کدکنترل

121

A

پنجشنبه

۱۴۰۳/۰۴/۱۴

گروه آموزشی ماز

پاسخنامه آزمون الکترونیکی کنکوری‌های ریاضی ــ مرحله ۲۱

درس	مسئول درس	طراحان	ویراستاران
ریاضیات	محدثه شیخعلی	محمد پورسعید ـ رسول حاجی زاده ـ سوگند روشنی	مهرداد اسپیدکار ـ حمیدرضا ولی‌پور رضا قانع
فیزیک	سجاد صادقی‌زاده	سجاد صادقی‌زاده ـ مهدی شریفی ـ محسن قندچلر سعید احمدی ـ ارسلان رحمانی	محمدجواد سورچی ـ نرجس تیمناک علیرضا ملک‌حسینی ـ فریده قزوینی
شیمی	فرشاد هادیان‌فرد	فرشاد هادیان‌فرد ـ فرهنگ امیری سعیده محبی ـ امیر بصراوی	فرهنگ امیری ـ رامین رزمجو محمد داوودآبادی‌فراهانی ـ علی اصغر رضایی
مدیر آزمون: رسول خنجری			

حق چاپ و تکثیر سوالات به هر روش (الکترونیکی و...) پس از برگزاری آزمون برای تمامی اشخاص حقیقی و حقوقی تنها با مجوز «گروه ماز» مجاز می‌باشد و با متخلفین برابر مقررات رفتار می‌شود.
به دلیل عدم رضایت تیم ماز، هرگونه استفادهٔ غیرقانونی از دفترچه سوالات و پاسخنامه ماز برای تمامی اشخاص، شرعاً حرام است.

AzmonVIP

حتماً توی فیلم‌ها یا داستان‌های تاریخی دیدی یا شنیدی که بعضی‌ها توی جنگ‌ها تا لحظهٔ آخر می‌جنگن، عقب نمی‌رن. به قول معروف: «شاید ایستاده بمیرن، اما زانوزده تسلیم نمی‌شن».

یک سال گذشت؛ یک سال زحمت کشیدی، یک سال رنج کشیدی، از خوابت زدی، از استراحتت زدی، از خوش‌گذرونی‌هات گذشتی. واقعیتش اینه که توی یه جنگ بودی؛ جنگ واسه رسیدن به هدفی که داشتی. راستش خیلی بهت افتخار می‌کنیم؛ تو می‌تونستی وقتت رو با تنبلی بگذرونی، می‌تونستی بشینی و بگی «سخته!»، بگی «من نمی‌تونم!»، می‌تونستی با خوش‌گذرونی و تفریح سرت رو گرم کنی، اما تو موندی. تو تلاش کردی. چرا؟ چون به خودت، به توانایی‌هات و به استعدادت باور داشتی. فارغ از هر نتیجه‌ای، تو قابل احترامی. اونی که تا لحظهٔ آخر می‌جنگه، اونی که تا لحظهٔ آخر تسلیم نمی‌شه، از هزاران سال پیش تا الان، اون فرد قابل احترامه؛ چون جا نزده، چون نترسیده، چون مونده و می‌خواد تا لحظهٔ آخر برای هدفش بجنگه. فارغ از هر نتیجه‌ای، بهت افتخار می‌کنیم که هنوز موندی، هنوز تلاش می‌کنی و می‌خوای تا لحظهٔ آخر بجنگی، تا لحظه‌ای که به چیزی که حقته برسی. تو قابل احترامی و باز هم می‌گیم: «ما بهت افتخار می‌کنیم.»

تو این یه سالی که گذشت، ما تو بخش محتوا و آزمون ماز، بیش از ۲۰ هزار صفحه محتوا تولید کردیم، بیش از ۴۰۰ نفر برای آماده کردن این آزمون‌ها زحمت کشیدن. ما تا جایی که تونستیم، سعی کردیم بهترینِ خودمون واسه تو باشیم:

- بحث کنکور فرهنگیان پیش اومد، بلافاصله دفترچهٔ کنکور فرهنگیان رو اضافه کردیم.

- بحث جمع‌بندی برای کنکور زودهنگام اردیبهشت پیش اومد، برنامهٔ آزمون رو واسه کنکور اردیبهشت مناسب‌سازی کردیم.

- بحث تأثیر امتحانات تشریحی و سختی امتحانات نهایی پیش اومد، امتحانات شبیه‌ساز نهایی براتون برگزار کردیم، حتی با تصحیح توسط مصححین!

و خیلی چیزهای دیگه که با فهرست‌کردنشون سرت رو درد نمی‌آریم؛ اما باید بدونی که هرجا که نیاز بود، تمام توانمون رو گذاشتیم و ذره‌ای دریغ نکردیم، ذره‌ای خسته نشدیم، چون انرژی‌مون رو از موفقیت و خوشحالیِ تو می‌گیریم، از اینکه بعد از کنکور بگین «تونستم! و ماز بهم کمک کرد که بتونم». همین واسهٔ ما کافیه.

تا جایی که تونستیم هزینهٔ آزمون رو تو کمترین حالت ممکن قرار دادیم و از تبلیغات آن‌چنانی گذشتیم. چرا؟ چون تو، حمایتت، نظراتِ همیشه مثبت و قشنگت، و رضایتی که از کارمون داشتی، واسهٔ ما کافیه، واسهٔ ما بهترین تبلیغه. پس ما ازت ممنونیم، ممنونیم که همیشه انرژی مثبت بهمون دادی و همراهمونی.

از ته ته دل، به «دیدین تونستم» ذوق‌زده براتَ آرزو می‌کنیم.
ما بهت افتخار می‌کنیم.

گروه آموزشی ماز

دوست مازی من، سلام!

برای اینکه ما نظرت رو در رابطه با آزمون بدونیم نیاز هست که در نظرسنجی شرکت کنی.

برای شرکت در نظرسنجی فقط کافیه روی لینک زیر بزنی یا QR کد زیر رو اسکن کنی تا صفحهٔ نظرسنجی برات باز بشه!

ممنون که نظرت رو به ما میگی و بهمون برای بهتر شدن آزمون‌ها کمک می‌کنی :)

https://B2n.ir/h78038

مازی‌ها؛ میدونین که جلوی هر سوال ما براتون ویژگی و آدرس اون سوال رو میذاریم، حالا واسه اینکه کامل یادش بگیرید میخوام براتون بگم که چجوری اینا رو براتون چیدیم:

(سطح سوال ـ سبک سوال ـ آدرس سوال)

آسان ـ متوسط ـ سخت

مفهومی ـ مساله و ...

مثلا: ۱۱۰۱ یعنی فصل ۱ پایه یازدهم

AzmonVIP

۱- حاصل عبارت $\frac{۳\sqrt{۳}-۱}{۴+\sqrt{۳}}-\frac{۲}{\sqrt{۳}-۱}$ کدام است؟

۱) $-۲\sqrt{۳}$ ۲) ۲ ۳) $۲\sqrt{۳}$ ۴) -۲

پاسخ: گزینه ۴ (متوسط ـ محاسباتی ـ ۱۰۰۳)

گویا کردن مخرج کسرها:

اگر در مخرج کسر، دو عبارت رادیکالی با فرجهٔ دو و یا یک عبارت رادیکالی با فرجهٔ دو و یک عدد غیر رادیکالی داشته باشیم باید از اتحاد مزدوج برای گویا کردن مخرج کسر استفاده کنیم.

اتحاد چاق و لاغر $(a\mp b)(a^۲\pm ab+b^۲)=a^۳\mp b^۳$ اتحاد مزدوج $(a-b)(a+b)=a^۲-b^۲$

$\frac{A}{\sqrt{a}\pm b}\times\frac{\sqrt{a}\mp b}{\sqrt{a}\mp b}$ $\frac{A}{\sqrt{a}\pm\sqrt{b}}\times\frac{\sqrt{a}\mp\sqrt{b}}{\sqrt{a}\mp\sqrt{b}}$

پاسخ تشریحی:

ابتدا تک‌تک کسرها را گویا کرده و بعد به محاسبهٔ عبارت A می‌پردازیم:

$$A=\frac{۳\sqrt{۳}-۱}{۴+\sqrt{۳}}-\frac{۲}{\sqrt{۳}-۱}$$

$$\frac{۳\sqrt{۳}-۱}{۴+\sqrt{۳}}=\frac{(\sqrt{۳})^۳-۱}{۴+\sqrt{۳}}=\frac{(\sqrt{۳}-۱)(\sqrt{۳}^۲+\sqrt{۳}+۱)}{۴+\sqrt{۳}}=\frac{(\sqrt{۳}-۱)(۴+\sqrt{۳})}{۴+\sqrt{۳}}=\sqrt{۳}-۱$$

$$\frac{۲}{\sqrt{۳}-۱}=\frac{۲}{\sqrt{۳}-۱}\times\frac{\sqrt{۳}+۱}{\sqrt{۳}+۱}=\frac{۲(\sqrt{۳}+۱)}{\sqrt{۳}^۲-۱^۲}=\sqrt{۳}+۱$$

$$A=(\sqrt{۳}-۱)-(\sqrt{۳}+۱)=-۲$$

گروه آموزشی ماز

۲- نمودار سهمی $y=(a-۱)x^۲+(۲a+۲)x+a$ فقط از ناحیهٔ دوم محورهای مختصات عبور نمی‌کند. a چند مقدار صحیح می‌تواند داشته باشد؟

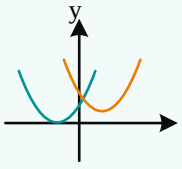
۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) هیچ

پاسخ: گزینه ۱ (متوسط ـ مفهومی / محاسباتی ـ ۱۱۰۱)

عبور سهمی از نواحی دستگاه مختصات:

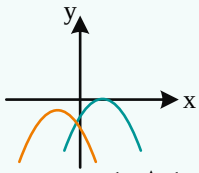
اگر معادلهٔ سهمی به صورت $y=ax^۲+bx+c$ باشد، داریم:

عبور از نواحی اول و دوم:



$a>۰, c\geq ۰, \Delta\leq ۰$

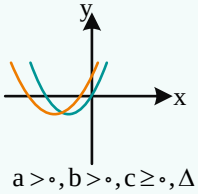
عبور از نواحی سوم و چهارم:



$a<۰, c\leq ۰, \Delta\leq ۰$

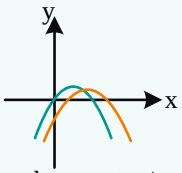
عبور سهمی از ۳ ناحیه:

عبور از نواحی اول، دوم و سوم



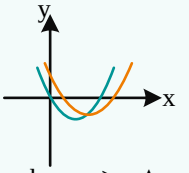
$a>۰, b>۰, c\geq ۰, \Delta>۰$

عبور از نواحی اول، سوم و چهارم



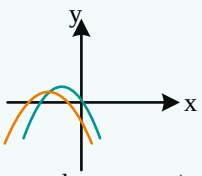
$a<۰, b>۰, c\leq ۰, \Delta>۰$

عبور از نواحی اول ، دوم و چهارم



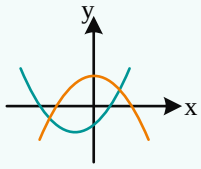
$a>۰, b<۰, c\geq ۰, \Delta>۰$

عبور از نواحی دوم، سوم و چهارم



$a<۰, b<۰, c\leq ۰, \Delta>۰$

عبور سهمی از ۴ ناحیه:



$a\times c<۰$

www.biomaze.ir
AzmonVIP

پاسخ تشریحی:

می‌خواهیم نمودار سهمی از ناحیهٔ دوم محورهای مختصات عبور نکند، پس: $a<0\ ,\ b>0\ ,\ c\le 0\ ,\ \Delta>0$

$$y=\underset{a}{(a-1)}x^2+\underset{b}{(2a+2)}x+\underset{c}{a}\Rightarrow\begin{cases}a:a-1<0\Rightarrow a<1\\ b:2a+2>0\Rightarrow a>-1\\ c:a\le 0\\ \Delta:(2a+2)^2-4a(a-1)>0\Rightarrow 4a^2+8a+4-4a^2+4a>0\Rightarrow 12a>-4\Rightarrow a>-\frac{1}{3}\end{cases}$$

بین تمام محدوده‌های a اشتراک می‌گیریم ⟵ $a<1\cap a>-1\cap a\le 0\cap a>-\frac{1}{3}\Rightarrow -\frac{1}{3}<a\le 0$

فقط به ازای $a=0$ نمودار سهمی از ناحیهٔ دوم محورهای مختصات عبور نمی‌کند.

گروه آموزشی ماز

۳- مجموع ریشه‌های معادلهٔ $\frac{5}{x^2-x}+\frac{1}{(x-4)(x+3)}=\frac{6}{7}$ کدام است؟

۱) $\frac{3}{2}$ ۲) ۲ ۳) $\frac{5}{2}$ ۴) ۳

پاسخ: گزینه ۲ (متوسط ـ مفهومی / محاسباتی ـ ۱۱۰۱)

روش تغییر متغیر برای حل معادلات:

برای حل برخی معادلات که ظاهری شبیه معادلهٔ درجهٔ دوم دارند، می‌توان با عوض کردن متغیر، معادله را به یک معادلهٔ درجهٔ دوم تبدیل و بعد آن را حل کرد و بعد متغیر را به حالت اول بازگرداند تا جواب‌های معادلهٔ اولیه به دست آید.

حواست به معادلات گویا باشه: توجه کنید بعد از حل معادله، جواب‌هایی که به دست می‌آید نباید ریشهٔ مخرج باشند.

پاسخ تشریحی:

$$\frac{5}{x^2-x}+\frac{1}{(x-4)(x+3)}=\frac{6}{7}\Rightarrow\frac{5}{x^2-x}+\frac{1}{x^2-x-12}=\frac{6}{7}$$

با کمک روش تغییر متغیر و فرض $x^2-x=t$ داریم:

$$\frac{5}{t}+\frac{1}{t-12}=\frac{6}{7}\Rightarrow\frac{5(t-12)+t}{t(t-12)}=\frac{6}{7}\Rightarrow\frac{6t-60}{t^2-12t}=\frac{6}{7}$$

$$\Rightarrow\frac{6(t-10)}{t^2-12t}=\frac{6}{7}\Rightarrow t^2-12t=7t-70\Rightarrow t^2-19t+70=0\Rightarrow(t-5)(t-14)=0\Rightarrow\begin{cases}t=5\\ t=14\end{cases}$$

$$t=x^2-x\Rightarrow\left\{\begin{array}{l}x^2-x=5\Rightarrow x^2-x-5=0\Rightarrow S'=x_1+x_2=1\\ x^2-x=14\Rightarrow x^2-x-14=0\Rightarrow S''=x_3+x_4=1\end{array}\right\}\Rightarrow x_1+x_2+x_3+x_4=2$$

توجه کنید هیچ‌کدام از جواب‌های معادلات $x^2-x-5=0$ و $x^2-x-14=0$ باعث صفر شدن مخرج کسر معادلهٔ اولیه نمی‌شوند یعنی هر چهار جواب قابل قبول بوده و مجموع آن‌ها برابر ۲ است.

گروه آموزشی ماز

۴- به ازای چند عدد طبیعی یک رقمی برای m در معادلهٔ درجهٔ دوم $x^2-(2m+1)x+m-3=0$ یکی از ریشه‌ها کوچک‌تر از ۱۰ و ریشهٔ دیگر بزرگ‌تر از ۱۰ است؟

۱) ۴ ۲) ۵ ۳) ۶ ۴) ۲

پاسخ: گزینه ۲ (متوسط ـ مفهومی / محاسباتی ـ ۱۱۰۱)

روابط بین ریشه‌های معادلهٔ درجهٔ دوم:

اگر α و β ریشه‌های حقیقی معادلهٔ $ax^2+bx+c=0$ باشد، داریم:

۱) $S=\alpha+\beta=-\frac{b}{a}$ ۲) $P=\alpha\times\beta=\frac{c}{a}$ ۳) $|\alpha-\beta|=\frac{\sqrt{\Delta}}{|a|}$

۴) $\alpha^2+\beta^2=S^2-2P$ ۵) $\alpha^3+\beta^3=S^3-3PS$ ۶) $\sqrt{\alpha}\pm\sqrt{\beta}=\sqrt{S\pm 2\sqrt{P}}$

www.biomaze.ir
AzmonVIP

پاسخ تشریحی:

یکی از ریشه‌ها از ۱۰ کوچک‌تر و ریشهٔ دیگر از ۱۰ بزرگ‌تر است. پس داریم:

$$\begin{cases} x_1 < 10 \\ x_2 > 10 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 - 10 < 0 \\ x_2 - 10 > 0 \end{cases} \Rightarrow (x_1 - 10)(x_2 - 10) < 0$$

$$\Rightarrow x_1x_2 - 10x_1 - 10x_2 + 100 < 0 \Rightarrow \underset{\downarrow}{x_1x_2} - 10(\underset{\downarrow}{x_1 + x_2}) + 100 < 0 \Rightarrow P - 10S + 100 < 0$$

$$\xrightarrow[S=(2m+1)]{P=m-3} m - 3 - 10(2m+1) + 100 < 0 \Rightarrow -19m + 87 < 0 \Rightarrow 19m > 87 \Rightarrow m > \frac{87}{19} \simeq 4/5\ldots$$

بنابراین m می‌تواند مقادیر طبیعی و یک رقمی ۹,۸,۷,۶,۵ را اختیار کند که تعداد آن‌ها برابر ۵ است.

گروه آموزشی ماز

۵- بیشترین مقدار عدد طبیعی n که به ازای آن مجموع n جملهٔ اول دنبالهٔ حسابی $7x+10, 9x-7, 4x+25, \ldots$ مثبت می‌باشد، کدام است؟

۱) ۳۹ ۲) ۴۱ ۳) ۴۰ ۴) ۴۲

پاسخ: گزینه ۳ (متوسط ـ مفهومی / محاسباتی ـ ۱۱۰۱)

مجموع n جملهٔ اول دنبالهٔ حسابی:

$$S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n) = \frac{n}{2}\left(2a_1 + (n-1)d\right)$$

از دست دنبالهٔ حسابی:

اگر a، b و c جملات متوالی یک دنبالهٔ حسابی باشند، آن‌گاه: $a + c = 2b$

پاسخ تشریحی:

$$7x+10, 9x-7, 4x+25, \ldots \Rightarrow 2(9x-7) = 7x+10+4x+25 \Rightarrow 18x-14 = 11x+35 \Rightarrow 7x = 49 \Rightarrow x = 7$$

بنابراین جملات دنباله به صورت مقابل می‌باشد: $59, 56, 53, \ldots \Rightarrow d = -3$

$$S_n = \frac{n}{2}\left(2a_1 + (n-1)d\right) \Rightarrow \frac{n}{2}\left(2\times 59 + (n-1)\times(-3)\right) > 0 \Rightarrow \frac{n}{2}(121 - 3n) > 0 \xrightarrow[\frac{n}{2}>0]{n\in\mathbb{N}} 121 - 3n > 0$$

$$\Rightarrow 3n < 121 \Rightarrow n < \frac{121}{3} \Rightarrow n < 40/\ldots \Rightarrow \max(n) = 40$$

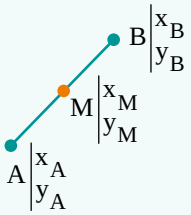
گروه آموزشی ماز

۶- در مثلثی با رئوس A(۲,−۲)، B(۶,۰) و C(−۲,۴) طول ارتفاع BH چند برابر طول میانهٔ AM است؟

۱) $\frac{2}{\sqrt{5}}$ ۲) $\frac{4}{\sqrt{5}}$ ۳) $\frac{4}{\sqrt{13}}$ ۴) $\frac{2}{\sqrt{13}}$

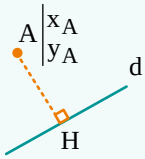
پاسخ: گزینه ۳ (متوسط ـ محاسباتی ـ ۱۱۰۱)

مختصات نقطهٔ وسط پاره‌خط AB:



$$M\begin{cases} x_M = \frac{x_A + x_B}{2} \\ y_M = \frac{y_A + y_B}{2} \end{cases}$$

فاصلهٔ نقطه از خط:



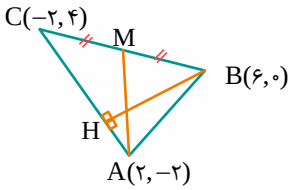
$d: ax + by + c = 0$

$$AH = \frac{|ax_A + by_A + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

www.biomaze.ir
AzmonVIP

پاسخ تشریحی:

شکل فرضی مقابل را در نظر بگیرید:



مختصات نقطهٔ M وسط پاره‌خط BC را به دست می‌آوریم:

$$M\begin{vmatrix}\frac{x_B+x_C}{۲}\\ \frac{y_B+y_C}{۲}\end{vmatrix}\Rightarrow M\begin{vmatrix}\frac{-۲+۶}{۲}=۲\\ \frac{۰+۴}{۲}=۲\end{vmatrix}$$

برای محاسبهٔ طول میانهٔ AM کافی است فاصلهٔ نقاط A و M را به دست آوریم. ببینید:

$$AM=\sqrt{(x_M-x_A)^۲+(y_M-y_A)^۲}=\sqrt{(۲-۲)^۲+(-۲-۲)^۲}=۴\Rightarrow AM=۴$$

برای محاسبهٔ ارتفاع BH می‌توانیم فاصلهٔ رأس B از ضلع AC را به دست آوریم. ابتدا معادلهٔ ضلع AC را می‌نویسیم:

$$m_{AC}=\frac{y_C-y_A}{x_C-x_A}=\frac{۴-(-۲)}{-۲-۲}=\frac{۶}{-۴}=-\frac{۳}{۲}$$

$$y-y_A=m(x-x_A)\Rightarrow y+۲=-\frac{۳}{۲}(x-۲)\Rightarrow y+\frac{۳}{۲}x-۱=۰\xrightarrow{\times ۲}۲y+۳x-۲=۰$$

حال فاصلهٔ نقطهٔ B از ضلع AC را محاسبه می‌کنیم:

$$BH=\frac{|۲\times ۰+۳\times ۶-۲|}{\sqrt{۲^۲+۳^۲}}=\frac{۱۶}{\sqrt{۱۳}}$$

بنابراین جواب برابر است با:

$$\frac{\text{طول ارتفاع BH}}{\text{طول میانهٔ AM}}=\frac{\frac{۱۶}{\sqrt{۱۳}}}{۴}=\frac{۴}{\sqrt{۱۳}}$$

گروه آموزشی ماز

۷- اگر $۲۷^b=۶۲۵$ و $۵^a=\sqrt[۳]{۳}$ باشد، حاصل عبارت $۸^{\log_{۴}^{ab}}$ کدام است؟

۱) $\frac{۸}{۲۷}$ ۲) $\frac{۵}{۹}$ ۳) $\frac{۱۲۵}{۳}$ ۴) $\frac{۴}{۹}$

پاسخ: گزینه ۱ (متوسط ـ مفهومی / محاسباتی ـ ۱۱۰۳)

چند ویژگی مهم لگاریتم:

۱) $a^{\log_c^b}=b^{\log_c^a}$ ۲) $a^x=b\Rightarrow x=\log_a^b$ ۳) $\log_b^a=\frac{۱}{\log_a^b}$

پاسخ تشریحی:

$$\left.\begin{array}{l}۲۷^b=۶۲۵\Rightarrow b=\log_{۲۷}^{۶۲۵}=\log_{۳^۳}^{۵^۴}=\frac{۴}{۳}\log_۳^۵\Rightarrow b=\frac{۴}{۳}\log_۳^۵\\ ۵^a=\sqrt[۳]{۳}\Rightarrow a=\log_۵^{\sqrt[۳]{۳}}=\log_۵^{۳^{\frac{۱}{۳}}}=\frac{۱}{۳}\log_۵^۳\Rightarrow a=\frac{۱}{۳}\log_۵^۳\end{array}\right\}\Rightarrow ab=\frac{۴}{۳}\log_۳^۵\times\frac{۱}{۳}\log_۵^۳=\frac{۴}{۹}$$

حال به محاسبهٔ $۸^{\log_{۴}^{ab}}$ می‌پردازیم. ببینید:

$$۸^{\log_{۴}^{ab}}=(ab)^{\log_{۴}^{۸}}=(ab)^{\log_{۲^۲}^{۲^۳}}=(ab)^{\frac{۳}{۲}\log_۲^۲}=(ab)^{\frac{۳}{۲}}=(\frac{۴}{۹})^{\frac{۳}{۲}}=((\frac{۲}{۳})^۲)^{\frac{۳}{۲}}=(\frac{۲}{۳})^۳=\frac{۸}{۲۷}$$

گروه آموزشی ماز

www.biomaze.ir

AzmonVIP

۸- نمودار تابع $f(x)=(۴x-۳)^۳$ را در راستای محور xها ۳ واحد به چپ و در راستای محور yها ۲ واحد به بالا منتقل می‌کنیم. سپس طول تمام نقاط را در راستای محور xها نصف کرده و در نهایت نمودار را نسبت به محور yها قرینه می‌کنیم تا نمودار تابع g به دست آید. حاصل $g(۱)+g'(۱)$ کدام است؟

۱) -۱۹ ۲) -۲۱ ۳) صفر ۴) ۲

پاسخ: گزینه ۲ (متوسط ـ ترکیبی / محاسباتی ـ ۱۲۰۱)

پاسخ تشریحی:

$$f(x)=(۴x-۳)^۳ \xrightarrow[x\to x+۳]{\text{۳ واحد به چپ}} y=(۴(x+۳)-۳)^۳ \xrightarrow[+۲]{\text{۲ واحد رو به بالا}} y=(۴x+۹)^۳+۲ \xrightarrow[x\to(۲x)]{\text{طول تمام نقاط تقسیم بر ۲}}$$

$$y=(۴(۲x)+۹)^۳+۲ \xrightarrow[x\to -x]{\text{قرینه نسبت به محور yها}} g(x)=(-۸x+۹)^۳+۲ \Rightarrow g'(x)=(-۸)\times ۳\times(-۸x+۹)^۲$$

$$\Rightarrow \begin{cases} g(۱)=۱^۳+۲=۳ \\ g'(۱)=(-۸)\times ۳\times ۱=-۲۴ \end{cases} \Rightarrow g(۱)+g'(۱)=-۲۴+۳=-۲۱$$

گروه آموزشی ماز

۹- اگر $f(x)=۶+\sqrt{x+a}$ و $g(x)=-۲x+\sqrt{۴x+۱۷}$ باشد و طول نقطهٔ برخورد نمودار تابع $y=f^{-۱}og(x)$ با خط $y+x-۱=۰$ برابر a باشد، مقدار a کدام است؟

۱) -۴ ۲) -۲ ۳) ۴ ۴) ۲

پاسخ: گزینه ۲ (متوسط ـ مفهومی / محاسباتی ـ ۱۱۰۲)

حواست به تابع معکوس باشه:

$$A\begin{vmatrix}\alpha\\ \beta\end{vmatrix}\in f^{-۱} \Leftrightarrow A'\begin{vmatrix}\beta\\ \alpha\end{vmatrix}\in f \text{ یا } f^{-۱}(\alpha)=\beta \Leftrightarrow f(\beta)=\alpha$$

پاسخ تشریحی:

اگر a طول نقطهٔ برخورد تابع $y=f^{-۱}og(x)$ با خط $y=-x+۱$ باشد، در این صورت $(f^{-۱}og)(a)=-a+۱$ است. پس:

$$(f^{-۱}og)(a)=-a+۱ \Rightarrow f^{-۱}(g(a))=-a+۱ \Rightarrow f(-a+۱)=g(a) \Rightarrow ۶+\sqrt{-a+۱+a}=-۲a+\sqrt{۴a+۱۷} \Rightarrow ۷+۲a=\sqrt{۴a+۱۷}$$

با شرط $۷+۲a\geq ۰$ یعنی $a\geq -\frac{۷}{۲}$ طرفین را به توان ۲ می‌رسانیم. ببینید:

$$۴۹+۲۸a+۴a^۲=۴a+۱۷ \Rightarrow ۴a^۲+۲۴a+۳۲=۰ \xrightarrow{\div ۴} a^۲+۶a+۸=۰ \Rightarrow (a+۲)(a+۴)=۰ \begin{cases} a=-۲ \text{ ق ق} \\ a=-۴ \text{ غ ق ق} \end{cases}$$

گروه آموزشی ماز

۱۰- باقی‌ماندهٔ تقسیم چندجمله‌ای $P(x)$ بر $۲x+۱$ و $۳x+۱$ به ترتیب برابر ۷ و -۱ است. اگر باقی‌ماندهٔ تقسیم $P(x)$ بر $۶x^۲+۵x+۱$ را $R(x)$ بنامیم، $R(۱)$ کدام است؟

۱) ۲۱ ۲) ۵۵ ۳) -۳۱ ۴) -۶۵

پاسخ: گزینه ۴ (متوسط ـ مفهومی / محاسباتی ـ ۱۲۰۱)

تقسیم:

مقسوم ↑ $A(x)$ | مقسوم‌علیه ↑ $B(x)$

$\Rightarrow A(x)=B(x)\times Q(x)+R(x)$

$Q(x)\rightarrow$ خارج‌قسمت

$R(x)\downarrow$ باقی‌مانده

باید درجهٔ باقی‌ماندهٔ $(R(x))$ از درجهٔ مقسوم‌علیه $(B(x))$ کمتر باشد.

یه چیز دوست‌داشتنی از تقسیم:

اگر مقسوم‌علیه درجهٔ اول باشد، برای محاسبهٔ باقی‌مانده کافی است ریشهٔ مقسوم‌علیه را در مقسوم قرار دهیم.

www.biomaze.ir
AzmonVIP

پاسخ تشریحی:

باقی‌ماندهٔ تقسیم چندجمله‌ای $P(x)$ بر $2x+1$ برابر ۷ است. پس:

$$\begin{array}{c|l} P(x) & 2x+1 \\ \vdots & q_1(x) \\ \hline 7 & \end{array} \Rightarrow R = P(-\frac{1}{2}) = 7$$

باقی‌ماندهٔ تقسیم چندجمله‌ای $P(x)$ بر $3x+1$ برابر -1 است. پس:

$$\begin{array}{c|l} P(x) & 3x+1 \\ \vdots & q_2(x) \\ \hline -1 & \end{array} \Rightarrow R = P(-\frac{1}{3}) = -1$$

باقی‌ماندهٔ تقسیم $P(x)$ بر $6x^2+5x+1$ حداکثر درجهٔ اول است. پس باقی‌مانده به شکل $R(x)=ax+b$ است. بنابراین:

$$\begin{array}{c|l} P(x) & 6x^2+5x+1 \\ \vdots & Q(x) \\ \hline ax+b & \end{array} \Rightarrow P(x) = (6x^2+5x+1)\times Q(x) + ax + b \Rightarrow P(x) = (2x+1)(3x+1)Q(x) + ax + b$$

$$\begin{matrix} P(-\frac{1}{2}) = 7 \Rightarrow -\frac{1}{2}a + b = 7 \\ P(-\frac{1}{3}) = -1 \Rightarrow -\frac{1}{3}a + b = -1 \end{matrix} \Rightarrow -\frac{1}{6}a = 8 \Rightarrow a = -48 \Rightarrow b = -17$$

پس باقی‌ماندهٔ تقسیم به شکل $R(x) = -48x - 17$ است و خواهیم داشت:

$$R(1) = -48 - 17 = -65$$

گروه آموزشی ماز

۱۱- اگر $\sin\alpha + \cos\alpha = \frac{3}{\sqrt{17}}$ باشد، مقدار $\tan\alpha$ کدام‌یک از مقادیر زیر می‌تواند باشد؟

۱) $-\frac{1}{8}$ ۲) $-\frac{1}{6}$ ۳) $-\frac{1}{3}$ ۴) $-\frac{1}{4}$

پاسخ: گزینه ۴ (متوسط ـ مفهومی / محاسباتی ـ ۱۱۰۴)

نسبت‌های مثلثاتی ۲ برابر زاویه:

$$\sin 2\alpha = \frac{2\tan\alpha}{1+\tan^2\alpha} \qquad (\sin\alpha \pm \cos\alpha)^2 = 1 \pm \sin 2\alpha$$

پاسخ تشریحی:

$$\sin\alpha + \cos\alpha = \frac{3}{\sqrt{17}} \xrightarrow{\text{توان ۲}} 1 + \sin 2\alpha = \frac{9}{17} \Rightarrow \sin 2\alpha = \frac{-8}{17}$$

$$\Rightarrow \sin 2\alpha = \frac{2\tan\alpha}{1+\tan^2\alpha} = -\frac{8}{17} \Rightarrow 8(1+\tan^2\alpha) = -34\tan\alpha \Rightarrow 4\tan^2\alpha + 17\tan\alpha + 4 = 0$$

$$\Rightarrow (4\tan\alpha + 1)(\tan\alpha + 4) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \tan\alpha = -4 \\ \tan\alpha = -\frac{1}{4} \end{cases}$$

گروه آموزشی ماز

۱۲- تعداد جواب‌های معادلهٔ $\sqrt{3}\sin\frac{x}{2} + \cos\frac{x}{2} = 2\cos 2x$ در بازهٔ $\left[0, \frac{3\pi}{2}\right]$ کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) فاقد جواب

پاسخ: گزینه ۲ (متوسط ـ مفهومی / محاسباتی ـ ۱۲۰۲)

نسبت‌های مثلثاتی مجموع و تفاضل ۲ زاویه:

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\sin\beta$$
$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha\cos\beta \mp \sin\alpha\sin\beta$$

حل معادلهٔ مثلثاتی:

$$\cos x = \cos y \Rightarrow x = 2k\pi \pm y$$

پاسخ تشریحی:

دو طرف معادلهٔ $\sqrt{۳}\sin\frac{x}{۲}+\cos\frac{x}{۲}=۲\cos ۲x$ را بر ۲ تقسیم می‌کنیم. ببینید:

$$\sqrt{۳}\sin\frac{x}{۲}+\cos\frac{x}{۲}=۲\cos ۲x \xrightarrow{\div ۲} \frac{\sqrt{۳}}{۲}\sin\frac{x}{۲}+\frac{۱}{۲}\cos\frac{x}{۲}=\cos ۲x \Rightarrow \cos\frac{\pi}{۳}\times\cos\frac{x}{۲}+\sin\frac{\pi}{۳}\times\sin\frac{x}{۲}=\cos ۲x$$

$$\Rightarrow \cos(\frac{\pi}{۳}-\frac{x}{۲})=\cos ۲x \Rightarrow ۲x=۲k\pi\pm(\frac{\pi}{۳}-\frac{x}{۲}) \Rightarrow \begin{cases}\frac{۵}{۲}x=۲k\pi+\frac{\pi}{۳}\Rightarrow x=\frac{۴k\pi}{۵}+\frac{۲}{۱۵}\pi\\ \frac{۳}{۲}x=۲k\pi-\frac{\pi}{۳}\Rightarrow x=\frac{۴k\pi}{۳}-\frac{۲}{۹}\pi\end{cases}$$

$x=\frac{۴k\pi}{۵}+\frac{۲}{۱۵}\pi$

k	x
۰	$\frac{۲}{۱۵}\pi$ ✓
۱	$\frac{۱۴}{۱۵}\pi$ ✓
۲	$\frac{۲۶}{۱۵}\pi$ ✗

$x=\frac{۴k\pi}{۳}-\frac{۲}{۹}\pi$

k	x
۰	$-\frac{۲}{۹}\pi$ ✗
۱	$\frac{۱۰}{۹}\pi$ ✓
۲	$\frac{۲۲}{۹}\pi$ ✗

$\Rightarrow$ بنابراین معادلهٔ داده شده در بازهٔ $[۰,\frac{۳\pi}{۲}]$ دارای ۳ جواب است.

گروه آموزشی ماز

۱۳- اگر $\lim\limits_{x\to ۱}\frac{\sqrt{x+۱۵}-\sqrt{۳x+a}}{\sqrt[۶]{x}-۱}=\frac{۹}{b+۱}$ باشد، حاصل $\frac{a+۱}{b}$ کدام است؟

۱) $-\frac{۱}{۲}$ ۲) $\frac{۱}{۲}$ ۳) ۲ ۴) -۲

پاسخ: گزینه ۴ (متوسط ـ مفهومی / محاسباتی ـ ۱۱۰۵)

حتماً این نکته یادتون باشه:

اگر حاصل $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}$ برابر عدد مشخص و حقیقی k باشد، در این صورت:

$$\xrightarrow{\lim\limits_{x\to a} g(x)=۰} \lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{f(a)}{\text{۰حدی}}=k\Rightarrow$$

چون حاصل حد، عدد مشخص k می‌شود، پس حد باید مبهم $(\frac{۰}{۰})$ شود در نتیجه صورت کسر یعنی $f(a)$ هم صفر می‌شود. (۰حدی)

$$\xrightarrow{\lim\limits_{x\to a} f(x)=۰} \lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\text{۰حدی}}{g(a)}=k\neq ۰\Rightarrow$$

چون حاصل حد، عدد مشخص k می‌شود، پس حد باید مبهم $(\frac{۰}{۰})$ شود در نتیجه مخرج کسر یعنی $g(a)$ هم صفر می‌شود. (۰ حدی)

قضیهٔ هوپیتال:

اگر f و g توابعی مشتق‌پذیر و $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}$ حدی $\frac{۰}{۰}$ (مبهم) باشد برای رفع ابهام می‌توانیم از قضیهٔ هوپیتال به صورت زیر استفاده کنیم:

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{۰}{۰}\xrightarrow{HOP}\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

پاسخ تشریحی:

چون حد مخرج در نقطهٔ $x=1$ برابر صفر است، پس باید حد صورت کسر هم برابر صفر باشد تا حد به حالت مبهم $\frac{0}{0}$ برسد و پس از رفع ابهام حاصل حد برابر یک عدد حقیقی شود، بنابراین داریم:

$$x=1 \xrightarrow{\text{جای‌گذاری در صورت کسر}} \sqrt{16}-\sqrt{3+a}=0 \Rightarrow \sqrt{3+a}=\sqrt{16} \Rightarrow 3+a=16 \Rightarrow a=13$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x+15}-\sqrt{3x+13}}{\sqrt[6]{x}-1} \xrightarrow[\frac{0}{0}]{\text{HOP}} \lim_{x\to 1}\frac{\frac{1}{2\sqrt{x+15}}-\frac{3}{2\sqrt{3x+13}}}{\frac{1}{6\sqrt[6]{x^5}}}=\frac{\frac{1}{8}-\frac{3}{8}}{\frac{1}{6}}=\frac{-3}{2}$$

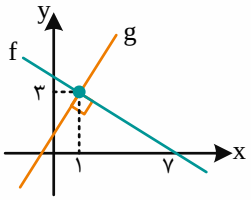
$$\Rightarrow \frac{9}{b+1}=-\frac{3}{2} \Rightarrow b=-7$$

$$\Rightarrow \frac{a+1}{b}=\frac{14}{-7}=-2$$

بنابراین جواب برابر است با:

گروه آموزشی ماز

۱۴- نمودار توابع خطی f و g به صورت زیر است. حاصل $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{gof(x)}{g^{-1}(x)}$ کدام است؟



۱) $\frac{1}{2}$
۲) $-\frac{1}{2}$
۳) -2
۴) 2

پاسخ: گزینه ۳ (متوسط ـ محاسباتی ـ ۱۲۰۳)

پاسخ تشریحی:

ضابطهٔ توابع f و g را می‌نویسیم. ببینید:

تابع f از نقطهٔ $(1,3)$ و $(7,0)$ می‌گذرد. پس:

$$m=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=\frac{0-3}{7-1}=-\frac{1}{2} \Rightarrow y-0=-\frac{1}{2}(x-7) \Rightarrow y=-\frac{1}{2}x+\frac{7}{2}$$

تابع خطی g بر f عمود است، پس شیب آن ۲ است. بنابراین:

$$m=2 \Rightarrow y-3=2(x-1) \Rightarrow y=2x+1$$

بنابراین ضابطهٔ توابع f و g به صورت $f(x)=-\frac{1}{2}x+\frac{7}{2}$ و $g(x)=2x+1$ می‌باشد. حال ضابطهٔ تابع $g^{-1}(x)$ را محاسبه می‌کنیم:

$$g(x)=2x+1 \Rightarrow g^{-1}(x)=\frac{x-1}{2}$$

از طرفی، ضابطهٔ تابع $y=gof(x)$ به صورت زیر است:

$$y=gof(x)=g(f(x))=2f(x)+1=2(-\frac{1}{2}x+\frac{7}{2})+1 \Rightarrow gof(x)=-x+8$$

بنابراین:

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{gof(x)}{g^{-1}(x)}=\lim_{x\to-\infty}\frac{-x+8}{\frac{1}{2}(x-1)} \Rightarrow \lim_{x\to-\infty}\frac{-x}{\frac{1}{2}x}=-2$$

گروه آموزشی ماز

www.biomaze.ir

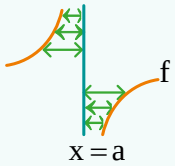
۱۵- نمودار تابع $f(x)=\frac{(x+۲)(x^۲+۲x-۶)}{(۲x+a)(۹x^۲-۶x+۱)}$ دارای دقیقاً ۲ خط مجانب است. مجموع مقادیر قابل قبول برای a کدام است؟

۱) $\frac{۱۰}{۳}$ ۲) $\frac{۴}{۳}$ ۳) $\frac{۲۲}{۳}$ ۴) ۴

پاسخ: گزینه ۳ (متوسط ـ مفهومی / محاسباتی ـ ۱۲۰۳)

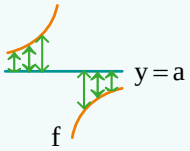
مجانب قائم:

خط $x=a$ را مجانب قائم تابع $f(x)$ می‌گوییم هرگاه $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\infty$. نمودار تابع به مجانب قائم نزدیک و نزدیک‌تر می‌شود. $x=a$ زمانی مجانب قائم تابع است که حداقل در یک همسایگی آن، تابع تعریف شود. برای به دست آوردن مجانب قائم، ریشه‌های مخرج تابع کسری را به دست می‌آوریم البته در صورتی که صورت را صفر نکند. توابعی مانند $y=\sin x$ که برد محدود دارند، مجانب قائم ندارند.



مجانب افقی:

خط $y=a$ را مجانب افقی تابع $f(x)$ می‌گوییم هرگاه $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=a$ نمودار تابع به مجانب افقی نزدیک و نزدیک‌تر می‌شود. برای به دست آوردن مجانب افقی باید $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$ را به دست آوریم. اگر حاصل این حد، عدد مشخص a شود، $y=a$ مجانب افقی تابع است. توابعی مانند $y=\sqrt{۴-x^۲}$ که دامنهٔ محدود دارند، مجانب افقی ندارند.



پاسخ تشریحی:

چون صورت و مخرج هم درجه هستند، پس تابع یک مجانب افقی دارد. ببینید:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{(x+۲)(x^۲+۲x-۶)}{(۲x+a)(۹x^۲-۶x+۱)}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^۳}{۱۸x^۳}=\frac{۱}{۱۸}\Rightarrow y=\frac{۱}{۱۸}$$

$y=\frac{۱}{۱۸}$ مجانب افقی تابع است.

چون تابع ۲ خط مجانب دارد و یکی از مجانب‌های آن افقی است، پس مجانب دیگر آن قائم است. یعنی تابع $f(x)$ فقط یک مجانب قائم دارد. بنابراین:

$$f(x)=\frac{(x+۲)(x+۱-\sqrt{۷})(x+۱+\sqrt{۷})}{(۲x+a)(۳x-۱)^۲}$$

چند حالت وجود دارد:

الف) ریشهٔ عبارت $(۳x-۱)^۲$ همان ریشهٔ عبارت $۲x+a$ است. پس:

$$۳x-۱=۰\Rightarrow x=\frac{۱}{۳}\Rightarrow ۲x+a\Big|_{x=\frac{۱}{۳}}=۰\Rightarrow\frac{۲}{۳}+a=۰\Rightarrow a=-\frac{۲}{۳}$$

ب) $x=-۲$ ریشهٔ مشترک صورت و مخرج است. پس:

$$۲x+a\Big|_{x=-۲}=۰\Rightarrow a=۴$$

ج) $x=\sqrt{۷}-۱$ ریشهٔ مشترک صورت و مخرج است. پس:

$$۲x+a\Big|_{x=\sqrt{۷}-۱}=۰\Rightarrow ۲(\sqrt{۷}-۱)+a=۰\Rightarrow a=۲-۲\sqrt{۷}$$

د) $x=-\sqrt{۷}-۱$ ریشهٔ مشترک صورت و مخرج است. پس:

$$۲x+a\Big|_{x=-\sqrt{۷}-۱}=۰\Rightarrow ۲(-\sqrt{۷}-۱)+a=۰\Rightarrow a=۲\sqrt{۷}+۲$$

بنابراین مجموع مقادیر قابل قبول برای a به صورت زیر است:

$$\text{مجموع مقادیر قابل قبول برای } a=-\frac{۲}{۳}+۴+۲-۲\sqrt{۷}+۲\sqrt{۷}+۲=\frac{۲۲}{۳}$$

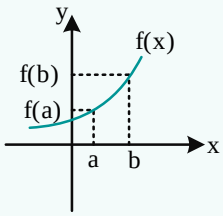
۱۶- آهنگ تغییر متوسط تابع $f(x)=\sqrt{x-8}+mx^2+1$ در بازهٔ $[9,12]$ با آهنگ تغییر لحظه‌ای تابع در نقطهٔ ابتدای بازه برابر است. m کدام است؟

۱) $\frac{1}{36}$ ۲) $\frac{1}{24}$ ۳) $\frac{1}{12}$ ۴) $\frac{1}{18}$

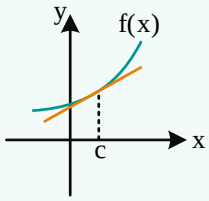
پاسخ: گزینه ۴ (آسان ـ محاسباتی ـ ۱۲۰۴)

آهنگ تغییرات تابع:

آهنگ تغییر متوسط: شیب خط قاطع $=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=$ آهنگ تغییر متوسط تابع در بازهٔ $[a,b]$



آهنگ تغییر لحظه‌ای: شیب خط مماس $=f'(c)=$ آهنگ تغییر لحظه‌ای تابع در $x=c$



پاسخ تشریحی:

ابتدا آهنگ متوسط تغییر تابع در بازهٔ $[9,12]$ را محاسبه می‌کنیم. پس:

$$\text{آهنگ متوسط تغییر تابع } f=\frac{f(12)-f(9)}{12-9}=\frac{(2+144m+1)-(1+81m+1)}{3}=\frac{63m+1}{3}=21m+\frac{1}{3}$$

$$f(x)=\sqrt{x-8}+mx^2+1\Rightarrow f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x-8}}+2mx$$

$$\text{آهنگ تغییر لحظه‌ای در } x=9=f'(9)=\frac{1}{2}+18m$$

$$\Rightarrow 21m+\frac{1}{3}=18m+\frac{1}{2}\Rightarrow 3m=\frac{1}{6}\Rightarrow m=\frac{1}{18}$$

بنابراین طبق فرض داریم:

گروه آموزشی ماز

۱۷- اگر $f(x)=\frac{2}{\sqrt{x-6\sqrt{x-9}}-\sqrt{x+6\sqrt{x-9}}}$ باشد، مقدار $f'(13)$ کدام است؟

۱) صفر ۲) $-\frac{1}{16}$ ۳) $\frac{1}{16}$ ۴) موجود نیست

پاسخ: گزینه ۳ (متوسط ـ محاسباتی ـ ۱۲۰۴)

مشتق تابع رادیکالی با فرجهٔ دو:

u عبارتی برحسب x است.

$$y=\sqrt{u}\Rightarrow y'=\frac{u'}{2\sqrt{u}}$$

پاسخ تشریحی:

ابتدا رادیکال‌ها را به صورت زیر ساده می‌کنیم:

$$\left.\begin{aligned}\sqrt{x+6\sqrt{x-9}}&=\sqrt{x-9+6\sqrt{x-9}+9}=\sqrt{(\sqrt{x-9}+3)^2}=|\sqrt{x-9}+3|=\sqrt{x-9}+3\\ \sqrt{x-6\sqrt{x-9}}&=\sqrt{x-9-6\sqrt{x-9}+9}=\sqrt{(\sqrt{x-9}-3)^2}=|\sqrt{x-9}-3|\end{aligned}\right\}\Rightarrow f(x)=\frac{2}{|\sqrt{x-9}-3|-(\sqrt{x-9}+3)}$$

حال تابع $f(x)$ را به صورت دو ضابطه‌ای می‌نویسیم. توجه داریم $D_f=(9,+\infty)$ است.

$$f(x)=\begin{cases}\frac{-1}{3} & x\geq 18\\ \frac{-1}{\sqrt{x-9}} & 9<x<18\end{cases}$$

AzmonVIP
www.biomaze.ir

برای محاسبهٔ $f'(۱۳)$ از ضابطهٔ پایین مشتق می‌گیریم. ببینید:

$$f(x)=\frac{-۱}{\sqrt{x-۹}} \Rightarrow f'(x)=\frac{۰\times\sqrt{x-۹}-\frac{۱}{۲\sqrt{x-۹}}\times -۱}{\sqrt{x-۹}^{۲}} \Rightarrow f'(x)=\frac{۱}{۲(x-۹)\sqrt{x-۹}} \Rightarrow f'(۱۳)=\frac{۱}{۲\times ۴\times \sqrt{۴}}=\frac{۱}{۱۶}$$

گروه آموزشی ماز

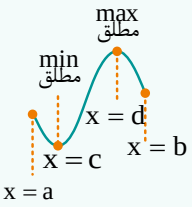
۱۸- اگر نقطهٔ $A(a,b)$ نقطهٔ ماکزیمم مطلق تابع $f(x)=۲x^{۵}-۲x^{۴}-۶x^{۳}+۸$ روی بازهٔ $[-۲,\sqrt{۲}]$ باشد، مقدار ab کدام است؟

۱) صفر ۲) -۱۰ ۳) -۸ ۴) -۸۰

پاسخ: گزینه ۲ (متوسط ـ محاسباتی ـ ۱۲۰۵)

نقاط اکسترمم مطلق:

برای به دست آوردن نقاط max و min مطلق تابع پیوستهٔ $f(x)$ در بازهٔ $[a,b]$ کافی است نقاط بحرانی تابع $f(x)$ را در این بازه به دست آوریم و عرض نقاط بحرانی که شامل $x=a$ و $x=b$ نیز می‌شود را محاسبه کرده و با هم مقایسه کنیم. هر کدام بیشتر بود max مطلق و هر کدام کمتر بود min مطلق است.



پاسخ تشریحی:

نقاط بحرانی تابع $f(x)$ را محاسبه می‌کنیم:

$$f(x)=۲x^{۵}-۲x^{۴}-۶x^{۳}+۸ \Rightarrow f'(x)=۱۰x^{۴}-۸x^{۳}-۱۸x^{۲}=۰ \Rightarrow$$

$$x^{۲}(۱۰x^{۲}-۸x-۱۸)=۰ \Rightarrow \begin{cases} x^{۲}=۰ \Rightarrow x=۰ \checkmark \\ ۱۰x^{۲}-۸x-۱۸=۰ \Rightarrow \begin{cases} x=-۱ \checkmark \\ x=\frac{۱۸}{۱۰}=\frac{۹}{۵} \text{ غ ق ق} \end{cases} \end{cases} \Rightarrow \text{نقاط بحرانی}=\{-۲,-۱,۰,\sqrt{۲}\}$$

عرض تمامی نقاط بحرانی را با هم مقایسه می‌کنیم:

$$f(-۲)=-۶۴-۳۲+۴۸+۸=-۴۰$$
$$f(-۱)=-۲-۲+۶+۸=۱۰$$
$$f(۰)=۸$$
$$f(\sqrt{۲})=۸\sqrt{۲}-۸-۱۲\sqrt{۲}+۸=-۴\sqrt{۲}$$

پس نقطهٔ $A(-۱,۱۰)$ نقطهٔ ماکزیمم مطلق تابع f است. یعنی $a=-۱$ و $b=۱۰$ است، پس: $ab=-۱۰$

گروه آموزشی ماز

۱۹- روی کدام بازه نمودار تابع $f(x)=x^{۲}|۲x-۳|$ نزولی است و تقعر رو به بالا دارد؟

۱) $(۰,\frac{۳}{۲})$ ۲) $(۱,\frac{۳}{۲})$ ۳) $(-\infty,۰)$ ۴) $(\frac{۳}{۲},+\infty)$

پاسخ: گزینه ۳ (متوسط ـ محاسباتی ـ ۱۲۰۵)

درسنامه:

برای تشخیص تقعر تابع پیوسته و مشتق‌پذیر $f(x)$ کافی است مشتق دوم تابع را تعیین علامت کنیم:

برای تشخیص یکنوایی تابع پیوستهٔ $f(x)$ کافی است مشتق اول تابع را تعیین علامت کنیم:

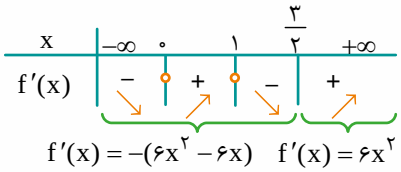
پاسخ تشریحی:

ابتدا تابع را به صورت دو ضابطه‌ای می‌نویسیم:

$$f(x)=x^{۲}|۲x-۳|=\begin{cases}۲x^{۳}-۳x^{۲} & x\geq\frac{۳}{۲}\\ -(۲x^{۳}-۳x^{۲}) & x\leq\frac{۳}{۲}\end{cases}\Rightarrow f'(x)=\begin{cases}۶x^{۲}-۶x & x>\frac{۳}{۲}\\ -(۶x^{۲}-۶x) & x<\frac{۳}{۲}\end{cases}\Rightarrow f''(x)=\begin{cases}۱۲x-۶ & x>\frac{۳}{۲}\\ -(۱۲x-۶) & x<\frac{۳}{۲}\end{cases}$$

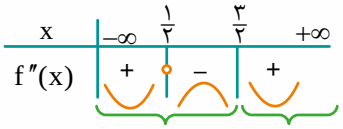
شرط نزولی بودن این است که $f'(x)<۰$ باشد و شرط تقعر رو به بالا این است که $f''(x)>۰$ باشد. $f'(x)$ و $f''(x)$ را تعیین علامت می‌کنیم.

بنابراین تابع f در بازهٔ $(-\infty,۰)\cup(۱,\frac{۳}{۲})$ نزولی است.



$$f'(x)=-(۶x^{۲}-۶x)\quad f'(x)=۶x^{۲}-۶x$$

بنابراین تابع f در بازهٔ $(\frac{۳}{۲},+\infty)\cup(-\infty,\frac{۱}{۲})$ تقعر رو به بالا دارد.



$$f''(x)=-(۱۲x-۶)\quad f''(x)=(۱۲x-۶)$$

از اشتراک بازه‌های مذکور، می‌توان نتیجه گرفت که تابع f در بازهٔ $(-\infty,۰)$ نزولی بوده و تقعر رو به بالا دارد.

گروه آموزشی ماز

۲۰- داخل نیم‌دایره‌ای به شعاع ۱۶ سانتی‌متر، مستطیلی با محیط ماکزیمم محاط شده است. محیط این مستطیل کدام است؟

۱) $\frac{۷۲}{\sqrt{۵}}$ ۲) $\frac{۷۲}{\sqrt{۱۵}}$ ۳) $\frac{۱۴۴}{\sqrt{۵}}$ ۴) $۳۲\sqrt{۵}$

پاسخ: گزینه ۴ (متوسط ـ محاسباتی ـ ۱۲۰۵)

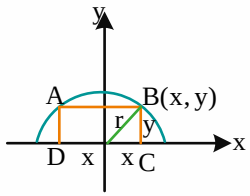
بهینه‌سازی:

در مسائل مربوط به بهینه‌سازی به دنبال محاسبهٔ max یا min عبارتی هستیم که به آن تابع هدف می‌گوییم. تابع هدف معمولاً شامل دو یا چند متغیر است که ابتدا باید با روابط ریاضی تعداد متغیرها را به یکی کاهش دهیم و بعد max یا min تابع هدف را محاسبه کنیم.

پاسخ تشریحی:

اگر فرض کنیم $B(x,y)$ یکی از رئوس مستطیل است، طبق شکل محیط مستطیل برابر است با :

$$P=۲(۲x+y)=۴x+۲y$$



طبق قضیهٔ فیثاغورس داریم:

$$r^{۲}=x^{۲}+y^{۲}\Rightarrow x^{۲}+y^{۲}=۲۵۶\Rightarrow y=\sqrt{۲۵۶-x^{۲}}$$

$$P=۴x+۲\sqrt{۲۵۶-x^{۲}}\Rightarrow P'=۴+۲\times\frac{-۲x}{۲\sqrt{۲۵۶-x^{۲}}}=۰\Rightarrow ۴\sqrt{۲۵۶-x^{۲}}=۲x\Rightarrow ۴(۲۵۶-x^{۲})=x^{۲}\Rightarrow ۵x^{۲}=۴\times۲۵۶$$

$$x=\frac{۳۲}{\sqrt{۵}}\Rightarrow \max(P)=۴\times\frac{۳۲}{\sqrt{۵}}+۲\times\sqrt{۲۵۶-\frac{۱۰۲۴}{۵}}=\frac{۱۲۸}{\sqrt{۵}}+۲\times\sqrt{\frac{۲۵۶}{۵}}=\frac{۱۲۸}{\sqrt{۵}}+\frac{۳۲}{\sqrt{۵}}=\frac{۱۶۰}{\sqrt{۵}}=۳۲\sqrt{۵}$$

گروه آموزشی ماز

www.biomaze.ir
AzmonVIP

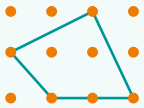
۲۱- عدد مساحت یک چندضلعی شبکه‌ای، ۳ برابر تعداد نقاط مرزی آن است. کمترین مقدار حاصل‌ضرب تعداد نقاط درونی و نقاط مرزی این چندضلعی کدام است؟

۱) ۱۵ ۲) ۴۴ ۳) ۵۰ ۴) ۹۶

پاسخ: گزینه ۲ (متوسط ـ مفهومی / محاسباتی ـ ۱۰۰۳)

نقاط شبکه‌ای و مساحت:

نقاط شبکه‌ای نقاطی هستند که در صفحه روی خطوط افقی و عمودی قرار دارند و فاصله‌شان از هم ۱ واحد است. چندضلعی شبکه‌ای، چندضلعی است که رئوس آن روی نقاط شبکه‌ای باشد.



مطابق فرمول پیک، مساحت هر چندضلعی شبکه‌ای از رابطهٔ $S=\frac{b}{2}+i-1$ به دست می‌آید که در آن b تعداد نقاط مرزی یا همان تعداد نقاط روی اضلاع می‌باشد و i تعداد نقاط درونی چندضلعی شبکه‌ای است.

پاسخ تشریحی:

اگر تعداد نقاط مرزی و درونی این چندضلعی به ترتیب برابر b و i باشد، آن‌گاه داریم:

$$S=\frac{b}{2}+i-1 \xrightarrow{S=3b} 3b=\frac{b}{2}+i-1 \Rightarrow \frac{5}{2}b=i-1 \Rightarrow b=\frac{2}{5}(i-1) \xrightarrow{b\geq 3} \frac{2}{5}(i-1)\geq 3 \Rightarrow i-1\geq \frac{15}{2} \Rightarrow i\geq \frac{17}{2}$$

$$i=9 \Rightarrow b=\frac{16}{5} \text{ غ‌ق‌ق}$$

$$i=10 \Rightarrow b=\frac{18}{5} \text{ غ‌ق‌ق}$$

$$i=11 \Rightarrow b=4 \text{ ق} \Rightarrow \min(b\times i)=4\times 11=44$$

گروه آموزشی ماز

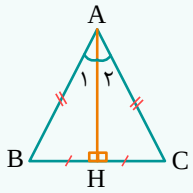
۲۲- مساحت مثلثی با اندازهٔ ارتفاع‌های ۶، ۴، ۴ کدام است؟

۱) $6\sqrt{3}$ ۲) $9\sqrt{2}$ ۳) ۸ ۴) ۱۲

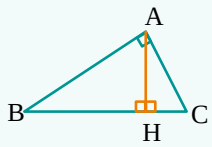
پاسخ: گزینه ۲ (متوسط ـ مفهومی / محاسباتی ـ ۱۰۰۳)

ویژگی مهم در مثلث متساوی‌الساقین:

اگر در مثلث متساوی‌الساقین $(AB=AC)\overset{\triangle}{ABC}$ ارتفاع وارد بر ضلع BC (که ساق مثلث نیست) را رسم کنیم، این ارتفاع، میانه و عمودمنصف ضلع BC و نیمساز زاویهٔ رأس A است.

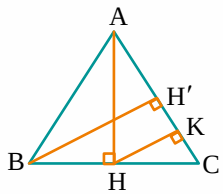


مثلث قائم‌الزاویه را فراموش نکن: اگر AH ارتفاع وارد بر وتر یک مثلث قائم‌الزاویه باشد، آن‌گاه:



$$AH^2=BH\times HC \qquad AB^2=BH\times BC \qquad AC^2=CH\times BC$$

پاسخ تشریحی:



اندازهٔ دو ارتفاع برابر ۴ است. پس این مثلث متساوی‌الساقین است. مطابق شکل ارتفاع $AH=6$، میانهٔ ضلع BC نیز هست. از نقطهٔ H، عمود HK را بر ساق AC رسم می‌کنیم که طول آن (بر اساس قضیهٔ تالس) نصف ارتفاع $BH'=4$، یعنی برابر ۲ است. طبق قضیهٔ فیثاغورس در مثلث $\overset{\triangle}{AHK}$ داریم:

$$AK^2=AH^2-HK^2=36-4=32 \Rightarrow AK=4\sqrt{2}$$

www.biomaze.ir
AzmonVIP

از طرفی، طبق روابط طولی در مثلث قائم‌الزاویهٔ $\overset{\triangle}{AHC}$ داریم:

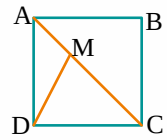
$$AH^2 = AK \times AC \Rightarrow AC \times 4\sqrt{2} = 6^2 \Rightarrow AC = \frac{9}{\sqrt{2}}$$

بنابراین:

$$S_{\overset{\triangle}{ABC}} = \frac{1}{2} BH' \times AC = \frac{1}{2} \times 4 \times \frac{9}{\sqrt{2}} = \frac{18}{\sqrt{2}} = 9\sqrt{2}$$

گروه آموزشی ماز

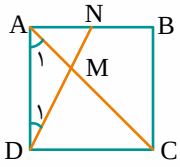
۲۳- در شکل زیر، چهارضلعی ABCD مربع و $C\hat{M}D = 75^\circ$ است. اگر $AB = \sqrt{6}$ باشد، طول پاره‌خط CM کدام است؟



۱) $3(\sqrt{3}-1)$
۲) $\sqrt{3}+1$
۳) $2(2-\sqrt{2})$
۴) $\sqrt{2}+1$

پاسخ: گزینه ۱ (متوسط ـ مفهومی / محاسباتی ـ ۱۰۰۲)

پاسخ تشریحی:



زاویهٔ $C\hat{M}D$ برای مثلث $\overset{\triangle}{AMD}$ زاویهٔ خارجی است. از طرفی، هر قطر مربع با اضلاع آن زاویهٔ 45° می‌سازد، بنابراین داریم:

$$C\hat{M}D = \hat{A}_1 + \hat{D}_1 \Rightarrow 75^\circ = 45^\circ + \hat{D}_1 \Rightarrow \hat{D}_1 = 30^\circ$$

مطابق شکل DM را از سمت M امتداد می‌دهیم تا ضلع AB را در نقطهٔ N قطع کند. می‌دانیم طول ضلع روبه‌رو به زاویهٔ 30° در یک مثلث قائم‌الزاویه نصف طول وتر است. بنابراین اگر طول ضلع مربع را a در نظر بگیریم، داریم:

$$\overset{\triangle}{AND}: DN^2 = AD^2 + AN^2 \Rightarrow (2AN)^2 = a^2 + AN^2 \Rightarrow 3AN^2 = a^2 \Rightarrow AN^2 = \frac{a^2}{3} \Rightarrow AN = \frac{a}{\sqrt{3}}$$

با توجه به موازی بودن AB و CD، دو مثلث $\overset{\triangle}{AMN}$ و $\overset{\triangle}{CMD}$ متشابه هستند و داریم:

$$\frac{CM}{AM} = \frac{CD}{AN} = \frac{a}{\frac{a}{\sqrt{3}}} = \frac{\sqrt{3}}{1} \xrightarrow{\text{ترکیب نسبت در مخرج}} \frac{CM}{AC} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}+1} \Rightarrow CM = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}+1} AC \Rightarrow CM = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}+1} \times (\sqrt{2} \times \sqrt{6})$$

$$\Rightarrow CM = \frac{6}{\sqrt{3}+1} \times \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}-1} = 3(\sqrt{3}-1)$$

گروه آموزشی ماز

۲۴- در یک ذوزنقهٔ متساوی‌الساقین به طول قاعده‌های ۲ و ۸، نیمسازهای زوایای داخلی در یک نقطه همرس هستند. مجموع فواصل این نقطه از اضلاع ذوزنقه کدام است؟

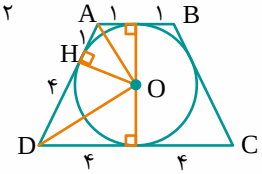
۱) ۴
۲) ۶
۳) ۸
۴) ۱۲

پاسخ: گزینه ۳ (متوسط ـ مفهومی ـ ۱۱۰۱)

پاسخ تشریحی:

هرگاه نیمسازهای زوایای داخلی یک چندضلعی در یک نقطه همرس باشند، آن چند ضلعی محیطی است. بنابراین ذوزنقهٔ متساوی‌الساقین ABCD محیط بر یک دایره است و نقطهٔ همرسی نیمسازهای زوایای داخلی آن، مرکز دایرهٔ محاطی ذوزنقه است و در نتیجه فاصلهٔ آن از اضلاع ذوزنقه یکسان است. در ذوزنقهٔ متساوی‌الساقین زوایای مجاور به ساق مکمل یکدیگرند، پس نیمسازهای آن‌ها بر هم عمود و در نتیجه مثلث $\overset{\triangle}{AOD}$ قائم‌الزاویه است. طبق روابط طولی در این مثلث قائم‌الزاویه داریم:

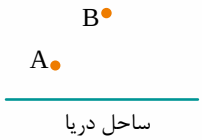
$$OH^2 = AH \times DH = 1 \times 4 = 4 \Rightarrow OH = r = 2$$



بنابراین مجموع فواصل نقطهٔ O از اضلاع ذوزنقه برابر $2 \times 4 = 8$ است.

www.biomaze.ir
AzmonVIP

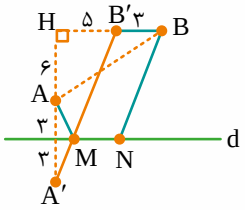
۲۵- مطابق شکل زیر، دو شهر **A** و **B** به فاصلهٔ ۱۰ کیلومتر از یکدیگر و به ترتیب به فاصله‌های ۳ و ۹ کیلومتر از ساحل دریا قرار دارند. اگر بخواهیم جاده‌ای با کوتاه‌ترین طول ممکن بین این دو شهر احداث کنیم، به گونه‌ای که ۳ کیلومتر از جاده در کنار ساحل باشد، طول جادهٔ بین **A** و **B** کدام است؟



۱) ۱۴
۲) ۱۵
۳) ۱۶
۴) ۱۷

پاسخ: گزینه ۳ (متوسط ـ مفهومی / محاسباتی ـ ۱۱۰۲)

پاسخ تشریحی:



$$\overset{\triangle}{AHB}: AB^2 = AH^2 + BH^2 \Rightarrow 10^2 = 6^2 + BH^2 \Rightarrow BH^2 = 100 - 36 = 64 \Rightarrow BH = 8$$

از نقطهٔ B، خطی به طول ۳ کیلومتر موازی با خط d (ساحل دریا) رسم می‌کنیم تا نقطهٔ B' حاصل شود. سپس از نقطهٔ A' (بازتاب نقطهٔ A نسبت به خط d) به B' وصل می‌کنیم تا خط d را در نقطه‌ای مانند M قطع کند. اگر N نقطه‌ای به فاصلهٔ ۳ کیلومتر از M روی خط d باشد، آن‌گاه مسیر AMNB کوتاه‌ترین مسیر ممکن است.

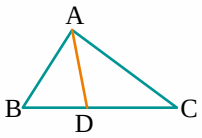
$$\text{طول مسیر AMNB} = AM + MN + NB = A'M + BB' + MB' = (A'M + MB') + BB' = A'B' + BB'$$

$$\overset{\triangle}{A'HB'}: A'B'^2 = A'H^2 + B'H^2 = 12^2 + 5^2 = 169 \Rightarrow A'B' = 13$$

بنابراین طول جادهٔ بین A و B، برابر ۳ + ۱۳ یعنی ۱۶ کیلومتر است.

گروه آموزشی ماز

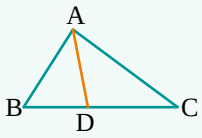
۲۶- در شکل زیر، اگر $BD = \frac{AC}{2} = 3$، $AB = 4$ و $DC = 5$ باشد، طول پاره‌خط **AD** کدام است؟



۱) $\frac{\sqrt{34}}{2}$
۲) $\sqrt{34}$
۳) $\frac{\sqrt{17}}{2}$
۴) $\sqrt{17}$

پاسخ: گزینه ۱ (متوسط ـ مفهومی / محاسباتی ـ ۱۱۰۳)

قضیهٔ استوارت:



$$AB^2 \times DC + AC^2 \times BD = AD^2 \times BC + BD \times DC \times BC$$

پاسخ تشریحی:

طبق قضیهٔ استوارت در مثلث $\overset{\triangle}{ABC}$ داریم:

$$AB^2 \times DC + AC^2 \times BD = AD^2 \times BC + BD \times DC \times BC \Rightarrow 4^2 \times 5 + 6^2 \times 3 = AD^2 \times 8 + 3 \times 5 \times 8$$

$$\Rightarrow 16 \times 5 + 36 \times 3 = 8AD^2 + 120 \Rightarrow 8AD^2 = 68 \Rightarrow AD^2 = \frac{68}{8} = \frac{34}{4} \Rightarrow AD = \frac{\sqrt{34}}{2}$$

گروه آموزشی ماز

۲۷- اگر دستگاه معادلات $\begin{cases} kx + (1-2k)y = a \\ -(k+2)x + 3ky = b \end{cases}$ بی‌شمار جواب داشته باشد، آن‌گاه تعداد جواب‌های دستگاه $\begin{cases} ax + ky = k-2 \\ bx + (-2k-1)y = k+2 \end{cases}$ چگونه است؟

۱) همواره جواب منحصر به فرد دارد.
۲) بی‌شمار جواب دارد یا فاقد جواب است.
۳) جواب منحصر به فرد دارد یا بی‌شمار جواب دارد.
۴) جواب منحصر به فرد دارد یا فاقد جواب است.

www.biomaze.ir

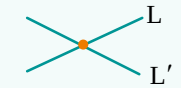
AzmonVIP

پاسخ: گزینه ۳ (سخت ـ مفهومی / محاسباتی ـ ۱۲۰۱)

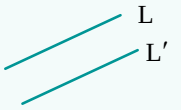
بحث در مورد جواب‌های دستگاه ۲ معادله و ۲ مجهول:

دستگاه معادلات را به صورت $\begin{cases} ax+by=c \\ a'x+b'y=c' \end{cases}$ در نظر می‌گیریم. هر کدام از معادلات داده شده معادلهٔ یک خط هستند. نقاط برخورد ۲ خط، جواب‌های دستگاه را نشان می‌دهد.

دو خط دارای ۳ وضعیت نسبت به هم هستند، بنابراین دستگاه معادلات دارای ۳ وضعیت زیر است. ببینید:



دو خط متقاطع بوده، پس دستگاه دارای ۱ جواب (جواب منحصر به فرد) است. $\frac{a}{a'} \neq \frac{b}{b'}$



دو خط موازی (غیرمنطبق) هستند، پس دستگاه جواب ندارد. $\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'} \neq \frac{c}{c'}$

دو خط موازی و منطبق هستند، پس دستگاه دارای بی‌شمار جواب است. $\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}=\frac{c}{c'}$

پاسخ تشریحی:

ابتدا شرط بی‌شمار جواب را برای دستگاه اول می‌نویسیم. بنابراین:

$$\frac{k}{-k-2}=\frac{1-2k}{3k}=\frac{a}{b}$$

از برابری دو کسر سمت چپ داریم:

$$\frac{k}{-k-2}=\frac{1-2k}{3k} \Rightarrow 3k^2=2k^2+4k-k-2 \Rightarrow k^2-3k+2=0 \Rightarrow (k-2)(k-1)=0 \Rightarrow \begin{cases} k=2 \\ k=1 \end{cases}$$

$$\text{if}: k=1 \Rightarrow \frac{a}{b}=\frac{1}{-1-2}=-\frac{1}{3} \qquad \text{if}: k=2 \Rightarrow \frac{a}{b}=\frac{2}{-2-2}=-\frac{1}{2}$$

اگر $k=1$ و $\frac{a}{b}=-\frac{1}{3}$ باشد، دستگاه دوم دارای وضعیت زیر است:

$\frac{-1}{3}=\frac{1}{-3}=\frac{-1}{3} \Rightarrow$ بنابراین دستگاه بی‌شمار جواب دارد.

اگر $k=2$ و $\frac{a}{b}=-\frac{1}{2}$ باشد، دستگاه دوم دارای وضعیت زیر است:

$\frac{-1}{2} \neq \frac{2}{-5} \neq 0 \Rightarrow$ بنابراین دستگاه دارای جواب منحصر به فرد است.

بنابراین دستگاه معادلات دوم یا بی‌شمار جواب دارد و یا جواب منحصر به فرد دارد.

گروه آموزشی ماز

۲۸- فرض کنید دایرهٔ C بزرگ‌ترین دایرهٔ مماس بر دو محور مختصات باشد که از مرکز دایرهٔ C′ به معادلهٔ $x^2+y^2-4x-2y+1=0$ عبور می‌کند. معادلهٔ وتر مشترک دو دایرهٔ C و C′ کدام است؟

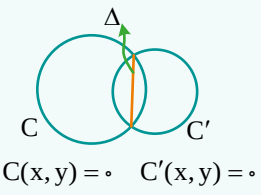
۱) $3x+4y=12$ ۲) $4x+3y=12$ ۳) $2x+3y=6$ ۴) $3x+2y=6$

پاسخ: گزینه ۱ (متوسط ـ مفهومی / محاسباتی ـ ۱۲۰۲)

وتر مشترک دو دایرهٔ متقاطع:

معادلهٔ وتر مشترک دو دایرهٔ متقاطع C و C′ را می‌توان به صورت زیر به دست آورد:

$$\Delta(x,y): C(x,y)-C'(x,y)=0$$



www.biomaze.ir

AzmonVIP

نکته:

برای پیدا کردن معادلهٔ وتر مشترک دو دایرهٔ متقاطع C و C' باید ضرایب $x^۲$ و $y^۲$ در معادلهٔ دو دایره یکی باشد، تا وقتی معادلات دو دایره را از هم کم می‌کنیم با هم ساده شوند.

پاسخ تشریحی:

مختصات مرکز دایرهٔ C' به صورت $O'(۲,۱)$ است، یعنی مرکز این دایره در ناحیهٔ اول دستگاه مختصات قرار دارد. معادلهٔ دایرهٔ مماس بر هر دو محور مختصات در ناحیهٔ اول به صورت $(x-R)^۲+(y-R)^۲=R^۲$ است (R شعاع دایره می‌باشد). با قرار دادن مختصات نقطهٔ O' در معادلهٔ این دایره داریم:

$$(۲-R)^۲+(۱-R)^۲=R^۲ \Rightarrow ۴-۴R+R^۲+۱-۲R+R^۲=R^۲ \Rightarrow R^۲-۶R+۵=۰ \Rightarrow (R-۱)(R-۵)=۰ \Rightarrow \begin{cases} R=۱ \\ R=۵ \end{cases}$$

چون C طبق فرض بزرگ‌ترین دایرهٔ مماس بر دو محور مختصات است، پس $R=۵$ قابل قبول است و در نتیجه داریم:

$$C:(x-۵)^۲+(y-۵)^۲=۵^۲ \Rightarrow x^۲+y^۲-۱۰x-۱۰y+۲۵=۰$$

برای به دست آوردن معادلهٔ وتر مشترک دو دایرهٔ C و C'، معادلات دو دایره را از هم کم می‌کنیم:

$$(x^۲+y^۲-۴x-۲y+۱)-(x^۲+y^۲-۱۰x-۱۰y+۲۵)=۰ \Rightarrow ۶x+۸y-۲۴=۰ \Rightarrow ۶x+۸y=۲۴ \xrightarrow{\div ۲} ۳x+۴y=۱۲$$

گروه آموزشی ماز

۲۹- قطر دایرهٔ C بر قطر بزرگ $AA'=۱۸$ از یک بیضی منطبق است. از دو سر قطر کوچک $BB'=۱۴$، مماس‌هایی بر بیضی رسم می‌کنیم. مساحت چهارضلعی محدبی که رئوس آن، نقاط برخورد مماس‌ها با دایرهٔ C هستند، کدام است؟

۱) ۱۲۶ ۲) ۱۰۸ ۳) $۱۱۲\sqrt{۲}$ ۴) $۹۶\sqrt{۲}$

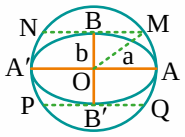
پاسخ: گزینه ۳ (متوسط ـ مفهومی / محاسباتی ـ ۱۲۰۲)

پاسخ تشریحی:

مطابق شکل، مماس‌های رسم شده از نقاط B و B'، موازی قطر بزرگ بیضی هستند. یکی از نقاط برخورد مماس‌ها با دایرهٔ C، مثلاً نقطهٔ M را در نظر بگیرید.

M روی دایرهٔ C واقع است، پس $OM=\frac{AA'}{۲}=a$ می‌باشد، از طرفی $OB=b$، در نتیجه طبق قضیهٔ فیثاغورس در مثلث $\overset{\triangle}{OBM}$ داریم:

$$BM^۲=OM^۲-OB^۲=a^۲-b^۲=c^۲ \Rightarrow BM=c$$



با توجه به تقارن موجود در شکل، چهارضلعی $MNPQ$ مستطیل بوده و طول اضلاع آن به صورت $MN=۲BM=۲c$ و $MQ=۲OB=۲b$ است و در نتیجه مساحت آن برابر $(۲c)\times(۲b)=۴b\times c$ خواهد بود. داریم:

$$\left.\begin{matrix} ۲a=۱۸ \Rightarrow a=۹ \\ ۲b=۱۴ \Rightarrow b=۷ \end{matrix}\right\} \Rightarrow c^۲=a^۲-b^۲=۸۱-۴۹=۳۲ \Rightarrow c=۴\sqrt{۲}$$

پس:

$$S_{MNPQ}=۴bc=۴\times ۷\times ۴\sqrt{۲}=۱۱۲\sqrt{۲}$$

گروه آموزشی ماز

۳۰- اگر $\vec{i}$، $\vec{j}$ و $\vec{k}$ بردارهای یکهٔ محورهای مختصات باشند، حاصل عبارت $\vec{k}.(\vec{j}\times(\vec{k}\times\vec{i}))+\vec{j}.(\vec{i}\times(\vec{i}\times\vec{j}))+\vec{k}.(\vec{j}\times(\vec{j}\times\vec{k}))$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) -۱ ۳) ۳ ۴) -۳

پاسخ: گزینه ۴ (آسان ـ مفهومی / محاسباتی ـ ۱۲۰۳)

ضرب داخلی و ضرب خارجی بردارها:

$$\vec{a}=(a_۱,a_۲,a_۳) \quad , \quad \vec{b}=(b_۱,b_۲,b_۳)$$

ضرب داخلی ۲ بردار، یک عدد است. ببینید:

$$\vec{a}.\vec{b}=a_۱b_۱+a_۲b_۲+a_۳b_۳=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\alpha$$

(α: زاویهٔ بین دو بردار)

www.biomaze.ir
AzmonVIP

ضرب خارجی ۲ بردار، یک بردار است. ببینید:

$$\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ a_1 & a_2 & a_3\\ b_1 & b_2 & b_3\end{vmatrix} \qquad |\vec{a}\times\vec{b}|=|\vec{a}||\vec{b}|\sin\alpha$$

(α: زاویهٔ بین دو بردار)

ضرب داخلی بردارهای یکه:

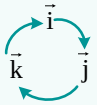
$$\vec{i}.\vec{i}=|\vec{i}||\vec{i}|\cos 0=1\times1\times1=1 \xrightarrow{\text{به همین ترتیب}} \vec{i}.\vec{i}=\vec{j}.\vec{j}=\vec{k}.\vec{k}=1$$

$$\vec{i}.\vec{j}=|\vec{i}||\vec{j}|\cos 90^\circ=1\times1\times0=0 \xrightarrow{\text{به همین ترتیب}} \vec{i}.\vec{j}=\vec{i}.\vec{k}=\vec{j}.\vec{k}=0$$

ضرب خارجی بردارهای یکه:

$$|\vec{i}\times\vec{i}|=|\vec{i}||\vec{i}|\sin 0=1\times1\times0=0 \xrightarrow{\text{به همین ترتیب}} \vec{i}\times\vec{i}=\vec{j}\times\vec{j}=\vec{k}\times\vec{k}=0$$

برای ضرب خارجی بردارهای یکهٔ غیریکسان مطابق شکل، اگر در جهت ساعتگرد حرکت کنیم ضرب خارجی هر دو بردار یکه، برابر بردار بعدی و اگر در جهت پادساعتگرد حرکت کنیم، ضرب خارجی هر دو بردار یکه، قرینهٔ بردار بعدی است. ببینید:



$\vec{i}\times\vec{j}=\vec{k}$ $\quad$ $\vec{j}\times\vec{i}=-\vec{k}$

$\vec{j}\times\vec{k}=\vec{i}$ $\quad$ $\vec{k}\times\vec{j}=-\vec{i}$

$\vec{k}\times\vec{i}=\vec{j}$ $\quad$ $\vec{i}\times\vec{k}=-\vec{j}$

پاسخ تشریحی:

توجه کنید که $\vec{a}\times\vec{b}=-\vec{b}\times\vec{a}$ و $\vec{a}.\vec{a}=|\vec{a}|^2$ می‌باشد. ببینید:

$$\vec{i}.(\vec{k}\times(\underbrace{\vec{k}\times\vec{i}}_{\vec{j}}))+\vec{j}.(\vec{i}\times(\underbrace{\vec{i}\times\vec{j}}_{\vec{k}}))+\vec{k}.(\vec{j}\times(\underbrace{\vec{j}\times\vec{k}}_{\vec{i}}))=\vec{i}.(\underbrace{\vec{k}\times\vec{j}}_{-\vec{i}})+\vec{j}.(\underbrace{\vec{i}\times\vec{k}}_{-\vec{j}})+\vec{k}.(\underbrace{\vec{j}\times\vec{i}}_{-\vec{k}})=-\underbrace{\vec{i}.\vec{i}}_{1}-\underbrace{\vec{j}.\vec{j}}_{1}-\underbrace{\vec{k}.\vec{k}}_{1}=-3$$

گروه آموزشی ماز

۳۱- اگر گزاره‌های p و q به ترتیب به صورت زیر تعریف شوند:

p: به ازای هر دو مجموعهٔ A و B تساوی $A\cap(A'\cup B)-B=\varnothing$ برقرار است.

q: تساوی $\{a,\{a\}\}-\{a\}=\{a\}$ برقرار است.

آن‌گاه ارزش گزاره‌های $(p\Rightarrow q)\wedge(\sim q\vee p)$ و $(q\vee\sim p)\Leftrightarrow(p\wedge q)$ به ترتیب از راست به چپ کدام است؟

۱) T, T $\quad$ ۲) F, T $\quad$ ۳) T, F $\quad$ ۴) F, F

پاسخ: گزینه ۳ $\quad$ (متوسط ـ مفهومی / ترکیبی ـ ۱۱۰۱)

پاسخ تشریحی:

ابتدا درستی یا نادرستی گزاره‌های p و q را مشخص می‌کنیم:

$$A\cap(A'\cup B)-B=((\underbrace{A\cap A'}_{\varnothing})\cup(A\cap B))-B=(A\cap B)-B=(A\cap B)\cap B'=\varnothing \Rightarrow p\equiv T$$

$$\{a,\{a\}\}-\{a\}=\{\{a\}\}\neq\{a\} \Rightarrow q\equiv F$$

$$(p\Rightarrow q)\wedge(\sim q\vee p)\equiv(T\Rightarrow F)\wedge(T\vee T)\equiv F$$

$$(q\vee\sim p)\Leftrightarrow(p\wedge q)\equiv(F\vee F)\Leftrightarrow(T\wedge F)\equiv F\Leftrightarrow F\equiv T$$

پس گزینهٔ ۳ پاسخ مورد نظر می‌باشد.

گروه آموزشی ماز

۳۲- از فضای نمونه‌ای $S=\{1,2,3,...,10\}$ زیرمجموعه‌ای ۵ عضوی مانند B انتخاب می‌کنیم. احتمال آن‌که B و پیشامد $A=\{1,2,3,4\}$ مستقل باشند، کدام است؟

۱) صفر $\quad$ ۲) $\frac{1}{2}$ $\quad$ ۳) $\frac{10}{21}$ $\quad$ ۴) $\frac{5}{14}$

www.biomaze.ir
AzmonVIP

پاسخ: گزینه ۳ (متوسط ـ ترکیبی / محاسباتی ـ ۱۱۰۲)

پیشامدهای مستقل:

اگر دو پیشامد A و B از فضای نمونه‌ای S مستقل از هم باشند، وقوع یا عدم وقوع یکی روی رخ دادن یا رخ ندادن دیگری تاثیری ندارد. برای دو پیشامد مستقل A و B داریم: $P(A\cap B)=P(A)\times P(B)$

پاسخ تشریحی:

شرط لازم و کافی برای آن‌که دو پیشامد A و B مستقل از هم باشند آن است که $P(A\cap B)=P(A)\times P(B)$ باشد. چون $P(A)=\frac{۴}{۱۰}$ و $P(B)=\frac{۵}{۱۰}$،

بنابراین $P(A\cap B)$ باید $\frac{۲}{۱۰}$ باشد. به عبارتی دیگر باید $A\cap B$ مجموعه‌ای ۲ عضوی باشد:

$$n(\text{مطلوب})=\binom{۴}{۲}\times\binom{۶}{۳}=۶\times۲۰=۱۲۰$$

$$n(S)=\binom{۱۰}{۵}=\frac{۱۰\times۹\times۸\times۷\times۶}{۵\times۴\times۳\times۲\times۱}=۲۵۲\Rightarrow P(\text{مطلوب})=\frac{۱۲۰}{۲۵۲}=\frac{۱۰}{۲۱}$$

گروه آموزشی ماز

۳۳- تاسی چنان ساخته شده است که احتمال وقوع هر وجه آن متناسب با وارون عددی است که بر روی آن وجه حک شده است. تاس را پرتاب می‌کنیم. اگر عددی اول ظاهر شود آن‌گاه دو سکه و در غیر این صورت سه سکه پرتاب می‌کنیم. احتمال آن‌که دقیقاً یک سکه رو شده باشد، کدام است؟

۱) $\frac{۵۰۳}{۱۱۷۶}$ ۲) $\frac{۴۹۱}{۱۱۷۶}$ ۳) $\frac{۵۰۱}{۱۱۷۶}$ ۴) $\frac{۴۸۹}{۱۱۷۶}$

پاسخ: گزینه ۱ (سخت ـ مفهومی / محاسباتی ـ ۱۱۰۲)

احتمال غیرهم‌شانس:

اگر پیشامدهای $S_۱, S_۲, ...$ از فضای نمونه‌ای $S=\{S_۱,S_۲,S_۳,...\}$ احتمال برابر نداشته باشند، آن‌گاه پیشامدهای غیرهم‌شانس هستند. در مسائل مربوط به احتمال غیرهم‌شانس همواره جمع احتمالات برابر ۱ است. ببینید:

$$P(S_۱)+P(S_۲)+...=۱$$

پاسخ تشریحی:

$$P(۱)=\frac{t}{۱},P(۲)=\frac{t}{۲},P(۳)=\frac{t}{۳},P(۴)=\frac{t}{۴},P(۵)=\frac{t}{۵},P(۶)=\frac{t}{۶}$$

$$S=\{۱,۲,۳,۴,۵,۶\}\Rightarrow P(S)=۱\Rightarrow P(۱)+P(۲)+P(۳)+P(۴)+P(۵)+P(۶)=۱\Rightarrow \frac{t}{۱}+\frac{t}{۲}+\frac{t}{۳}+\frac{t}{۴}+\frac{t}{۵}+\frac{t}{۶}=۱$$

$$\Rightarrow t(۱+\frac{۱}{۲}+\frac{۱}{۳}+\frac{۱}{۴}+\frac{۱}{۵}+\frac{۱}{۶})=۱\Rightarrow t=\frac{۶۰}{۱۴۷}$$

احتمال آن‌که دقیقاً یک بار رو ظاهر شود، برابر است با:

$\frac{۲}{۴}$ = احتمال آن‌که دقیقاً یک بار رو ظاهر شود. ← دو سکه پرتاب می‌کنیم ← احتمال آن‌که عدد اول ظاهر شود = $P\{۲,۳,۵\}=(\frac{۳۰}{۱۴۷}+\frac{۲۰}{۱۴۷}+\frac{۱۲}{۱۴۷})=\frac{۶۲}{۱۴۷}$

تاس ۲ یا ۳ یا ۵ بیاید.

$\frac{۳}{۸}$ = احتمال آن‌که دقیقاً یک بار رو ظاهر شود. ← سه سکه پرتاب می‌کنیم ← احتمال آن‌که عدد غیر اول ظاهر شود = $P\{۱,۴,۶\}=(\frac{۶۰}{۱۴۷}+\frac{۱۵}{۱۴۷}+\frac{۱۰}{۱۴۷})=\frac{۸۵}{۱۴۷}$

تاس ۱ یا ۴ یا ۶ بیاید.

بنابراین جواب برابر است با:

$$\text{جواب}=\frac{۶۲}{۱۴۷}\times\frac{۲}{۴}+\frac{۸۵}{۱۴۷}\times\frac{۳}{۸}=\frac{۲۴۸+۲۵۵}{۱۴۷\times۸}=\frac{۵۰۳}{۱۱۷۶}$$

گروه آموزشی ماز

www.biomaze.ir
AzmonVIP

۳۴- حداقل مقدار طبیعی ممکن برای a چه عددی باشد تا واریانس داده‌های $a,۴,۳,۲,۱$ بیشتر از ۸ باشد؟

۱) ۷ ۲) ۸ ۳) ۹ ۴) ۱۰

پاسخ: گزینه ۴ (سخت ـ مفهومی / محاسباتی ـ ۱۱۰۳)

محاسبهٔ واریانس داده‌ها:

$\bar{x}$ میانگین داده‌هاست.

$$\sigma^۲ = \frac{(x_۱-\bar{x})^۲ + (x_۲-\bar{x})^۲ + \ldots + (x_n-\bar{x})^۲}{n}$$

روش اول:

میانگین داده‌ها را محاسبه می‌کنیم. ببینید:

$$a,۴,۳,۲,۱ \Rightarrow \bar{x} = \frac{۱+۲+۳+۴+a}{۵} = \frac{۱۰+a}{۵} = ۲+\frac{a}{۵}$$

بنابراین:

$$\sigma^۲ = \frac{(۱-۲-\frac{a}{۵})^۲ + (۲-۲-\frac{a}{۵})^۲ + (۳-۲-\frac{a}{۵})^۲ + (۴-۲-\frac{a}{۵})^۲ + (a-۲-\frac{a}{۵})^۲}{۵}$$

$$\sigma^۲ = \frac{۱+\frac{۲a}{۵}+\frac{a^۲}{۲۵}+\frac{a^۲}{۲۵}+۱-\frac{۲a}{۵}+\frac{a^۲}{۲۵}+۴-\frac{۴a}{۵}+\frac{a^۲}{۲۵}+۴-\frac{۱۶}{۵}a+\frac{۱۶}{۲۵}a^۲}{۵} = \frac{۱۰-۴a+\frac{۴}{۵}a^۲}{۵} = \frac{۴}{۲۵}a^۲ - \frac{۴}{۵}a + ۲$$

$$\sigma^۲ > ۸ \Rightarrow \frac{۴}{۲۵}a^۲ - \frac{۴}{۵}a + ۲ > ۸ \xrightarrow{\times ۲۵} ۴a^۲ - ۲۰a - ۱۵۰ > ۰ \xrightarrow{\div ۲} ۲a^۲ - ۱۰a - ۷۵ > ۰$$

a	$-\infty$	$\frac{۵(۱-\sqrt{۷})}{۲}$	$\frac{۵(۱+\sqrt{۷})}{۲}$	$+\infty$
$۲a^۲-۱۰a-۷۵$	+	−	+	

$$\Rightarrow a > \frac{۵(۱+\sqrt{۷})}{۲} \Rightarrow a > ۹/۱۱ \xrightarrow{a\in\mathbb{N}} a \geq ۱۰$$

روش دوم:

می‌توانستیم گزینه‌ها را امتحان کنیم که البته زمان‌بر بود!

گروه آموزشی ماز

۳۵- بازهٔ اطمینان بالای ٪۹۵ برای میانگین جامعه‌ای با انحراف معیار ۴/۸ به صورت (۴/۴,۵/۶) بیان شده است. تعداد اعضای نمونه کدام است؟

۱) ۴ ۲) ۱۶ ۳) ۶۴ ۴) ۲۵۶

پاسخ: گزینه ۴ (آسان ـ محاسباتی ـ ۱۱۰۴)

پاسخ تشریحی:

بازه اطمینان برابر است با:

$$\text{بازه} = (\bar{x}-\frac{۲\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{x}+\frac{۲\sigma}{\sqrt{n}})$$

$$\text{بازه} = (\bar{x}-\frac{۲\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{x}+\frac{۲\sigma}{\sqrt{n}}) \Rightarrow \begin{cases} ۴/۴ = \bar{x}-\frac{۲\sigma}{\sqrt{n}} \\ ۵/۶ = \bar{x}+\frac{۲\sigma}{\sqrt{n}} \end{cases} \Rightarrow \frac{۴\sigma}{\sqrt{n}} = ۱/۲ \Rightarrow \frac{۴\times ۴/۸}{\sqrt{n}} = ۱/۲ \Rightarrow \sqrt{n} = ۱۶ \Rightarrow n = ۲۵۶$$

گروه آموزشی ماز

۳۶- رقم دهگان کوچک‌ترین مقدار طبیعی ممکن برای n کدام است به شرط آن‌که بزرگ‌ترین شمارندهٔ مشترک اعداد $۵n+۱۹$ و $۷n-۱۱$ عددی اول و فرد باشد؟

۱) ۱ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۶

پاسخ: گزینه ۴ (متوسط ـ مفهومی / محاسباتی ـ ۱۲۰۱)

پاسخ تشریحی:

$$\begin{matrix} d\,|\,۷n-۱۱ \\ d\,|\,۵n+۱۹ \end{matrix} \begin{matrix} \times(-۵) \\ \times(۷) \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} d\,|\,-۳۵n+۵۵ \\ d\,|\,۳۵n+۱۳۳ \end{matrix} \Rightarrow d\,|\,(-۳۵n+۵۵)+(۳۵n+۱۳۳) \Rightarrow d\,|\,۱۸۸ \Rightarrow d\,|\,۲^۲\times ۴۷$$

$$\Rightarrow d_{\text{مطلوب}} = ۴۷$$

www.biomaze.ir
AzmonVIP

بنابراین:

$$۷n-۱۱\overset{۴۷}{\equiv}۰ \Rightarrow ۷n\overset{۴۷}{\equiv}۱۱\overset{۴۷}{\equiv}۵۸\overset{۴۷}{\equiv}۱۰۵ \xrightarrow{\div ۷} n\overset{۴۷}{\equiv}۱۵ \Rightarrow n=۴۷k+۱۵$$

$$if: k=۰ \Rightarrow n=۱۵ \Rightarrow \begin{cases} ۷n-۱۱=۹۴ \\ ۵n+۱۹=۹۴ \end{cases} \Rightarrow (۹۴,۹۴)=۹۴ \Rightarrow \times$$

ب.م.م ۹۴ و ۹۴ عددی فرد نیست.

$$if\ k=۱ \Rightarrow n=۶۲ \Rightarrow \begin{cases} ۷n-۱۱=۴۲۳ \\ ۵n+۱۹=۳۲۹ \end{cases} \Rightarrow (۴۲۳,۳۲۹)=۴۷ \Rightarrow \checkmark$$

رقم دهگان n برابر ۶ می‌باشد.

گروه آموزشی ماز

۳۷- اعداد $\overline{۶۲۴a}$ و $\overline{۳b۷۴}$ به ترتیب مضارب ۱۵ و ۱۱ هستند. حاصل $۳b+۷a$ کدام رقم یکان را دارد؟

۱) ۸ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۲

پاسخ: گزینه ۱ (متوسط ـ مفهومی / محاسباتی ـ ۱۲۰۱)

بلدید باقی‌مانده‌ها رو به صورت ذهنی حساب کنید؟!

اگر $A=\overline{a_n a_{n-۱}...a_۱}$ عددی n رقمی باشد:

روش تعیین باقی‌مانده تقسیم اعداد بر ۳:

$$A=\overline{a_n a_{n-۱}...a_۲a_۱}\overset{۳}{\equiv}a_n+a_{n-۱}+...+a_۲+a_۱\overset{۳}{\equiv}r$$

برای تعیین باقی‌ماندهٔ تقسیم عدد A بر ۳، مجموع ارقام آن عدد را بر ۳ تقسیم می‌کنیم.

روش تعیین باقی‌مانده تقسیم اعداد بر ۵:

$$A=\overline{a_n a_{n-۱}...a_۲a_۱}\overset{۵}{\equiv}a_۱\overset{۵}{\equiv}r$$

برای تعیین باقی‌مانده تقسیم عدد A بر ۵، باقی‌ماندهٔ تقسیم یکان آن عدد بر ۵ را مشخص می‌کنیم.

روش تعیین باقی‌مانده تقسیم اعداد بر ۱۱:

$$A=\overline{a_n a_{n-۱}...a_۲a_۱}\overset{۱۱}{\equiv}(a_۱+a_۳+...)-(a_۲+a_۴+...)\overset{۱۱}{\equiv}r$$

برای تعیین باقی‌مانده تقسیم عدد A بر ۱۱، ارقام از یکان را تا آخرین ارقام سمت چپ یک در میان با هم جمع کرده (I) و همچنین ارقام از دهگان را تا آخرین ارقام سمت چپ یک در میان جمع کرده (II) و اختلاف این دو مقدار $(I-II)$ را بر ۱۱ تقسیم می‌کنیم.

پاسخ تشریحی:

$$\overline{۶۲۴a}^{۱۵}\equiv۰ \Rightarrow \begin{cases} \overline{۶۲۴a}^{۵}\equiv۰ \Rightarrow a\in\{۰,۵\} \\ \overline{۶۲۴a}^{۳}\equiv۰ \Rightarrow a\in\{۰,۳,۶,۹\} \end{cases} \xrightarrow{\cap} a=۰$$

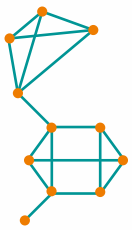
$$\overline{۳b۷۴}^{۱۱}\equiv۰ \Rightarrow (۴+b)-(۷+۳)\overset{۱۱}{\equiv}۰ \Rightarrow b-۶\overset{۱۱}{\equiv}۰ \Rightarrow b=۶$$

بنابراین حاصل $۳b+۷a$ برابر است با:

$$۳b+۷a=۱۸+۰=۱۸ \Rightarrow \text{رقم یکان}=۸$$

گروه آموزشی ماز

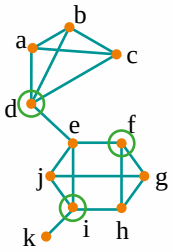
۳۸- در گراف مقابل تعداد دورهای به طول ۴ را m و عدد احاطه‌گری را n می‌نامیم. مجموع ارقام $۳m+۷n$ کدام است؟



۱) ۹
۲) ۱۲
۳) ۱۵
۴) ۱۸

پاسخ: گزینه ۲ (متوسط ـ مفهومی / محاسباتی ـ ۱۲۰۲)

پاسخ تشریحی:



هر یک از دو قسمت بالایی و پایینی گراف ۳ دور به طول ۴ داشته و بنابراین تعداد دورهای به طول ۴ برابر ۶ می‌شود. $(m=۶)$

عدد احاطه‌گری نیز مطابق شکل مقابل برابر ۳ است. $(n=۳)$

$D=\{d,f,i\}$ مجموعهٔ احاطه‌گر مینیمم

پس حاصل $۳m+۷n$ برابر است با:

$$۳m+۷n=۳\times۶+۷\times۳=۳۹$$

بنابراین مجموع ارقام $۳m+۷n$ یا همان ۳۹ برابر ۱۲ است.

گروه آموزشی ماز

www.biomaze.ir
AzmonVIP

۳۹- از بین تمام مربع‌های لاتین از مرتبهٔ ۳، به تعداد n مربع لاتین انتخاب می‌کنیم. حداقل مقدار n چقدر باشد تا مطمئن شویم در بین مربع‌های لاتین حداقل یک جفت مربع لاتین متعامد وجود داشته باشد؟

۱) ۵ ۲) ۳ ۳) ۶ ۴) ۷

پاسخ: گزینه ۴ (سخت ـ مفهومی / محاسباتی ـ ۱۲۰۳)

پاسخ تشریحی:

در کل ۱۲ مربع لاتین ۳×۳ وجود دارد که در ۶ تا از آن‌ها قطر اصلی درایه‌های یکسان (گروه A) و در ۶ تا از آن‌ها قطر فرعی دارای درایه‌های یکسان (گروه B) است. اگر ۶ تا یا کمتر مربع لاتین انتخاب کنیم، آن‌گاه ممکن است همهٔ آن‌ها از گروه A یا همگی از گروه B باشند که در بین آن‌ها هیچ دو مربع لاتین متعامدی نخواهد بود ولی اگر ۷ مربع لاتین انتخاب کنیم، آن‌گاه طبق اصل لانهٔ کبوتری از هر دو گروه منتخب خواهیم داشت و می‌دانیم هر مربعی از گروه A با هر مربعی از گروه B متعامد است.

گروه آموزشی ماز

۴۰- معادلهٔ $x+y+\frac{z+5}{3}=12$ در مجموعهٔ اعداد طبیعی دارای m دسته جواب است. رقم دهگان m کدام است؟

۱) ۴ ۲) ۶ ۳) ۵ ۴) ۳

پاسخ: گزینه ۱ (متوسط ـ مفهومی ـ ۱۲۰۳)

نکته:

تعداد جواب‌های صحیح و نامنفی معادلهٔ $x_1+x_2+\ldots+x_k=n$ برابر با $\binom{n+k-1}{k-1}$ است.

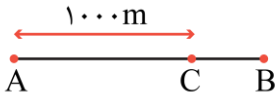
تعداد جواب‌های طبیعی معادلهٔ $x_1+x_2+\ldots+x_k=n$ برابر با $\binom{n-1}{k-1}$ است.

پاسخ تشریحی:

می‌توان $\frac{z+5}{3}$ را z' در نظر گرفته و معادلهٔ متناظر با معادلهٔ داده شده به صورت $x+y+z'=12$ را در N با شرط $z'\geq 2$ حل کنیم که تعداد جواب‌هایش برابر $\binom{10}{2}$ یعنی ۴۵ است، پس رقم دهگان تعداد جواب‌ها یعنی m برابر ۴ است.

گروه آموزشی ماز

۴۱- در لحظهٔ $t=0$، دو متحرک با تندی ثابت از نقاط A و B به سمت هم شروع به حرکت می‌کنند و در نقطهٔ C از کنار هم می‌گذرند. اگر مدت‌زمانی که طول می‌کشد تا متحرک کندتر فاصلهٔ C تا A را طی کند، ۴ برابر مدت‌زمانی باشد که متحرک سریع‌تر فاصلهٔ C تا B را طی می‌کند، فاصلهٔ اولیهٔ دو متحرک چند متر بوده است؟



۱) ۱۲۵۰ ۲) ۱۵۰۰
۳) ۱۷۵۰ ۴) ۱۲۰۰

پاسخ: گزینه ۲ (متوسط ـ محاسباتی ـ ۱۲۰۱)

پاسخ تشریحی:

فرض کنیم طول BC برابر d باشد. در مدتی که متحرک سریع‌تر فاصلهٔ ۱۰۰۰ متری A تا C را طی می‌کند، متحرک کندتر مسافت d را از B تا C می‌پیماید، بنابراین می‌توان نوشت:

متحرک سریع‌تر: $\Delta x_1 = v_1 t \Rightarrow 1000 = v_1 t$

متحرک کندتر: $\Delta x_2 = v_2 t \Rightarrow d = v_2 t$

با تقسیم ۲ رابطهٔ بالا برهم داریم:

رابطهٔ (۱): $\frac{d}{1000} = \frac{v_2}{v_1}$

در ادامه متحرک سریع‌تر فاصلهٔ d را در مدت Δt طی می‌کند و متحرک کندتر فاصلهٔ ۱۰۰۰ متری را در مدت $4\Delta t$ طی می‌کند و می‌توان نوشت:

$$\begin{cases} \text{متحرک سریع‌تر}: d = v_1 \Delta t \\ \text{متحرک کندتر}: 1000 = v_2 \times 4\Delta t \end{cases} \xrightarrow{\text{تقسیم رابطه‌ها}} \frac{1000}{d} = \frac{4v_2}{v_1}$$

$$\xrightarrow{\text{رابطه (۱)}} \frac{1000}{d} = 4 \times \frac{d}{1000}$$

$$\Rightarrow 10^6 = 4d^2 \Rightarrow 10^3 = 2d \Rightarrow d = 500\,m$$

بنابراین فاصلهٔ اولیهٔ دو متحرک ۱۵۰۰m بوده است.

گروه آموزشی ماز

۴۲- معادلهٔ مکان-زمان متحرکی که بر روی خط راست حرکت می‌کند، در SI به‌صورت $x=-2t^2+12t-10$ است. چند ثانیه بردار مکان متحرک در جهت محور x است؟

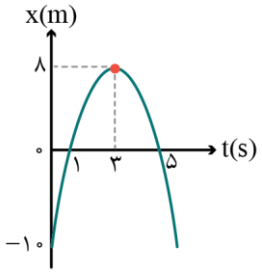
۱) ۲ ۲) ۴ ۳) ۶ ۴) ۸

پاسخ: گزینه ۲ (آسان ـ مفهومی / محاسباتی ـ ۱۲۰۱)

نکته:
در حرکت بر روی محور x، در بازهٔ زمانی که $x>0$ باشد، بردار مکان متحرک در جهت محور x و در بازهٔ زمانی که $x<0$ باشد، بردار مکان متحرک در خلاف جهت محور x است.

پاسخ تشریحی:

کافی است نمودار مکان-زمان را رسم کنیم و ببینیم چند ثانیه نمودار، بالای محور افقی قرار دارد.



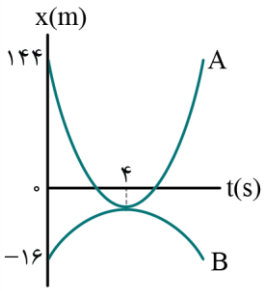
$$x = -2t^2 + 12t - 10$$
$$\Rightarrow x = -2(t^2 - 6t + 5)$$
$$\Rightarrow x = -2(t-1)(t-5)$$

همان‌طور که می‌بینید، در بازهٔ $1s < t < 5s$ به مدت ۴ ثانیه، $x>0$ است و بردار مکان در جهت محور x است.

گروه آموزشی ماز

www.biomaze.ir
AzmonVIP

۴۳- نمودار مکان-زمان دو متحرک که با شتاب ثابت حرکت می‌کنند، مطابق شکل است. اگر بزرگی شتاب متحرک A، ۴ برابر بزرگی شتاب متحرک B باشد، اندازهٔ شتاب متحرک B چند متر بر مجذور ثانیه است؟ (نمودارها در رأس خود بر هم مماس هستند.)



۱) ۲/۵
۲) ۴
۳) ۱۶
۴) ۳۲

پاسخ: گزینه ۲ (سخت ـ نموداری ـ ۱۲۰۱)

نکته:

اگر معادلهٔ مکان-زمان دو متحرک A و B که با شتاب ثابت حرکت می‌کند به‌صورت $x_A = \frac{1}{2}a_A t^2 + v_{0A}t + x_{0A}$ و $x_B = \frac{1}{2}a_B t^2 + v_{0B}t + x_{0B}$ باشد، معادلهٔ مکان-زمان حرکت نسبی به دو صورت زیر است: (a و v_0 و x_0 با علامت نوشته شود.)

۱- اگر متحرک A ساکن فرض شود:

$$x_{\text{نسبی}} = \frac{1}{2}(a_B - a_A)t^2 + (v_{0B} - v_{0A})t + (x_{0B} - x_{0A})$$

۲- اگر متحرک B ساکن فرض شود:

$$x_{\text{نسبی}} = \frac{1}{2}(a_A - a_B)t^2 + (v_{0A} - v_{0B})t + (x_{0A} - x_{0B})$$

پاسخ تشریحی:

اگر بزرگی شتاب متحرک B را a فرض کنیم، بزرگی شتاب نسبی دو متحرک $5a$ خواهد بود. با درنظر گرفتن حرکت نسبی دو متحرک به شکل معکوس از لحظهٔ $t = 4s$ تا $t = 0$ خواهیم داشت:

$$\Delta x_{\text{نسبی}} = \frac{1}{2}a_{\text{نسبی}}\Delta t^2 + v_0\Delta t \Rightarrow 144 + 16 = \frac{1}{2}\times 5a \times 16 + 0$$

$$\Rightarrow 160 = \frac{1}{2}\times 5a \times 16 \Rightarrow 10 = \frac{1}{2}\times 5a \Rightarrow a = 4\frac{m}{s^2}$$

گروه آموزشی ماز

۴۴- سنگی از بام ساختمانی بدون سرعت اولیه و در شرایط خلأ به طرف زمین رها می‌شود. اگر سنگ در ۲ ثانیهٔ آخر حرکت خود ۶۰ متر را طی کند، تندی سنگ درست پیش از برخورد به زمین چند متر بر ثانیه است؟ $(g = 10\frac{m}{s^2})$

۱) ۳۰
۲) ۴۰
۳) ۵۰
۴) ۳۵

پاسخ: گزینه ۲ (آسان ـ محاسباتی ـ ۱۲۰۱)

پاسخ تشریحی:

اگر سرعت سنگ در لحظهٔ برخورد به زمین v باشد، ۲ ثانیه قبل، سرعت آن برابر $v-20$ است و با استفاده از معادلهٔ مستقل از شتاب می‌توان نوشت:

$$\Delta y = \frac{v_1 + v_2}{2}\Delta t \Rightarrow 60 = \frac{(v-20)+v}{2}\times 2 \Rightarrow v = 40\frac{m}{s}$$

گروه آموزشی ماز

۴۵- ماهواره‌ها در اثر نیروی گرانشی بین زمین و ماهواره، روی مدار تقریباً دایره‌ای به دور زمین می‌چرخند. اگر جرم ماهواره ۲۰۰kg و فاصلهٔ آن از سطح زمین ۳۲۰۰km باشد، تندی مداری ماهواره چند کیلومتر بر ثانیه است؟ $(g_0 = 10\frac{m}{s^2}\ ,\ R_e = 6400km)$

۱) $\frac{8\sqrt{6}}{3}$
۲) $\frac{8\sqrt{2}}{3}$
۳) $\frac{6\sqrt{2}}{3}$
۴) $\frac{6\sqrt{6}}{3}$

www.biomaze.ir
AzmonVIP

پاسخ: گزینه ۱ (سخت ـ محاسباتی ـ ۱۲۰۲)

گام اول:

شتاب گرانش در محل ماهواره برابر است با:

$$g = G\frac{M_e}{(R_e+h)^2} \Rightarrow \frac{g}{g.} = \left(\frac{R_e}{R_e+h}\right)^2$$

$$\Rightarrow \frac{g}{10} = \left(\frac{6400}{6400+3200}\right)^2 = \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{4}{9}$$

$$\Rightarrow g = \frac{40}{9}\frac{m}{s^2}$$

گام دوم:

شتاب مرکزگرای وارد بر ماهواره همان شتاب گرانش در محل ماهواره است و داریم:

$$a_C = \frac{v^2}{r} \Rightarrow \frac{40}{9} = \frac{v^2}{(6400+3200)\times 10^3} \Rightarrow v^2 = \frac{4\times 96}{9}\times 10^6$$

$$\Rightarrow v^2 = \frac{128}{3}\times 10^6 \Rightarrow v = \sqrt{\frac{128}{3}}\times 10^3\ \frac{m}{s} = \sqrt{\frac{128}{3}}\ \frac{km}{s} = \frac{8\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\ \frac{km}{s} = \frac{8\sqrt{6}}{3}\ \frac{km}{s}$$

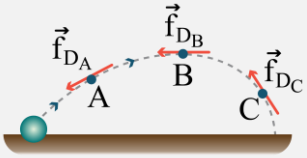
گروه آموزشی ماز

۴۶- توپی به جرم ۶۰۰g از سطح زمین در مسیری مطابق شکل پرتاب می‌شود. اگر بزرگی شتاب در بالاترین نقطهٔ مسیرش $10\sqrt{2}\ \frac{m}{s^2}$ باشد، بردار نیروی مقاومت هوا در این نقطه برحسب یکای SI کدام است؟ $(g = 10\ \frac{N}{kg})$

۱) $6\vec{i}$
۲) $-6\vec{i}$
۳) $10\vec{i}$
۴) $-10\vec{i}$

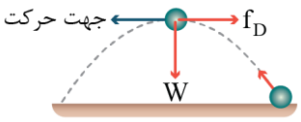
پاسخ: گزینه ۱ (متوسط ـ محاسباتی ـ ۱۲۰۲)

نکته:
نیروی مقاومت هوا، همواره در خلاف جهت حرکت جسم است. به شکل زیر که پرتاب توپ در هوا را نشان می‌دهد، دقت کنید. جهت نیروی مقاومت هوا در نقاط A، B و C به‌صورت زیر است:



پاسخ تشریحی:

در بالاترین نقطهٔ مسیر، نیروهای وارد بر جسم را رسم می‌کنیم و نیروی مقاومت هوا در خلاف جهت حرکت است، پس طبق قانون دوم نیوتون داریم:



$$F_{net} = ma = 0/6\times 10\sqrt{2} = 6\sqrt{2}N$$

نیروی خالص، برایند دو نیروی عمود برهم وزن و مقاومت هوا است:

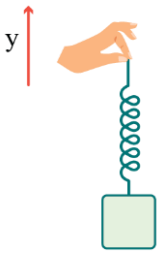
$$F_{net}^2 = W^2 + f_D^2 \Rightarrow f_D^2 = 36\times 2 - 6^2$$

$$f_D^2 = 72 - 36 \Rightarrow f_D^2 = 36$$

$$\Rightarrow f_D = 6N \Rightarrow \vec{f}_D = (6N)\vec{i}$$

گروه آموزشی ماز

۴۷- مطابق شکل، جسمی به جرم $5kg$ به فنری سبک با ثابت $6\frac{N}{cm}$ و طول اولیهٔ $48cm$ وصل شده است و در شرایط خلأ به‌صورت تندشونده و با شتاب ثابت درحال حرکت است. اگر در طی حرکت، طول فنر به $54cm$ برسد، بردار شتاب متحرک در SI کدام است؟ $(g=10\frac{m}{s^2})$



۱) $2/8\vec{j}$
۲) $-2/8\vec{j}$
۳) $5/4\vec{j}$
۴) $-5/4\vec{j}$

پاسخ: گزینه ۲ (متوسط ـ محاسباتی ـ ۱۴۰۲)

پاسخ تشریحی:

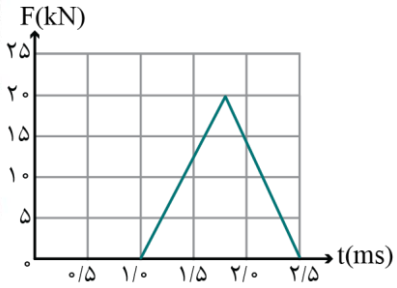
نیروی فنر و نیروی وزن به جسم وارد می‌شوند و می‌توان نوشت:

$$F_{net}=ma \Rightarrow F_e-mg=ma$$
$$\Rightarrow k\Delta L-mg=ma$$
$$\Rightarrow 600\times(54-48)\times10^{-2}-5\times10=5a$$
$$\Rightarrow 36-50=5a \Rightarrow a=-2/8\frac{m}{s^2}$$

بنابراین شتاب به سمت پایین است و بردار شتاب آن در SI به‌صورت $\vec{a}=-2/8\vec{j}$ است.

گروه آموزشی ماز

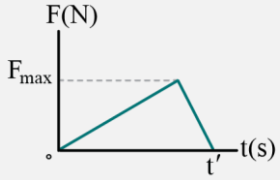
۴۸- شکل زیر، منحنی نیروی خالص برحسب زمان را برای توپ بیسبالی که با چوب بیسبال به آن ضربه زده شده است، نشان می‌دهد. در بازهٔ $1ms<t<2/5ms$، نیروی خالص متوسط وارد بر توپ چند نیوتون است؟



۱) ۱۰
۲) ۲۰
۳) ۱۰۰۰۰
۴) ۲۰۰۰۰

پاسخ: گزینه ۳ (آسان ـ نموداری ـ ۱۴۰۲)

نکته:
اگر نمودار نیروی خالص برحسب زمان در یک بازهٔ زمانی طوری باشد که مساحت محصور نمودار با محور t یک مثلث باشد، نیروی خالص متوسط در این بازهٔ زمانی برابر است با نصف ارتفاع مثلث (F_{max}).
به شکل زیر دقت کنید:



$$(0-t'):\ F_{av}=\frac{1}{2}F_{max}$$

گام اول:

محاسبهٔ تغییرات تکانه با کمک سطح زیر نمودار:

$$\Delta p=S \Rightarrow \Delta p=\frac{1}{2}\times20\times10^{3}\times(2/5-1)\times10^{-3}=15\frac{kg.m}{s}$$

گام دوم:

محاسبهٔ نیروی متوسط:

$$F_{av}=\frac{\Delta p}{\Delta t}\Rightarrow F_{av}=\frac{۱۵}{۱/۵\times۱۰^{-۳}}=۱۰۰۰۰\,N$$

روش تستی

طبق نکتهٔ بالا می‌توانیم بنویسیم:

$$(۱-۲/۵ms)F_{av}=\frac{۱}{۲}F_{max}=\frac{۱}{۲}\times۲۰۰۰۰=۱۰۰۰۰\,N$$

گروه آموزشی ماز

۴۹- به فنری سبک با ثابت $\frac{N}{m}$ ۴۰۰، بار اول جسمی به جرم m و بار دوم جسمی به جرم ۴m متصل می‌کنیم تا با دامنهٔ یکسان، حرکت هماهنگ ساده انجام دهد. بیشینهٔ تکانه و بیشینهٔ انرژی جنبشی نوسانگر در حالت اول، به‌ترتیب چند برابر بیشینهٔ تکانه و بیشینهٔ انرژی جنبشی نوسانگر در حالت دوم است؟

۱) $\frac{۱}{۲}$ ، ۱ ۲) ۲ ، ۱ ۳) $\frac{۱}{۲}$ ، $\frac{۱}{۴}$ ۴) ۲ ، $\frac{۱}{۴}$

پاسخ: گزینه ۱ (متوسط ـ محاسباتی ـ ۱۲۰۳)

نکته:

در نوسانگر جرم-فنر اگر دامنهٔ نوسان (A) و ثابت فنر (k) تغییر نکند، انرژی مکانیکی نوسانگر تغییر نمی‌کند ($E=\frac{۱}{۲}kA^{۲}$).

گام اول:

مقایسهٔ بیشینهٔ تکانه در دو حالت:

$$\begin{cases}p_{max}=mv_{max}\\ v_{max}=A\omega=A\sqrt{\frac{k}{m}}\end{cases}\Rightarrow p_{max}=mA\sqrt{\frac{k}{m}}=A\sqrt{km}$$

$$\xrightarrow{\text{یکسان } k,A}\frac{p_{max_۱}}{p_{max_۲}}=\sqrt{\frac{m_۱}{m_۲}}=\sqrt{\frac{۱}{۴}}=\frac{۱}{۲}$$

گام دوم:

مقایسهٔ بیشینهٔ انرژی جنبشی (انرژی مکانیکی):

$$E=\frac{۱}{۲}kA^{۲}\xrightarrow{\text{یکسان } A,k}E_۱=E_۲$$

دقت کنید که بیشینهٔ انرژی جنبشی درواقع همان انرژی مکانیکی نوسانگر است.

گروه آموزشی ماز

۵۰- معادلهٔ مکان-زمان نوسانگری در SI به‌صورت $x=۰/۰۴\cos(۲۰\pi t)$ است. در مدت یک دوره، چند ثانیه انرژی جنبشی نوسانگر درحال افزایش است؟

۱) $\frac{۱}{۱۰}$ ۲) $\frac{۱}{۲۰}$ ۳) $\frac{۱}{۴۰}$ ۴) $\frac{۱}{۸۰}$

پاسخ: گزینه ۲ (آسان ـ مفهومی / محاسباتی ـ ۱۲۰۳)

نکته:

در یک دورهٔ تناوب از حرکت هماهنگ ساده، مدت‌زمان $\frac{T}{۲}$ نوسانگر به‌صورت تندشونده و مدت‌زمان $\frac{T}{۲}$ نوسانگر به‌صورت کندشونده حرکت می‌کند.

گام اول:

دورهٔ نوسان برابر است با:

$$T=\frac{۲\pi}{\omega}=\frac{۲\pi}{۲۰\pi}=\frac{۱}{۱۰}s$$

www.biomaze.ir
AzmonVIP

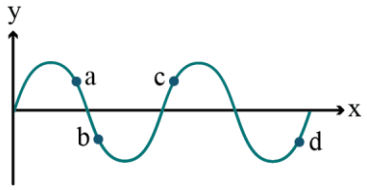
گام دوم:

در هر دوره، در مدت نصف دوره متحرک درحال نزدیک شدن به نقطهٔ تعادل است و تندی و انرژی جنبشی آن درحال افزایش می‌باشد؛ بنابراین پاسخ این سؤال برابر است با:

$$\Delta t = \frac{T}{2} = \frac{\frac{1}{10}}{2} = \frac{1}{20}s$$

گروه آموزشی ماز

۵۱- درون یک طناب، موج عرضی تشکیل شده که قسمتی از آن در نمودار زیر، نشان داده شده است. چه تعداد از عبارات زیر در مورد ذرات **a**، **b**، **c** و **d** در لحظهٔ نشان‌داده‌شده، صحیح است؟



الف: اگر حرکت ذرهٔ a تندشونده باشد، اندازهٔ بردار شتاب ذرهٔ d درحال افزایش است.

ب: اگر انرژی جنبشی ذرهٔ c درحال افزایش باشد، جهت حرکت ذرهٔ b در جهت محور y است.

پ: اگر اندازهٔ تکانهٔ ذرهٔ b درحال افزایش باشد، ذرهٔ d درحال نزدیک شدن به مرکز نوسان خود است.

ت: اگر شتاب و سرعت ذرهٔ c دارای علامت خلاف یکدیگر باشند، ذرهٔ a درحال حرکت به سمت نقطه‌ای است که تندی‌اش در آن بیشینه می‌شود.

۱) یک مورد ۲) دو مورد ۳) سه مورد ۴) چهار مورد

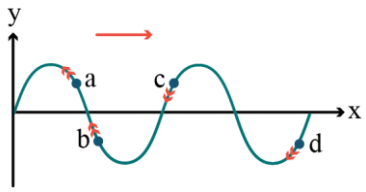
پاسخ: گزینه ۲ (سخت ـ نموداری ـ ۱۲۰۳)

پاسخ تشریحی:

اگر انرژی جنبشی ذرهٔ c درحال افزایش باشد و یا اندازهٔ تکانهٔ ذرهٔ b درحال افزایش باشد، می‌توان نتیجه گرفت موج در جهت محور x منتشر می‌شود، پس برای بررسی عبارت‌های (ب) و (پ)، فرض می‌کنیم جهت انتشار موج به سمت راست باشد.

بررسی سایر موارد:

ب: صحیح ← ذرهٔ c درحال نزدیک شدن به مرکز نوسان است و هم‌زمان ذرهٔ b درحال حرکت به سمت بالا است. (✓)

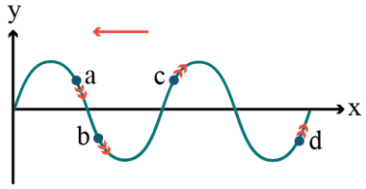


پ: غلط ← ذرهٔ b درحال نزدیک شدن به مرکز نوسان است اما هم‌زمان ذرهٔ d درحال دور شدن از مرکز نوسان است. (✗)

اگر حرکت ذرهٔ a تندشونده باشد و یا شتاب و سرعت ذرهٔ c، علامت مخالف هم داشته باشد، می‌توان نتیجه گرفت که موج در خلاف جهت محور x منتشر می‌شود، پس برای بررسی عبارت‌های (الف) و (ت)، فرض می‌کنیم جهت انتشار موج به سمت چپ باشد.

بررسی سایر موارد:

الف: غلط ← ذرهٔ a درحال نزدیک شدن به مرکز نوسان است و هم‌زمان ذرهٔ d نیز درحال نزدیک شدن به مرکز نوسان است و درنتیجه اندازهٔ شتاب آن درحال کاهش می‌باشد. (✗)



ت: صحیح ← ذرهٔ c درحال نزدیک شدن به دامنه است و درنتیجه دارای حرکت کندشونده می‌باشد، هم‌زمان ذرهٔ a نیز درحال نزدیک شدن به مرکز نوسان و درنتیجه تندی بیشینه است. (✓)

گروه آموزشی ماز

www.biomaze.ir
AzmonVIP

۵۲- یک بلندگو با توان متوسط ۱۰W، صوت را به‌طور یکنواخت در همهٔ جهت‌ها پخش می‌کند. اگر تراز شدت صوت در محل یک گیرندهٔ صوتی در فاصلهٔ ۵ متری از این بلندگو ۱۰۳dB باشد، چند درصد از توان تولیدی بلندگو تا رسیدن به گیرنده جذب محیط شده است؟

$(\log ۲ \simeq ۰/۳ \ , \ I_۰ = ۱۰^{-۶} \frac{\mu W}{m^۲} \ , \ \pi \simeq ۳)$

۱) ۱۰ ۲) ۲۰ ۳) ۴۰ ۴) ۵۰

پاسخ: گزینه ۳ (سخت ـ محاسباتی ـ ۱۲۰۳)

گام اول:

شدت صوت در فاصلهٔ ۵ متری بلندگو برابر است با:

$$\beta = ۱۰ \log \frac{I}{I_۰} \Rightarrow ۱۰۳ = ۱۰ \log \frac{I}{I_۰}$$

$$\Rightarrow \log \frac{I}{I_۰} = ۱۰/۳ = ۱۰ + ۰/۳ = \log ۱۰^{۱۰} + \log ۲ = \log ۲ \times ۱۰^{۱۰}$$

$$\Rightarrow \frac{I}{I_۰} = ۲ \times ۱۰^{۱۰} \xrightarrow{I_۰ = ۱۰^{-۱۲} \frac{W}{m^۲}} I = ۲ \times ۱۰^{-۲} \frac{W}{m^۲}$$

گام دوم:

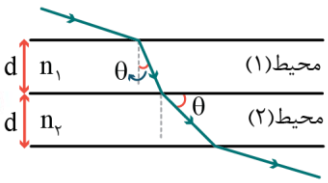
توان صوتی که به کره‌ای با شعاع ۵m می‌رسد، برابر است با:

$$I = \frac{P}{۴\pi r^۲} \Rightarrow ۲ \times ۱۰^{-۲} = \frac{P}{۴ \times ۳ \times ۵^۲} \Rightarrow P = ۶W$$

بنابراین از ۱۰W توان چشمهٔ صوت، ۶W به گیرندهٔ صوتی می‌رسد و ۴W در مسیر، تلف و جذب محیط شده است. پس می‌توان گفت ۴۰ درصد توان چشمه جذب محیط شده است.

گروه آموزشی ماز

۵۳- شکل زیر، مسیر عبور یک پرتو تکفام نور را از چند محیط شفاف نشان می‌دهد. چه تعداد از عبارت‌های زیر صحیح است؟



الف: نسبت بسامد نور در محیط (۱) به بسامد نور در محیط (۲) برابر $\frac{n_۲}{n_۱}$ است.

ب: نسبت طول موج نور در محیط (۱) به طول موج نور در محیط (۲) برابر $\frac{n_۱}{n_۲}$ است.

پ: نسبت زمان عبور این پرتو از محیط (۱) به زمان عبور پرتو از محیط (۲) برابر $(\frac{n_۱}{n_۲})^۲$ است.

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

پاسخ: گزینه ۱ (سخت ـ مفهومی / محاسباتی ـ ۱۲۰۴)

بررسی موارد:

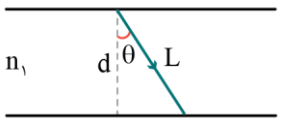
الف: بسامد نور به محیط بستگی ندارد، بنابراین بسامد در هر دو محیط یکسان است. (✗)

ب: برای مقایسهٔ طول موج نور می‌توان نوشت:

$$\begin{cases} \lambda = \frac{v}{f} \Rightarrow \frac{\lambda_۱}{\lambda_۲} = \frac{v_۱}{v_۲} \\ v = \frac{c}{n} \Rightarrow \frac{v_۱}{v_۲} = \frac{n_۲}{n_۱} \end{cases} \Rightarrow \frac{\lambda_۱}{\lambda_۲} = \frac{n_۲}{n_۱}$$ (✗)

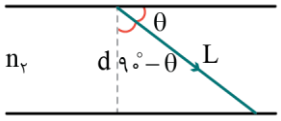
www.biomaze.ir

پ: برای مقایسهٔ زمان عبور پرتو از هر محیط می‌توان نوشت:



$$L=\frac{d}{\cos\theta}\ ,\ v=\frac{c}{n_1}$$

$$\Delta t_1=\frac{L}{v}=\frac{\frac{d}{\cos\theta}}{\frac{c}{n_1}}=\frac{n_1 d}{c\cos\theta}$$



$$L=\frac{d}{\cos(90^\circ-\theta)}=\frac{d}{\sin\theta}\ ,\ v=\frac{c}{n_2}$$

$$\Delta t_2=\frac{L}{v}=\frac{\frac{d}{\sin\theta}}{\frac{c}{n_2}}=\frac{n_2 d}{c\sin\theta}$$

$$\Rightarrow \frac{\Delta t_1}{\Delta t_2}=\frac{\frac{n_1 d}{c\cos\theta}}{\frac{n_2 d}{c\sin\theta}}=\frac{n_1}{n_2}\times\frac{\sin\theta}{\cos\theta}\xrightarrow[\text{قانون اسنل}]{\frac{n_1}{n_2}=\frac{\sin(90^\circ-\theta)}{\sin\theta}=\frac{\cos\theta}{\sin\theta}}\frac{\Delta t_1}{\Delta t_2}=1\ (\times)$$

گروه آموزشی ماز

۵۴- وارونی جمعیت الکترون‌ها در یک محیط لیزری، مربوط به وضعیتی است که تعداد الکترون‌ها در ترازهایی موسوم به ترازهای ..... نسبت به تراز پایین‌تر بسیار بیش‌تر باشند. در این ترازها، الکترون‌ها مدت‌زمان بسیار ..... نسبت به حالت برانگیختهٔ معمولی باقی می‌مانند.

۱) برانگیخته - کوتاه‌تری
۲) برانگیخته - طولانی‌تری
۳) شبه‌پایدار - کوتاه‌تری
۴) شبه‌پایدار - طولانی‌تری

پاسخ: گزینه ۴ (آسان ـ خط‌به‌خط کتاب درسی ـ ۱۲۰۵)

پاسخ تشریحی:

جملهٔ کامل که از متن کتاب درسی انتخاب شده به‌صورت زیر است:

وارونی جمعیت الکترون‌ها در یک محیط لیزری، مربوط به وضعیتی است که تعداد الکترون‌ها در ترازهایی موسوم به **ترازهای شبه‌پایدار** نسبت به تراز پایین‌تر بسیار بیش‌تر باشند. در این ترازها، الکترون‌ها مدت‌زمان بسیار **طولانی‌تری** ($10^{-3}s$) نسبت به حالت برانگیختهٔ معمولی ($10^{-8}s$) باقی می‌مانند. این زمان طولانی‌تر، فرصت بیش‌تری برای افزایش وارونی جمعیت و درنتیجه تقویت نور لیزر فراهم می‌کند.

گروه آموزشی ماز

۵۵- در اتم هیدروژن الکترون در تراز $n=5$ قرار دارد. فرض کنید فقط گذارهای $\Delta n=1$ مجاز باشند. در این صورت اختلاف بسامد مربوط به فوتون‌هایی که بلندترین و کوتاه‌ترین طول موج گسیلی را دارند، چند تراهرتز است؟ ($E_R=13/6eV$ ، $h=4\times10^{-15}eV.s$)

۱) ۲۴۷۳/۵
۲) ۲۵۲۷/۵
۳) ۲۵۵۰
۴) ۲۴۲۰

پاسخ: گزینه ۱ (سخت ـ محاسباتی ـ ۱۲۰۵)

گام اول:

بلندترین طول موج برای گذار از $n=5$ به $n'=4$ است.

$$E_{\text{فوتون}}=E_5-E_4=\frac{-E_R}{25}-(\frac{-E_R}{16})=\frac{9E_R}{400}$$

$$\Rightarrow hf=\frac{9E_R}{400}\Rightarrow 4\times10^{-15}f=\frac{9\times13/6}{400}$$

$$\Rightarrow f=7/65\times10^{13}Hz=76/5THz$$

www.biomaze.ir
AzmonVIP

گام دوم:

کوتاه‌ترین طول موج مربوط به گذار الکترون از $n=۲$ به $n'=۱$ است.

$$E_{\text{فوتون}} = E_۲ - E_۱ = \frac{-E_R}{۴} - (\frac{-E_R}{۱}) = \frac{۳E_R}{۴}$$

$$\Rightarrow hf' = \frac{۳E_R}{۴} \Rightarrow ۴\times ۱۰^{-۱۵} f' = \frac{۳\times ۱۳/۶}{۴}$$

$$\Rightarrow f' = ۲/۵۵\times ۱۰^{۱۵}\,Hz = ۲۵۵۰\,THz$$

گام سوم:

بنابراین اختلاف این دو بسامد برابر است با:

$$f' - f = ۲۵۵۰ - ۷۶/۵ = ۲۴۷۳/۵\,THz$$

گروه آموزشی ماز

۵۶- هستهٔ پرتوزای $^{۲۴۰}_{Z}X$ ابتدا ۵ ذرهٔ آلفا گسیل می‌کند و سپس با گسیل ۲ الکترون (β^-) به هستهٔ $^{A'}_{Z'}Y$ تبدیل می‌شود. اگر نسبت تعداد نوترون‌ها به پروتون‌ها در هسته‌های X و Y یکسان باشد، اختلاف تعداد نوترون‌ها و پروتون‌های هستهٔ Y چقدر است؟

۱) ۴۸ ۲) ۴۶ ۳) ۴۴ ۴) ۵۲

پاسخ: گزینه ۳ (متوسط ـ محاسباتی ـ ۱۲۰۶)

گام اول:

تعداد نوترون‌ها و پروتون‌ها در هستهٔ مادر $^{۲۴۰}_{Z}X$ برابر است با:

تعداد نوترون‌ها: $۲۴۰-Z$ تعداد پروتون‌ها: Z

گام دوم:

معادلهٔ واپاشی را می‌نویسیم و تعداد پروتون‌ها و نوترون‌های هستهٔ دختر را به‌دست می‌آوریم.

$$^{۲۴۰}_{Z}X \rightarrow {}^{A'}_{Z'}Y + ۵(^{۴}_{۲}\alpha) + ۲(^{۰}_{-۱}e^-)$$

پایستگی عدد جرمی: $۲۴۰ = A' + ۵\times ۴ + ۰ \Rightarrow A' = ۲۲۰$

پایستگی عدد اتمی: $Z = Z' + ۵\times ۲ + ۲\times(-۱) \Rightarrow Z' = Z - ۸$

بنابراین تعداد پروتون‌ها و نوترون‌های هستهٔ دختر برابر است با:

تعداد نوترون‌ها: $۲۲۰ - (Z-۸) = ۲۲۸ - Z$ تعداد پروتون‌ها: $Z-۸$

گام سوم:

طبق فرض سؤال، نسبت تعداد پروتون‌ها به نوترون‌ها در هر دو حالت یکسان است، بنابراین داریم:

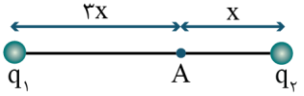
$$\frac{Z}{۲۴۰-Z} = \frac{Z-۸}{۲۲۸-Z} \Rightarrow ۲۲۸Z - Z^۲ = -Z^۲ + ۲۴۸Z - ۱۹۲۰$$

$$\Rightarrow ۲۰Z = ۱۹۲۰ \Rightarrow Z = ۹۶$$

بنابراین هستهٔ Y، دارای $Z-۸ = ۸۸$ پروتون و $۲۲۸ - Z = ۱۳۲$ نوترون است که اختلاف آن‌ها ۴۴ است.

گروه آموزشی ماز

۵۷- در شکل زیر، میدان الکتریکی برایند در نقطهٔ A برابر $\vec{E}$ است. اگر بار $q_۲$ را حذف کنیم، جهت میدان در این نقطه برعکس شده و اندازهٔ آن نصف می‌شود. در چه فاصله‌ای از بار $q_۲$، میدان الکتریکی خالص حاصل از این دو بار، صفر می‌شود؟



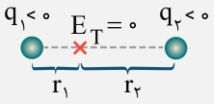
۱) $۲(\sqrt{۳}-۱)x$ ۲) $(\sqrt{۳}-۱)x$

۳) $\sqrt{۳}x$ ۴) $۲\sqrt{۳}x$

پاسخ: گزینه ۱ (سخت ـ محاسباتی ـ ۱۱۰۱)

نکته:

اگر دو بار الکتریکی هم‌نام داشته باشیم، میدان الکتریکی برایند در نقطه‌ای بر روی خط واصل دو بار و نزدیک به بار کوچک‌تر صفر خواهد شد. به مثال زیر دقت کنید:

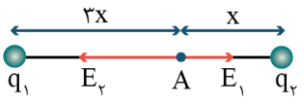


$$|q_۲| > |q_۱|$$

$$\frac{r_۲}{r_۱} = \sqrt{\left|\frac{q_۲}{q_۱}\right|}$$

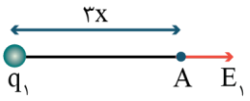
گام اول:

شکل زیر وضعیت میدان‌های الکتریکی در نقطهٔ A را در دو حالت نشان می‌دهد (با توجه به شرایط توصیف‌شده، $q_۱$ و $q_۲$ هم‌نام هستند).



$$|E_{کل}| = E_۲ - E_۱$$

$$|E'_{کل}| = E_۱$$



$$\left|\frac{E'_{کل}}{E_{کل}}\right| = \frac{۱}{۲}$$

$$\Rightarrow \frac{E_۱}{E_۲ - E_۱} = \frac{۱}{۲} \Rightarrow E_۲ = ۳E_۱$$

بنابراین برای مقایسهٔ دو بار می‌توان نوشت:

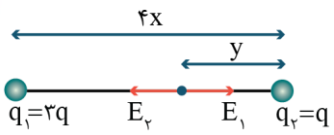
$$E = k\frac{|q|}{r^۲} \Rightarrow \frac{E_۲}{E_۱} = \frac{q_۲}{q_۱} \times \left(\frac{r_۱}{r_۲}\right)^۲$$

$$\Rightarrow ۳ = \frac{q_۲}{q_۱} \times ۳^۲ \Rightarrow \frac{q_۲}{q_۱} = \frac{۱}{۳}$$

پس اگر بار $q_۲$ برابر q باشد، بار $q_۱$ برابر $۳q$ است.

گام دوم:

محل صفر شدن میدان در فاصلهٔ بین آن‌ها و نزدیک به بار کوچک‌تر است، بنابراین می‌توان نوشت:



$$E_۱ = E_۲ \Rightarrow k\frac{q_۱}{r_۱^۲} = k\frac{q_۲}{r_۲^۲} \Rightarrow \frac{۳q}{(۴x-y)^۲} = \frac{q}{y^۲} \Rightarrow \frac{\sqrt{۳}}{۴x-y} = \frac{۱}{y} \Rightarrow \sqrt{۳}y = ۴x - y$$

$$\Rightarrow y(\sqrt{۳}+۱) = ۴x \Rightarrow y = \frac{۴x}{\sqrt{۳}+۱} = \frac{۴}{۳-۱}(\sqrt{۳}-۱)x = ۲(\sqrt{۳}-۱)x$$

گروه آموزشی ماز

۵۸- ذره‌ای به جرم ۷μg و بار ۱۰nC– در یک میدان الکتریکی یکنواخت از نقطهٔ A با پتانسیل ۲۰V- رها می‌شود و تا نقطهٔ B با پتانسیل ۱۲۰V فقط تحت تأثیر میدان الکتریکی جابه‌جا می‌شود. تندی ذره در نقطهٔ B چند متر بر ثانیه است؟

۱) ۲۰ ۲) ۴۰ ۳) $\sqrt{\frac{۲۰۰۰}{۷}}$ ۴) $\sqrt{\frac{۴۰۰۰}{۷}}$

پاسخ: گزینه ۱ (متوسط ـ محاسباتی ـ ۱۱۰۱)

گام اول:

تغییرات انرژی پتانسیل الکتریکی برابر است با:

$$\Delta U = q\Delta V = -۱۰\times۱۰^{-۹} \times (۱۲۰ - (-۲۰)) = -۱/۴\times۱۰^{-۶}\,J$$

www.biomaze.ir

AzmonVIP

گام دوم:

با استفاده از پایستگی انرژی مکانیکی می‌توان نوشت:

$$\Delta U + \Delta K = ۰ \Rightarrow \Delta K = -\Delta U = ۱/۴\times۱۰^{-۶}\,J$$

$$\Rightarrow \frac{۱}{۲}mv^{۲} = ۱/۴\times۱۰^{-۶} \Rightarrow \frac{۱}{۲}\times۷\times۱۰^{-۹}\times v^{۲} = ۱/۴\times۱۰^{-۶}$$

$$\Rightarrow v^{۲} = ۴۰۰ \Rightarrow v = ۲۰\frac{m}{s}$$

گروه آموزشی ماز

۵۹- ظرفیت خازنی ۱۲ میکروفاراد و اختلاف بار الکتریکی دو صفحهٔ آن q است. اگر ۸μC بار الکتریکی را از صفحهٔ منفی جدا کرده و به صفحهٔ مثبت منتقل کنیم، انرژی ذخیره‌شده در خازن به‌اندازهٔ ۶μJ زیاد می‌شود. q چند میکروکولن است؟

۱) ۴ ۲) ۸ ۳) ۱۰ ۴) ۱۲

پاسخ: گزینه ۳ (متوسط ـ محاسباتی ـ ۱۱۰۱)

نکته:
اگر بار ذخیره‌شده در خازنی q باشد به این معناست که بار صفحهٔ مثبت q+ و بار صفحهٔ منفی q− است؛ بنابراین اختلاف بار دو صفحهٔ خازن برابر ۲q خواهد بود.

پاسخ تشریحی:

اگر اختلاف بار دو صفحه برابر q باشد، بار صفحهٔ مثبت برابر $\frac{q}{۲}$ و بار صفحهٔ منفی برای $\frac{-q}{۲}$ است، بنابراین بار ذخیره‌شده در خازن برابر $\frac{q}{۲}$ است و انرژی ذخیره‌شده در آن برابر است با:

$$U = \frac{۱}{۲}\frac{(\frac{q}{۲})^{۲}}{C} = \frac{۱}{۲}\times\frac{\frac{q^{۲}}{۴}}{۱۲} = \frac{q^{۲}}{۹۶}\mu J$$

در حالت دوم، با جابه‌جا کردن ۸μC بار الکتریکی، بار خازن به $\frac{q}{۲}+۸\mu C$ می‌رسد و داریم:

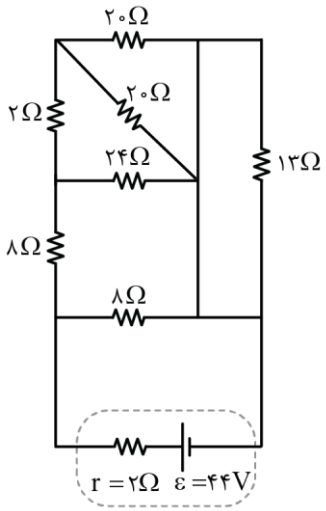
$$U' = \frac{۱}{۲}\frac{(\frac{q}{۲}+۸)^{۲}}{C} = \frac{۱}{۲}\frac{(\frac{q}{۲}+۸)^{۲}}{۱۲} = \frac{\frac{q^{۲}}{۴}+۸q+۶۴}{۲۴} = \frac{q^{۲}}{۹۶}+\frac{q}{۳}+\frac{۸}{۳}\mu J$$

$$\Rightarrow U'-U = \frac{q}{۳}+\frac{۸}{۳} \Rightarrow \frac{q}{۳}+\frac{۸}{۳} = ۶ \Rightarrow q = ۱۰\mu C$$

گروه آموزشی ماز

۶۰- در شکل زیر، ولتاژ دو سر باتری چند ولت است؟

۱) ۳۲
۲) ۲۸
۳) ۳۶
۴) ۳۰

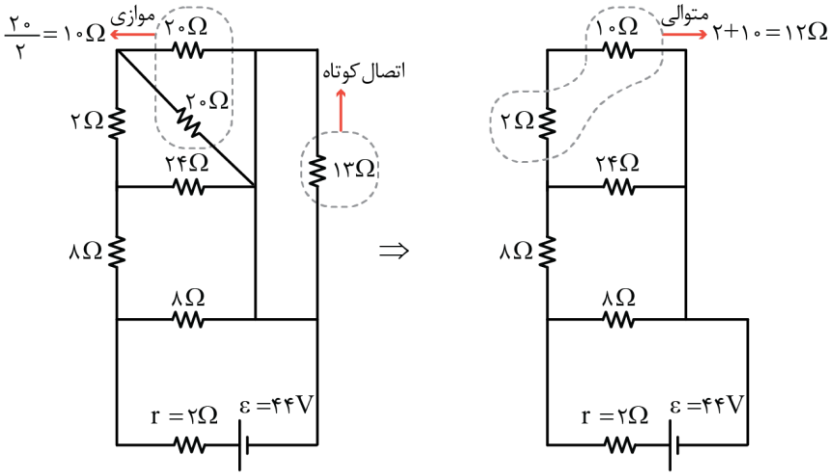


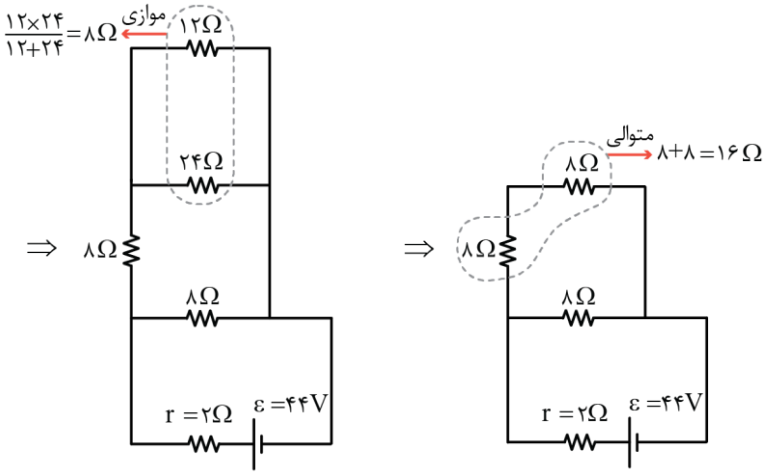
www.biomaze.ir
AzmonVIP

پاسخ: گزینه ۱ (سخت ـ محاسباتی ـ ۱۱۰۲)

پاسخ تشریحی:

مدار را مرحله به مرحله ساده می‌کنیم تا مقاومت معادل به‌دست بیاید.





$$\Rightarrow R_{eq} = \frac{۸\times۱۶}{۸+۱۶} = \frac{۱۶}{۳}\Omega$$

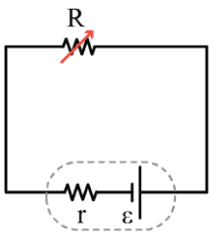
حال جریان مدار و ولتاژ دو سر باتری را به‌دست می‌آوریم.

$$I = \frac{\varepsilon}{r+R_{eq}} = \frac{۴۴}{۲+\frac{۱۶}{۳}} = \frac{۴۴}{\frac{۲۲}{۳}} = ۶A$$

$$\Rightarrow V_{\text{باتری}} = \varepsilon - rI = ۴۴ - ۲\times۶ = ۳۲V$$

گروه آموزشی ماز

۶۱- در مدار شکل زیر، اگر مقاومت رئوستا را از ۲r به r کاهش دهیم، توان خروجی باتری چند برابر می‌شود؟



۱) $\frac{۸}{۹}$

۲) $\frac{۹}{۸}$

۳) $\frac{۳}{۴}$

۴) $\frac{۴}{۳}$

www.biomaze.ir
AzmonVIP

پاسخ: گزینه ۲ (متوسط ـ محاسباتی ـ ۱۱۰۲)

نکته:

رابطه‌ای کلی برای توان خروجی باتری به‌دست می‌آوریم.

$$\begin{cases} I=\dfrac{\varepsilon}{r+R_{eq}} \\ P_{\text{خروجی}}=R_{eq}I^{2} \end{cases} \Rightarrow P_{\text{خروجی}}=R_{eq}\left(\dfrac{\varepsilon}{r+R_{eq}}\right)^{2}=\dfrac{\varepsilon^{2}R_{eq}}{(r+R_{eq})^{2}}$$

پاسخ تشریحی:

با توجه به نکتهٔ فوق، دو حالت را مقایسه می‌کنیم:

$$R_{eq}=2r \Rightarrow P_{\text{خروجی}}=\dfrac{\varepsilon^{2}\times 2r}{(r+2r)^{2}}=\dfrac{2}{9}\dfrac{\varepsilon^{2}}{r}$$

$$R'_{eq}=r \Rightarrow P'_{\text{خروجی}}=\dfrac{\varepsilon^{2}\times r}{(r+r)^{2}}=\dfrac{1}{4}\dfrac{\varepsilon^{2}}{r}$$

$$\Rightarrow \dfrac{P'_{\text{خروجی}}}{P_{\text{خروجی}}}=\dfrac{\frac{1}{4}}{\frac{2}{9}}=\dfrac{9}{8}$$

گروه آموزشی ماز

۶۲- **قطر مقطع و جرم سیم مسی A، ۳ برابر قطر مقطع و جرم سیم مسی B است. این دو مقاومت الکتریکی را یک بار به‌صورت متوالی و بار دوم به‌صورت موازی به ولتاژ ثابت V متصل می‌کنیم. آهنگ مصرف انرژی در مجموعهٔ دو سیم در حالت اول، چند برابر آهنگ مصرف انرژی در مجموعهٔ دو سیم در حالت دوم است؟**

۱) $\frac{27}{784}$ ۲) $\frac{27}{28}$ ۳) $\frac{1}{28}$ ۴) $\frac{1}{784}$

پاسخ: گزینه ۱ (سخت ـ محاسباتی ـ ۱۱۰۲)

گام اول:

مقایسهٔ مقاومت دو سیم:

$$R=\rho\dfrac{L}{A}\xrightarrow{L=\frac{V}{A}=\frac{m}{\rho' A}}R=\dfrac{\rho m}{\rho' A^{2}}$$

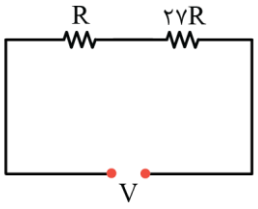
ρ: مقاومت ویژه ρ': چگالی

$$\xrightarrow[\text{چگالی و مقاومت ویژه برابر}]{\text{سیم‌ها هم‌جنس}}\dfrac{R_A}{R_B}=\dfrac{m_A}{m_B}\times\left(\dfrac{A_B}{A_A}\right)^{2}=3\times\left(\dfrac{1}{9}\right)^{2}=\dfrac{1}{27}$$

دقت کنید که چون قطر مقطع سیم A، ۳ برابر سیم B است، بنابراین مساحت مقطع آن ۹ برابر مساحت مقطع سیم B است. با توجه به این توضیحات، اگر مقاومت A برابر R باشد، مقاومت B برابر $27R$ است.

گام دوم:

بررسی حالت متوالی:



$$R_{eq}=R+27R=28R$$

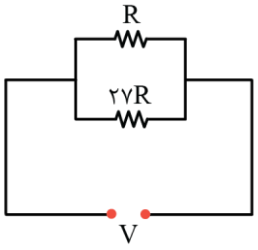
$$\Rightarrow P=\dfrac{V^{2}}{R_{eq}}=\dfrac{V^{2}}{28R}$$

www.biomaze.ir

AzmonVIP

گام سوم:

بررسی حالت موازی:



$$R'_{eq}=\frac{R\times 27R}{R+27R}=\frac{27}{28}R$$

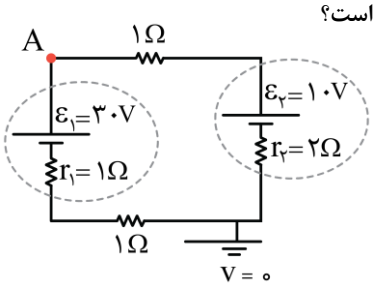
$$\Rightarrow P'=\frac{V^2}{R'_{eq}}=\frac{V^2}{\frac{27}{28}R}$$

بنابراین برای مقایسهٔ دو حالت می‌توان نوشت:

$$\frac{P}{P'}=\frac{\frac{V^2}{28R}}{\frac{V^2}{\frac{27}{28}R}}=\frac{27}{28^2}=\frac{27}{784}$$

گروه آموزشی ماز

۶۳- در مدار زیر، پتانسیل الکتریکی نقطهٔ A و توان ورودی باتری (۲) به‌ترتیب از راست به چپ چند واحد SI است؟



۱) ۷۲ ،۲۲

۲) ۸ ،۲۲

۳) ۸ ،۸

۴) ۷۲ ،۸

پاسخ: گزینه ۱ (متوسط ـ محاسباتی ـ ۱۱۰۲)

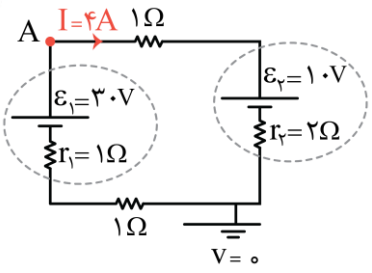
گام اول:

جریان مدار برابر است با:

$$I=\frac{\varepsilon_1-\varepsilon_2}{r_1+r_2+R_{eq}}\Rightarrow I=\frac{30-10}{1+2+2}=\frac{20}{5}=4A$$

گام دوم:

پتانسیل الکتریکی نقطهٔ A برابر است با:



$$V_A-4\times 1-\varepsilon_2-r_2\times 4=0$$

$$\Rightarrow V_A-4-10-2\times 4=0$$

$$\Rightarrow V_A=22V$$

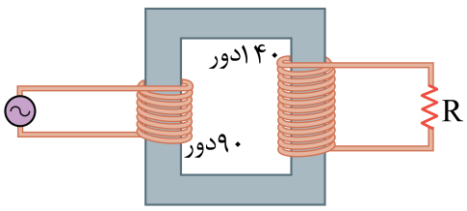
گام سوم:

توان ورودی باتری (۲) برابر است با:

$$|P_2|=\varepsilon_2 I+r_2 I^2=10\times 4+2\times 4^2=72W$$

گروه آموزشی ماز

۶۴- در مبدل آرمانی شکل زیر، اگر بیشینهٔ ولتاژ دو سر مقاومت R برابر ۲۸۰V باشد، بیشینهٔ ولتاژ مولد چقدر است؟



۱) ۱۰۰

۲) ۲۸۰

۳) ۱۸۰

۴) ۲۲۰

پاسخ: گزینه ۳ (آسان ـ محاسباتی ـ ۱۱۰۴)

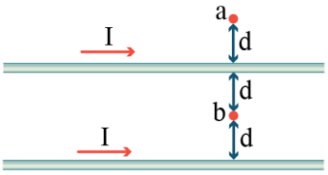
پاسخ تشریحی:

بیشینهٔ ولتاژ مولد برابر است با:

$$\frac{N_۲}{N_۱}=\frac{V_۲}{V_۱}\Rightarrow\frac{۱۴۰}{۹۰}=\frac{۲۸۰}{V_۱}\Rightarrow V_۱=۱۸۰V$$

گروه آموزشی ماز

۶۵- جهت میدان مغناطیسی برایند (خالص) ناشی از سیم‌های موازی و بلند حامل جریان در هر یک از نقطه‌های **a** و **b** به‌ترتیب از راست به چپ کدام است؟

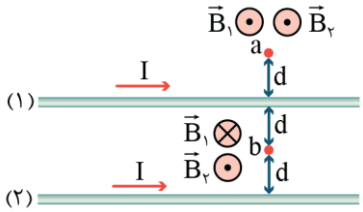


۱) ⊙ ، ⊗
۲) ⊙ ، میدان در نقطهٔ b صفر است.
۳) ⊗ ، ⊗
۴) ⊗ ، میدان در نقطهٔ b صفر است.

پاسخ: گزینه ۲ (آسان ـ مفهومی ـ ۱۱۰۳)

پاسخ تشریحی:

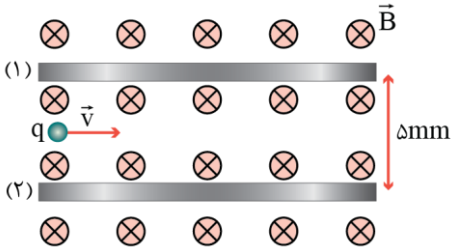
شکل زیر جهت میدان مغناطیسی را با استفاده از قاعدهٔ دست راست نشان می‌دهد.



در نقطهٔ a، میدان برایند برون‌سو (⊙) است و در نقطهٔ B، میدان‌ها هم‌اندازه و در خلاف جهت هم هستند، پس میدان برایند صفر می‌شود.

گروه آموزشی ماز

۶۶- مطابق شکل، ذره‌ای باردار با تندی $v=۲۰\frac{km}{s}$ وارد فضای بین دو صفحهٔ رسانای بزرگ و باردار می‌شود. اگر در فضای بین دو صفحه، میدان مغناطیسی یکنواخت $B=۲۰۰G$ در جهت نشان داده‌شده برقرار باشد و ذره بدون انحراف در مسیر مستقیم به حرکت خود ادامه دهد، پتانسیل الکتریکی صفحهٔ (۱)، ..... ولت ..... از پتانسیل الکتریکی صفحهٔ (۲) است. (نیروی وزن ناچیز است.)



۱) ۱ - بیش‌تر
۲) ۱ - کم‌تر
۳) ۲ - کم‌تر
۴) ۲ - بیش‌تر

پاسخ: گزینه ۴ (متوسط ـ محاسباتی / ترکیبی ـ ۱۱۰۳)

نکته:
اگر یک ذرهٔ باردار متحرک با جرم ناچیز تحت تأثیر دو نیروی الکتریکی و مغناطیسی بدون انحراف در جهت عمود بر میدان مغناطیسی به مسیر خود ادامه دهد (درحال تعادل باشد)، داریم:

$$E=vB$$

E: میدان الکتریکی $(\frac{N}{C})$ v: تندی ذره $(\frac{m}{s})$ B: میدان مغناطیسی (T)

www.biomaze.ir

AzmonVIP

پاسخ تشریحی:

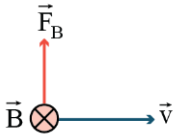
فرض کنیم بار ذره مثبت باشد. طبق قاعدهٔ دست راست، نیروی مغناطیسی به سمت بالا بر آن وارد می‌شود و برای آن‌که ذره بدون انحراف حرکت کند، باید نیروی الکتریکی به سمت پایین بر آن وارد شود، پس صفحهٔ (۱)، صفحهٔ مثبت و صفحهٔ (۲)، صفحهٔ منفی است و پتانسیل صفحهٔ (۱) بیش‌تر از صفحهٔ (۲) است.

$F_B = qvB$

$F_E = qE$

$F_B = F_E \Rightarrow qvB = qE$

$\Rightarrow vB = E \Rightarrow E = ۲۰۰۰۰ \times ۲۰۰ \times ۱۰^{-۴} = ۴۰۰ \frac{V}{m}$



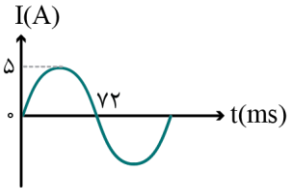
$q > ۰$

اختلاف پتانسیل بین دو صفحه برابر است با:

$\Delta V = Ed \Rightarrow \Delta V = ۴۰۰ \times ۵ \times ۱۰^{-۳} = ۲V$

گروه آموزشی ماز

۶۷- نمودار جریان عبوری از یک القاگر برحسب زمان، مطابق شکل زیر است. اگر ضریب القاوری این القاگر ۱۶ میلی‌هانری باشد، در چه لحظه‌ای پس از $t = ۰$، برای اولین بار انرژی ذخیره‌شده در سیملوله برابر ۱۰۰mJ می‌شود؟



۱) ۱۸ ms
۲) ۳۶ ms
۳) ۱۲ ms
۴) ۲۴ ms

پاسخ: گزینه ۱ (متوسط ـ نموداری ـ ۱۱۰۴)

گام اول:

برای آن‌که انرژی سیملوله برابر ۱۰۰mJ شود، جریان گذرنده از آن باید برابر باشد با:

$U = \frac{۱}{۲} LI^۲ \Rightarrow ۱۰۰ = \frac{۱}{۲} \times ۱۶ I^۲ \Rightarrow I = \frac{۵\sqrt{۲}}{۲} A$

گام دوم:

بنابراین می‌خواهیم جریان برابر $\frac{\sqrt{۲}}{۲}$ بیشینهٔ آن باشد. اگر کمی از دانش خود در فصل نوسان استفاده کنیم، به یاد داریم که در لحظهٔ $t = \frac{T}{۸}$ برای اولین بار جریان $\frac{\sqrt{۲}}{۲}$ بیشینه خواهد شد.

$\frac{T}{۲} = ۷۲ ms \Rightarrow \frac{T}{۸} = \frac{۷۲}{۴} = ۱۸ ms$

گروه آموزشی ماز

۶۸- یکای فرعی کمیت «ضریب القاوری» در SI کدام است؟

۱) $\frac{kg.m}{A^۲ s}$
۲) $\frac{kg.m}{A^۲ s^۲}$
۳) $\frac{kg.m^۲}{A^۲ s}$
۴) $\frac{kg.m^۲}{A^۲ s^۲}$

پاسخ: گزینه ۴ (آسان ـ مفهومی / محاسباتی ـ ۱۰۰۱)

پاسخ تشریحی:

با استفاده از فرمول $U = \frac{۱}{۲} LI^۲$ می‌توان نوشت:

$U = \frac{۱}{۲} LI^۲ \Rightarrow J = [L] \times A^۲ \Rightarrow [L] = \frac{J}{A^۲}$

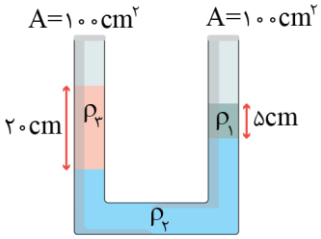
www.biomaze.ir

طبق رابطهٔ $K=\frac{۱}{۲}mv^۲$، یکای ژول (J) معادل $\frac{kg.m^۲}{s^۲}$ است، پس:

$$[L]=\frac{\frac{kg.m^۲}{s^۲}}{A^۲}=\frac{kg.m^۲}{A^۲s^۲}$$

گروه آموزشی ماز

۶۹- در شکل زیر، چند لیتر از مایع (۱) به چگالی $\rho_۱=۰/۴\frac{g}{cm^۳}$ را به شاخهٔ سمت راست اضافه کنیم تا سطح مایع (۲) در دو طرف لوله در یک تراز قرار بگیرد؟ $(\rho_۳=۰/۸\frac{g}{cm^۳})$

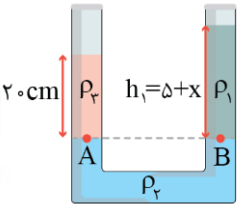


۱) ۳/۵
۲) ۲/۵
۳) ۳
۴) ۴

پاسخ: گزینه ۱ (متوسط ـ محاسباتی ـ ۱۰۰۲)

پاسخ تشریحی:

با اضافه کردن مایع به شاخهٔ سمت راست، وضعیت مایعات به شکل زیر درمی‌آید:



$$P_B=P_A$$
$$P_۰+\rho_۱gh_۱=P_۰+\rho_۳gh_۳$$
$$\rho_۱h_۱=\rho_۳h_۳$$
$$۰/۴\times(۵+x)=۰/۸\times۲۰$$
$$۲+۰/۴x=۱۶\Rightarrow ۰/۴x=۱۴\Rightarrow x=۳۵cm$$
$$\text{حجم}=A\times h=۱۰۰cm^۲\times۳۵cm=۳۵۰۰cm^۳$$
$$\frac{۳۵۰۰}{۱۰۰۰}=۳/۵Lit$$

گروه آموزشی ماز

۷۰- در لوله‌ای پر از آب مطابق شکل زیر، آب از چپ به راست در جریان است. کدام‌یک از عبارت‌های زیر صحیح است؟

۱) تندی آب در قسمت B درحال کاهش است.
۲) فشار در قسمت A بیش‌تر از فشار در قسمت C است.
۳) تندی آب در قسمت C، کم‌تر از تندی آب در قسمت E است.
۴) انرژی جنبشی یک قطرهٔ آب در قسمت D درحال افزایش است.

پاسخ: گزینه ۲ (آسان ـ مفهومی ـ ۱۰۰۲)

نکته:
ترکیب اصل برنولی و معادلهٔ پیوستگی در مسیر حرکت آب در لوله‌ای با قطر مقطع متفاوت:
هرچه مقطع لوله کوچک‌تر باشد، تندی جریان آب بیش‌تر و فشار آب کم‌تر است و برعکس؛
هرچه مقطع لوله بزرگ‌تر باشد، تندی جریان آب کم‌تر و فشار آب بیش‌تر است.

بررسی گزینه‌ها:

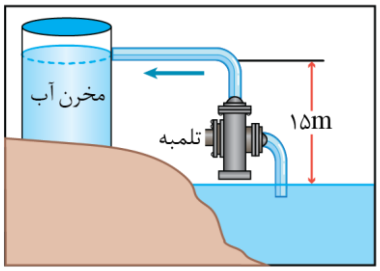
۱) در قسمت B، لوله به‌تدریج درحال باریک شدن است، پس تندی آب به‌تدریج افزایش می‌یابد. (×)
۲) مساحت مقطع قسمت A، بزرگ‌تر از مساحت مقطع قسمت C است، پس طبق معادلهٔ پیوستگی، تندی آب در A، کم‌تر از تندی آب در C است، بنابراین با توجه به اصل برنولی، فشار در قسمت A، بیش‌تر از فشار در قسمت C است. (✓)
۳) قسمت C باریک‌تر از قسمت E است، پس تندی آب در قسمت C، بیش‌تر از قسمت E است. (×)

www.biomaze.ir
AzmonVIP

۴) در قسمت D، مساحت مقطع لوله به‌تدریج درحال افزایش است، پس تندی آب درحال کاهش است و درنتیجه انرژی جنبشی یک قطرهٔ آب، درحال کاهش می‌باشد. (✗)

گروه آموزشی ماز

۷۱- مطابق شکل، تلمبه‌ای با توان ورودی ۲۰kW در هر ثانیه ۸۰ لیتر آب دریاچه‌ای به چگالی $۱۰۰۰\frac{kg}{m^۳}$ را تا ارتفاع ۱۵ متری مخزنی بالا برده و با تندی $۶\frac{m}{s}$ پمپاژ می‌کند. بازده تلمبه چند درصد است؟ $(g=۱۰\frac{N}{kg})$



۱) ۶۷/۲
۲) ۶۰
۳) ۵۴/۶
۴) ۵۰

پاسخ: گزینه ۱ (متوسط ـ محاسباتی ـ ۱۰۰۳)

نکته:
کار مفیدی که پمپ بر روی آب داخل لوله انجام می‌دهد برابر است با جمع جبری تغییر انرژی جنبشی و تغییر انرژی پتانسیل آب:

$$W_{پمپ}=\Delta K+\Delta U$$

پاسخ تشریحی:

کار تلمبه صرف افزایش انرژی پتانسیل گرانشی و جنبشی آب می‌شود، بنابراین داریم:

$$m=\rho V=۱۰۰۰\frac{kg}{m^۳}\times ۸۰L\times\frac{۱m^۳}{۱۰۰۰L}=۸۰kg$$

$$W=mgh+\frac{۱}{۲}mv^۲=۸۰\times۱۰\times۱۵+\frac{۱}{۲}\times۸۰\times۶^۲$$

$$\Rightarrow W=۱۲۰۰۰+۱۴۴۰=۱۳۴۴۰J$$

توان مفید برابر است با:

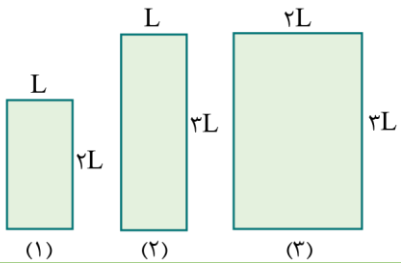
$$P=\frac{W}{\Delta t}=\frac{۱۳۴۴۰}{۱}=۱۳۴۴۰W=۱۳/۴۴kW$$

بنابراین بازده تلمبه برابر است با:

$$Ra=\frac{P_{مفید}}{P_{ورودی}}\Rightarrow Ra=\frac{۱۳/۴۴}{۲۰}=\frac{۶۷/۲}{۱۰۰}=۶۷/۲\%$$

گروه آموزشی ماز

۷۲- شکل زیر سه صفحهٔ فلزی هم‌جنس به اضلاع متفاوت را در یک دما نشان می‌دهد. اگر دمای همهٔ آن‌ها را به‌اندازهٔ یکسان زیاد کنیم، مساحت کدام‌یک بیش‌تر افزایش پیدا می‌کند؟



۱) (۱)
۲) (۲)
۳) (۳)
۴) مساحت هر سه صفحه به یک اندازه افزایش پیدا می‌کند.

پاسخ: گزینه ۳ (آسان ـ مفهومی ـ ۱۰۰۴)

نکته:
در اثر تغییر دمای یکسان چند جسم متفاوت هم‌جنس، هر چه مساحت اولیهٔ یک جسم، بزرگ‌تر باشد، تغییر مساحت آن بیش‌تر است ولی درصد تغییر مساحت همهٔ آن‌ها یکسان است.

www.biomaze.ir
AzmonVIP

پاسخ تشریحی:

طبق رابطهٔ $\Delta A = A_1(2\alpha)\Delta\theta$، با افزایش دمای یکسان، مساحت صفحه‌ای بیش‌تر افزایش پیدا می‌کند که مساحت اولیهٔ آن بزرگ‌تر باشد؛ بنابراین مساحت صفحهٔ (۳) بیش‌تر از بقیه افزایش می‌یابد.

گروه آموزشی ماز

۷۳- درون گرماسنجی با ظرفیت گرمایی $۲۱۰۰\frac{J}{K}$، $۴kg$ آب در دمای $۴°C$ درحال تعادل است. گلوله‌ای فلزی به جرم $۲kg$ با دمای $۱۰۰°C$ را درون آب می‌اندازیم و پس از رسیدن به تعادل، دمای مجموعه $۷°C$ می‌شود. در این مدت چند ژول گرما تلف شده است؟

$(c_{آب} = ۴۲۰۰\frac{J}{kg.K}\ ,\ c_{فلز} = ۵۰۰\frac{J}{kg.K})$

۱) ۳۶۳۰۰ ۲) ۴۰۰۰۰ ۳) ۲۴۸۰۰ ۴) گرمایی تلف نشده است.

پاسخ: گزینه ۱ (متوسط ـ محاسباتی ـ ۱۰۰۴)

پاسخ تشریحی:

گرمایی که آب و گرماسنج می‌گیرند تا به دمای $۷°C$ برسند، برابر است با:

$$Q_1 = m_{آب}c_{آب}\Delta\theta_{آب} + C_{گرماسنج}\Delta\theta_{گرماسنج} = ۴\times۴۲۰۰\times(۷-۴) + ۲۱۰۰\times(۷-۴)$$

$$\Rightarrow Q_1 = ۱۲\times۴۲۰۰ + ۳\times۲۱۰۰ = ۵۶۷۰۰J$$

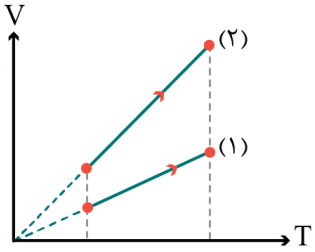
گرمایی که فلز از دست می‌دهد تا به دمای $۷°C$ برسد، برابر است با:

$$|Q_2| = m_{فلز}c_{فلز}|\Delta\theta_{فلز}| = ۲\times۵۰۰\times(۱۰۰-۷) = ۹۳۰۰۰J$$

بنابراین در این مدت، گرمای $۹۳۰۰۰ - ۵۶۷۰۰ = ۳۶۳۰۰J$ تلف شده است.

گروه آموزشی ماز

۷۴- مقدار برابری از گازهای کامل و مشابه (۱) و (۲) فرایندهایی هم‌فشار را مطابق شکل طی می‌کنند. اگر در فرایندهای (۱) و (۲)، فشار گازها به‌ترتیب P_1 و P_2 و کار انجام‌شده توسط گازها به‌ترتیب W_1 و W_2 باشد، کدام مقایسه صحیح است؟

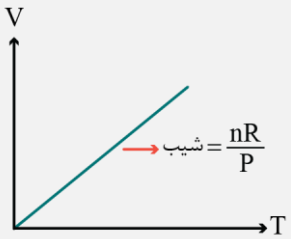


۱) $W_2 = W_1 ,\ P_2 > P_1$
۲) $W_2 = W_1 ,\ P_2 < P_1$
۳) $W_2 > W_1 ,\ P_2 > P_1$
۴) $W_2 > W_1 ,\ P_2 < P_1$

پاسخ: گزینه ۲ (متوسط ـ نموداری ـ ۱۰۰۵)

نکته:

نمودار $V-T$ یک گاز کامل در فرایند هم‌فشار، خطی است که امتداد آن از مبدأ می‌گذرد و شیب آن برابر $\frac{nR}{P}$ است.



$$PV = nRT$$

$$\Rightarrow V = \underbrace{\left(\frac{nR}{P}\right)}_{\text{شیب خط}}T$$

پاسخ تشریحی:

با توجه به نکتهٔ فوق، چون شیب نمودار (۲) بیش‌تر است، فشار آن کم‌تر خواهد بود. $(P_2 < P_1)$

برای محاسبهٔ کار انجام‌شده توسط گاز در فرایند هم‌فشار می‌توان نوشت:

$$\begin{cases} |W| = |P\Delta V| \\ PV = nRT \end{cases} \Rightarrow |W| = |nR\Delta T|$$

چون مقدار گازها و تغییر دمای آن‌ها یکسان است، کار انجام‌شده توسط گازها نیز باهم برابر است. $(W_2 = W_1)$

گروه آموزشی ماز

www.biomaze.ir
AzmonVIP

۷۵- بازده یک ماشین درون‌سوز بنزینی ۱۸ درصد است. این ماشین در هر چرخه ۳۲۴۰J کار انجام می‌دهد. گرمای حاصل از سوخت در هر چرخه چند کیلوژول است؟

۱) ۱۸ ۲) ۲۰ ۳) ۳۲/۴ ۴) ۳۲

پاسخ: گزینه ۱ (آسان ـ محاسباتی ـ ۱۰۰۵)

پاسخ تشریحی:

با استفاده از رابطهٔ بازده ماشین گرمایی داریم:

$$\eta = \frac{|W|}{Q_H} \Rightarrow ۰/۱۸ = \frac{۳۲۴۰}{Q_H}$$

$$Q_H = ۱۸۰۰۰J = ۱۸kJ$$

گروه آموزشی ماز

www.biomaze.ir

۷۶- در میان ۳۶ عنصر اول جدول تناوبی، چند عنصر وجود دارد که عدد اتمی آن‌ها دو برابر تعداد الکترون‌های با $l = ۱$ در آرایش الکترونی آن عنصر بوده و چند مورد از این عنصرها، در واکنش‌های شیمیایی می‌توانند آنیون تشکیل بدهند؟

۱) ۵ ، ۱ ۲) ۵ ، ۲ ۳) ۴ ، ۱ ۴) ۴ ، ۲

پاسخ: گزینه ۳ (آسان ـ مفهومی ـ ۱۰۰۱)

پاسخ تشریحی:

آرایش الکترونی ۳۶ عنصر اول جدول تناوبی به صورت زیر است:

$H: ۱s^۱$	$Ne: ۱s^۲۲s^۲۲p^۶$	$K: ۱s^۲۲s^۲۲p^۶۳s^۲۳p^۶۴s^۱$	$Ni: ۱s^۲۲s^۲۲p^۶۳s^۲۳p^۶۳d^۸۴s^۲$
$He: ۱s^۲$	$Na: ۱s^۲۲s^۲۲p^۶۳s^۱$	$Ca: ۱s^۲۲s^۲۲p^۶۳s^۲۳p^۶۴s^۲$	$Cu: ۱s^۲۲s^۲۲p^۶۳s^۲۳p^۶۳d^{۱۰}۴s^۱$
$Li: ۱s^۲۲s^۱$	$Mg: ۱s^۲۲s^۲۲p^۶۳s^۲$	$Sc: ۱s^۲۲s^۲۲p^۶۳s^۲۳p^۶۳d^۱۴s^۲$	$Zn: ۱s^۲۲s^۲۲p^۶۳s^۲۳p^۶۳d^{۱۰}۴s^۲$
$Be: ۱s^۲۲s^۲$	$Al: ۱s^۲۲s^۲۲p^۶۳s^۲۳p^۱$	$Ti: ۱s^۲۲s^۲۲p^۶۳s^۲۳p^۶۳d^۲۴s^۲$	$Ga: ۱s^۲۲s^۲۲p^۶۳s^۲۳p^۶۳d^{۱۰}۴s^۲۴p^۱$
$B: ۱s^۲۲s^۲۲p^۱$	$Si: ۱s^۲۲s^۲۲p^۶۳s^۲۳p^۲$	$V: ۱s^۲۲s^۲۲p^۶۳s^۲۳p^۶۳d^۳۴s^۲$	$Ge: ۱s^۲۲s^۲۲p^۶۳s^۲۳p^۶۳d^{۱۰}۴s^۲۴p^۲$
$C: ۱s^۲۲s^۲۲p^۲$	$P: ۱s^۲۲s^۲۲p^۶۳s^۲۳p^۳$	$Cr: ۱s^۲۲s^۲۲p^۶۳s^۲۳p^۶۳d^۵۴s^۱$	$As: ۱s^۲۲s^۲۲p^۶۳s^۲۳p^۶۳d^{۱۰}۴s^۲۴p^۳$
$N: ۱s^۲۲s^۲۲p^۳$	$S: ۱s^۲۲s^۲۲p^۶۳s^۲۳p^۴$	$Mn: ۱s^۲۲s^۲۲p^۶۳s^۲۳p^۶۳d^۵۴s^۲$	$Se: ۱s^۲۲s^۲۲p^۶۳s^۲۳p^۶۳d^{۱۰}۴s^۲۴p^۴$
$O: ۱s^۲۲s^۲۲p^۴$	$Cl: ۱s^۲۲s^۲۲p^۶۳s^۲۳p^۵$	$Fe: ۱s^۲۲s^۲۲p^۶۳s^۲۳p^۶۳d^۶۴s^۲$	$Br: ۱s^۲۲s^۲۲p^۶۳s^۲۳p^۶۳d^{۱۰}۴s^۲۴p^۵$
$F: ۱s^۲۲s^۲۲p^۵$	$Ar: ۱s^۲۲s^۲۲p^۶۳s^۲۳p^۶$	$Co: ۱s^۲۲s^۲۲p^۶۳s^۲۳p^۶۳d^۷۴s^۲$	$Kr: ۱s^۲۲s^۲۲p^۶۳s^۲۳p^۶۳d^{۱۰}۴s^۲۴p^۶$

در میان ۳۶ عنصر اول جدول دوره‌ای، تعداد الکترون‌های موجود در زیر لایهٔ p(الکترون‌های با $l = ۱$) چهار عنصر اکسیژن، منیزیم، کروم و کریپتون، نصف عدد اتمی این عناصر است. در میان این چهار عنصر، تنها اکسیژن قادر است با گرفتن دو الکترون به آنیون تبدیل شود. منیزیم و کروم الکترون از دست داده و کاتیون تولید می‌کنند و کریپتون گاز نجیب است و یون تشکیل نمی‌دهد.

اتم ساختار لایه‌ای داشته و الکترون‌ها در لایه‌های پیرامون هسته قرار می‌گیرند. برای مشخص کردن لایه‌های الکترونی از عدد کوانتومی اصلی که با نماد n نشان داده می‌شود، استفاده می‌کنیم. هر لایه الکترونی از بخش‌های کوچک‌تری به نام زیرلایه تشکیل شده‌است. به هر زیرلایه یک عدد کوانتومی فرعی با نماد l نسبت می‌دهند. بر این اساس، هر زیرلایه را با نماد nl نشان می‌دهند.

کاربردهای عدد کوانتومی اصلی(n) عبارت هستند از:

- عدد کوانتومی اصلی(n)، تعداد زیرلایه‌های یک لایه را نیز مشخص می‌کند.
- به کمک مقدار n، حداکثر گنجایش الکترونی یک لایه را می‌توان محاسبه کرد. برای محاسبه گنجایش الکترونی لایه‌ها از رابطه $۲n^۲$ استفاده می‌شود.

کاربردهای عدد کوانتومی فرعی(l) نیز عبارت هستند از:

- به کمک عدد کوانتومی فرعی(l)، حداکثر گنجایش الکترونی یک زیرلایه را می‌توان بدست آورد. برای محاسبه حداکثر مقدار گنجایش الکترونی زیرلایه‌ها از رابطه $۴l + ۲$ استفاده می‌شود. همان‌طور که مشخص است، گنجایش هر زیرلایه نسبت به زیرلایه قبل از خود، چهار الکترون بیشتر است.
- به کمک عدد کوانتومی فرعی، می‌توان سطح انرژی زیرلایه‌های مختلف موجود در یک لایه را مقایسه کرد.

گروه آموزشی ماز

۷۷- چند مورد از مطالب زیر، در رابطه با عنصر تکنسیم درست است؟

- نماد آن دو حرفی است و مانند نماد گاز نجیب هم دورهٔ آن، به حرف e ختم می‌شود.
- با عنصر منگنز هم‌گروه بوده و اتم‌های آن به صورت طبیعی در محیط یافت نمی‌شوند.
- از جمله عنصرهای دستهٔ d تناوب پنجم است و نسبت شمار نوترون به پروتون آن کمتر از ۱/۵ است.
- نخستین عنصری است که در واکنشگاه هسته‌ای ساخته شد و در تصویربرداری غدهٔ تیروئید استفاده می‌شود.
- یون تکنسیم با یون چنداتمی که حاوی اتم ید است، هم‌اندازهٔ بوده و به همین دلیل، غدهٔ تیروئید این یون را جذب می‌کند.

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

پاسخ: گزینه ۳ (آسان ـ مفهومی ـ ۱۰۰۱)

پاسخ تشریحی:

موارد دوم، سوم و چهارم درست است.

بررسی موارد:

مورد اول: نماد تکنسیم، به صورت Tc است. نماد شیمیایی این عنصر فلزی، برخلاف نماد گاز نجیب زنون(Xe)، به حرف c ختم می‌شود.

مورد دوم: عدد اتمی تکنسیم برابر با ۴۳ است و ۷ واحد از عدد اتمی کریپتون(گاز نجیب دورهٔ قبل از تکنسیم) بیشتر است، پس می‌توان نتیجه گرفت که این عنصر در گروه هفتم جدول دوره‌ای قرار دارد و با منگنز با عدد اتمی ۲۵ هم گروه است. آرایش الکترونی منگنز به صورت زیر است:

$Mn: ۱s^۲۲s^۲۲p^۶۳s^۲۳p^۶۳d^۵۴s^۲$

www.biomaze.ir
AzmonVIP

توجه داریم که تکنسیم به صورت طبیعی وجود نداشته و در صورت نیاز، باید به صورت مصنوعی و با استفاده از واکنش‌های هسته‌ای تولید شود. به همین خاطر است که در خانه مربوط به این عنصر در جدول دوره‌ای، تنها یک دادهٔ عددی(عدد اتمی) وجود دارد و جرم اتمی میانگین تکنسیم در جدول دوره‌ای نوشته نشده است.

مورد سوم: تکنسیم($^{99}_{43}Tc$) از جملهٔ عنصرهای دستهٔ d تناوب پنجم است. نسبت شمار نوترون به پروتون در رادیوایزوتوپ تکنسیم برابر است با:

$$n = 99 - 43 = 56 \quad و \quad \frac{56}{43} \simeq 1/3$$

مورد چهارم: تکنسیم، نخستین عنصری بود که در واکنشگاه هسته‌ای و به کمک واکنش‌های هسته‌ای ساخته شد. این رادیوایزوتوپ برای تصویربرداری از غدهٔ تیروئید استفاده می‌شود.

مورد پنجم: یون یدید با ترکیبی که حاوی تکنسیم است، اندازهٔ مشابهی دارد و غدهٔ تیروئید هنگام جذب یون یدید، این یون را نیز جذب می‌کند. با افزایش مقدار این یون در غدهٔ تیروئید، امکان تصویربرداری از این غده، فراهم می‌شود.

گروه آموزشی ماز

۷۸- دربارهٔ عنصرهای $^{35}_{17}D$، $^{27}_{13}A$ و $^{70}_{31}E$، کدام موارد از مطالب زیر درست است؟

آ: تفاوت شمارهٔ گروه عنصر D و E برابر با تعداد زیرلایه‌های اشغال شده در آرایش الکترونی عنصر A است.

ب: عدد اکسایش هر سه عنصر داده شده، در واکنش با گاز اکسیژن ضمن دادوستد کامل الکترون، افزایش می‌یابد.

پ: در یون پایدار حاصل از عناصر E و A، برخلاف یون پایدار عنصر D، کل ظرفیت آخرین لایه از الکترون اشغال شده است.

ت: اختلاف تعداد پروتون و نوترون در عنصر E، دو برابر تعداد نوترون‌ها در فراوان‌ترین ایزوتوپ طبیعی لیتیم است.

۱) آ و ب ۲) ب و پ ۳) پ و ت ۴) آ و ت

پاسخ: گزینه ۳ (متوسط ـ مفهومی ـ ۱۰۰۱)

پاسخ تشریحی:

آرایش الکترونی این سه عنصر به صورت زیر است:

$$_{31}E: 1s^2 2s^2 2p^6 3s^2 3p^6 3d^{10} 4s^2 4p^1 \qquad _{17}D: 1s^2 2s^2 2p^6 3s^2 3p^5 \qquad _{13}A: 1s^2 2s^2 2p^6 3s^2 3p^1$$

این عناصر، به ترتیب معادل با آلومینیم، کلر و گالیم هستند. در رابطه با این عناصر، عبارت‌های (پ) و (ت) درست هستند.

بررسی موارد:

آ: با توجه به آرایش الکترونی داده شده، عنصر D به گروه ۱۷ و عنصر E به گروه ۱۳ جدول دوره‌ای تعلق دارد. بر این اساس، می‌توان گفت تفاوت شماره گروه این دو عنصر برابر با ۴ واحد است. این در حالی است که عنصر A، در آرایش الکترونی خود ۵ زیرلایه دارد.

ب: دادوستد کامل الکترون، حین تشکیل ترکیب‌های یونی از عناصر سازنده آن‌ها رخ می‌دهد. عدد اکسایش دو عنصر A و E، طبق معادله‌های زیر، در واکنش با گاز اکسیژن ضمن دادوستد کامل الکترون، افزایش می‌یابد:

$$4A(s) + 3O_2(g) \rightarrow 2A_2O_3(s)$$
$$4E(s) + 3O_2(g) \rightarrow 2E_2O_3(s)$$

توجه داریم که عنصر D(کلر)، یک نافلز است و در دمای اتاق به صورت دو اتمی و گازی شکل است و در واکنش با گاز اکسیژن الکترون به اشتراک می‌گذارد. طی این فرایند، هیچ الکترونی به طور کامل بین دو گونه دادوستد نمی‌شود.

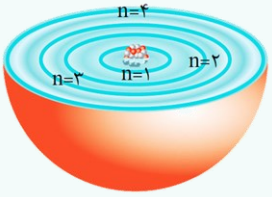
پ: آرایش الکترونی این سه یون، به صورت زیر است:

$$E^{3+}: 1s^2 2s^2 2p^6 3s^2 3p^6 3d^{10} \qquad D^-: 1s^2 2s^2 2p^6 3s^2 3p^6 \qquad A^{3+}: 1s^2 2s^2 2p^6$$

در یون پایدار A و E، برخلاف یون پایدار حاصل از عنصر D، کل ظرفیت آخرین لایه از الکترون اشغال شده است. در یون D^-، زیرلایه $3d$ از الکترون اشغال نشده است، بنابراین آخرین لایه الکترونی در این یون، کاملا پر نیست.

ت: عنصر لیتیم در طبیعت دارای دو ایزوتوپ $^{7}_{3}Li$ و $^{6}_{3}Li$ است. بیشترین درصد فراوانی لیتیم مربوط به $^{7}_{3}Li$ است که ۴ نوترون دارد. عنصر $^{70}_{31}E$، در ساختار خود ۳۹ نوترون دارد و اختلاف تعداد نوترون‌ها و پروتون‌ها در آن برابر با ۸ است.

در ساختار لایه‌ای، اتم را کره‌ای در نظر می‌گیرند که هسته در فضایی بسیار کوچک و در مرکز آن جای دارد و الکترون‌ها در فضایی بسیار بزرگ‌تر و در لایه‌هایی پیرامون هسته توزیع می‌شوند. این لایه‌ها را از هسته به سمت بیرون شماره‌گذاری می‌کنند و شمارهٔ هر لایه را با n نمایش می‌دهند. تصویر زیر، نمایی از ساختار لایه‌ای اتم را نشان می‌دهد:



www.biomaze.ir
AzmonVIP

در این مدل، n معادل با عدد کوانتومی اصلی است. لایه‌های با $n > ۱$، از چند زیرلایه مجزا تشکیل شده‌اند که در مدل کوانتومی اتم به هر نوع زیرلایه یک عدد کوانتومی نسبت می‌دهند و آن را با نماد l نشان می‌دهند و عدد کوانتومی فرعی نامیده می‌شود. مقادیر معین و مجاز l به این صورت است:

$l = ۰ ، ۱ ، \ldots$ و $n-۱$

توجه داریم که سطحی‌ترین الکترون‌های موجود در هر اتم، الکترون‌های ظرفیتی آن اتم را تشکیل داده و خواص شیمیایی آن اتم را تعیین می‌کنند.

گروه آموزشی ماز

۷۹- تعادل $۲NO_۲(g) \rightleftharpoons ۲NO(g) + O_۲(g)\ ,\ \Delta H = ۲۵۰kJ$، در طول مدت ۱۰ دقیقه با ورود ۳ مول گاز $NO_۲$ به یک ظرف ۵۰۰ میلی‌لیتری برقرار شده است. اگر گرمای مصرف شده تا رسیدن به تعادل، برابر با گرمای آزاد شده طی تغییر دمای ۳۱/۲۵ کیلوگرم طلا به مقدار ۳۱/۲۵°C باشد، مقدار ثابت تعادل چقدر بوده و سرعت متوسط تولید NO چند گرم بر ثانیه است؟

$(O = ۱۶ , N = ۱۴ : g.mol^{-۱}$ و $c_{Au} = ۰/۱۲۸\ Jg^{-۱}°C^{-۱})$

۱) ۰/۲۵ ، ۰/۰۵ ۲) ۰/۱۲۵ ، ۰/۰۵ ۳) ۰/۲۵ ، ۰/۱ ۴) ۰/۱۲۵ ، ۰/۱

پاسخ: گزینه ۱ (متوسط ـ مساله ـ ۱۲۰۴)

پاسخ تشریحی:

گرمای مصرف شده تا رسیدن به تعادل برابر با مقدار گرمای آزاد شده طی تغییر دمای ۳۱/۲۵ کیلوگرم طلا به مقدار ۳۱/۲۵°C است. ابتدا مقدار گرمای مبادله شده را را حساب می‌کنیم:

$$Q = mc\Delta\theta \rightarrow Q = (۳۱/۲۵ \times ۱۰۰۰) \times ۰/۱۲۸ \times ۳۱/۲۵ = ۱۲۵۰۰۰\ J \sim ۱۲۵\ kJ$$

معادله واکنش شیمیایی انجام شده به صورت $۲NO_۲(g) \rightleftharpoons ۲NO(g) + O_۲(g)\ ,\ \Delta H = ۲۵۰kJ$ است. با توجه به واکنش تعادلی می‌توان مقدار $NO_۲$ مصرف شده را محاسبه کرد. در این رابطه، داریم:

$$?\,mol\ NO_۲ = ۱۲۵\ kJ \times \frac{۲\ mol\ NO_۲}{۲۵۰kJ} = ۱mol$$

بر این اساس، داریم:

$$۲NO_۲(g) \rightleftharpoons ۲NO(g) + O_۲(g)$$

تعداد مول اولیه:	۰	۰	۳
تغییر مول:	$+x$	$+۲x$	$-۲x$
تعداد مول تعادلی:	۰/۵	۱	۲

$\rightarrow ۲x = ۱ \rightarrow x = ۰/۵$

حجم ظرف برابر ۰/۵ لیتر است، پس غلظت تعادلی مواد برابر است با:

$$[O_۲] = ۱mol.L^{-۱}\ ،\ [NO] = ۲\ mol.L^{-۱}\ ،\ [NO_۲] = ۴\ mol.L^{-۱}$$

بر این اساس، مقدار ثابت تعادل واکنش را محاسبه می‌کنیم:

$$K = \frac{[NO]^۲ \times [O_۲]}{[NO_۲]^۲} = \frac{۲^۲ \times ۱}{۴^۲} = ۰/۲۵\ mol.L^{-۱}$$

حال سرعت مصرف گاز NO را برحسب گرم بر ثانیه حساب می‌کنیم:

$$?\,g.s^{-۱} = ۱mol\ NO \times \frac{۳۰\ g\ NO}{۱mol\ NO} \times \frac{۱}{۱۰\ min} \times \frac{۱\ min}{۶۰\ s} = ۰/۰۵$$

برای محاسبه سرعت متوسط تولید گاز نیتروژن مونوکسید، به صورت زیر نیز می‌توانستیم عمل کنیم:

$$\bar{R}_{NO} = \frac{\text{تغییر جرم } NO}{\Delta t} = \frac{۱mol\ NO \times \frac{۳۰\ g\ NO}{۱mol\ NO}}{۱۰\ min \times \frac{۶۰\ s}{۱\ min}} = ۰/۰۵$$

گروه آموزشی ماز

۸۰- ایزوتوپ‌های یک عنصر در چند مورد زیر با هم تفاوت دارند؟

- $A - Z$
- پایداری
- پتانسیل کاهشی استاندارد نیم‌سلول
- واکنش‌پذیری
- فراوانی
- چگالی بار یون تک اتمی

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

پاسخ: گزینه ۳ (آسان ـ مفهومی ـ ۱۰۰۱)

پاسخ تشریحی:

ایزوتوپ‌های یک عنصر دارای Z یکسان اما A متفاوت هستند. به دیگر سخن، ایزوتوپ‌ها اتم‌های یک عنصر هستند که در شمار نوترون‌ها با یکدیگر تفاوت دارند. از آنجا که خواص شیمیایی اتم‌های هر عنصر به عدد اتمی(Z) آن وابسته است، پس می‌توان گفت ایزوتوپ‌های یک عنصر خواص شیمیایی(مثل میزان

www.biomaze.ir
AzmonVIP

واکنش‌پذیری، پتانسیل کاهشی استاندارد، نوع یون‌های پایدار و ...) یکسانی دارند و در جدول دوره‌ای تنها یک مکان را اشغال می‌کنند. این در حالی است که همین ایزوتوپ‌ها در خواص فیزیکی وابسته به جرم مانند چگالی با یکدیگر تفاوت دارند. علاوه بر این، میزان پایداری و درصد فراوانی ایزوتوپ‌های یک عنصر با هم تفاوت دارد. بر این اساس می‌توان گفت ایزوتوپ‌ها در سه مورد $A-Z$، پایداری و فراوانی متفاوت از هم هستند، اما واکنش‌پذیری، پتانسیل کاهشی استاندارد نیم‌سلول و چگالی بار یون تک‌اتمی آن‌ها یکسان است.

گروه آموزشی ماز

۸۱- سه محلول سیرشده از KNO_3 در دماهای متفاوت، در اختیار داریم. درصد جرمی محلول اول در دمای $40^\circ C$ برابر ۳۷/۵ درصد است. جرم محلول دوم در دمای $20^\circ C$ برابر ۹۱ گرم بوده و این محلول شامل ۲۱ گرم نمک است و نسبت جرم نمک به جرم آب موجود محلول سوم در دمای $10^\circ C$ برابر ۰/۱۹۵ است. اگر معادله انحلال‌پذیری این نمک به صورت $S = a\theta^2 + b\theta + c$ باشد، نسبت ضریب θ به ضریب θ^2 برای این نمک، کدام است؟

۱) ۲۰ ۲) ۴۰ ۳) ۳۰ ۴) ۲۵

پاسخ: گزینه ۲ (سخت ـ مساله ـ ۱۰۰۳)

پاسخ تشریحی:

معادله انحلال‌پذیری پتاسیم نیترات به صورت درجه دوم($S = a\theta^2 + b\theta + c$) است. انحلال‌پذیری این نمک در دماهای مختلف را محاسبه می‌کنیم. باید هرکدام از شرایط دمایی داده شده را به صورت مجزا تحلیل کنیم:

دمای $40^\circ C$: در این دما درصد جرمی محلول سیرشده پتاسیم نیترات برابر ۳۷/۵٪ است، یعنی در ۶۲/۵ گرم آب، مقدار ۳۷/۵ گرم پتاسیم نیترات حل شده است. بر این اساس مقدار انحلال‌پذیری(مقدار نمکی که در ۱۰۰ گرم آب حل می‌شود) را محاسبه می‌کنیم:

$$?\,g \text{ نمک} = 100\,g \text{ آب} \times \frac{37/5\,g \text{ نمک}}{62/5\,g \text{ آب}} = 60\,g \text{ نمک}$$

در دمای $40^\circ C$ مقدار ۶۰ گرم نمک در ۱۰۰ گرم آب حل می‌شود، بنابراین داریم:

$$S = 1600a + 40b + c = 60$$

دمای $20^\circ C$: در این دما ۲۱ گرم نمک در ۷۰ گرم آب حل شده است و ۹۱ گرم محلول سیرشده را ایجاد کرده است، پس انحلال‌پذیری آن برابر است با:

$$?\,g \text{ نمک} = 100\,g \text{ آب} \times \frac{21\,g \text{ نمک}}{70\,g \text{ آب}} = 30\,g \text{ نمک}$$

در دمای $20^\circ C$ مقدار ۳۰ گرم نمک در ۱۰۰ گرم آب حل می‌شود، بنابراین داریم:

$$S = 400a + 20b + c = 30$$

دمای $10^\circ C$: در این دما جرم نمک حل‌شده، ۰/۱۹۵ برابر جرم آب است، بنابراین ۱۹/۵ گرم پتاسیم نیترات در ۱۰۰ گرم آب حل می‌شود:

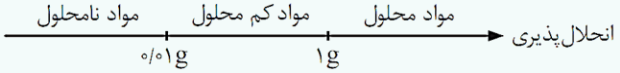
$$S = 100a + 10b + c = 19/5$$

تا به اینجای کار، سه معادله و سه مجهول داریم. بر این اساس، داریم:

$$\begin{cases} 1600a + 40b + c = 60 \\ 400a + 20b + c = 30 \\ 100a + 10b + c = 19/5 \end{cases} \rightarrow \quad a = 0/015 \;,\; b = 0/6 \;,\; c = 12$$

بنابراین معادله انحلال‌پذیری پتاسیم نیترات به صورت $S = 0/015\theta^2 + 0/6\theta + 12$ است و نسبت ضریب θ به ضریب θ^2 برابر ۴۰ است.

بیشترین مقدار از یک حل شونده که در ۱۰۰ گرم حلال و در دمای معین حل می‌شود، معادل با مقدار انحلال‌پذیری آن ماده است. طبیعی است که در چنین حالتی، یک محلول سیرشده ایجاد می‌شود که توانایی حل کردن مقدار بیشتری از حل‌شونده را ندارد. تغییر دما، از جمله عوامل موثر بر تغییر مقدار انحلال‌پذیری مواد مختلف در آب است. افزایش دما، می‌تواند موجب افزایش مقدار انحلال‌پذیری برخی از مواد(مواد با انحلال گرماگیر) شده و در نقطه مقابل، می‌تواند موجب کاهش مقدار انحلال‌پذیری برخی از مواد(مواد با انحلال گرماده) دیگر شود. با توجه به مقدار انحلال‌پذیری مواد در آب، این مواد را مطابق نمودار زیر در سه گروه مختلف قرار می‌دهند:



گروه آموزشی ماز

۸۲- چند مورد از مطالب زیر، درست است؟ $(H = 1 : g.mol^{-1} \;,\; C = 12 \;,\; O = 16 \;,\; Al = 27 \;,\; S = 32)$

آ: عبور جریان برق از محلول آبی منیزیم کلرید، آخرین مرحله از استخراج فلز منیزیم از آب دریا است.

ب: یون‌های کلرید، سولفات و فسفات به ترتیب برای شناسایی کاتیون‌های Ag^+ ، Ba^{2+} و Ca^{2+} به کار می‌روند.

پ: اگر در دمای اتاق انحلال‌پذیری آلومینیم سولفات $68/4g$ باشد، در $250g$ آب حداکثر ۰/۵ مول از این ماده حل می‌شود.

ت: اگر گلوکومتر عدد ۱۰۰ را نشان دهد و حجم خون $5L$ باشد، از اکسایش ۶۰٪ گلوکز موجود در خون، $2/24L$ گاز CO_2 در شرایط STP تولید می‌شود.

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

www.biomaze.ir
AzmonVIP

پاسخ: گزینه ۳ (متوسط ـ مفهومی و مساله ـ ۱۰۰۳)

پاسخ تشریحی:

موارد (ب)، (پ) و (ت) درست هستند.

بررسی موارد:

آ: فلز منیزیم مادهٔ ارزشمندی است که در تهیهٔ آلیاژها، شربت معده و ... کاربرد دارد. یکی از منابع تهیهٔ این فلز، آب دریا است. منیزیم در آب دریا به شکل $Mg^{2+}(aq)$ وجود دارد. برای استخراج و جداسازی آن، در مرحلهٔ نخست منیزیم را به صورت مادهٔ جامد و نامحلول $Mg(OH)_2$ رسوب می‌دهند، سپس آن را به منیزیم کلرید تبدیل می‌کنند. در پایان با استفاده از جریان برق منیزیم کلرید مذاب را به عنصرهای سازندهٔ آن تجزیه می‌کنند. معادله واکنش انجام شده، به صورت زیر است:

$$MgCl_2(l) \rightarrow Mg(l) + Cl_2(g)$$

ب: یون‌های کلرید، سولفات و فسفات به ترتیب برای شناسایی کاتیون‌های Ag^+، Ba^{2+} و Ca^{2+} به کار می‌روند. از واکنش میان هر دو جفت یون، رسوب ایجاد می‌شود. معادله واکنش‌ها در زیر آورده شده است:

$$AgNO_3(aq) + NaCl(aq) \rightarrow AgCl(s) + NaNO_3(aq)$$
$$Na_2SO_4(aq) + BaCl_2(aq) \rightarrow BaSO_4(s) + 2NaCl(aq)$$
$$2Na_3PO_4(aq) + 3CaCl_2(aq) \rightarrow Ca_3(PO_4)_2(s) + 6NaCl(aq)$$

پ: در این دما در ۱۰۰ گرم آب، ۶۸/۴ گرم آلومینیم سولفات حل می‌شود. مقدار آلومینیم حل‌شده در ۲۵۰ گرم آب را محاسبه می‌کنیم:

$$?\,mol\ Al_2(SO_4)_3 = 250\,g\ \text{آب} \times \frac{68/4\,g\ Al_2(SO_4)_3}{100\,g\ \text{آب}} \times \frac{1\,mol\ Al_2(SO_4)_3}{342\,g\ Al_2(SO_4)_3} = 0/5\,mol$$

بنابراین حداکثر ۰/۵ مول آلومینیم سولفات در ۲۵۰ گرم آب در این دما حل می‌شود.

ت: معادله اکسایش گلوکز به صورت زیر است:

$$C_6H_{12}O_6(aq) + 6O_2(g) \rightarrow 6CO_2(g) + 6H_2O(l)$$

مقدار گلوکز مصرف شده در واکنش بالا در حالتی که ۲/۲۴ لیتر گاز کربن دی‌اکسید بخواهد تولید شود را محاسبه می‌کنیم:

$$?\,g\ C_6H_{12}O_6 = 2/24L\ CO_2 \times \frac{1molCO_2}{22/4L\ CO_2} \times \frac{1\ mol\ C_6H_{12}O_6}{6\ mol\ CO_2} \times \frac{180\ g\ \ C_6H_{12}O_6}{1\ mol\ C_6H_{12}O_6} = 3\,g$$

۶۰ درصد گلوکز موجود در ۵ لیتر خون برابر ۳ گرم است، پس در کل ۵ گرم گلوکز در ۵ لیتر خون وجود دارد. می‌دانیم که گلوکومتر، مقدار میلی‌گرم گلوکز موجود در هر دسی لیتر خون را نشان می‌دهد، پس می‌توان گفت ۵۰۰۰ میلی‌گرم گلوکز در ۵۰ دسی لیتر خون فرد وجود دارد، بنابراین دستگاه گلوکومتر عدد ۱۰۰ را نشان می‌دهد.

گروه آموزشی ماز

۸۳- در ساختار نوعی هیدروکربن، ۳۵ جفت الکترون پیوندی وجود داشته و جرم کربن موجود در آن، ۱۸ برابر جرم اتم‌های هیدروژن است. در ۳/۸ گرم از این ترکیب، چند اتم کربن وجود داشته و حداکثر شمار پیوندهای دوگانه در آن چند برابر شمار پیوندهای $C-H$ موجود در آن است؟

$(C = 12, H = 1 : g.mol^{-1})$

۱) $1/1$ ، $1/806 \times 10^{23}$
۲) $1/1$ ، $1/806 \times 10^{22}$
۳) $1/4$ ، $1/806 \times 10^{23}$
۴) $1/4$ ، $1/806 \times 10^{22}$

پاسخ: گزینه ۱ (متوسط ـ مساله ـ ۱۱۰۱)

پاسخ تشریحی:

فرمول کلی هیدروکربن‌ها به صورت C_xH_y بوده و تعداد پیوندهای اشتراکی موجود در ساختار آن‌ها طبق رابطهٔ زیر قابل محاسبه است:

$$\text{تعداد پیوندهای اشتراکی} = \frac{4x + y}{2} = 35 \rightarrow 4x + y = 70$$

جرم اتم‌های کربن موجود در این هیدروکربن، ۱۸ برابر جرم اتم‌های هیدروژن آن است. پس می‌توان نوشت:

$$12x = 18y \rightarrow x = 1/5y$$

تا به اینجای کار، دو معادله و دو مجهول داریم. بر این اساس، مقدار هر مولفه را محاسبه می‌کنیم:

$$\begin{cases} 4x + y = 70 \\ x = 1/5y \end{cases} \rightarrow \quad y = 10 \quad \text{و} \quad x = 15$$

بنابراین فرمول هیدروکربن مورد نظر به صورت $C_{15}H_{10}$ است. سپس تعداد اتم‌های کربن موجود در ۳/۸ گرم از این هیدروکربن را حساب می‌کنیم:

$$?\,atom\ C = 3/8\ g\ C_{15}H_{10} \times \frac{1\ mol\ C_{15}H_{10}}{190\ g\ C_{15}H_{10}} \times \frac{15\ mol\ C}{1\ mol\ C_{15}H_{10}} \times \frac{6/02 \times 10^{23} atom\ C}{1 mol\ C} = 1/806 \times 10^{23}$$

www.biomaze.ir
AzmonVIP

سپس تعداد حداکثر پیوند دوگانه این ترکیب را محاسبه می‌کنیم:

۱۱ = ۲ ÷ ۲۲ = حداکثر تعداد پیوند دوگانه ← ۲۲ = ۱۰ − ۳۲ ← ۳۲ = ۲ + ۱۵ × ۲ = تعداد اتم هیدروژن در هیدروکربن سیر شده

پس نوعی هیدروکربن با فرمول شیمیایی $C_{۱۵}H_{۱۰}$، حداکثر می‌تواند ۱۱ پیوند دوگانه در ساختار خود داشته باشد. همچنین این ترکیب آلی، دارای ۱۰ پیوند اشتراکی $C-H$ بوده و نسبت تعداد پیوند دوگانه به تعداد پیوندهای $C-H$ در آن برابر با ۱/۱ است.

گروه آموزشی ماز

۸۴- پس از موازنه معادله‌های زیر، نسبت مجموع ضرایب مواد در واکنش I به مجموع ضرایب مواد در واکنش II کدام است و مجموع ضرایب مواد گازی در این دو واکنش، چند برابر مجموع ضرایب مواد محلول در این واکنش‌ها است؟

I) $P(s) + H_۲SO_۴(aq) \rightarrow H_۳PO_۴(aq) + SO_۲(g) + H_۲O(l)$

II) $KBrO_۳(aq) + N_۲H_۴(g) \rightarrow N_۲(g) + KBr(aq) + H_۲O(l)$

۱) ۲ ، ۱ ۲) ۱ ، ۰/۱ ۳) ۲ ، ۰/۱ ۴) ۱ ، ۱

پاسخ: گزینه ۴ (آسان ـ مفهومی ـ ۱۰۰۲)

پاسخ تشریحی:

در واکنش اول، پیچیده‌ترین ترکیب $H_۳PO_۴$ است. به همین دلیل برای موازنه ضریب ۱ را به $H_۳PO_۴$ می‌دهیم. ضریب $P(s)$ نیز برابر با یک می‌شود. چون موازنه به بن‌بست می‌خورد، ضریب $H_۲SO_۴$ و $SO_۲$ را برابر با a قرار می‌دهیم تا تعداد اتم گوگرد نیز در دو سمت برابر شود. در این حالت، معادله واکنش به صورت زیر در می‌آید:

$$۱P(s) + aH_۲SO_۴(aq) \rightarrow ۱H_۳PO_۴(aq) + aSO_۲(g) + H_۲O(l)$$

به منظور موازنه تعداد اتم هیدروژن در معادله واکنش، ضریب آب را نیز برابر با $a - \frac{۳}{۲}$ قرار می‌دهیم. بر این اساس، داریم:

$$۱P(s) + aH_۲SO_۴(aq) \rightarrow ۱H_۳PO_۴(aq) + aSO_۲(g) + (a-\frac{۳}{۲})H_۲O(l)$$

در قدم بعد، معادله مربوط به موازنه تعداد اتم اکسیژن در دو سمت این واکنش را تشکیل می‌دهیم تا مقدار a بدست بیاید. در این رابطه، داریم:

$$۴a = ۴ + ۲a + \left(a - \frac{۳}{۲}\right) \Longrightarrow a = ۲/۵$$

بر این اساس، معادله مورد نظر به صورت زیر می‌شود:

$$۱P(s) + \frac{۵}{۲}H_۲SO_۴(aq) \rightarrow ۱H_۳PO_۴(aq) + \frac{۵}{۲}SO_۲(g) + ۱H_۲O(l)$$

اتم‌های موجود در دو طرف معادلهٔ واکنش موازنه شده‌اند. کافی است همهٔ ضرایب را در ۲ ضرب کنیم تا ضرایب کسری از بین برود. بر این اساس، داریم:

$$۲P(s) + ۵H_۲SO_۴(aq) \rightarrow ۲H_۳PO_۴(aq) + ۵SO_۲(g) + ۲H_۲O(l)$$

برای موازنه واکنش دوم، ابتدا ضریب ۳ را قبل از $H_۲O$ و ضریب $\frac{۳}{۲}$ را نیز قبل از $N_۲$ و $N_۲H_۴$ قرار می‌دهیم. در این حالت، طبق معادلهٔ زیر همهٔ اتم‌ها در دو طرف موازنه می‌شوند:

$$KBrO_۳(aq) + \frac{۳}{۲}N_۲H_۴(g) \rightarrow \frac{۳}{۲}N_۲(g) + KBr(aq) + ۳H_۲O(g)$$

برای از بین بردن ضرایب کسری دو طرف معادله را ۲ ضرب می‌کنیم. بر این اساس، داریم:

$$۲KBrO_۳(aq) + ۳N_۲H_۴(g) \rightarrow ۳N_۲(g) + ۲KBr(aq) + ۶H_۲O(g)$$

مجموع ضرایب مواد در هر دو واکنش برابر با ۱۶ و مجموع ضرایب مواد گازی و محلول هم برابر ۱۱ است.

گروه آموزشی ماز

۸۵- چند مورد از مطالب زیر دربارهٔ مولکول $AD_۳$ می‌تواند درست باشد؟ (همه اتم‌ها به آرایش هشت‌تایی رسیده‌اند.)

- **اگر مجموع شمار الکترون‌های ظرفیت اتم‌ها در آن برابر ۲۴ باشد، این مولکول در میدان الکتریکی جهت‌گیری نمی‌کند.**
- **عنصرهای A و D می‌توانند در ساختار موادی شرکت کنند که در حالت مذاب و محلول رسانای جریان الکتریسیته باشند.**
- **اگر تعداد پیوندهای اشتراکی $AD_۳$ برابر با تعداد پیوندهای اشتراکی HCN باشد، مدل فضا پرکن آن مانند آمونیاک است.**
- **اگر شمار جفت الکترون ناپیوندی در $AD_۳$، ۲/۵ برابر این الکترون‌ها در اوره باشد، مخلوط این دو ماده نور را پخش نمی‌کند.**

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

پاسخ: گزینه ۳ (متوسط ـ مفهومی ـ ۱۰۰۳)

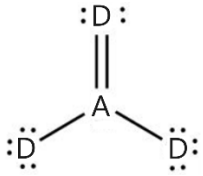
پاسخ تشریحی:

با توجه به این‌که همهٔ اتم‌ها در $AD_۳$ به آرایش هشت‌تایی رسیده‌اند، عبارت‌های اول، دوم و چهارم درست هستند.

www.biomaze.ir
AzmonVIP

بررسی موارد:

مورد اول: اگر مجموع شمار الکترون‌های موجود در لایهٔ ظرفیت اتم‌ها در AD_3 برابر با ۲۴ عدد باشد، ساختار این گونه شیمیایی به صورت زیر است:

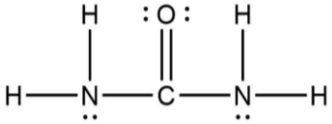


ساختار مورد نظر، یک مولکول ناقطبی است و در میدان الکتریکی جهت گیری نمی‌کند.

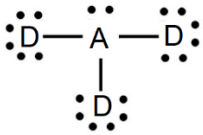
مورد دوم: عنصرهای A و D هر دو نافلز هستند و می‌توانند در واکنش با فلزات ترکیب‌های یونی مختلفی را تشکیل دهند. ترکیب‌های یونی در حالت مذاب و محلول، رسانای جریان الکتریسته هستند.

مورد سوم: مولکول HCN یا همان هیدروژن سیانید، دارای ۴ پیوند اشتراکی است. اگر مولکول AD_3 نیز در ساختار خود ۴ پیوند اشتراکی داشته باشد، ساختار آن معادل با ساختاری می‌شود که بالاتر رسم شد. در این ساختار، اتم مرکزی فاقد جفت الکترون ناپیوندی است به همین دلیل مدل فضا پرکن آن نمی‌تواند مانند آمونیاک و به صورت برآمده باشد. مدل فضاپرکن آمونیاک به صورت زیر است:

مورد چهارم: با توجه به ساختار اوره که در زیر آمده است، این مولکول دارای دارای ۴ جفت الکترون ناپیوندی است.



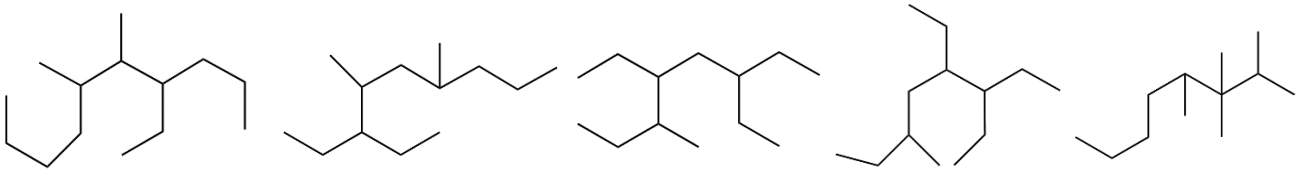
پس AD_3 دارای ۱۰ جفت الکترون ناپیوندی($۲/۵ \times ۴ = ۱۰$) است و ساختار آن به شکل زیر است:



اتم مرکزی در ساختار داده شده دارای یک جفت الکترون ناپیوندی بوده و این ذره، یک مولکول قطبی است و به همین دلیل در اوره محلول است. چون این دو ماده محلول در یکدیگر هستند، مسیر عبور نور در مخلوط AD_3 و اوره مشخص نیست. به عبارت دیگر مخلوط این دو ترکیب نور را پخش نمی‌کند.

گروه آموزشی ماز

۸۶- از میان آلکان‌های داده شده، چند ماده با هم ایزومر بوده و مجموع شمارهٔ اتم‌های کربن از زنجیر اصلی که شاخه‌های فرعی روی آن‌ها قرار می‌گیرند، در چند ترکیب برابر با تعداد اتم‌های کربن آن آلکان است؟



۱) ۳ ، ۳ ۲) ۴ ، ۴ ۳) ۳ ، ۴ ۴) ۴ ، ۳

پاسخ: گزینه ۴ (متوسط ـ مفهومی ـ ۱۱۰۱)

پاسخ تشریحی:

نام آلکان‌های داده شده از راست به چپ به صورت ۴،۳،۳،۲-تترامتیل اوکتان، ۴،۳- دی اتیل-۶-متیل اوکتان، ۶،۴-دی اتیل-۳-متیل اوکتان، ۳-اتیل-۶،۴-دی متیل نونان و ۴- اتیل-۶،۵-دی متیل دکان است. آلکان‌های دوم، سوم و چهارم با هم ایزومر هستند. توجه داریم که ایزومرها فرمول مولکولی یکسان، اما فرمول ساختاری متفاوت دارند. فرمول مولکولی این سه آلکان به صورت $C_{۱۳}H_{۲۸}$ است، اما نحوهٔ اتصال اتم‌ها در آن‌ها تفاوت دارد.

بخش عمده هیدروکربن‌های موجود در نفت خام را آلکان‌ها تشکیل می‌دهند. آلکان‌ها جز هیدروکربن‌های سیرشده بوده و تمایل چندانی به انجام واکنش‌های شیمیایی ندارند. در آلکان‌ها همه پیوندهای موجود در بین اتم‌ها یگانه هستند. با توجه به سیرشده بودن مولکول‌های سازنده‌ی آلکان‌ها، این مواد تمایل چندانی به انجام واکنش‌های شیمیایی با مواد دیگر ندارند. این ویژگی سبب می‌شود تا میزان سمی بودن آلکان‌ها کمتر شده و استنشاق آنها بر شش‌ها و بدن تأثیر چندانی نداشته باشد. البته، استنشاق آلکان‌ها سبب کاهش مقدار اکسیژن در هوای دمی شده و از انتقال گازهای تنفسی در شش‌ها جلوگیری می‌کند و به همین خاطر، نفس کشیدن دشوار می‌شود. بر این اساس، اگر میزان بخارهای وارد شده به شش‌ها زیاد باشد، حتی می‌تواند سبب مرگ فرد شود.

مجموع شمارهٔ اتم‌های شاخه‌دار در این آلکان‌ها به ترتیب برابر با ۱۲، ۱۳، ۱۳، ۱۳ و ۱۵ می‌باشد، پس می‌توان گفت که در الکان‌های شماره اول، دوم، سوم و چهارم، مجموع شمارهٔ کربن‌های شاخه‌دار برابر با تعداد اتم‌های کربن است.

گروه آموزشی ماز

۸۷- چند عبارت زیر، می‌تواند جای خالی موجود در جمله زیر را به درستی پر کند؟

«..... در مولکول پارازایلن، در مقایسه با مولکول نفتالن بیشتر است.»

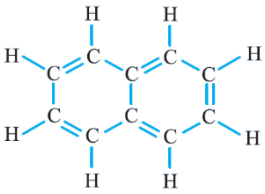
- **گشتاور دوقطبی**
- **درصد جرمی اتم‌های هیدروژن**
- **تعداد پیوندهای دوگانه**
- **نسبت شمار پیوندهای $C-H$ به شمار پیوندهای $C-C$**
- **شمار اتم‌های کربن با عدد اکسایش صفر**
- **نقطهٔ جوش**

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

پاسخ: گزینه ۲ (آسان ـ مفهومی ـ ۱۱۰۱)

پاسخ تشریحی:

دو مورد از موارد داده شده(درصد جرمی اتم‌های هیدروژن و نسبت شمار پیوندهای $C-H$ به شمار پیوندهای $C-C$) در مولکول پارازایلن بیشتر از نفتالن است. فرمول مولکولی پارازایلن و نفتالن به ترتیب C_8H_{10} و $C_{10}H_8$ بوده و ساختار این دو ترکیب در زیر آورده شده است.

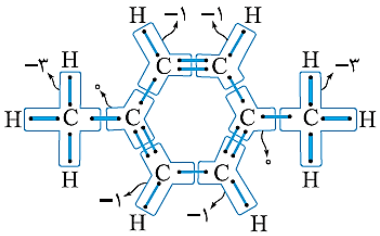


بررسی موارد:

مورد اول: هر دو ترکیب هیدروکربن هستند و همانطور که می‌دانیم، گشتاور دوقطبی اغلب هیدروکربن‌ها ناچیز و در حدود صفر است.

مورد دوم: پارازایلن در ساختار مولکولی خود ۳ پیوند دوگانه و نفتالن ۵ پیوند دوگانه دارد.

مورد سوم: هر دو ترکیب، دو اتم کربن با عدد اکسایش صفر در ساختار مولکولی خود دارند. تصویر زیر، ساختار باز پارازایلن و عدد اکسایش اتم‌های کربن موجود در آن را نشان می‌دهد:



مورد چهارم: درصد جرمی اتم‌های هیدروژن در پارازایلن(C_8H_{10}) و نفتالن($C_{10}H_8$) را محاسبه می‌کنیم:

نفتالن : $\frac{8}{128} \times 100 = 6/25$ پارازایلن : $\frac{10}{106} \times 100 \simeq 9/43$

مورد پنجم: نسبت شمار پیوندهای $C-H$ به شمار پیوندهای $C-C$ در پارازایلن برابر $\frac{10}{5} = 2$ و این نسبت در نفتالن برابر $\frac{8}{6} \simeq 1/33$ است.

مورد ششم: جرم مولی نفتالن بیشتر از پارازایلن است و همانطور که می‌دانیم، در ترکیبات ناقطبی هر چه جرم مولی بیشتر باشد، نقطه جوش بیشتر است.

پارازایلن یک هیدروکربن حلقوی سیرنشده و آروماتیک با فرمول شیمیایی C_8H_{10} است که از تقطیر نفت خام به دست می‌آید. با توجه به ساختار پارازایلن، ترفتالیک اسید را می‌توان از اکسایش این ماده به دست آورد. در فرایند تبدیل پارازایلن به ترفتالیک اسید، از محلول بنفش‌رنگ حاوی پتاسیم پرمنگنات ($KMnO_4$) به عنوان عامل اکسنده استفاده می‌شود. توجه داریم که در واکنش تبدیل پارازایلن به ترفتالیک اسید، یون پرمنگنات(یونی که عدد اکسایش اتم منگنز در آن برابر با +۷ بوده و فرمول شیمیایی آن به صورت MnO_4^- است) کاهش یافته و به منگنز(IV) اکسید یا همان MnO_2 تبدیل می‌شود. طی این فرایند، عدد اکسایش منگنز به اندازه ۳ واحد تغییر می‌کند. با وجود غلظت بالای پتاسیم پرمنگنات در محلول، باز هم شرایط تبدیل پارازایلن به ترفتالیک اسید تأمین نمی‌شود؛ مگر آنکه دمای مخلوط واکنش افزایش یابد. با توجه به این قسمت از متن کتاب درسی، می‌توان گفت در دمای بالا شرایط تبدیل پارازایلن به ترفتالیک اسید تأمین می‌شود.

گروه آموزشی ماز

www.biomaze.ir
AzmonVIP

۸۸- اگر آنتالپی سوختن متان و متانول به ترتیب برابر با ۸۹۰- و ۷۲۵- کیلوژول بر مول باشد، کدام مطلب نادرست است؟
$(O = ۱۶ , C = ۱۲ , H = ۱ : g.mol^{-۱})$

۱) ارزش سوختی متان به تقریب ۲/۴۵ برابر ارزش سوختی متانول است.
۲) مقدار $CO_۲$ تولید شده از سوختن یک گرم متان، ۲ برابر $CO_۲$ تولید شده از سوختن یک گرم متانول است.
۳) در واکنش سوختن متانول به ازای مصرف ۱۰/۰۸ لیتر گاز اکسیژن در شرایط STP، ۲۱/۷۵ کیلوژول گرما آزاد می‌شود.
۴) سوختن ۰/۵ مول متان می‌تواند دمای ۱۰۰ کیلوگرم از یک فلز با گرمای ویژه $۰/۴۴۵\ Jg^{-۱}°C^{-۱}$ را ۱۰°C افزایش دهد.

پاسخ: گزینه ۳ (متوسط ـ مساله ـ ۱۱۰۲)

پاسخ تشریحی:

آنتالپی سوختن، مقدار گرمای آزادشده به ازای مصرف یک مول از ماده را نشان می‌دهد. واکنش سوختن متان و متانول به صورت زیر است:

$$CH_۴(g) + ۲O_۲(g) \rightarrow CO_۲(g) + ۲H_۲O(l) + ۸۹۰\,kJ$$
$$CH_۳OH(l) + \frac{۳}{۲}O_۲(g) \rightarrow CO_۲(g) + ۲H_۲O(l) + ۷۲۵kJ$$

مقدار انرژی آزاد شده به ازای مصرف ۱۰/۰۸ لیتر گاز اکسیژن در واکنش سوختن متانول را به دست می‌آوریم:

$$?\,kJ\ \text{انرژی} = ۱۰/۰۸\ L\ O_۲ \times \frac{۱\ mol\ O_۲}{۲۲/۴\ L\ O_۲} \times \frac{-۷۲۵\ kJ\ \text{انرژی}}{۱/۵\ mol\ O_۲} = -۲۱۷/۵\ kJ$$

بررسی سایر گزینه‌ها:

۱) ارزش سوختی، نشان‌دهندهٔ مقدار انرژی آزاد شده به ازای سوختن یک گرم از یک ماده است. با توجه به جرم مولی متان و متانول می‌توان ارزش سوختی این دو ماده را به دست آورد. در این رابطه، داریم:

$$\text{ارزش سوختی متان} = \frac{|\Delta H|}{\text{جرم مولی}} = \frac{۸۹۰}{۱۶} \simeq ۵۵/۶\ kJ.g^{-۱}$$
$$\text{ارزش سوختی متانول} = \frac{|\Delta H|}{\text{جرم مولی}} = \frac{۷۲۵}{۳۲} \simeq ۲۲/۷\ kJ.g^{-۱}$$

نسبت این دو ارزش سوختی برابر با:

$$\frac{۵۵/۶}{۲۲/۷} \simeq ۲/۴۵$$

۲) چون جرم مولی متان نصف جرم مولی متانول است، پس اگر یک گرم از این دو ماده در اختیار داشته باشیم، شمار مول‌های متانول نصف شمار مول‌های متان می‌شود. با توجه به معادلهٔ موازنه شده سوختن، مقدار گاز $CO_۲$ تولید شده به ازای سوختن یک گرم متان، دو برابر یک گرم متانول خواهد شد.

۴) آنتالپی سوختن متان برابر با ۸۹۰- کیلوژول بر مول است. بر این اساس، می‌توان گفت گرمای آزاد شده به ازای مصرف ۰/۵ مول متان برابر ۴۴۵- کیلوژول است. طبق رابطهٔ زیر، می‌توان نوشت:

$$Q = mc\Delta\theta \rightarrow -۴۴۵ = ۱۰۰ \times ۰/۴۴۵ \times \Delta\theta \rightarrow \Delta\theta = ۱۰°C$$

به مقدار انرژی تولید شده در واکنش سوختن ۱ گرم از یک ماده‌ی سوختنی، ارزش سوختی گفته می‌شود. به عنوان مثال، اگر به ازای سوختن کامل هر گرم گاز اتین ۵۰ کیلوژول انرژی تولید شود، ارزش سوختی این ماده معادل با ۵۰ کیلوژول بر گرم$(kJ.g^{-۱})$ است. برای محاسبه ارزش سوختی یک نمونه ماده، از رابطه زیر استفاده می‌شود:

$$\text{ارزش سوختی} = \frac{\text{مقدار انرژی آزاد شده بر حسب کیلوژول}}{\text{جرم نمونه‌ی ماده بر حسب گرم}}$$

بین آنتالپی سوختن یک ماده و ارزش سوختی آن رابطه زیر برقرار است:

$$\text{ارزش سوختی}(kJ.g^{-۱}) = \frac{|\text{آنتالپی سوختن}(kJ.mol^{-۱})|}{\text{جرم مولی}(g.mol^{-۱})}$$

ارزش سوختی کربوهیدرات‌ها و پروتئین‌ها با هم برابر بوده و مقدار آن کمتر از ارزش سوختی چربی‌ها است. میزان انرژی مورد نیاز بدن هر فرد به وزن، سن و میزان فعالیت‌های روزانه‌ی او بستگی دارد. با توجه به ارزش سوختی بالاتر چربی‌ها در مقایسه با سایر مواد غذایی، مقدار اضافی از مواد و انرژی دریافتی از مواد غذایی عمدتا به شکل چربی درآمده و در بدن ذخیره می‌شود و چاقی را به دنبال دارد. البته از آنجا که فرایند گوارش و جذب کربوهیدرات‌ها در مقایسه با پروتئین‌ها و چربی‌ها با سرعت بسیار بیشتری انجام می‌شود، اگر بدن فردی نیاز فوری و ضروری به تأمین انرژی داشته باشد، باید مواد غذایی را به آن فرد بدهیم که درصد بالایی از کربوهیدرات‌ها را در خود داشته باشند.

۸۹- اگر A ، D ، E و X به ترتیب ساده‌ترین آلدهید، کتون، اسید و استر باشند، کدام موارد از مطالب زیر نادرست است؟
$(O = ۱۶ , C = ۱۲ , H = ۱ : g.mol^{-۱})$

آ: مواد E و X، برخلاف A و D، با هم ایزومر هستند.

ب: عدد اکسایش یکی از اتم‌های کربن در X، برابر با عدد اکسایش یک اتم کربن در D است.

پ: نسبت درصد جرمی اکسیژن به کربن در X، برابر با این نسبت در ترفتالیک اسید است.

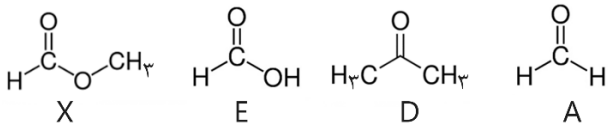
ت: نسبت شمار اتم(های) کربن به شمار اتم(های) هیدروژن در هر چهار ترکیب، برابر با ۰/۵ است.

۱) ب، ت ۲) آ، پ ۳) پ، ب ۴) آ، ت

پاسخ: گزینه ۲ (آسان ـ مفهومی ـ ۱۱۰۲)

پاسخ تشریحی:

ترکیب‌های A ، D ، E و X به ترتیب معادل با فرمالدهید($CH_۲O$)، استون($C_۳H_۶O$)، فورمیک اسید($CH_۲O_۲$) و متیل متانوات($C_۲H_۴O_۲$) هستند، که ساختار آن‌ها در زیر آورده شده است.

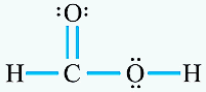


در رابطه با این ۴ ماده، عبارت‌های (آ) و (پ) نادرست هستند.

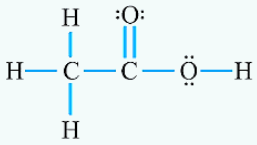
بررسی موارد:

آ: فرمول مولکولی E و X یکسان نیست و این دو ترکیب مانند A و D، ایزومر نیستند.

کربوکسیلیسک اسیدها، گروهی از ترکیب‌های آلی هستند که در ساختار آن‌ها یک یا چند گروه عاملی کربوکسیل($-COOH$) وجود دارد. فرمول کلی کربوکسیلیک اسیدهای یک عاملی(مولکول‌هایی که فقط یک گروه عاملی کربوکسیل دارند) را می‌توان به صورت $R-COOH$ نشان داد که در آن R نشان‌دهنده‌ی یک اتم هیدروژن و یا یک زنجیره‌ی هیدروکربنی است. کربوکسیلیک اسیدها خاصیت اسیدی داشته و pH محلول آن‌ها کوچک‌تر از ۷ است. این ترکیب‌ها مزه‌ی ترش دارند به طوری که مزه‌ی ترش میوه‌هایی مانند ریواس، انگور، لیمو ترش، کیوی و گوجه سبز را به وجود چنین مولکول‌هایی در این میوه‌ها نسبت می‌دهند. متانوئیک اسید یا همان فورمیک اسید به فرمول شیمیایی $HCOOH$، اولین عضو خانواده‌ی کربوکسیلیک اسیدها است که بر اثر گزش مورچه‌ی سرخ وارد بدن شده و باعث سوزش و خارش در محل گزیدگی می‌شود. ساختار مولکول‌های این ماده به صورت زیر است:



اتانوئیک اسید یا همان استیک اسید با فرمول شیمیایی $CH_۳COOH$، یک کربوکسیلیک اسید دوکربنی و دومین عضو خانواده‌ی کربوکسیلیک اسیدها است. این ماده آشناترین عضو خانواده‌ی کربوکسیلیک اسیدها بوده و یکی از پرکاربردترین اسیدها در زندگی روزمره است. به عنوان مثال، اسید موجود در سرکه همان استیک اسید است. ساختار مولکولی این ماده به صورت زیر است:



توجه داریم که فرمول شیمیایی کلی کربوکسیلیک اسیدهای یک عاملی سیرشده به صورت $C_nH_{۲n}O_۲$ است.

ب: عدد اکسایش کربن موجود در ساختار گروه عاملی در مواد X و D برابر با ۲+ است.

پ: فرمول مولکولی ترفتالیک اسید به صورت $C_۸H_۶O_۴$ و نسبت درصد جرمی اکسیژن به کربن در آن برابر است با $\frac{۴\times ۱۶}{۸\times ۱۲} \simeq ۰/۶۶$ است. مقدار این نسبت در ساختار ترکیب X نیز برابر با $\frac{۲\times ۱۶}{۲\times ۱۲} = ۱/۳۳$ است.

ت: نسبت شمار اتم‌های کربن به شمار اتم‌های هیدروژن در هر چهار ترکیب برابر با ۰/۵ است.

گروه آموزشی ماز

۹۰- با توجه به واکنش‌های ترموشیمی زیر، اگر ۱۶ گرم مس در واکنش $۲NF_۳(g) + Cu(s) \rightarrow N_۲F_۴(g) + CuF_۲(s)$ با بازده ۸۰ درصد مصرف شود، چند کیلوژول انرژی مبادله می‌شود؟ $(Cu = ۶۴\ g.mol^{-۱})$

$I)\ ۲NF_۳(g) + ۲NO(g) \rightarrow N_۲F_۴(g) + ۲ONF(g) \quad , \quad \Delta H = -۸۲/۹\ kJ$

$II)\ NO(g) + \frac{۱}{۲}F_۲(g) \rightarrow ONF(g) \quad , \quad \Delta H = -۱۵۶/۹\ kJ$

$III)\ Cu(s) + F_۲(g) \rightarrow CuF_۲(s) \quad , \quad \Delta H = -۵۳۱\ kJ$

۱) ۷۰/۰۲ ۲) ۶۰/۰۲ ۳) ۳۰/۰۱ ۴) ۹۰/۷۵

www.biomaze.ir
AzmonVIP

پاسخ: گزینه ۲ (متوسط ـ مساله ـ ۱۱۰۲)

پاسخ تشریحی:

برای محاسبه مقدار تغییر آنتالپی واکنش $2NF_3(g) + Cu(s) \rightarrow N_2F_4(g) + CuF_2(s)$، باید واکنش اول را بدون تغییر نوشته، واکنش دوم را معکوس و در ۲ ضرب کرده و با واکنش سوم جمع کنیم. معادله واکنش‌های جدید ایجاد شده به صورت زیر است:

$$I)\ 2NF_3(g) + 2NO(g) \rightarrow N_2F_4(g) + 2ONF(g) \quad , \quad \Delta H = -82/9\ kJ$$
$$II)\ 2ONF(g) \rightarrow 2NO(g) + F_2(g) \quad , \quad \Delta H = 313/8\ kJ$$
$$III)\ Cu(s) + F_2(g) \rightarrow CuF_2(s) \quad , \quad \Delta H = -531\ kJ$$

بر این اساس، داریم:

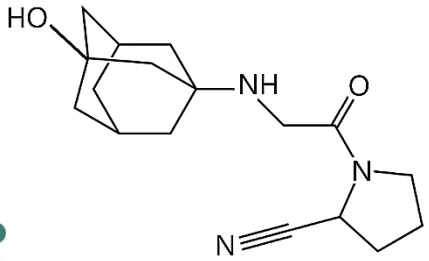
$$\Delta H_{\text{واکنش}} = -82/9 + 313/8 - 531 = -300/1 kJ$$

سپس گرمای آزاد شده به ازای مصرف ۱۶ گرم مس، در واکنش با بازده ۸۰ درصد را حساب می‌کنیم:

$$?\ kJ = 16\ g\ Cu \times \frac{1\ mol\ Cu}{64\ g\ Cu} \times \frac{-300/1 kJ}{1 mol\ Cu} \times \frac{\text{مقدار عملی } 80}{\text{مقدار نظری } 100} = -60/02$$

گروه آموزشی ماز

۹۱- با توجه به ساختار زیر، کدام موارد داده شده درست هستند؟



آ: در آن اتم کربن با عدد اکسایش صفر وجود ندارد.

ب: همانند سیانواتن، می‌تواند در واکنش بسپارش شرکت کند.

پ: لکهٔ حاصل از آن را برخلاف لکهٔ حاصل از وازلین، می‌توان با آب زدود.

ت: تعداد جفت الکترون ناپیوندی آن برابر با اختلاف تعداد اتم H و C است.

ث: یکی از گروه‌های عاملی موجود در آن، در یکی از ترکیب‌های آلی موجود در گشنیز نیز وجود دارد.

۱) آ ـ پ ـ ث ۲) پ ـ ث ۳) ب ـ پ ـ ث ۴) آ ـ ت

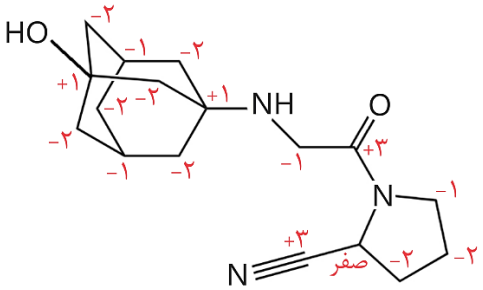
پاسخ: گزینه ۲ (متوسط ـ مفهومی ـ ۱۱۰۳)

پاسخ تشریحی:

فرمول مولکولی ترکیب مورد نظر به صورت $C_{17}H_{25}N_3O_2$ است. با توجه به ساختار این ماده، موارد (پ) و (ث) درست هستند.

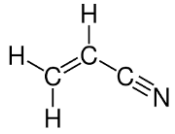
بررسی موارد:

آ: عدد اکسایش اتم‌های کربن در ساختار این ماده را مشخص می‌کنیم:



همانطور که مشخص است، عدد اکسایش یکی از اتم‌های کربن آن برابر صفر است.

ب: برای اینکه ترکیبی بتواند در واکنش بسپارش شرکت کند، باید در زنجیر هیدروکربنی خود دارای پیوند $C = C$ باشد. این ترکیب فاقد این ویژگی است و برخلاف سیانواتن نمی‌تواند در واکنش بسپارش شرکت کند. ساختار سیانواتن در زیر آورده شده است:



توجه داریم که در ساختار ترکیب مورد نظر، گروه‌های آمینی و اسیدی نیز به صورت هم‌زمان وجود ندارند و به همین خاطر، این ماده در واکنش تولید پلی‌آمیدها نیز نمی‌تواند شرکت کند.

www.biomaze.ir
AzmonVIP

پ: واژلین ترکیبی ناقطبی است در حالی که ترکیب داده شده به علت دارا بودن گروه‌های عاملی الکلی، آمینی و آمیدی، یک ترکیب قطبی محسوب می‌شود و لکهٔ حاصل از آن را برخلاف واژلین می‌توان با آب پاک کرد.

مولکول‌های سازنده برخی از ترکیب‌ها از جمله الکل‌ها، آمین‌ها و کربوکسیلیک اسیدها، از دو بخش قطبی و ناقطبی تشکیل شده است. در این گروه از مواد، بین بخش قطبی و ناقطبی رقابت ایجاد شده و رفتارهای کلی مولکول‌های سازنده به میزان قدرت هر بخش بستگی دارد. در این گروه از مولکول‌ها، اگر قدرت بخش قطبی نسبت به بخش ناقطبی بیشتر باشد(بخش قطبی بر بخش ناقطبی غلبه کند)، مولکول در مجموع قطبی بوده و در حلال‌های قطبی مثل آب حل می‌شود. در نقطه مقابل، اگر در این مولکول‌ها قدرت بخش ناقطبی نسبت به بخش قطبی بیشتر باشد(بخش ناقطبی بر بخش قطبی غلبه کند)، مولکول در مجموع ناقطبی بوده و در حلال‌های ناقطبی مثل بنزین و چربی حل می‌شود.

ت: اتم نیتروژن و اکسیژن به ترتیب دارای یک جفت و دو جفت الکترون ناپیوندی هستند. بنابراین ترکیب مورد نظر، دارای ۷ جفت الکترون ناپیوندی است، اما اختلاف تعداد اتم‌های هیدروژن و کربن آن برابر با ۸ است.

ث: در یکی از ترکیبات آلی موجود در برگ گیاه گشنیز، گروه عاملی الکلی(هیدروکسیل) وجود دارد که این گروه عاملی در ترکیب مطرح شده در صورت سوال نیز مشاهده می‌شود.

گروه آموزشی ماز

۹۲- چند مورد از عبارت‌های زیر، درست است؟ $(K_{a_{\text{اتانوئیک اسید}}} = ۱/۸ \times ۱۰^{-۵}$ و $H = ۱ : g.mol^{-۱}$ و $O = ۱۶)$

آ: طبق نظریه آرنیوس، ترکیبی که در ساختار خود گروه هیدروکسیل دارد، قطعا باز آرنیوس است.

ب: در دمای ثابت، با افزایش غلظت یک اسید ضعیف در محلول آبی آن، درجهٔ یونش اسید تغییر نمی‌کند.

پ: همه پاک‌کننده‌های خورنده $pH < ۷$ داشته و در واکنش با آلاینده‌ها، فراورده‌هایی با پایداری بیشتر تولید می‌کنند.

ت: از واکنش $۳۵۰\ mL$ محلول اتانوئیک اسید با $pH = ۲/۵$ با مقدار کافی از ساده‌ترین آمین، $۳/۱۵\ g$ آب تولید می‌شود.

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

پاسخ: گزینه ۱ (متوسط ـ مفهومی ـ ۱۲۰۱)

پاسخ تشریحی:

تنها مورد (ت) درست است.

بررسی موارد:

آ: طبق نظریهٔ آرنیوس، مواد و ترکیب‌هایی که با حل شدن در آب، غلظت یون‌های هیدرونیوم و هیدروکسید را افزایش می‌دهند، به ترتیب اسید و باز آرنیوس هستند. اکسیدهای فلزی و برخی از عناصر فلزی با حل شدن در آب، یون هیدروکسید تولید می‌کنند و باز آرنیوس محسوب می‌شوند. به عنوان مثال، فلز سدیم یک باز آرنیوس محسوب می‌شود و واکنش شیمیایی آن با آب، به صورت زیر است:

$$۲Na(s) + ۲H_۲O(l) \rightarrow ۲NaOH(aq) + H_۲(g)$$

یک نمونه از $NaOH$ نیز با حل شدن در آب تفکیک شده و باعث افزایش غلظت یون هیدروکسید می‌شود و یک باز آرنیوس محسوب می‌شود. ترکیباتی مثل $K_۲O$ و $NH_۳$ نیز طبق معادله‌های زیر در آب حل می‌شوند:

$$K_۲O\ (s) + H_۲O(l) \rightarrow ۲K^+(aq) + ۲OH^-(aq)$$
$$NH_۳(g) + H_۲O(l) \rightleftharpoons NH_۴^+(aq) + OH^-(aq)$$

این مواد، در ساختار خود یون هیدروکسید ندارند، اما می‌توانند با حل شدن در آب به ترتیب تفکیک و یونیده شده و یون هیدروکسید تولید کنند، به همین دلیل باز آرنیوس محسوب می‌شوند. توجه داریم که هر ترکیبی که در ساختار خود گروه هیدروکسیل(گروه عاملی الکلی) داشته باشد، نمی‌تواند باز آرنیوس باشد. به عنوان مثال، الکل‌های یک عاملی یا چند عاملی که در ساختار خود گروه هیدروکسیل دارند، با حل شدن در آب، غلظت یون هیدروکسید را تغییر نمی‌دهند و باز آرنیوس نیستند.

آرنیوس نخستین کسی بود که اسیدها و بازها را بر یك مبنای علمی توصیف کرد. او بر روی رسانایی الکتریکی محلول‌های آبی کار می‌کرد. یافته‌های تجربی آرنیوس نشان داد که محلول اسیدها و بازها رسانای برق هستند، اما میزان رسانایی آنها با یکدیگر یکسان نبوده و هر محلول، رسانایی الکتریکی متفاوتی با سایر محلول‌ها دارد. البته، توجه داریم که شواهد تاریخی نشان می‌دهند پیش از آنکه ساختار اسیدها و بازها شناخته شود، شیمی‌دان‌ها افزون بر ویژگی‌های اسیدها و بازها، با برخی از واکنش‌های آنها نیز آشنا بودند.

ب: درجه یونش به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$\text{درجه یونش} = \frac{\text{شمار مولکول‌های یونیده شده}}{\text{شمار کل مولکول‌های حل‌شده}}$$

اسیدها را می‌توان بر مبنای میزان یونش آن‌ها در آب در دو دستهٔ قوی و ضعیف جای داد. میزان یونش اسیدهای قوی در آب را می‌توان کامل در نظر گرفت ($\alpha \cong ۱$). اسیدهای ضعیف در آب به میزان جزئی یونیده می‌شوند($\alpha < ۱$) و شمار یون‌ها در محلول آن‌ها کم است. مقدار α علاوه بر دما، به غلظت اولیه اسید نیز بستگی دارد. این در حالی است که ثابت یونش اسیدی(K_a) فقط به دما بستگی دارد. به همین دلیل، K_a برای مقایسهٔ قدرت اسیدی مناسب‌تر است.

www.biomaze.ir
AzmonVIP

توجه داریم که غلظت اسید، با $\alpha^{۲}$ رابطهٔ عکس دارد. بر این اساس، می‌توان گفت با افزایش غلظت یک اسید ضعیف در محلول آن در دمای ثابت، درجهٔ یونش آن کاهش می‌یابد. در این رابطه، داریم:

$$K_a = M\alpha^{۲} \rightarrow \alpha = \sqrt{\frac{K_a}{M}}$$

پ: برخی از پاک‌کننده‌های خورنده مانند محلول لوله بازکن(سدیم هیدروکسید) خاصیت بازی($pH > ۷$) دارند، اما برخی مانند جوهر نمک(هیدروکلریک اسید) خاصیت اسیدی($pH < ۷$) دارند. همه پاک کننده‌های خورنده، مواد فعال بوده و طی واکنش‌های خودبه‌خودی، فراورده‌هایی پایدارتر از واکنش دهنده‌ها را تولید می‌کنند.

ت: ابتدا غلظت یون هیدرونیوم و اتانوئیک اسید را حساب می‌کنیم:

$$pH = -log[H^+] \rightarrow [H^+] = ۱۰^{-۲/۵} = ۳ \times ۱۰^{-۳}$$

$$K_a = \frac{[H^+] \times [H_۳CCOO^-]}{[H_۳CCOOH]} \xrightarrow{[H^+]\times[H_۳CCOO^-]=[H^+]^{۲}=۹\times۱۰^{-۶}} ۱/۸ \times ۱۰^{-۵} = \frac{۹ \times ۱۰^{-۶}}{[H_۳CCOOH]} \rightarrow [H_۳CCOOH] = ۰/۵$$

واکنش اتانوئیک اسید با متیل آمین به صورت زیر است:

$$C_۲H_۴O_۲ + CH_۵N \rightarrow C_۳H_۷NO + H_۲O$$

بر این اساس، داریم:

$$?\,g\,H_۲O = ۰/۳۵\,L \times \frac{۰/۵\,mol\,C_۲H_۴O_۲}{۱\,L} \times \frac{۱\,mol\,H_۲O}{۱\,mol\,C_۲H_۴O_۲} \times \frac{۱۸\,g\,H_۲O}{۱\,mol\,H_۲O} = ۳/۱۵\,g$$

هر روز، در بخش‌های مختلف زندگی روزمره، مقادیر متفاوتی از مواد شیمیایی گوناگون مصرف می‌شوند که در اغلب آن‌ها اسیدها و بازها نقش مهمی دارند. اسیدها مزه ترش دارند و در تماس با پوست، سبب ایجاد سوزش می‌شوند. بازها نیز مزه تلخ داشته و در سطح پوست، همانند صابون احساس لیزی ایجاد می‌کنند. اغلب اسیدهایی که در زندگی روزمره با آن‌ها سروکار داریم، در دسته اسیدهای ضعیف قرار می‌گیرند. به عنوان مثال، اسیدهای موجود در سرکه سیب، انگور، ریواس و مرکبات مانند پرتقال و لیمو از جمله اسیدهای خوراکی و ضعیف هستند.

گروه آموزشی ماز

۹۳- با توجه به پلیمرهای زیر، کدام‌یک از مطالب زیر درست است؟

۱) مونومر سازندهٔ این دو ترکیب، با انحلال در آب، نوعی الکترولیت ضعیف ایجاد می‌کند.
۲) مونومر سازندهٔ هر دو ترکیب داده شده یکسان بوده و دارای گروه عاملی اتری و آمینی است.
۳) الیاف پنبه از ماده B ساخته شده و ترکیب A در گندم یافت شده و در محیط گرم و مرطوب، به آرامی تجزیه می‌شود.
۴) شمار اتم‌های سازندهٔ هر دو مولکول، برخلاف شمار اتم‌ها در ساختار نفتالن و چربی موجود در کوهان شتر، بسیار زیاد است.

پاسخ: گزینه ۴ (متوسط ـ مفهومی ـ ۱۱۰۳)

پاسخ تشریحی:

شکل A و B، به ترتیب پلیمرهای سلولز و نشاسته را نشان می‌دهد. سلولز و نشاسته برخلاف نفتالن($C_{۱۰}H_۸$) و چربی موجود در کوهان شتر($C_{۵۷}H_{۱۱۰}O_۶$) پلیمر محسوب می‌شوند و شمار اتم‌های موجود در ساختار آن‌ها به ده‌ها هزار می‌رسد.

بررسی سایر گزینه‌ها:

۱) مونومر سازندهٔ هر دو مولکول گلوکز است و همان‌طور که می‌دانیم، گلوکز با برقراری پیوند هیدروژنی در آب حل شده و یونیده نمی‌شود و محلول آبی آن غیرالکترولیت است. این محلول، جریان الکتریسیته را از خود عبور نمی‌دهد.

۲) مونومر سازنده سلولز و نشاسته، گلوکز است. گلوکز در ساختار خود گروه عاملی اتری و هیدروکسیل دارد، اما این ماده فاقد گروه عاملی آمینی و اتم‌های نیتروژن است.

۳) سلولز در پنبه و نشاسته در گندم وجود دارد. شیمی‌دان‌ها بر اساس یافته‌های تجربی دریافته‌اند که مولکول‌های نشاسته در شرایط مناسب مانند محیط مرطوب با کاتالیزگر یا محیط گرم و مرطوب به آرامی به مونومرهای سازنده خود(گلوکز) تجزیه می‌شوند و مزهٔ شیرین ایجاد می‌کنند.

پنبه و پشم انواعی از الیاف طبیعی هستند که در طبیعت یافت می‌شوند. آمارها نشان می‌دهد که حدود نیمی از لباس‌های تولیدی در جهان از پنبه تهیه می‌شود. از پنبه افزون بر تولید پوشاک، در تولید رویهٔ مبل، پرده، تور ماهیگیری و گاز استریل نیز استفاده می‌شود. پنبه از الیاف سلولز تشکیل شده است و هر رشته سلولز نیز زنجیر بسیار بلندی است که از اتصال شمار بسیار زیادی مولکول گلوکز به یکدیگر ساخته می‌شود. واحد تکرارشونده این پلیمر توسط گروه عاملی اتری به واحد کناری متصل شده است.

www.biomaze.ir
AzmonVIP

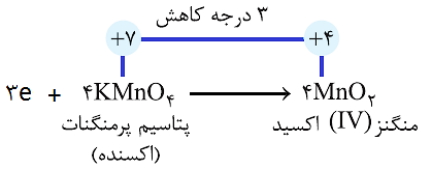
۹۴- در نیم‌واکنش تبدیل یون پرمنگنات به منگنز(IV) اکسید، یون پرمنگنات در نقش ..... بوده و نماد الکترون در معادله این نیم‌واکنش در سمت ..... قرار گرفته و عدد اکسایش اتم منگنز در این فرایند به اندازه ..... واحد تغییر می‌کند.

۱) کاهنده ـ راست ـ ۴ ۲) اکسنده ـ چپ ـ ۴ ۳) کاهنده ـ راست ـ ۳ ۴) اکسنده ـ چپ ـ ۳

پاسخ: گزینه ۴ (آسان ـ مفهومی ـ ۱۲۰۴)

پاسخ تشریحی:

عدد اکسایش منگنز در یون پرمنگنات برابر با ۷+ است. بخشی از معادله نیم‌واکنش انجام شده نیز به صورت زیر خواهد بود:



طی این فرایند، یون پرمنگنات کاهش پیدا کرده است، پس این یون به عنوان گونه‌ی اکسنده ایفای نقش کرده است. طی این فرایند، عدد اکسایش هر اتم منگنز به اندازه‌ی ۳ واحد کاهش پیدا کرده است.

گروه آموزشی ماز

۹۵- کدام مورد از مطالب زیر درست است؟

آ: در سلول برقکافت آب، حجم گاز تولید شده در سمت آند بیشتر از سمت کاتد است.

ب: انرژی شبکهٔ بلور ماده‌ای که برای کاهش دمای ذوب سدیم کلرید به آن افزوده می‌شود، از سدیم کلرید بیشتر است.

پ: فراوردهٔ حاصل در قطب مثبت فرایند برقکافت $NaCl(l)$، با فراوردهٔ کاتدی برقکافت آب، در دمای اتاق واکنش می‌دهند.

ت: واکنش سلول سوختی هیدروژن-اکسیژن، عکس واکنش برقکافت آب بوده و جهت جریان H^+ در غشای مبادله کننده از کاتد به آند است.

۱) ب ـ پ ۲) آ ـ ت ۳) آ ـ ب ـ ت ۴) پ ـ ت

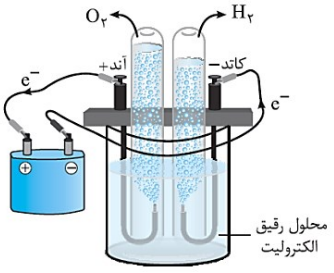
پاسخ: گزینه ۱ (متوسط ـ مفهومی ـ ۱۲۰۲)

پاسخ تشریحی:

موارد (ب) و (پ) درست هستند.

بررسی موارد:

آ: سلول‌های الکتروشیمیایی که در آن با اعمال یک ولتاژ بیرونی و عبور جریان الکتریکی از درون یک الکترولیت می‌توان یک واکنش شیمیایی را در خلاف جهت طبیعی پیش راند، سلول‌های الکترولیتی نام دارند. برقکافت آب، یک نمونه از واکنش‌هایی است که در سلول‌های الکترولیتی انجام می‌شود. شکل زیر دستگاهی را نشان می‌دهد که در آن با عبور جریان الکتریکی آب به عنصرهای سازنده‌اش تجزیه می‌شود:



نیم‌واکنش‌های انجام شده هنگام برقکافت آب به صورت زیر است:

اکسایش در آند : $2H_2O\ (l) \rightarrow O_2(g) + 4H^+(aq) + 4e$

کاهش در کاتد : $4H_2O\ (l) + 4e \rightarrow 2H_2(g) + 4OH^-(aq)$

واکنش کلی : $2H_2O\ (l) \rightarrow O_2(g) + 2H_2(g)$

مطابق واکنش کلی از تجزیهٔ دو مول آب یک مول گاز اکسیژن در آند و دو مول گاز هیدروژن در کاتد تولید می‌شود. به دلیل تولید گاز بیشتر، سطح آب در بخش کاتدی پایین‌تر از آندی قرار دارد.

ب: سدیم کلرید خالص در ۸۰۱°C ذوب می‌شود. افزودن مقداری کلسیم کلرید به آن دمای ذوب را تا حدود ۵۷۸°C پایین می‌آورد. در کلسیم کلرید($CaCl_2$) بار کاتیون به اضافهٔ قدر مطلق بار آنیون برابر با ۳ و در سدیم کلرید($NaCl$) این مقدار برابر ۲ است. به همین دلیل، می‌توان گفت انرژی شبکهٔ بلور کلسیم کلرید از سدیم کلرید بیشتر است.

www.biomaze.ir
AzmonVIP

پ: نیم واکنش‌های کاتدی و آندی در فرایند برقکافت سدیم کلرید مذاب به صورت زیر است:

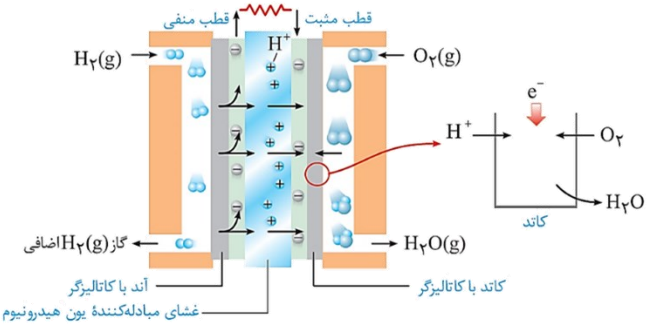
$2Na^+(l) + 2e \rightarrow 2Na(l)$: کاهش در کاتد

$2Cl^-(l) \rightarrow Cl_2(g) + 2e$: اکسایش در آند

در سلول‌های الکترولیتی برخلاف سلول‌های گالوانی کاتد قطب منفی و آند قطب مثبت است. فراوردهٔ قطب مثبت در برقکافت سدیم کلرید مذاب گاز کلر است که می‌تواند در دمای اتاق با فراوردهٔ کاتد برقکافت آب یعنی گاز هیدروژن، به آرامی واکنش دهد. معادله این واکنش به صورت زیر است:

$$H_2(g) + Cl_2(g) \xrightarrow{\text{در دمای اتاق}} 2HCl(g)$$

ت: سلول سوختی نوعی سلول گالوانی است که شیمی‌دان‌ها برای تامین انرژی و کاهش آلودگی محیط زیست پیشنهاد می‌دهند. این سلول‌ها افزون بر کارایی بیشتر می‌توانند، ردپای کربن دی‌اکسید را کاهش دهند و منبع انرژی سبز به حساب می‌آیند. رایج‌ترین سلول سوختی، سلول هیدروژن-اکسیژن است. دستگاهی که در آن گاز هیدروژن با گاز اکسیژن به صورت کنترل شده واکنش می‌دهد و بخش قابل توجهی از انرژی شیمیایی به انرژی الکتریکی تبدیل می‌شود. همان گونه که شکل نشان می‌دهد هر سلول سوختی سه جز اصلی دارد به طوری که شامل یک غشا، الکترود آند و الکترود کاتد است. در این سلول، آند و کاتد دارای کاتالیزگرهایی هستند، که به نیم‌واکنش‌های اکسایش و کاهش سرعت می‌بخشند.



واکنش کلی در چنین سلولی به صورت زیر است:

$$2H_2(g) + O_2(g) \rightarrow 2H_2O(g)$$

صرف‌نظر از حالت فیزیکی H_2O، واکنش کلی در این سلول را می‌توان عکس واکنش کلی برقکافت آب در نظر گرفت. مطابق شکل بالا جهت جریان H^+ در غشای مبادله کننده از سمت آند به کاتد است.

گروه آموزشی ماز

۹۶- دمای ماده‌ای که در حالت جامد نارسانا است را تا حدود ۱۴۲۰°C افزایش می‌دهیم تا به طور کامل ذوب شود. اگر این ماده در حالت مذاب رسانای جریان الکتریسیته باشد، ..... .

۱) با عبور جریان، در این ماده یک واکنش شیمیایی انجام می‌شود.
۲) رسانایی این ماده در حالت مذاب از نوع الکترونی است.
۳) در حالت جامد، این ماده از مدل دریای الکترونی پیروی می‌کند.
۴) در بلور جامد آن، امکان مشاهده پیوند اشتراکی وجود ندارد.

پاسخ: گزینه ۱ (متوسط ـ مفهومی ـ ۱۲۰۳)

پاسخ تشریحی:

جدول زیر، ویژگی‌های متنوعی از جامدهای بلوری را نشان می‌دهد:

نوع ماده	کووالانسی	مولکولی	یونی	فلزی
ذرات سازنده	اتم‌های نافلزی و شبه‌فلزی	مولکول‌ها شامل اتم‌های نافلزی	کاتیون و آنیون	اتم‌های فلزی
نیروهای بین‌ذره‌ای	پیوند اشتراکی (کووالانسی)	پیوند اشتراکی (کووالانسی) و نیروهای بین مولکولی	پیوند یونی	پیوند فلزی (مدل دریای الکترونی)
ساختار ماده	شبکهٔ بلور کووالانسی	مولکول‌های مجزا و جدا از هم	شبکهٔ بلور یونی	شبکهٔ بلور فلزی
رسانایی الکتریکی	نارسانا (به‌جز گرافیت و گرافن)	نارسانا	در حالت محلول و مذاب رسانا	رسانا
مثال	Si - الماس، SiO_2 - گرافیت - گرافن، SiC و ...	H_2O، CO_2، SO_2، F_2، Cl_2، Br_2، I_2 و ...	$NaCl$، MgO، Na_2SO_4، NH_4Cl و ...	فلزهای اصلی مانند Na، Mg، Ca، Al و ...، فلزهای واسطه مانند Fe، Mn، V، Cr و ...

www.biomaze.ir
AzmonVIP

مطابق داده‌های موجود در جدول بالا، فلزها و ترکیب‌های یونی در حالت مذاب رسانا هستند، اما مواد مولکولی و کووالانسی در حالت مایع رسانایی الکتریکی نخواهند داشت. توجه داریم که مواد یونی، مثل ترکیب داده شده در صورت سوال، در حالت جامد نارسانا هستند، اما مواد فلزی در حالت جامد رسانای جریان برق خواهند بود. بر این اساس، می‌توان گفت ترکیب مدنظر صورت سوال، یک ماده یونی است. اگر مواد یونی را به حالت مذاب دراورده و جریان الکتریسیته را از آن‌ها عبور بدهیم، یون‌های موجود در این مواد به سمت الکترودهای موجود در محلول رفته و در نیم‌واکنش‌های کاهش و اکسایش شرکت می‌کنند. در چنین شرایطی، ترکیب مورد نظر به عناصر سازنده خود تجزیه می‌شود. توجه داریم که رسانایی الکتریکی مواد یونی در حالت مذاب و یا محلول، بخاطر وجود یون‌های موجود در این مواد است، پس مواد یونی در حالت مذاب و یا محلول از جمله رساناهای یونی به شمار می‌روند. این مواد از مدل دریای الکترونی پیروی نکرده و در ساختار برخی از انواع آن‌ها پیوند اشتراکی یافت می‌شود. به عنوان مثال، در ساختار ذره‌ای آنیون‌های موجود در بلور منیزیم سولفات، پیوند اشتراکی یافت می‌شود.

گروه آموزشی ماز

۹۷- اگر pH محلول پتاسیم هیدروکسید برابر ۱۱ و pH محلول نیتروواسید($K_a = ۴/۵ \times ۱۰^{-۴}$) برابر pH محلول ۰/۰۰۳ مولار هیدرویدیک اسید باشد، نسبت جرم هیدروژن برمید مورد نیاز به سدیم هیدروکسید مورد نیاز که به ترتیب باید به آن‌ها اضافه شود تا هر یک را به $pH = ۷$ برساند، کدام است؟ (حجم محلول پتاسیم هیدروکسید و نیتروواسید به ترتیب ۲۳ و ۹ لیتر است. $Br = ۸۰ , Na = ۲۳ , O = ۱۶ , H = ۱ : g.mol^{-۱}$)

۱) ۰/۲۷ ۲) ۰/۱۳۵ ۳) ۰/۱۰۱ ۴) ۰/۲۲۵

پاسخ: گزینه ۴ (سخت ـ مساله ـ ۱۲۰۱)

پاسخ تشریحی:

ابتدا غلظت هر محلول را محاسبه می‌کنیم. در رابطه با غلظت پتاسیم هیدروکسید، داریم:

$$pH = ۱۱ \rightarrow pOH = ۱۴ - ۱۱ = ۳ \rightarrow [OH^-] = ۱۰^{-۳} mol.L^{-۱}$$

مقدار pH محلول نیتروواسید برابر pH محلول ۰/۰۰۳ مولار اسید قوی هیدرویدیک اسید است. بر این اساس، می‌توان گفت غلظت یون هیدرونیوم در هر دو محلول برابر ۰/۰۰۳ مولار است. با استفاده از ثابت یونش نیتروواسید، غلظت اسید را محاسبه می‌کنیم:

$$K_a = \frac{[H^+]^۲}{[HNO_۲]_{اولیه} - [H^+]} \rightarrow \frac{۰/۰۰۳ \times ۰/۰۰۳}{[HNO_۲]_{اولیه} - ۰/۰۰۳} = ۴/۵ \times ۱۰^{-۴} \rightarrow [HNO_۲]_{اولیه} = ۰/۰۲۳ \, mol.L^{-۱}$$

حجم محلول پتاسیم هیدروکسید و نیتروواسید به ترتیب ۲۳ و ۹ لیتر است. محلول پتاسیم هیدروکسید با هیدروژن برمید و محلول نیتروواسید با سدیم هیدروکسید خنثی می‌شود. معادله خنثی‌سازی این مواد به صورت زیر است:

$$KOH(aq) + HBr(g) \rightarrow KBr(aq) + H_۲O(l)$$
$$HNO_۲(aq) + NaOH(s) \rightarrow NaNO_۲(aq) + H_۲O(l)$$

نسبت جرم هیدروژن برمید مورد نیاز به جرم سدیم هیدروکسید مورد نیاز را محاسبه می‌کنیم:

$$?\, g\, HBr = ۲۳\, L \text{ محلول} \times \frac{۱۰^{-۳} mol\, KOH}{۱\, L \text{ محلول}} \times \frac{۱\, mol\, HBr}{۱\, mol\, KOH} \times \frac{۸۱\, g\, HBr}{۱\, mol\, HBr} = ۱/۸۶۳\, g$$

$$?\, g\, NaOH = ۹\, L \text{ محلول} \times \frac{۲۳ \times ۱۰^{-۳} mol\, HNO_۲}{۱\, L \text{ محلول}} \times \frac{۱\, mol\, NaOH}{۱\, mol\, HNO_۲} \times \frac{۴۰\, g\, NaOH}{۱\, mol\, NaOH} = ۸/۲۸\, g$$

سپس نسبت جرم هیدروژن برمید به جرم سدیم هیدروکسید را محاسبه می‌کنیم:

$$\frac{۱/۸۶۳\, g}{۸/۲۸\, g} = ۰/۲۲۵ \text{ برابر}$$

گروه آموزشی ماز

۹۸- نوعی پاک‌کننده صابونی جامد با جرم مولی $۳۰۲ g.mol^{-۱}$، دارای ۳ پیوند دوگانه در ساختار خود است. در اسید چرب سازنده این پاک‌کننده، حداقل چند اتم کربن با عدد اکسایش ۲- وجود دارد و ۱۸/۱۲ گرم از این پاک‌کننده با چند گرم محلول که حاوی یون کلسیم با غلظت $۴۰۰۰ ppm$ و یون منیزیم با درصد جرمی ۱/۲٪ است، واکنش می‌دهد؟

($Ca = ۴۰ , Mg = ۲۴ , Na = ۲۳ , O = ۱۶ , C = ۱۲$ و $H = ۱ : g.mol^{-۱}$)

۱) ۱۳ ، ۵۰ ۲) ۱۲ ، ۱۰۰ ۳) ۱۳ ، ۱۰۰ ۴) ۱۲ ، ۵۰

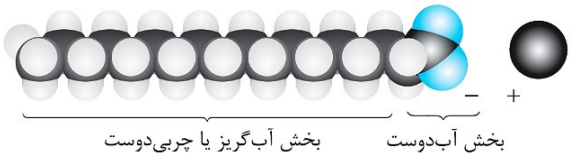
پاسخ: گزینه ۴ (سخت ـ مساله ـ ۱۲۰۱)

پاسخ تشریحی:

صابون جامد، نمک سدیم اسیدهای چرب و صابون مایع، نمک پتاسیم یا آمونیم اسیدهای چرب است. زنجیر هیدروکربنی صابون‌ها ناقطبی و آب‌گریز است و بنابراین، صابون در حلال‌های ناقطبی حل می‌شود.

www.biomaze.ir
AzmonVIP

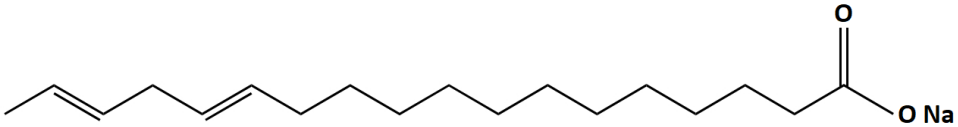
ساختار نوعی از صابون‌های جامد با زنجیر هیدروکربنی سیرشده به صورت زیر است:



فرمول شیمیایی صابون‌های جامد سیرشده به صورت $C_nH_{2n+1}COONa$ است. با توجه به اینکه در ساختار صابون مورد نظر یک پیوند دوگانه $C=O$ و دو پیوند دوگانه $C=C$ بین اتم‌های کربن(مجموعا ۳ پیوند دوگانه) وجود دارد، پس فرمول شیمیایی این صابون به صورت $C_nH_{2n-3}COONa$ می‌شود. طبق صورت سوال، جرم مولی این صابون جامد برابر ۳۰۲ است. بنابراین داریم:

$$C_nH_{2n-3}COONa: \ ۱۴n + ۶۴ = ۳۰۲ \rightarrow n = ۱۷$$

بنابراین فرمول صابون مورد نظر به صورت $C_{17}H_{31}COONa$ است. برای اینکه تعداد کربن‌های با عدد اکسایش ۲- کمترین باشد، باید اولین کربن زنجیره هیدروکربنی پیوند یگانه داشته باشد و پیوندهای دوگانه از هم فاصله داشته باشند. شکل زیر نمونه‌ای از یکی از ساختارها با کمترین تعداد کربن با عدد اکسایش ۲- را نشان می‌دهد که ۱۲ اتم کربن با عدد اکسایش ۲- دارد:



پاک‌کننده‌های صابونی، از جمله موادی هستند که از آن‌ها برای پاک‌کردن لکه‌ها و قطره‌های چربی استفاده می‌شود. به نمک سدیم، پتاسیم و یا آمونیوم اسیدهای چرب دراز زنجیر، صابون گفته می‌شود. در واقع، صابون‌های مایع، نمک پتاسیم یا آمونیوم اسیدهای چرب و صابون‌های جامد نیز نمک سدیم اسیدهای چرب هستند. از آنجا که صابون‌های جامد دمای ذوب بالاتری دارند، پس می‌توان گفت اگر یون Na^+ موجود در نوعی صابون را با کاتیون آمونیوم و یا کاتیون K^+ جایگزین کنیم، دمای ذوب آن کاهش می‌یابد. نقش پاک‌کنندگی صابون باعث شد تا کاربرد آن از پاکیزگی و تأمین بهداشت فردی و محیط خانه، به مراکز صنعتی، بیمارستانی و اداری نیز گسترش پیدا کند. این روند، سبب رشد چشمگیر صابون‌سازی و تبدیل آن به یک صنعت بزرگ در جهان شد. این صنعت، نقش چشمگیری در کاهش بیماری گوناگون و افزایش سطح بهداشت در جهان داشته است. در این زمان، عوامل زیر، چون سدی بر سر راه صنعت صابون‌سازی قرار گرفتند:

۱- با افزایش جمعیت جهان، مصرف صابون نیز افزایش یافت.

۲- برای تولید صابون در مقیاس انبوه، به میزان زیادی چربی به عنوان مواد اولیه نیاز بود و تأمین این میزان چربی، به یک چالش تبدیل شد.

۳- تأمین صابون مورد نیاز جهان به روش‌های سنتی تقریباً ناممکن بود.

۴- پاک‌کننده‌های صابونی در همه شرایط به خوبی عمل نمی‌کردند و استفاده از آن‌ها در برخی از موقعیت‌ها مثل سفرهای دریایی و صنایعی که از آب شور استفاده می‌کردند، پاسخگوی نیاز انسان نبود.

نگرانی‌هایی از این دست، سبب شد تا شیمی‌دان‌ها برای شناسایی و تولید دیگر پاک‌کننده‌ها ترغیب شوند. شیمی‌دان‌ها به دنبال موادی بودند که علاوه بر قدرت پاک‌کنندگی بالا، بتوان آن‌ها را به میزان انبوه و با قیمت مناسب تولید کرد. با توجه به رابطه میان ساختار و رفتار یک ماده، شیمی‌دان‌ها به دنبال موادی بودند که همانند صابون‌ها، ساختاری دوگانه‌دوست (هم چربی‌دوست و هم آب‌دوست) داشته باشد. سرانجام آن‌ها توانستند با استفاده از بنزن و دیگر مواد اولیه تولید شده در صنایع پتروشیمی، پاک‌کننده‌های غیرصابونی را بسازند.

در قدم بعد، باید غلظت مول‌های یون کلسیم و یون منیزیم موجود در این آب سخت را حساب کنیم. بر این اساس، داریم:

$$\text{غلظت مولی} = \frac{ppm \times d}{۱۰۰۰M} \Longrightarrow \frac{۴۰۰۰ \times ۱}{۱۰۰۰ \times ۴۰} = ۰/۱ \ mol.L^{-۱}$$

$$\text{غلظت مولی} = \frac{۱۰ad}{M} \Longrightarrow \frac{۱۰ \times ۱/۲ \times ۱}{۲۴} = ۰/۵ \ mol.L^{-۱}$$

بنابراین در هر لیتر محلول مجموعا ۰/۶ مول یون کلسیم و منیزیم وجود دارد. واکنش انجام شده بین یون‌های کلسیم و منیزیم با صابون جامد مورد نظر به صورت زیر است:

$$۲C_{17}H_{31}COONa + Ca^{۲+} \rightarrow (C_{17}H_{31}COO)_۲Ca + ۲Na^+ \qquad ۲C_{17}H_{31}COONa + Mg^{۲+} \rightarrow (C_{17}H_{31}COO)_۲Mg + ۲Na^+$$

به آب‌هایی مانند آب دریا که حاوی مقادیر زیادی از یون‌های کلسیم و منیزیم هستند، آب سخت گفته می‌شود. صابون‌های جامد و مایع هر دو با این یون‌ها تشکیل رسوب می‌دهند که به صورت لکه‌های سفید پس از شستن لباس با صابون روی آن‌ها باقی می‌ماند. برای مثال واکنش صابون‌های جامد با یون‌های $Ca^{۲+}$ و $Mg^{۲+}$ به صورت زیر است:

$$۲RCOONa + CaCl_۲ \rightarrow (RCOO)_۲Ca + ۲NaCl \qquad ۲RCOONa + MgCl_۲ \rightarrow (RCOO)_۲Mg + ۲NaCl$$

هر مول منیزیم یا کلسیم با ۲ مول صابون واکنش می‌دهد، بنابراین هر لیتر از آب سخت که حاوی ۰/۶ مول یون کلسیم و منیزیم است با ۱/۲ مول صابون واکنش می‌دهد. بر این اساس، جرم آب مورد نیاز برای واکنش کامل با ۱۸/۱۲ گرم صابون را حساب می‌کنیم:

$$?\ g \text{ آب سخت} = ۱۸/۱۲\ g\ C_{17}H_{31}COONa \times \frac{۱\ mol\ C_{17}H_{31}COONa}{۳۰۲\ g\ C_{17}H_{31}COONa} \times \frac{۱\ L \text{ آب سخت}}{۱/۲\ mol\ C_{17}H_{31}COONa} \times \frac{۱۰۰۰\ g \text{ آب سخت}}{۱\ L \text{ آب سخت}} = ۵۰\ g$$

بنابراین ۱۸/۱۲ گرم از این صابون جامد با ۵۰ گرم آب سخت به طور کامل واکنش می‌دهد.

۹۹- جرم آب حاصل از واکنش موازنه نشدهٔ $Cr_2O_7^{2-}(aq) + H^+(aq) + H_2S(g) \rightarrow Cr^{3+}(aq) + S(s) + H_2O(l)$ به ازای مصرف ۲۰/۴ گرم H_2S، برابر جرم آب مصرف شده در سلول نور الکتروشیمیایی است. تعداد الکترون مبادله شده در واکنش اول چند مول است و در سلول نور الکتروشیمیایی، چند گرم سیلیسیم مصرف می‌شود؟

$(S = ۳۲ , Si = ۲۸ , O = ۱۶ , H = ۱ : g.mol^{-1})$

۱) ۳/۶ ، ۳۹/۲ ۲) ۳/۶ ، ۱۹/۶ ۳) ۱/۲ ، ۱۹/۶ ۴) ۱/۲ ، ۳۹/۲

پاسخ: گزینه ۳ (سخت ـ مساله ـ ۱۲۰۲)

پاسخ تشریحی:

ابتدا معادله واکنش را موازنه می‌کنیم:

$$Cr_2O_7^{2-}(aq) + ۸H^+(aq) + ۳H_2S(g) \rightarrow ۲Cr^{3+}(aq) + ۳S(s) + ۷H_2O(l)$$

در این واکنش عدد اکسایش کروم از ۶+ به ۳+ رسیده است و عدد اکسایش گوگرد نیز از ۲- به صفر رسیده است. بر این اساس، می‌توان گفت به ازای یک بار انجام شدن این واکنش شیمیایی، مجموعاً ۶ عدد الکترون بین گونه‌ها مبادله می‌شود. سپس تعداد مول آب تولید شده به ازای مصرف ۲۰/۴ گرم هیدروژن سولفید را محاسبه می‌کنیم:

$$?\,mol\,H_2O = ۲۰/۴\,g\,H_2S \times \frac{۱\,mol\,H_2S}{۳۴\,g\,H_2S} \times \frac{۷\,mol\,H_2O}{۳\,mol\,H_2S} = ۱/۴\,mol$$

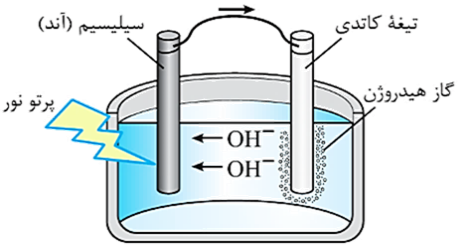
مقدار ۱/۴ مول آب در این واکنش تولید شده است. واکنش انجام شده در سلول نور الکتروشیمیایی به صورت زیر است:

$$Si(s) + ۲H_2O(l) \rightarrow SiO_2(s) + ۲H_2(g)$$

جرم سیلیسیم مصرف شده در این سلول به ازای مصرف ۱/۴ مول آب را محاسبه می‌کنیم:

$$?\,g\,Si = ۱/۴\,mol\,H_2O \times \frac{۱\,mol\,Si}{۲\,mol\,H_2O} \times \frac{۲۸\,g\,Si}{۱\,mol\,Si} = ۱۹/۶\,g$$

تصویر زیر، نمایی از سلول نورالکتروشیمیایی استفاده شده برای تجزیه‌ی آب را نشان می‌دهد:



نیم‌واکنش آندی: $Si(s) + ۲H_2O(l) \rightarrow SiO_2(s) + ۴H^+(aq) + ۴e^- \;,\; E^\circ = -۰/۸۴\,V$

نیم‌واکنش کاتدی: $۴H_2O(l) + ۴e^- \rightarrow ۲H_2(g) + ۴OH^-(aq) \;,\; E^\circ = -۰/۸۳\,V$

واکنش کلی: $Si(s) + ۲H_2O(l) \rightarrow SiO_2(s) + ۲H_2(g) \quad , \quad emf = ۰/۰۱\,V$

در واکنش کلی انجام شده در این سلول، سیلیسیم به عنوان گونه کاهنده(گونه‌ای که اکسید می‌شود) و آب نیز به عنوان گونه اکسنده(گونه‌ای که کاهش پیدا می‌کند) مصرف می‌شوند. برای محاسبه emf این سلول از رابطه‌ی زیر استفاده می‌کنیم:

$$emf = E^\circ(\text{کاتد}) - E^\circ(\text{آند}) = (-۰/۸۳) - (-۰/۸۴) = ۰/۰۱\,V$$

در این واکنش عدد اکسایش هر کروم از ۶+ به ۳+ (۳ × ۲) رسیده است و عدد اکسایش هر گوگرد نیز از ۲- به صفر (۲ × ۳) رسیده است. بنابراین به ازای تولید ۷ مول آب، ۶ مول الکترون مبادله شده است. تعداد الکترون مبادله شده را محاسبه می‌کنیم:

$$?\,mol\,e = ۱/۴\,mol\,H_2O \times \frac{۶\,mol\,e}{۷\,mol\,H_2O} = ۱/۲\,mol$$

گروه آموزشی ماز

۱۰۰- اگر در سلول‌های گالوانی تشکیل‌شده از فلزهای A، D و M، مشخص شود که emf سلول $A - D$ با کاتد فلزی D، از همه کمتر بوده و در سلول حاصل از عناصر A و M، فلز A نقش آند را دارد، کدام مقایسه دربارهٔ مقدار E° این الکترودها درست است و emf سلول تشکیل شده از کدام دو الکترود، بزرگ‌تر است؟

۱) $«A - M» , M > D > A$ ۲) $«M - D» , D > A > M$

۳) $«M - A» , A > D > M$ ۴) $«D - M» , M > A > D$

پاسخ: گزینه ۱ (آسان ـ مفهومی ـ ۱۲۰۲)

پاسخ تشریحی:

فلز A در هر دو سلول $A - D$ و $A - M$ نقش آند را دارد، بنابراین E° آن از E° دو فلز D و M کوچک‌تر است. با توجه به اینکه مقدار emf سلول $A - D$ از بقیه کمتر است، بنابراین E° فلز D به فلز A نزدیک‌تر است و مقایسه E° این فلزها به صورت $M > D > A$ است. با توجه به اینکه تفاوت E° دو فلز A و M بیشتر است، نیروی الکتروموتوری سلول گالوانی حاصل از این دو فلز از همه بیشتر است و تغییرات دمای آن بیشتر است.

www.biomaze.ir
AzmonVIP

آن‌چه که موجب پیوند شیمی و الکتریسیته می‌شود، الکترون است. در واقع، واکنش‌های الکتروشیمیایی نوعی از واکنش‌ها هستند که در آن‌ها الکترون از یک گونه شیمیایی به گونه دیگر منتقل می‌شود. در این واکنش‌ها، اکسایش به معنای از دست دادن الکترون توسط یک گونه شیمیایی و کاهش به معنای گرفتن الکترون توسط یک گونه شیمیایی است. شیمی‌دان‌ها هر یک از فرایندهای گرفتن و از دست دادن الکترون را با یک نیم‌واکنش نشان می‌دهند. به نیم‌واکنشی که از دست دادن الکترون را نشان می‌دهد، نیم‌واکنش اکسایش و به نیم‌واکنشی که گرفتن الکترون را نشان می‌دهد، نیم‌واکنش کاهش گفته می‌شود. به طور کلی، هر فلزی که کاهنده‌تر از هیدروژن باشد(در مقایسه با هیدروژن تمایل بیشتری به اکسید شدن(از دست دادن الکترون) داشته باشد)، در سری الکتروشیمیایی در موقعیت پایین‌تری در مقایسه با هیدروژن قرار می‌گیرد. پتانسیل کاهشی استاندارد فلزهایی که در سری الکتروشیمیایی در مقایسه با هیدروژن در موقعیت پایین‌تری قرار دارند، منفی است. در نقطه مقابل، فلزهایی که در مقایسه با هیدروژن قدرت کاهندگی کمتری دارند(طلا، پلاتین، نقره و مس)، در سری الکتروشیمیایی در مقایسه با هیدروژن در موقعیت بالاتری قرار داشته و پتانسیل کاهشی آن‌ها نیز بزرگ‌تر از صفر است.

گروه آموزشی ماز

۱۰۱- کدام یک در سرعت واکنش تبدیل مالتوز به گلوکز، تاثیری ندارد؟

۱) تغییر دما ۲) افزودن کاتالیزگر ۳) تغییر غلظت ۴) تغییر فشار

پاسخ: گزینه ۴ (آسان ـ مفهومی ـ ۱۱۰۲)

پاسخ تشریحی:

عواملی مانند افزایش دما، افزایش سطح تماس، افزایش غلظت یا استفاده از کاتالیزگر، سرعت واکنش‌های شیمیایی را افزایش می‌دهد. کاتالیزگر با کاهش انرژی فعال‌سازی واکنش موجب افزایش سرعت واکنش می‌شود. افزایش فشار، سرعت واکنش‌هایی که در آن‌ها واکنش دهنده(های) گازی وجود داشته باشد را افزایش می‌دهد اما بر سایر واکنش‌های شیمیایی تاثیری نخواهد داشت. قند موجود در جوانهٔ گندم (مالتوز) مطابق واکنش زیر به گلوکز تبدیل می‌شود:

$$C_{۱۲}H_{۲۲}O_{۱۱}\ (aq) + H_۲O(l) \rightarrow ۲C_۶H_{۱۲}O_۶(aq)$$

هیچ‌کدام از واکنش‌دهنده‌ها گازی شکل نیستند. به همین دلیل افزایش فشار تاثیری بر سرعت واکنش ندارد.

به حداقل مقدار انرژی مورد نیاز برای شروع‌شدن یک واکنش شیمیایی، انرژی فعال‌سازی گفته می‌شود. به عبارت دیگر، برای آغازشدن یک واکنش شیمیایی، واکنش‌دهنده‌ها باید مقدار معینی انرژی داشته باشند. یکی از راه‌های تأمین انرژی فعال‌سازی واکنش‌ها، دادن گرما به واکنش‌دهنده‌ها است. به عنوان مثال، با کشیدن نوک کبریت بر روی سطح زبر قوطی کبریت، مقداری گرما تولید می‌شود. این گرما انرژی فعال‌سازی واکنش را تأمین کرده و سبب سوختن کبریت می‌شود. انرژی فعال‌سازی واکنش‌های شیمیایی را با نماد E_a نشان داده و مقدار آن را با یکای کیلوژول گزارش می‌کنند. به هر اندازه که انرژی فعال‌سازی یک واکنش بزرگ‌تر باشد، آن واکنش در شرایط دشوارتر و در دماهای بالاتری انجام می‌شود و این یعنی برای تأمین شرایط مورد نیاز جهت آغازشدن آن واکنش، باید انرژی بیشتری را مصرف کنیم. بر این اساس، به هنگام استفاده از کاتالیزگرها، انرژی فعال‌سازی واکنش‌ها کم‌تر شده و این واکنش‌ها در دمای کم‌تری انجام می‌شوند؛ پس برای تأمین شرایط مورد نیاز جهت آغازشدن این واکنش‌ها، انرژی کم‌تری مصرف می‌شود و این معادل با استفاده کم‌تر از سوخت‌ها و کاهش میزان آلودگی‌های ایجادشده توسط آن‌ها است. توجه داریم که برخی از واکنش‌ها در صنعت فقط در دما و فشارهای بالا انجام می‌شوند و تولید فراورده‌ها در آن‌ها صرفه اقتصادی ندارد. در این شرایط، با استفاده از کاتالیزگر مناسب می‌توان این واکنش‌ها را در دماها و فشارهای پایین‌تر و با صرفه اقتصادی بیشتر به انجام رساند. کاتالیزگرها در واکنش‌های شیمیایی شرکت کرده و با کاهش مقدار انرژی فعال‌سازی، سرعت این واکنش‌ها را افزایش می‌دهند؛ اما این مواد در پایان واکنش، در ظرف واکنش باقی می‌مانند. از این رو می‌توان کاتالیزگرها را بارها و بارها به کار برد.

گروه آموزشی ماز

۱۰۲- کدام مورد دربارهٔ واکنش مربوط به حذف اکسیدهای نیتروژن در مبدل کاتالیستی خودروهای دیزلی(واکنش I) و واکنش تولید آمونیاک از عناصر سازنده آن(واکنش II) نادرست است؟

۱) در واکنش I برخلاف واکنش II، گاز آمونیاک مصرف و گاز نیتروژن تولید می‌شود.
۲) عدد اکسایش همهٔ اتم‌های نیتروژن در واکنش I، همانند واکنش II، کاهش می‌یابد.
۳) واکنش I همانند واکنش تشکیل اوزون تروپوسفری و برخلاف واکنش II، برگشت‌ناپذیر است.
۴) مجموع ضرایب مواد در معادلهٔ موازنه شده واکنش I، ۱/۵ برابر مجموع ضرایب در واکنش II است.

پاسخ: گزینه ۲ (متوسط ـ مفهومی ـ ۱۲۰۴)

پاسخ تشریحی:

واکنش انجام شده درون مبدل کاتالیستی خودروهای دیزلی (واکنش I) و واکنش تولید آمونیاک (واکنش II) به صورت زیر است:

I) $NO\ (g) + NO_۲(g) + ۲NH_۳(g) \rightarrow ۲N_۲(g) + ۳H_۲O(g)$

II) $N_۲(g) + ۳H_۲(g) \rightleftharpoons ۲NH_۳(g)$

عدد اکسایش نیتروژن در NO، $NO_۲$، $NH_۳$ و $N_۲$، به ترتیب برابر با ۲+ ، ۴+ ، ۳- و صفر است. بنابراین عدد اکسایش برخی اتم‌های نیتروژن در واکنش I کاهش و برخی دیگر افزایش یافته است و در واکنش II عدد اکسایش همهٔ اتم‌های نیتروژن کاهش یافته است.

بررسی سایر گزینه‌ها:

۱) با توجه به معادله‌های داده شده مشخص است که گاز آمونیاک در واکنش I برخلاف واکنش II مصرف و گاز نیتروژن تولید می‌شود.

www.biomaze.ir
AzmonVIP

۳ واکنش تشکیل اوزون تروپوسفری به صورت زیر است:

$$NO_2(g) + O_2(g) \xrightarrow{\text{نور خورشید}} NO(g) + O_3(g)$$

واکنش I همانند واکنش اوزون تروپوسفری و برخلاف واکنش تولید آمونیاک (واکنش II) برگشت‌ناپذیر است.

۴ مجموع ضرایب مواد در واکنش I واکنش II به ترتیب برابر با ۹ و ۶ است و نسبت آن‌ها برابر ۱/۵ است.

شیمی‌دان‌ها با قراردادن کاتالیزگرهای مناسب بر سر راه گازهای خروجی از موتور خودروها، توانستند واکنش‌های مربوط به حذف آلاینده‌های تولیدشده در موتور خودروها را با سرعت بالاتری به انجام برسانند و با این روش، مقدار زیادی از گازهای آلاینده را به فراورده‌های بی‌خطر یا کم‌خطر تبدیل کنند. کاتالیزگرهای استفاده‌شده توسط شیمی‌دان‌ها شامل رودیم، پالادیم و پلاتین هستند که در قالب مبدل‌های کاتالیستی بر سر راه گازهای خروجی از موتور خودروها قرار می‌گیرند. کارایی مبدل‌های کاتالیستی، به نوع کاتالیزگرهای موجود در آن‌ها و شرایط استفاده از کاتالیزگرها بستگی دارد. به عنوان مثال، این مبدل‌ها را می‌توان به شکل یک قطعه سرامیکی ساخت که به شکل توری درآمده و فلزهای رودیم، پالادیم و پلاتین بر روی آن‌ها نشانده شده است. کارایی مبدل‌های کاتالیستی، به نوع کاتالیزگرهای موجود در آن‌ها و شرایط استفاده از کاتالیزگرها بستگی دارد. به عنوان مثال، سرامیک موجود در این مبدل‌ها را می‌توان به شکل مش(دانه)های ریز درآورده و کاتالیزگرهای فلزی را بر روی سطح دانه‌ها پخش کرد. بدیهی است که در این حالت(ساختن سرامیک موجود در مبدل به صورت مش)، سطح تماس کاتالیزگرها با گازهای آلاینده افزایش پیدا کرده و مقدار بیشتری از گازهای آلاینده توسط مبدل کاتالیستی حذف می‌شوند و در نتیجه کارایی مبدل افزایش پیدا می‌کند.

گروه آموزشی ماز

۱۰۳- کدام یک از مطالب زیر، نادرست است؟ ($Al = ۲۷ : g.mol^{-1}$)

۱) الگوی ساختار گرافن مشابه کندوی زنبور عسل بوده و مقاومت کششی یک نمونه از آن، حدود ۱۰ برابر فولاد است.
۲) حالت فیزیکی اکسید دو عنصر نخست گروه ۱۴ در دمای اتاق، برخلاف حالت فیزیکی خود این عناصر، متفاوت از هم است.
۳) در نقشه پتانسیل الکتروستاتیکی SO_3 و SCO، رنگ اتم مرکزی مشابه بوده و هر دو مولکول، ۴ پیوند اشتراکی دارند.
۴) رنگ محلول حاصل از واکنش کامل ۰/۰۹ گرم پودر آلومینیم و ۵۰ میلی‌لیتر محلول ۰/۲ مول بر لیتر وانادیم(V)، آبی است.

پاسخ: گزینه ۱ (متوسط ـ مفهومی ـ ۱۲۰۳)

پاسخ تشریحی:

گرافن تک‌لایه‌ای از گرافیت است که در آن، اتم‌های کربن ساختارهای شش گوشه تشکیل داده‌اند. ساختار گرافن، الگویی مشابه کندوی زنبور عسل دارد و استحکام ویژه‌ای دارد. مقاومت کششی آن، حدود ۱۰۰ برابر فولاد است. از آن‌جا که ضخامت گرافن به اندازه یک اتم کربن است انتظار می‌رود که شفاف و انعطاف‌پذیر باشد.

بررسی سایر گزینه‌ها:

۲ اکسید حاصل از دو عنصر نخست گروه ۱۴ به ترتیب CO_2 و SiO_2 هستند که حالت فیزیکی اولی گاز و دومی جامد است، در حالی که حالت فیزیکی این دو عنصر(کربن و سیلسیم) در دمای اتاق جامد است.

سیلیس(SiO_2) یکی از سازنده‌های اصلی بسیاری از سنگ‌ها، صخره‌ها و همچنین شن و ماسه است. وجود این ماده، باعث استحکام و ماندگاری سازه‌های سنگی و نقشکندهای روی آن‌ها شده است. سیلیس نوعی جامد کووالانسی محسوب می‌شود و همانطور که می‌دانیم، در ساختار جامدهای کووالانسی، مولکول‌های مجزا وجود ندارد و این مواد، شامل شمار بسیار زیادی اتم بوده که با پیوند اشتراکی به هم متصل شده و ساختاری به‌هم پیوسته و غول‌آسا را تشکیل داده‌اند. با توجه به توضیحات داده شده، برای توصیف جامدهای کووالانسی نمی‌توان از واژه مولکول استفاده کرد.

۳ شیمی‌دان‌ها برای نمایش توزیع الکترون‌ها و بررسی تراکم بار الکتریکی روی اتم‌های سازنده یک گونه شیمیایی، از شکل‌هایی به نام نقشه پتانسیل الکترواستاتیکی استفاده می‌کنند. در این نقشه‌ها، رنگ آبی تراکم کم‌تر الکترون‌ها(بار جزئی مثبت) و رنگ قرمز تراکم بیشتر الکترون‌ها(بار جزئی منفی) را نشان می‌دهد. اتم مرکزی در گوگرد تری‌اکسید و کربونیل سولفید به ترتیب گوگرد و کربن است و هر دو بار جزئی مثبت دارند و رنگ آن‌ها در نقشهٔ پتانسیل الکترواستاتیکی آبی است. شکل‌های زیر نقشهٔ پتانسیل الکترواستاتیکی این دو مولکول را نشان می‌دهد. در ساختار هر دو ماده، چهار پیوند اشتراکی وجود دارد.

۴ اگر کاتیون وانادیم تولید شده در این فرایند به صورت V^{n+} باشد، معادلهٔ واکنش انجام شده به صورت زیر می‌شود:

$$(۵-n)Al(s) + ۳V^{۵+}(aq) \rightarrow (۵-n)Al^{۳+}(aq) + ۳V^{n+}(aq)$$

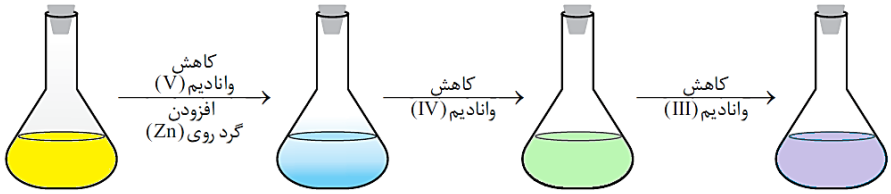
بر این اساس، داریم:

$$?\,g\,Al = ۵۰ml\,V^{۵+} \times \frac{۱\,L}{۱۰۰۰ml} \times \frac{۰/۲\,mol\,V^{۵+}}{۱\,L\,V^{۵+}} \times \frac{(۵-n)\,mol\,Al}{۳\,mol\,V^{۵+}} \times \frac{۲۷\,g\,Al}{۱\,mol\,Al} = ۰/۰۹\,g \rightarrow n = ۴$$

بنابراین در این واکنش، یون $V^{۴+}$ تولید شده است. می‌دانیم که رنگ محلول حاوی یون $V^{۴+}$ آبی است.

AzmonVIP
www.biomaze.ir

شکل زیر رنگ محلول‌های حاوی یون‌های وانادیم را نشان می‌دهد:



محلول	محلولی از نمک وانادیم (V)	محلولی از نمک وانادیم (IV)	محلولی از نمک وانادیم (III)	محلولی از نمک وانادیم (II)
رنگ محلول	زرد	آبی	سبز	بنفش
آرایش الکترونی وانادیم	وانادیم در این محلول به شکل یون چنداتمی است.	وانادیم در این محلول به شکل یون چنداتمی است.	$[_{18}Ar]3d^2$	$[_{18}Ar]3d^3$

گروه آموزشی ماز

۱۰۴- کدام مورد از مطالب زیر نادرست است؟

۱) در ساختار ترفتالیک اسید، تعداد اتم‌های کربن فاقد اتم هیدروژن برابر تعداد اتم‌های کربن دارای یک اتم هیدروژن است.
۲) یکی از فراورده‌های حاصل از واکنش گاز متان با بخار آب در دمای بالا را می‌توان از برقکافت آب نیز به دست آورد.
۳) در فرایند تولید ترفتالیک اسید از پارازایلن، از پتاسیم پرمنگنات به عنوان کاتالیزگر استفاده می‌شود.
۴) پارازایلن و بنزن را برخلاف اتیلن‌گلیکول، می‌توان از تقطیر نفت خام به‌دست آورد.

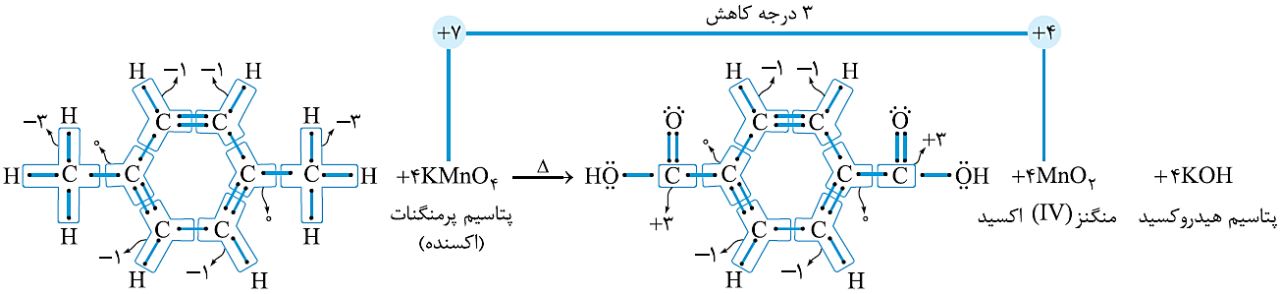
پاسخ: گزینه ۳ (متوسط ـ مفهومی ـ ۱۲۰۴)

پاسخ تشریحی:

برای تولید ترفتالیک اسید با بازده نسبتا خوب، پارازایلن را به کمک محلول غلیظ پتاسیم پرمنگنات که یک اکسنده است، طبق واکنش زیر اکسید می‌کنند:

$$C_8H_{10} + 4KMnO_4 \rightarrow C_8H_6O_4 + 4KOH + 4MnO_2$$

در این واکنش، عدد اکسایش دور مورد از اتم‌های کربن از ۳- در پارازایلن به ۳+ در ترفتالیک اسید می‌رسد. معادله ساختاری این واکنش به صورت زیر است:



در این واکنش یون پرمنگنات به منگنز(IV) اکسید، تبدیل می‌شود. تغییر عدد اکسایش اتم منگنز در این واکنش ۳- واحد است$(3- = (+7)-(+4))$. توجه داریم که پتاسیم پرمنگنات در این واکنش، جزئی از واکنش‌دهنده‌ها است و کاتالیزگر نیست.

با وجود غلظت بالای یون پرمنگنات، باز هم شرایط تبدیل پارازایلن به ترفتالیک اسید تامین نمی‌شود، مگر آن‌که دمای مخلوط واکنش افزایش یابد. با افزایش دما اگر چه شرایط انجام واکنش تامین شده است، اما بازده همچنان مطلوب نیست. همهٔ این‌ها نشان می‌دهد که اکسایش پارازایلن به ترفتالیک اسید دشوار است. شیمی‌دان‌ها با پژوهش‌های فراوان دریافتند که استفاده از اکسیژن هوا و کاتالیزگرهای مناسب می‌تواند راهگشا باشد. البته پژوهش‌ها برای یافتن واکنش پربازده و با صرفهٔ اقتصادی همچنان ادامه دارد.

بررسی سایر گزینه‌ها:

۱) در مولکول ترفتالیک اسید ۴ اتم کربن فاقد اتم هیدروژن و ۴ اتم کربن دارای یک اتم هیدروژن است.

۲) واکنش گاز متان با بخار آب در دمای بالا به صورت زیر است:

$$CH_4(g) + H_2O(g) \xrightarrow{450-550\ ^\circ C} 3H_2(g) + CO(g)$$

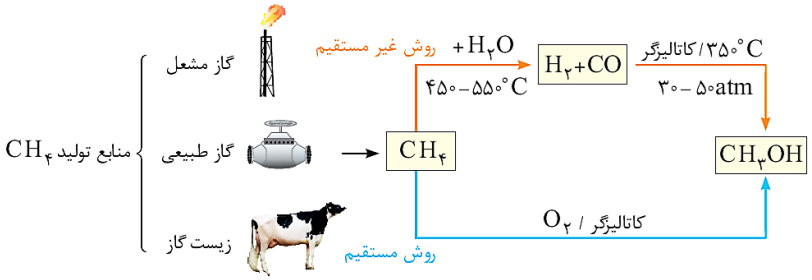
یکی از فراورده‌های این واکنش گاز هیدروژن است. همان‌طور که می‌دانیم این گاز در کاتد سلول برقکافت آب مطابق واکنش زیر تولید می‌شود.

$$2H_2O(l) + 2e \rightarrow H_2(g) + 2OH^-(aq)$$

گاز متان مورد نیاز برای تولید صنعتی متانول(ساده‌ترین عضو خانواده الکل‌ها) به روش‌های مستقیم و غیرمستقیم، با استفاده از گاز مشعل، گاز طبیعی و یا زیست‌گاز تامین می‌شود.

AzmonVIP
www.biomaze.ir

تصویر زیر، نمایی از فرایند تولید متانول را نشان می‌دهد:



برای تهیه غیرمستقیم متانول از متان، ابتدا متان را در حضور گرمای زیاد و کاتالیزگر مناسب به گازهای هیدروژن و کربن مونوکسید تبدیل می‌کنند. واکنش انجام‌شده به صورت زیر است:

$$CH_4(g) + H_2O(g) \rightarrow 3H_2(g) + CO(g)$$

در صنعت، گاز کربن مونوکسید و گاز هیدروژن تولیدشده در مرحله قبل را در دما و فشار مناسب و در مجاورت با کاتالیزگر با یکدیگر وارد واکنش می‌کنند تا متانول به دست بیاید. واکنش انجام‌شده به صورت زیر است:

$$CO(g) + 2H_2(g) \rightarrow CH_3OH(l)$$

۴) پارازایلن، اتن و بنزن را می‌توان از تقطیر نفت خام به‌دست آورد، اما اتیلن گلیکول در نفت خام وجود ندارد و آن را می‌توان از اکسایش گاز اتن به کمک محلول آبی و رقیق پتاسیم پرمنگنات در شرایط مناسب تولید کرد. واکنش تولید آن به صورت زیر است:

$$CH_2 = CH_2 \quad + \quad \text{اکسنده} \quad \rightarrow \quad CH_2OH - CH_2OH$$

گروه آموزشی ماز

۱۰۵- با توجه به مواد داده شده، درستی یا نادرستی عبارت‌های زیر در کدام گزینه آمده است؟

برم ، نفتالن ، سیلیس ، گرافیت ، سیلیسیم کربید ، منیزیم کلرید

آ: درصد جرمی اتم‌های سیلیسیم در ساختار سیلیس کمتر از سیلیسیم کربید است.

ب: برای چهار ماده نمی‌توان واژهٔ فرمول مولکولی را به کار برد و از میان این مواد، دو جامد مولکولی وجود دارد.

پ: یکی از این مواد در حالت جامد و یکی در حالت محلول، می‌تواند رسانای جریان الکتریسیته باشد.

ت: در ساختار سه ماده، اتم کربن وجود داشته و یکی از این مواد، باعث استحکام و ماندگاری سازه‌های سنگی می‌شود.

۱) درست ـ نادرست ـ درست ـ نادرست
۲) درست ـ درست ـ نادرست ـ نادرست
۳) نادرست ـ نادرست ـ درست ـ درست
۴) نادرست ـ درست ـ درست ـ نادرست

پاسخ: گزینه ۱ (آسان ـ مفهومی ـ ۱۲۰۴)

پاسخ تشریحی:

عبارت‌های (آ) و (پ) درست است.

بررسی موارد:

آ: فرمول شیمیایی سیلیس و سیلیسیم کربید به ترتیب عبارت از SiO_2 و SiC است. جرم مولی اکسیژن از کربن بیشتر است و در ساختار سیلیس نیز به ازای هر اتم سیلیسیم، دو اتم اکسیژن وجود دارد؛ پس درصد جرمی سیلیسیم در سیلیس کمتر از سیلیسیم کربید است.

ب: برای چهار مادهٔ سیلیس، گرافیت، سیلیسیم کربید و منیزیم کلرید، نمی‌توان واژه فرمول مولکولی را به کار برد. در واقع، سیلیس، گرافیت و سیلیسیم کربید جامد کووالانسی بوده و منیزیم کلرید جامد یونی است. تنها یک جامد مولکولی(نفتالن) در این میان وجود دارد. توجه داریم که حالت فیزیکی برم مایع است.

پ: گرافیت یکی از دگرشکل‌های کربن است و در حالت جامد رسانای جریان برق است. منیزیم کلرید و دیگر ترکیب‌های یونی در حالت مذاب و محلول می‌تواند جریان برق را از خود عبور دهد.

گرافیت یک جامد کووالانسی سیاه‌رنگ و کدر است که چینش اتم‌های کربن در آن به صورت دو بعدی است. در واقع، گرافیت ساختار لایه‌ای دارد و در هر لایه از آن، اتم‌های کربن مطابق با یک ساختار دوبعدی به یکدیگر متصل شده‌اند. از آن‌جا که بین لایه‌های مختلف سازنده گرافیت نیروی ضعیف وان‌دروالسی وجود دارد، این لایه‌ها می‌توانند به راحتی بر روی یکدیگر بلغزند و به همین خاطر، گرافیت برخلاف الماس ماده بسیار نرمی است. با توجه به فاصله نسبتاً زیاد میان لایه‌های کربنی موجود در ساختار گرافیت، تراکم اتم‌های کربن در این ماده کم‌تر از تراکم اتم‌های کربن در الماس است و به همین خاطر، چگالی گرافیت کم‌تر از چگالی الماس خواهد بود.

ت: در ساختار نفتالن، گرافیت، سیلسیم کربید و منیزیم کلرید، عنصر کربن وجود دارد، اما ماده‌ای که باعث استحکام و ماندگاری سازه‌های سنگی می‌شود، سیلیس(SiO_2) است که در ساختار آن کربن وجود ندارد.

سیلیس(سیلیسیم دی‌اکسید)، سیلیسیم، سیلیسیم کربید، گرافیت و الماس در دسته مواد کووالانسی قرار می‌گیرند. این گروه از مواد شامل شمار بسیار زیادی از اتم‌ها می‌شوند که توسط پیوندهای اشتراکی به یکدیگر متصل شده‌اند. از آن‌جا که این مواد در دما و فشار اتاق به حالت جامد هستند، آن‌ها را با نام جامدهای کووالانسی نیز می‌خوانند. یافته‌های تجربی نشان می‌دهند که عنصرهای اصلی سازنده جامدهای کووالانسی در طبیعت، کربن و سیلیسیم هستند. علاوه بر کربن و سیلیسیم، عنصر اکسیژن نیز در ساختار برخی از جامدهای کووالانسی وجود دارد. کربن یک عنصر نافلزی و سیلیسیم نیز یک عنصر شبه‌فلزی از گروه چهاردهم جدول تناوبی است. اتم‌های این عناصر در واکنش با سایر اتم‌ها، الکترون به اشتراک گذاشته و پیوند کووالانسی(اشتراکی) تشکیل می‌دهند و به همین خاطر، از آن‌ها تاکنون یون تک‌اتمی در هیچ ترکیبی شناخته نشده است.

گروه آموزشی ماز

www.biomaze.ir

AzmonVIP

در کنکور سراسری هر سال بیش از یک میلیون نفر شرکت کرده و برای به‌دست آوردن صندلی دانشگاه‌های برتر با هم رقابت می‌کنند.

یکی از وظایف کنکور، متمایز کردن این افراد از هم می‌باشد. متمایز کردن به این معناست که کنکور باید طوری طراحی شود که تا جای ممکن، دو نفر از داوطلبان رتبهٔ یکسانی کسب نکنند. همین ماجرا باعث می‌شود که طراحان کنکور سراسری مجبور شوند هر سال سؤالات خود را متفاوت از سال گذشته طراحی کنند. به همین دلیل هست که هر سال شاهد نوآوری‌های جدیدی در کنکور هستیم.

روند طراحی سؤالات در این ۳ آزمون جامع باقی‌ماندهٔ ماز به نحویست که با توجه به سطح کنکور اردیبهشت، هر سه حالت آسان؛ متوسط و سخت را برای هر درس خواهیم داشت تا تمامی حالت‌ها مورد بررسی و شبیه‌سازی قرار گیرد و شما برای هر موقعیت احتمالی در کنکور آماده باشید.

AzmonVIP