته برانگیخته که با علامت * مشخص شده است با گسیل پرتو گاما به حالت پایه می‌رسد:

$$^{A}_{Z}X^{*} \rightarrow {}^{A}_{Z}X + {}^{۰}_{۰}\gamma$$



بررسی گزینه‌ها:

۱) هسته‌های روی خط عمود بر $Z=N$ (یعنی C و D و F) عدد جرمی یکسانی دارند. (✓)

$$^{A}_{Z}D \rightarrow {}^{۰}_{+۱}e^{+} + {}^{A}_{Z-۱}C$$

در گسیل بتای مثبت تعداد پروتون‌ها یک واحد کم می‌شود و تعداد نوترون‌ها یک واحد اضافه شده و عدد جرمی ثابت می‌ماند. (✓)

۲) و

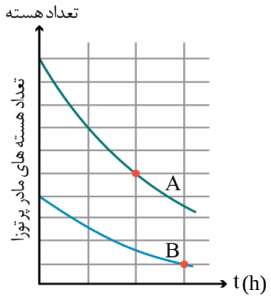
۳) هسته‌های B و C عدد اتمی یکسانی دارند (ایزوتوپ هستند) پس خواص شیمیایی یکسانی دارند و برای جداسازی آن‌ها از هم باید از خواص فیزیکی استفاده کرد. (✓)

$$^{A}_{Z}C \rightarrow {}^{۴}_{۲}\alpha + ۲\,{}^{۰}_{-۱}\beta + {}^{A-۴}_{Z}B$$

در این واکنش ۴ نوترون از هستهٔ C کم شده است. (✓)

۴) طبق توضیحات گزینهٔ (۱)، عدد جرمی F و D یکسان است. (✗)

۷۰- شکل زیر نمودار تغییرات تعداد هسته‌های مادر پرتوزای دو نمونه را بر حسب زمان نشان می‌دهد. نیمه‌عمر یکی از نمونه‌ها دو ساعت بیشتر از دیگری است. پس از گذشت یک شبانه‌روز، چند درصد هسته‌های مادهٔ **B** واپاشیده می‌شود؟



۱) ۶/۲۵
۲) ۹۳/۷۵
۳) ۱۲/۵
۴) ۸۷/۵

پاسخ: گزینه ۲ (متوسط ـ نموداری ـ ۱۲۰۶)

نیمه‌عمر

نیمه‌عمر مدت زمانی است که طول می‌کشد تا تعداد هسته‌های مادر موجود در یک نمونه به نصف برسند.

$$N_0 \xrightarrow{T} \frac{N_0}{2} \xrightarrow{T} \frac{N_0}{4} \xrightarrow{T} \frac{N_0}{8}$$

N_0 : تعداد هسته‌های اولیه

$\frac{N_0}{8}$: تعداد هسته‌های باقیمانده

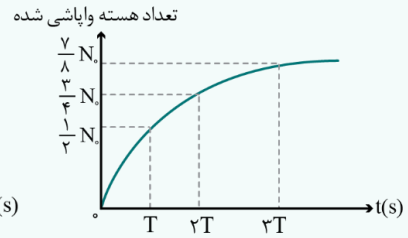
روابط:

$$N = \frac{N_0}{2^{\frac{t}{T}}} \xrightarrow{n=\frac{t}{T}} N = \frac{N_0}{2^n}$$

$$N' = N_0 - N$$

N_0 : تعداد هسته‌های اولیه
N : تعداد هسته‌های باقیمانده
N' : تعداد هسته‌های واپاشیده شده
n : تعداد نیمه‌عمر

نمودارها:

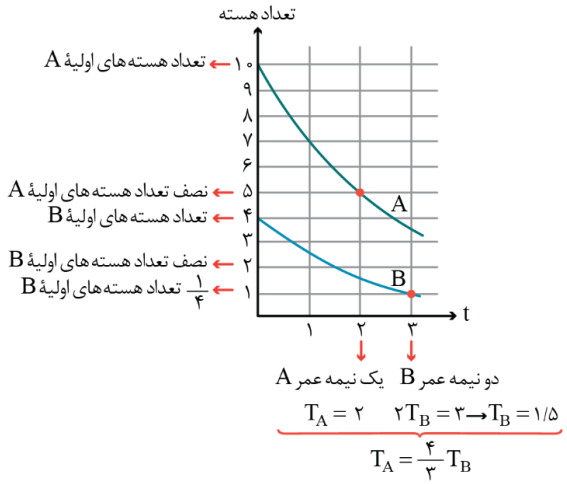


برای راحتی کار در محاسبات درصدهای زیر را حفظ کنید:

زمان سپری شده	درصد باقیمانده	درصد واپاشیده
$t = T$ یک نیمه‌عمر	$\frac{1}{2} = 50\%$	$\frac{1}{2} = 50\%$
$t = 2T$ دو نیمه‌عمر	$\frac{1}{4} = 25\%$	$\frac{3}{4} = 75\%$
$t = 3T$ سه نیمه‌عمر	$\frac{1}{8} = 12/5\%$	$\frac{7}{8} = 87/5\%$
$t = 4T$ چهار نیمه‌عمر	$\frac{1}{16} = 6/25\%$	$\frac{15}{16} = 93/75\%$
$t = 5T$ پنج نیمه‌عمر	$\frac{1}{32} = 3/125\%$	$\frac{31}{32} = 96/875\%$

www.biomaze.ir

پاسخ تشریحی:



چون نیمه‌عمر A بیشتر است، پس:

$$T_A - T_B = 2$$

$$\frac{4}{3}T_B - T_B = 2 \rightarrow T_B = 6h$$

$$N = \frac{N_0}{\frac{t}{2T}} \rightarrow N = \frac{N_0}{\frac{24}{2^6}} \rightarrow N = \frac{1}{16}N_0$$

پس ٪۶/۲۵ باقی مانده و ٪۹۳/۷۵ متلاشی شده است.

گروه آموزشی ماز

۷۱- سنگی از ارتفاع h نسبت به زمین رها می‌شود. اگر تندی متوسط آن در $\frac{h}{4}$ اول مسیر برابر با $20\frac{m}{s}$ باشد، ارتفاع h چند متر است؟ ($g = 10\frac{m}{s^2}$ و از مقاومت هوا صرف‌نظر کنید.)

۱) ۴۰ ۲) ۸۰ ۳) ۱۶۰ ۴) ۳۲۰

پاسخ: گزینه ۴ (متوسط ـ محاسباتی ـ ۱۲۰۱)

پاسخ تشریحی:

فرض کنیم، پس از سقوط به اندازهٔ $\frac{h}{4}$، سرعت سنگ به v_1 برسد.

$$s_{av} = |v_{av}| = \left|\frac{0 + v_1}{2}\right| = 20 \Rightarrow |v_1| = 40\frac{m}{s}$$

$$v^2 = -2g\Delta y \Rightarrow 1600 = -20 \times (-\frac{h}{4})$$

$$\Rightarrow 80 = \frac{h}{4} \Rightarrow h = 320m$$

گروه آموزشی ماز

۷۲- فاصلهٔ ماهواره‌ای تا سطح زمین به اندازهٔ شعاع زمین است. اگر این ماهواره در مداری قرار گیرد که فاصله‌اش تا سطح زمین n برابر شعاع زمین باشد، دورهٔ تناوب حرکت آن ۸ برابر می‌شود. n کدام است؟

۱) ۳ ۲) ۴ ۳) ۷ ۴) ۸

پاسخ: گزینه ۳ (متوسط ـ محاسباتی ـ ۱۲۰۲)

پاسخ تشریحی:

در ابتدا فاصلهٔ ماهواره تا مرکز زمین برابر $r_1 = R_e + h_1 = 2R_e$ است. با توجه به این‌که دورهٔ تناوب ماهواره متناسب با $r^{\frac{3}{2}}$ است، می‌توان نوشت:

$$T \propto r^{\frac{3}{2}} \Rightarrow \frac{T_2}{T_1} = (\frac{r_2}{r_1})^{\frac{3}{2}} \Rightarrow 8 = (\frac{r_2}{2R_e})^{\frac{3}{2}}$$

www.biomaze.ir

$$\Rightarrow \frac{r_۲}{۲R_e} = ۴ \Rightarrow r_۲ = ۸R_e$$

بنابراین در حالت دوم، فاصله تا سطح زمین برابر $۷R_e$ است.

گروه آموزشی ماز

۷۳- تاری با قطر مقطع ۱mm از ماده‌ای با چگالی $۶\frac{g}{cm^۳}$ ساخته شده است و تحت کشش ۱۸۰N، بین دو نقطه محکم بسته شده است. اگر اختلاف بسامدهای دوم و پنجم این تار ۶۰۰Hz باشد، طول تار چند سانتی‌متر است؟ $(\pi = ۳)$

۱) ۲۵ ۲) ۵۰ ۳) ۷۵ ۴) ۱۰۰

پاسخ: گزینه ۲ (متوسط ـ محاسباتی ـ ۱۲۰۴)

گام اول:

تندی انتشار موج عرضی در تار برابر است با:

$$v = \sqrt{\frac{F}{\mu}} = \sqrt{\frac{F}{\rho A}} \Rightarrow v = \sqrt{\frac{۱۸۰}{۶۰۰۰ \times \frac{\pi}{۴} \times ۱۰^{-۶}}} = \sqrt{۴۰۰۰۰۰} = ۲۰۰\frac{m}{s}$$

گام دوم:

اختلاف بسامدهای دوم و پنجم تار، سه برابر بسامد اصلی است، بنابراین داریم:

$$f_۵ - f_۲ = ۵f_۱ - ۲f_۱ = ۳f_۱ \Rightarrow ۳f_۱ = ۶۰۰Hz \Rightarrow f_۱ = ۲۰۰Hz$$

گام سوم:

طول تار برابر است با:

$$f_۱ = \frac{v}{۲L} \Rightarrow ۲۰۰ = \frac{۲۰۰}{۲L} \Rightarrow L = ۰/۵m = ۵۰cm$$

گروه آموزشی ماز

۷۴- چه تعداد از عبارت‌های زیر صحیح است؟

الف: تحلیل نقش پراش مبتنی بر مبحث تداخل امواج است.

ب: هنگام عبور نوری با طول موج λ از حفره‌ای با طول موج $۱/۵\lambda$، پدیدهٔ پراش به وضوح مشاهده می‌شود.

ج: تشدیدگر هلمهولتز، نمونه‌ای از تشدیدگرهای صوتی است.

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) صفر

پاسخ: گزینه ۳ (آسان ـ خط‌به‌خط کتاب درسی ـ ۱۲۰۴)

بررسی موارد:

الف: طبق متن کتاب، تحلیل نقش پراش مبتنی بر مبحث تداخل امواج است. (✓)

ب: چون ابعاد حفره در حدود طول موج است، پدیدهٔ پراش به وضوح دیده می‌شود. (✓)

ج: تشدیدگر هلمهولتز عملکردی شبیه به لوله‌های صوتی دارد و یک تشدیدگر صوتی می‌باشد. (✓)

گروه آموزشی ماز

۷۵- در آزمایش فوتوالکتریک، طول موج آستانهٔ فلز ۴۸۰nm است. نوری با طول موج λ به فلز می‌تابد و سبب گسیل فوتوالکترون‌هایی با بیشینهٔ تندی $۴\times۱۰^۵\frac{m}{s}$ می‌شود. λ چند میکرومتر است؟ $(h = ۴\times۱۰^{-۱۵}eV.s \ , \ c = ۳\times۱۰^۸\frac{m}{s} \ , \ m_e \simeq ۱۰^{-۳۰}kg \ , \ e = ۱/۶\times۱۰^{-۱۹}C)$

۱) ۰/۲۵ ۲) ۰/۳۵ ۳) ۰/۳ ۴) ۰/۴

پاسخ : گزینه ۴ (متوسط ـ محاسباتی ـ ۱۲۰۵)

گام اول:

بیشینهٔ انرژی جنبشی فوتوالکترون‌ها برابر است با:

$$K_{max} = \frac{۱}{۲}mv_{max}^۲ = \frac{۱}{۲}\times۱۰^{-۳۰}\times(۴\times۱۰^۵)^۲ = ۸\times۱۰^{-۲۰}J$$

www.biomaze.ir

$$\Rightarrow K_{max} = \frac{۸\times۱۰^{-۲۰}}{۱/۶\times۱۰^{-۱۹}} eV = ۰/۵ eV$$

گام دوم:

تابع کار فلز برابر است با:

$$W_{۰} = \frac{hc}{\lambda_{۰}} = \frac{۱۲۰۰}{۴۸۰} = ۲/۵ eV$$

گام سوم:

طول موج λ برابر است با:

$$K_{max} = \frac{hc}{\lambda} - W_{۰} \Rightarrow ۰/۵ = \frac{۱۲۰۰}{\lambda} - ۲/۵ \Rightarrow \lambda = ۴۰۰ nm = ۰/۴ \mu m$$

۷۶- کدام مقایسه بین دو ترکیب داده شده به درستی انجام شده است؟

A:

B:

۱) دمای ذوب: $B > A$

۲) درصد جرمی اکسیژن: $B > A$

۳) انحلال‌پذیری آنیون در آب: $A > B$

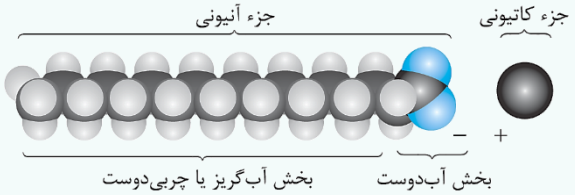
۴) تعداد اتم‌های هیدروژن در واحد فرمولی: $B > A$

پاسخ: گزینه ۲ (آسان ـ مفهومی ـ ۱۲۰۱)

پاسخ تشریحی:

ماده A، یک پاک‌کننده صابونی جامد بوده و در ساختار آن کاتیون سدیم وجود دارد؛ درحالی که ماده B، ساختاری مشابه به پاک‌کننده‌های صابونی مایع داشته و در ساختار آن، کاتیون پتاسیم یافت می‌شود. در ساختار هر دو ماده داده شده، ۲ اتم اکسیژن وجود دارد در حالی که جرم مولی ترکیب B در مقایسه با ترکیب دیگر خیلی کوچک‌تر است. بر این اساس، می‌توان گفت درصد جرمی اکسیژن در ساختار ترکیب B بیشتر از ترکیب دیگر خواهد بود.

صابون جامد، نمک سدیم اسیدهای چرب و صابون مایع، نمک پتاسیم یا آمونیوم اسیدهای چرب است. زنجیر هیدروکربنی صابون‌ها ناقطبی و آب‌گریز است و بنابراین در حلال‌های ناقطبی حل می‌شود. ساختار نوعی از صابون‌های جامد به صورت زیر است:



پاکیزگی و بهداشت همواره در زندگی جایگاه و اهمیت شایانی داشته است. انسان‌ها با الهام از طبیعت و شناخت مولکول‌ها و رفتار آنها، راهی برای زدودن آلودگی ها پیدا کردند. راهی که با استفاده از مواد شوینده هموارتر می‌شود. این مواد بر اساس خواص اسیدی و بازی عمل می‌کنند. یکی از دلایل اسکان انسان در کنار رود و رودخانه این بود که با دسترسی به آب، بدن خود را بشوید و ابزار، ظروف و محیط زندگی خود را تمیز نگاه دارد. با گذشت زمان، استفاده از صابون و توجه به نظافت و بهداشت در جوامع گسترش یافت و سبب شد تا میکروب‌ها، آلودگی‌ها و عوامل بیماری‌زا در محیط‌های فردی و همگانی کاهش یافته و سطح بهداشت جامعه افزایش یابد.

بررسی سایر گزینه‌ها:

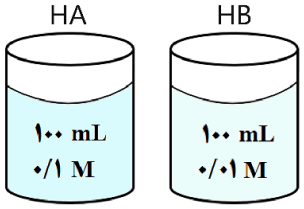
۱) در ساختار ترکیب B، کاتیون پتاسیم وجود داشته و بخش ناقطبی این ترکیب نیز در مقایسه با ترکیب دیگر بسیار کوچک‌تر است. بر این اساس، ترکیب B در شرایط اتاق حالت مایع داشته و دمای ذوب آن در مقایسه با ترکیب A کمتر خواهد بود.

۳) چون آنیون سازنده ترکیب B دارای دم هیدروکربنی(بخش ناقطبی) کوچک‌تری نسبت به آنیون سازنده ترکیب A است، پس گشتاور دوقطبی این آنیون به طور کلی بیشتر بوده و می‌توان گفت انحلال‌پذیری آنیون سازنده ترکیب B در آب بیشتر خواهد بود.

۴) هر دو ماده دارای دم هیدروکربنی سیرشده هستند، اما چون ترکیب B دارای دم هیدروکربنی بسیار کوتاه‌تری است، پس قطعا شمار اتم‌های هیدروژن در واحد فرمولی این ماده کمتر خواهد بود. توجه داریم که دم هیدروکربنی در ترکیب B بسیار کوچک بوده و به همین خاطر، از این ماده نمی‌توان به عنوان یک پاک‌کننده صابونی مناسب استفاده کرد.

گروه آموزشی ماز

۷۷- تصویر مقابل، نمایی از دو محلول اسیدی با pH برابر را نشان می‌دهد. در رابطه با این دو محلول، کدام عبارت نادرست است؟



۱) این دو محلول، از جمله محلول‌های الکترولیت بوده و رسانایی آن‌ها با هم برابر است.

۲) در شرایط آزمایش، ثابت یونش اسید HB در مقایسه با ثابت یونش HA بیشتر است.

۳) این دو محلول آبی، با جرم یکسانی از فلز منیزیم وارد واکنش شده و گاز H_2 تولید می‌کنند.

۴) در محلول اسید HA، همانند یک نمونه از محلول هیدروسیانیک اسید، ذرات اسید یونیده نشده وجود دارند.

پاسخ: گزینه ۳ (متوسط ـ مفهومی ـ ۱۲۰۱)

پاسخ تشریحی:

طبق فرض سوال، مقدار pH دو محلول با هم برابر است، پس می‌توان گفت غلظت یون هیدروژن در این دو محلول آبی با هم برابر است، درحالی که غلظت اولیه اسید در این دو محلول، متفاوت از یکدیگر است. همانطور که می‌دانیم، اگر یک تیغه فلزی از جنس منیزیم را وارد دو محلول اسیدی مختلف بکنیم،

www.biomaze.ir

اتم‌های فلزی با کل اسید موجود در این دو محلول واکنش می‌دهند و با توجه به متفاوت بودن غلظت اسید در این دو محلول، پس جرم فلز منیزیم مصرف شده در واکنش با محلول اسید HA بیشتر خواهد بود.

به نکات زیر درباره اسیدهای قوی و ضعیف توجه کنید:

نکتهٔ ۱: هیدرویدیک اسید($HI(aq)$)، هیدروبرمیک اسید($HBr(aq)$)، هیدروکلریک اسید($HCl(aq)$) و سولفوریک اسید($H_2SO_4(aq)$) اسیدهای قوی با ثابت یونش بسیار بزرگ هستند. بنابراین معادلهٔ یونش آن‌ها در آب یک‌طرفه است. این مواد بر اساس معادلات زیر در آب یونش پیدا می‌کنند:

$HI(aq) \longrightarrow H^+(aq) + I^-(aq)$ $\quad$ $HBr(aq) \longrightarrow H^+(aq) + Br^-(aq)$

$HCl(aq) \longrightarrow H^+(aq) + Cl^-(aq)$ $\quad$ $H_2SO_4(aq) \longrightarrow H^+(aq) + HSO_4^-(aq)$

نکتهٔ ۲: نیتریک اسید برخلاف نیتروواسید، یک اسید قوی با ثابت یونش بزرگ است و معادلهٔ یونش آن در آب یک‌طرفه است:

$HNO_3(aq) \longrightarrow H^+(aq) + NO_3^-(aq)$

نکتهٔ ۳: هیدروفلوئوریک اسید($HF(aq)$)، نیتروواسید($HNO_2(aq)$)، فورمیک اسید($HCOOH(aq)$)، استیک اسید($CH_3COOH(aq)$)، کربنیک اسید($H_2CO_3(aq)$) و هیدروسیانیک اسید($HCN(aq)$)، اسیدهای ضعیف با ثابت یونش کوچک هستند و فرایند یونش آن‌ها در آب یک واکنش تعادلی است. این مواد بر اساس معادلات زیر در آب یونش پیدا می‌کنند:

$HF(aq) \leftrightharpoons H^+(aq) + F^-(aq)$ $\quad$ $HNO_2(aq) \leftrightharpoons H^+(aq) + NO_2^-(aq)$

$HCOOH(aq) \leftrightharpoons H^+(aq) + HCOO^-(aq)$ $\quad$ $CH_3COOH(aq) \leftrightharpoons H^+(aq) + CH_3COO^-(aq)$

$H_2CO_3(aq) \leftrightharpoons H^+(aq) + HCO_3^-(aq)$ $\quad$ $HCN(aq) \leftrightharpoons H^+(aq) + CN^-(aq)$

مقایسهٔ مقابل را به خاطر بسپارید:

قدرت اسیدی (K_a) : $HF > HNO_2 > HCOOH > CH_3COOH > H_2CO_3 > HCN$

نکتهٔ ۴: در شرایط یکسان، هر چه قدرت اسیدی(ثابت یونش) یک اسید بزرگ‌تر باشد، غلظت مولی یون هیدرونیوم در محلول حاصل از آن اسید بیشتر و در نتیجه غلظت مولی یون هیدروکسید در آن محلول کمتر است. به علاوه در محلول اسید با ثابت یونش بزرگ‌تر، غلظت مولی یون‌ها و در نتیجه رسانایی الکتریکی محلول نیز بیشتر خواهد بود.

بررسی سایر گزینه‌ها:

۱) محلول‌های اسیدی و بازی، رسانای جریان الکتریسیته بوده و از جمله محلول‌های الکترولیت به شمار می‌روند. چون مقدار pH دو محلول با هم برابر است، پس می‌توان گفت مجموع غلظت یون‌ها در این دو محلول آبی با هم برابر است و بر این اساس، رسانایی الکتریکی این دو محلول نیز با یکدیگر برابر است.

۲) با اینکه غلظت اسید HB کمتر است، اما مقدار pH دو محلول با هم برابر شده است، پس می‌توان گفت در شرایط آزمایش درجه یونش اسید HB بیشتر بوده و این اسید قدرت اسیدی بیشتر و ثابت یونش بالاتری دارد.

۴) در رابطه با قوی و یا ضعیف بودن اسید HB نمی‌توان اظهار نظر کرد اما چون مقدار pH دو محلول با هم برابر است، پس قطعا اسید HA از جمله اسیدهای ضعیف بوده، به صورت جزئی در محلول خود یونیده می‌شود و در محلول آن، مقداری از مولکول‌های اسید یونیده نشده یافت می‌شود. هیدروسیانیک اسید(HCN) نیز از جمله اسیدهای ضعیف بوده و در محلول آن، مقداری از مولکول‌های اسید یونیده نشده یافت می‌شود.

گروه آموزشی ماز

۷۸- چه تعداد از عبارت‌های زیر درست هستند؟

آ: شیشه‌پاک‌کن‌ها دارای $pH > 7$ بوده و برای ساخت آن‌ها، از محلول آبی آمونیاک استفاده می‌شود.

ب: هگزان، نوعی هیدروکربن بوده و برخلاف آب، حلال مناسبی برای پاک‌کردن اوره به شمار می‌رود.

پ: مخلوط آب، روغن و صابون، از جمله مخلوط‌های پایدار بوده و همانند شیر، نوعی کلوئید است.

ت: از واکنش پاک‌کننده‌ای با فرمول $C_{10}H_{21}C_6H_4SO_3Na$ با یون کلسیم، رسوب ایجاد می‌شود.

۱) ۱ $\quad$ ۲) ۲ $\quad$ ۳) ۳ $\quad$ ۴) ۴

پاسخ: گزینه ۲ $\quad$ (آسان ـ مفهومی و حفظی ـ ۱۲۰۱)

پاسخ تشریحی:

عبارت‌های (آ) و (پ) درست هستند.

بررسی موارد:

آ: بازها کاربردهای گسترده‌ای در زندگی روزانه دارند که از جمله آنها می‌توان به محلول شیشه پاک‌کن(محلول آبی آمونیاک در آب) و لوله بازکن(محلول آبی سدیم هیدروکسید در آب که نوعی پاک‌کننده خورنده قوی به شمار می‌رود) اشاره کرد. توجه داریم که در محلول‌های بازی، غلظت یون هیدروکسید بیشتر از یون هیدرونیوم است.

ب: اوره، از مولکول‌های قطبی تشکیل شده و از جمله مواد محلول در آب به شمار می‌رود. چون اوره دارای اتم‌های هیدروژن متصل به نیتروژن است، بین مولکول‌های این ماده امکان برقرار شدن پیوند هیدروژنی وجود دارد.

www.biomaze.ir

اطلاعات مربوط به اوره، به صورت زیر است:

نام ماده	فرمول شیمیایی	ساختار	نوع ماده	حلال مناسب
اوره	$CO(NH_2)_2$	$O=C(NH_2)(NH_2)$	مولکول قطبی	حلال قطبی (آب)

توجه داریم که هگزان، نوعی ترکیب ناقطبی بوده و مواد قطبی مثل اوره و اتیلن‌گلیکول را در خود حل نمی‌کند.

پ: شیر، سس مایونز، مخلوطی از آب و روغن و صابون، ژله و ...، انواعی از کلوئیدها به شمار می‌روند. توجه داریم که کلوئیدها مخلوط‌هایی هستند که پایدار بوده و به مرور زمان، ته‌نشین نمی‌شوند. چون این مخلوط‌ها حاوی توده‌های مولکولی هستند، مسیر عبور نور از درون کلوئیدها مشخص است. جدول زیر، ویژگی‌های کلوئیدها را نشان می‌دهد:

ویژگی	مخلوط ناهمگن (سوسپانسیون)	کلوئید	مخلوط همگن (محلول)
عبور نور	نور را پخش می‌کند.	نور را پخش می‌کند.	نور را عبور می‌دهد.
همگن‌بودن	ناهمگن است.	ناهمگن است.	همگن است.
پایداری	ناپایدار است.	پایدار است.	پایدار است.
نوع ذره	ذره‌ها و قطعات مجزا	مولکول‌های بزرگ یا توده‌های مولکولی	یون‌ها یا مولکول‌ها
مثال‌ها	سالاد ـ مخلوط آب و روغن ـ شربت معده	مخلوط آب و صابون و روغن ـ سرامیک‌ها ـ انواع رنگ‌ها ـ چسب‌ها ـ شیر ـ ژله ـ مایونز	محلول آب‌نمک ـ محلول مس (II) سولفات در آب

همانطور که مشخص است، برخی از رفتارهای کلوئیدها مشابه به محلول‌ها و برخی از رفتارهای آن‌ها نیز مشابه به سوسپانسیون‌ها است. توجه داریم که کلوئیدها در دسته مخلوط‌های ناهمگن قرار می‌گیرند.

ت: فرمول شیمیایی داده شده، مربوط به نوعی پاک‌کننده غیرصابونی است. به طور کلی، پاک‌کننده‌های غیرصابونی با کاتیون‌های منیزیم و کلسیم وارد واکنش نمی‌شوند. این در حالی است که مولکول‌های صابون، براساس معادله‌های زیر با کاتیون‌های منیزیم و کلسیم موجود در آب‌های سخت واکنش می‌دهند:

واکنش صابون با یون کلسیم: $2RCOONa(aq) + Ca^{2+}(aq) \rightarrow (RCOO)_2Ca(s) + 2Na^+(aq)$

واکنش صابون با یون منیزیم: $2RCOONa(aq) + Mg^{2+}(aq) \rightarrow (RCOO)_2Mg(s) + 2Na^+(aq)$

رسوب‌های تولید شده در این واکنش‌ها، سفید رنگ بوده و رد آن‌ها بر روی لباس‌ها باقی می‌ماند.

نقش پاک‌کنندگی صابون باعث شد تا کاربرد آن از پاکیزگی و تأمین بهداشت فردی و محیط خانه، به مراکز صنعتی، بیمارستانی و اداری نیز گسترش پیدا کند. این روند، سبب رشد چشمگیر صابون‌سازی و تبدیل آن به یک صنعت بزرگ در جهان شد. این صنعت، نقش چشمگیری در کاهش بیماری گوناگون و افزایش سطح بهداشت در جهان داشته است. در این زمان، عوامل زیر، چون سدی بر سر راه صنعت صابون‌سازی قرار گرفتند:

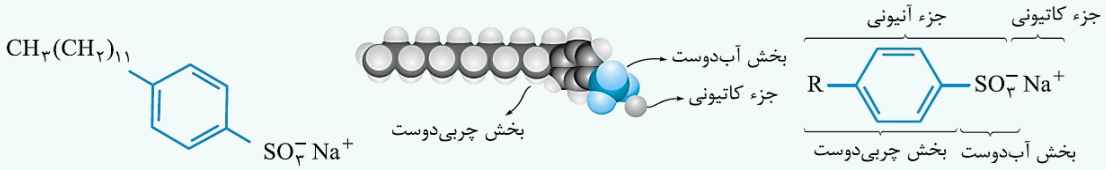
۱- با افزایش جمعیت جهان، مصرف صابون نیز افزایش یافت.

۲- برای تولید صابون در مقیاس انبوه، به میزان زیادی چربی به عنوان مواد اولیه نیاز بود و تأمین این میزان چربی، به یک چالش تبدیل شد.

۳- تأمین صابون مورد نیاز جهان به روش‌های سنتی تقریباً ناممکن بود.

۴- پاک‌کننده‌های صابونی در همه شرایط به خوبی عمل نمی‌کردند و استفاده از آن‌ها در برخی از موقعیت‌ها مثل سفرهای دریایی و صنایعی که از آب شور استفاده می‌کردند، پاسخگوی نیاز انسان نبود.

نگرانی‌هایی از این دست، سبب شد تا شیمی‌دان‌ها برای شناسایی و تولید دیگر پاک‌کننده‌ها ترغیب شوند. شیمی‌دان‌ها به دنبال موادی بودند که علاوه بر قدرت پاک‌کنندگی بالا، بتوان آن‌ها را به میزان انبوه و با قیمت مناسب تولید کرد. با توجه به رابطه میان ساختار و رفتار یک ماده، شیمی‌دان‌ها به دنبال موادی بودند که همانند صابون‌ها، ساختاری دوگانه‌دوست (هم چربی‌دوست و هم آب‌دوست) داشته باشد. سرانجام آن‌ها توانستند با استفاده از بنزن و دیگر مواد اولیه تولید شده در صنایع پتروشیمی، پاک‌کننده‌های غیرصابونی را بسازند. پاک‌کننده‌ای با فرمول $RC_6H_4SO_3Na$، یک پاک‌کنندهٔ غیرصابونی است. ساختار این پاک‌کننده‌ها به صورت زیر است:



پاک‌کننده‌های غیرصابونی، از مواد پتروشیمیایی طی واکنش‌های پیچیده در صنعت تولید می شود. این مواد قدرت پاک‌کنندگی بیشتری نسبت به صابون دارند و در آب‌های سخت نیز خاصیت پاک‌کنندگی خود را حفظ می‌کنند، زیرا با یون‌های موجود در این آب‌ها رسوب نمی‌دهند.

گروه آموزشی ماز

۷۹- اگر به ۴۰۰ میلی‌لیتر آب سخت با چگالی $1/2\ g.mL^{-1}$ که دارای یون‌های Ca^{2+} و Mg^{2+} با غلظت $2400ppm$ و $1800ppm$ است، مقدار کافی از صابون $C_{16}H_{33}COONa$ را اضافه کنیم، نسبت جرم رسوب نمک منیزیم به جرم رسوب نمک کلسیم به تقریب چقدر می‌شود؟

$(H = 1 : g.mol^{-1}$ و $C = 12$ و $O = 16$ و $Mg = 24$ و $Ca = 40)$

۱) ۰/۶۱ ۲) ۰/۸۲ ۳) ۱/۲۱ ۴) ۱/۶۲

www.biomaze.ir

پاسخ: گزینه ۳ (سخت ـ مساله ـ ۱۲۰۱)

پاسخ تشریحی:

ابتدا جرم آب سخت را بدست می‌آوریم:

$$\text{جرم آب سخت} = \text{حجم آب سخت} \times \text{چگالی آب سخت} = ۴۰۰\ mL \times ۱/۲\ g.mL^{-۱} = ۴۸۰\ g$$

در قدم بعدی جرم رسوب هر یک از نمک‌های منیزیم و کلسیم را به دست می‌آوریم. معادلهٔ واکنش انجام شده با یون منیزیم به صورت زیر است:

$$۲C_{۱۶}H_{۳۳}COONa + Mg^{۲+} \longrightarrow (C_{۱۶}H_{۳۳}COO)_۲Mg + ۲Na^+$$

بنابراین، داریم:

$$?\ g\ (C_{۱۶}H_{۳۳}COO)_۲Mg = ۴۸۰\ g\ \text{آب سخت} \times \frac{۱۸۰۰\ g\ Mg^{۲+}}{۱۰^۶\ g\ \text{آب سخت}} \times \frac{۱\ mol\ Mg^{۲+}}{۲۴\ g\ Mg^{۲+}} \times \frac{۱\ mol\ (C_{۱۶}H_{۳۳}COO)_۲Mg}{۱\ mol\ Mg^{۲+}}$$

$$\times \frac{۵۶۲\ g\ (C_{۱۶}H_{۳۳}COO)_۲Mg}{۱\ mol\ (C_{۱۶}H_{۳۳}COO)_۲Mg} = ۲۰/۲۳\ g$$

معادلهٔ واکنش انجام شده با یون کلسیم به صورت زیر است:

$$۲C_{۱۶}H_{۳۳}COONa + Ca^{۲+} \longrightarrow (C_{۱۶}H_{۳۳}COO)_۲Ca + ۲Na^+$$

بنابراین، داریم:

$$?\ g\ (C_{۱۶}H_{۳۳}COO)_۲Ca\ = ۴۸۰\ g\ \text{آب سخت} \times \frac{۲۴۰۰\ g\ Ca^{۲+}}{۱۰^۶\ g\ \text{آب سخت}} \times \frac{۱\ mol\ Ca^{۲+}}{۴۰\ g\ Ca^{۲+}} \times \frac{۱\ mol\ (C_{۱۶}H_{۳۳}COO)_۲Ca}{۱\ mol\ Ca^{۲+}}$$

$$\times \frac{۵۷۸\ g\ (C_{۱۶}H_{۳۳}COO)_۲Ca}{۱\ mol\ (C_{۱۶}H_{۳۳}COO)_۲Ca} = ۱۶/۶۴\ g$$

در نهایت نسبت خواسته شده را بدست می‌آوریم:

$$\frac{\text{جرم رسوب نمک منیزیم}}{\text{جرم رسوب نمک کلسیم}} = \frac{۲۰/۲۳۲}{۱۶/۶۴۶۴} \simeq ۱/۲۱$$

گروه آموزشی ماز

۸۰- نمونه‌ای از گاز هیدروژن سیانید، دارای ۴/۲ گرم اتم کربن در ساختار خود است. این نمونه گازی را در مقداری آب حل کرده و حجم محلول را با استفاده از آب خالص به ۷ لیتر می‌رسانیم. اگر pH محلول حاصل از این فرایند برابر با ۴ باشد، درصد یونش هیدروسیانیک اسید در محلول مورد نظر برابر با چند درصد بوده است؟ ($C = ۱۲\ g.mol^{-۱}$)

۱) ۲ ۲) ۰/۲ ۳) ۵ ۴) ۰/۵

پاسخ: گزینه ۲ (متوسط ـ مساله ـ ۱۲۰۱)

پاسخ تشریحی:

هیدروسیانیک اسید، از جمله اسیدهای ضعیف بوده و بر اساس معادله زیر در آب یونش پیدا می‌کند:

$$HCN(aq) \rightleftharpoons CN^-(aq) + H^+(aq)$$

در قدم اول، شمار مول‌های هیدروسیانیک اسید را محاسبه کرده و غلظت مولی این ماده را در محلول نهایی بدست می‌آوریم.

$$?\ mol\ HCN = ۴/۲\ g\ C \times \frac{۱\ mol\ C}{۱۲\ g\ C} \times \frac{۱\ mol\ HCN}{۱\ mol\ C} = ۰/۳۵\ mol$$

$$[HCN] = \frac{\text{مول } HCN}{\text{لیتر محلول}} = \frac{۰/۳۵\ mol\ HCN}{\text{محلول } ۷\ L} = ۰/۰۵\ mol.L^{-۱}$$

در قدم بعد، با توجه به مقدار pH محلول، غلظت یون هیدروژن را در محلول بدست آورده و پس از آن، درصد یونش اسید مورد نظر(مقدار درصد α) را محاسبه می‌کنیم. در این رابطه، داریم:

$$[H^+] = ۱۰^{-pH} = ۱۰^{-۴}\ mol.L^{-۱}$$

$$[H^+] = [HCN] \times \alpha = [HCN] \times \frac{\text{درصد } \alpha}{۱۰۰} \Longrightarrow ۱۰^{-۴}\ mol.L^{-۱} = ۰/۰۵ \times \frac{\text{درصد } \alpha}{۱۰۰} \Rightarrow \text{درصد } \alpha = ۰/۲$$

توجه داریم که در محلول‌های اسیدی، درصد یونش معادل با ۱۰۰ برابر درجه یونش خواهد بود.

گروه آموزشی ماز

۸۱- در هنگام شست‌وشوی پارچه با صابون، چند مورد از موارد زیر، باعث افزایش درصد لکه‌های باقیمانده روی پارچه می‌شود؟

- کاهش دمای آب
- افزودن آنزیم به صابون
- افزودن ماده شیمیایی کلردار به صابون
- استفاده از پارچه نخی به جای پارچه پلی‌استری
- افزودن محلول منیزیم کلرید به ظرف شست‌وشو

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

پاسخ: گزینه ۲ (آسان ـ مفهومی ـ ۱۲۰۱)

پاسخ تشریحی:

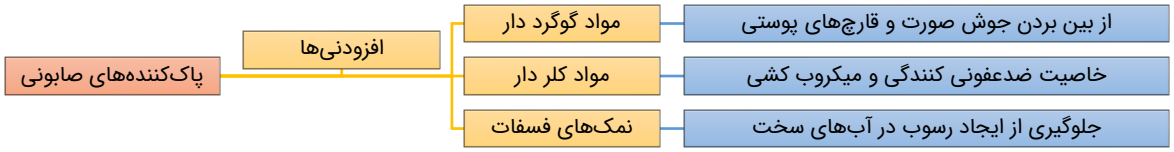
صابون‌های مختلف، همه لکه‌های موجود بر روی پارچه‌ها را به یک اندازه از بین نمی‌برند. در واقع، هر چه‌قدر که یک پاک‌کننده صابونی بتواند مقدار بیشتری از آلاینده‌ها و چربی‌های روی لباس را بزداید، قدرت پاک‌کنندگی بیشتری دارد. قدرت پاک‌کنندگی یک صابون، به عوامل مختلفی از جمله نوع پارچه، دما، نوع آب و مقدار صابون بستگی دارد. دو مورد از موارد داده شده، باعث کاهش قدرت پاک‌کنندگی صابون و به دنبال آن، افزایش مقدار درصد لکهٔ باقیماندهٔ چربی روی پارچه می‌شود.

بررسی موارد:

مورد اول: با افزایش دمای آب، ذرات چربی موجود بر روی سطح پارچه سست شده و بر این اساس، درصد لکهٔ باقی‌ماندهٔ روی پارچه کم‌تر می‌شود، پس می‌توان گفت با کاهش دمای آب، درصد لکهٔ باقی‌ماندهٔ روی پارچه بیشتر می‌شود.

مورد دوم: با افزودن آنزیم به صابون، ذرات چربی به مولکول‌های کوچک‌تر شکسته شده و بر این اساس، قدرت پاک‌کنندگی افزایش یافته و درصد لکهٔ باقیماندهٔ روی پارچه کمتر می‌شود.

مورد سوم: ماده شیمیایی کلردار را به منظور افزایش خاصیت ضدعفونی‌کنندگی و میکروب‌کشی به صابون‌ها اضافه می‌کنند. این مواد تاثیری بر قدرت پاک‌کنندگی صابون و درصد لکه‌های باقیمانده روی پارچه ندارند. نمودار زیر، نقش افزودنی‌های مختلف را در پاک‌کننده‌های صابونی نشان می‌دهد:

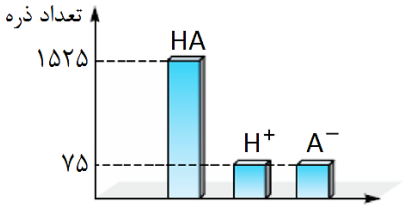


مورد چهارم: صابون لکهٔ چربی را از روی پارچهٔ نخی بهتر از پارچهٔ پلی‌استری پاک می‌کند؛ زیرا میزان چسبندگی ذرات سازنده چربی به الیاف سلولزی موجود در پارچهٔ نخی کمتر از الیاف سازنده پارچهٔ پلی‌استری است.

مورد پنجم: یون منیزیم با مولکول‌های صابون واکنش داده و تولید لکه‌های سفید رنگ می‌کند. وجود این یون در ظرف شست‌وشو، با کاهش مقدار صابون موجود در ظرف مورد نظر، میزان پاک‌کنندگی لکه‌های چربی را کاهش می‌دهد.

گروه آموزشی ماز

۸۲- با توجه به نمودار زیر که فراوانی نسبی ذرات اسید HA و یون‌های H^+ و A^- را در محلول ۰/۳۲ مولار این اسید پس از برقراری تعادل نشان می‌دهد، ثابت یونش اسید HA بر حسب مول بر لیتر به تقریب کدام است؟



۱) ۷×۱۰^{-۴}
۲) $۲/۱\times۱۰^{-۳}$
۳) ۷×۱۰^{-۳}
۴) $۲/۱\times۱۰^{-۲}$

پاسخ: گزینه ۱ (آسان ـ مساله ـ ۱۲۰۱)

پاسخ تشریحی:

برای محاسبه درجه یونش اسید مورد نظر از رابطه زیر استفاده می‌کنیم:

$$\text{درجه یونش} = \frac{\text{تعداد ذرات یونیده شده}}{\text{تعداد کل ذرات}} = \frac{\text{تعداد ذرات یونیده شده}}{\text{تعداد ذرات یونیده نشده} + \text{تعداد ذرات یونیده شده}}$$

از آنجا که صورت سؤال ثابت یونش را به طور تقریبی خواسته، از رابطهٔ $K_a \simeq M\alpha^۲$ استفاده می‌کنیم. بر این اساس، داریم:

$$K_a \simeq M\alpha^۲ = ۰/۳۲ \times (\frac{۷۵}{۱۵۲۵ + ۷۵})^۲ = ۰/۳۲ \times (\frac{۳}{۶۴})^۲ = \frac{۹}{۱۲۸۰۰} \simeq ۷ \times ۱۰^{-۴} mol.L^{-۱}$$

www.biomaze.ir

توجه داریم که اگر مقدار درجهٔ یونش کمتر از ۰/۰۵ باشد یا ثابت یونش اسید کمتر از 10^{-5} مول بر لیتر باشد و یا اینکه در صورت سؤال طراح ثابت یونش را به تقریب خواسته باشد، در حل سوالات کنکور می‌توان مقدار ثابت یونش را از رابطهٔ $K_a \simeq M\alpha^2$ به دست آورد. این در حالی است که در حل سوالات امتحان نهایی، حتما باید از رابطه اصلی مربوط به محاسبه ثابت یونش اسیدها استفاده کنیم و حق استفاده از سایر روابط را نداریم.

در رابطه با اسیدهای قوی و ضعیف، داریم:

اسیدهای قوی: بر اثر حل شدن در آب، تقریباً به طور کامل یونش می یابند؛ به همین دلیل غلظت هر یک از یون ها در محلول اسیدهای قوی تک‌پروتون‌دار، با غلظت اولیهٔ اسید برابر است و محلول اسیدهای قوی را می توان محلولی شامل یون های آبپوشیده دانست. از آن جا که اسیدهای قوی در آب تقریباً به طور کامل یونش می یابند، جزء الکترولیت‌های قوی به شمار می‌روند.

اسیدهای ضعیف: بر اثر حل شدن در آب به طور جزئی یونش می یابند؛ یعنی بیشتر مولکول های اسید در محلول باقی می مانند و فقط تعداد کمی از آن‌ها به یون تبدیل می شوند. بنابراین در محلول اسیدهای ضعیف، علاوه بر یونهای آبپوشیده، مولکول های اسید نیز یافت می شوند. حواستون باشه که اسیدهای ضعیف، جزء الکترولیت‌های ضعیف هستند و رسانای ضعیف جریان برق به شمار می‌روند.

گروه آموزشی ماز

۸۳- کدام‌یک از عبارت‌های داده شده نادرست است؟

۱) بین ذرات چربی نیروی وان‌درواالسی برقرار بوده و در ذرات سازنده این مواد، حداقل یک اتم C متصل به دو اتم O وجود دارد.
۲) با ریختن مقداری صابون در روغن، ذرات صابون از سمت سر آب‌گریز خود به طرف ذرات روغن جهت‌گیری خواهند کرد.
۳) مولکول‌های عسل، برخلاف مولکول‌های سازنده اوره، می‌توانند با مولکول‌های آب پیوند هیدروژنی برقرار کنند.
۴) سفیدکننده‌ها افزون بر ایجاد برهم‌کنش با ذرات سازنده آلاینده‌ها، با این مواد واکنش شیمیایی نیز می‌دهند.

پاسخ: گزینه ۳ (متوسط ـ مفهومی ـ ۱۲۰۱)

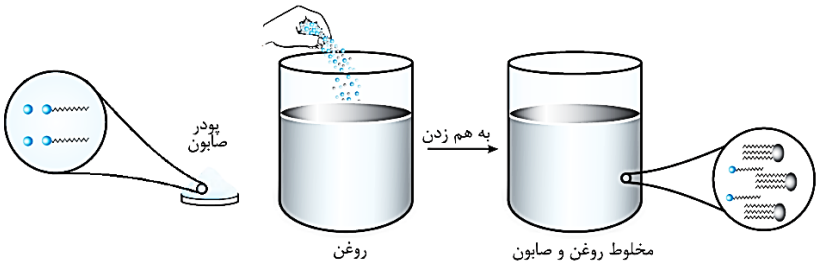
پاسخ تشریحی:

در ساختار مولکول اوره، چهار اتم هیدروژن که به اتم‌های نیتروژن متصل هستند وجود دارد، پس مولکول‌های این ماده توانایی تشکیل پیوندهای هیدروژنی با سایر مولکول‌ها را دارند. توجه داریم که عسل نیز حاوی مولکول‌های قطبی است که در ساختار خود شمار قابل توجهی گروه هیدروکسیل(گروه $-OH$) دارند. در ساختار گروه عاملی هیدروکسیل نیز یک اتم هیدروژن که به اتم اکسیژن متصل شده‌است وجود دارد، پس مولکول‌های این ماده نیز توانایی تشکیل پیوندهای هیدروژنی با مولکول‌های آب را دارند.

بررسی سایر گزینه‌ها:

۱) چربی‌ها مخلوطی از اسیدهای چرب و استرهای بلند زنجیر هستند که بخش ناقطبی آن‌ها بر بخش قطبی‌شان غلبه دارد و در نتیجه نیروی بین مولکولی غالب در آن‌ها از نوع واندروالسی است. از طرفی در ساختار اسیدهای چرب و استرهای بلند زنجیر حداقل یک اتم کربن(کربن گروه کربوکسیل و یا گروه استری) وجود دارد که به دو اتم اکسیژن متصل است.

۲) تصویر زیر، مخلوطی از آب و صابون را نشان می‌دهد:



دم هیدروکربنی ذرات صابون، بخش آب‌گریز(چربی‌دوست) این ماده را تشکیل می‌دهند. با ریختن صابون در روغن، دم هیدروکربنی ذرات صابون به طرف بخش ناقطبی مولکول‌های روغن جهت‌گیری کرده و در این ماده حل می‌شوند.

۴) موادی مانند هیدروکلریک اسید(جوهرنمک)، سدیم هیدروکسید(محلول سود) و سفیدکننده‌ها از جمله پاک‌کننده‌های خورنده هستند. این پاک‌کننده‌ها از نظر شیمیایی فعال بوده و خاصیت خورندگی نیز دارند و به همین خاطر، نباید با پوست بدن تماس داشته باشند. این مواد افزون بر ایجاد برهم‌کنش با ذرات سازنده آلاینده‌ها، با این مواد واکنش شیمیایی نیز می‌دهند و آن‌ها را به مواد محلول در آب تبدیل می‌کنند.

گروه آموزشی ماز

www.biomaze.ir

۸۴- چه تعداد از عبارت‌های داده شده درست هستند؟

آ: با انحلال مقداری از پاک‌کننده‌های صابونی در آب خالص، غلظت یون هیدروژن در آب کاهش می‌یابد.

ب: رسانایی یونی هنگامی انجام می‌شود که یون‌های موجود در یک ماده بتوانند از نقطه‌ای به نقطه دیگر جابه‌جا شوند.

پ: سرکه، محلول آبی یک اسید ضعیف بوده و غلظت گونه‌های موجود در محلول این اسید، در شرایط معین ثابت است.

ت: باران اسیدی، همانند باران معمولی، حاوی ترکیب اسیدی است که توانایی تولید کردن بیش از یک یون هیدرونیوم را دارد.

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

پاسخ: گزینه ۴ (متوسط ـ مفهومی ـ ۱۲۰۱)

پاسخ تشریحی:

همه عبارت‌های داده شده درست هستند.

بررسی موارد:

آ: پاک‌کننده‌های صابونی، موادی با خاصیت بازی بوده و با انحلال آن‌ها در آب، غلظت یون هیدروکسید در محلول مورد نظر افزایش پیدا می‌کند. بین غلظت مولی یون‌ها در محلول‌های آبی، رابطه زیر برقرار است:

$$[H^+] \times [OH^-] = ۱۰^{-۱۴}$$

بر اساس این رابطه، با افزایش غلظت یون هیدروکسید در محلول، غلظت یون هیدروژن به همان نسبت کاهش پیدا می‌کند.

ب: می‌دانید که فلزها و گرافیت(مغز مداد)، رسانای جریان برق هستند. از آنجا که رسانایی این مواد به وسیله الکترون‌های موجود در آن‌ها انجام می‌شود، به آنها رسانای الکترونی می‌گویند. نوع دیگری از رسانایی نیز وجود دارد که به وسیله یون‌ها انجام می‌شود و به آن رسانای یونی می‌گویند. این رسانایی هنگامی انجام می‌شود که یون‌ها بتوانند از نقطه‌ای به نقطه دیگر جابه‌جا شوند، زیرا در این شرایط بارهای الکتریکی نیز جابه‌جا خواهند شد. محلول‌های اسیدی و بازی، محلول آبی انواع نمک‌ها و نمک‌های مذاب، از جمله رساناهای یونی هستند.

پ: سرکه، محلولی از استیک اسید(اتانوئیک اسید) در آب است. در محلول اسیدهای ضعیف افزون بر اندک یون‌های آب پوشیده، مولکول‌های اسید یونیده نشده نیز یافت می‌شوند. برای نمونه، در محلول سرکه شمار ناچیزی از یون های آب‌پوشیده(یون‌های استات و هیدروژن)، هم‌زمان با شمار زیادی از مولکول‌های استیک‌اسید یونیده نشده حضور دارند. یافته‌های تجربی نشان می‌دهند که در شرایط معین و پس از برقراری تعادل، غلظت همه گونه‌های موجود در محلول این اسید، همانند دیگر اسیدهای ضعیف ثابت است.

ت: باران اسیدی حاوی نیتریک‌اسید($HNO_۳$) و سولفوریک‌اسید است، در حالی که باران معمولی حاوی کربنیک‌اسید است. کربنیک اسید($H_۲CO_۳$)، همانند سولفوریک اسید($H_۲SO_۴$)، نوعی اسید چند پروتون‌دار بوده و توانایی آزاد کردن بیش از یک یون هیدرونیوم را دارد. ساختار لوویس ذرات کربنیک اسید به صورت زیر است:

همانطور که می‌دانیم، کربنیک اسید در مرحله اول یونش خود، به یون هیدروژن و یون هیدروژن کربنات($HCO_۳^-$) تبدیل شده و سپس در مرحله دوم یونش خود، به یون کربنات($CO_۳^{۲-}$) تبدیل می‌شود.

گروه آموزشی ماز

۸۵- در محلولی از باز BOH با $pH = ۱۳$، درصد یونش ذرات بازی برابر با ۲۰٪ است. ثابت یونش باز مورد نظر چقدر بوده و هر لیتر از این محلول، توسط چند لیتر محلول هیدروکلریک اسید با $pH = ۰$ به طور کامل خنثی می‌شود؟

۱) $۰/۵ - ۲/۵ \times ۱۰^{-۳}$ ۲) $۰/۵ - ۲/۵ \times ۱۰^{-۲}$

۳) $۰/۲ - ۲/۵ \times ۱۰^{-۳}$ ۴) $۰/۲ - ۲/۵ \times ۱۰^{-۲}$

پاسخ: گزینه ۲ (متوسط ـ مساله ـ ۱۲۰۱)

پاسخ تشریحی:

با توجه به pH محلول مورد نظر، غلظت یون هیدروکسید را در این محلول محاسبه می‌کنیم.

$$[OH^-] = ۱۰^{pH-۱۴} = ۱۰^{۱۳-۱۴} = ۱۰^{-۱}\ mol.L^{-۱}$$

در قدم بعد، غلظت این ماده بازی را در محلول مورد نظر محاسبه می‌کنیم.

$$[OH^-] = \text{غلظت} \times \text{درجه یونش} \Longrightarrow ۱۰^{-۱}\ mol.L^{-۱} = \text{غلظت} \times ۰/۲ \Longrightarrow \text{غلظت} = ۰/۵\ mol.L^{-۱}$$

چون درجه یونش این ماده بازی بیشتر از ۰/۰۵ است، با استفاده از رابطه زیر، مقدار ثابت یونش را محاسبه می‌کنیم.

www.biomaze.ir

$$K_b = \frac{\alpha^2 \times \text{غلظت}}{1-\alpha} \Longrightarrow K_b = \frac{(0/2)^2 \times 0/5}{1-0/2} \Longrightarrow K_b = 2/5 \times 10^{-2}$$

در قدم بعد، غلظت محلول هیدروکلریک اسید را محاسبه می‌کنیم.

$$[H^+] = 10^{-pH} = 10^{0} = 1\ mol.L^{-1} \xrightarrow{\alpha=1} [HCl] = 1\ mol.L^{-1}$$

یکی از رفتارهای جالب و پرکاربرد اسید و بازها، واکنش‌های شیمیایی است که بین این دو دسته از مواد انجام می‌شود. معادله واکنش خنثی شدن باز مورد نظر با محلول اسیدی به شرح زیر است:

$$BOH(aq) + HCl(aq) \rightarrow H_2O(l) + BCl(aq)$$

در قدم آخر، حجم محلول اسیدی مورد نیاز برای خنثی کردن محلول بازی را محاسبه می‌کنیم.

$$V_a M_a n_a = V_b M_b n_b \Longrightarrow V_a \times 1 \times 1 = 1 \times 0/5 \times 1 \Longrightarrow V_a = 0/5\ L$$

واکنش خنثی شدن، مبنایی برای کاربرد شوینده‌ها و پاک‌کننده‌ها است. برای نمونه فرض کنید که مسیر لوله‌ای با مخلوطی از اسیدهای چرب مسدود شده است. برای باز کردن این لوله باید از محلول غلیظ سدیم هیدروکسید استفاده کرد.

گروه آموزشی ماز

۸۶- در دمای اتاق، به ۴۰ میلی‌لیتر محلول نیتریک اسید با $pH = 1/3$، مقدار ۱۰ میلی‌لیتر محلول باریم هیدروکسید اضافه می‌کنیم. اگر محلول حاصل با ۷۳۰ میلی‌گرم گاز HCl به طور کامل خنثی شود، pH محلول قبل از افزودن هیدروژن کلرید و غلظت محلول باریم هیدروکسید اولیه بر حسب گرم بر لیتر به ترتیب کدام‌اند؟

($H = 1 : g.mol^{-1}$ و $N = 14$ و $O = 16$ و $Cl = 35/5$ و $Ba = 137$)

۱) ۱۳/۶ – ۱۸۸/۱
۲) ۱۳/۳ – ۱۸۸/۱
۳) ۱۳/۶ – ۲۰۵/۲
۴) ۱۳/۳ – ۲۰۵/۲

پاسخ: گزینه ۱ (سخت ـ مساله ـ ۱۴۰۱)

پاسخ تشریحی:

ابتدا غلظت یون OH^- را در محلول نهایی ایجاد شده، قبل از افزودن HCl محاسبه می‌کنیم. توجه داریم که غلظت OH^- موجود در محلول با غلظت H^+ تولید شده توسط HCl برابر است، پس داریم:

$$[OH^-] = \frac{\text{تعداد مول } OH^-}{\text{لیتر محلول}} = \frac{730\ mg\ HCl \times \frac{1\ g}{1000\ mg} \times \frac{1\ mol\ HCl}{36/5\ g\ HCl} \times \frac{1\ mol\ OH^-}{1\ mol\ HCl}}{\frac{40+10}{1000}} = 0/4\ mol.L^{-1}$$

$$\Longrightarrow [H^+] = \frac{10^{-14}}{[OH^-]} = \frac{10^{-14}}{0/4} = 2/5 \times 10^{-14} mol.L^{-1}$$

بنابراین pH محلول قبل از افزودن HCl برابر است با:

$$pH = -\log(5^2 \times 10^{-15}) = 15 - 2\log 5 = 15 - (2 \times 0/7) = 13/6$$

اما واکنش نیتریک اسید با باریم هیدروکسید به صورت زیر انجام می‌شود:

$$2HNO_3(aq) + Ba(OH)_2(aq) \longrightarrow Ba(NO_3)_2(aq) + 2H_2O(l)$$

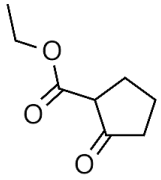
غلظت یون H^+ در محلول HNO_3 اولیه برابر با $5 \times 10^{-2} = 10^{0/7} \times 10^{-2} = 10^{-1/3}$ مول بر لیتر است که با افزودن محلول باریم هیدروکسید خنثی شده و سپس غلظت یون OH^- به $0/4\ mol.L^{-1}$ می‌رسد؛ بنابراین داریم:

$$[OH^-]_{\text{نهایی}} = \frac{n_1 \times M_1 \times V_1 - n_2 \times M_2 \times V_2}{V_1 + V_2} = \frac{2 \times M_1 \times 10 - 1 \times 0/05 \times 40}{10+40} = 0/4 \Longrightarrow 20M_1 - 2 = 20 \Longrightarrow M_1 = \frac{22}{20}$$
$$= 1/1\ mol.L^{-1}$$

پس در یک لیتر محلول باریم هیدروکسید، ۱/۱ مول از این ماده که معادل $1/1 \times 171 = 188/1$ گرم باریم هیدروکسید است، وجود دارد. به عبارت دیگر، غلظت محلول باریم هیدروکسید معادل با ۱۸۸/۱ گرم بر لیتر است.

گروه آموزشی ماز

۸۷- در ساختار ترکیب مقابل، چند نوع اتم کربن بر پایه عدد اکسایش متفاوت وجود دارد؟



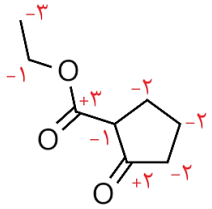
۱) ۴
۲) ۵
۳) ۶
۴) ۷

www.biomaze.ir

پاسخ: گزینه ۲ (آسان ـ مفهومی ـ ۱۴۰۲)

پاسخ تشریحی:

ساختار ترکیب داده شده به صورت زیر است:



همانطور که مشخص است، در ساختار این ترکیب ۵ نوع اتم کربن با اعداد اکسایش متفاوت وجود دارد. توجه کنید که در ساختار این ترکیب یک گروه عاملی استری و یک گروه عاملی کتونی وجود داشته و فرمول شیمیایی این ماده به صورت $C_8H_{12}O_4$ است.

گروه آموزشی ماز

۸۸- معادله نیم‌واکنش‌های کاهشی انجام شده در باتری‌های کادمیم-نیکل به صورت زیر است:

$$Cd(OH)_2(s) + e^- \rightarrow OH^-(aq) + Cd(s) \quad ; \quad E^\circ = -0/76V$$

$$NiO_2(s) + H_2O(l) + e^- \rightarrow Ni(OH)_2(s) + OH^-(aq) \quad ; \quad E^\circ = +0/49V$$

معادله نیم‌واکنش‌ها موازنه شود.

در رابطه با این باتری‌ها، کدام‌یک از مطالب زیر درست است؟ $(E^\circ(Mg^{2+}/Mg) = -2/37V)$

۱) پس از موازنه معادله این نیم‌واکنش‌ها، ضریب الکترون در معادله نیم‌واکنش آندی، ۲ برابر نیم‌واکنش کاتدی خواهد شد.

۲) با انجام واکنش در این نوع باتری، فلز کادمیم مصرف شده و در در قطب دیگر باتری، $Ni(OH)_2$ تولید می‌شود.

۳) اگر این باتری در مسیر مدار الکتریکی قرار بگیرد، الکترون‌ها از قطب مثبت آن به سمت قطب منفی می‌روند.

۴) مقدار نیروی الکتروموتوری این باتری، در مقایسه با سلول منیزیم-هیدروژن بیشتر است.

پاسخ: گزینه ۲ (متوسط ـ مفهومی ـ ۱۴۰۲)

پاسخ تشریحی:

از بین دو نیم‌واکنش داده شده، نیم‌واکنشی که E° بزرگ‌تری دارد، در سمت کاتد(قطب مثبت) باتری انجام شده و نیم‌واکنشی که E° کوچک‌تری دارد، در سمت آند(قطب منفی) باتری انجام می‌شود. بر این اساس، می‌توان گفت معادله نیم‌واکنش‌های انجام شده به صورت زیر است:

$$Cd(s) + 2OH^-(aq) \rightarrow Cd(OH)_2(s) + 2e^- \quad : \text{نیم‌واکنش آندی(اکسایش)}$$

$$NiO_2(s) + 2H_2O(l) + 2e^- \rightarrow Ni(OH)_2(s) + 2OH^-(aq) \quad : \text{نیم‌واکنش کاتدی(کاهش)}$$

با انجام واکنش در این باتری، فلز کادمیم در سمت آند مصرف شده و به هیدروکسید این فلز تبدیل می‌شود. در سمت کاتد، NiO_2 مصرف شده و هیدروکسید نیکل تولید می‌شود.

بررسی سایر گزینه‌ها:

۱) ضریب الکترون در معادله نیم‌واکنش‌های آندی و کاتدی یکسان بوده و برابر با ۲ است.

۲) باتری مورد نظر، نوعی سلول گالوانی به شمار می‌رود. بر این اساس، می‌توان گفت اگر این باتری در مسیر مدار الکتریکی قرار بگیرد، الکترون‌ها از قطب منفی(آند) آن به سمت قطب مثبت(کاتد) می‌روند.

۴) نیروی الکتروموتوری(emf) در یک سلول گالوانی، حداکثر اختلاف پتانسیلی است که یک سلول می‌تواند به وجود بیاورد. مقدار این اختلاف پتانسیل را با E° نیز نشان می‌دهند. برای پیداکردن مقدار emf یک سلول گالوانی، از روش‌های زیر می‌توان کمک گرفت:

✓ نیم‌سلول‌های سازنده سلول را به یکدیگر متصل کرده و مقدار emf را به کمک ولت‌سنج اندازه‌گیری می‌کنیم.

✓ ابتدا آند و کاتد سلول گالوانی موردنظر را پیدا کرده و پس از آن E° آند را از E° کاتد کم می‌کنیم.

مقدار emf برای سلول‌های گالوانی همواره مقداری مثبت است. چنان‌چه ولت‌سنج مقدار E° یک سلول را با عددی منفی نشان داد و یا این که پس از محاسبه emf سلول، یک عدد منفی به دست آوردید، فقط به این معناست که موقعیت آند و کاتد سلول را به اشتباه تشخیص داده و قطب‌های ناهم‌نام سلول گالوانی و ولت‌سنج را به یکدیگر وصل کرده‌اید. با توجه به توضیحات داده شده، مقدار emf باتری مورد نظر را محاسبه می‌کنیم:

$$emf = E^\circ(\text{کاتد}) - E^\circ(\text{آند}) = 0/49 - (-0/76) = 1/25\,V$$

در رابطه با سلول منیزیم-هیدروژن که در آن نیم سلول منیزیم معادل با آند است، نیز داریم:

$$emf = E^\circ(\text{کاتد}) - E^\circ(\text{آند}) = 0 - (-2/37) = 2/37\,V$$

www.biomaze.ir

مقدار نیروی الکتروموتوری این باتری، در مقایسه با سلول منیزیم-هیدروژن کمتر است.

گروه آموزشی ماز

۸۹- واکنش‌های الکتروشیمیایی زیر و تغییر دمای ایجاد شده در ظرف مربوط به هر واکنش را در نظر بگیرید:

$$\begin{cases} Sn(s) + Zn^{2+}(aq) \rightarrow & \Delta\theta = 0^{\circ}C \\ Mg(s) + Zn^{2+}(aq) \rightarrow & \Delta\theta = 8^{\circ}C \\ Al(s) + Zn^{2+}(aq) \rightarrow & \Delta\theta = 2^{\circ}C \end{cases}$$

با توجه به این داده‌ها، کاتیون حاصل از کدام فلز قدرت اکسندگی بیشتری دارد؟

۱) آلومینیم ۲) منیزیم ۳) روی ۴) قلع

پاسخ: گزینه ۴ (آسان ـ مفهومی ـ ۱۲۰۲)

پاسخ تشریحی:

از آنجا که تغییر دمای ایجاد شده در ظرف واکنش اول برابر صفر است، لذا واکنش اول انجام نمی‌شود و بر این اساس، می‌توان گفت قدرت کاهندگی فلز روی از فلز قلع بیشتر است. از طرف دیگر تغییرات دمایی ظرف‌های واکنش‌های دوم و سوم بزرگ‌تر از صفر است، پس در این دو ظرف یک واکنش شیمیایی گرماده در حال انجام شدن است. از آنجا که دمای ظرف واکنش دوم بیشتر افزایش پیدا کرده، می‌توان گفت که قدرت کاهندگی(تمایل به اکسید شدن) Mg از Al بیشتر است. با توجه به توضیحات داده شده، داریم:

قدرت کاهندگی فلزها : $Sn < Zn < Al < Mg$

مقایسه قدرت اکسندگی کاتیون حاصل از این فلزها، برعکس مقایسه فوق است. در این رابطه، داریم:

قدرت اکسندگی کاتیون حاصل از فلزها : $Sn^{2+} > Zn^{2+} > Al^{3+} > Mg^{2+}$

در برخی از واکنش‌های اکسایش-کاهش، به هنگام دادوستد الکترون بین گونه‌های اکسنده و کاهنده، مقداری انرژی نیز آزاد می‌شود. به عنوان مثال، در هنگام سوختن عناصر فلزی مثل سدیم و منیزیم، اتم‌های فلزی اکسایش پیدا کرده و الکترون‌های خود را به اتم‌های اکسیژن منتقل می‌کنند. همان‌طور که می‌دانیم، انجام‌شدن این واکنش‌ها با آزادشدن مقداری انرژی به صورت نور و گرما همراه است. علاوه بر واکنش سوختن عناصر فلزی، برخی دیگر از انواع واکنش‌های اکسایش-کاهش نیز با آزادشدن گرما همراه هستند. به عنوان مثال، واکنش یک تیغه فلزی با محلول فلزی که پتانسیل کاهشی بزرگ‌تری دارد، از جمله واکنش‌های اکسایش-کاهش گرماده است.

گروه آموزشی ماز

۹۰- اگر مدتی پس از شروع واکنش الکتروشیمیایی در سلول آلومینیم-مس، اختلاف جرم الکترود کاتد و الکترود آند به $7/38g$ برسد، در طول این مدت چند گرم از جرم الکترود آند کاسته شده است؟ (جرم الکترودهای استفاده شده در ابتدای واکنش یکسان بوده است.)

($Al = 27$ و $Cu = 64$: $g.mol^{-1}$)

۱) ۰/۸۱ ۲) ۱/۶۲ ۳) ۲/۸۸ ۴) ۵/۷۶

پاسخ: گزینه ۲ (متوسط ـ مساله ـ ۱۲۰۲)

پاسخ تشریحی:

در سلول گالوانی مورد نظر، آلومینیم در نقش آند بوده و مس در نقش کاتد است. ابتدا نیم‌واکنش‌های انجام شده را نوشته و واکنش کلی سلول را مشخص می‌کنیم. در این رابطه، داریم:

نیم واکنش آندی : $Al(s) \rightarrow Al^{3+}(aq) + 3e^- \xrightarrow{\text{طرفین ×۲}} 2Al(s) \rightarrow 2Al^{3+}(aq) + 6e^-$

نیم واکنش کاتدی : $Cu^{2+}(aq) + 2e^- \rightarrow Cu(s) \xrightarrow{\text{طرفین ×۳}} 3Cu^{2+}(aq) + 6e^- \rightarrow 3Cu(s)$

واکنش کلی سلول : $2Al(s) + 3Cu^{2+}(aq) \rightarrow 2Al^{3+}(aq) + 3Cu(s)$

با شروع واکنش از جرم الکترود آند کاسته شده و به جرم الکترود کاتد افزوده می‌شود، بنابراین در زمان موردنظر داریم:

اختلاف جرم الکترودها = جرم افزوده شده به الکترود کاتد − جرم کاهش یافته از الکترود آند $= 7/38g$

اگر در بازهٔ زمانی موردنظر $2x$ مول Al به صورت Al^{3+} وارد نیم سلول آندی شود، $54x$ گرم از جرم آند کاسته شده(این مقدار را با $-54x$ گرم مشخص می‌کنیم) و $192x$ گرم بر جرم کاتد مسی(این مقدار را با $+192x$ گرم مشخص می‌کنیم) افزوده می‌شود. بنابراین داریم:

$$\text{اختلاف جرم الکترودها} = 192x - (-54x) = 246x = 7/38g \rightarrow x = \frac{7/38}{246} = 0/03\ mol$$

www.biomaze.ir

بنابراین جرم مصرف شده از الکترود آند برابر است با:

$$?\,g\,Al = ۲ \times ۰/۰۳\,mol\,Al \times \frac{۲۷\,g\,Al}{۱\,mol\,Al} = ۱/۶۲\,g$$

گروه آموزشی ماز

۹۱- کدام موارد زیر، درباره عنصر موجود در خانواده هالوژن‌ها درست است؟

آ: اگر واکنش $D + A^- \rightarrow$ قابل انجام باشد، هالوژن A می‌تواند با ترکیب NaD واکنش دهد.

ب: مجموع اعداد کوانتومی $n + l$ الکترون‌های لایه ظرفیت چهارمین عضو این خانواده برابر ۴۰ است.

پ: اگر واکنش شیمیایی $D + A^- \rightarrow$ قابل انجام نباشد، E° هالوژن D به طور حتم از فلوئور کمتر(منفی‌تر) است.

ت: در واکنش یکی از عناصر این گروه با اکسیژن، اکسیدی تشکیل می‌شود که عدد اکسایش اتم مرکزی آن مثبت است.

۱) آ، ت ۲) ب، پ ۳) ب، پ، ت ۴) آ، پ، ت

پاسخ: گزینه ۳ (متوسط ـ مفهومی ـ ۱۲۰۲)

پاسخ تشریحی:

در گروه ۱۷ جدول دوره‌ای، عناصر فلوئور($_{۹}F$)، کلر($_{۱۷}Cl$)، برم($_{۳۵}Br$) و ید($_{۵۳}I$) قرار دارند. این عناصر به هالوژن‌ها معروف هستند. با افزایش عدد اتمی هالوژن‌ها، شعاع اتمی این عناصر افزایش یافته و به دنبال آن، واکنش‌پذیری این عناصر نافلزی نیز کمتر می‌شود. ترتیب واکنش‌پذیری عناصر موجود در گروه هفدهم به صورت زیر است:

$I < Br < Cl < F$: واکنش پذیری (تمایل به گرفتن الکترون)

آرایش الکترونی هالوژن‌ها به زیرلایهٔ $ns^۲np^۵$ ختم می‌شود. اتم‌های سازندهٔ این عناصر با گرفتن یک الکترون به آرایش الکترونی گاز نجیب بعد از خود رسیده و یون پایدار X^- را تولید می‌کنند. از میان هالوژن‌ها، فلوئور دارای بیشترین خاصیت نافلزی بوده و نسبت به سایر عناصر، الکترون‌ها را با قدرت بیشتری به سمت خود جذب می‌کند. موارد (ب) و (پ) و (ت) درست هستند.

بررسی موارد:

آ: اگر واکنش $D + A^- \rightarrow$ قابل انجام باشد، واکنش پذیری هالوژن D از A بیشتر است؛ پس می‌توان گفت این عنصر E° مثبت تری دارد. با توجه به توضیحات داده شده، واکنش $D^- + A \rightarrow$ که حین واکنش هالوژن A با NaD باید رخ دهد، انجام پذیر نیست.

ب: چهارمین عضو خانواده هالوژن‌ها، عنصر ید است. آرایش الکترونی لایه‌ی ظرفیت ید به صورت $۵s^۲۵p^۵$ است. مجموع عددهای کوانتومی $n + l$ الکترون‌های لایه ظرفیت ید برابر با ۴۰ است.

پ: اگر واکنش $D + A^- \rightarrow$ قابل انجام نباشد، می‌توان گفت واکنش پذیری هالوژن D از A کمتر است و این عنصر E° منفی‌تری دارد. از آنجایی که فلوئور واکنش پذیرترین هالوژن موجود در جدول دوره‌ای بوده و دارای مثبت ترین E° است، بنابراین D هرگز نمی تواند فلوئور باشد و هر هالوژن دیگری هم که باشد، E° آن منفی‌تر(کمتر) از فلوئور خواهد بود.

ت: واکنش هالوژن‌ها با اکسیژن، اکسیدهایی مانند $OF_۲$ ، $Cl_۲O$ ، $Br_۲O$ تشکیل می‌دهد. در $OF_۲$، برخلاف سایر فراورده‌ها، عدد اکسایش اتم مرکزی مثبت است(۲+)، زیرا فلوئور نسبت به اکسیژن تمایل بیشتری به جذب الکترون‌های پیوندی دارد.

گروه آموزشی ماز

۹۲- کدام‌یک از عبارت‌های داده شده نادرست است؟

۱) ساخت قوطی‌های محتوی مواد غذایی و لوازم آشپزی مقاوم در برابر خوردگی، در گرو بهره‌گیری از دانش الکتروشیمی است.

۲) در نیم‌واکنش تبدیل یون $MnO_۴^-$ به یون منگنز(II)، نماد e^- در سمت چپ قرار گرفته و ضریب آن برابر ۵ است.

۳) تولید انرژی الکتریکی پاک و ارزان، دستاوردی از الکتروشیمی است که در سایه فناوری‌های پیشرفته محقق می‌شود.

۴) گونه کاهنده مصرف شده در واکنش میان فلز روی و گاز $O_۲$، دارای ۱۰ الکترون با $l = ۳$ در هر اتم خود است.

پاسخ: گزینه ۴ (آسان ـ مفهومی ـ ۱۲۰۲)

پاسخ تشریحی:

معادله واکنش انجام شده به صورت $۲Zn(s) + O_۲(g) \rightarrow ۲ZnO(s)$ است. گونه کاهنده(گونه‌ای که اکسید شده و یک ماده دیگر را می‌کاهد) مصرف شده در این واکنش، معادل با فلز روی است. فلز روی دارای ۱۰ الکترون با $l = ۲$ در هر اتم خود بوده و هیچ الکترونی با $l = ۳$ ندارد.

www.biomaze.ir

بررسی سایر گزینه‌ها:

۱) ساخت لوله‌های فلزی انتقال آب، قوطی‌های محتوی مواد غذایی، لوازم آشپزی که در برابر خوردگی مقاوم بوده و مانع از آلوده شدن آب و مواد غذایی می‌شوند و همچنین کسب اطمینان از کیفیت تولید فراورده‌های دارویی، بهداشتی و غذایی، چهره‌ای از افزایش سطح رفاه و آسایش هستند که دستیابی به آن‌ها در گرو بهره‌گیری از دانش الکتروشیمی است.

۲) نیم‌واکنش تبدیل یون MnO_4^- به یون منگنز(II)، از نوع کاهش است، پس نماد الکترون در سمت چپ آن قرار می‌گیرد. طی این فرایند عدد اکسایش منگنز از ۷+ به ۲+ رسیده است، پس می‌توان گفت در این نیم‌واکنش ۵ الکترون مبادله شده است. بر این اساس، می‌توان گفت ضریب الکترون در نیم‌واکنش مورد نظر برابر ۵ است.

۳) آن‌چه که شیمی و الکتریسیته را به یکدیگر پیوند داده و علم الکتروشیمی را ایجاد می‌کند، الکترون است. به عبارتی، الکتروشیمی علم استفاده از انرژی الکتریکی برای ایجاد یک تغییر شیمیایی و یا تولید انرژی الکتریکی به کمک انجام واکنش‌های شیمیایی است. تولید انرژی پاک و ارزان، دستاوردی از دانش الکتروشیمی است که در سایه فناوری‌های پیشرفته موجب افزایش سطح رفاه و آسایش مردم جهان شده است.

رشد دانش و پیشرفت فناوری، موجب آسان‌ترشدن انجام فعالیت‌های فردی، اقتصادی و صنعتی شده و افزایش سطح آسایش و رفاه در جامعه را به دنبال داشته است. تأمین روشنایی، گرمایش و سرمایش آسان‌تر، حمل و نقل سریع‌تر و ایمن‌تر، درمان و کاهش اثرات نقص عضو و انتقال ایمن آب آشامیدنی از نقطه‌ای به نقطه دیگر، نمونه‌هایی از افزایش سطح رفاه و آسایش در جامعه را نشان می‌دهند. دو رکن اساسی در تحقق این فناوری‌ها، دستیابی به مواد مناسب و تأمین انرژی موردنیاز است.

گروه آموزشی ماز

۹۳- در یک سلول الکترولیتی که فرایند هال در آن انجام می‌شود، در شرایط استاندارد ۱۶۸ لیتر فراورده گازی در سمت آند تولید شده است. اگر جرم آلومینیم تولید شده در این فرایند با جرم یک نمونه ۲-بوتین برابر باشد، در ساختار ۲-بوتین چند اتم هیدروژن وجود خواهد داشت؟

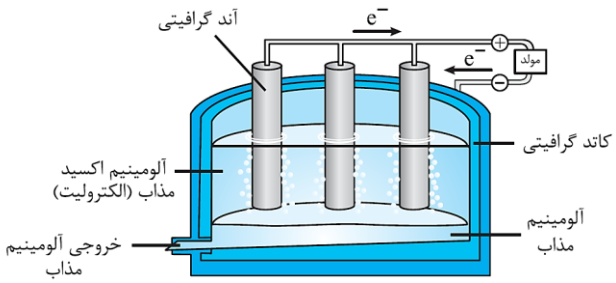
$(Al = ۲۷ \text{ و } O = ۱۶ \text{ و } C = ۱۲ \text{ و } H = ۱ : g.mol^{-۱})$

۱) $۳/۰۱\times۱۰^{۲۴}$ ۲) $۱/۲۰۴\times۱۰^{۲۵}$ ۳) $۹/۰۳\times۱۰^{۲۴}$ ۴) $۱/۸۰۶\times۱۰^{۲۵}$

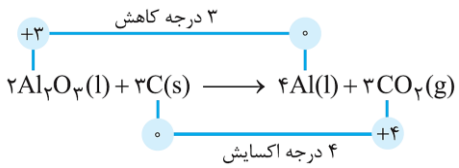
پاسخ: گزینه ۴ (متوسط ـ مساله ـ ۱۲۰۲)

پاسخ تشریحی:

تصویر زیر، نمایی از سلول استفاده شده برای انجام فرایند هال را نشان می‌دهد:



واکنش انجام شده در این سلول به صورت زیر است:



با توجه به معادله این واکنش، به ازای تولید ۴ مول آلومینیم و ۳ مول گاز کربن دی‌اکسید، ۱۲ مول الکترون در مدار خارجی مبادله شده است. بر این اساس، جرم آلومینیم و شمار مول کربن دی‌اکسید تولید شده را محاسبه می‌کنیم.

$$?\,g\,Al = ۱۶۸\,L\,CO_۲ \times \frac{۱\,mol\,CO_۲}{۲۲/۴\,L\,CO_۲} \times \frac{۴\,mol\,Al}{۳\,mol\,CO_۲} \times \frac{۲۷\,g\,Al}{۱\,mol\,Al} = ۲۷۰\,g$$

طی این فرایند، ۲۷۰ گرم فلز آلومینیم تولید شده است. بر این اساس، شمار اتم‌های هیدروژن موجود در ۲۷۰ گرم ۲-بوتین$(C_۴H_۶)$ را محاسبه می‌کنیم. در این رابطه، داریم:

$$?\,atom\,H = ۲۷۰\,g\,C_۴H_۶ \times \frac{۱\,mol\,C_۴H_۶}{۵۴\,g\,C_۴H_۶} \times \frac{۶\,mol\,H}{۱\,mol\,C_۴H_۶} \times \frac{۶/۰۲\times۱۰^{۲۳}\,atom\,H}{۱\,mol\,H} = ۱/۸۰۶\times۱۰^{۲۵}\,atom$$

گروه آموزشی ماز

www.biomaze.ir

۹۴- کدام‌یک از عبارت‌های داده شده نادرست است؟

۱) با موازنه معادله $Cr_2O_7^{2-} + H^+ + e^- \rightarrow H_2O + Cr^{3+}$، ضریب الکترون با تعداد اتم H در استون برابر می‌شود.

۲) در سلول نقره-هیدروژن، همانند سلول برقکافت آب، pH محلول موجود در اطراف آند به تدریج کاهش می‌یابد.

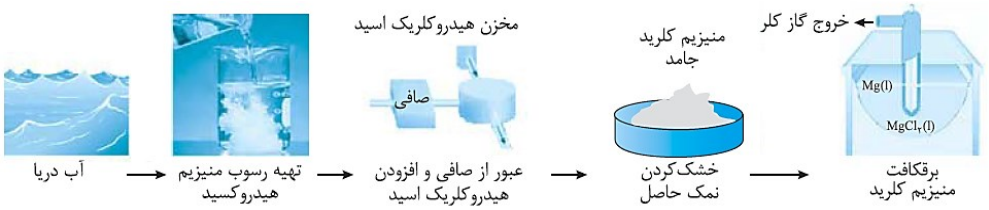
۳) پایداری فراورده‌های حاصل از برقکافت منیزیم کلرید، بیشتر از پایداری واکنش‌دهنده مصرف شده است.

۴) در سمت کاتد رایج‌ترین نوع سلول سوختی، گاز O_2 مصرف شده و مولکول‌های H_2O تولید می‌شوند.

پاسخ: گزینه ۳ (متوسط ـ مفهومی ـ ۱۲۰۲)

پاسخ تشریحی:

فرایند برقکافت منیزیم کلرید مذاب($MgCl_2$)، در یک سلول الکترولیتی انجام شده و برای انجام شدن این واکنش، مقداری انرژی نیز مصرف می‌شود. با توجه به مصرف شدن انرژی برای این فرایند، می‌توان گفت پایداری فراورده‌های تولید شده طی برقکافت منیزیم کلرید کمتر از پایداری واکنش‌دهنده مصرف شده در آن است. فرایند تولید فلز منیزیم از آب دریا به صورت زیر است:



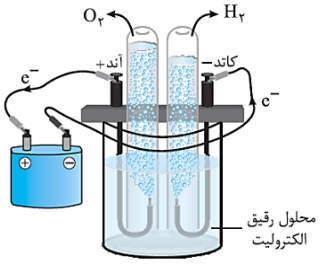
بررسی سایر گزینه‌ها:

۱) معادلهٔ موازنه شده نیم‌واکنش مورد نظر به صورت $Cr_2O_7^{2-} + 14H^+ + 6e^- \rightarrow 7H_2O + 2Cr^{3+}$ بوده و همانطور که مشخص است، ضریب الکترون در این ماده برابر با ۶ می‌شود. توجه داریم که فرمول مولکولی استون به صورت C_3H_6O است.

۲) در سلول گالوانی نقره-هیدروژن، نیم‌سلول هیدروژن در نقش آند بوده و نیم‌واکنش زیر در سمت آند آن انجام می‌شود:

$$H_2(g) \rightarrow 2H^+(aq) + 2e^-$$

تصویر زیر نیز سلول الکترولیتی استفاده شده برای برقکافت آب را نشان می‌دهد:

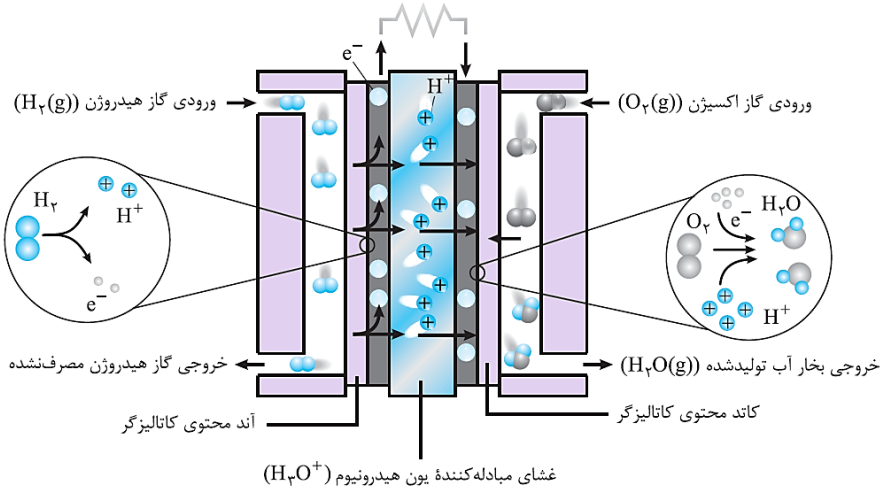


نیم‌واکنش کاتدی (کاهش): $4H_2O(l) + 4e^- \rightarrow 2H_2(g) + 4OH^-(aq)$

نیم‌واکنش آندی (اکسایش): $2H_2O(l) \rightarrow O_2(g) + 4H^+(aq) + 4e^-$

چون در آند این دو سلول یون هیدروژن تولید می‌شود، می‌توان گفت محلول موجود در اطراف آند این سلول‌ها خاصیت اسیدی دارد.

۴) رایج‌ترین نوع سلول سوختی، سلول سوختی هیدروژن-اکسیژن است. تصویر زیر، ساختار این سلول سوختی را نشان می‌دهد:



www.biomaze.ir

همانطور که مشخص است، در سمت کاتد این سلول گالوانی، گاز O_2 به عنوان گونه اکسنده مصرف شده و مولکول‌های H_2O تولید می‌شوند. در سمت آند این سلول نیز نیم واکنش اکسایش مولکول‌های هیدروژن به یون H^+ انجام می‌شود.

گروه آموزشی ماز

۹۵- کدام موارد از عبارت‌های داده شده درست هستند؟

آ: آهن گالوانیزه در ساختار خود دارای ۲ فلز مختلف از دسته d بوده و در ساختن تانکرهای آب کاربرد دارد.

ب: قدرت اکسندگی مولکول‌های O_2 در محیط خنثی بیشتر از قدرت اکسندگی آن‌ها در محیط اسیدی است.

پ: قیراندود کردن، ساده‌ترین روش جلوگیری از خوردگی آهن بوده و به طور کامل جلوی این فرایند را می‌گیرد.

ت: خوردگی وسایل فلزی خانگی ساخته شده با استفاده از عناصر فلزی آهن و مس، به سلامتی بدن آسیب می‌رساند.

۱) آ و پ ۲) آ و ت ۳) ب و پ ۴) ب و ت

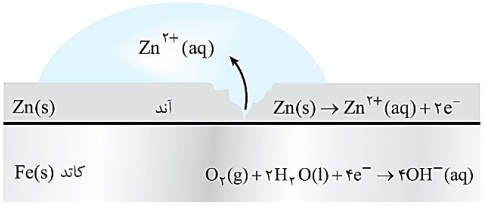
پاسخ: گزینه ۲ (آسان ـ مفهومی و حفظی ـ ۱۴۰۲)

پاسخ تشریحی:

عبارت‌های (آ) و (ت) درست هستند.

بررسی موارد:

آ: به ورقه‌های آهنی که سطح آن‌ها با لایه نازکی از فلز روی پوشیده شده باشد، آهن گالوانیزه یا آهن سفید گفته می‌شود. تصویر زیر، یک قطعه از آهن گالوانیزه که سطح آن خراش برداشته را نشان می‌دهد:



همانطور که مشخص است، در ساختار این ماده عناصر آهن و روی وجود دارند. این دو عنصر، در دسته d تناوب چهارم قرار می‌گیرند. فداکاری فلز روی برای حفاظت از آهن سبب شد تا در صنعت از ورقه‌های گالوانیزه برای ساختن تانکر آب و کانال کولر و ... استفاده شود.

تا قبل از ایجاد هر گونه خراشی در سطح آهن گالوانیزه، فلز روی به عنوان یک پوشش محافظ از خوردگی آهن جلوگیری می‌کند. توجه داریم که در این شرایط خود روی نیز به خاطر ایجادشدن یک لایه متراکم از $ZnO(s)$ در سطح آن، دچار خوردگی نمی‌شود. هنگامی که خراشی در سطح آهن گالوانیزه پدید می‌آید، هر دو فلز(روی و آهن) در مجاورت با اکسیژن و رطوبت موجود در هوا قرار می‌گیرند و برای از دست دادن الکترون(اکسایش‌یافتن) رقابت می‌کنند. از آن‌جا که E° فلز روی از E° فلز آهن کم‌تر است، فلز روی در این رقابت پیروز شده و در نقش آند اکسید می‌شود و از آهن به عنوان یک محافظ کاتدی در مقابل خوردهشدن محافظت می‌کند.

ب: قدرت اکسندگی مولکول‌های اکسیژن در محیط‌های خنثی کمتر از قدرت اکسندگی آن‌ها در محیط‌های اسیدی است. معادله‌های زیر، مربوط به اکسایش اکسیژن در محیط‌های اسیدی و خنثی هستند:

نیم‌واکنش کاهش در محیط خنثی : $O_2(g) + 2H_2O(l) + 4e^- \rightarrow 4OH^-(aq); E^\circ = +0/40\ V$

نیم‌واکنش کاهش در محیط اسیدی : $O_2(g) + 4H^+(aq) + 4e^- \rightarrow 2H_2O(l); E^\circ = +1/23\ V$

همانطور که مشخص است، پتانسیل کاهشی نیم‌واکنش مورد نظر در محیط‌های اسیدی بزرگ‌تر است.

پ: ساده‌ترین راه برای جلوگیری از خوردگی آهن، ایجاد یک پوشش محافظ بر روی آن است. این پوشش‌ها را می‌توان با روش‌هایی مانند رنگ‌زدن، قیراندودکردن و روکش‌دادن ایجاد کرده و از رسیدن اکسیژن و رطوبت به سطح آهن جلوگیری کرد. البته، به کمک چنین روش‌هایی نمی‌توانیم به طور کامل از خوردگی آهن جلوگیری کنیم، زیرا به تدریج اکسیژن و رطوبت از روزنه‌های موجود در این پوشش‌ها به درون آن‌ها نفوذ کرده و به سطح آهن می‌رسند و پس از آن، فرایند خوردگی آهن دوباره آغاز می‌شود. روش دیگری که از آن برای محافظت از خوردگی آهن استفاده می‌شود، حفاظت کاتدی است. در این روش، فلزی که قرار است در برابر خوردگی محافظت شود را در تماس با یک فلز دیگری قرار می‌دهند که E° کوچک‌تر و تمایل بیشتری به از دست دادن الکترون داشته باشد. در این شرایط، فلزهای موردنظر برای از دست دادن الکترون و اکسایش‌یافتن با یکدیگر رقابت می‌کنند. در چنین شرایطی، فلزی که E° کوچک‌تر و تمایل بیشتری به از دست دادن الکترون داشته باشد، در نقش آند اکسید می‌شود.

ت: در زندگی روزانه از وسایل و ابزار گوناگونی مانند وسایل آشپزخانه، شیرآلات ساختمان، دستگیره در و ... استفاده می‌شود که فلز اصلی سازنده آنها آهن یا مس است. خوردگی این فلزها از یک سو سبب از بین رفتن زیبایی وسیله می‌شود و از سوی دیگر به سلامتی بدن آسیب می‌رساند. به همین دلیل، سطح اغلب این وسایل فلزی را به کمک فرایند آبکاری و با فلزهایی مانند نقره، کروم، نیکل و طلا می‌پوشانند. با پوشش دادن به سطح این فلزها، وسایل ساخته شده از آن‌ها در مقابل خوردگی محافظت می‌شوند.

گروه آموزشی ماز

www.biomaze.ir

۹۶- تفاوت دمای ذوب کدام دو ماده در مقایسه با مواد داده شده در سایر گزینه‌ها بیشتر است؟

۱) سدیم کلرید و هیدروژن فلوئورید
۲) آب و هیدروژن سولفید
۳) لیتیم برمید و پتاسیم فلوئورید
۴) تیتانیم و نیتروژن خالص

پاسخ: گزینه ۴ (آسان ـ مفهومی ـ ۱۲۰۳)

پاسخ تشریحی:

به طور کلی، مواد را می‌توان در دو دسته زودگداز و دیرگداز قرار داد. مواد زودگداز، دمای ذوب پایینی داشته و به راحتی ذوب می‌شوند. برای مثال، اغلب مواد مولکولی در دسته مواد زودگداز قرار گرفته و دمای ذوب خیلی بالایی ندارند. در نقطه مقابل، مواد دیرگداز هستند که دمای ذوب بالایی داشته و به راحتی ذوب نمی‌شوند. برای مثال، اغلب عناصر فلزی، اغلب ترکیب‌های یونی و همه مواد کووالانسی، در دسته مواد دیرگداز قرار گرفته و دمای ذوب خیلی بالایی دارند. تیتانیم، یک عنصر فلزی با دمای ذوب ۱۶۶۷ درجه سانتی‌گراد و نیتروژن یک ماده مولکولی با دمای ذوب ۲۱۰- درجه سانتی‌گراد بوده و این دو ترکیب، در مقایسه با سایر زوج ترکیب‌های داده شده، تفاوت دمای ذوب بیشتری دارند. توجه کنید که نیاز به حفظ بودن عدد دقیق دمای ذوب این دو ماده نداریم اما به طور تقریبی، باید دمای ذوب آن‌ها را در ذهن داشته باشیم. توجه داریم که سدیم کلرید، در مقایسه با تیتانیم دمای ذوب کمتری داشته و HF نیز در مقایسه با نیتروژن دمای ذوب بالاتری دارد، پس می‌توان گفت تفاوت دمای ذوب این دو ماده کمتر از تفاوت دمای ذوب نیتروژن و تیتانیم است.

دمای ذوب، دمای لازم برای تبدیل یک ماده جامد به حالت مایع و دمای جوش، دمای لازم برای تبدیل یک ماده مایع به حالت بخار است. با توجه به سطح انرژی مواد در حالت‌های مختلف، می‌توان گفت دمای جوش یک ماده، از دمای ذوب آن بیشتر است. توجه داریم که رفتار فیزیکی مواد مولکولی مانند دمای ذوب و جوش، به نوع و قدرت نیروهای بین مولکولی آن‌ها و رفتار شیمیایی این مواد مانند واکنش‌پذیری، به طور عمده به پیوندهای اشتراکی(جفت الکترون‌های پیوندی) و جفت الکترون‌های ناپیوندی موجود در مولکول بستگی دارد.

گروه آموزشی ماز

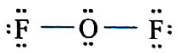
۹۷- در رابطه با مولکول OF_2، کدام‌یک از مطالب زیر درست است؟

۱) شمار جفت الکترون‌های ناپیوندی در آن با هیدروژن پراکسید برابر است.
۲) اتم مرکزی در این مولکول، همانند مولکول SO_2، بار جزئی مثبت دارد.
۳) این مولکول، برخلاف هیدروژن سولفید، ساختار خطی خواهد داشت.
۴) باریکه مایع از این ماده، توسط میله باردار از مسیر منحرف نمی‌شود.

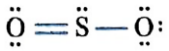
پاسخ: گزینه ۲ (آسان ـ مفهومی ـ ۱۲۰۳)

پاسخ تشریحی:

ساختار مولکول اکسیژن دی‌فلوئورید(OF_2) به صورت زیر است:



چون خاصیت نافلزی اتم فلوئور بیشتر از اتم اکسیژن است، پس اتم اکسیژن در ساختار این مولکول دارای بار جزئی مثبت خواهد بود. در مولکول گوگرد دی‌اکسید نیز چون اتم اکسیژن در مقایسه با اتم گوگرد خاصیت نافلزی بیشتری دارد، اتم گوگرد(اتم مرکزی) دارای بار جزئی مثبت خواهد بود. ساختار این مولکول به صورت زیر است:



بررسی سایر گزینه‌ها:

۱) در ساختار OF_2، تعداد ۸ جفت الکترون ناپیوندی وجود دارد درحالی که در ساختار هیدروژن پراکسید(H_2O_2)، تعداد ۴ جفت الکترون ناپیوندی وجود دارد.

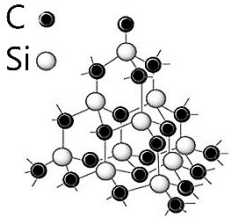
۳) در مولکول OF_2، همانند مولکول هیدروژن سولفید، روی اتم مرکزی جفت الکترون ناپیوندی وجود داشته و به همین خاطر، ذرات سازنده این دو ماده ساختار خمیده دارند.

۴) چون OF_2 یک ماده قطبی است، همانند سایر مواد قطبی، باریکه مایع از آن توسط میله باردار از مسیر منحرف می‌شود.

گروه آموزشی ماز

www.biomaze.ir

۹۸- در رابطه با ترکیب مقابل، چه تعداد از عبارت‌های داده شده درست هستند؟



آ: از این ترکیب، برای ساخت ابزار برش شیشه استفاده می‌شود.

ب: در لایه ظرفیت اتم‌های سازنده آن، جفت الکترون ناپیوندی وجود ندارد.

پ: درجه سختی یک نمونه از این ماده در مقایسه با سیلیسیم خالص بیشتر است.

ت: برای توصیف ویژگی‌های این ماده، نمی‌توان از عبارت (جرم مولکولی) استفاده کرد.

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

پاسخ: گزینه ۳ (متوسط ـ مفهومی ـ ۱۲۰۳)

پاسخ تشریحی:

تصویر داده شده، شبکه به‌هم پیوسته‌ای از اتم‌های کربن و سیلیسیم را نشان می‌دهد که به یکدیگر متصل شده‌اند، پس می‌توان گفت ماده نشان داده شده متعلق به دسته مواد کووالانسی است. با توجه به عناصر موجود در ساختار این ماده، ترکیب مورد نظر معادل با سیلیسیم کربید است. سیلیس(سیلیسیم دی‌اکسید)، سیلیسیم، سیلیسیم کربید، گرافیت و الماس در دسته مواد کووالانسی قرار می‌گیرند. این گروه از مواد شامل شمار بسیار زیادی از اتم‌ها می‌شوند که توسط پیوندهای اشتراکی به یکدیگر متصل شده‌اند. از آن‌جا که این مواد در دما و فشار اتاق به حالت جامد هستند، آن‌ها را با نام جامدهای کووالانسی نیز می‌خوانند. یافته‌های تجربی نشان می‌دهند که عنصرهای اصلی سازنده جامدهای کووالانسی در طبیعت، کربن و سیلیسیم هستند. علاوه بر کربن و سیلیسیم، عنصر اکسیژن نیز در ساختار برخی از جامدهای کووالانسی وجود دارد. در رابطه با سیلیسیم کربید، عبارت‌های (ب)، (پ) و (ت) درست هستند.

بررسی موارد:

آ: سیلیسیم کربید، در ساخت سنباده کاربرد دارد. این در حالی است که از الماس، به‌خاطر سختی بالا و تراکم زیاد آن، در ساخت مته‌ها و ابزارهای مربوط به برش شیشه استفاده می‌شود. گرافیت نیز دگرشکلی از کربن است که از آن در ساخت مغز مداد استفاده می‌شود.

ب: اتم‌های کربن و سیلیسیم، چهار پیوند اشتراکی تشکیل داده و در لایه ظرفیت خود الکترون ناپیوندی ندارند.

پ: چون طول پیوند $C-C$(پیوند موجود در بلور الماس) کمتر از طول پیوند $Si-C$(پیوند موجود در ساختار بلور سیلیسیم کربید) است، پس می‌توان گفت این پیوند انرژی بیشتری داشته و شکستن آن سخت‌تر است. بر این اساس، الماس در مقایسه با سیلیسیم کربید درجه سختی بیشتری خواهد داشت. در نقطه مقابل، چون طول پیوند $Si-Si$(پیوند موجود در بلور سیلیسیم خالص) بیشتر از طول پیوند $Si-C$ است، پس می‌توان گفت این پیوند انرژی کمتری داشته و شکستن آن راحت‌تر است. بر این اساس، سیلیسیم خالص در مقایسه با سیلیسیم کربید درجه سختی کمتری خواهد داشت.

ت: همانطور که می‌دانیم، در ساختار جامدهای کووالانسی، مولکول‌های مجزا وجود ندارد و این مواد، شامل شمار بسیار زیادی اتم بوده که با پیوند اشتراکی به هم متصل شده و ساختاری به‌هم پیوسته و غول‌آسا را تشکیل داده‌اند. با توجه به توضیحات داده شده، برای توصیف جامدهای کووالانسی نمی‌توان از واژه مولکول و جرم مولکولی استفاده کرد.

گروه آموزشی ماز

۹۹- سدیم هیدروژن کربنات، بر اساس معادله موازنه نشده زیر تجزیه می‌شود. مقدار ۲۵۰ گرم از این ماده با خلوص ۴۲٪ را بر اساس واکنشی با بازده ۴۰٪ تجزیه کرده و ۶۵/۵ گرم پتاسیم کلرید خالص را با فراورده جامد تولید شده در این واکنش مخلوط می‌کنیم. درصد جرمی سدیم در مخلوط جامد ایجاد شده، چقدر است؟

$(Na=۲۳ \text{ و } O=۱۶ \text{ و } C=۱۲ \text{ و } H=۱ : \ g.mol^{-۱})$

$$NaHCO_۳(s) \rightarrow CO_۲(g) + Na_۲CO_۳(s) + H_۲O(g)$$

۱) ۳۵ ۲) ۱۷/۵ ۳) ۲۵ ۴) ۱۲/۵

پاسخ: گزینه ۴ (سخت ـ مساله ـ ۱۲۰۳)

پاسخ تشریحی:

معادله واکنش انجام شده به صورت زیر است:

$$۲NaHCO_۳(s) \rightarrow CO_۲(g) + Na_۲CO_۳(s) + H_۲O(g)$$

در قدم اول، جرم سدیم کربنات تولید شده و پس از آن، جرم سدیم موجود در سدیم کربنات تولید شده را محاسبه می‌کنیم. در این رابطه، داریم:

$$?\,g\,Na_۲CO_۳ = ۲۵۰\ g\ NaHCO_۳ \text{ ناخالص} \times \frac{۴۲\ g\ NaHCO_۳}{۱۰۰\ g\ NaHCO_۳ \text{ ناخالص}} \times \frac{۱\ mol\ NaHCO_۳}{۸۴\ g\ NaHCO_۳} \times \frac{۱\ mol\ Na_۲CO_۳}{۲\ mol\ NaHCO_۳} \times \frac{۱۰۶\ g\ Na_۲CO_۳}{۱\ mol\ Na_۲CO_۳}$$

$$\times \frac{\text{مقدار نظری } ۴۰}{\text{مقدار عملی } ۱۰۰} = ۲۶/۵\ g$$

www.biomaze.ir

$$?\,g\,Na^+ = ۲۵۰\,g\,NaHCO_۳\ \text{ناخالص} \times \frac{۴۲\,g\,NaHCO_۳}{۱۰۰\,g\,NaHCO_۳\ \text{ناخالص}} \times \frac{۱\,mol\,NaHCO_۳}{۸۴\,g\,NaHCO_۳} \times \frac{۱\,mol\,Na_۲CO_۳}{۲\,mol\,NaHCO_۳} \times \frac{۲\,mol\,Na^+}{۱\,mol\,Na_۲CO_۳}$$

$$\times \frac{۲۳\,g\ Na^+}{۱\,mol\ Na^+} \times \frac{\text{مقدار نظری } ۴۰}{\text{مقدار عملی } ۱۰۰} = ۱۱/۵\,g$$

به ۲۶/۵ گرم سدیم کربنات تولید شده در این فرایند، ۶۵/۵ گرم پتاسیم کلرید اضافه شده است. بر این اساس، یک مخلوط ۹۲ گرمی داریم که در آن ۱۱/۵ گرم کاتیون سدیم وجود دارد.

بر این اساس، داریم:

$$\text{درصد جرمی سدیم} = \frac{\text{جرم کاتیون سدیم}}{\text{جرم مخلوط}} \times ۱۰۰ = \frac{۱۱/۵\,g\,Na^+}{۹۲\,g\ \text{مخلوط}} \times ۱۰۰ = ۱۲/۵\ \text{درصد}$$

گروه آموزشی ماز

۱۰۰- در یک آلیاژ فلزی، به ازای هر اتم تیتانیم، ۶ اتم آلومینیم وجود دارد. برای تهیه تیتانیم موجود در یک نمونه ۸۴۰ گرمی از این آلیاژ، باید چند گرم تیتانیم(IV) کلرید را برقکافت کنیم؟ ($g.mol^{-۱}$: $Al = ۲۷$ و $Cl = ۳۵/۵$ و $Ti = ۴۸$)

۱) ۳۸۰ ۲) ۷۶۰ ۳) ۵۷۰ ۴) ۱۹۰

پاسخ: گزینه ۲ (متوسط ـ مساله ـ ۱۲۰۳)

پاسخ تشریحی:

جرم هر اتم تیتانیم برابر با $۴۸amu$ و جرم هر اتم آلومینیم نیز برابر با $۲۷amu$ است. بر این اساس، درصد جرمی اتم‌های تیتانیم را در این آلیاژ فلزی محاسبه می‌کنیم. در این رابطه، داریم:

$$\text{درصد جرمی تیتانیم} = \frac{\text{جرم اتمی تیتانیم} \times ۱}{\text{جرم اتمی آلومینیم} \times ۶ + \text{جرم اتمی تیتانیم} \times ۱} \times ۱۰۰ = \frac{۱ \times ۴۸}{۱ \times ۴۸ + ۶ \times ۲۷} \times ۱۰۰ = ۲۲/۸۶\ \text{درصد}$$

در مرحله بعد، جرم تیتانیم موجود در آلیاژ ۸۴۰ گرمی را محاسبه می‌کنیم.

$$?\,g\,Ti = ۸۴۰\,g\ \text{آلیاژ} \times \frac{۲۲/۸۶\,g\,Ti}{۱۰۰\,g\ \text{آلیاژ}} = ۱۹۲\,g$$

تیتانیم بر اساس معادله موازنه شده زیر، طی فرایند برقکافت تولید می‌شود:

$$TiCl_۴(l) \rightarrow Ti(l) + ۲Cl_۲(g)$$

با توجه به معادله این واکنش، جرم تیتانیم(IV) کلرید مورد نیاز را محاسبه می‌کنیم.

$$?\,g\,TiCl_۴ = ۱۹۲\,g\,Ti \times \frac{۱\,mol\,Ti}{۴۸\,g\,Ti} \times \frac{۱\,mol\,TiCl_۴}{۱\,mol\,Ti} \times \frac{۱۹۰\,g\,TiCl_۴}{۱\,mol\,TiCl_۴} = ۷۶۰\,g$$

گروه آموزشی ماز

۱۰۱- کدام‌یک از عبارت‌های داده شده نادرست است؟

۱) شکنندگی ذرات بلور سدیم کلرید، بخاطر جابه‌جایی یون‌ها و ایجاد نیروی دافعه میان این یون‌ها ایجاد می‌شود.
۲) آنتالپی فروپاشی شبکه آلومینیم اکسید، کمتر از آنتالپی فروپاشی شبکه آلومینیم فلوئورید و منیزیم اکسید است.
۳) رنگ شعله لیتیم برمید، قرمز بوده و در مراحل تولید این ماده از عناصر سازنده آن، شعاع اتم‌های فلزی کاهش می‌یابد.
۴) از میان یون‌های پایدار حاصل از عناصر سدیم، منیزیم، پتاسیم و کلسیم، یون منیزیم دارای کوچک‌ترین شعاع یونی است.

پاسخ: گزینه ۲ (متوسط ـ مفهومی ـ ۱۲۰۳)

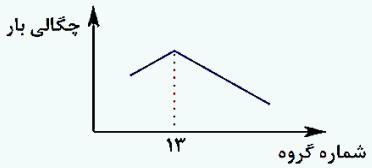
پاسخ تشریحی:

آنتالپی فروپاشی شبکه ترکیب‌های یونی، به چگالی بار یون‌های موجود در شبکه بلوری این مواد بستگی دارد. با افزایش چگالی بار یون‌ها، آنتالپی فروپاشی شبکه بلور مواد افزایش پیدا می‌کند. چگالی بار یون اکسید بیشتر از یون فلوئورید است، پس آنتالپی فروپاشی شبکهٔ آلومینیم اکسید، بیشتر از آنتالپی فروپاشی شبکه آلومینیم فلوئورید خواهد بود. همچنین چگالی بار یون آلومینیم نسبت به یون منیزیم بیشتر است، بنابراین آلومینیم اکسید آنتالپی فروپاشی بیشتری نسبت به منیزیم اکسید دارد.

چگالی بار در کاتیون‌های موجود در دوره سوم جدول تناوبی، از چپ به راست افزایش می‌یابد و چگالی بار آنیون‌ها نیز از چپ به راست، کاهش می‌یابد. بیشترین چگالی بار در دوره سوم جدول تناوبی، مربوط به یون آلومینیوم($Al^{۳+}$) است؛ زیرا این یون بار بیشتر و شعاع کمتری نسبت به سایر یون‌ها دارد.

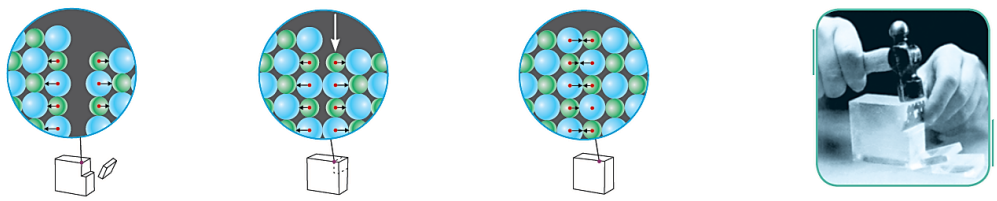
www.biomaze.ir

شکل زیر، شماتیک کلی از روند تغییر چگالی بار یون‌ها را بر حسب شماره گروه آن‌ها نمایش می‌دهد:



بررسی سایر گزینه‌ها:

۱) در اثر وارد شدن ضربه به بلور یک جامد یونی، ذرات سازنده این ماده جابه‌جا شده و یون‌های هم‌نام در کنار یکدیگر قرار می‌گیرند. دافعه ایجاد شده میان یون‌ها در این حالت، موجب جدا شدن دو قطعه از هم و خرد شدن این جامد می‌شود. تصویر زیر، نمایی از این فرایند را نشان می‌دهد:



نیروهای دافعه در هنگام وارد شدن ضربه

۳) همانطور که می‌دانیم رنگ شعله لیتیم و ترکیبات آن به رنگ قرمز است. در واکنش میان اتم‌های لیتیم و مولکول‌های برم، اتم‌های Li الکترون از دست داده و شعاع آن‌ها کاهش پیدا می‌کند، در حالی که اتم‌های Br الکترون به دست می‌آورند و شعاع آن‌ها افزایش پیدا می‌کند.

۴) به طور کلی بین کاتیون‌های فلزی مختلف، با حرکت به سمت راست و بالای جدول دوره‌ای، شعاع یونی کاهش پیدا می‌کند. از میان یون‌های پایدار حاصل از عناصر سدیم، منیزیم، پتاسیم و کلسیم، یون منیزیم از یون سدیم شعاع کوچک‌تری دارد. یون منیزیم از یون کلسیم هم کوچک‌تر است. همچنین شعاع یون سدیم از یون پتاسیم کمتر بوده، پس شعاع یون‌های پایدار سدیم، پتاسیم و کلسیم بیشتر از شعاع یون منیزیم است.

گروه آموزشی ماز

۱۰۲- با ایجاد کدام‌یک از تغییرات زیر در سامانه تعادلی $PCl_5(g) + Q \rightleftharpoons PCl_3(g) + Cl_2(g)$ که در ظرفی با حجم ثابت برقرار شده است، سرعت انجام واکنش برگشت در این سامانه افزایش پیدا می‌کند؟

۱) کاهش دمای سامانه
۲) کاهش حجم سامانه
۳) خارج کردن گاز کلر از سامانه
۴) افزودن مقداری گاز آرگون به سامانه

پاسخ: گزینه ۲ (آسان ـ مفهومی ـ ۱۲۰۴)

پاسخ تشریحی:

با کاهش حجم ظرف واکنش، غلظت همه مواد موجود در ظرف افزایش یافته و بر این اساس، سرعت واکنش‌های رفت و برگشت به صورت همزمان افزایش پیدا می‌کند. البته، چون میزان افزایش سرعت برای واکنش برگشت بیشتر است، تعادل به سمت برگشت(به سمت تعداد مول‌های گازی کمتر) جابه‌جا شده و فشار گازهای موجود در ظرف کاهش پیدا می‌کند.

بررسی سایر گزینه‌ها:

۱) با کاهش دمای سامانه، سرعت واکنش‌های رفت و برگشت در ظرف واکنش به صورت همزمان کاهش پیدا می‌کند. البته چون میزان کاهش سرعت برای واکنش رفت بیشتر است، تعادل مورد نظر در جهت برگشت جابه‌جا می‌شود.

۳) براساس اصل لوشاتلیه، در صورت افزایش غلظت یکی از گونه‌های شرکت‌کننده در یک تعادل شیمیایی، تعادل در جهتی پیش می‌رود که تا حد امکان مقداری از آن ماده را مصرف کند و سامانه مجدداً به حالت تعادل برسد. در نقطه مقابل، در صورت کاهش غلظت یکی از گونه‌های شرکت‌کننده در یک تعادل شیمیایی، تعادل در جهتی پیش می‌رود که تا حد امکان مقداری از آن ماده را تولید کند و سامانه مجدداً به حالت تعادل برسد. با خارج کردن گاز کلر از ظرف واکنش، سرعت واکنش برگشت کاهش یافته و بر این اساس، تعادل در جهت رفت جابه‌جا می‌شود.

۴) در صورتی که حجم ظرف واکنش ثابت باشد، با افزودن یک گاز نجیب مثل آرگون به ظرف، غلظت همه مواد بدون تغییر باقی مانده و به همین خاطر، تعادل اصلا جابه‌جا نمی‌شود.

گروه آموزشی ماز

www.biomaze.ir

۱۰۳- با توجه به داده‌های جدول زیر، اگر روزانه ۴۰۰۰۰۰ خودرو در شهری رفت و آمد کنند و هر خودرو، به طور میانگین ۲۵ کیلومتر مسافت را بپیماید، با نصب مبدل کاتالیستی در اگزوز خودروها، ماهانه از ورود چند تن آلاینده به هوا جلوگیری می‌شود؟

فرمول شیمیایی آلاینده		CO	C_xH_y	NO
مقدار آلاینده $(g.km^{-1})$	در نبود مبدل کاتالیستی	۶/۲۴	۱/۸۶	۱/۰۶
	در مجاورت با مبدل کاتالیستی	۰/۶۶	۰/۱۴	۰/۰۶

۱) ۲۹۸۸ ۲) ۱۴۹۴ ۳) ۱۲۴۵ ۴) ۲۴۹۰

پاسخ: گزینه ۴ (آسان ـ مساله ـ ۱۲۰۴)

پاسخ تشریحی:

آلاینده‌های خارج شده از اگزوز خودروها، معادل با گازهای CO و NO و هیدروکربن‌های نسوخته هستند. در نبود مبدل کاتالیستی، مقدار ۹/۱۶ گرم آلاینده و در حضور این مبدل‌ها، مقدار ۰/۸۶ گرم آلاینده به ازای هر کیلومتر مسافت به هوا وارد می‌شود، پس می‌توان گفت مبدل مورد نظر از ورود ۸/۳ گرم آلاینده به هوا جلوگیری می‌کند. بر این اساس، داریم:

$$?\,ton \text{ آلاینده قطبی} = ۴۰۰۰۰۰ \text{ خودرو} \times \frac{۲۵\,km}{۱ \text{ خودرو}} \times \frac{۸/۳\,g \text{ آلاینده}}{۱\,km} \times \frac{۱\,ton \text{ آلاینده قطبی}}{۱۰^۶\,g \text{ آلاینده قطبی}} = ۸۳\,ton$$

روزانه از ورود ۸۳ ton آلاینده به هوا جلوگیری می‌شود، پس در هر ماه از ورود ۲۴۹۰ = ۳۰ × ۸۳ تن آلاینده به هوا جلوگیری می‌شود.

گروه آموزشی ماز

۱۰۴- مقدار $۲۵/۶g$ گاز متان و $۸۱/۶g$ گاز هیدروژن سولفید را در یک ظرف دو لیتری مخلوط می‌کنیم و گرما می‌دهیم تا تعادل گازی زیر برقرار شود. اگر در حالت تعادل $۶۰/۸g$ گرم کربن دی‌سولفید در مخلوط وجود داشته باشد، مقدار عددی ثابت این تعادل کدام است؟

($S = ۳۲$ و $C = ۱۲$ و $H = ۱$: $g.mol^{-1}$)

$$CH_۴(g) + H_۲S(g) \leftrightharpoons CS_۲(g) + H_۲(g)$$ **(معادله واکنش موازنه شود.)**

۱) ۱۶۳/۸۴ ۲) ۲۰/۴۸ ۳) ۸۱/۹۲ ۴) ۴۰/۹۶

پاسخ: گزینه ۴ (متوسط ـ مساله ـ ۱۲۰۴)

پاسخ تشریحی:

در ابتدا در ظرف واکنش $\frac{۲۵/۶}{۱۶} = ۱/۶$ مول گاز متان و $\frac{۸۱/۶}{۳۴} = ۲/۴$ مول گاز هیدروژن سولفید وجود دارد. بنابراین با توجه به معادله واکنش موازنه شده، شمار مول گازها در تعادل به صورت زیر خواهد بود:

	$CH_۴(g)$	$+$	$۲H_۲S(g)$	$\rightleftharpoons$	$CS_۲(g)$	$+$	$۴H_۲(g)$
شمار مول اولیه:	۱/۶		۲/۴		۰		۰
شمار مول در لحظه تعادل:	$۱/۶ - x$		$۲/۴ - ۲x$		x		$۴x$

با توجه به اینکه در لحظه برقراری تعادل $\frac{۶۰/۸}{۷۶} = ۰/۸$ مول گاز کربن دی‌سولفید در مخلوط تعادلی داریم، پس می‌توان گفت مقدار x برابر ۰/۸ مول بوده و غلظت تعادلی گونه‌ها برابر خواهد بود با:

$$[H_۲S] = \frac{۲/۴ - (۲ \times ۰/۸)}{۲} = ۰/۴\ mol.L^{-۱} \quad \text{و} \quad [CH_۴] = \frac{۱/۶ - ۰/۸}{۲} = ۰/۴\ mol.L^{-۱}$$

$$[H_۲] = \frac{(۴ \times ۰/۸)}{۲} = ۱/۶\ mol.L^{-۱} \quad \text{و} \quad [CS_۲] = \frac{۰/۸}{۲} = ۰/۴\ mol.L^{-۱}$$

در نهایت، ثابت تعادل این واکنش را محاسبه می‌کنیم:

$$K = \frac{[CS_۲][H_۲]^۴}{[CH_۴][H_۲S]^۲} = \frac{(۰/۴) \times (۱/۶)^۴}{(۰/۴) \times (۰/۴)^۲} = \frac{(۲^۴ \times ۱۰^{-۱})^۴}{(۲^۲ \times ۱۰^{-۱})^۲} = \frac{۲^{۱۶} \times ۱۰^{-۴}}{۲^۴ \times ۱۰^{-۲}} = ۲^{۱۲} \times ۱۰^{-۲} = ۴۰/۹۶\ mol^۲.L^{-۲}$$

برای محاسبهٔ ثابت تعادل واکنش $aA + bB \rightleftharpoons cC + dD$ می‌توانیم از رابطهٔ زیر هم استفاده کنیم:

$$K = \frac{n_C^c \times n_D^d}{n_A^a \times n_B^b} \times (\frac{۱}{V})^{\Delta n} \quad \text{و} \quad \Delta n = (c + d) - (a + b)$$

مراقب باشید که در محاسبه Δn صرفاً ضرایب مواد گازی و محلول را در نظر بگیرید. توجه داریم که اگر مجموع ضرایب واکنش‌دهنده‌های گازی یا محلول با مجموع ضرایب فراورده‌های گازی یا محلول برابر باشد، Δn برابر صفر شده و مقدار ثابت تعادل مستقل از حجم ظرف می‌شود. در این حالت، داریم:

$$K = \frac{n_C^c \times n_D^d}{n_A^a \times n_B^b}$$

گروه آموزشی ماز

www.biomaze.ir

۱۰۵- چه تعداد از عبارت‌های داده شده در رابطه با تعادل $NH_4HS(s) \rightleftharpoons H_2S(g) + NH_3(g)$ درست هستند؟

آ: در صورت افزودن گاز آمونیاک به ظرف واکنش، مقدار مول گاز هیدروژن سولفید در ظرف کاهش پیدا می‌کند.

ب: فراورده‌های تولید شده در این واکنش شیمیایی، در مقایسه با یک نمونه از آب دمای جوش پایین‌تری دارند.

پ: فراورده‌ای از این واکنش با جرم مولی کمتر، در مقایسه با فراورده دیگر گشتاور دوقطبی بیشتری دارد.

ت: این واکنش شیمیایی، برگشت‌پذیر بوده و یکای ثابت تعادل آن، مشابه واکنش کلی فرایند هابر است.

ث: از ابتدای کار تا لحظه برقراری تعادل، غلظت ماده NH_4HS در ظرف واکنش کاهش می‌یابد.

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

پاسخ: گزینه ۳ (متوسط ـ مفهومی ـ ۱۲۰۴)

پاسخ تشریحی:

عبارت‌های (آ)، (ب) و (پ) درست هستند.

بررسی موارد:

آ: براساس اصل لوشاتلیه، در صورت افزایش غلظت یکی از گونه‌های شرکت‌کننده در یک تعادل شیمیایی، تعادل در جهتی پیش می‌رود که تا حد امکان مقداری از آن ماده را مصرف کند و سامانه مجدداً به حالت تعادل برسد. با افزودن آمونیاک به سامانه تعادلی $NH_4HS(s) \rightleftharpoons H_2S(g) + NH_3(g)$، این تعادل در جهت برگشت(در جهت مصرف گاز آمونیاک) جابه‌جا شده و مقدار گاز H_2S در ظرف واکنش به تدریج کاهش می‌یابد.

ب: دمای جوش گاز هیدروژن سولفید در حدود ۶۰- درجه سانتی‌گراد و دمای جوش آمونیاک در حدود ۳۳- درجه سانتی‌گراد است درحالی که دمای جوش آب برابر با ۱۰۰ درجه سانتی‌گراد است.

پ: آمونیاک، فراورده‌ای از این واکنش با جرم مولی کمتر است. با توجه به خاصیت نافلزی بیشتر نیتروژن در مقایسه با گوگرد، اتم نیتروژن موجود در مولکول آمونیاک جفت الکترون‌های پیوندی را با قدرت بیشتری به سمت خود جذب کرده و بر این اساس، گشتاور دوقطبی آمونیاک در مقایسه با هیدروژن سولفید بیشتر خواهد بود. به همین خاطر است که آمونیاک در مقایسه با هیدروژن سولفید دمای جوش بالاتری دارد.

ت: یکای ثابت تعادل برای واکنش‌های مختلف، متفاوت از یکدیگر است و به تفاوت میان شمار مول‌های گازی و محلول موجود در دو طرف واکنش بستگی دارد.

در این رابطه، داریم:

$\Delta n =$ تعداد مول‌های گازی و محلول در سمت راست واکنش - تعداد مول‌های گازی و محلول در سمت چپ واکنش

یکای K واکنش $= (mol.L^{-1})^{\Delta n}$

با توجه به توضیحات داده شده، یکای ثابت تعادل واکنش $N_2(g) + 3H_2(g) \rightleftharpoons 2NH_3(g)$، معادل با $L^2.mol^{-2}$ است. این در حالی است که یکای ثابت تعادل واکنش داده شده به صورت $mol^2.L^{-2}$ است.

ث: واکنش‌دهنده این واکنش(NH_4HS)، یک ماده جامد بوده و همانطور که می‌دانیم، در دمای ثابت، غلظت مواد مایع و جامد خالص با تغییر مقدار آن‌ها در ظرف واکنش دچار تغییر نشده و همواره یک مقدار ثابت دارد.

گروه آموزشی ماز

www.biomaze.ir

محصولات ماز برای کنکور تیر ۱۴۰۳

دوره ۱۰۰۰ تست :

- پیش بینی کنکور
- دوره حل تست ماز

https://mz20.ir/1000

دوپینگ ویژه کنکور تیرماه

https://mz20.ir/dpg

کلاس آمادگی امتحان نهایی

گروه آموزشی ماز

۳ نرم افزار رایگان کاربردی ویژه روزهای پایانی

۱

تخمین رتبه کنکور بر اساس معدل و کنکور

(https://biomaze.ir/rank-estimate)

براساس تحلیل هزاران کارنامه نهایی و سراسری، نرم افزاری آماده کرده‌ایم که با چند کلیک ساده میتوانید تراز و رتبه خود را در کنکور هرسال مشاهده کنید.

۲

درصدگیر آنلاین ماز

(https://biomaze.ir/percent-calculator)

درصد خام خود را بدانید، درصد با احتساب نمره منفی را نیز بدانید و متوجه شوید که تاثیر سوالات غلط بر عملکردتان چگونه است.

۳

صفحه ویژه کنکور ماز

(https://biomaze.ir/konkur)

شامل روزشمار کنکور اردیبهشت و تیر، دفترچه‌های کنکور، تحلیل سوالات کنکور و پاسخ تشریحی سوالات

امسال هم مثل همیشه هواتون رو داریم ✌🏻

گروه آموزشی ماز