

کد کنترل

121

A



دوشنبه

۱۴۰۳/۰۲/۲۴



گروه آموزشی ماز

## دوره جمع بندی دوپینگ ماز

گروه آزمایشی علوم ریاضی و فنی

دفترچه پاسخ ریاضیات

(جامع تابع / توابع نمایی و لگاریتمی - هندسه ۱ - آمار و احتمال)

ویراستاران	طراحان	مسئول درس	درس
رضا قانع - فرشاد حسنزاده	مهرداد کیوان - حسین شفیع زاده کاظم اجلاالی - سوگند روشنی	محدثه شیخ علی	ریاضیات

حق چاپ و تکثیر سوالات به هر روش (الکترونیکی و ...) پس از برگزاری آزمون برای تمامی اشخاص حقیقی و حقوقی تنها با مجوز «گروه ماز» مجاز می باشد و با متخلفین برابر مقررات رفتار می شود.

به دلیل عدم رضایت تیم ماز، هر گونه استفاده غیرقانونی از دفترچه سوالات و پاسخنامه ماز برای تمامی اشخاص، شرعاً حرام است.

اهمیت مبحث تابع و توابع نمایی و لگاریتمی در کنکور:

معرفی می‌کنم این شما و این هم دو تا از فصل‌های بسیار مهم کتاب، فصل تابع و فصل توابع نمایی و لگاریتمی.

این دو تا فصل از جذابترین و شیرین‌ترین فصل‌های ریاضی هستن، چون خیلی جمع و جور و خوش تست هستن و به قول اساتید هنر و سینما، فرم و محتوای خوبی دارن، خلاصه کمتر کسی توی این کره خاکی پیدا میشه که با این فصل‌ها حال نکنه.

چونم براتون بگه که از این دو تا فصل سرجمع حدود ۴ تا ۶ تست توی کنکور سوال میاد که واقعاً هر چقدر بخوان سختش کنن باز میشه حلشون کرد پس حواست باشه که توی سوال‌ها سوتی ندی و این تست‌ها رو مال خودت بکنی.

از مهمترین بخش‌های این دو تا فصل میشه به بخش‌های ویژگی‌های لگاریتم، معادله‌های نمایی و لگاریتمی، نمودارهای توابع نمایی و لگاریتمی، انتقال توابع، ترکیب و وارون توابع اشاره کرد. البته یادت باشه که خیلی از وقت‌ها از این دو تا فصل به صورت ترکیبی سوال میدن، مثلاً میان تابع لگاریتمی رو میبینی تو فاز انتقال توابع، پس مراقب باش که اخیراً رد پای سوال‌های ترکیبی، توی ریاضی هم مشاهده شده، پس بزن بریم که توی این آزمون کلی تست‌های خوب انتظارمون رو میکشه پس تا میتونی روی رسم نمودار توابع هم مسلط باش که توی حل خیلی از تست‌ها غوغا می‌کنه و کار رو برامون درمیاره!

پیش‌نیازهای مطالعه این بخش کدام مباحث هستند؟

با توجه به اینکه تابع مفهوم جدیدی است که در دوران دبیرستان با آن آشنا می‌شوید، بنابراین برای یادگیری نیاز به مرور خاصی نیست. لگاریتم و توابع نمایی هم بخش جدیدی است که یک پیش‌نیاز مهم دارد و آن هم تابع است که ما خودمان آن را آورده‌ایم!

این بخش‌ها در کدام قسمت‌های دیگر کاربرد دارند؟

برای حل سوالات بخش حد و پیوستگی و مشتق نیاز مبرم به تسلط روی مباحث این دو فصل مخصوصاً فصل تابع دارید. پس به خوبی آن‌ها را یاد بگیرید.

از این بخش در کنکور سال‌های قبل چه تعداد سوال طرح شده است؟ این سوالات از چه موضوعاتی بوده؟

فصل تابع

۱۳۹۸	۱۳۹۹	۱۴۰۰	۱۴۰۱	۱۴۰۱ (دی)	۱۴۰۲	۱۴۰۳ (اردیبهشت)
۲	۵	۴	۵	۴	۵	۲
توابع صعودی و نزولی تابع وارون	انتقال توابع ترکیب توابع وارون تابع وارون (ترکیب با تابع نمایی)	دامنه تابع رسم نمودار تابع جزء صحیح انتقال توابع انتقال توابع + تابع وارون	تابع ثابت انتقال توابع وارون تابع ترکیب توابع صعودی و نزولی	توابع صعودی و نزولی انتقال توابع وارون تابع ترکیب تابع دامنه تابع (ترکیب با تابع لگاریتمی)	انتقال توابع - دامنه تابع ترکیب توابع صعودی و نزولی (ترکیب با لگاریتم) وارون تابع تعریف تابع به صورت زوج مرتبی	ترکیب تابع - تابع جزء صحیح وارون تابع

فصل لگاریتم و تابع نمایی

۱۳۹۸	۱۳۹۹	۱۴۰۰	۱۴۰۱	۱۴۰۱ (دی)	۱۴۰۲	۱۴۰۳ (اردیبهشت)
۲	۳	۲	۲	۳	۳	۲
معادله نمایی نمودار توابع لگاریتمی	ویژگی‌های لگاریتم نمودار توابع نمایی (ترکیب با تابع وارون)	دامنه تابع لگاریتمی - معادله نمایی	قوانین لگاریتم نمودار توابع نمایی	ویژگی‌های لگاریتم دامنه تابع لگاریتمی (ترکیب با دامنه توابع) تابع نمایی	تابع لگاریتمی (ترکیب با توابع صعودی و نزولی) ویژگی‌های لگاریتم ویژگی‌های لگاریتم	معادله لگاریتمی نمودار لگاریتمی

پیش‌بینی شما برای کنکور بعدی چیست؟

با توجه به روند اخیر، پیش‌بینی می‌شود تعداد حداقل ۲ سوال برای بخش توابع و تعداد ۲ - ۳ سوال برای بخش لگاریتم و تابع نمایی داشته باشیم.

۱- با فرض  $\log_4^2 = 0/3$ ، مقدار  $\log_{12}^4$  چقدر است؟

$\frac{7}{9}$  (۴)

$\frac{8}{9}$  (۳)

$\frac{8}{11}$  (۲)

$\frac{9}{11}$  (۱)

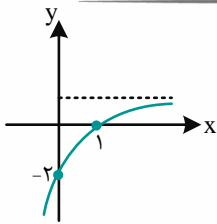
پاسخ: گزینه ۱ (آسان - مفهومی / محاسباتی - ۱۱۰۳)



$\log_9^2 = \frac{1}{2} \log_3^2 = 0/3 \Rightarrow \log_3^2 = 0/6$

$\log_{12}^4 = \frac{\log_3^4}{\log_3^{12}} = \frac{2 \log_3^2}{2 \log_3^2 + 1} = \frac{1/8}{1/2 + 1} = \frac{1/8}{3/2} = \frac{1/8 \cdot 2}{3} = \frac{1/4}{3} = \frac{1}{12}$

گروه آموزشی ماز



۲- شکل مقابل، نمودار تابع  $f(x) = 2 + a \cdot 2^{mx+n}$  است. حاصل  $f(m)$  کدام است؟

- ۱) ۰-۱
- ۲) ۱-۴
- ۳) ۸-۸
- ۴) ۶-۶

پاسخ: گزینه ۴ (متوسط - مفهومی / محاسباتی - ۱۱۰۳)



نقاط  $A(1, 0)$  و  $B(0, -2)$  را در ضابطه  $f$  جایگذاری می‌کنیم:

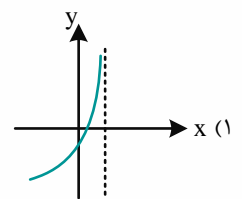
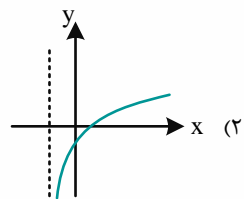
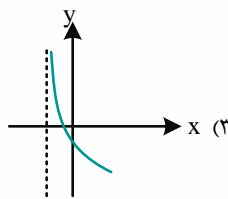
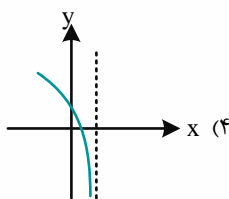
$f(1) = 0 \Rightarrow 2 + a \cdot 2^{m+n} = 0$   
 $f(0) = -2 \Rightarrow 2 + a \cdot 2^n = -2$

$\Rightarrow \begin{cases} a \cdot 2^m \cdot 2^n = -2 \\ a \cdot 2^n = -4 \end{cases} \xrightarrow{\text{تقسیم}} 2^m = \frac{1}{2} \Rightarrow m = -1$

$f(m) = f(-1) = 2 + a \cdot 2^{-m+n} = 2 + a \cdot 2^n \times 2 = 2 + (-4) \times 2 = -6$

گروه آموزشی ماز

۳- اگر تابع  $f(x) = (ax+b)(bx+4-4a)$  همانی باشد، نمودار تابع  $y = \log((a+b)x+a-b)$  چگونه است؟



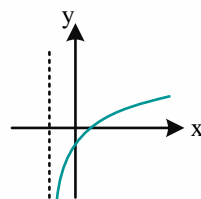
پاسخ: گزینه ۲ (متوسط - ترکیبی / محاسباتی - ۱۱۰۳)



تابع  $f(x) = x$  همانی است. ضریب  $x^2$  در تابع  $f$  برابر  $ab$  است، پس یا  $a = 0$  است یا  $b = 0$  است:

$a = 0 \Rightarrow f(x) = b(bx+4) = x \Rightarrow \begin{cases} b^2 = 1 \\ 4b = 0 \end{cases}$

$b = 0 \Rightarrow f(x) = ax(4-4a) = x \Rightarrow 4a - 4a^2 = 1 \Rightarrow a = \frac{1}{2}$



نمودار تابع  $y = \log(\frac{1}{2}x + \frac{1}{2})$  به صورت مقابل است.

۴- اگر  $f(x) = 3 + \sqrt{2x-6}$  باشد، دامنه تابع  $y = \log(f \circ f(x) - f(x))$  شامل چند عدد طبیعی است؟

- ۱ (۱)      ۲ (۲)      ۳ (۳)      ۴ (۴)

پاسخ: گزینه ۱ (متوسط - مفهومی / محاسباتی - ۱۱۰۳)



$$f \circ f(x) - f(x) > 0 \Rightarrow f(f(x)) > f(x)$$

$$f(x) > x \Rightarrow 3 + \sqrt{2x-6} > x \Rightarrow \sqrt{2x-6} > x-3$$

$$x-3 > 0 \Rightarrow 2x-6 > (x-3)^2 \Rightarrow 2 > x-3 \Rightarrow x < 5, x > 3$$

از طرفی، دو شرط  $f(x) \in D_f$  و  $x \in D_f$  را هم بررسی می‌کنیم:

$$x \in D_f \Rightarrow x \geq 3$$

$$f(x) \in D_f \Rightarrow 3 + \sqrt{2x-6} \geq 3 \Rightarrow \sqrt{2x-6} \geq 0$$

پس دامنه تابع لگاریتمی به صورت  $3 < x < 5$  است، که شامل یک عدد طبیعی است.

گروه آموزشی ماز

۵- اگر  $|x| \leq 1$        $|x| \geq 1$

$$f(x) = \begin{cases} a + b\sqrt{1-6x^3} & |x| \leq 1 \\ ax + b - 3 & |x| \geq 1 \end{cases}$$

ضابطه یک تابع باشد، مقدار  $af(b)$  کدام است؟

- ۱۸ (۱)      ۲۷ (۲)      -۱۵ (۳)      -۴۵ (۴)

پاسخ: گزینه ۴ (متوسط - محاسباتی - ۱۰۰۵)



در نقاط مرزی ۱ و -۱ نباید تابع دو مقدار متمایز داشته باشد.

$$f(1) = \begin{cases} a + 2b \\ a + b - 3 \end{cases} \Rightarrow a + 2b = a + b - 3 \Rightarrow b = -3$$

$$f(-1) = \begin{cases} a + 4b \\ -a + b - 3 \end{cases} \Rightarrow a + 4b = -a + b - 3 \Rightarrow a = \frac{-3b-3}{2} = 3$$

$$af(b) = 3f(-3) = 3(-3a + b - 3) = -45$$

گروه آموزشی ماز

۶- تابع  $f(x) = ax - 4a\sqrt{x}$  با دامنه  $[0, 4]$  مفروض است. اگر  $f^{-1}(x) = 4x + 8 - 8\sqrt{x+1}$  باشد، مقدار  $f(4a)$  کدام است؟ ( $a > 0$ )

- ۱ (۱)      ۲ (۲)      ۳ (۳)      ۴ (۴)

پاسخ: گزینه ۲ (متوسط - مفهومی / محاسباتی - ۱۱۰۲)



$$x = -1 \Rightarrow f^{-1}(-1) = -4 + 8 - 0 = 4 \Rightarrow f(4) = -1$$

عددگذاری:

$$\Rightarrow 4a - 8a = -1 \Rightarrow a = \frac{1}{4} \Rightarrow f(4a) = f(1) = a - 4a = -\frac{3}{4}$$



محاسبه ضابطه f:

$$f(x) = ax - 4a\sqrt{x} = a(x - 4\sqrt{x})$$

$$\text{وارون: } x = a(y - 4\sqrt{y}) \Rightarrow \frac{x}{a} = (\sqrt{y} - 2)^2 - 4 \Rightarrow \sqrt{y} - 2 = \pm \sqrt{\frac{x}{a} + 4}$$

دامنه f برابر  $[0, 4]$  است. پس برد  $f^{-1}$  بازه  $[0, 4]$  است. پس:

$$\sqrt{y} = 2 - \sqrt{\frac{x}{a} + 4} \Rightarrow y = 4 + \frac{x}{a} + 4 - 4\sqrt{\frac{x}{a} + 4}$$

از مقایسه این رابطه با ضابطه  $f^{-1}$  مقدار  $a = \frac{1}{4}$  به دست می‌آید.

$$\Rightarrow f(4a) = f(1) = a - 4a = -\frac{3}{4}$$

۷- با فرض  $f(x) = \sqrt{ax+b}$  و  $g(x) = \sqrt{2x+8}$ ، توابع  $y = f(2x-1)$  و  $y = g(x+2)$  با دامنه  $[-6, +\infty)$  برابرند، مقدار  $2a+b$  کدام است؟

۹ (۴)

۱۸ (۳)

۱۵ (۲)

۱۲ (۱)

(متوسط - محاسباتی - ۱۱۰۲)

پاسخ: گزینه ۲

پاسخ تشریحی:

ضابطه توابع را تشکیل می‌دهیم:

$$y = f(2x-1) = \sqrt{a(2x-1)+b} = \sqrt{2ax-a+b}$$

$$y = g(x+2) = \sqrt{2(x+2)+8} = \sqrt{2x+12}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2a = 2 \\ -a + b = 12 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 13 \end{cases} \Rightarrow 2a + b = 15$$

گروه آموزشی ماز

۸- اگر  $f$  و  $g$  توابعی وارون پذیر و  $f(2x) = 1 - 2g(\frac{x}{4})$  باشد، مقدار  $f^{-1}(-2)$  چند برابر  $g^{-1}(1)$  است؟

۴ (۴)

$\frac{2}{3}$  (۳)

$\frac{3}{4}$  (۲)

۳ (۱)

(متوسط - مفهومی / محاسباتی - ۱۱۰۲)

پاسخ: گزینه ۴

پاسخ تشریحی:

$$f^{-1}(-2) = k \Rightarrow f(k) = -2$$

در تساوی داده شده در صورت سوال، به جای  $\frac{k}{4}$  قرار می‌دهیم.

$$f(k) = 1 - 2g(\frac{k}{4}) \Rightarrow -2 = 1 - 2g(\frac{k}{4}) \Rightarrow g(\frac{k}{4}) = 1 \Rightarrow g^{-1}(1) = \frac{k}{4}$$

$$\Rightarrow k = 4g^{-1}(1) \Rightarrow f^{-1}(-2) = 4g^{-1}(1)$$

گروه آموزشی ماز

۹- نمودار تابع  $f(x) = x^2 + 2x^2 + ax - 2$  را دو واحد به راست انتقال داده و سپس نسبت به خط  $y = x$  قرینه می‌کنیم. اگر نمودار حاصل، خط  $2x - y = 5$  را در نقطه‌ای به عرض ۳ قطع کند، مقدار  $a$  کدام است؟

۴ (۴)

۳ (۳)

۲ (۲)

۱ (۱)

(متوسط - مفهومی / محاسباتی - ۱۲۰۱)

پاسخ: گزینه ۳

پاسخ تشریحی:

نقطه‌ای به عرض ۳ روی خط یعنی  $A(4, 3)$ ، پس:

$$y = f(x-2) \text{ دو واحد راست}$$

$$y = x \text{ قرینه نسبت به } x = f(y-2)$$

$$4 = f(3-2) \Rightarrow f(1) = 4$$

نقطه  $B(1, 4)$  باید روی تابع  $f(x)$  باشد:

$$\Rightarrow 1+2+a-2=4 \Rightarrow a=3$$

گروه آموزشی ماز

۱۰- اگر  $f(x) = 2x^3 + ax^2 - ax - 2a$  و  $f(x)$  باقی‌مانده تقسیم  $f(x)$  بر  $x+1$ ، دو برابر باقی‌مانده تقسیم  $f(x)$  بر  $x-1$  باشد، مقدار  $a$  کدام است؟

$\frac{5}{4}$  (۴)

$\frac{5}{2}$  (۳)

$\frac{3}{2}$  (۲)

$\frac{3}{4}$  (۱)

پاسخ: گزینه ۳ (متوسط - مفهومی / محاسباتی - ۱۲۰۱)

پاسخ تشریحی:

باقی مانده تقسیم  $f(x)$  بر  $x-a$  برابر  $f(a)$  است.

$$f \circ f(-1) = 2f(1)$$

$$\Rightarrow f(-2+a+a-2a) = 2(2+a-a-2a) \Rightarrow f(-2) = 4-4a$$

$$\Rightarrow -16+4a+2a-2a = 4-4a \Rightarrow a = \frac{20}{8} = \frac{5}{2}$$

گروه آموزشی ماز

۱۱- چند عدد صحیح در مجموعه جواب‌های نامعادله  $2^{x^2+1} \leq 4^{x+2}$  قرار دارند؟

۶ (۴)

۵ (۳)

۴ (۲)

۳ (۱)

پاسخ: گزینه ۳ (آسان - محاسباتی - ۱۱۰۳)

نامعادلات نمایی دیگر چیست؟

اگر  $f(x)$  و  $g(x)$  دو تابع باشند، آن‌گاه:

$$۱) a > 1: a^{f(x)} > a^{g(x)} \Rightarrow f(x) > g(x)$$

$$۲) 0 < a < 1: a^{f(x)} > a^{g(x)} \Rightarrow f(x) < g(x)$$

پاسخ تشریحی:

نامعادله را به صورت زیر می‌نویسیم:

$$2^{x^2+1} \leq 2^{2(x+2)} \Rightarrow x^2+1 \leq 2(x+2)$$

$$\Rightarrow x^2 - 2x - 3 \leq 0 \Rightarrow (x+1)(x-3) \leq 0 \Rightarrow -1 \leq x \leq 3$$

بنابراین اعداد صحیح  $-1, 0, 1, 2, 3$  در مجموعه جواب‌های نامعادله قرار دارند.

گروه آموزشی ماز

۱۲- حاصل  $(\log 2)^2 - (\log 5)^2 + (\log 25)$  کدام است؟

۱ (۴)

$\frac{1}{2}$  (۳)

$\log \frac{2}{5}$  (۲)

$\log \frac{5}{2}$  (۱)

پاسخ: گزینه ۴ (متوسط - مفهومی / محاسباتی - ۱۱۰۳)

۲ تا ویژگی ساده و کاربردی از لگاریتم:

اگر  $a, b, c < 0$  و  $a, c \neq 1$ ، آن‌گاه:

$$۱) \log_c^{ab} = \log_c^a + \log_c^b$$

$$۲) \log_c^{\frac{a}{b}} = \log_c^a - \log_c^b$$

پاسخ تشریحی:

$$(\log 2)^2 - (\log 5)^2 + \log 25 = (\log 2 + \log 5)(\log 2 - \log 5) + 2 \log 5 = \log 10 (\log 2 - \log 5) + 2 \log 5$$

$$= \log 2 - \log 5 + 2 \log 5 = \log 2 + \log 5 = \log 10 = 1$$

گروه آموزشی ماز

۱۳- اگر  $\alpha$  بزرگترین جواب معادله  $\log_{\sqrt{2}}^x + \log_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^x = 1$  باشد، مقدار  $\alpha^{\sqrt{2}}$  کدام است؟

۴ (۴)

$2\sqrt{2}$  (۳)

۲ (۲)

$\sqrt{2}$  (۱)

پاسخ: گزینه ۴ (متوسط - مفهومی / محاسباتی - ۱۱۰۳)

بچه‌ها ویژگی زیر هم خیلی تست فیزه!

اگر  $a, b > 0$  و  $a, b \neq 1$ ، آن‌گاه:  $\log_b^a = \frac{1}{\log_a^b}$

پاسخ تشریحی

معادله را به صورت زیر ساده می‌کنیم:

$$\log_{\sqrt{2}}^x + \log_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^x = 1 \Rightarrow \frac{1}{\log_{\sqrt{2}}^x} + \frac{1}{\log_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^x} = 1 \Rightarrow \frac{1}{\log_{\sqrt{2}}^x + \log_{\sqrt{2}}^x} + \frac{1}{\log_{\sqrt{2}}^x + \log_{\sqrt{2}}^x} = 1$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\log_{\sqrt{2}}^x + 1} + \frac{1}{2\log_{\sqrt{2}}^x + 1} = 1$$

با فرض  $t = \log_{\sqrt{2}}^x$  معادله به صورت زیر درمی‌آید:

$$\frac{1}{t+1} + \frac{1}{2t+1} = 1 \Rightarrow 2t+1+t+1 = (t+1)(2t+1)$$

$$\Rightarrow 3t+2 = 2t^2+3t+1 \Rightarrow 2t^2 = 1 \Rightarrow t = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\log_{\sqrt{2}}^x = \pm \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \log_{\sqrt{2}}^x = \pm \sqrt{2} \Rightarrow x = 2^{\pm\sqrt{2}}$$

بنابراین:

$$\alpha = 2^{\sqrt{2}} \Rightarrow \alpha^{\sqrt{2}} = (2^{\sqrt{2}})^{\sqrt{2}} = 2^2 = 4$$

بنابراین:

گروه آموزشی ماز

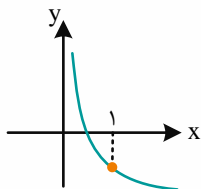
۱۴- نمودار تابع  $f(x) = \log_3^{ax} - \log_b^x$  در شکل مقابل رسم شده است. مقدار  $a+b$  کدام می‌تواند باشد؟

۱ (۱)

۲ (۲)

۳ (۳)

۴ (۴)



پاسخ: گزینه ۲ (سخت - مفهومی / محاسباتی - ۱۱۰۳)

پاسخ تشریحی

توجه کنید که  $f(1) < 0$ ، پس:

$$f(1) = \log_3^a - \log_b^1 < 0 \Rightarrow \log_3^a < 0 \Rightarrow 0 < a < 1$$

$$f(x) = \log_3^{ax} - \log_b^x = \log_3^a + \log_3^x - \log_3^x \log_b^x = (1 - \log_b^x) \log_3^x + \log_3^a$$

از طرف دیگر:

چون نمودار تابع  $y = \log_3^x$  صعودی است ولی نمودار تابع  $f$  نزولی است، پس باید  $1 - \log_b^x$  عددی منفی باشد، بنابراین:

$$1 - \log_b^x < 0 \Rightarrow 1 - \frac{1}{\log_b^x} < 0 \Rightarrow \frac{\log_b^x - 1}{\log_b^x} < 0 \Rightarrow 0 < \log_b^x < 1 \Rightarrow 1 < b < 2$$

$$\begin{cases} 0 < a < 1 \\ 1 < b < 2 \end{cases} \Rightarrow 1 < a + b < 3$$

بنابراین:

پس  $a+b$  می‌تواند برابر ۲ باشد.

گروه آموزشی ماز

۱۵- نقطه  $A(2, a)$  روی نمودار تابع  $g(x) = 2f(x-1) + 3$ ، متناظر با نقطه  $A'(b, 4)$  روی نمودار تابع  $h(x) = -f(2x+3) + 1$  است. مقدار  $a+b$  کدام است؟

-۸ (۴)

-۷ (۳)

-۴ (۲)

-۵ (۱)

(متوسط - مفهومی / محاسباتی - ۱۲۰۱)

پاسخ: گزینه ۲

پاسخ تشریحی:

توجه کنید که:  $g(x) = 2f(x-1) + 3$

$$\begin{cases} x=2 \\ y=a \end{cases} \Rightarrow a = 2f(2-1) + 3 \Rightarrow f(1) = \frac{a-3}{2}$$

$$2x+3=1 \Rightarrow x=-1=b$$

$$h(x) = -f(2x+3) + 1$$

$$\begin{cases} x=-1 \\ y=4 \end{cases} \Rightarrow 4 = -f(1) + 1 \Rightarrow f(1) = -3 = \frac{a-3}{2} \Rightarrow a = -3$$

$$a+b = -4$$

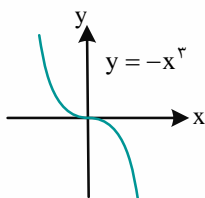
از طرف دیگر:

بنابراین:

گروه آموزشی ماز

۱۶- نمودار تابع  $f(x) = x^3 - ax^2 + b$  را نسبت به محور عرض‌ها قرینه می‌کنیم. نمودار به دست آمده را یک واحد به سمت چپ منتقل می‌کنیم تا نمودار

تابع  $g$  به دست آید. اگر نمودار تابع  $y = g(x) - 3x$  به صورت مقابل باشد، مقدار  $f(2)$  کدام است؟



۱۶ (۱)

۱۸ (۲)

۲۰ (۳)

۲۲ (۴)

(متوسط - مفهومی / محاسباتی - ۱۲۰۱)

پاسخ: گزینه ۲

پاسخ تشریحی:

به تبدیلات زیر توجه کنید:

$$y = f(x) \xrightarrow{\text{قرینه نسبت به محور عرض‌ها}} y = f(-x) \xrightarrow{\text{یک واحد به چپ}} y = f(-(x+1)) = f(-x-1) = g(x)$$

بنابراین:

$$g(x) = (-x-1)^3 - a(-x-1)^2 + b = -x^3 - 3x^2 - 3x - 1 - ax^2 - 2ax - a + b$$

$$= -x^3 - (a+3)x^2 - (2a+3)x + b - a - 1$$

$$y = g(x) - 3x = -x^3 - (a+3)x^2 - (2a+6)x + b - a - 1 = -x^3$$

$$a+3=0 \Rightarrow a=-3$$

$$2a+6=0 \Rightarrow a=-3$$

$$b-a-1=0 \Rightarrow b=a+1=-2$$

$$f(x) = x^3 + 3x^2 - 2 \Rightarrow f(2) = 8 + 12 - 2 = 18$$

در نتیجه:

گروه آموزشی ماز

۱۷- قرینه نمودار تابع  $y = \sqrt{2x+3}$  را نسبت به محور  $y$  تعیین کرده و سپس ۱ واحد به سمت راست منتقل می‌کنیم. اگر تابع به وجود آمده از این فرآیند را  $f(x)$  بنامیم، فاصله نقطه تلاقی نمودار  $f$  و خط  $y = x + 5$  از نقطه  $(1, -1)$  کدام است؟

- ۱) ۲      ۲) ۳      ۳) ۴      ۴) ۵

پاسخ: گزینه ۴ (متوسط - مفهومی / محاسباتی - ۱۲۰۱)



ابتدا با توجه به فرآیند گفته شده ضابطه تابع  $f$  را به دست می‌آوریم. داریم:

$$\sqrt{2x+3} \xrightarrow{x \rightarrow -x} y = \sqrt{-2x+3} \xrightarrow{\text{واحد راست}} f(x) = \sqrt{-2(x-1)+3} \Rightarrow f(x) = \sqrt{-2x+5}$$

برای به دست آوردن نقطه تلاقی نمودار  $f$  و خط  $y = x + 5$  باید معادله  $f(x) = x + 5$  را حل کنیم. می‌توان نوشت:

$$\sqrt{-2x+5} = x+5 \xrightarrow{\text{توان ۲}} -2x+5 = x^2+10x+25 \Rightarrow x^2+12x+20=0 \Rightarrow (x+2)(x+10)=0 \Rightarrow \begin{cases} x = -2 \checkmark \rightarrow A(-2, 3) \\ x = -10 \times \end{cases}$$

در آخر فاصله نقطه  $A(-2, 3)$  از نقطه  $B(1, -1)$  برابر است با:

$$AB = \sqrt{(-2-1)^2 + (3-(-1))^2} = \sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5$$

گروه آموزشی ماز

۱۸- اگر  $f(x) = x^2 - x$  و  $g(x) = 3 - x$  باشد، مجموع جواب‌های معادله  $(f \circ g)(x) = (g \circ f)(x)$  کدام است؟

- ۱) ۱      ۲)  $\frac{1}{2}$       ۳) ۳      ۴)  $\frac{3}{2}$

پاسخ: گزینه ۳ (متوسط - ترکیبی / محاسباتی - ۱۱۰۲)

یادآوری کنیم از فصل احسابان!

حاصل جمع ریشه‌های معادله درجه دوم  $ax^2 + bx + c = 0$  برابر  $-\frac{b}{a}$  است.



$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = g^2(x) - g(x) = (3-x)^2 - (3-x)$$

توجه کنید که:

$$= 9 + x^2 - 6x - 3 + x = x^2 - 5x + 6$$

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = 3 - f(x) = 3 - (x^2 - x) = -x^2 + x + 3$$

بنابراین معادله  $(f \circ g)(x) = (g \circ f)(x)$  به صورت زیر است:

$$x^2 - 5x + 6 = -x^2 + x + 3 \Rightarrow 2x^2 - 6x + 3 = 0$$

مجموع جواب‌های معادله بالا برابر ۳ است.

گروه آموزشی ماز

۱۹- اگر  $f^{-1}(x) = x + \sqrt{x+1}$  و  $f(x) = \frac{2x}{x+1}$  باشند،  $g^{-1}(5)$  کدام است؟

- ۱) ۳      ۲) -۳      ۳) ۱      ۴) -۱

پاسخ: گزینه ۲ (متوسط - مفهومی / محاسباتی - ۱۱۰۲)



فرض می‌کنیم  $g^{-1}(5) = \alpha$  باشد پس  $g(\alpha) = 5$  است و چون  $f(x) = \frac{2x}{x+1}$  است، با جای گذاری  $x = \alpha$  در ضابطه می‌توان نوشت:

$$f(g(x)) = \frac{2x}{x+1} \xrightarrow{x=\alpha} f(g(\alpha)) = \frac{2\alpha}{\alpha+1} \xrightarrow{g(\alpha)=5} f(5) = \frac{2\alpha}{\alpha+1}$$

طبق فرض مسئله  $f^{-1}(x) = x + \sqrt{x+1}$  و چون  $f^{-1}(3) = 5$  است می‌توان نتیجه گرفت  $f(5) = 3$  است و در آخر برای محاسبه مقدار  $\alpha$  داریم:

$$f(5) = \frac{2\alpha}{\alpha+1} \xrightarrow{f(5)=3} 3 = \frac{2\alpha}{\alpha+1} \rightarrow 3\alpha + 3 = 2\alpha \rightarrow \alpha = -3$$

در نتیجه  $g^{-1}(5) = -3$  است.

گروه آموزشی ماز

۲۰- اگر  $f = \{(1, 2), (2, 3), (3, 4), (5, 0)\}$  و  $g = \{(1, -2), (2, 0), (4, 1), (5, -4)\}$  کدام یک از توابع زیر یک به یک نیست؟

$$\frac{g}{f} \quad (4)$$

$$\frac{f}{g} \quad (3)$$

$$f - g \quad (2)$$

$$f + g \quad (1)$$

(متوسط - محاسباتی - ۱۱۰۲)

پاسخ: گزینه ۲

نمونه تشخیص یک به یک بودن تابع‌های زوج مرتبی روکی بلده؟

اگر تابع  $f(x)$  به صورت زوج مرتب داده شده باشد، زمانی  $f(x)$  یک به یک است که به ازای هر دو زوج مرتبی که دارای مولفه‌های دوم یکسان هستند، مولفه‌های اولشان نیز یکسان باشد.

پاسخ تشریحی:

توجه کنید که:

بنابراین:

$$D_{f+g} = D_{f-g} = D_f \cap D_g = \{1, 2, 3, 5\} \cap \{1, 2, 4, 5\} = \{1, 2, 5\}$$

$$f + g = \{(1, 2-2), (2, 3+0), (5, 0-4)\} = \{(1, 0), (2, 3), (5, -4)\}$$

$$f - g = \{(1, 2+2), (2, 3-0), (5, 0+4)\} = \{(1, 4), (2, 3), (5, 4)\}$$

$$D_{\frac{f}{g}} = D_f \cap D_g - \{x | g(x) = 0\} = \{1, 2, 5\} - \{2\} = \{1, 5\}$$

$$D_{\frac{g}{f}} = D_f \cap D_g = \{x | f(x) = 0\} = \{1, 2, 5\} - \{5\} = \{1, 2\}$$

$$\frac{f}{g} = \left\{ \left(1, \frac{2}{-2}\right), \left(5, \frac{0}{-4}\right) \right\} = \{(1, -1), (5, 0)\}$$

$$\frac{g}{f} = \left\{ \left(1, \frac{-2}{2}\right), \left(2, \frac{0}{3}\right) \right\} = \{(1, -1), (2, 0)\}$$

بنابراین، فقط  $f - g$  یک به یک نیست.

گروه آموزشی ماز

رسیدیم به هندسه!!!

مازیا!!! حالتون چطوره؟

دو فصل دیگه کتاب هندسه رو اینجا با هم تحلیل می‌کنیم. تو فصل ۳ کتاب هندسه (۱) با چندضلعی‌ها روبه‌رو می‌شویم. در این فصل به صورت اختصاصی vip باید در مورد چندضلعی‌های معروف، نکته بلد باشیم. ما در همه این چندضلعی‌ها، دوست عزیزمون متوازی‌الاضلاع است. خواص متوازی‌الاضلاع خیلی زیاد نیست، ولی بلدش نباشید، مجبورید با ادامه فصل خداحافظی کنید.

بعد از متوازی‌الاضلاع و بچه‌هاش، باید روی دوزنقه هم مسلط بشید، چه متساوی‌الساقین و چه هر مدلی دیگر...

یادت نره در همه حرفایی که زدیم بحث مساحت هم مطرح هست. این موضوع بیشتر خودشو توی دوزنقه نشون میده عزیز جان! و اما فصل آخر کتاب، این فصل خیلی گنگوله و معمولاً هم یک تست در کنکور سراسری داره. توی این فصل حواست باشه که معمولاً سوالات به صورت گزاره‌ای طرح می‌شن. داشتن تجسم هندسی قوی یکی از برنده‌های این فصل محسوب می‌شه.

**پیش‌نیاز مطالعه این بخش‌ها کدام مباحث هستند؟**

برای اینکه خاطرت از پیش‌نیازهای این دو فصل جمع بشه، بهتره مرورکی روی فصل ۸ کتاب نهم داشته باشید. همچنین مباحث فصل ۲ کتاب هندسه (۱) هم توی اینجا بهش نیاز میشه.

**این دو فصل در کدام قسمت‌ها کاربرد داره؟**

کاربرد فصل ۴ هندسه (۱) را می‌توان در فصل ۲ هندسه (۲) مشاهده کرد. همچنین فصل ۳ هندسه (۱) نیز در هر جای سوالات هندسه کاربرد دارند. چون دارند از چندضلعی‌ها و مساحت‌هایشان صحبت می‌کنند. مخصوصاً کاربرد این فصل در فصل ۱ هندسه (۲) مشهودتر است. از این بخش‌ها، در کنکور سال‌های قبل چه تعداد سوال آمده است؟

۱۴۰۳ (اردیبهشت)	۱۴۰۲	۱۴۰۱ (دی)	۱۴۰۱	۱۴۰۰	۱۳۹۹	۱۳۹۸
۱	۳	۳	۲	۳	۵	۴
مساحت مثلث (ترکیب با فصل ۲ هندسه ۱)	لوزی مستطیل و مساحت (ترکیب با فصل ۲ هندسه ۱) میان‌های مثلث و ویژگی‌های آن	تعداد قطر خط، نقطه و صفحه دوزنقه و مساحت آن (ترکیب با فصل ۱ هندسه ۲)	شش‌ضلعی و مساحت دوزنقه (ترکیب فصل ۱ هندسه ۲)	خط، نقطه و صفحه (ترکیب با فصل ۲ هندسه ۳) مساحت (ترکیب با فصل ۲ هندسه ۱) چهارضلعی‌ها و ویژگی‌های آن‌ها (ترکیب با فصل ۱ هندسه ۲)	چهارضلعی‌ها و ویژگی‌های آن‌ها (ترکیب با فصل ۱ هندسه ۱) دوزنقه و مساحت (ترکیب با فصل ۲ هندسه ۱) مساحت (ترکیب با فصل ۲ هندسه ۱) تفکر تجسمی	نسبت مساحت‌ها در دوزنقه (ترکیب با فصل ۲ هندسه) چندضلعی‌ها و ویژگی‌های آن‌ها (ترکیب با هندسه ۱ فصل ۲) خط و نقطه و صفحه تفکر تجسمی

**پیش‌بینی شما برای کنکور سال آینده چیست؟**

با توجه به روند سوالات در کنکور سال‌های گذشته، انتظار ۱ تا ۳ سوال را در کنکور پیش رو می‌توان داشت.

۲۱- در متوازی‌الاضلاع شکل زیر  $\hat{A} = \hat{D}$  و  $E$  محل برخورد نیمسازهای  $\hat{A}$  و  $\hat{D}$  می‌باشد. اگر طول  $BC = 8$  باشد، فاصله  $E$  از ضلع  $AD$  کدام است؟



- ۱ (۱)
- ۲ (۲)
- ۲/۵ (۳)
- ۳ (۴)

(متوسط - مفهومی / محاسباتی - ۱۰۰۳)

پاسخ: گزینه ۲

یکی از خواص خوشگل متوازی‌الاضلاع:

در هر متوازی‌الاضلاع، زوایای مجاور مکمل‌اند.

این نکته در مورد مثلث قائم‌الزاویه فیلی معرک‌اس!

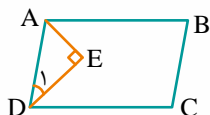
اگر در مثلث قائم‌الزاویه‌ای، یکی از زاویه‌های حاده،  $15^\circ$  باشد، آن‌گاه ارتفاع وارد بر وتر،  $\frac{1}{4}$  وتر است.



می‌دانیم در هر متوازی‌الاضلاع، زوایای مجاور مکمل‌اند. بنابراین:

$$\hat{A} + \hat{D} = 180^\circ \Rightarrow \hat{D} + \hat{D} = 180^\circ \Rightarrow \hat{D} = 90^\circ \Rightarrow \hat{D} = 30^\circ, \hat{A} = 150^\circ$$

همچنین چون  $AE$  و  $ED$  نیمساز هستند، بنابراین:



$$\hat{A}_1 + \hat{D}_1 = \frac{A}{2} + \frac{D}{2} = \frac{A+D}{2} = 90^\circ \Rightarrow \hat{A}ED = 90^\circ$$

از طرفی، اگر در مثلث قائم‌الزاویه، یک زاویه  $15^\circ$  باشد، ارتفاع وارد بر وتر،  $\frac{1}{4}$  وتر است. بنابراین، چون  $\hat{D}_1 = 15^\circ$  است، پس:

$$EH = \frac{1}{4}AD = \frac{1}{4}(8) = 2$$

گروه آموزشی ماز

۲۲- نیمسازهای داخلی مستطیلی به ابعاد ۸ و ۲ را رسم کرده‌ایم، چهارضلعی ایجاد شده است. مساحت بخشی از چهارضلعی که بیرون از مستطیل قرار گرفته است، کدام می‌باشد؟

۳ (۴)

۴ (۳)

۶ (۲)

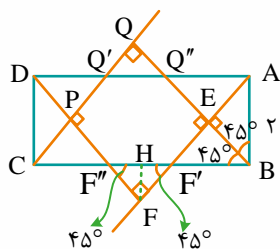
۸ (۱)

(متوسط - مفهومی / محاسباتی - ۱۰۰۳)

پاسخ: گزینه ۱



با توجه به شکل، تمام مثلث‌های قائم‌الزاویه ایجاد شده، متساوی‌الساقین هستند.



(۱) در مثلث  $\triangle AEB$ :

$$AE\sqrt{2} = 2 \Rightarrow AE = \sqrt{2} = BE = EF' \quad (1)$$

(۲) در مثلث  $\triangle AFD$ :

$$AF\sqrt{2} = 8 \Rightarrow AF = 4\sqrt{2} \quad (2)$$

اکنون با داشتن اضلاع مثلث  $FF'F''$ ، مساحت آن را حساب می‌کنیم. دقت شود که با توجه به تقارن مسئله، مثلث  $QQ'Q''$  نیز با مثلث  $FF'F''$  هم‌نهشت است. پس:

$$(1), (2) \Rightarrow FF' = AF - AE - EF'$$

$$\Rightarrow FF' = 4\sqrt{2} - \sqrt{2} - \sqrt{2} = 2\sqrt{2}$$

$$S_{\triangle FF'F''} = \frac{1}{2} \times 2\sqrt{2} \times 2\sqrt{2} = 4$$

$$\Rightarrow 4 + 4 = 8$$

$$S_{\triangle QQ'Q''} = \frac{1}{2} \times 2\sqrt{2} \times 2\sqrt{2} = 4$$

۲۳- اگر در مثلث  $\triangle ABC$ ،  $BC=3\sqrt{2}$ ،  $AB=6\sqrt{2}$  و  $AC=3\sqrt{6}$  باشد، نسبت نیمساز زاویه  $B$  به میانه  $CM$  کدام است؟

- (۱)  $\sqrt{3}$       (۲) ۲      (۳)  $3\sqrt{6}$       (۴)  $\frac{2}{3}\sqrt{3}$

پاسخ: گزینه ۴ (متوسط - مفهومی / محاسباتی - ۱۰۰۳)

دوباره نکته‌ای در مورد مثلث قائم‌الزاویه:

در مثلث قائم‌الزاویه، میانه وارد بر وتر، نصف وتر است.

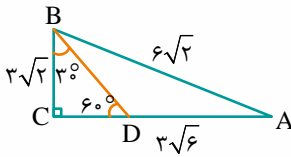
پاسخ تشریحی:

اضلاع داده شده در رابطه فیثاغورس صدق می‌کنند. در نتیجه:

$$AB^2 = BC^2 + AC^2 \Rightarrow (6\sqrt{2})^2 = (3\sqrt{2})^2 + (3\sqrt{6})^2 \Rightarrow 72 = 18 + 54$$

$$\sin \hat{A} = \frac{BC}{AB} = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \hat{A} = 30^\circ \Rightarrow \hat{B} = 60^\circ \Rightarrow \frac{\hat{B}}{2} = 30^\circ$$



برای به دست آوردن نیمساز  $BD$  کافی است در مثلث  $\triangle BCD$  بنویسیم:

$$\sin 60^\circ = \frac{3\sqrt{2}}{BD} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3\sqrt{2}}{BD} \Rightarrow BD = \frac{6\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = 2\sqrt{6}$$

$$CM = 3\sqrt{2}$$

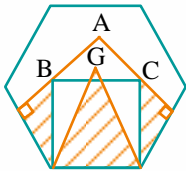
$$\frac{BD}{CM} = \frac{2\sqrt{6}}{3\sqrt{2}} = \frac{2}{3}\sqrt{3}$$

و می‌دانیم در مثلث قائم‌الزاویه میانه وارد بر وتر نصف وتر است، بنابراین:

بنابراین نسبت نیمساز  $BD$  به میانه  $CM$  برابر است با:

گروه آموزشی ماز

۲۴- در شش ضلعی منتظمی به ضلع  $8$ ، مربعی به صورت زیر قرار گرفته است. اگر  $G$  مرکز ثقل مثلث  $\triangle ABC$  باشد، مساحت قسمت هاشورزده کدام است؟



$$\frac{32\sqrt{3}}{9} + 32 \quad (2)$$

$$\frac{160\sqrt{3}}{9} + 32 \quad (4)$$

$$\frac{17\sqrt{3}}{9} + 16 \quad (1)$$

$$80\sqrt{3} + 16 \quad (3)$$

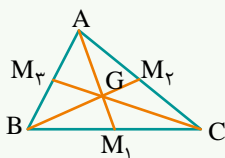
پاسخ: گزینه ۴ (سخت - مفهومی / محاسباتی - ۱۰۰۳)

یک نکته ریاضی فیزیکی:

منظور از مرکز ثقل در مثلث، همون نقطه تلاقی میانه‌هاست.

یه نکته دیگه بگم و تمام:

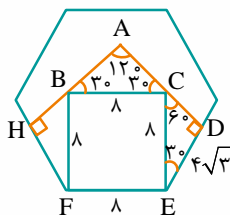
در هر مثلث میانه‌ها یکدیگر را به نسبت ۱ به ۲ قطع می‌کنند. مثلاً در شکل زیر داریم:



$$2GM_1 = AG, \quad 3GM_1 = AM_1$$

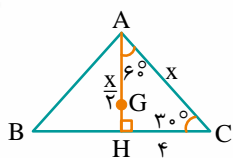
پاسخ تشریحی:

با توجه به توضیحات داده شده خواهیم داشت:



هر زاویه داخلی شش ضلعی منتظم  $120^\circ$  است و با توجه به اینکه در هر مثلث قائم‌الزاویه ضلع روبه‌رو به  $30^\circ$ ، نصف وتر و ضلع روبه‌رو به  $60^\circ$ ، برابر  $\frac{\sqrt{3}}{2}$

است، اندازه‌های مشخص شده به دست آمده است.



$$x^2 = \frac{x^2}{4} + 16 \Rightarrow \frac{3x^2}{4} = 16 \Rightarrow 3x^2 = 4 \times 16 \Rightarrow x\sqrt{3} = 2 \times 4 \Rightarrow x = \frac{8}{\sqrt{3}}$$

در مثلث ABC داریم:

می‌دانیم AH میانه نیز می‌باشد و  $GH = \frac{1}{3}AH$ ، در نتیجه:

$$GH = \frac{1}{3} \left( \frac{1}{2} \times \frac{8}{\sqrt{3}} \right) = \frac{4}{3\sqrt{3}} \times \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{4\sqrt{3}}{9}$$

$$S_{\triangle GFE} = \frac{1}{2} \times 8 \times \left( \frac{4\sqrt{3}}{9} + 8 \right) = \frac{16\sqrt{3}}{9} + 32$$

$$\Rightarrow S_{\text{هاشورزده}} = 2 \times (8\sqrt{3}) + \frac{16\sqrt{3}}{9} + 32 = \frac{160\sqrt{3}}{9} + 32$$

$$S_{\triangle CDE} = \frac{1}{2} \times 4 \times 4\sqrt{3} = 8\sqrt{3}$$

**تذکر:** دقت شود که در مثلث CDE نیز اضلاع به روش استدلال بالا، (یعنی ضلع رو به زاویه 30° و 60°) به دست آمده‌اند.

گروه آموزشی ماز

۲۵- مساحت چندضلعی شبکه‌ای ۳۱ است. مجموع تعداد نقاط درونی و مرزی آن چند عدد مختلف می‌تواند اختیار کند؟

۳۲ (۴)

۳۱ (۳)

۳۰ (۲)

۲۹ (۱)

(متوسط - محاسباتی - ۱۰۰۳)

پاسخ: گزینه ۳

رابطه مساحت برای چندضلعی‌های شبکه‌ای چی بود؟

اگر b برابر تعداد نقاط مرزی و i برابر تعداد نقاط درونی باشد، آن‌گاه مساحت چندضلعی شبکه‌ای برابر است با:  $S = \frac{b}{2} - 1 + i$

پاسخ تشریحی:

می‌دانیم اگر b تعداد نقاط مرزی و i تعداد نقاط درونی چندضلعی شبکه‌ای باشد، مساحت آن از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$S = \frac{b}{2} + i - 1$$

سوال:  $\frac{b}{2} + i - 1 = 31 \Rightarrow \frac{b}{2} + i = 32 \Rightarrow b + 2i = 64$

و با توجه به اینکه نقاط مرزی باید حداقل ۳ باشند، خواهیم داشت:

$$b \geq 3$$

b	۶۴	۶۲	۶۰	...	۴
i	۰	۱	۲	...	۳۰

در نتیجه ۳۱ حالت مختلف اتفاق می‌افتد.

گروه آموزشی ماز

۲۶- چه تعداد از گزاره‌های زیر درست هستند؟

- تنها شرط اینکه چهار نقطه در یک صفحه باشند، این است که خط‌های واصل هر جفت نقطه، با هم موازی باشند.
- هرگاه  $d \in P$  و  $d' \in P'$  بوده و دو خط d و d' با هم موازی باشند، دو صفحه P و P' نیز موازیند.
- هرگاه دو خط d و d' متنافر باشند، فقط یک خط وجود دارد که بر هر دو عمود باشد.

۳ (۴)

۲ (۳)

۱ (۲)

صفر (۱)

(متوسط - مفهومی - ۱۰۰۴)

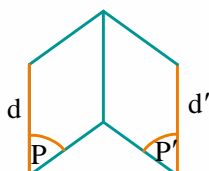
پاسخ: گزینه ۱

اینم یه نکته جذاب دیگه خدمت شما!

اگر d و d' دو خط متنافر باشند، آن‌گاه بی‌شمار خط وجود دارد که بر d و d' عمود است و تنها یک خط وجود دارد که هم بر d و d' عمود است و هم با آن‌ها متقاطع باشد که به آن عمودمشترک دو خط متنافر d و d' می‌گویند.

بررسی گزینه‌ها:

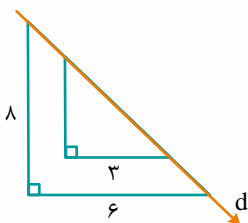
گزاره اول نادرست است، زیرا باید، خط‌های واصل هر جفت نقطه، موازی یا متقاطع یا بر هم منطبق باشند.  
گزاره دوم نادرست است، زیرا نمی‌توان با اطمینان گفت که دو صفحه موازیند. به مثال نقض زیر دقت کنید.



گزاره سوم نادرست است، بی‌شمار خط عمود بر  $d$  و  $d'$  وجود دارد. فقط یک خط عمود و متقاطع با هر دو خط است.

گروه آموزشی ماز

۲۷- از داخل مثلث قائم‌الزاویه‌ای به اضلاع ۶ و ۸، مثلث قائم‌الزاویه‌ای به اضلاع ۳ و ۴ را خارج کرده‌ایم. اگر این شکل را حول خط  $d$  دوران دهیم، حجم شکل حاصل کدام است؟ ( $\pi \approx 3$ )

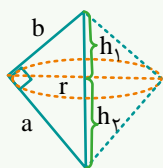


- ۲۰۸ / ۴ (۱)
- ۲۰۱ / ۶ (۲)
- ۱۹۸ / ۲ (۳)
- ۱۹۰ / ۵ (۴)

پاسخ: گزینه ۲ (متوسط - مفهومی / محاسباتی - ۱۰۰۴)

دوران بدیم ببینیم چی میشه؟!

اگر مثلث قائم‌الزاویه‌ای را حول وتر آن دوران دهیم، ۲ مخروط پدید می‌آید با شعاع  $r$  و ارتفاع‌های  $h_1$  و  $h_2$  که  $r$  همان ارتفاع وارد بر وتر است و  $h_1$  و  $h_2$  نیز طول قطعات جدا شده وتر توسط ارتفاع وارد بر وتر می‌باشند.

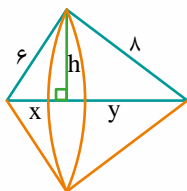


پایخ سبزی

اگر مثلث قائم‌الزاویه با اضلاع ۶ و ۸ را حول وتر دوران دهیم، حجم شکل حاصل به صورت زیر خواهد بود.

اولاً:  $6 \times 8 = h \times 10 \Rightarrow h = 4/8$

$$V = \frac{1}{3} \pi h^2 x + \frac{1}{3} \pi h^2 y = \frac{1}{3} \pi h^2 (x + y)$$

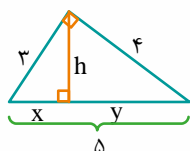


$$V = \frac{1}{3} \pi (4/8)^2 \times 10 = 10 \times (4/8)^2 \quad (1)$$

و اگر مثلث قائم‌الزاویه به اضلاع ۳ و ۴ را حول وتر دوران دهیم، حجم شکل حاصل به صورت زیر است:

اولاً:  $3 \times 4 = h \times 5 \Rightarrow h = 2/4$

$$V = \frac{1}{3} \pi h^2 \times 5 = \frac{1}{3} \times 3 \times (2/4)^2 \times 5 = 5 \times (2/4)^2 \quad (2)$$

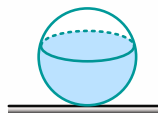


$$(1) - (2): 230/4 - 28/8 = 201/6$$

برای حجم داده شده در سوال کافی است دو عدد را از هم کم کنیم:

گروه آموزشی ماز

۲۸- استخری به شکل کره و به شعاع ۵۰ متر را طوری از آب پر کرده‌ایم که فاصله سطح آب تا پایین‌ترین نقطه کره ۸۰ متر باشد. مساحت سطح آب کدام است؟



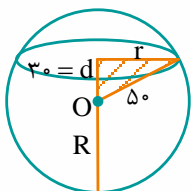
- ۹۰۰π (۱)
- ۱۶۰۰π (۲)
- ۲۵۰۰π (۳)
- ۲۰۰۰π (۴)

پاسخ: گزینه ۲ (متوسط - مفهومی / محاسباتی - ۱۰۰۴)

اگر برش بزنی، چی شکلی میشه?!

اگر کره‌ای را توسط صفحه عمودی برش بزنی، دایره حاصل می‌شود. صفحه افقی

پاسخ تشریحی:



اگر شعاع کره  $R = 50$  و  $R + d = 80$  باشد،  $d = 30$  است، بنابراین:

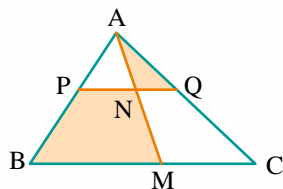
$$r^2 + d^2 = R^2$$

$$r^2 + 900 = 2500 \Rightarrow r = 40$$

$$S = \pi r^2 = \pi \times 1600 = 1600\pi$$

گروه آموزشی ماز

۲۹- در مثلث  $\triangle ABC$ ،  $PQ$  را موازی با قاعده به گونه‌ای رسم می‌کنیم که  $\frac{AP}{BP} = \frac{2}{5}$  و  $\frac{MC}{MB} = \frac{2}{5}$  باشد. نسبت مساحت  $\triangle ANQ$  به مساحت چهارضلعی  $PNMB$  کدام است؟



$$\frac{2}{5} \quad (2)$$

$$\frac{4}{21} \quad (4)$$

$$\frac{4}{5} \quad (1)$$

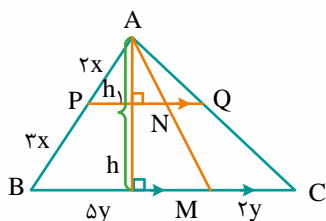
$$\frac{8}{105} \quad (3)$$

(متوسط - مفهومی / محاسباتی - ۱۰۰۳)

پاسخ: گزینه ۳

پاسخ تشریحی:

با توجه به نسبت‌های داده شده خواهیم داشت:



$$PQ \parallel BC \Rightarrow \frac{2x}{5x} = \frac{PN}{\Delta y} = \frac{NQ}{2y} \Rightarrow \begin{cases} PN = 2y \\ NQ = \frac{4}{5}y \end{cases}$$

$$\frac{h_1}{h} = \frac{2}{5} \Rightarrow h = \frac{5h_1}{2}$$

از طرفی، مثلث  $\triangle APN$  و  $\triangle ABM$  متشابه‌اند:

$$\frac{S_{\triangle ANQ}}{S_{PNMB}} = \frac{\frac{1}{2} \times h_1 \times NQ}{\frac{1}{2} \times (PN + BM) \times (h - h_1)} = \frac{h_1 \times \frac{4}{5}y}{(2y + 5y) \times \frac{3h_1}{2}} = \frac{\frac{4}{5}}{\frac{7}{2}} = \frac{8}{105}$$

گروه آموزشی ماز

۳۰- از نقطه‌ای دلخواه داخل مثلث متساوی‌الاضلاع  $\triangle ABC$  به سه ضلع عمودهایی رسم کرده‌ایم. مجموع این فواصل  $2\sqrt{3}$  است. اگر  $M_1$ ،  $M_2$  و  $M_3$  پای سه میانه مثلث باشد، مساحت مثلث  $M_1M_2M_3$  کدام است؟

$$4\sqrt{3} \quad (4)$$

$$3\sqrt{3} \quad (3)$$

$$2\sqrt{3} \quad (2)$$

$$\sqrt{3} \quad (1)$$

(متوسط - مفهومی / محاسباتی - ۱۰۰۳)

پاسخ: گزینه ۱

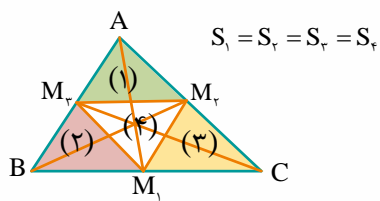
پاسخ تشریحی:

می‌دانیم اگر از هر نقطه دلخواه داخل مثلث متساوی‌الاضلاع به سه ضلع آن عمود کنیم، مجموع سه فاصله برابر است با ارتفاع مثلث که از رابطه  $\frac{a\sqrt{3}}{2}$  به دست می‌آید:

$$\frac{a\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3}$$

$$S_{\triangle ABC} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{4^2\sqrt{3}}{4} = 4\sqrt{3}$$

دقت شود که میانه‌های رسم شده در مثلث  $ABC$ ، آن را به ۴ مثلث هم‌نهشت و هم‌مساحت تقسیم می‌کند، بنابراین:



$$S_1 = S_2 = S_3 = S_4$$

$$S_{\triangle M_1 M_2 M_3} = \frac{1}{4} (4\sqrt{3}) = \sqrt{3}$$

گروه آموزشی ماز

و در آخر آمار و احتمال رو داریم!!!

آمار و احتمال دو مبحثی هستند که در اینجا روشون بحث می‌کنیم. فصل دوم، احتمال و فصل سوم و چهارم، آمار رو پوشش می‌دن. فصل ۷ دهم هم که هر دو رو با هم داره.

ابتدا فصل دوم رو توضیح بدم: این جوری بهت بگم که هر کاری برای زدن تست احتمال تو کنکور لازمه، باید تو این فصل انجام بدی. این فصل کل امتحان کنکور (در زمینه احتمال) رو در برمی‌گیره. مباحثی از قبیل تعداد اعضای فضای نمونه‌ای، پیشامدها، احتمال شرطی، احتمال کل و قانون بیز. سوالات خفن این بحث معمولاً از احتمال شرطی به بعد هستش. سخت‌ترین سوالات و به قولی گول مرحله آخر هم بدون شک سوالات قانون بیز هست. پس سعی کنی روی این مباحث به خوبی مسلط بشی.

اما فصل سوم و چهارم کتاب آمار و احتمال و بحث شیرین و دانشگاهی آمار تقریباً با فهم مطالب همه کنار می‌آیند. پس طراح دست روی نقطه ضعف ما می‌ذاره. یعنی «محاسبات» و محاسبه واریانس، انحراف معیار، CV و ... علاوه بر این‌ها، سوالات این قسمت ممکنه از مباحث نمودار جعبه‌ای، برآورد و ... نیز مطرح بشن. در مورد ۳ فصل مطرح شده تو آزمون، این طور بهت بگم که کتاب آمار و احتمال، یک کتاب برای امتیاز آوردن تو کنکوره! و در نهایت فصل ۷ ریاضی دهم: این فصل هم بخش احتمال داره و هم بخش آمار که دسته‌گرفته به برخی مباحث پرداخته، البته توی بحث آمار یه سری مباحثی داره که در کتاب آمار و احتمال در موردشون بحث نشده، مثل متغیر و انواع آن که خب البته شانس خیلی کمی برای طرح سوال ازشون وجود داره!

**پیش‌نیازهای مطالعه این بخش چه مباحثی است؟**

برای بخش احتمال، باید تسلط خوبی روی بحث مجموعه‌ها، همچنین شمارش داشته باشید. پس باید روی فصل‌های ۱ و ۶ ریاضی دهم و همچنین فصل ۱ کتاب آمار و احتمال یازدهم تسلط پیدا کنید.

بخش آمار هم پیش‌نیاز خاصی نداره و به راحتی می‌شه اون‌ها رو با مباحث ریاضی پایه‌ای که هر دانش‌آموز باید بلد باشه جمع کرد.

**مباحث این بخش در کدام قسمت‌ها کاربرد داره؟**

از این بخش‌ها معمولاً به صورت ایزوله سوال میاد، یعنی خودشون مورد سوال واقع می‌شن و با بخش‌های دیگر، کمتر ترکیب می‌شن. البته باز هم نباید از سوالات ترکیبی غافل شد.

**از این بخش در کنکور سال‌های قبل چه تعداد سوال طرح شده است؟ این سوالات از چه موضوعاتی بوده؟**

۱۴۰۳ (اردیبهشت)	۱۴۰۲	۱۴۰۱ (دی)	۱۴۰۱	۱۴۰۰	۱۳۹۹	۱۳۹۸
۳	۳	۴	۴	۵	۵	۴
احتمال واریانس قانون بیز	احتمال انحراف معیار قانون بیز	احتمال (ترکیب با معادله درجه دوم) احتمال شرطی - پیشامد ناسازگار ضریب تغییرات قانون بیز	احتمال غیر هم‌شانس (ترکیب با دنباله هندسی) احتمال شرطی برآورد واریانس - انحراف از میانگین	احتمال شرطی (ترکیب با فصل ۱ آمار و احتمال) نمودار جعبه‌ای - واریانس احتمال احتمال (ترکیب با فصل ۱ گسسته) احتمال کل	احتمال احتمال شرطی احتمال کل احتمال شرطی نمودار میله‌ای میانگین	احتمال کل (نمودار درختی) پیشامد - اعمال جبری روی پیشامدها میانگین وزنی نمودار جعبه‌ای

**پیش‌بینی شما برای کنکور سال آینده چیه؟**

با توجه به کاهش تعداد سوالات در کنکور و روند مشاهده شده در بالا، پیش‌بینی می‌شود تعداد ۲ - ۳ سوال از احتمال و یک سوال از آمار مطرح شود.

۳۱- عددی سه رقمی و بخش پذیر بر ۴ انتخاب کرده ایم. با کدام احتمال بر ۵ بخش پذیر است ولی بر ۳ بخش پذیر نیست؟

- (۱)  $\frac{1}{5}$       (۲)  $\frac{2}{15}$       (۳)  $\frac{3}{5}$       (۴)  $\frac{4}{25}$

پاسخ: گزینه ۲ (متوسط - مفهومی / محاسباتی - ۱۱۰۲)

می‌فواهیم تو این نکته در مورد تعداد اعداد بخش پذیر بر  $a$  صحبت کنیم!

تعداد اعداد بخش پذیر بر  $a$  در بازه  $[A, B]$  برابر است با:

$$\text{تعداد} = \left[ \frac{B}{a} \right] - \left[ \frac{A-1}{a} \right]$$

پاسخ تشریحی:

اگر فضای نمونه‌ای  $S$  را اعداد سه رقمی بخش پذیر بر ۴ در نظر بگیریم:

$$n(S) = \left[ \frac{999}{4} \right] - \left[ \frac{99}{4} \right] = 249 - 24 = 225$$

آن‌گاه پیشامد مطلوب سوال برابر است با:

$B$  بخش پذیر بر ۳       $C$  بخش پذیر بر ۵

$$n(C - B) = n(C) - n(C \cap B)$$

که البته چون فضای نمونه‌ای سه رقمی‌های بخش پذیر بر ۴ است، خواهیم داشت:

$n(A) = n(\text{بخش پذیر بر } 20) - n(\text{بخش پذیر بر } 60)$  پیشامد  $A$

$$= \left( \left[ \frac{999}{20} \right] - \left[ \frac{99}{20} \right] \right) - \left( \left[ \frac{999}{60} \right] - \left[ \frac{99}{60} \right] \right) = (49 - 4) - (16 - 1) = 45 - 15 = 30$$

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{30}{225} = \frac{6}{45} = \frac{2}{15}$$

### گروه آموزشی ماز

۳۲- تاسی به گونه‌ای ساخته شده است که احتمال وقوع هر عدد متناسب با تعداد مقسوم‌علیه‌های آن است. اگر تاس را پرتاب کنیم، با کدام احتمال عدد رو شده نسبت به ۶ اول است؟

- (۱)  $\frac{1}{14}$       (۲)  $\frac{1}{7}$       (۳)  $\frac{3}{14}$       (۴)  $\frac{2}{7}$

پاسخ: گزینه ۳ (متوسط - مفهومی / محاسباتی - ۱۱۰۲)

خب رسیدیم به احتمال غیر هم‌شانس!

هرگاه حداقل دو پیشامد ساده از فضای نمونه‌ای  $S = \{S_1, S_2, \dots, S_n\}$  احتمال نابرابر داشته باشند،  $S$  را فضای نمونه‌ای با احتمال غیرهم‌شانس می‌گوییم. مثل همین سوال!

پاسخ تشریحی:

می‌دانیم اگر  $p(1)$  احتمال وقوع عدد ۱،  $p(2)$  احتمال وقوع عدد ۲ و ...  $p(6)$  احتمال وقوع عدد ۶ باشد:

$$p(1) + p(2) + \dots + p(6) = 1$$

$$1t + 2t + 2t + 3t + 2t + 4t = 1 \Rightarrow 14t = 1 \Rightarrow t = \frac{1}{14}$$

$$\Rightarrow p(1) = \frac{1}{14} \quad p(2) = \frac{2}{14} \quad p(3) = \frac{2}{14} \quad p(4) = \frac{3}{14} \quad p(5) = \frac{2}{14} \quad p(6) = \frac{4}{14}$$

پیشامد مطلوب  $= \{1, 5\}$

$$p(1) + p(5) = t + 2t = 3t = \frac{3}{14}$$

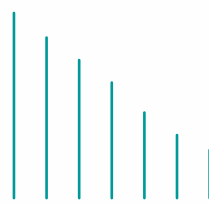
### گروه آموزشی ماز

۳۳- یک تیم والیبال، ۷ والیبالیست دارد که قد هیچ دو نفری از آن‌ها برابر نیست. یک والیبالیست انتخاب می‌کنیم. اگر دو نفر دیگر انتخاب کنیم و هر دو از والیبالیست اول کوتاهتر باشند، با چه احتمالی والیبالیست اول بلندقدترین است؟

- (۱)  $\frac{1}{7}$       (۲)  $\frac{2}{7}$       (۳)  $\frac{3}{7}$       (۴)  $\frac{4}{7}$

پاسخ: گزینه ۳ (متوسط - مفهومی / محاسباتی - ۱۱۰۲)

پاسخ تشریحی:



اگر جایگاه‌های قد ۷ نفر را به صورت (۱) (۲) (۳) (۴) (۵) (۶) (۷) در نظر بگیریم، فضای نمونه‌ای به صورت  $7! \times 4!$  خواهد بود. به عبارتی، ۳ جایگاه را انتخاب می‌کنیم و چون می‌دانیم ۲ نفر از نفر اولی کوتاه‌ترند، جایگاه بلندترین را به نفر اول می‌دهیم و ۲ نفر دیگر ۲ جابه‌جایی در جایگاه‌های دیگر دارند و ۴ نفر دیگر نیز در ۴ جایگاه مانده، ۴! جابه‌جایی دارند. در نتیجه احتمال اینکه نفر اول بلندقدترین باشد، برابر است با:

$$P(\text{شرطی}) = \frac{1 \times 6!}{\binom{7}{3} \times 2 \times 4!} = \frac{2}{7}$$

گروه آموزشی ماز

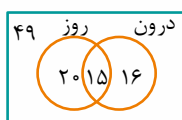
۳۴- آمار نشان می‌دهد که در شهر تهران ۰/۳۵ جرائم در طول روز و ۰/۳۱ جرائم در درون شهر صورت می‌گیرد. اگر ۰/۲ جرائم در حومه شهر و طول روز اتفاق بیفتد، در این صورت، اگر جرمی اتفاق افتاده باشد، با چه احتمالی در حومه شهر و در طول شب بوده است؟

- ۰/۱۶ (۱)      ۰/۴۹ (۲)      ۰/۶۵ (۳)      ۰/۶۶ (۴)

پاسخ: گزینه ۲ (متوسط - مفهومی / محاسباتی - ۱۱۰۲)

پاسخ تشریحی:

بهترین راه حل این سوال، استفاده از نمودار به صورت زیر است:



مطلوب سوال =  $\frac{49}{100}$

گروه آموزشی ماز

۳۵- دو کیسه داریم، در کیسه A، ۵ مهره قرمز و ۳ مهره آبی و در کیسه B، ۴ مهره قرمز و ۴ مهره آبی وجود دارد. ۶ مهره به تصادف از کیسه B برداشته و به کیسه A اضافه می‌کنیم و سپس از کیسه A مهره‌ای برمی‌داریم. با کدام احتمال این مهره قرمز است؟

- $\frac{1}{2}$  (۱)       $\frac{4}{7}$  (۲)       $\frac{1}{4}$  (۳)       $\frac{2}{3}$  (۴)

پاسخ: گزینه ۲ (متوسط - مفهومی / محاسباتی - ۱۱۰۲)

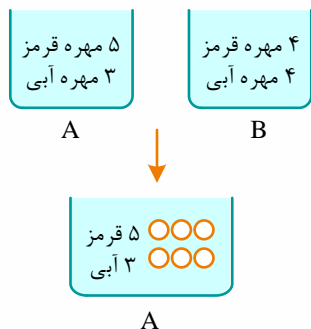
قانون احتمال کل چی میگه!؟

فرض کنید  $B_1, B_2, \dots, B_n$  پیشامدهایی با احتمال ناصفر باشند که فضای نمونه‌ای را افراز می‌کنند. در این صورت، برای هر پیشامد دلخواه A، داریم:

$$P(A) = P(B_1)P(A|B_1) + P(B_2)P(A|B_2) + \dots + P(B_n)P(A|B_n) = \sum_{k=1}^n P(B_k)P(A|B_k)$$

پاسخ تشریحی:

اگر دو ظرف را در نظر بگیریم، خواهیم داشت:



مهره‌ای که از کیسه A انتخاب می‌کنیم یا از مهره‌های قدیمی ظرف است که احتمال آن  $\frac{4}{14}$  است و یا از مهره‌هایی است که از ظرف B به ظرف A منتقل شده است که احتمال آن  $\frac{6}{14}$  است. در نتیجه:

$$P = \frac{8}{14} \times \frac{5}{8} + \frac{6}{14} \times \frac{1}{2} = \frac{5}{14} + \frac{3}{14} = \frac{8}{14} = \frac{4}{7}$$

گروه آموزشی ماز

۳۶- خانواده‌ای ۴ فرزند دارد. فرزندی را به تصادف انتخاب می‌کنیم و می‌بینیم خواهر بزرگ‌تر از خود دارد. با کدام احتمال او کوچک‌ترین فرزند خانواده است؟

$\frac{3}{4}$  (۴)

$\frac{7}{8}$  (۳)

$\frac{15}{16}$  (۲)

$\frac{7}{17}$  (۱)

پاسخ: گزینه ۱ (متوسط - مفهومی / محاسباتی - ۱۱۰۲)

یه سر هم به قانون بیز بنسیم!

قانون بیز: فرض کنید  $B_1, B_2, \dots, B_n$  پیشامدهایی با احتمال ناصفر باشند که فضای نمونه‌ای را افراز می‌کنند. در این صورت، برای هر پیشامد دلخواه  $A$  و هر  $i \leq n$  داریم:

$$P(B_i | A) = \frac{P(B_i)P(A|B_i)}{P(A)}$$

همچنین  $P(A)$  را می‌توان به صورت  $\sum_{k=1}^n P(B_k)P(A|B_k)$  نوشت.



احتمال اینکه خواهر بزرگ‌تر داشته باشد  $P(A) =$   
 احتمال اینکه کوچک‌ترین فرزند خانواده باشد  $P(B_4) =$

سوال از ما  $P(B_4 | A)$  را خواسته است. با استفاده از قانون بیز داریم:

$$P(B_4 | A) = \frac{P(A | B_4)P(B_4)}{P(A | B_1)P(B_1) + P(A | B_2)P(B_2) + P(A | B_3)P(B_3) + P(A | B_4)P(B_4)}$$

$P(B_1)$ : احتمال اینکه اولین فرزند خانواده باشد.

$P(B_2)$ : احتمال اینکه دومین فرزند خانواده باشد.

$P(B_3)$ : احتمال اینکه سومین فرزند خانواده باشد.

اکنون داریم:

$$P = \frac{\frac{1}{4} \times \frac{7}{8}}{\frac{1}{4} \times \frac{1}{8} + \frac{1}{4} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \times \frac{3}{4} + \frac{1}{4} \times \frac{7}{8}}$$

احتمال اینکه خواهر بزرگ‌تر داشته باشد  
 فرزند اول

$$P = \frac{\frac{7}{32}}{\frac{1}{8} + \frac{3}{16} + \frac{7}{32}} = \frac{7}{17}$$

گروه آموزشی ماز

۳۷- اگر میانگین داده‌های  $\log 2, \log \frac{3}{4}, \log \frac{4}{3}, \log \frac{5}{4}$  را  $m$  و انحراف معیار داده‌های  $2, 5, 8, 11, 14$  را  $n$  بنامیم، آن‌گاه  $mn$  کدام است؟  $(\log 5 \approx \frac{\sqrt{2}}{2})$

$1/25$  (۴)

$1/5$  (۳)

$0/75$  (۲)

$0/5$  (۱)

پاسخ: گزینه ۲ (متوسط - ترکیبی / محاسباتی - ۱۱۰۳)

۳ تا فرمول فقط می‌خواهیم بگیریم، همین!

اگر داده‌های ما  $X_1, X_2, \dots, X_n$  باشند، آن‌گاه میانگین و واریانس و انحراف معیار برابر هستند با:

$$\bar{x} = \frac{X_1 + X_2 + \dots + X_n}{n}$$

$$\sigma^2 = \frac{(x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + \dots + (x_n - \bar{x})^2}{n}$$

$$\sigma = \sqrt{\sigma^2}$$

$$m = \bar{x} = \frac{\log 2 + \log \frac{3}{2} + \log \frac{4}{3} + \log \frac{5}{4}}{4} = \frac{\log \left( \frac{2}{1} \times \frac{3}{2} \times \frac{4}{3} \times \frac{5}{4} \right)}{4} = \frac{\log 5}{4} = \frac{\sqrt{2}}{8}$$

می‌دانیم اگر  $n$  داده تشکیل دنباله حسابی با قدرنسبت  $d$  دهند، واریانس آن‌ها برابر است با:

$$\sigma^2 = \frac{k^2 - 1}{12} \cdot d^2 \Rightarrow n^2 = \sigma^2 = \frac{5^2 - 1}{12} \times 9 = 18 \xrightarrow{\text{انحراف معیار}} \sigma = n = 3\sqrt{2}$$

$$\Rightarrow mn = \frac{\sqrt{2}}{8} \times 3\sqrt{2} = \frac{6}{8} = \frac{3}{4} = 0.75$$

گروه آموزشی ماز

۳۸- ضریب تغییرات داده‌های ۲۲۰، ۲۲۲، ۲۲۱، ۲۲۲، ۲۳۰ کدام است؟

$\frac{\sqrt{13}}{221}$  (۴)

$\frac{\sqrt{12/8}}{221}$  (۳)

$\frac{\sqrt{13}}{223}$  (۲)

$\frac{\sqrt{12/8}}{223}$  (۱)

(متوسط - مفهومی / محاسباتی - ۱۱۰۳)

پاسخ: گزینه ۱

فرمول ضریب تغییرات چی بود بچه‌ها!؟

اگر میانگین تعدادی داده،  $\bar{x}$  و انحراف معیار آن‌ها  $\sigma$  باشد، آن‌گاه ضریب تغییرات داده‌ها (CV) برابر است با:  $CV = \frac{\sigma}{\bar{x}}$

می‌دانیم اگر از داده‌ها عددی کم شود، انحراف معیار و واریانس تغییری نمی‌کنند، بنابراین برای راحتی کار از همه داده‌ها ۳۲۰ را کم می‌کنیم.  
۰، ۲، ۱، ۲، ۱۰

$$\bar{x} = \frac{15}{5} = 3$$

$$\sigma^2 = \frac{9 + 1 + 4 + 1 + 49}{5} = \frac{64}{5} = 12.8$$

$$\bar{x} = 3 + 320 = 323$$

میانگین داده‌ها:

$$CV = \frac{\sqrt{12.8}}{323} \quad \text{در نتیجه ضریب تغییرات داده‌ها از رابطه } CV = \frac{\sigma}{\bar{x}} \text{ به دست می‌آید:}$$

گروه آموزشی ماز

۳۹- اگر اعداد طبیعی تک رقمی کوچک‌تر از ۹ را به عنوان جامعه آماری در نظر بگیریم. با کدام احتمال، یک نمونه ۶ عضوی، میانگین را دقیق برآورد می‌کند؟

$\frac{1}{5}$  (۴)

$\frac{1}{7}$  (۳)

$\frac{1}{9}$  (۲)

$\frac{1}{3}$  (۱)

(سخت - ترکیبی / محاسباتی - ۱۱۰۴)

پاسخ: گزینه ۳

$$\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\} \xrightarrow{\text{دنباله حسابی}} \bar{x} = \frac{1+8}{2} = 4.5$$

$$\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_6}{6} = 4.5 \Rightarrow \sum_{i=1}^6 a_i = 27$$

می‌دانیم که  $\sum_{i=1}^8 a_i = 36$  است. پس بهتر است حالت‌هایی که جمع دو عدد  $9 = 36 - 27$  است را در نظر بگیریم:

$$\{1, 8\} \quad \{2, 7\} \quad \{3, 6\} \quad \{4, 5\}$$

$$P = \frac{4}{\binom{8}{6}} = \frac{4}{28} = \frac{1}{7}$$

گروه آموزشی ماز

۴۰ - حد بالا و پایین فاصله ۹۵ درصدی برای یک جامعه که با استفاده از نمونه ۱۶۰۰ تایی برآورد شده است برابر  $۵۷/۵$  و  $۵۲/۵$  می باشد. اختلاف میانگین نمونه و انحراف معیار جامعه کدام است؟

۱۱ (۴)

۶ (۳)

۵ (۲)

۳ (۱)

پاسخ: گزینه ۲ (متوسط - محاسباتی - ۱۱۰۴)

بزن بریم سمت برآورد:

برآورد بازه‌ای برای میانگین جامعه: اگر نمونه‌ای تصادفی به اندازه  $n$  در اختیار داشته باشیم، با اطمینان بیش از ۹۵٪ می‌توانیم بگوییم:

$$\bar{x} - \frac{2\sigma}{\sqrt{n}} \leq \mu \leq \bar{x} + \frac{2\sigma}{\sqrt{n}}$$

که  $\mu$  میانگین جامعه و  $\sigma$  انحراف معیار جامعه است.

پاسخ سریعی:

$$\begin{cases} \bar{x} + \frac{2\sigma}{40} = 57/5 \\ \bar{x} - \frac{2\sigma}{40} = 52/5 \end{cases} \Rightarrow 2\bar{x} = 110 \Rightarrow \bar{x} = 55$$

$$\Rightarrow 55 + \frac{\sigma}{20} = 57/5 \Rightarrow \sigma = 50$$

سوال:  $\bar{x} - \sigma = 5$

گروه آموزشی ماز

### جمع بندی سریع

فب فسته نباشیدا هلا بریم کل مباحث این آزمون رو به شکل نمودار درختی مرور کنیم تا به نقشه ذهنی فوب از این مباحث توی ذهنتون شکل بگیره!

نمایش زوج مرتبی: هیچ دو زوج مرتبی مولفه اول برابر نداشته باشند مگر اینکه مولفه دوم دو زوج مرتب نیز با هم برابر باشند.

نمایش نموداری: هر خط موازی محور  $y$  ها نمودار تابع را حداکثر در یک نقطه قطع کند.

نمایش پیکانی: از هر عضو مجموعه اول دقیقاً یک پیکان خارج شود.

تابع

تابع ثابت:  $f(x) = C, C \in \mathbb{R}$

تابع همانی:  $f(x) = x$

تابع خطی:  $f(x) = ax + b$

تابع جزء صحیح:  $f(x) = [g(x)]$

تابع قدرمطلق:  $f(x) = |g(x)|$

توابع مثلثاتی

توابع نمایی و لگاریتمی

انواع

گروه آموزشی ما

تعریف: مجموعه  $x$  ها (ورودی‌های تابع

دامنه تابع

توابع چندجمله‌ای:  $D = \mathbb{R}$

توابع گویا:  $D = \mathbb{R} - \{\text{ریشه‌های مخرج}\}$

تابع هموگرافیک:  $y = \frac{ax+b}{cx+d}$   $\leftarrow$   $D_y = \mathbb{R} - \left\{ -\frac{d}{c} \right\}$   $\leftarrow$   $ad-bc \neq 0$

$f(x) \geq 0$

$y \equiv \sqrt[n]{f(x)}$

اگر رادیکال در مخرج کسر باشد:  $f(x) > 0$

$D_y = D_f \leftarrow y \equiv \sqrt[n]{f(x)}$

$f(x) > 0$

$y = \log_{g(x)}^{f(x)}$

$g(x) > 0$

$g(x) \neq 1$

$D_y = D_f \leftarrow y = \sin f(x)$

$D_y = D_f \leftarrow y = \cos f(x)$

$D_y = \left\{ x \in D_f : f(x) \neq k\pi + \frac{\pi}{2} \right\} \leftarrow y = \tan f(x)$

تعریف: مجموعه y ها به ازای x های تابع

برد تابع

$R = \mathbb{R} \leftarrow y = \log_a x$

$R = (0, +\infty) \leftarrow y = a^x$

$R = [0, +\infty) \leftarrow y = \sqrt{x}$

$R = \mathbb{R} - \left\{ \frac{a}{c} \right\} \leftarrow \frac{ad-bc \neq 0}{y = \frac{ax+b}{cx+d}}$

$R = [-1, 1] \leftarrow y = \sin x$

$R = [-1, 1] \leftarrow y = \cos x$

$R = \mathbb{R} \leftarrow y = \tan x$

$R = \left[ \frac{-\Delta}{4a}, +\infty \right)$

$a > 0$

$y = ax^2 + bx + c$

$R = \left( -\infty, -\frac{\Delta}{4a} \right]$

$a < 0$

برد توابع معروف

گروه آموزشی سازه

نمایش زوج مرتبی: مولفه اول و دوم تکراری نباشند و اگر مولفه دوم دو زوج مرتب با هم برابر باشند باید مولفه اول آن‌ها نیز با هم برابر باشند.

هر خط موازی محور  $y$  ها نمودار تابع را حداکثر در یک نقطه قطع کند.

هر خط موازی محور  $x$  ها نمودار تابع را حداکثر در یک نقطه قطع کند.

نمایش نموداری

تابع یک به یک

یک به یک های معروف

$$y = \log_a^x$$

$$y = a^x$$

$$y = \sqrt{ax + b}$$

$$(ad - bc \neq 0) \quad y = \frac{ax + b}{cx + d}$$

توابع مثلثاتی

$$y = ax^2 + bx + c$$

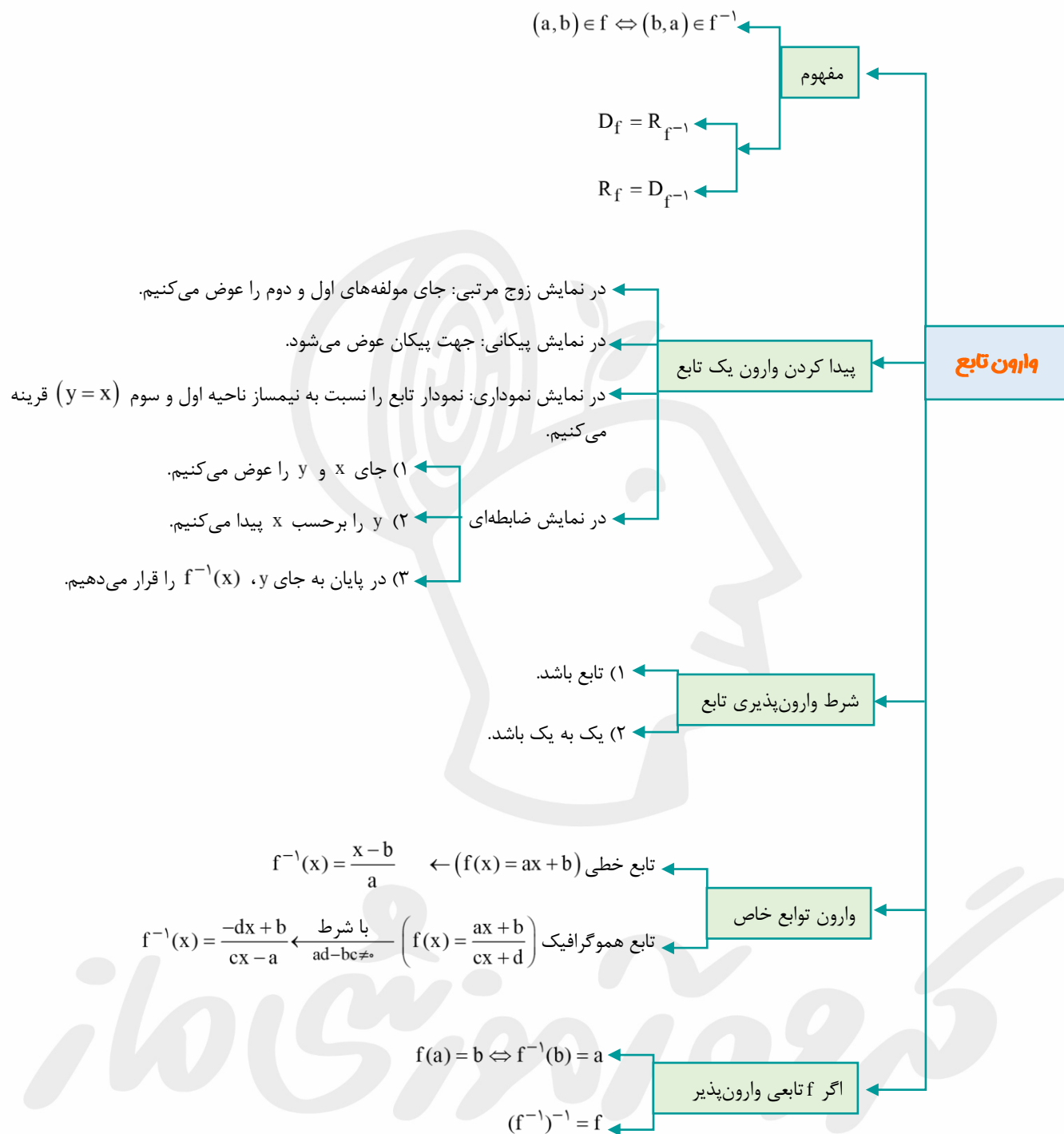
تابع درجه دوم

$$y = |ax + b|$$

$$y = [ax + b]$$

غیر یک به یک های معروف

گروه آموزشی ماز



$$(f \pm g)(x) = f(x) \pm g(x)$$

$$(f \cdot g)(x) = f(x)g(x)$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}, g(x) \neq 0$$

$$D_{f \pm g} = D_f \cap D_g$$

$$D_{f \cdot g} = D_f \cap D_g$$

$$D_{\frac{f}{g}} = D_f \cap D_g - \{x | g(x) = 0\}$$

ضابطه‌ها

دامنه

اعمال جبری روی توابع

**توجه:** اعمال روی توابع، فقط به ازای دامنه مشترک (مولفه اول مشترک در نمایش زوج مرتبی) صورت می‌گیرد.

گروه آموزشی ماز

نمودار جدید ( $a, k > 0$ )	توضیحات و نحوه رسم
$f(x + a)$	نمودار تابع $f$ را به اندازه $a$ واحد در راستای محور $x$ ها به سمت چپ منتقل می‌کنیم.
$f(x - a)$	نمودار تابع $f$ را به اندازه $a$ واحد در راستای محور $x$ ها به سمت راست منتقل می‌کنیم.
$f(x) + a$	نمودار تابع $f$ را به اندازه $a$ واحد در راستای محور $y$ ها به سمت بالا منتقل می‌کنیم.
$f(x) - a$	نمودار تابع $f$ را به اندازه $a$ واحد در راستای محور $y$ ها به سمت پایین منتقل می‌کنیم.
$f(-x)$	نمودار تابع $f$ را نسبت به محور $y$ ها قرینه می‌کنیم.
$-f(x)$	نمودار تابع $f$ را نسبت به محور $x$ ها قرینه می‌کنیم.
$-f(-x)$	نمودار تابع $f$ را ابتدا نسبت به محور $x$ ها و سپس نسبت به محور $y$ ها قرینه می‌کنیم (قرینه نسبت به مبدأ مختصات)
$f(kx)$	$k > 1$ نمودار تابع $f$ را در راستای محور $x$ ها با ضریب $\frac{1}{k}$ منقبض (فشرده) می‌کنیم.
	$0 < k < 1$ نمودار تابع $f$ را در راستای محور $x$ ها با ضریب $\frac{1}{k}$ منبسط (کشیده) می‌کنیم.
$kf(x)$	$k > 1$ نمودار تابع $f$ را در راستای محور $y$ ها با ضریب $k$ منبسط (کشیده) می‌کنیم.
	$0 < k < 1$ نمودار تابع $f$ را در راستای محور $y$ ها با ضریب $k$ منقبض (فشرده) می‌کنیم.
$ f(x) $	ابتدا نمودار تابع $f$ را رسم کرده و سپس هر آنچه زیر محور $x$ ها قرار دارد را نسبت به محور $x$ ها قرینه می‌کنیم.
$f( x )$	ابتدا نمودار تابع $f$ را رسم کرده و سپس هر آنچه در سمت راست محور $y$ ها قرار دارد را در سمت چپ کپی می‌کنیم.

$$a \xrightarrow{g} b \xrightarrow{f} c \quad \text{fog}(a) = c \quad \text{fog}(x) = f(g(x))$$

$$a \xrightarrow{f} b \xrightarrow{g} c \quad \text{gof}(a) = c \quad \text{gof}(x) = g(f(x))$$

تعریف

$$D_{\text{fog}} = \{x \mid x \in D_g, g(x) \in D_f\}$$

$$D_{\text{gof}} = \{x \mid x \in D_f, f(x) \in D_g\}$$

دامنه تابع مرکب

$$D_{f^{-1} \circ f} = D_f$$

$$R_{f^{-1} \circ f} = D_f$$

$$f^{-1} \circ f(x) = x$$

$$D_{\text{fof}^{-1}} = D_{f^{-1}} = R_f$$

$$R_{\text{fof}^{-1}} = R_f$$

$$\text{fof}^{-1}(x) = x$$

ترکیب یک تابع با وارون خود

در حالت کلی  $f^{-1} \circ f(x) \neq \text{fof}^{-1}(x)$  ← شرط برابری:  $D_f = R_f$

ترکیب توابع

$$(\text{fog})^{-1} = g^{-1} \circ f^{-1}$$

$$(\text{gof})^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$$

اگر  $f$  و  $g$  توابعی وارون پذیر باشند.



تابع لگاریتمی  $y = \log_a^x$

$0 < a < 1$	$a > 1$	وضعیت
		نمودار
$(0, +\infty)$	$(0, +\infty)$	دامنه
$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	برد
<p>اکیداً نزولی و یکتوا</p> $x_2 > x_1 \leftrightarrow f(x_2) < f(x_1)$	<p>اکیداً صعودی و یکتوا</p> $x_2 > x_1 \leftrightarrow f(x_2) > f(x_1)$	وضعیت یکنوایی
یک‌به‌یک و وارون‌پذیر	یک‌به‌یک و وارون‌پذیر	وضعیت یک‌به‌یک بودن
در نقطه $(1, 0)$ محور $x$ ها را قطع می‌کند.	در نقطه $(1, 0)$ محور $x$ ها را قطع می‌کند.	وضعیت نسبت به محور $x$ ها
برخورد ندارد	برخورد ندارد	وضعیت نسبت به محور $y$ ها
$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$ $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty$	$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty$	وضعیت حدی

ویژگی‌های لگاریتم

ویژگی	مثال
$\log_a^1 = 0$	$\log_7^1 = 0$
$\log_a^a = 1$	$\log_7^7 = 1$
$\log_a^{b^n} = n \log_a^b$	$\log_{\Delta}^{12\Delta} = \log_{\Delta}^{\Delta^3} = 3 \log_{\Delta}^{\Delta}$
$\log_a^{b^m} = \frac{m}{n} \log_a^b$	$\log_{\sqrt{10}}^{(10^{\circ})} = \log_{10^{\frac{1}{2}}}^{10^{-2}} = -4 \log_{10}^{10} = -4$
$\log_a^{bc} = \log_a^b + \log_a^c$	$\log_{\sqrt{2}}^4 + \log_{\sqrt{2}}^{16} = \log_{\sqrt{2}}^{64} = \log_{\frac{1}{2}}^{2^6} = 12$
$\log_a^{\left(\frac{b}{c}\right)} = \log_a^b - \log_a^c$	$\log_2^{52} - \log_2^{12} = \log_2^{13} = \log_2^4 = 2$
$\log_a^b = \frac{\log_c^b}{\log_c^a}$ (تغییر مبنا)	$\log_3^4 = \frac{\log_4^3}{\log_4^4}$ (تغییر مبنا به ۱۰)
${}_c \log_a^b = b \log_a^c$	$(\wedge 1) \log_3^{\sqrt{7}} = (\sqrt{7}) \log_3^{\wedge 1} = (\sqrt{7})^4 = 4$
$\log_a^b \times \log_b^c \times \dots \times \log_n^m = \log_a^m$	$\log_3^2 \times \log_2^{\sqrt{3}} \times \log_{\sqrt{3}}^4 = \log_3^2 \times 2 \log_2^{\sqrt{3}} \times (-\log_2^{\sqrt{3}}) = -2$
$\log_a^b = \frac{1}{\log_b^a}$	$\log_3^2 = \frac{1}{\log_2^3}$

$a^{f(x)} = a^{g(x)} \Leftrightarrow f(x) = g(x)$

روش تغییر متغیر  $(t = a^x)$

روش رسم هندسی

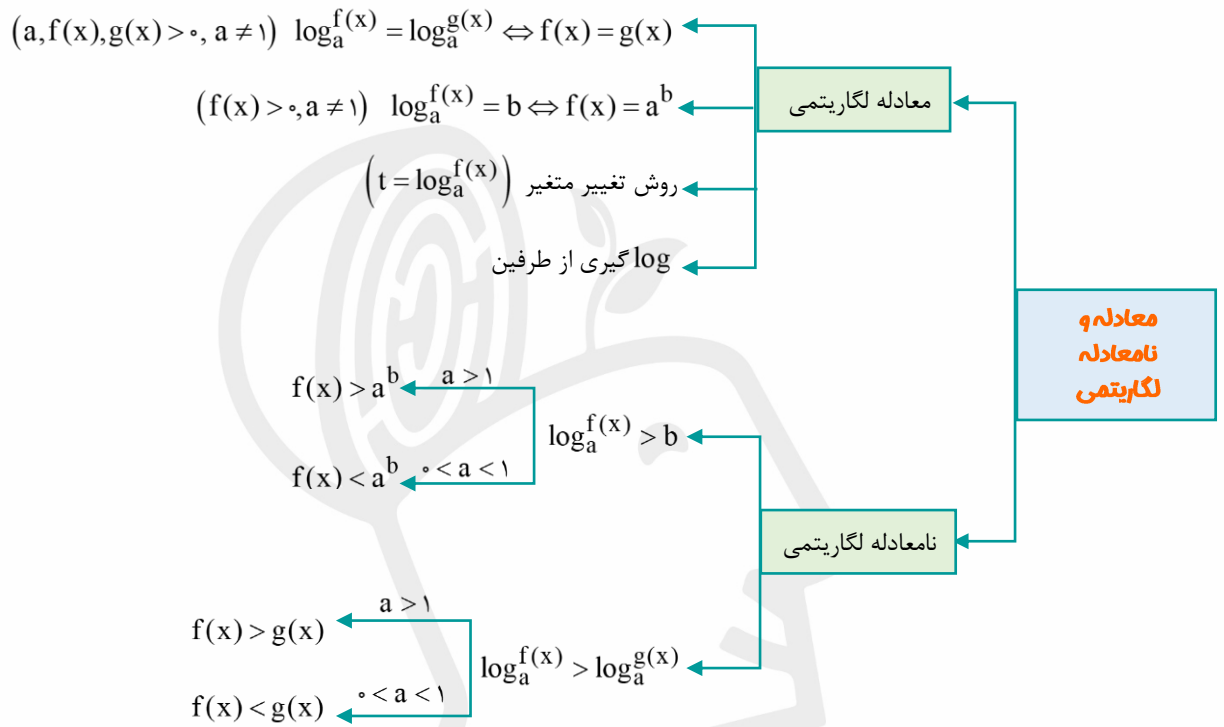
معادله نمایی

معادله و نامعادله نمایی

$a^{f(x)} > a^{g(x)} \Leftrightarrow f(x) > g(x) : a > 1$

$a^{f(x)} < a^{g(x)} \Leftrightarrow f(x) > g(x) : 0 < a < 1$

نامعادله نمایی



گروه آموزشی سازه

**چندضلعی‌ها و ویژگی‌های آنها**

تعداد قطر یک  $n$  ضلعی  $\frac{n(n-3)}{2}$

$n$  ضلعی محدب ← هرگاه با در نظر گرفتن خط شامل هر ضلع آن، بقیه نقاط چندضلعی در یک طرف آن خط واقع شوند.

$n$  ضلعی مقعر ← هر  $n$  ضلعی‌ای که محدب نباشد.

متوازی‌الاضلاع: هر دو ضلع مقابل آن موازی است.

مستطیل: همهٔ زاویه‌های آن قائمه است.

لوزی: همهٔ اضلاع آن برابر است.

مربع: همهٔ اضلاع آن برابر است و حداقل یک زاویهٔ قائمه دارد.

دوزنقه: فقط دو ضلع موازی دارد.

دوزنقهٔ متساوی‌الساقین: فقط دو ضلع آن موازی است و دو ضلع دیگر آن برابرند.

بچه‌های متوازی‌الاضلاع (مستطیل، لوزی، مربع) ← هر (مستطیل، لوزی، مربع) یک متوازی‌الاضلاع است.

بچهٔ مستطیل ← مربع ← هر مربع یک لوزی است.

بچهٔ دوزنقه ← دوزنقهٔ متساوی‌الساقین ← هر دوزنقه متساوی‌الساقین، یک دوزنقه است.

ویژگی‌های متوازی‌الاضلاع

هر دو ضلع مقابل، موازی‌اند.

هر دو ضلع مقابل، هم‌اندازه‌اند.

هر دو زاویهٔ مجاور، مکمل‌اند.

هر دو زاویهٔ مقابل، هم‌اندازه‌اند.

قطرها منصف‌اند.

ویژگی‌های مستطیل

تمام ویژگی‌های متوازی‌الاضلاع

همهٔ زاویه‌های آن قائم‌اند.

قطرها با هم برابرند.

ویژگی‌های لوزی

تمام ویژگی‌های متوازی‌الاضلاع

همهٔ اضلاع آن برابرند.

قطرها، نیمساز زاویه‌ها هستند.

قطرها، عمود بر هم هستند.

ویژگی‌های مربع

تمام ویژگی‌های مستطیل

تمام ویژگی‌های لوزی

فقط دو ضلع موازی دارد. (قاعده)

ویژگی‌های دوزنقه

زوایای مجاور به ساق‌ها، مکمل‌اند.

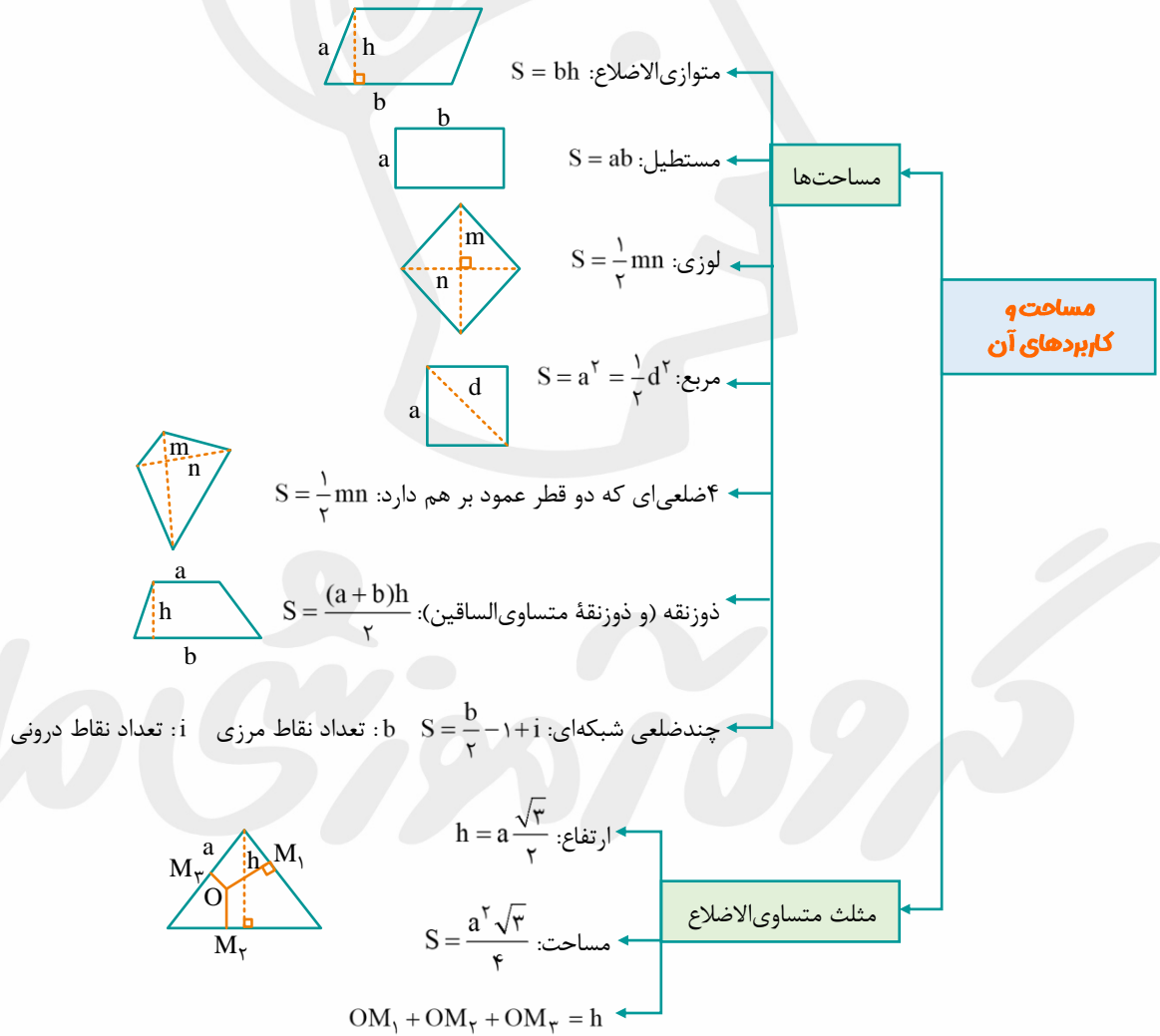
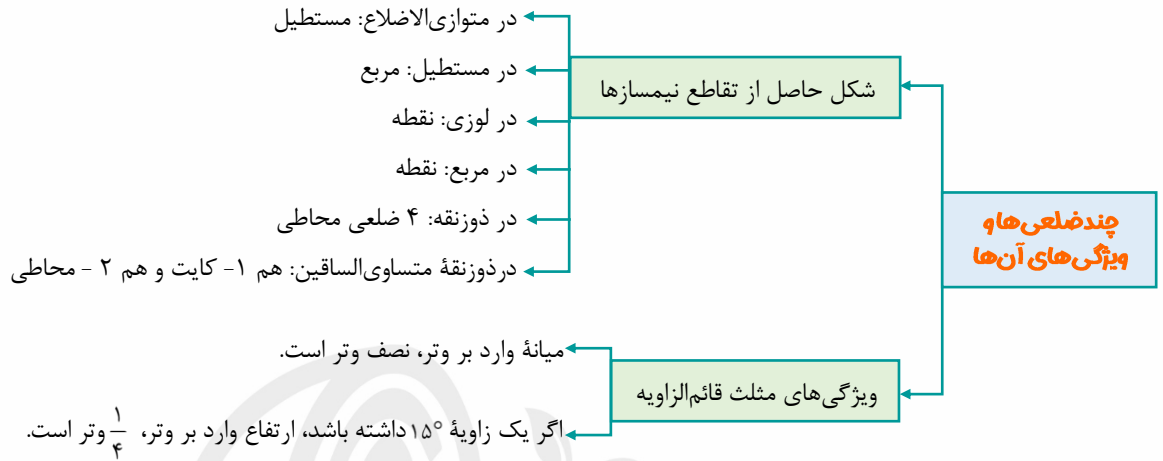
ویژگی‌های دوزنقه متساوی‌الساقین

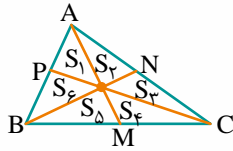
تمام ویژگی‌های دوزنقه

دو ضلع غیرموازی آن برابرند. (ساق‌ها)

زوایای مجاور با یک قاعده، برابرند.

طول قطرها برابر است.





$$AG = 2GM \quad AM = 3GM$$

نسبت ایجاد شده (۲ به ۱):

۳ میانه مثلث، آن را به ۶ مثلث هم مساحت تقسیم می کنند:

$$S_1 = S_2 = S_3 = S_4 = S_5 = S_6$$

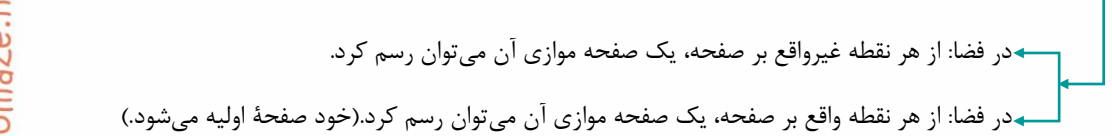
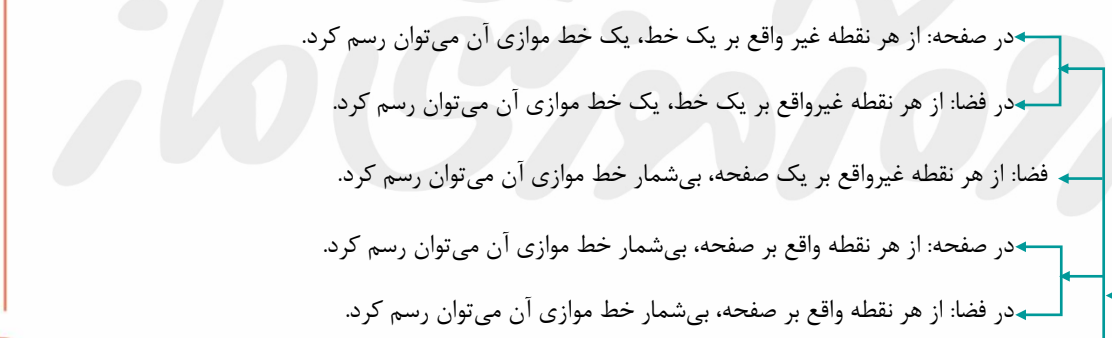
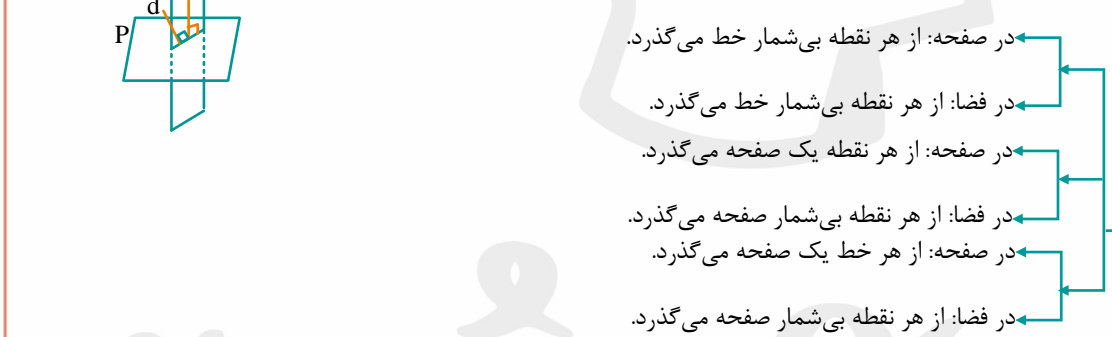
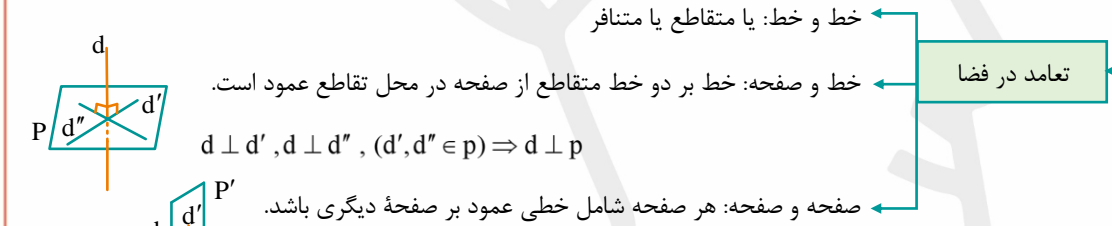
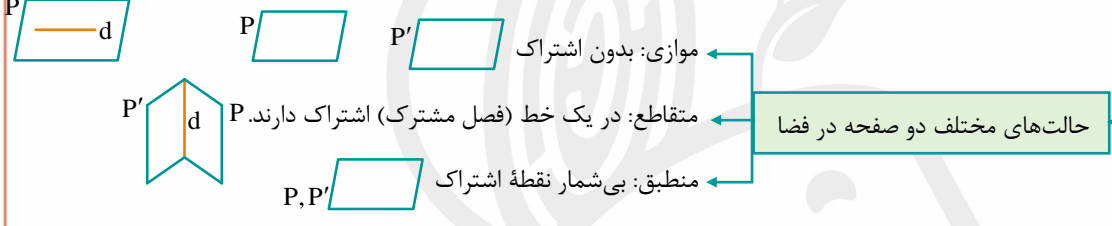
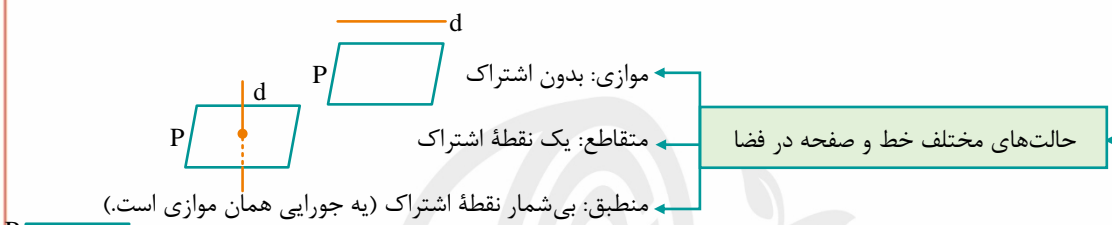
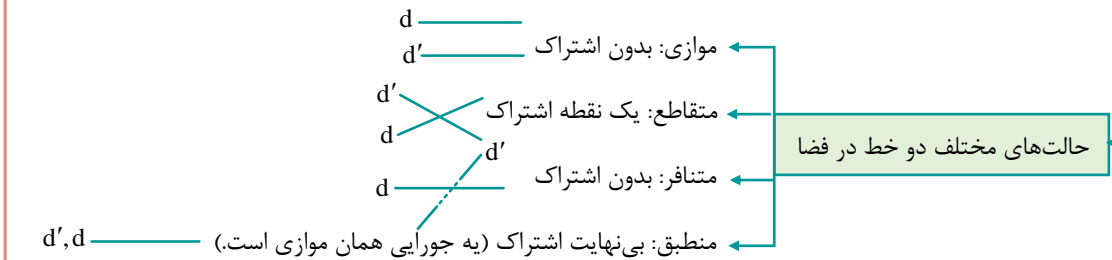
اوساط مثلث، آن را به ۴ مثلث هم منهدشت و هم مساحت تقسیم می کنند.

۳ میانه هم رس اند.

میانه و ویژگی های آن

گروه آموزشی سازه

خط، نقطه و صفحه



خط، نقطه و صفحه

- در صفحه: از هر نقطه غیر واقع بر یک خط، یک خط عمود بر آن رسم کرد.
- در فضا: از هر نقطه غیر واقع بر یک خط، دو خط عمود بر آن می توان رسم کرد.
- در صفحه: از هر نقطه واقع بر یک خط، یک خط عمود بر آن می توان رسم کرد.
- در فضا: از هر نقطه غیر واقع بر یک خط، بی شمار خط عمود بر آن می توان رسم کرد.
- در صفحه: از هر نقطه واقع بر صفحه، هیچ خطی عمود بر آن نمی توان رسم کرد.
- در فضا: از هر نقطه واقع بر صفحه، یک خط عمود بر آن می توان رسم کرد.
- در فضا: از هر نقطه غیر واقع بر صفحه، بی شمار صفحه عمود بر آن می توان رسم کرد.
- در فضا: از هر نقطه واقع بر صفحه، بی شمار صفحه عمود بر آن می توان رسم کرد.
- در صفحه: دو خط موازی با یک خط، با هم موازی اند.
- در فضا: دو خط موازی با یک خط، با هم موازی اند.
- در صفحه: دو خط موازی با یک صفحه (منطبق بر صفحه)، با هم موازی، متقاطع یا منطبق اند.
- در فضا: دو خط موازی با یک صفحه، با هم موازی، متقاطع، متناظر یا منطبق اند.
- در فضا: دو صفحه موازی با یک خط، با هم موازی یا منطبق اند.
- در فضا: دو صفحه موازی با یک صفحه، با هم موازی یا منطبق اند.
- در صفحه: دو خط عمود بر یک خط، با هم موازی یا منطبق اند.
- در فضا: دو خط عمود بر یک خط، با هم موازی، متقاطع، متناظر یا منطبق اند.
- در فضا: دو خط عمود بر یک صفحه، با هم موازی یا منطبق اند.
- در صفحه: دو صفحه عمود بر یک صفحه، با هم موازی یا منطبق اند.
- در صفحه: از یک نقطه بی شمار خط می گذرد.
- در فضا: از یک نقطه بی شمار خط می گذرد.
- در فضا: از یک نقطه بی شمار صفحه می گذرد.
- در فضا: از یک خط بی شمار صفحه می گذرد.
- در فضا: از دو خط موازی یک صفحه می گذرد.
- در فضا: از دو خط متقاطع یک صفحه می گذرد.
- در فضا: از دو خط متناظر هیچ صفحه ای نمی گذرد.

خط، نقطه و صفحه

در صفحه: اگر خطی با یکی از دو خط موازی، موازی باشد، با دیگری نیز موازی است.

در فضا: اگر خطی با یکی از دو خط موازی، موازی باشد، با دیگری نیز موازی است.

در فضا: اگر خطی با یکی از دو صفحه موازی، موازی (یا منطبق) باشد، با دیگری نیز موازی (یا منطبق) است.

در صفحه: اگر صفحه‌ای با یکی از دو خط موازی باشد (خط بر آن صفحه منطبق باشد)، با دیگری

نیز موازی است. (خط دیگر نیز بر آن صفحه منطبق است).

در فضا: اگر صفحه‌ای با یکی از دو خط موازی، موازی (یا منطبق) باشد، با دیگری نیز

موازی (یا منطبق) است.

در فضا: اگر صفحه‌ای با یکی از دو صفحه موازی، موازی باشد، با دیگری نیز موازی (یا

منطبق) است.

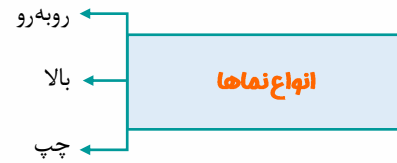
در صفحه: اگر خطی بر یکی از دو خط موازی، عمود باشد، بر دیگری نیز عمود است.

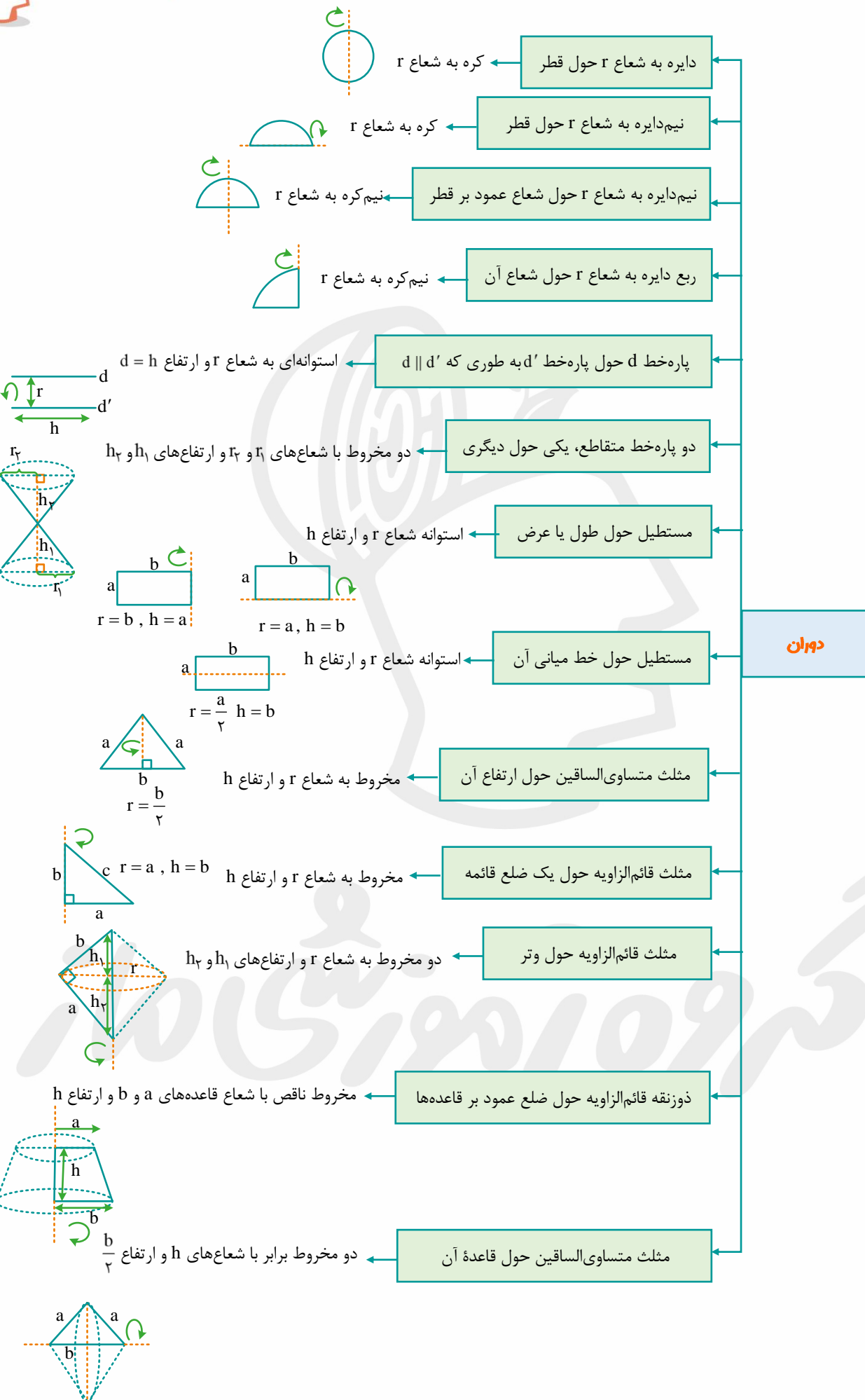
در فضا: اگر خطی بر یکی از دو خط موازی، عمود باشد، بر دیگری می‌تواند عمود باشد یا نباشد.

در فضا: اگر خطی بر یکی از دو صفحه موازی عمود باشد، بر دیگری نیز عمود است.

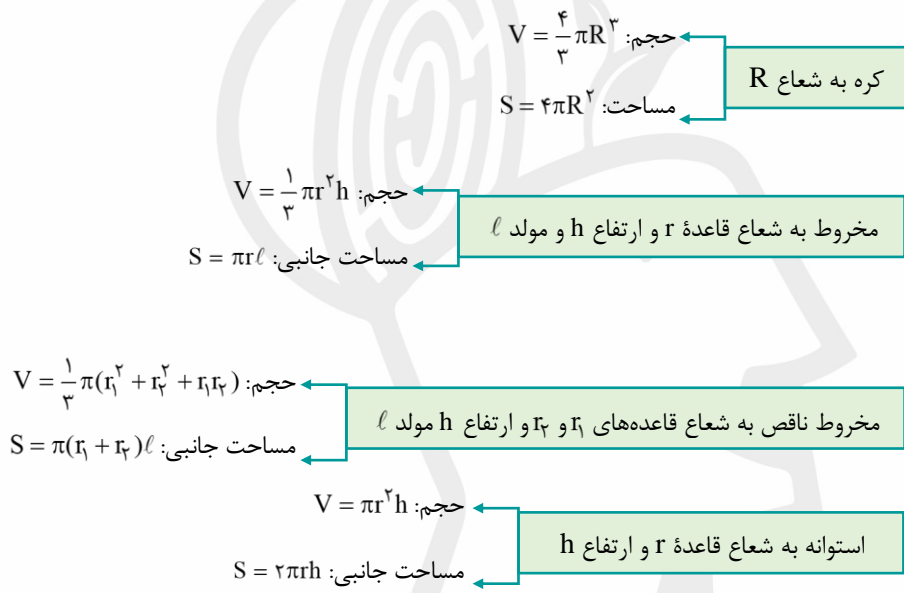
در فضا: اگر صفحه‌ای بر یکی از دو خط موازی عمود باشد، بر دیگری نیز عمود است.

در فضا: اگر صفحه‌ای بر یکی از دو صفحه موازی، عمود باشد، بر دیگری نیز عمود است.





حجم و مساحت



گروه آموزشی سازه

احتمال

تعاریف

فضای نمونه‌ای: مجموعه شامل همه حالت‌های ممکن  
 پیشامد: هر زیرمجموعه از فضای نمونه‌ای  
 پیشامد ساده: هر زیرمجموعه تک عضوی از فضای نمونه‌ای

اعمال روی پیشامد

$A$  یا  $B$ :  $A \cup B$  :  $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$   
 $A$  و  $B$ :  $A \cap B$   
 $A$  رخ دهد و  $B$  رخ ندهد:  $A - B$  :  $P(A - B) = P(A) - P(A \cap B)$   
 متمم  $A$ :  $A'$  :  $P(A') = 1 - P(A)$   
 دو پیشامد ناسازگار:  $A \cap B = \emptyset$  :  $P(A \cap B) = 0$   
 دو پیشامد مستقل:  $P(A \cap B) = P(A)P(B)$

احتمال غیرهم‌شانس

تعریف: حداقل دو پیشامد ساده، احتمال‌های نابرابر داشته باشند.  
 قوانین: (S: فضای نمونه‌ای و A: پیشامد فرضی)  
 ۱)  $0 \leq P(A) \leq 1$     ۲)  $P(S) = 1$   
 ۳)  $P(A) = P(a_1) + P(a_2) + \dots + P(a_k)$   
 $A = \{a_1, a_2, \dots, a_k\}$

احتمال شرطی

تعریف:  $P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$   
 قوانین: تمام قوانین احتمالات ساده اینجا هم برقراره.  
 مثال ۱:  $P(A \cup B|C) = P(A|C) + P(B|C) - P(A \cap B|C)$   
 مثال ۲:  $P(A'|B) = 1 - P(A|B)$

قانون ضرب احتمال

دو تایی:  $P(A \cap B) = P(A)P(B|A)$   
 سه تایی:  $P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = P(A_1)P(A_2|A_1)P(A_3|(A_1 \cap A_2))$

قانون احتمال کل

$P(A) = P(B_1)P(A|B_1) + P(B_2)P(A|B_2) + \dots + P(B_n)P(A|B_n) = \sum_{k=1}^n P(B_k)P(A|B_k)$   
 نمودار درختی

قانون بیز

روش اول:  $P(B_i|A) = \frac{P(B_i)P(A|B_i)}{P(A)}$   
 روش دوم (تغییر مخرج):  $P(B_i|A) = \frac{P(B_i)P(A|B_i)}{\sum_{k=1}^n P(B_k)P(A|B_k)}$

پیشامدهای مستقل

۲ پیشامد:  $P(A \cap B) = P(A)P(B)$   
 ۳ پیشامد:  
 ۱)  $P(A \cap B) = P(A)P(B)$     ۲)  $P(A \cap C) = P(A)P(C)$   
 ۳)  $P(B \cap C) = P(B)P(C)$     ۴)  $P(A \cap B \cap C) = P(A)P(B)P(C)$   
 $n$  پیشامد مستقل: احتمال اشتراک هر تعداد از پیشامدهای  $A_1, A_2, \dots, A_n$  برابر با حاصل ضرب احتمال آن‌هاست.

