

کد کنترل

121

A



پنجشنبه

۱۴۰۳/۰۳/۰۳



گروه آموزشی ماز

دوره جمع بندی دوپینگ ماز

گروه آزمایشی علوم ریاضی و فنی

دفترچه پاسخ ریاضیات

(جامع مثلثات - هندسه ۲ - کسسته)

دروس	مسئول درس	طراحان	ویراستاران
ریاضیات	محدثه شیخ علی	حسین شفیع زاده - مهرداد کیوان مهدي عزیزی - رسول حاجی زاده سوگند روشنی	رضا قانع - فرشاد حسن زاده

حق چاپ و تکثیر سوالات به هر روش (الکترونیکی و ...) پس از برگزاری آزمون برای تمامی اشخاص حقیقی و حقوقی تنها با مجوز «گروه ماز» مجاز می باشد و

با متخلفین برابر مقررات رفتار می شود.

به دلیل عدم رضایت تیم ماز، هر گونه استفاده غیرقانونی از دفترچه سوالات و پاسخنامه ماز برای تمامی اشخاص، شرعاً حرام است.



AzmonVIP

اهمیت مبحث مثلثات در کنکور:

در هر سه کتاب ریاضی ۱، حسابان ۱ و حسابان ۲ یک فصل مستقل به نام مثلثات داریم. سوالات کنکور سراسری عموماً به سه بخش اتحادهای مثلثاتی، نمودار مثلثاتی و معادلات مثلثاتی تقسیم‌بندی می‌شوند. دقت داشته باشید اتحادهای مثلثاتی در موضوعاتی مانند حد و مشتق نیز کاربرد دارند. بنابراین تسلط به این اتحادها بسیار ضروری به نظر می‌رسد. سعی کنید از حفظ کردن اتحادهای فرعی و کمیاب اجتناب کنید تا ذهنتان خیلی درگیر فرمول‌های کم کاربرد نشود.

پیش‌نیازهای مطالعه این بخش کدام مباحث هستند؟

مثلثات یک مفهوم جدید و برای یادگیری نیاز به مطالعه قبلی نیست اما تو بعضی جاها به اشکال هندسی (سوال ۲ صفحه ۳۵ دهم) و به معادله خط (سوال ۸ و ۹ صفحه ۴۱ دهم) و یا حتی به حل معادله (سوالات معادلات مثلثاتی دوازدهم) و انتقال نمودار برای رسم توابع مثلثاتی و ... ربط پیدا می‌کند پس مرور مفاهیم پایه ریاضیات می‌تونه تو یادگیری هر چه بهترتون تاثیرگذار باشه.

این بخش در کدام قسمت‌ها کاربرد دارد؟

این بخش تقریباً تو همه بخش‌های دیگه استفاده میشه و قابل ترکیب و تو کنکور هم اتفاقاً سوالات ترکیبی داریم (ترکیب با تابع، حد و مشتق و کاربرد مشتق مهمترین این ترکیبات هستن). البته تو فیزیک نیز به شدت کاربرد داره.

فصل ۳ فیزیک دهم (تجزیه برداری نیروها برای محاسبه کار)، فصل سوم و چهارم فیزیک یازدهم (محاسبه نیرو مغناطیسی وارد بر سیم حامل جریان و ذره و جریان متناوب) و فصل ۳ دوازدهم (معادله حرکت هماهنگ ساده) کاربردهای مثلثات تو فیزیک هستن.

از این بخش‌ها در کنکور سال‌های قبل چه تعداد سوال طرح شده است؟ این سوالات از چه موضوعاتی بوده؟

با اجازه آقایان دانشمندان بزرگوار، خواهی نصیرالدین طوسی و ابوریحان بیرونی که از تکمیل کنندگان این دانش بودند، بریم سراغ تعداد تست‌ها در کنکور. بشنو از جدول چون حکایت می‌کند:

۱۴۰۳ (اردیبهشت)	۱۴۰۲	۱۴۰۱ (دی)	۱۴۰۱	۱۴۰۰	۱۳۹۹	۱۳۹۸
۵	۴	۳	۳	۳	۴	۳
رابطه شیب خط و تانژانت زاویه	نسبت‌های مثلثاتی مجموع و تفاضل	نسبت‌های مثلثاتی مجموع و تفاضل	اتحادهای مثلثاتی نمودار مثلثاتی معادله مثلثاتی	اتحادهای مثلثاتی (دو سوال) معادله مثلثاتی	نسبت‌های مثلثاتی در مثلث اتحادهای مثلثاتی (دو سوال) معادله مثلثاتی	محاسبه نسبت‌های مثلثاتی نمودار مثلثاتی معادله مثلثاتی
نسبت‌های مثلثاتی در مثلث	محاسبه مساحت مثلث با استفاده از نسبت‌های مثلثاتی	نمودار مثلثاتی				
نسبت‌های مثلثاتی مجموع و تفاضل	نمودار مثلثاتی	معادله مثلثاتی				
نسبت‌های مثلثاتی دو برابر کمان معادله مثلثاتی	معادله مثلثاتی					

پیش‌بینی شما برای کنکور سال بعد چیه؟

باید بگم که معمولاً ۳ تا ۵ تست مستقیم خواهیم داشت و یکی دو تا هم بطور غیر مستقیم. تست‌های غیرمستقیم اغلب توی تست‌های حد و پیوستگی هستن.

۱- اگر  $\frac{2 \sin 288^\circ + k \cos 162^\circ}{\cos 198^\circ - 3 \sin 252^\circ} = \frac{1}{3}$  باشد، مقدار  $k$  کدام است؟

- (۱)  $\frac{4}{3}$  (۲)  $-\frac{4}{3}$  (۳)  $-\frac{1}{3}$  (۴)  $\frac{1}{3}$

پاسخ: گزینه ۳ (آسان - محاسباتی - ۱۱۰۴)

پاسخ تشریحی:

$$\frac{2 \sin(270^\circ + 18^\circ) + k \cos(180^\circ - 18^\circ)}{\cos(180^\circ + 18^\circ) - 3 \sin(270^\circ - 18^\circ)} = \frac{1}{3}$$

$$\frac{-2 \cos 18^\circ - k \cos 18^\circ}{-\cos 18^\circ + 3 \cos 18^\circ} = \frac{1}{3} \Rightarrow \frac{-2 - k}{2} = \frac{1}{3} \Rightarrow k = -\frac{8}{3}$$

گروه آموزشی ماز

۲- حاصل  $P = 4 \sin^2 x + 2(\sqrt{3} \sin x - \cos x)^2$  به ازای  $x = \frac{\pi}{12}$  چقدر است؟

- (۱)  $6 - 3\sqrt{3}$  (۲)  $4 + 2\sqrt{3}$  (۳)  $4 - \sqrt{3}$  (۴)  $6 + \sqrt{3}$

پاسخ: گزینه ۱ (متوسط - مفهومی / محاسباتی - ۱۱۰۴)

پاسخ تشریحی:

$$P = 4 \sin^2 x + 2(3 \sin^2 x + \cos^2 x - 2\sqrt{3} \sin x \cos x) = 8 \sin^2 x + 2 - 2\sqrt{3} \sin 2x = 4(1 - \cos 2x) + 2 - 2\sqrt{3} \sin 2x$$

$$x = \frac{\pi}{12} \Rightarrow P = 4\left(1 - \frac{\sqrt{3}}{2}\right) + 2 - 2\sqrt{3}\left(\frac{1}{2}\right) = 6 - 2\sqrt{3} - \sqrt{3} = 6 - 3\sqrt{3}$$

گروه آموزشی ماز

۳- اگر  $\frac{\cos \alpha}{\cos \alpha - \sin \alpha} - \frac{\cos \alpha + \sin \alpha}{\cos \alpha} = -4$  باشد، مقدار  $\cot \alpha$  کدام است؟

- (۱)  $-2$  (۲)  $2$  (۳)  $\frac{1}{2}$  (۴)  $-\frac{1}{2}$

پاسخ: گزینه ۳ (متوسط - مفهومی / محاسباتی - ۱۰۰۲)

پاسخ تشریحی:

$$\frac{\cos^2 \alpha - (\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha)}{\cos \alpha (\cos \alpha - \sin \alpha)} = -4 \Rightarrow \frac{\sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha - \cos \alpha \sin \alpha} = -4$$

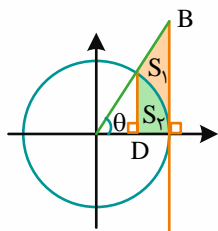
مخرج مشترک می گیریم:

$$\frac{1}{\cot^2 \alpha - \cot \alpha} = -4 \Rightarrow 4 \cot^2 \alpha - 4 \cot \alpha + 1 = 0 \Rightarrow (2 \cot \alpha - 1)^2 = 0 \Rightarrow \cot \alpha = \frac{1}{2}$$

بر  $\sin^2 \alpha$  تقسیم می کنیم:

گروه آموزشی ماز

۴- در دایره مثلثاتی شکل مقابل،  $\theta = \frac{\pi}{4}$  است. مساحت دو ناحیه رنگی برابر  $S_1$  و  $S_2$  است. حاصل  $4(S_2 - S_1)$  چقدر است؟



- (۱)  $\pi - 2$  (۲)  $\pi - 2$  (۳)  $\pi - \sqrt{3}$  (۴)  $\pi - \sqrt{2}$

پاسخ: گزینه ۱ (متوسط - ترکیبی / محاسباتی - ۱۲۰۲)

پاسخ تشریحی:

$$\begin{cases} S_1 = \frac{1}{2} \tan \theta - \frac{1}{2} \theta = \frac{1}{2} - \frac{\pi}{4} \\ S_2 = \frac{1}{2} \theta - \frac{1}{2} \sin \theta \cos \theta = \frac{\pi}{8} - \frac{1}{4} \end{cases}$$

$$S_2 - S_1 = \frac{\pi}{8} - \frac{3}{4} \Rightarrow 4(S_2 - S_1) = \pi - 3$$

۵- اگر  $\sin \alpha = \frac{\sqrt{5}}{5}$  و  $\alpha$  حاده باشد، حاصل  $\tan(\alpha + \frac{\pi}{4})$  چقدر است؟

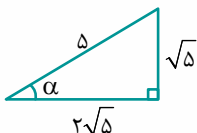
- (۱)  $-\frac{1}{7}$  (۲)  $\frac{1}{7}$  (۳) ۷ (۴)  $-7$

پاسخ: گزینه ۴ (متوسط - محاسباتی - ۱۳۰۲)

پاسخ تشریحی:

با توجه به شکل مقابل،  $\tan \alpha = \frac{1}{\sqrt{5}}$  است.

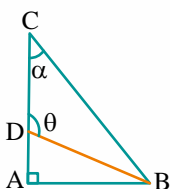
$$\tan 2\alpha = \frac{2 \tan \alpha}{1 - \tan^2 \alpha} = \frac{1}{1 - \frac{1}{5}} = \frac{5}{4}$$



$$\tan(\alpha + \frac{\pi}{4}) = \frac{\tan 2\alpha + 1}{1 - \tan 2\alpha} = \frac{\frac{5}{4} + 1}{1 - \frac{5}{4}} = -7$$

گروه آموزشی ماز

۶- در شکل مقابل،  $\sin \alpha = \frac{2}{\sqrt{13}}$  است. اگر  $DC = 2AD$  باشد، مقدار  $\cos 2\theta$  چقدر است؟

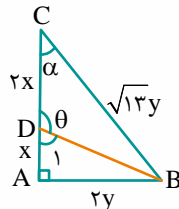


- (۱)  $-\frac{1}{8}$   
(۲)  $-\frac{1}{6}$   
(۳)  $-\frac{1}{36}$   
(۴)  $-\frac{1}{64}$

پاسخ: گزینه ۲ (متوسط - مفهومی / محاسباتی - ۱۱۰۴)

پاسخ تشریحی:

$$\sin \alpha = \frac{2}{\sqrt{13}} \Rightarrow \begin{cases} AB = 2y \\ BC = \sqrt{13}y \end{cases} \Rightarrow 13y^2 = 4y^2 + 9x^2 \Rightarrow x = y$$



$$\cos 2\theta = \cos(2(\pi - \hat{D}_1)) = \cos(2\hat{D}_1) = \frac{1 - \tan^2 \hat{D}_1}{1 + \tan^2 \hat{D}_1} = \frac{1 - 4}{1 + 4} = -\frac{3}{5}$$

گروه آموزشی ماز

۷- نمودار تابع  $f(x) = a + b \cos(\frac{4x}{b} + \frac{\pi}{3})$  با دوره تناوب  $\pi$ ، از مبدأ مختصات عبور می‌کند. مجموع مقادیر ممکن برای  $f(\frac{\pi}{6})$  کدام است؟

- (۱) صفر (۲)  $-1$  (۳) ۲ (۴)  $-3$

پاسخ: گزینه ۴ (متوسط - محاسباتی - ۱۳۰۲)

پاسخ تشریحی:

$$f(0) = 0 \Rightarrow a + \frac{b}{2} = 0$$

$$T = \pi = \frac{2\pi}{\left|\frac{4}{b}\right|} = \frac{|b|\pi}{2} \Rightarrow |b| = 2$$

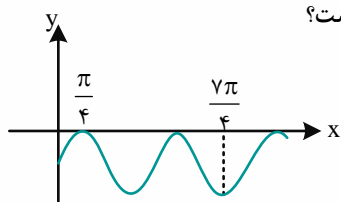
$$\begin{cases} b = 2 \Rightarrow a = -1 \\ b = -2 \Rightarrow a = 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} f(x) = -1 + 2 \cos(2x + \frac{\pi}{3}) \\ f(x) = 1 - 2 \cos(-2x + \frac{\pi}{3}) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} f\left(\frac{\pi}{6}\right) = -1 + 2 \cos \frac{2\pi}{3} = -2 \\ f\left(\frac{\pi}{6}\right) = 1 - 2 \cos 0 = -1 \end{cases} \Rightarrow \text{جمع} = -3$$

گروه آموزشی ماز

۸- قسمتی از نمودار تابع  $f(x) = a + \sin \frac{a}{b} x$  به صورت مقابل است. دوره تناوب تابع  $y = a \cos bx$  کدام است؟



- (۱)  $\frac{\pi}{2}$
- (۲)  $\pi$
- (۳)  $2\pi$
- (۴)  $4\pi$

(متوسط - مفهومی / محاسباتی - ۱۲۰۲)

پاسخ: گزینه ۴



$$\max = a + 1 = 0 \Rightarrow a = -1$$

$$\frac{7\pi}{4} - \frac{\pi}{4} = \frac{2\pi}{2} = \frac{2}{2} T \Rightarrow T = \pi$$

$$\Rightarrow \frac{2\pi}{|a|} = \pi \Rightarrow |b| = \frac{1}{2}$$

$$y = a \cos bx \Rightarrow T = \frac{2\pi}{|b|} = \frac{2\pi}{\frac{1}{2}} = 4\pi$$

گروه آموزشی ماز

۹- حداکثر فاصله بین دو صفر متوالی تابع  $f(x) = \sin 2x + 4 \sin^2 x \cos x$  چقدر است؟

$$\frac{7\pi}{6} \text{ (۴)}$$

$$\frac{2\pi}{3} \text{ (۳)}$$

$$\frac{\pi}{2} \text{ (۲)}$$

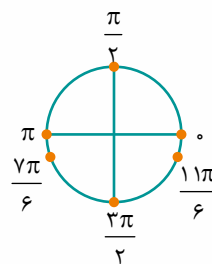
$$\frac{5\pi}{6} \text{ (۱)}$$

(متوسط - مفهومی / محاسباتی - ۱۲۰۲)

پاسخ: گزینه ۲



$$f(x) = 2 \sin x \cos x + 4 \sin^2 x \cos x = 2 \sin x \cos x (1 + 2 \sin x) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \sin x = 0 \\ \cos x = 0 \\ \sin x = -\frac{1}{2} \end{cases}$$



حداکثر فاصله برابر  $\frac{\pi}{2}$  است.

گروه آموزشی ماز

۱۰- معادله  $\frac{1}{\sin 2x} + \frac{1}{\cos 4x} = 0$  در بازه  $(\alpha, 2\pi)$  سه جواب دارد. حداقل  $\alpha$  کدام است؟

$$\frac{\pi}{4} \text{ (۴)}$$

$$\frac{7\pi}{12} \text{ (۳)}$$

$$\frac{11\pi}{12} \text{ (۲)}$$

$$\frac{5\pi}{4} \text{ (۱)}$$

(متوسط - مفهومی / محاسباتی - ۱۲۰۲)

پاسخ: گزینه ۲



$$\frac{1}{\sin 2x} = -\frac{1}{\cos 4x} \Rightarrow \cos 4x = -\sin 2x$$

$$\Rightarrow 1 - 2 \sin^2 2x = -\sin 2x \Rightarrow 2 \sin^2 2x - \sin 2x - 1 = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \sin 2x = 1 \Rightarrow 2x = \frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{2} \\ \sin 2x = -\frac{1}{2} \Rightarrow 2x = \frac{7\pi}{6}, \frac{11\pi}{6}, \frac{19\pi}{6}, \frac{23\pi}{6} \end{cases}$$

$$\Rightarrow x = \frac{\pi}{4}, \frac{7\pi}{12}, \frac{11\pi}{12}, \frac{5\pi}{4}, \frac{19\pi}{12}, \frac{23\pi}{12}$$

پس  $\alpha = \frac{11\pi}{12}$  است.

گروه آموزشی ماز

۱۱- در مثلث  $ABC$ ،  $(A=90^\circ)$ ،  $BC-AC=8$ ، و  $\tan(\hat{ACB}) = \frac{4}{3}$  است. مساحت مثلث  $ABC$  کدام است؟

۱۳۲ (۴)

۱۱۲ (۳)

۹۶ (۲)

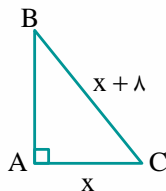
۸۴ (۱)

(متوسط - مفهومی / محاسباتی - ۱۰۰۲)

پاسخ: گزینه ۲



با توجه به شکل زیر و با فرض  $AC = x$ ، طول ضلع  $BC$  برابر  $x+8$  می‌شود. از طرفی  $\tan(\hat{ACB}) = \frac{4}{3}$  است، پس:



$$\frac{AB}{AC} = \frac{4}{3} \Rightarrow \frac{AB}{x} = \frac{4}{3} \Rightarrow AB = \frac{4}{3}x$$

حال به کمک قضیه فیثاغورس داریم:

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 \Rightarrow (x+8)^2 = \frac{16}{9}x^2 + x^2 \Rightarrow (x+8)^2 = \frac{25}{9}x^2 \Rightarrow x+8 = \frac{5}{3}x$$

$$\Rightarrow \frac{2}{3}x = 8 \Rightarrow x = 12$$

$$S = \frac{1}{2}AC \times AB = \frac{1}{2} \times 12 \times 16 = 96$$

بنابراین مساحت مثلث  $ABC$  برابر است با:

گروه آموزشی ماز

۱۲- حاصل عبارت  $\cos \frac{3\pi}{14} + \cos \frac{5\pi}{14} + \dots + \cos \frac{11\pi}{14}$  کدام است؟

۱ (۴)

$\frac{1}{2}$  (۳)

صفر (۲)

-۱ (۱)

(متوسط - محاسباتی - ۱۱۰۴)

پاسخ: گزینه ۲

بچه‌ها، به ایستگاه نکته‌پر و پیمون در مورد زوایای مکمل و متمم!

زوایای مکمل:

اگر  $\alpha + \beta = \pi$ ، دو زاویه  $\alpha$  و  $\beta$  را مکمل می‌گوییم. در این صورت:

$$\left. \begin{array}{l} \sin \alpha = \sin \beta \\ \cos \alpha = -\cos \beta \\ \tan \alpha = -\tan \beta \\ \cot \alpha = -\cot \beta \end{array} \right\} \xrightarrow[\text{مکمل}]{\text{مثلاً } \frac{\pi}{5} + \frac{4\pi}{5} = \pi} \text{پس} \left\{ \begin{array}{l} \sin \frac{4\pi}{5} = \sin \frac{\pi}{5} \\ \cos \frac{4\pi}{5} = -\cos \frac{\pi}{5} \end{array} \right.$$

زوایای متمم:



اگر  $\alpha + \beta = \frac{\pi}{2}$ ، دو زاویه  $\alpha$  و  $\beta$  را متمم می‌گوییم. در این صورت:

$$\left. \begin{array}{l} \sin \alpha = \cos \beta \\ \cos \alpha = \sin \beta \\ \tan \alpha = \cot \beta \\ \cot \alpha = \tan \beta \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{مثلاً} \\ \frac{\pi}{8} + \frac{3\pi}{8} = \frac{4\pi}{8} = \frac{\pi}{2} \end{array} \xrightarrow{\text{پس}} \left\{ \begin{array}{l} \sin \frac{\pi}{8} = \cos \frac{3\pi}{8} \\ \tan \frac{\pi}{8} = \cot \frac{3\pi}{8} \end{array} \right.$$

متمم

پاسخ تشریحی:

چون  $\frac{3\pi}{14}$  و  $\frac{11\pi}{14}$  و همچنین  $\frac{5\pi}{14}$  و  $\frac{9\pi}{14}$  مکمل‌اند، پس کسینوس‌های آن‌ها قرینه یکدیگرند.

بنابراین عبارت داده شده با  $\cos \frac{7\pi}{14}$  برابر است که برابر  $\cos \frac{\pi}{2} = 0$  می‌باشد.

گروه آموزشی ماز

۱۳- اگر  $\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{3\pi}{2}$  به طوری که  $\sin \theta \cos \theta = \frac{3m-20}{8}$ ، مجموع همه مقادیر صحیح قابل قبول  $m$  کدام است؟

۲۱ (۴)

۱۹ (۳)

۱۷ (۲)

۱۵ (۱)

(متوسط - مفهومی / محاسباتی - ۱۱۰۴)

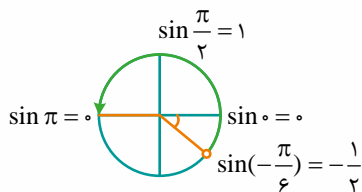
پاسخ: گزینه ۱

پاسخ تشریحی:

می‌دانیم  $\sin \theta \cos \theta = \frac{1}{2} \sin 2\theta$ ، پس:

$$\frac{1}{2} \sin 2\theta = \frac{3m-20}{8} \Rightarrow \sin 2\theta = \frac{3m-20}{4}$$

از آن جایی که  $-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{3\pi}{2}$ ، پس  $-\pi < 2\theta < 3\pi$ ، به کمک دایره مثلثاتی مقادیر  $\sin 2\theta$  را می‌یابیم:



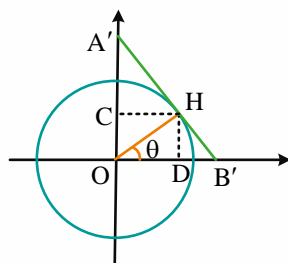
مشخص است که مقادیر  $\sin 2\theta$  در بازه  $[-1, 1]$  قرار دارند، پس:

$$-1 < \frac{3m-20}{4} \leq 1 \xrightarrow{\times 4} -4 < 3m-20 \leq 4 \xrightarrow{+20} 16 < 3m \leq 24 \xrightarrow{\div 3} 6 < m \leq 8$$

مجموعه مقادیر صحیح  $m$  برابر با  $\{7, 8\}$  هستند که مجموع این مقادیر برابر ۱۵ می‌باشد.

گروه آموزشی ماز

۱۴- طبق شکل، خط  $A'B'$  به طول ۴ واحد، در نقطه  $H$ ، بر دایره مثلثاتی مماس است. اختلاف مربعات طول و عرض چهارضلعی  $OCHD$  کدام است؟



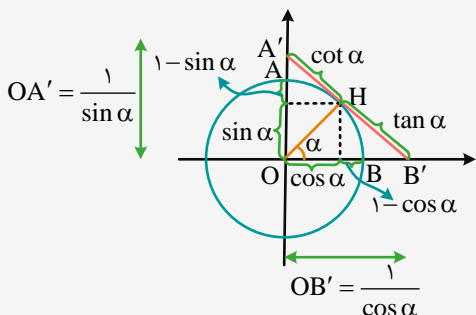
$\frac{\sqrt{2}}{2}$  (۱)

$\sqrt{2}$  (۲)

$\frac{\sqrt{3}}{2}$  (۳)

$\frac{1}{\sqrt{3}}$  (۴)

پاسخ: گزینه ۳ (متوسط - مفهومی / محاسباتی - ۱۰۰۲)



دایره مثلثاتی و حاشیه‌هایش!!

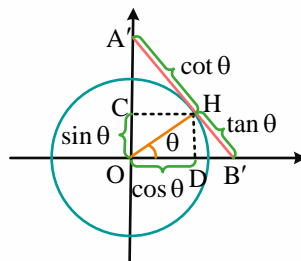
اگر  $A'B'$  خطی مماس بر دایره (عمود بر شعاع دایره در  $H$ ) باشد:



$$A'B' = 4 \Rightarrow \tan \theta + \cot \theta = 4 \Rightarrow \frac{\sin \theta}{\cos \theta} + \frac{\cos \theta}{\sin \theta} = 4 \Rightarrow \frac{1}{\sin \theta \cos \theta} = 4$$

$$\sin \theta \cos \theta = \frac{1}{4} \Rightarrow \sin 2\theta = \frac{1}{2} \Rightarrow 2\theta = 30^\circ \Rightarrow \theta = 15^\circ (*)$$

$$HC^2 - OC^2 = \cos^2 \theta - \sin^2 \theta = \cos 2\theta = \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} (*)$$



بنابراین:

گروه آموزشی ماز

۱۵- حاصل  $\sin \frac{\pi}{18} \sin \frac{5\pi}{18} \sin \frac{7\pi}{18}$  کدام است؟

$\frac{\sqrt{2}}{8}$  (۴)

$\frac{1}{8}$  (۳)

$\frac{\sqrt{2}}{4}$  (۲)

$\frac{1}{4}$  (۱)

پاسخ: گزینه ۳ (متوسط - مفهومی / محاسباتی - ۱۱۰۴)

نکته: زوایای متمم رو دوباره آوردیمش تا دلتون خیلی واسش تنگ نشه!

زوایای متمم:

اگر  $\alpha + \beta = \frac{\pi}{2}$ ، دو زاویه  $\beta$  و  $\alpha$  را متمم می‌گوییم و داریم:

$$\begin{cases} \sin \alpha = \cos \beta \\ \cos \alpha = \sin \beta \\ \tan \alpha = \cot \beta \\ \cot \alpha = \tan \beta \end{cases} \xrightarrow{\text{مثلاً}} \frac{\pi + 4\pi}{10} = \frac{5\pi}{10} = \frac{\pi}{2} \xrightarrow{\text{مثلاً}} \begin{cases} \sin \frac{\pi}{10} = \cos \frac{4\pi}{10} \\ \tan \frac{\pi}{10} = \cot \frac{4\pi}{10} \end{cases}$$

$$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha \xrightarrow{\div 2} \frac{1}{2} \sin 2\alpha = \sin \alpha \cos \alpha$$

سینوس دو برابر کمان:

وایسا، نرو!

هرگاه یک مشت سینوس در هم ضرب شدند به طوری که زوایای آنها دنباله هندسی با قدرنسبت ۲ می‌ساختند، برای ساده کردن عبارت، آنها را در سینوس کوچک‌ترین زاویه ضرب و تقسیم می‌کنیم. مثلاً می‌خواهیم حاصل  $\cos 36^\circ \cos 72^\circ$  را بیابیم:

$$\frac{\frac{1}{4} \sin 144^\circ}{\frac{1}{2} \sin 72^\circ} = \frac{\frac{1}{4} \sin 144^\circ}{\sin 36^\circ \cos 36^\circ \cos 72^\circ} = \frac{1}{4} \frac{\sin 144^\circ}{\sin 36^\circ} = \frac{1}{4} \frac{\sin(180^\circ - 36^\circ)}{\sin 36^\circ} = \frac{1}{4}$$



به کمک متمم زوایای داده شده، سینوس را به کسینوس تبدیل می‌کنیم:

$$\left. \begin{aligned} \sin \frac{\pi}{18} &= \cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{18}\right) = \cos \frac{4\pi}{9} \\ \sin \frac{5\pi}{18} &= \cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{5\pi}{18}\right) = \cos \frac{2\pi}{9} \\ \sin \frac{7\pi}{18} &= \cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{7\pi}{18}\right) = \cos \frac{\pi}{9} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \cos \frac{\pi}{9} \cos \frac{2\pi}{9} \cos \frac{4\pi}{9} = ?$$

عبارت فوق را در  $\sin \frac{\pi}{9}$  ضرب و تقسیم می‌کنیم:

$$\frac{\underbrace{\frac{1}{8} \cdot \frac{8\pi}{9}}_{\frac{1}{8} \sin \frac{8\pi}{9}} \cdot \underbrace{\frac{1}{4} \sin \frac{4\pi}{9}}_{\frac{1}{4} \sin \frac{4\pi}{9}} \cdot \underbrace{\frac{1}{2} \sin \frac{2\pi}{9}}_{\frac{1}{2} \sin \frac{2\pi}{9}}}{\sin \frac{\pi}{9} \cos \frac{\pi}{9} \cos \frac{2\pi}{9} \cos \frac{4\pi}{9}} = \frac{\frac{1}{8} \sin(\pi - \frac{\pi}{9})}{\sin \frac{\pi}{9}} = \frac{\frac{1}{8} \sin \frac{\pi}{9}}{\sin \frac{\pi}{9}} = \frac{1}{8}$$

گروه آموزشی ماز

۱۶- اگر  $\frac{5\pi}{4} < 2x < 2\pi$  و  $\tan^2 x + \cot^2 x = 14$  باشد، حاصل  $\cos x - \sin x$  کدام است؟

$-\frac{\sqrt{2}}{2}$  (۴)

$\frac{\sqrt{2}}{2}$  (۳)

$-\frac{\sqrt{2}}{4}$  (۲)

$\frac{\sqrt{2}}{4}$  (۱)

(متوسط - مفهومی / محاسباتی - ۱۱۰۴)

پاسخ: گزینه ۴

یه یادآوری از بحث اتحادها داشته باشیم، تا خیلی مثلثاتی نشید!

اتحاد جاق و لاغر:

$$a^x \pm b^x = (a \pm b)(a^x \mp ab + b^x)$$

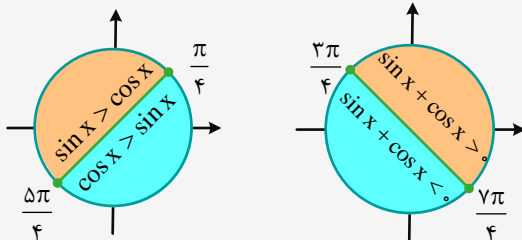
وایسا، نرو!

اگر در سوالی مقدار  $\sin \alpha \pm \cos \alpha$  داده یا خواسته شود، بهترین راه به توان ۲ رساندن است، مثلاً می‌خواهیم مقدار  $\sin 15^\circ + \cos 15^\circ$  را بیابیم:

$$\sin 15^\circ + \cos 15^\circ = A \xrightarrow{A > 0} \sin^2 15^\circ + \cos^2 15^\circ + 2 \sin 15^\circ \cos 15^\circ = A^2 \Rightarrow 1 + \frac{1}{2} = A^2 \Rightarrow A = \frac{\sqrt{6}}{2}$$

کجا باین عجله، هنوز نکته داریم ها!

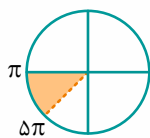
دایره‌های طلایی:



پاسخ سریعی

$$\tan^2 x + \cot^2 x = 14 \Rightarrow (\tan x + \cot x)^2 - 2 \tan x \cot x = 14 \Rightarrow (\tan x + \cot x)^2 = 16 \xrightarrow{\sqrt{\quad}} \tan x + \cot x = \pm 4$$

وقتی  $2\pi < 2x < \frac{5\pi}{4}$ ، پس  $\frac{5\pi}{4} < x < \pi$  است، یعنی ناحیه رنگی در دایره زیر:



$$\Rightarrow \begin{cases} (1) \text{ ناحیه سوم} \Rightarrow \tan x, \cot x > 0 \Rightarrow \tan x + \cot x = 4 \\ (2) \sin x > \cos x \Rightarrow \cos x - \sin x < 0 \quad (*) \end{cases}$$

$$\frac{\sin x}{\cos x} + \frac{\cos x}{\sin x} = 4 \Rightarrow \frac{1}{\sin x \cos x} = 4 \Rightarrow \boxed{\sin x \cos x = \frac{1}{4}}$$

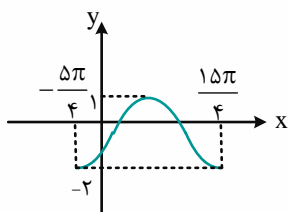
از رابطه  $\tan x + \cot x = 4$  داریم:

حالا برای یافتن  $\cos x - \sin x$  داریم:

$$\cos x - \sin x = A \xrightarrow{\text{توان } 2} \sin^2 x + \cos^2 x - 2 \sin x \cos x = A^2$$

$$\Rightarrow 1 - 2\left(\frac{1}{4}\right) = A^2 \Rightarrow A^2 = \frac{1}{2} \Rightarrow A = \pm \frac{1}{\sqrt{2}} \xrightarrow{A < 0} A = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

گروه آموزشی ماز



۱۷- شکل زیر، نمودار تابع  $y = a \sin^2(bx - \frac{\pi}{4}) + c$  را در یک بازه تناوب نشان می‌دهد. مقدار  $ab$  کدام است؟

- (۱) ۳/۰
- (۲) ۳/۰
- (۳) ۶/۰
- (۴) ۶/۰

پاسخ: گزینه ۴ (متوسط - مفهومی / محاسباتی - ۱۴۰۲)

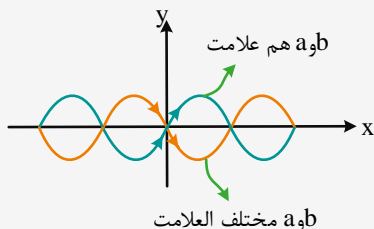
حالا که نمودار  $\cos$  رو گفتیم، بهتره که نمودار  $\sin$  رو هم بگیریم!

نمودار  $y = a \sin bx + c$

(۱) دوره تناوب  $T = \frac{2\pi}{|b|}$  است.

(۲) اگر  $a$  و  $b$  هم علامت باشند ( $ab > 0$ )، نمودار، محور  $y$ ها را با شیب مثبت (صعودی) قطع می‌کند.

(۳) اگر  $a$  و  $b$  مختلف علامت باشند ( $ab < 0$ )، نمودار، محور  $y$ ها را با شیب منفی (نزولی) قطع می‌کند.



$$\begin{cases} \max = |a| + c \\ \min = -|a| + c \end{cases} \quad (4)$$

پاسخ تشریحی:

ضابطه تابع را با استفاده از فرمول طلایی ساده می‌کنیم:

$$\sin^2 \alpha = \frac{1 - \cos 2\alpha}{2}$$

$$f(x) = a \sin^2(bx - \frac{\pi}{4}) + c = a \left( \frac{1 - \cos 2(bx - \frac{\pi}{4})}{2} \right) + c = a \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos(2bx - \frac{\pi}{2}) \right) + c \Rightarrow f(x) = -\frac{a}{2} \sin(2bx) + \frac{a}{2} + c$$

طبق نمودار:

$$\begin{cases} \max = 1 \Rightarrow \left| \frac{a}{2} \right| + \frac{a}{2} + c = 1 \\ \min = -2 \Rightarrow -\left| \frac{a}{2} \right| + \frac{a}{2} + c = -2 \end{cases} \xrightarrow{\text{تفاضل}} 2 \left| \frac{a}{2} \right| = 3 \Rightarrow a = \pm 3$$

اولاً:

$$T = \frac{15\pi}{4} - \left(-\frac{5\pi}{4}\right) = \Delta\pi \Rightarrow \frac{2\pi}{|2b|} = \Delta\pi \Rightarrow b = \pm \frac{1}{\Delta}$$

ثانیاً:

چون نمودار، محور  $y$ ها را با شیب مثبت قطع کرده، پس  $-\frac{a}{b}$  و  $2b$  هم علامت هستند، یعنی  $a$  و  $b$  مختلف‌العلامت می‌باشند، یعنی  $ab < 0$ ، پس  $ab = -\frac{3}{5} = -0.6$  می‌باشد.

گروه آموزشی ماز

۱۸- اگر  $f(x) = \tan x$  و  $g(x) = \tan(\frac{2\pi}{3} + x)$  باشند، دوره تناوب تابع  $y = (f - g)(x)$  کدام است؟

- (۱)  $\pi$       (۲)  $\frac{\pi}{2}$       (۳)  $\frac{3\pi}{2}$       (۴)  $2\pi$

(متوسط - محاسباتی - ۱۴۰۲)

پاسخ: گزینه ۱

پاسخ تشریحی:

ابتدا  $(f - g)(x)$  را به دست می‌آوریم و سپس دوره تناوب آن را مشخص می‌کنیم:

$$(f - g)(x) = f(x) - g(x) = \tan x - \tan(\frac{2\pi}{3} + x) = \tan x + \cot x = \frac{2}{\sin 2x}$$

دوره تناوب  $= \frac{2\pi}{2} = \pi$

گروه آموزشی ماز

۱۹- جواب کلی معادله مثلثاتی  $1 = 2\cos^2 x + 2\sin(\pi + x)\sin(\frac{\pi}{4} + x)$  کدام است؟

- (۱)  $k\pi + \frac{\pi}{8}$       (۲)  $\frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{8}$       (۳)  $k\pi + \frac{\pi}{4}$       (۴)  $\frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{4}$

(متوسط - ترکیبی / محاسباتی - ۱۴۰۲)

پاسخ: گزینه ۲

معادلات مثلثاتی رو که باید فوول فوول باشین! روابط دو برابر کمان هم که از نون شب تو مثلثات واجب‌تره!

دو معادله خاص:

$\sin \alpha = \cos \alpha$  یعنی  $\rightarrow \tan \alpha = 1 \Rightarrow \alpha = k\pi + \frac{\pi}{4}$

$\sin \alpha = -\cos \alpha$  یعنی  $\rightarrow \tan \alpha = -1 \Rightarrow \alpha = k\pi - \frac{\pi}{4}$

روابط دو برابر کمان:

$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$

$\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1 = 1 - 2 \sin^2 \alpha$

پاسخ تشریحی:

$\sin(\pi + x) = -\sin x$  ,  $\sin(\frac{\pi}{4} + x) = \cos x$

می‌دانیم:

حالا معادله را ساده‌تر می‌نویسیم:

$2 \cos^2 x + 2 \sin(\pi + x) \sin(\frac{\pi}{4} + x) = 1 \Rightarrow 2 \cos^2 x - 2 \sin x \cos x = 1$

$\Rightarrow 2 \cos^2 x - 1 = 2 \sin x \cos x \Rightarrow \cos 2x = \sin 2x$  یعنی  $\rightarrow \tan 2x = 1$

$\Rightarrow 2x = k\pi + \frac{\pi}{4} \Rightarrow x = \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{8}$

گروه آموزشی ماز

۲۰- مجموع جواب‌های معادله مثلثاتی  $\tan 2x = 3 \tan x$  در بازه  $\left[-\frac{\pi}{4}, \pi\right]$  کدام است؟

$\frac{7\pi}{6}$  (۴)

$2\pi$  (۳)

$\pi$  (۲)

$\frac{11\pi}{6}$  (۱)

پاسخ: گزینه ۱ (متوسط - مفهومی / محاسباتی - ۱۲۰۲)

اینم به پکیج دیگه از تانژانت!

تانژانت دو برابر کمان:

$$\tan 2\alpha = \frac{2 \tan \alpha}{1 - \tan^2 \alpha}$$

معادله مثلثاتی شامل تانژانت:

$$\tan x = \tan \alpha \Rightarrow x = k\pi + \alpha$$

پاسخ تشریحی:

$$\tan 2x = 3 \tan x \Rightarrow \frac{2 \tan x}{1 - \tan^2 x} = 3 \tan x$$

اولاً: جواب‌های  $\tan x = 0 \Rightarrow x = k\pi$  (ریشه‌های مشترک دو طرف تساوی) را می‌یابیم.

ثانیاً: از طرفین  $\tan x$  را ساده می‌کنیم:

$$\frac{2}{1 - \tan^2 x} = 3 \Rightarrow \tan^2 x = \frac{1}{3} \Rightarrow \tan x = \pm \frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow x = k\pi \pm \frac{\pi}{6}$$

$$x = k\pi \xrightarrow{x \in \left[-\frac{\pi}{4}, \pi\right]} x = 0, \pi$$

$$x = k\pi \pm \frac{\pi}{6} \xrightarrow{x \in \left[-\frac{\pi}{4}, \pi\right]} x = -\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}$$

حالا جواب‌های معادله را در بازه  $\left[-\frac{\pi}{4}, \pi\right]$  می‌یابیم:

مجموع جواب‌ها =  $\frac{11\pi}{6}$

گروه آموزشی ماز



**سلام بر مازی‌ها!**

تو این بخش، دو مبحث قرار گرفتند، یکی دایره و یکی هم تبدیل‌های هندسی، که می‌شن فصل اول و دوم کتاب هندسه یازدهم. (البته یک بخش به نام دایره هم در فصل دوم هندسه ۳ داریم!)

طراحان کنکور خیلی به دایره علاقه دارن. از فصل اول بی‌شک دو تست در کنکور داریم که یا مستقیم از همین فصل و یا ترکیبی خواهد بود. در این فصل، دانستن انواع زاویه‌ها، مفاهیم و روابط طولی و هر آنچه تا قبل از چندضلعی‌های محیطی و محاطی آمده است، می‌تواند یک قسمت از آزمون سراسری را به خودش اختصاص دهد، اما بریم سر اصل مطلب و آن چیزی نیست جز چندضلعی‌های محیطی و محاطی. خب بچه‌ها ۱۰۰۰ بار این قسمت رو کار کنین که حسابی ملکه ذهنتون بشه.

اما در فصل دوم با روی دیگری از هندسه آشنا می‌شیم. جایی که یاد می‌گیریم تبدیل به چه معنی است، انتقال، دوران، بازتاب و تجانس چه کاربردهایی دارن و اصلاً چی هستن!

**پیش‌نیازهای مطالعه این بخش چه مباحثی هستند؟**

این دو بخش (دایره و تبدیل) عملاً پیش‌نیاز خاصی ندارن و می‌تونید با خیال راحت شروع به مطالعه این بخش‌ها کنید، اما اگر خیلی وسواسی هستید، می‌تونید یه سر به فصل ۹ کتاب ریاضی هشتم برای مرور دایره بزنید.

**این دو فصل در کدام قسمت‌ها کاربرد دارند؟**

اول خیالت رو در مورد فصل دوم راحت کنیم، این فصل تقریباً در بخش‌های دیگر سوالات کنکور کاربردی نداره، اما فصل اول (یعنی دایره)، احتمال ترکیب شدن با مسائل دیگر از جمله تشابه، تجانس در فصل ۲ و مباحث فصل دوم هندسه ۳ را خواهد داشت.

**از این بخش در کنکور سال‌های قبل چه تعداد سوال طرح شده است؟ این سوالات از چه موضوعاتی بوده؟**

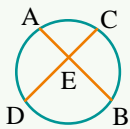
۱۴۰۳ (اردیبهشت)	۱۴۰۲	۱۴۰۱ (دی)	۱۴۰۱	۱۴۰۰	۱۳۹۹	۱۳۹۸
۲	۲	۲	۴	۶	۵	۴
روابط طولی در دایره ویژگی‌های تبدیل‌های هندسی	زاویه‌ها در دایره دایره محاطی خارجی مثلث	چندضلعی محیطی و محاطی چندضلعی محیطی و محاطی	زاویه‌ها در دایره چندضلعی‌های محیطی و محاطی وضعیت دو دایره نسبت به هم بازتاب	انتقال (ترکیب با فصل ۲ هندسه ۱) چندضلعی‌های محیطی و محاطی (ترکیب با فصل ۳ هندسه ۲) زاویه‌ها در دایره روابط طولی در دایره چندضلعی‌های محیطی و محاطی (ترکیب با فصل ۳ هندسه ۱) وضعیت دو دایره نسبت به هم	چندضلعی محیطی و محاطی روابط طولی در دایره (ترکیب با فصل ۲ هندسه ۱) مسائل پیدا کردن کوتاه‌ترین مسیر زاویه‌ها در دایره (ترکیب با فصل ۲ هندسه ۱) چندضلعی‌های محیطی و محاطی (ترکیب با فصل ۳ هندسه ۲)	زاویه‌ها در دایره چندضلعی‌های محیطی و محاطی چندضلعی‌های محیطی و محاطی دوران

**پیش‌بینی شما برای کنکور سال آینده چیه؟**

با توجه به کم شدن تعداد سوالات ریاضی در کنکور و با روند مشاهده شده در جدول، انتظار حداقل ۱ سوال از فصل دایره و صفر الی یک سوال از فصل تبدیل‌های هندسی را می‌توان داشت.

- ۲۱- دوزنقه محاطی ای را در نظر بگیرید که از مرکز دایره به نقاط  $A$  و  $B$  که دو سر یک ساق آن هستند وصل کرده ایم. اگر  $O$  مرکز دایره و زاویه  $\widehat{AOB} = 70^\circ$  و محل برخورد دو قطر دوزنقه نقطه  $P$  باشد، زاویه  $\widehat{APB}$  کدام است؟
- ۱)  $35^\circ$       ۲)  $70^\circ$       ۳)  $90^\circ$       ۴)  $140^\circ$

پاسخ: گزینه ۲ (متوسط - مفهومی / محاسباتی - ۱۱۰)



$$\widehat{BED} = \frac{\widehat{BD} + \widehat{AC}}{2}, \quad \widehat{AED} = \frac{\widehat{AD} + \widehat{BC}}{2}$$

یکی از زاویه‌ها در دایره براتون بگیریم!

اگر دو وتر  $AB$  و  $CD$  یکدیگر را در نقطه  $E$  قطع کنند، داریم:

پاسخ تشریحی:

طبق توضیحات داده شده خواهیم داشت:

$$\widehat{O} = 70^\circ \Rightarrow \widehat{AOB} = \widehat{AB} = 70^\circ$$

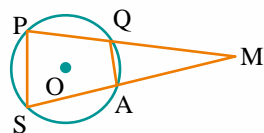
$$\widehat{APB} = \frac{\widehat{AB} + \widehat{CD}}{2} \xrightarrow[\widehat{AB} = \widehat{CD}]{\text{کمان‌های محصور بین وترهای موازی، با هم برابرند.}} \widehat{APB} = \widehat{AB}$$

$$\widehat{APB} = \widehat{AB} = 70^\circ$$



گروه آموزشی ماز

- ۲۲- در دایره شکل مقابل، وتر  $PQ = AQ = R$  است. اگر  $O$  مرکز و شعاع دایره باشد و زاویه  $\widehat{M} = 35^\circ$  باشد، زاویه کمان  $AS$  را به دست آورید؟



- ۱)  $55^\circ$   
۲)  $110^\circ$   
۳)  $120^\circ$   
۴)  $135^\circ$

پاسخ: گزینه ۲ (متوسط - مفهومی / محاسباتی - ۱۱۰)

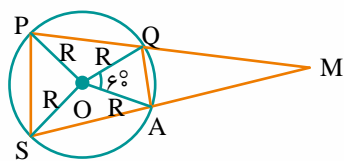
دوباره می‌خواهیم از زاویه‌ها در دایره براتون بگیریم! کلاً خیلی به زاویه‌ها توجه داریم!

اگر امتداد دو وتر  $AB$  و  $CD$  یکدیگر را در نقطه  $E$  قطع کنند، داریم:

$$\widehat{AEC} = \frac{\widehat{BD} - \widehat{AC}}{2}$$

پاسخ تشریحی:

با توجه به توضیحات داده شده، خواهیم داشت:



$$OA = OQ = AQ = R \Rightarrow \widehat{O} = 60^\circ \Rightarrow \widehat{AQ} = 60^\circ$$

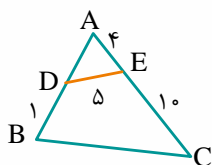
$$\widehat{PQ} = 60^\circ \text{ به همین ترتیب}$$

$$\widehat{M} = \frac{\widehat{PS} - \widehat{AQ}}{2} \Rightarrow 35^\circ = \frac{\widehat{PS} - 60^\circ}{2} \Rightarrow \widehat{PS} = 130^\circ$$

$$\widehat{AS} = 360^\circ - (\widehat{PS} + \widehat{PQ} + \widehat{AQ}) = 360^\circ - (130^\circ + 60^\circ + 60^\circ) = 110^\circ$$

گروه آموزشی ماز

- ۲۳- در شکل زیر، می‌توان دایره‌ای از رئوس  $DECB$  گذراند. طول  $BC$  کدام است؟



- ۱) ۷  
۲) ۶  
۳) ۱۴  
۴) ۱۰

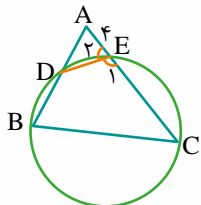
پاسخ: گزینه ۴ (متوسط - ترکیبی / محاسباتی - ۱۱۰۱)

۴ ضلعی محاطی چه ویژگی معروفی دارد؟! 

اگر در هر چهارضلعی، مجموع زوایای روبه‌رو  $180^\circ$  باشد، آن‌گاه محاطی است و بالعکس.

پاسخ تشریحی:

چهارضلعی DECB محاطی است، در نتیجه جمع دو زاویه مقابل آن  $180^\circ$  است.



$$\begin{cases} \hat{E}_1 + \hat{B} = 180^\circ \\ \hat{E}_1 + \hat{E}_2 = 180^\circ \end{cases} \Rightarrow \hat{B} = \hat{E}_2$$

$$\hat{B} = \hat{E}_2 \Rightarrow \triangle ADE \sim \triangle ABC$$

$$\hat{A} = \hat{A}$$

$$\frac{DE}{BC} = \frac{AD}{AC} = \frac{AE}{AB} \Rightarrow \frac{5}{BC} = \frac{x}{14} = \frac{4}{x+1}$$

$$x^2 + x - 56 = 0 \Rightarrow (x+8)(x-7) = 0 \Rightarrow x=7$$

$$\frac{5}{BC} = \frac{7}{14} \Rightarrow BC = \frac{5 \times 14}{7} = 10$$

گروه آموزشی ماز

۲۴ - دایره C با مرکز  $O(-1, 1)$  و شعاع ۴ و دایره  $C'$  با مرکز  $O'(3, 4)$  و شعاع ۱۰ واحد مفروض‌اند. مساحت بزرگ‌ترین دایره‌ای که بر هر دو دایره مماس باشد، کدام است؟

$400\pi (4)$

$\frac{361}{4} \pi (3)$

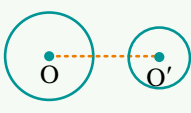
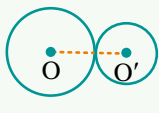
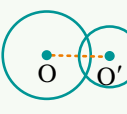



$\frac{121}{4} \pi (2)$

$36\pi (1)$

پاسخ: گزینه ۳ (متوسط - مفهومی / محاسباتی - ۱۱۰۱)

دو دایره نسبت به هم چه حالت‌هایی می‌توان داشته باشند؟! 

برای دو دایره  $(O, R)$  و  $(O', R')$  داریم:  $d = OO'$

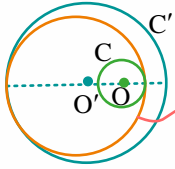
	$d > R + R'$	دو دایره بیرون هم (متخارج)
	$d = R + R'$	دو دایره مماس بیرون
	$R - R' < d < R + R'$	دو دایره متقاطع
	$d = R - R'$	دو دایره مماس درون
	$d < R - R'$	دو دایره متداخل
	$d = 0$	دایره‌های هم‌مرکز

ابتدا وضعیت دو دایره را بررسی می‌کنیم:

$$d = |OO'| = \sqrt{(-1-3)^2 + (1-4)^2} = \sqrt{16+9} = 5$$

$$0 < 5 < |4-10| \xrightarrow{\text{یعنی}} 0 < d < |R-R'|$$

در نتیجه دو دایره متداخل هستند و طبق شکل، شعاع بزرگ‌ترین دایره‌ای که بر هر دو دایره مماس باشد، برابر است با:



$$2r = d + R + R' = 5 + 4 + 10 = 19 \Rightarrow r = \frac{19}{2} = 9.5$$

$$S = \pi r^2 = \frac{361}{4} \pi = 90.25\pi$$

گروه آموزشی ماز

۲۵- در مثلث دلخواه  $ABC$ ، نیمساز زاویه  $\hat{A}$  و عمودمنصف ضلع  $BC$  یکدیگر را در نقطه  $O$  قطع کرده‌اند. چه تعداد از گزاره‌های زیر صحیح است؟

- نقطه  $O$  روی دایره محیطی مثلث  $ABC$  است.
- فاصله  $O$  از دو رأس  $B$  و  $C$  یکسان است.
- $O$  همواره خارج مثلث  $ABC$  قرار دارد.
- چهارضلعی  $ABOC$  همواره محاطی است.

۴ (۴)

۳ (۳)

۲ (۲)

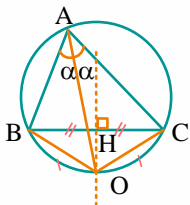
۱ (۱)

پاسخ: گزینه ۴ (متوسط - مفهومی - ۱۱۰۱)

بچه‌ها! این نکته دقیقاً متن تمرین ۳ صفحه ۲۹ کتاب درسیه! چه جالب!

در هر مثلث دلخواه، نیمساز هر زاویه داخلی و عمودمنصف ضلع مقابل به آن زاویه، روی دایره محیطی مثلث یکدیگر را قطع می‌کنند.

بنابراین با توجه به توضیحات گفته شده، هر ۴ گزاره صحیح است.



گروه آموزشی ماز

۲۶- در مثلث متساوی‌الاضلاع  $ABC$ ، اگر شعاع دایره محاطی داخلی برابر ۴ باشد، مجموع ارتفاع مثلث و شعاع دایره محیطی کدام است؟

۲۲ (۴)

۲۰ (۳)

۱۰ (۲)

$4\sqrt{3}$  (۱)

پاسخ: گزینه ۳ (متوسط - مفهومی / محاسباتی - ۱۱۰۱)

نکته‌ای پر از فرمول!

اگر در مثلث متساوی‌الاضلاع، طول هر ضلع برابر  $a$  باشد و  $h$  ارتفاع آن و  $r$  شعاع دایره محاطی داخلی و  $R$  شعاع دایره محیطی باشد، آن‌گاه:

$$h = a \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad r = \frac{S}{P} = \frac{a^2 \frac{\sqrt{3}}{4}}{\frac{3a}{2}} = \frac{a}{2\sqrt{3}}, \quad R = \frac{abc}{4S} = \frac{a^3}{4a^2 \frac{\sqrt{3}}{4}} = \frac{a}{\sqrt{3}}$$

در هر مثلث متساوی‌الاضلاع بین شعاع دایره محاطی داخلی « $r$ »، شعاع دایره محیطی « $R$ » و ارتفاع مثلث « $h$ » رابطه زیر برقرار است:

$$\frac{r}{1} = \frac{R}{2} = \frac{h}{3} \Rightarrow \frac{4}{1} = \frac{R}{2} = \frac{h}{3} \Rightarrow \begin{cases} R = 8 \\ h = 12 \end{cases} \Rightarrow R + h = 20$$

گروه آموزشی ماز

۲۷- در مثلث دلخواه  $\triangle ABC$ ، میانگین شعاع‌های دایره‌های محاطی خارجی مثلث برابر ۵ و مساحت مثلث ۳ برابر محیط آن است. مساحت دایره محیطی کدام است؟

$$\frac{81}{16} \pi \quad (4)$$

$$9\pi \quad (3)$$

$$16\pi \quad (2)$$

$$\frac{25}{9} \pi \quad (1)$$

(سخت - مفهومی / محاسباتی - ۱۱۰۱)

پاسخ: گزینه ۴

پاسخ تشریحی:

اولاً می‌دانیم شعاع دایره محاطی داخلی از رابطه  $r = \frac{S}{P}$  به دست می‌آید. در نتیجه:

$$S = 3(2P) \Rightarrow \frac{S}{P} = 6 \Rightarrow r = 6$$

$$\text{از طرفی: } \frac{r_a + r_b + r_c}{3} = 5 \Rightarrow r_a + r_b + r_c = 15$$

عمر آگه‌لنگه این فرمول رو پیدا کنین!

در هر مثلث دلخواه  $\triangle ABC$ ، اگر  $r_a$  و  $r_b$  و  $r_c$  شعاع‌های دایره‌های محاطی خارجی مثلث،  $r$  شعاع دایره داخلی مثلث و  $R$  شعاع دایره محیطی مثلث باشد:

$$r_a + r_b + r_c = 4R + r$$

$$\Rightarrow 15 = 4R + 6 \Rightarrow R = \frac{9}{4} \Rightarrow S = \frac{81}{16} \pi$$

گروه آموزشی ماز

۲۸- نقاط  $A(-2, 5)$ ،  $B(2, -1)$  در طرفین محور  $x$  قرار دارند و نقطه  $M$  روی محور  $x$ ها می‌لغزد. بیشترین مقدار  $|AM - MB|$  کدام است و به وسیله کدام تبدیل می‌توان آن را به دست آورد؟

$$(4) - 6 \text{ انتقال}$$

$$(3) - 6 \text{ بازتاب}$$

$$(2) - 4\sqrt{2} \text{ انتقال}$$

$$(1) - 4\sqrt{2} \text{ بازتاب}$$

(متوسط - مفهومی / محاسباتی - ۱۱۰۲)

پاسخ: گزینه ۱

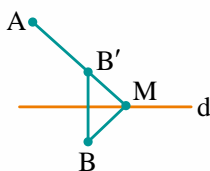
پاسخ تشریحی:

کافی است بازتاب نقطه  $B$  نسبت به خط  $d$  یعنی  $B'$  را پیدا کنیم و از  $A$  به  $B'$  وصل کنیم تا امتداد آن، خط  $d$  را در  $M$  قطع کند، در این صورت:

$$\max |AM - MB| = AM - MB' = |AB'|$$

قرینه  $B$  نسبت به  $x$ ها  $B'(2, 1)$

$$\Rightarrow |AB'| = \sqrt{(-2-2)^2 + (5-1)^2} = \sqrt{16+16} = \sqrt{32} = 4\sqrt{2}$$



تذکر: خط  $d$ ، همان محور  $x$ هاست.

گروه آموزشی ماز

۲۹- نقاط  $A(2, 6)$  و  $B(4, 10)$  در صفحه محورهای مختصات مفروض اند. دو نقطه  $M$  و  $N$  همواره روی دو محور می‌لغزند. کمترین طول خط شکسته  $AMNB$  کدام است؟

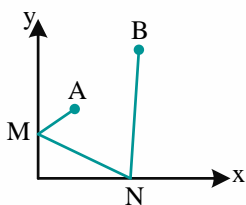
کدام است؟

$$7\sqrt{14} \quad (1)$$

$$2\sqrt{5} \quad (2)$$

$$2\sqrt{73} \quad (3)$$

$$5\sqrt{14} \quad (4)$$



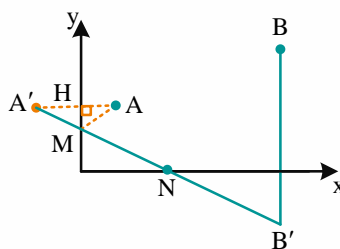
پاسخ: گزینه ۳ (متوسط - مفهومی / محاسباتی - ۱۱۰۲)

پاسخ تشریحی

$$A(2, 6) \Rightarrow A'(-2, 6)$$

$$B(4, 10) \Rightarrow B'(4, -10)$$

$$\min(AMNB) = |A'B'| = \sqrt{(-2-4)^2 + (6-(-10))^2} = \sqrt{36+256} = \sqrt{292} = 2\sqrt{73}$$



گروه آموزشی ماز

- ۳۰- اگر دو دایره متمایز شعاع‌های برابر داشته باشند و بدانیم مجانس یکدیگرند، کدام گزینه نادرست است؟
- ۱) مرکز تجانس فقط می‌تواند در فاصله بین دو مرکز دایره باشد.
  - ۲) نسبت تجانس، نسبت شعاع‌های دو دایره است.
  - ۳) مرکز تجانس، نقطه تماس دو دایره یا محل برخورد مماس مشترک‌های داخلی دو دایره است.
  - ۴) اگر دو دایره مجانس مستقیم یکدیگر باشند، مرکز تجانس محل برخورد مماس مشترک‌های خارجی دو دایره است.

پاسخ: گزینه ۴ (متوسط - مفهومی - ۱۱۰۲)

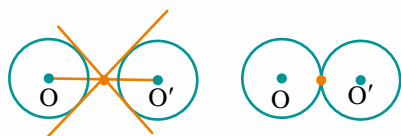
تجانس مستقیم و معکوس دیگر چی بود؟!

در تجانس به مرکز O و نسبت k:

اگر  $k > 0$  تجانس را تجانس مستقیم گویند و اگر  $k < 0$  تجانس را تجانس معکوس گویند.

بررسی گزینه‌ها:

- ۱) گزینه «۱» درست است، زیرا اگر شعاع‌های دو دایره برابر باشند، فقط می‌توانند مجانس معکوس یکدیگر باشند که مرکز تجانس بین دو مرکز می‌باشد.
- ۲) گزینه «۲» نیز درست است، نسبت تجانس، نسبت شعاع‌های دو دایره است.
- ۳) گزینه «۳» نیز درست است.



- ۴) گزینه «۴» نادرست است، زیرا اگر شعاع دو دایره برابر باشد، نمی‌توانند مجانس مستقیم یکدیگر باشند.

گروه آموزشی ماز

و در آخر گسسته!

سلامی دوباره!!!

بالاخره رسیدیم به درس شیرین و چالشی گسسته، توی این آزمون فقط فصل یک رو با هم بررسی می‌کنیم. این فصل از ۳ قسمت تشکیل شده به نام‌های استدلال، بخش پذیری و هم‌نهمی.

در بخش اول با چند نوع استدلال آشنا می‌شیم. این استدلال‌ها شامل ۱) اثبات مستقیم ۲) مثال نقض ۳) اثبات با در نظر گرفتن همه حالت‌ها ۴) برهان خلف (استدلال غیرمستقیم) ۵) اثبات بازگشتی هستند.

در بخش دوم در مورد چند موضوع صحبت می‌کنیم که مهم‌ترین آن‌ها عاد کردن است. موضوعات دیگر هم شامل بخش‌پذیری، ب.م.م و ک.م.م و قضیه تقسیم هست. دقت کنید که موضوعات بخش دوم به هم مربوطند و از هم جدا نیستند.

توی بخش سوم هم از هم‌نهمی و ویژگی‌های هم‌نهمی صحبت می‌کنیم. در ادامه به کاربردهای هم‌نهمی می‌رسیم که چند تا کاربرد توی کتاب بحث شده از جمله: ۱) پیدا کردن قواعد بخش‌پذیری بر اعداد مختلف ۲) جواب دادن به سوال‌هایی در مورد تقویم. در انتها هم به معادله هم‌نهمی و معادله سیاله می‌پردازیم.

**پیش‌نیازهای مطالعه این بخش چه مباحثی است؟**

این بخش، پیش‌نیاز خاصی نداره و می‌تونید با خیال راحت برید سراغشون و یادشون بگیرید! البته اگر قسمت ۱ از فصل ۱ آمار و احتمال رو به نگاهی بندازید، خالی از لطف نیست.

**مباحث این بخش در کدام قسمت‌ها کاربرد دارد؟**

مباحث این بخش در تست‌های کنکور دیگر بخش‌ها کاربرد چندانی ندارد و به عبارتی سوالات معمولاً به صورت غیرترکیبی از این بخش طرح می‌شوند.

**از این بخش در کنکور سال‌های قبل چه تعداد سوال طرح شده است؟ این سوالات از چه موضوعاتی بوده؟**

۱۴۰۳ (اردیبهشت)	۱۴۰۲	۱۴۰۱ (دی)	۱۴۰۱	۱۴۰۰	۱۳۹۹	۱۳۹۸
۲	۲	۲	۳	۶	۴	۴
استدلال ریاضی معادله سیاله	عاد کردن معادله سیاله	هم‌نهمی معادله سیاله	عاد کردن هم‌نهمی معادله سیاله	تجزیه به عوامل اول اعداد به صورت مربع کامل تجزیه به عوامل اول (ترکیب با فصل ۳ گسسته) هم‌نهمی قضیه تقسیم هم‌نهمی (ترکیب با فصل ۲ آمار و احتمال) هم‌نهمی	قضیه تقسیم ک.م.م و ب.م.م هم‌نهمی کاربرد هم‌نهمی (بررسی باقی‌مانده بر اعداد)	قضیه تقسیم عاد کردن و هم‌نهمی معادله سیاله هم‌نهمی

**پیش‌بینی شما برای کنکور سال آینده چیه؟**

با توجه به روند نزولی مشاهده شده و همچنین در نظر گرفتن این نکته که تعداد سوالات کنکور از ۵۵ به ۵۰ و سپس ۴۰ کاهش یافته است، می‌توان انتظار ۲ الی ۳ سوال را برای این بخش داشت.

۳۱- در اثبات نابرابری  $x^2(y^2+z^2+1)+y^2(z^2+1)+z^2 \geq 2xyz$  به شیوه بازگشتی برای هر سه عدد حقیقی  $x, y, z$ ، به کدام یک از روابط بدیهی زیر خواهیم رسید؟

$$(1) \quad (xy+z)^2 + (xz-y)^2 + (yz-x)^2 \geq 0$$

$$(2) \quad (xy-z)^2 + (xz-y)^2 + (yz-x)^2 \geq 0$$

$$(3) \quad (xy+z)^2 + (xz+y)^2 + (yz+x)^2 \geq 0$$

$$(4) \quad (xy+z)^2 + (xz+y)^2 + (yz-x)^2 \geq 0$$

پاسخ: گزینه ۱ (آسان - مفهومی / محاسباتی - ۱۲۰۱)

پاسخ تشریحی:

صورت سوال به فرم  $x^2y^2 + x^2z^2 + y^2z^2 + x^2 + y^2 + z^2 - 2xyz \geq 0$  قابل بازنویسی است. با توجه به این که در هر چهارگزینه تولید عبارت  $x^2y^2 + x^2z^2 + y^2z^2 + x^2 + y^2 + z^2$  مستقل از علامت‌های نوشته شده در درون پرانتزها صورت می‌گیرد، گزینه‌ای را انتخاب می‌کنیم که برآیند حاصل ضرب دو برابر مولفه اول در مولفه دوم درون سه پرانتز  $-2xyz$  باشد که در چهارگزینه، این برآیند به ترتیب برابر  $+2xyz, +6xyz, -6xyz, -2xyz$  است.

### گروه آموزشی ماز

۳۲- مجموعه A شامل ۵۴ عدد متمایز طبیعی است که حاصل ضرب آن ۵۴ عدد، زوج و مجموع آن ۵۴ عدد، فرد شده است. با حذف سه عدد a، b و c از آن مجموعه، حاصل ضرب ۵۱ عدد باقی‌مانده فرد شده است. حاصل عبارات  $a+b+c$  و  $a.b.c$  به ترتیب از راست به چپ کدام است؟

(۱) زوج-زوج (۲) زوج-فرد (۳) فرد-زوج (۴) فرد-فرد

پاسخ: گزینه ۱ (آسان - مفهومی - ۱۲۰۱)

نکاتی ساده و بدیهی!

A: مجموع و تفاضل دو عدد فرد ← عددی زوج  
B: اگر حاصل ضرب چند عدد زوج باشد ← حداقل یکی از آن اعداد، زوج است.

پاسخ تشریحی:

چون حاصل ضرب ۵۴ عدد اولیه زوج و حاصل ضرب ۵۱ عدد ثانویه فرد شده است معلوم می‌شود که تمام ۵۱ عدد ثانویه فرد بوده و در بین اعداد حذف شده یعنی a، b و c حداقل یک عدد زوج وجود داشته و زوج بودن  $a.b.c$  استنباط می‌شود. از طرف دیگر:

$$(a+b+c) + (\text{مجموع ۵۱ عدد ثانویه}) = (\text{مجموع ۵۴ عدد اولیه})$$

$$\text{زوج} = \text{فرد} + (a+b+c)$$

$$\Rightarrow (a+b+c) = \text{فرد} - \text{زوج}$$

پس گزینه ۱ پاسخ مسئله است.

### گروه آموزشی ماز

۳۳- سه عدد صحیح غیر صفر a، b و c چنانند که هر دو رابطه  $a|ab+c$  و  $a|ac+b$  برقرارند. کدام یک از روابط زیر حتماً برقرار است؟

(۱)  $c|a$  (۲)  $b|a$  (۳)  $b|c$  (۴)  $a|b$

پاسخ: گزینه ۴ (متوسط - مفهومی / محاسباتی - ۱۲۰۱)

یکی از خاصیت‌های عاد کردن رو با هم مرور کنیم!

$$A: \begin{cases} a|b \\ a|c \end{cases} \Rightarrow a|mb \pm nc \quad m, n \in \mathbb{Z}$$

پاسخ تشریحی:

$$\begin{cases} a|ab+c \\ a|ab \end{cases} \Rightarrow a|c$$

$$\begin{cases} c|ac+b \\ c|ac \end{cases} \Rightarrow c|b$$

$$\Rightarrow a|b$$

### گروه آموزشی ماز

۳۴- چند عدد طبیعی وجود دارد که در تقسیم بر ۷۳، باقی مانده از مربع خارج قسمت ۱۱ واحد بیش تر باشد؟

۹ (۱) ۸ (۲) ۷ (۳) ۶ (۴)

پاسخ: گزینه ۲ (متوسط - مفهومی / محاسباتی - ۱۴۰۱)

شیرجه بنزیم وسط قضیه تقسیم!!

قضیه تقسیم: اگر  $a$  عددی صحیح و  $b$  عددی طبیعی باشد، در این صورت، اعدادی صحیح و منحصر به فرد مانند  $q$  و  $r$  یافت می شوند به قسمی که  $a = bq + r$  و  $0 \leq r < b$ .



$$a = 73q + (q^2 + 11) \quad 0 \leq r < 73$$

$$\Rightarrow q^2 + 11 < 73 \Rightarrow q^2 < 62 \Rightarrow q \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$$

چون برای  $q$  به تعداد ۸ مقدار یافت شده به صورت تناظر یک به یک برای  $a$  هم ۸ مقدار یافت خواهد شد که همگی طبیعی می شوند.

گروه آموزشی ماز

۳۵- برای ۴ عدد صحیح و غیر صفر  $a, b, c, d$ ، اگر تساوی  $a+b=c, d$  برقرار باشد، آن گاه کدام یک از تساوی های زیر برقرار است؟ (منظور از  $(x, y)$  بزرگ ترین شمارنده مشترک  $x$  و  $y$  است)

(۱)  $(a, b) = (c, d)$

(۲)  $(a, c) = (b, d)$

(۳)  $(a, c) = (c, b)$

(۴)  $(a, b) = (b, c)$

پاسخ: گزینه ۳ (متوسط - مفهومی / محاسباتی - ۱۴۰۱)



برای رد درستی گزینه های ۱، ۲ و ۴، مثال نقض  $a = b = d = 6$  و  $c = 2$  وجود دارد.

اما برای اثبات درستی گزینه ۳، حاصل  $(a, c)$ ،  $(c, b)$  را به ترتیب  $\beta$  و  $\gamma$  نامیده و ثابت می کنیم:  $\beta = \gamma$

$$(a, c) = \beta \Rightarrow \left. \begin{array}{l} \beta | a \Rightarrow \beta | cd - b \\ \beta | c \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} \beta | b \\ \beta | c \end{array} \right\} \Rightarrow \beta | (b, c) \Rightarrow \beta | \gamma$$

به همین ترتیب ثابت می شود  $\beta | \gamma$  و از آن جا تساوی  $\beta = \gamma$  معلوم می شود.

البته هدف از طراحی سوال، اثبات درستی گزینه ۳ نبود، بلکه هدف، آن بوده است که برای گزینه های ۱، ۲ و ۴ مثال نقض پیدا کنید.

گروه آموزشی ماز

۳۶- چند عدد طبیعی مانند  $a$  وجود دارد به طوری که  $[a, 18] = 630$ ؟

۲ (۱) ۳ (۲) ۴ (۳) ۶ (۴)

پاسخ: گزینه ۴ (متوسط - مفهومی / محاسباتی - ۱۴۰۱)

نمونه محاسبه ک.م.م و ب.ل.د؟

برای محاسبه  $[a, b]$ ، ابتدا هر کدام از اعداد  $a$  و  $b$  را به عوامل اولشان تجزیه می کنیم. سپس حاصل ضرب (۱) اعداد با پایه های غیرمشترک و (۲) اعداد با پایه های مشترک و توان بزرگ تر را به عنوان ک.م.م  $a$  و  $b$  در نظر می گیریم.

مثال: حاصل  $[24, 90]$  چیست؟

$$24 = 2^3 \times 3^1 \quad 90 = 2^1 \times 3^2 \times 5^1$$

$2^3 \times 3^2$ : اعداد با پایه های مشترک و توان بزرگ تر  $5^1$ : اعداد با پایه های غیرمشترک

$$[24, 90] = 2^3 \times 3^2 \times 5^1$$

پاسخ:



$$[a, 2^1 \cdot 3^2] = 2^1 \times 3^2 \times 5^1 \times 7^1$$

عدد  $a$  عوامل  $2^1 \times 3^2 \times 5^1$  را حتماً داشته و هر شمارنده ای از  $2^1 \times 3^2$  را می تواند داشته باشد و یا نداشته باشد.

$$a_1 = 2^0 \times 3^0 \times 5^1 \times 7^1 = 35$$

$$a_2 = 2^1 \times 3^0 \times 5^1 \times 7^1 = 70$$

$$a_3 = 2^0 \times 3^1 \times 5^1 \times 7^1 = 105$$

$$a_4 = 2^1 \times 3^1 \times 5^1 \times 7^1 = 210$$

$$a_5 = 2^0 \times 3^2 \times 5^1 \times 7^1 = 315$$

$$a_6 = 2^1 \times 3^2 \times 5^1 \times 7^1 = 630$$

گروه آموزشی ماز

۳۷- چند عدد شش رقمی به صورت  $A = \overline{7xyx24}$  وجود دارد به طوری که مضرب ۹ بوده ولی مضرب ۱۱ نباشد؟

- ۱۰ (۱)      ۹ (۲)      ۸ (۳)      ۷ (۴)

(متوسط - مفهومی / محاسباتی - ۱۲۰۱)

پاسخ: گزینه ۱

چه اعدادی مضرب ۹ و چه اعدادی مضرب ۱۱ اند؟

مضرب ۹: اگر مجموع ارقام عددی بر ۹ بخش پذیر باشد، آن عدد مضرب ۹ است.  
مضرب ۱۱: اگر ارقام عددی را یکی در میان با هم جمع و تفریق کنیم و حاصل مضرب ۱۱ باشد، آن عدد مضرب ۱۱ است.



مجموعه اعداد به شکل فوق که مضرب ۹ باشند را X می نامیم:

$$A \equiv 0 \Rightarrow 7 + x + y + x + 2 + 4 \equiv 0 \Rightarrow 2x + y \equiv -13 \equiv 5 \Rightarrow 2x + y = 5 \text{ یا } 14 \text{ یا } 23$$

$$\Rightarrow (x, y) = (0, 5) \text{ یا } (1, 3) \text{ یا } (2, 1) \text{ یا } (3, 8) \text{ یا } (4, 6) \text{ یا } (5, 4) \text{ یا } (6, 2) \text{ یا } (7, 0) \text{ یا } (7, 9) \text{ یا } (8, 7) \text{ یا } (9, 5)$$

یعنی به ازای هر X فقط یک Y یافت می شود. (به غیر از  $x = 7$  که در این صورت برای Y، دو مقدار یافت می شود). بنابراین:  
مجموعه اعداد به شکل فوق که مضرب ۱۱ باشند را Y نامیده و  $|X \cap Y|$  را می یابیم:

$$A \equiv 0 \Rightarrow (4 + x + x) - (2 + y + 7) \equiv 0 \Rightarrow 2x - y \equiv 5$$

از بین ۱۱ حالت نوشته شده، فقط زوج مرتب (۷، ۹) هم نهشتی اخیر را برقرار می کند. بنابراین:

$$? = |X| - |X \cap Y| = 11 - 1 = 10$$

گروه آموزشی ماز

۳۸- کوچک ترین عدد طبیعی سه رقمی مانند X که در هر دو معادله سیاله  $5x + 3y = 71$  و  $9x + 5z = 101$  صدق کند، کدام رقم یکان را دارد؟

- ۴ (۱)      ۵ (۲)      ۷ (۳)      ۹ (۴)

(متوسط - مفهومی / محاسباتی - ۱۲۰۱)

پاسخ: گزینه ۴



$$\left. \begin{array}{l} 5x \equiv 71 \Rightarrow 2x \equiv 2 \Rightarrow x \equiv 1 \equiv 4 \\ 9x \equiv 101 \Rightarrow -x \equiv 1 \Rightarrow x \equiv -1 \equiv 4 \end{array} \right\} \Rightarrow x \equiv 4 \Rightarrow x = 15k + 4$$

کوچک ترین عدد طبیعی سه رقمی به فرم فوق عدد ۱۰۹ است.

گروه آموزشی ماز

۳۹- باقی مانده تقسیم عدد  $A = 6^{59} + 17^{59}$  بر ۲۳ چند واحد از باقی مانده تقسیم عدد  $7^{24}$  بر ۱۵ کم تر است؟

- ۵ (۴)      ۴ (۳)      ۳ (۲)      ۱ (۱)

(متوسط - مفهومی / محاسباتی - ۱۲۰۱)

پاسخ: گزینه ۱



$$17 \equiv -6 \Rightarrow 17^{59} \equiv (-6)^{59} \Rightarrow 17^{59} + 6^{59} \equiv 0$$

$$7^2 \equiv 4 \Rightarrow 7^4 \equiv 16 \equiv 1 \Rightarrow 7^{24} \equiv 1$$

$$\Rightarrow ? = 1 - 0 = 1$$

گروه آموزشی ماز

۴۰- اگر هر دو هم‌نهشتی  $۷۹۳ \equiv ۳۱۳$  و  $۴۵۱ \equiv ۳۱۳$  برقرار باشند، آن‌گاه مجموع ارقام بزرگ‌ترین مقدار ممکن برای  $m$  کدام است؟

۹ (۴)

۸ (۳)

۷ (۲)

۶ (۱)

(متوسط - مفهومی / محاسباتی - ۱۲۰۱)

پاسخ: گزینه ۳

گاهی اوقات از تعریف عبارات ریاضی هم سوال می‌اد، مثل این سوال:

**تعریف:** برای هر عدد طبیعی مانند  $m$  و هر دو عدد صحیح مانند  $a$  و  $b$ ، اگر  $m \mid a - b$ ، می‌گوییم « $a$  هم‌نهشت با  $b$  است به سنج یا پیمانه  $m$ » و می‌نویسیم  $a \equiv b \pmod{m}$ .  
تعریف رابطه هم‌نهشتی به پیمانه  $m$ ، به زبان ریاضی عبارت است از:

$$\forall a, b \in \mathbb{Z}, a \equiv b \pmod{m} \Leftrightarrow m \mid a - b (m \in \mathbb{N})$$

پاسخ سبزی

$$۴۵۱ \equiv ۳۱۳ \pmod{m+۲} \Rightarrow (m+۲) \mid ۱۳۸$$

$$\Rightarrow (m+۲) \in \{۱۳۸, ۶۹, ۴۶, ۲۳, ۶, ۳, ۲, ۱\}$$

$$\Rightarrow m \in \{۱۳۶, ۶۷, ۴۴, ۲۱, ۴, ۱\}$$

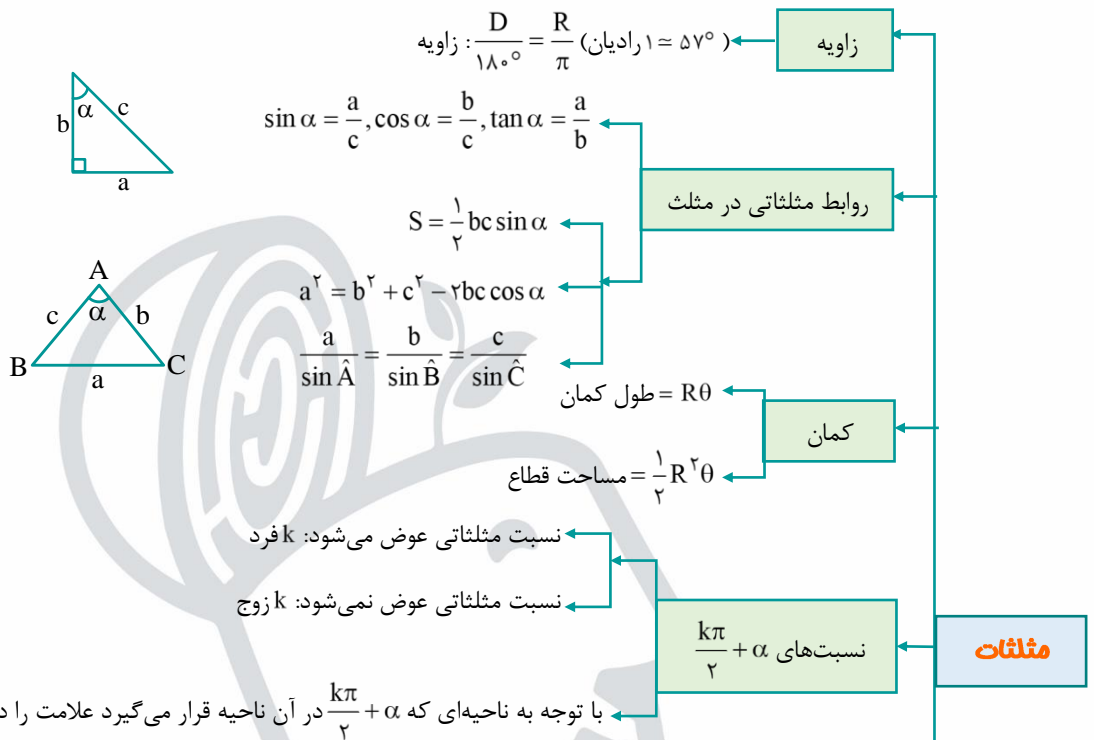
$$۷۹۳ \equiv ۱۶۳ \pmod{m+۱} \Rightarrow (m+۱) \mid ۶۳۰$$

اعداد ۶۷، ۱۳۶، ... را در رابطه دوم به ترتیب امتحان می‌کنیم. اولین  $m$  ای که در رابطه دوم صدق می‌کند  $m = ۴۴$  است که مجموع ارقامش ۸ می‌باشد.

گروه آموزشی ماز

جمع بندی سریع

فب فسته نباشیدا هالا بریم کل مباحث این آزمون رو به شکل نمودار درختی مرور کنیم تا به نقشه ذهنی فوب از این مباحث توی ذهنتون شکل بگیره!



اتحادهای اصلی:

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

$$1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$$

$$1 + \cot^2 x = \frac{1}{\sin^2 x}$$

$$\tan x \times \cot x = 1$$

نسبت‌های  $\alpha \pm \beta$ :

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin \alpha \cos \beta \pm \cos \alpha \sin \beta$$

$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos \alpha \cos \beta \mp \sin \alpha \sin \beta$$

$$\tan(\alpha \pm \beta) = \frac{\tan \alpha \pm \tan \beta}{1 \mp \tan \alpha \tan \beta}$$

نسبت‌های  $2\alpha$ :

$$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$$

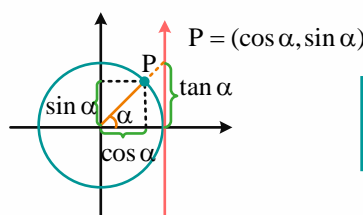
$$\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$$

$$\sin 2\alpha = \frac{2 \tan \alpha}{1 - \tan^2 \alpha}$$

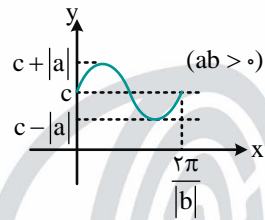
فرمول طلایی:

$$1 + \cos 2\alpha = 2 \cos^2 \alpha$$

$$1 - \cos 2\alpha = 2 \sin^2 \alpha$$

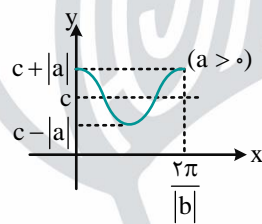


دایره مثلثاتی

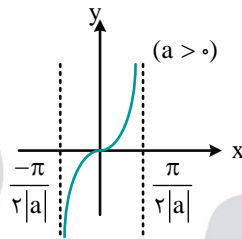


$$y = c + a \sin bx$$

$$\begin{cases} \max = c + |a| \\ \min = c - |a| \\ T = \frac{2\pi}{|b|} \end{cases}$$



$$y = c + a \cos bx$$



$$y = \tan ax$$

نمودارهای مثلثاتی

مثلات

$$\sin x = \sin \alpha \Rightarrow \begin{cases} x = 2k\pi + \alpha \\ x = 2k\pi + \pi - \alpha \end{cases}$$

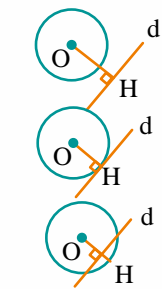
$$\cos x = \cos \alpha \Rightarrow x = 2k\pi \pm \alpha$$

$$\tan x = \tan \alpha \Rightarrow k\pi + \alpha$$

معادله مثلثاتی

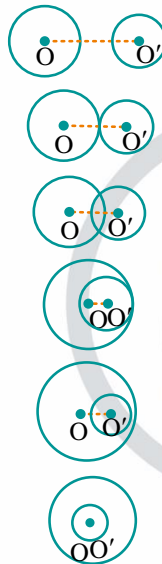
گروه آموزشی سازه

**دایره**



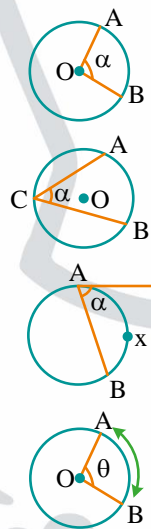
اوضاع نسبی خط و دایره

- خط خارج دایره:  $OH > r$
- خط مماس بر دایره:  $OH = r$
- خط داخل دایره:  $OH < r$



اوضاع نسبی دو دایره  $d = OO'$

- متخارج:  $d > R + R'$
- مماس بیرون:  $d = R + R'$
- متقاطع:  $|R - R'| < d < R + R'$
- مماس درون:  $d = |R - R'|$
- متداخل:  $d < |R - R'|$
- هم مرکز:  $d = 0$

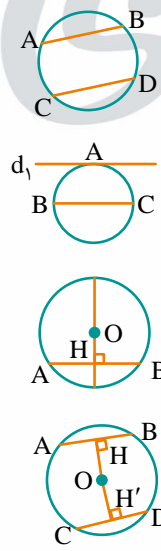


زاویه

- مرکزی:  $\alpha = \widehat{AB}$
- محاطی:  $\alpha = \frac{\widehat{AB}}{2}$
- ظلی:  $\alpha = \frac{\widehat{AXB}}{2}$

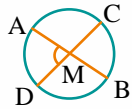
کمان و قطاع

- رادیان:  $L = r \cdot \theta$
- رادیان:  $S_{\text{قطاع } AOB} = r^2 \frac{\theta}{2}$

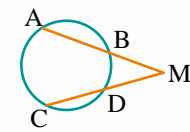


چند قضیه

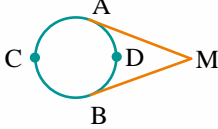
- وترهای موازی  $\Leftrightarrow$  کمان‌های برابر (۱)
- $AB \parallel CD \Leftrightarrow \widehat{AC} = \widehat{BD}$
- وترهای موازی  $\Leftrightarrow$  کمان‌های برابر (۲)
- $d_1 \parallel BC \Leftrightarrow \widehat{AC} = \widehat{AB}$
- قطر  $\perp$  وتر  $\Leftrightarrow$  نصف کردن وتر
- $OH \perp AB \Leftrightarrow AH = HB$
- فاصله مرکز تا وتر
- $OH < OH' \Leftrightarrow AB > CD$



متقاطع درون دایره:  $\widehat{AMD} = \frac{\widehat{AD} + \widehat{CB}}{2}$



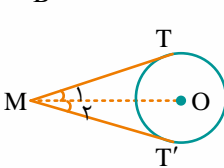
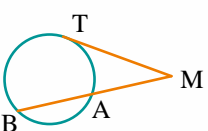
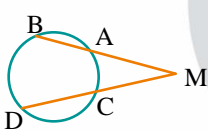
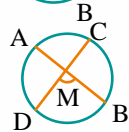
(۱) متقاطع بیرون دایره:  $\widehat{M} = \frac{\widehat{AC} - \widehat{BD}}{2}$



(۲) متقاطع بیرون دایره:  $\widehat{M} = \frac{\widehat{ACB} - \widehat{ADB}}{2}$



(۳) متقاطع بیرون دایره:  $\widehat{M} = \frac{\widehat{BC} - \widehat{AB}}{2}$



$MA \cdot MB = MC \cdot MD$

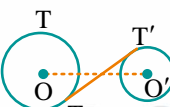
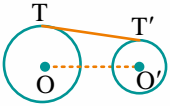
$MA \cdot MB = MC \cdot MD$

$MT^2 = MA \cdot MB$

$MT = MT'$

$M_1 = M_2$

خارجی:  $TT' = \sqrt{d^2 - (R - R')^2}$  (d = OO') دو دایره مماس خارج  $TT' = 2\sqrt{RR'}$



داخلی:  $TT' = \sqrt{d^2 - (R + R')^2}$  (d = OO')

داخلی: ۲

خارجی: ۲

داخلی: ۱

خارجی: ۲

داخلی: صفر

خارجی: ۲

داخلی: صفر

خارجی: ۱

داخلی: ۰

خارجی: ۰

خارجی: ۰

خارجی: ۰

مماس مشترک

تعداد مماس مشترک

متداخل

هم مرکز

محاسبه زاویه بین دو وتر

روابط طولی در دایره

مماس از نقطه‌های خارج دایره

دایره

دایره

چندضلعی محاطی: عمودمنصف‌های اضلاع هم‌مرس‌اند. (دایره محاطی)

چندضلعی محیطی و محاطی

چندضلعی محیطی: نیمسازهای زوایا هم‌مرس‌اند. (دایره محاطی)

دایره محیطی <sup>قضیه مهم</sup> عمودمنصف یک ضلع هر مثلث و نیمساز زاویه مقابل به آن ضلع، یکدیگر را روی دایره محیطی مثلث قطع می‌کنند.

مثلث ← هم محیطی و هم محاطی است



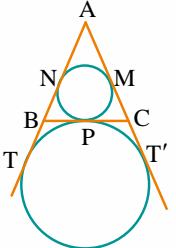
داخلی: شعاع  $\frac{S}{P} = r$

خارجی:  $r_c = \frac{S}{P - c}$

$r_a = \frac{S}{P - a}$     $r_b = \frac{S}{P - b}$     $r_c = \frac{S}{P - c}$

$\frac{1}{r_a} + \frac{1}{r_b} + \frac{1}{r_c} = \frac{1}{r}$

$\frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c} = \frac{1}{r}$  ارتفاع  $h_c, h_b, h_a$  هستند.



- ۱)  $AM = AN = P - a$
- ۲)  $BN = BP = P - b$
- ۳)  $CM = CP = P - c$
- ۴)  $AT = AT' = P$

محاطی: دو زاویه مقابل آن مکمل باشند.

محیطی: مجموع اندازه‌های دو ضلع مقابل، برابر مجموع اندازه‌های دو ضلع دیگر باشند.

چهارضلعی‌ها

مربع: هم محیطی و هم محاطی

مستطیل: محاطی ✓ - لزوماً محیطی نیست.

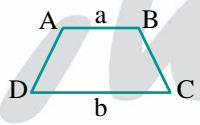
لوزی: لزوماً محاطی نیست - محیطی ✓

متوازی‌الاضلاع: لزوماً محاطی نیست - لزوماً محیطی نیست.

لزوماً محاطی نیست، لزوماً محیطی نیست.

دوزنقه: محاطی است ⇔ متساوی‌الساقین است.

محاطی و محیطی است ⇔ مساحت دوزنقه برابر با میانگین حسابی دو قاعده آن ضرب در میانگین هندسی آن‌ها



$S = \left(\frac{a+b}{2}\right) \times \sqrt{ab}$



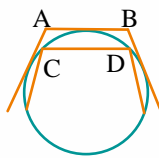
کایت: لزوماً محاطی نیست - محیطی است.

هم محیطی و هم محاطی است.

چندضلعی منتظم (n ضلعی منتظم)

$AB = 2r \tan \frac{180^\circ}{n}$  (محیطی)

$CD = 2r \sin \frac{180^\circ}{n}$  (محاطی)



**تبدیل**

**ایزومتری (طول پا)**

- تبدیلی است که
- طول پاره خط را حفظ می کند.
- اندازه زاویه را حفظ می کند.

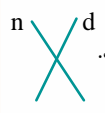
نقطه ثابت: در هر تبدیل، نقطه ای را که تبدیل یافته آن، بر خود آن نقطه منطبق می شود، نقطه ثابت تبدیل می نامند.  
 تبدیل همانی: تبدیل T را همانی گویند، هرگاه به ازای هر نقطه A از صفحه P داشته باشیم:  $T(A) = A$

**بازتاب**

- بازتاب A نسبت به خط d می شود  $A'$   $\Leftrightarrow$  d عمود منصف  $AA'$
- طول خط  $\checkmark$
- اندازه زاویه  $\checkmark$



- خط n موازی با خط بازتاب: شیب خط  $\checkmark$
- خط n عمود بر خط بازتاب: شیب خط  $\checkmark$
- خط n عمود و موازی با خط بازتاب نیست: شیب خط حفظ نمی شود.



- لزوماً شیب خط را حفظ نمی کند
- جهت شکل را حفظ نمی کند.
- مساحت شکل  $\checkmark$

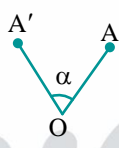
**انتقال**

- انتقال با بردار  $\vec{V} = \overline{AA'}$
- طول خط  $\checkmark$
- اندازه زاویه  $\checkmark$
- شیب خط  $\checkmark$
- جهت شکل  $\checkmark$
- مساحت شکل  $\checkmark$



**دوران**

- دوران به مرکز O و زاویه  $\alpha$ :  $\angle AOA' = \alpha$
- $OA = OA'$
- عمود منصف  $AA'$  از O می گذرد.



- طول خط  $\checkmark$
- اندازه زاویه  $\checkmark$
- شیب خط را لزوماً حفظ نمی کند.
- جهت شکل  $\checkmark$
- مساحت شکل  $\checkmark$

تجانس

اگر O مرکز تجانس و k ضریب تجانس باشد:  
 (۱) O، M و M' روی یک خط راست هستند.

$$OM' = |k| OM \quad (۲)$$

(۳) اگر  $k > 0$  در یک طرف O و اگر  $k < 0$  در دو طرف O

علامت k:  $k > 0$ : تجانس مستقیم

$k < 0$ : تجانس معکوس

اندازه |k|:  $|k| > 1$ : انبساط

$|k| < 1$ : انقباض

طول خط: لزوماً حفظ نمی‌کند مگر  $|k| = 1$  لزوماً طولپا نیست مگر  $|k| = 1$   
 اندازه زاویه ✓

شیب خط ✓

جهت شیب:  $k > 0$ : حفظ می‌کند

$k < 0$ : حفظ نمی‌کند

مساحت شکل:  $k^2$  برابر می‌شود.

تبدیل

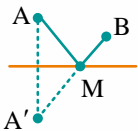


تقسیم و برش زدن

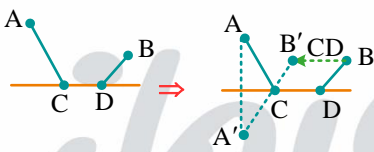
کاربرد بازتاب

مسائل هم‌پیرامونی (هم‌محیطی): تغییر مساحت بدون تغییر محیط آن

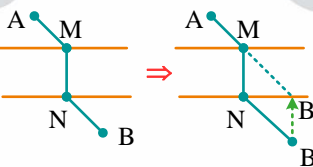
$$\min(AM + MB) = A'B \quad (۱)$$



$$\min(ACDB) = A'B' + CD \quad (۲)$$



$$\min(AMNB) = AB' + BB' \quad (۳)$$



مسائل پیدا کردن کوتاه‌ترین مسیر حالات معروف

### انواع استدلال


اثبات مستقیم (استدلال استنتاجی)

مثال نقض ← یک مثال برای رد کردن یک حکم کلی

اثبات با در نظر گرفتن همه حالت‌ها

$$(p_1 \vee p_2 \vee \dots \vee p_n) \Rightarrow r \equiv (p_1 \Rightarrow r) \wedge (p_2 \Rightarrow r) \wedge \dots \wedge (p_n \Rightarrow r)$$

اثبات بازگشتی (گزاره‌های هم‌ارز)

یک عبارت بدیهی → ... →  → انجام عملیات مجاز و بازگشت پذیر گزاره داده شده

تذکر: بهتر است بر مثال‌ها و تمرین کتاب درسی در موضوع استدلال‌ها تسلط داشته باشید.

### عادکردن

تعریف

$$q \in \mathbb{Z} \quad b = aq \quad \leftarrow a|b \quad (a \neq 0)$$

ویژگی‌ها

- $(m \in \mathbb{Z}) \quad a|b \Rightarrow a|mb$
- $a|bc, (b,c)=1 \Rightarrow a|b \vee a|c$
- ۱)  $a|b \rightarrow ka|kb \quad (k \in \mathbb{Z})$
- ۲)  $ka|kb \rightarrow a|b \quad (k \in \mathbb{Z}, k \neq 0)$
- خاصیت تعدی:  $a|b \wedge b|c \Rightarrow a|c$
- $a|b \wedge a|c \Rightarrow a|mb \pm nc \quad (m,n \in \mathbb{Z})$
- $a|b \wedge c|d \Rightarrow ac|bd$
- $a|b, (b \neq 0) \Rightarrow |a| \leq |b|$

$a|bc \xrightarrow{\text{لزوماً درست نیست}} a|b \vee a|c$   
 $a|b+c \xrightarrow{\text{لزوماً درست نیست}} a|b \vee a|c$   
 $a|b \wedge c|d \xrightarrow{\text{لزوماً درست نیست}} a+c|b+d$

چیزهایی که نمی‌توان لزوماً نتیجه گرفت

نتایج مهم از ویژگی‌ها:

- ۱)  $a|b \Rightarrow a|b^n \quad n \in \mathbb{N}$
- ۲)  $a|b \Rightarrow a^n|b^n \quad n \in \mathbb{N}$
- ۳)  $a|b, b|a \Rightarrow a = \pm b$
- ۴)  $a|b \Rightarrow (-a)|(-b), a|(-b), b|(-a)$
- ۵)  $m \leq n, a|b \Rightarrow a^m|b^n \quad (m,n \in \mathbb{N})$

تعریف: هر عدد طبیعی که به جز ۱ و خودش شمارنده مثبتی ندارد

عدد اول

اگر  $p$  عددی اول و  $a \in \mathbb{N}$  و  $a|p$ ، آن‌گاه  $a = p$  یا  $a = 1$

عاد کردن

تعریف ب.م.م:

$$(a, b) = d \Rightarrow \begin{cases} \text{الف) } d|a, d|b \\ \text{ب) } \forall m > 0; m|a, m|b \Rightarrow m \leq d \end{cases}$$

روش به دست آوردن ب.م.م: ابتدا ۲ عدد را به عوامل اول تجزیه می کنیم.

$(a, b) =$  حاصل ضرب عوامل مشترک با کمترین توان

(۱) ۲ عدد صحیح متوالی

(۲) ۲ عدد صحیح فرد متوالی

(۳)  $p$  و  $q$  اعدادی اول و  $p \neq q$

مثال‌ها

دو عدد  $a$  و  $b$  نسبت به هم اول:  $(a, b) = 1$

تعریف ک.م.م:

$$[a, b] = c \Rightarrow \begin{cases} \text{الف) } a|c, b|c \\ \text{ب) } \forall m > 0; a|m, b|m \Rightarrow c \leq m \end{cases}$$

روش به دست آوردن ک.م.م: ابتدا ۲ عدد را به عوامل اول تجزیه می کنیم.

$[a, b] =$  حاصل ضرب عوامل غیرمشترک  $\times$  حاصل ضرب عوامل مشترک با بیشترین توان

نکات ترکیبی ب.م.م و ک.م.م

$$[a, b] = \frac{ab}{(a, b)}$$

$$\begin{cases} (a, b) = |a| \\ [a, b] = |b| \end{cases} \Leftrightarrow a|b$$

قضیه تقسیم

$$a = bq + r \quad (0 \leq r < b, b \in \mathbb{N}, a \in \mathbb{Z})$$

طبق قضیه تقسیم: در تقسیم هر عدد بر  $b$ ،  $b$  حالت وجود دارد.

مجموعه اعدادی را که باقی مانده تقسیم آن‌ها بر عدد  $m$ ، مساوی با  $r$  است  $[r]_m$

افراز

حل برخی از مسائل با توجه به افراز

تعریف  $\forall a, b \in \mathbb{Z}, m \in \mathbb{N} \quad a \equiv b \Leftrightarrow m | a - b$

$a \equiv b \Rightarrow a \pm \frac{m}{x} c \equiv b \pm \frac{m}{x} c \quad (c \in \mathbb{Z})$

$a \equiv b \Rightarrow a^n \equiv b^n \quad (n \in \mathbb{N})$

$a \equiv b, c \equiv d \Rightarrow a \pm \frac{m}{x} c \equiv b \pm \frac{m}{x} d$

$a \equiv b, n | m \Rightarrow a \equiv b$

رابطه تعدی:  $a \equiv b, b \equiv c \Rightarrow a \equiv c$

$a \equiv b \Rightarrow a \pm mt \equiv b \pm mk$

$ac \equiv bc, (c, m) = d \Rightarrow a \equiv b \frac{m}{d}$

۱)  $\begin{cases} a \equiv b \\ a \equiv b \end{cases}, (m, n) = 1 \Rightarrow a \equiv b \frac{mn}{d}$

۲)  $a \equiv b, (m, n) = 1 \Rightarrow a \equiv b, a \equiv b, \dots$

لزوماً نمی توان نتیجه گرفت که:

$ac \equiv bc \xrightarrow{\text{لزوما درست نیست}} a \equiv b$

$ac \equiv bc \xrightarrow{(c,m)=1} a \equiv b$

رابطه هم‌نهشتی و قضیه تقسیم  $a = bq + r \Leftrightarrow a \equiv r$

۲، ۹: باقی ماندهٔ مجموع ارقام بر (۳، ۹)

۲، ۵، ۱۰: باقی ماندهٔ رقم یکان بر (۲، ۵، ۱۰)

۱۱: شروع از سمت راست + و -

$\overline{a_n a_{n-1} \dots a_1} \equiv a_1 - a_2 + a_3 - \dots \pm a_n$

۶ ماه اول ۳۱ روزه و ۵ ماه بعدی ۳۰ روزه و ماه آخر ۲۹ روزه است (سال کبیسه، ماه آخر ۳۰ روزه می شود).

روش حل سوالات: (۱) فاصلهٔ دو تاریخ را پیدا کن. (۲) باقی ماندهٔ فاصله بر ۷ را به دست بیار (۳) روز مورد نظر پیدا می شود.

تعریف:  $an \equiv b$

شرط جواب داشتن:  $(a, m) | b$

تعریف:  $x, y \in \mathbb{Z}, ax + by = c$

تبدیل به معادلهٔ هم‌نهشتی:  $ax \equiv c \pmod{|b|}$  یا  $by \equiv c \pmod{|a|}$

شرط جواب داشتن:  $(a, b) | c$

تذکر:  $x$  و  $y$  همیشه صحیح نیستند، پس با توجه به مساله

محدودهٔ جواب را پیدا کن.

هم‌نهشتی