کدکنترل

121

A

سه‌شنبه

۱۴۰۳/۰۳/۱۵

دوپینگ ماز کنکور ۱۴۰۳

گروه آموزشی ماز

دورهٔ جمع‌بندی دوپینگ ماز

گروه آزمایشی علوم ریاضی و فنی

دفترچه پاسخ ریاضیات

(جامع حد و پیوستگی ـ هندسه ۲ و ۳ ـ ریاضیات گسسته)

درس	مسئول درس	طراحان	ویراستاران
ریاضیات	محدثه شیخ‌علی	حسین شفیع زاده ـ مهرداد کیوان سوگند روشنی	رضا قانع ـ فرشاد حسن‌زاده

اهمیت مبحث حد و پیوستگی در کنکور:

ما اومدیم با یه فصل تُپُل و پُر و پیمون دیگه، فصلی که اگه خوب بهش توجه کنیم میبینیم که پُر از درسهاییه که می‌تونیم حتی توی زندگیمون هم ازش استفاده کنیم. ما توی این فصل یاد می‌گیریم که اگه خدای نکرده به مشکلی برخورد کردیم بتونیم با تکیه به آموخته‌هامون اون رو رفع بکنیم و بدونیم که برای رفع یه مشکل یا ابهام، سخت‌ترین راه حل، لزوماً بهترین راه نیست و همچنین می‌تونیم یاد بگیریم که حتی اگه هدفمون توی بی‌نهایت هم باشه برای رسیدن بهش باید بی‌نهایت بار تلاش کنیم و توی کارمون تداوم و پیوستگی داشته باشیم چرا که جا زدن و ناپیوستگی توی مسیرمون می‌تونه باعث شکست بشه و به قول استاد سخن (جناب سعدی) «رهرو آن نیست که گه، تند و گهی خسته رَود / رهرو آنست که آهسته و پیوسته رَوَد».

خب بچه‌ها، اگه اجازه بدید کمی از ادبیات فاصله بگیریم و بریم سراغ درس خودمون! فصلی که قراره استارتش رو بزنیم حد و پیوستگیه، یه فصل مهم و اساسی که شاخ و برگش حتی تا فصل مشتق و کاربرد مشتق هم نفوذ می‌کنه.

احتمالاً سوالی که ذهنتون رو مشغول کرده اینه که این فصل توی کنکور چقدر اهمیت داره! در جوابتون باید بگیم که حدوداً ۴ تا از سوال‌های کنکور رو برای این فصل رزرو کنید و برای اینکه بتونید از پس همه اونا بر بیاین، علاوه بر تسلط کامل روی این فصل باید نکته‌های مربوط به قدرمطلق، جزء صحیح، اتحادهای جبری و روابط مثلثاتی رو هم خوب بلد باشین.

راستی، به بخش‌های حد بی‌نهایت، حد در بی‌نهایت و پیوستگی هم نگاه ویژه‌تری داشته باشید.

پیش نیازهای مطالعه این بخش چه مباحثی هستند؟

برای اینکه بتونید فصل حد و پیوستگی رو بخونید، باید روی مباحث اتحادهای جبری، تابع و مثلثات تسلط داشته باشید. یعنی فصل‌های ۲، ۳ و ۵ دهم، فصل‌های ۲، ۳ و ۴ حسابان ۱ و همچنین فصل‌های ۱ و ۲ حسابان ۲.

مباحث این بخش در کجاها کاربرد دارد؟

تنها بخشی که کاربرد حد در آنجا وجود دارد (در محدوده کتاب‌های دبیرستان)، بخش مشتق و کاربرد مشتق است. پس نمی‌تونید بدون مطالعه قسمت حد و پیوستگی، روی فصل‌های مشتق و کاربرد مشتق به تسلط کاملی برسید.

از این بخش‌ها در کنکور سال‌های قبل چه تعداد سوال طرح شده است؟ این سوالات از چه موضوعاتی بوده است؟

۱۳۹۸	۱۳۹۹	۱۴۰۰	۱۴۰۱	۱۴۰۱ (دی)	۱۴۰۲	۱۴۰۳ (اردیبهشت)
۴	۴	۴	۵	۲	۲	۳
محاسبه حد حد بی‌نهایت پیوستگی ترکیب مجانب با کاربرد مشتق	حد در بی‌نهایت محاسبه حد پیوستگی مجانب‌ها	محاسبه حد حد بی‌نهایت مجانب‌ها حد در بی‌نهایت	حد $\frac{0}{0}$ پیوستگی مجانب و حد در بی‌نهایت تقسیم و بخش‌پذیری مجانب و تابع درجه دو	حد در بی‌نهایت پیوستگی	حد در بی‌نهایت پیوستگی	حد جزء صحیح مجانب‌های افقی و قائم پیوستگی

پیش‌بینی شما برای کنکور ۱۴۰۳ چیه؟

با توجه به کاهش سوالات ریاضی در کنکور میشه روی حداقل ۲ سوال برنامه‌ریزی کرد و البته سطح سوالای این بخش به نسبت بخشای دیگه پایین‌تره، پس میشه با یه برنامه‌ریزی خوب به همه سوالاتش جواب درست داد.

۱- اگر بازهٔ $(۴-۲a, ۷-a)$ یک همسایگی ۲ باشد، این بازه حداکثر شامل چند عدد صحیح است؟

۱) ۹ ۲) ۸ ۳) ۷ ۴) ۶

پاسخ: گزینه ۲ (متوسط ـ مفهومی / محاسباتی ـ ۱۱۰۵)

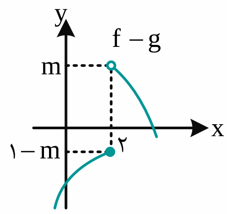
پاسخ تشریحی:

عدد ۲ باید عضو بازه باشد، پس: $۴-۲a < ۲ < ۷-a \Rightarrow ۱ < a < ۵$

طول بازه برابر $(۷-a)-(۴-۲a)$ یعنی برابر $۳+a$ است. هر چقدر a را بزرگ‌تر انتخاب کنیم، طول بازه بزرگ‌تر می‌شود. اگر $a \to ۵^-$ بازه به صورت $(-۶^+, ۲^+)$ می‌شود که شامل ۸ عدد صحیح $-۵,-۴,-۳,-۲,-۱,۰,۱,۲$ است.

گروه آموزشی ماز

۲- فرض کنید $(f+g)(x)=\begin{cases} ۱۲-۲x & x<۲ \\ ۵-x & x\geq ۲ \end{cases}$ و نمودار $f-g$ به صورت مقابل باشد. حاصل $\lim\limits_{x\to ۲} f(x)$ در صورت وجود چقدر است؟



۱) ۴
۲) ۸
۳) ۳
۴) ۶

پاسخ: گزینه ۳ (متوسط ـ مفهومی / محاسباتی ـ ۱۱۰۵)

پاسخ تشریحی:

$$\lim_{x\to ۲} f(x) = \lim_{x\to ۲} \frac{۱}{۲}(f+g+f-g)(x)$$

$$\begin{cases} \text{حد راست} = \frac{۱}{۲}(۵-۲+m) = \frac{m+۳}{۲} \\ \text{حد چپ} = \frac{۱}{۲}(۱۲-۴+۱-m) = \frac{۹-m}{۲} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{m+۳}{۲} = \frac{۹-m}{۲} \Rightarrow m=۳ \Rightarrow \lim_{x\to ۲} f(x) = \frac{۳+۳}{۲} = ۳$$

گروه آموزشی ماز

۳- اگر $f(x)=\frac{۲x}{x^۲-۱}$ و $g(x)=\frac{۳x}{x^۳-۱}$ باشد، حاصل $\lim\limits_{x\to ۱}(f-g)$ کدام است؟

۱) $\frac{۳}{۲}$ ۲) $\frac{۲}{۳}$ ۳) $\frac{۱}{۳}$ ۴) $\frac{۱}{۲}$

پاسخ: گزینه ۴ (متوسط ـ محاسباتی ـ ۱۱۰۵)

پاسخ تشریحی:

$$f-g = \frac{۲x}{x^۲-۱} - \frac{۳x}{x^۳-۱} = \frac{۲x}{(x-۱)(x+۱)} - \frac{۳x}{(x-۱)(x^۲+x+۱)}$$

$$= \frac{x(۲x^۲+۲x+۲-۳x-۳)}{(x-۱)(x+۱)(x^۲+x+۱)} = \frac{x(x-۱)(۲x+۱)}{(x-۱)(x+۱)(x^۲+x+۱)}$$

$$\lim_{x\to ۱}(f-g)(x) = \lim_{x\to ۱} \frac{x(۲x+۱)}{(x+۱)(x^۲+x+۱)} = \frac{۱}{۲}$$

گروه آموزشی ماز

۴- اگر $f(x)=\frac{3x^2-4x+1}{x-\sqrt{x}}$ باشد، حاصل $\lim\limits_{x\to 1} fof(x)$ کدام است؟

۱) ۳۲
۲) ۸/۵
۳) ۱۶/۵
۴) ۴

پاسخ: گزینه ۳ (متوسط ـ مفهومی / محاسباتی ـ ۱۱۰۵)

پاسخ تشریحی:

ابتدا حد f در $x=1$ را محاسبه می‌کنیم:

$$\lim_{x\to 1} f(x)=\lim_{x\to 1}\frac{3x^2-4x+1}{x-\sqrt{x}}\overset{H}{=}\lim_{x\to 1}\frac{6x-4}{1-\frac{1}{2\sqrt{x}}}=\frac{2}{\frac{1}{2}}=4$$

$$\lim_{x\to 1} fof(x)=f(4)=\frac{48-16+1}{2}=16/5$$

گروه آموزشی ماز

۵- اگر $\lim\limits_{x\to b}\frac{b}{ax^2+4x+\frac{a}{4}}=-\infty$ باشد، حاصل $a-b$ کدام است؟

۱) فقط ۴/۵
۲) فقط ۴/۵−
۳) ۴/۵ یا ۴/۵−
۴) a و b یافت نمی‌شود.

پاسخ: گزینه ۳ (متوسط ـ مفهومی / محاسباتی ـ ۱۲۰۳)

پاسخ تشریحی:

اولاً مخرج باید ریشهٔ مضاعف $x=b$ داشته باشد.

ثانیاً علامت حد باید منفی باشد.

$$ax^2+4x+\frac{a}{4}=0$$

$$\Delta=0\Rightarrow 16-a^2=0\Rightarrow\begin{cases}a=4\Rightarrow b=-\frac{1}{2}\Rightarrow a-b=4/5\\ a=-4\Rightarrow b=\frac{1}{2}\Rightarrow a-b=-4/5\end{cases}$$

$$1)\ a=4,b=-\frac{1}{2}\Rightarrow\lim_{x\to-\frac{1}{2}}\frac{-\frac{1}{2}}{(2x+1)^2}=-\infty$$

$$2)\ a=-4,b=\frac{1}{2}\Rightarrow\lim_{x\to\frac{1}{2}}\frac{\frac{1}{2}}{-(2x-1)^2}=-\infty$$

پس هر دو حالت قابل قبول است.

گروه آموزشی ماز

۶- برای چندجمله‌ای f تساوی‌های $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{f(x)}{x}=2$ و $\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{f(x)}{x}=-1$ برقرار است. حاصل $\lim\limits_{x\to 3^-}\frac{f(2x-6)}{f(9-3x)}$ برابر کدام است؟

۱) $\frac{4}{3}$
۲) $\frac{1}{3}$
۳) ۲
۴) $\frac{1}{2}$

پاسخ: گزینه ۲ (متوسط ـ مفهومی / محاسباتی ـ ۱۱۰۵)

پاسخ تشریحی:

ضابطهٔ تابع f را می‌توان به صورت زیر در نظر گرفت:

$$f(x)=\begin{cases}2x & x>0\\ -x & x<0\end{cases}$$

$$\lim_{x\to 3^-}\frac{f(2x-6)}{f(9-3x)}=\lim_{x\to 3^-}\frac{-(2x-6)}{2(9-3x)}=\frac{-2}{-6}=\frac{1}{3}$$

۷- اگر $\lim\limits_{x\to 2^-}\dfrac{3b-a[-x]}{a+3x}=-\infty$ باشد، حاصل $\lim\limits_{x\to \frac{1}{2}}\left[3x+\dfrac{x}{b}\right]$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳− ۴) صفر

پاسخ: گزینه ۱ (متوسط ـ مفهومی / محاسباتی ـ ۱۴۰۳)

پاسخ تشریحی

برای آن‌که حاصل حد، نامتناهی باشد باید $a+3x=0$ باشد، پس $a=-6$ است.

$$\lim_{x\to 2^-}\frac{3b+6[-x]}{-6+3x}=\frac{3b-12}{0^-}=-\infty$$

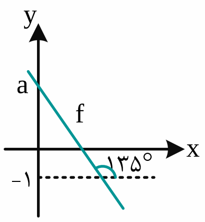
$$\Rightarrow 3b-12>0\Rightarrow b>4$$

داخل براکت به صورت $x(3+\frac{1}{b})$ است.

$$b>4\Rightarrow 0<\frac{1}{b}<\frac{1}{4}\Rightarrow 3<3+\frac{1}{b}<3/25$$

چون $x\to\frac{1}{2}$، پس: $\left[x(3+\frac{1}{b})\right]=1$

۸- نمودار تابع خطی f به صورت مقابل است. اگر $\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{2}{3-f(x)}=+\infty$ باشد، حاصل $\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{f(ax)}{x}$ کدام است؟



۱) ۳−
۲) ۲−
۳) ۶−
۴) ۴−

پاسخ: گزینه۴ (متوسط ـ مفهومی / محاسباتی ـ ۱۴۰۳)

پاسخ تشریحی

شیب خط f برابر $\tan 135^\circ=-1$ است.

طبق فرض سوال، $f(1)=3$ است، پس معادلهٔ f به صورت $f(x)=-x+4$ است، پس $a=4$ است.

$$\lim_{x\to -\infty}\frac{f(ax)}{x}=\lim_{x\to -\infty}\frac{-4x+4}{x}=-4$$

۹- اگر $A(-1,3)$ تنها نقطهٔ برخورد مجانب‌های قائم و افقی تابع $f(x)=\dfrac{3x^2+6x}{ax^2+bx+c}$ باشد، حاصل $a+b+c$ کدام می‌تواند باشد؟

۱) ۱ ۲) ۳ ۳) ۲ ۴) ۴−

پاسخ: گزینه ۳ (متوسط ـ مفهومی / محاسباتی ـ ۱۴۰۳)

پاسخ تشریحی

خط $y=3$ مجانب افقی است، پس $a=1$ است. دو حالت در نظر می‌گیریم:

۱) مخرج در $x=-1$ ریشهٔ مضاعف دارد.

$$x^2+bx+c=(x+1)^2\Rightarrow b=2,c=1\Rightarrow a+b+c=4$$

۲) مخرج علاوه بر $x=-1$ یک ریشهٔ دیگر دارد که با صورت ساده می‌شود.

$$x^2+bx+c=0\xrightarrow{x=-1}1-b+c=0$$

ریشهٔ دیگر مخرج $x=-c$ است.

$$۳x^۲+۶x=۰ \xrightarrow{x=-c} ۳c^۲-۶c=۰ \Rightarrow \begin{cases} c=۰ \Rightarrow b=۱ \\ c=۲ \Rightarrow b=۳ \end{cases} \Rightarrow a+b+c=۲ \text{ یا } ۶$$

گروه آموزشی ماز

۱۰- اگر n یک عدد طبیعی و تابع $f(x)=\begin{cases} \frac{۱}{x} & x>n \\ ۲x+a & x<n \\ nx & x=n \end{cases}$ در $\mathbb{R}$ پیوسته باشد، حاصل $a.n$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) -۱ ۳) ۳ ۴) -۳

پاسخ: گزینه ۲ (متوسط ـ محاسباتی ـ ۱۱۰۵)

پاسخ تشریحی:

کافی است f در $x=n$ پیوسته باشد:

$$\lim_{x\to n} f(x)=f(n) \Rightarrow \frac{۱}{n}=۲n+a=n^۲$$

$$\begin{cases} \frac{۱}{n}=n^۲ \Rightarrow n^۳=۱ \Rightarrow n=۱ \\ ۲n+a=n^۲ \Rightarrow a=-۱ \Rightarrow an=-۱ \end{cases}$$

گروه آموزشی ماز

۱۱- به ازای مقداری از a، تابع $f(x)=\frac{۲x+a[x]}{۳x+[-x]}$ در $x=۲$ حد دارد. مقدار $f(a)$ کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۳}$ ۲) ۲ ۳) $\frac{۲}{۳}$ ۴) $\frac{۱}{۲}$

پاسخ: گزینه ۱ (آسان ـ مفهومی / محاسباتی ـ ۱۱۰۵)

این شما و این هم حد توابع شامل جزء صحیح:

برای توابع شامل جزء صحیح مثل $g(x)=[f(x)]$، اگر $\lim_{x\to a} g(x)$ را خواستی حساب کنی، ۲ حالت داریم:

۱) $\lim_{x\to a} f(x)$ عددی صحیح است که در این حالت باید حد چپ و راست را جدا حساب کنی.

۲) $\lim_{x\to a} f(x)$ عدد صحیحی نیست که در این صورت $\lim_{x\to a} g(x)=\left[\lim_{x\to a} f(x)\right]$

پاسخ تشریحی:

$$\lim_{x\to ۲^+} f(x)=\lim_{x\to ۲^-} f(x) \Rightarrow \frac{۴+۲a}{۶-۳}=\frac{۴+a}{۶-۲} \Rightarrow ۱۶+۸a=۱۲+۳a \Rightarrow a=-\frac{۴}{۵}$$

$$f(-\frac{۴}{۵})=\frac{-\frac{۸}{۵}+\frac{۴}{۵}}{-\frac{۱۲}{۵}+۰}=\frac{-۴}{-۱۲}=\frac{۱}{۳}$$

گروه آموزشی ماز

۱۲- با فرض $f(x)=\frac{ax+b}{۳x+[-x]}$ و $\lim\limits_{x\to ۱} f(x)=\lim\limits_{x\to ۲^-}(f(x)+۲)$، مقدار b کدام است؟

۱) -۶ ۲) ۶ ۳) ۸ ۴) -۸

پاسخ: گزینه ۳ (متوسط ـ مفهومی / محاسباتی ـ ۱۱۰۵)

پاسخ تشریحی:

تابع $۳x+[-x]$ در $x=۱$ حد ندارد. بنابراین f زمانی در $x=۱$ حد دارد که $ax+b$ صفر باشد، پس: $a+b=۰$.

$$f(x)=\frac{ax+b}{۳x+[-x]}$$

$$\lim_{x\to ۱} f(x)=\lim_{x\to ۲^-}(f(x)+۲)\Rightarrow \lim_{x\to ۱^-} f(x)=\lim_{x\to ۱^+} f(x)=۰ \text{ و } \lim_{x\to ۲^-} f(x)=\frac{۲a+b}{۶-۲}=\frac{۲a+b}{۴}=\frac{a}{۲}+\frac{b}{۴}$$

$$۰=\frac{a}{۲}+\frac{b}{۴}+۲\xrightarrow{b=-a}۰=\frac{a}{۴}+۲\Rightarrow a=-۸\Rightarrow b=۸$$

گروه آموزشی ماز

۱۳- تابع $f(x)=\frac{a\sqrt{۳x+۱}-۲b}{x-۱}$ مفروض است. اگر حد تابع f در دو نقطهٔ $x=۱$ و $x=۰$، دو واحد با یکدیگر اختلاف داشته باشند، مقدار $|a|$ کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۴ ۳) ۶ ۴) ۸

پاسخ: گزینه ۴ (متوسط ـ مفهومی / محاسباتی ـ ۱۱۰۵)

اگر مخرج صفر شد چی کار کنیم؟!

اگر داشته باشیم $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=L$ که $L\neq\infty$ ، $\lim\limits_{x\to a} g(x)=۰$، آن‌گاه قطعاً $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ نیز برابر صفر می‌باشد.

پاسخ تشریحی:

$$\lim_{x\to ۰} f(x)=۲b-a$$

به شرطی حد f در $x=۱$ وجود دارد که صورت کسر در $x=۱$ برابر صفر باشد.

$$a\sqrt{۳x+۱}-۲b=۰\Rightarrow ۲a-۲b=۰\Rightarrow a=b$$

$$\lim_{x\to ۱} f(x)=\frac{۰}{۰}\overset{HOP}{\Rightarrow}\lim_{x\to ۱}\frac{\frac{۳a}{۲\sqrt{۳x+۱}}}{۱}=\frac{۳a}{۴}$$

$$\Rightarrow\left|\frac{۳a}{۴}-۲b+a\right|=۰\Rightarrow\left|\frac{a}{۴}\right|=۲\Rightarrow |a|=۸$$

گروه آموزشی ماز

۱۴- حاصل $\lim\limits_{x\to ۰}\frac{۱-\sqrt{۲-\sqrt[۳]{\cos x}}}{۱-\cos x}$ برابر کدام است؟

۱) $-\frac{۱}{۶}$ ۲) $\frac{۱}{۶}$ ۳) $\frac{۱}{۱۲}$ ۴) $-\frac{۱}{۱۲}$

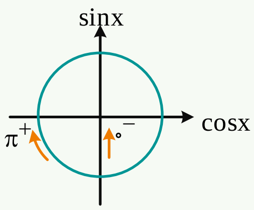
پاسخ: گزینه ۱ (متوسط ـ مفهومی / محاسباتی ـ ۱۱۰۵)

چه می‌کنه این دایره مثلثاتی!

گاهی اوقات در بررسی حد توابع مثلثاتی می‌توان از دایرهٔ مثلثاتی کمک گرفت.

مثال: $\lim\limits_{x\to\pi^+}[\sin x]$ چند است؟

پاسخ:



$$\lim_{x\to\pi^+}[\sin x]=[۰^-]=-۱$$

پاسخ تشریحی:

فرض کنید $t=\cos x$، پس $t \to 1^-$

$$\lim_{t\to 1^-}\frac{1-\sqrt{2-\sqrt[3]{t}}}{1-t}=\lim_{t\to 1^-}\frac{1-2+\sqrt[3]{t}}{(1-t)\underbrace{(1+\sqrt{2-\sqrt[3]{t}})}_{2}}=\lim_{t\to 1^-}\frac{\sqrt[3]{t}-1}{2(1-t)}=\lim_{t\to 1^-}\frac{t-1}{2(1-t)\times 3}=\frac{-1}{6}$$

گروه آموزشی ماز

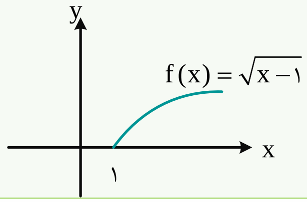
۱۵- تابع $f(x)=2\sqrt{k-x}$ مفروض است. حاصل $\lim_{x\to 4}\frac{f(x)-2f^{-1}(x)}{x-4}$ در صورت وجود چقدر است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) صفر

پاسخ: گزینه ۳ (متوسط ـ ترکیبی / محاسباتی ـ ۱۱۰۵)

حد داره یا نداره؟

بچه‌ها تابع در نقاط کناره‌ای حد نداره. مثلاً تابع $f(x)=\sqrt{x-1}$ در $x\to 1$ حد نداره، بلکه فقط حد راست داره.



پاسخ تشریحی:

ابتدا وارون f را به دست می‌آوریم:

$$y=2\sqrt{k-x}\xrightarrow{\text{وارون}}x=2\sqrt{k-y}\Rightarrow y=f^{-1}(x)=k-\frac{x^2}{4}$$

چون حد مخرج کسر صفر است، پس حد صورت نیز صفر می‌باشد:

$$f(4)=2f^{-1}(4)\Rightarrow 2\sqrt{k-4}=2(k-4)\Rightarrow k-4=0 \text{ یا } 1\Rightarrow k=4 \text{ یا } 5$$

اگر $k=4$ باشد، آن‌گاه حد تابع f در ۴ در $x\to 4$ تعریف نشده است زیرا در آن نقطه حد راست ندارد، پس $k=5$ است.

$$\lim_{x\to 4}\frac{f(x)-2f^{-1}(x)}{x-4}=\lim_{x\to 4}\frac{2\sqrt{5-x}-2(5-\frac{x^2}{4})}{x-4}\overset{HOP}{=}\lim_{x\to 4}\frac{\frac{-1}{\sqrt{5-x}}+x}{1}=-1+4=3$$

گروه آموزشی ماز

۱۶- تابع $f(x)=\begin{cases}\frac{a+1+\sin \pi x}{|x^2-x|} & x>1\\ a^2\pi+b[-x] & x\le 1\end{cases}$ در $x=1$ پیوسته است. مقدار b چند برابر π است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۱- ۴) ۲-

پاسخ: گزینه ۲ (متوسط ـ مفهومی / محاسباتی ـ ۱۱۰۵)

یه تعریف از پیوستگی مهمون نشه!

تابع $f(x)$ در $x=a$ پیوسته است، هرگاه: $\lim_{x\to a^-}f(x)=\lim_{x\to a^+}f(x)=f(a)$

پاسخ تشریحی:

ضابطه اول به شرطی در $x=1$ حد دارد که صورت کسر برابر صفر باشد، پس $a=-1$ است. اکنون حدهای چپ و راست را در $x=1$ حساب کرده و با $f(1)$ برابر قرار می‌دهیم:

$$\lim_{x\to 1^+}f(x)=\lim_{x\to 1^+}\frac{\sin \pi x}{x^2-x}\overset{HOP}{=}\lim_{x\to 1^+}\frac{\pi\cos \pi x}{2x-1}=-\pi$$

$$f(1)=\lim_{x\to 1^-}f(x)=a^2\pi-b=\pi-b\xrightarrow{\lim_{x\to 1^+}f(x)=\lim_{x\to 1^-}f(x)=f(1)}-\pi=\pi-b\Rightarrow b=2\pi$$

گروه آموزشی ماز

۱۷- تابع $f(x)=\left[\sin(\frac{a\pi}{2}x)\right]$ در $x=2$ ناپیوسته است. اگر $0<a<3$ باشد، آن‌گاه مجموع مقادیر قابل قبول برای **a** کدام است؟

۱) ۳ ۲) ۶ ۳) ۷/۵ ۴) ۴/۵

پاسخ: گزینه ۲ (متوسط ـ مفهومی / محاسباتی ـ ۱۱۰۵)

درباب تابع جزء صحیح!

دوستان مازی، تابع $g(x)=[f(x)]$ ($f(x)$ پیوسته) در نقاطی که $f(x)$ عددی صحیح است، پیوسته نیست، مگر اینکه مینیمم نسبی باشد.

پاسخ تشریحی

اگر داخل براکت برابر عدد صحیح شود، تابع f ناپیوسته است (بجز مینیمم نسبی):

دقت شود که مقدار -1 برای تابع $\sin x$ مقدار مینیمم نسبی است، پس فقط به ازای مقادیر ۰ و ۱ تابع ناپیوسته است:

$$\begin{cases}\sin(\frac{a\pi}{2}x)=0 \Rightarrow \frac{a\pi}{2}x=k\pi\\ \sin(\frac{a\pi}{2}x)=1 \Rightarrow \frac{a\pi}{2}x=2k\pi+\frac{\pi}{2}\end{cases}$$

$$x=2 \Rightarrow \begin{cases}a=k\\ a=2k+\frac{1}{2}\end{cases} \xrightarrow{0<a<3} a=1,2,\frac{1}{2},\frac{5}{2} \Rightarrow \text{مجموع}=6$$

گروه آموزشی ماز

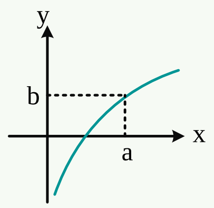
۱۸- تابع پیوستهٔ **f** با دامنهٔ $\mathbb{R}$، اکیداً نزولی و $f(2)=3$ است. حد راست و چپ تابع $y=\frac{5-x[f(x)]}{x^2-4}$ در نقطه $x=2$ به ترتیب از راست به چپ کدام است؟

۱) $+\infty, -\infty$ ۲) $+\infty, +\infty$ ۳) $-\infty, +\infty$ ۴) $-\infty, -\infty$

پاسخ: گزینه ۲ (متوسط ـ مفهومی / محاسباتی ـ ۱۲۰۳)

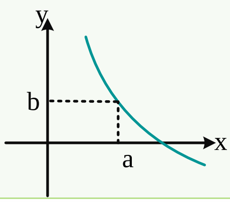
پیش به سوی یک نکته از توابع صعودی و نزولی!

A: اگر تابع $f(x)$ صعودی اکید و پیوسته باشد و $f(a)=b$، آن‌گاه:



$$\lim_{x\to a^+} f(x)=b^+$$
$$\lim_{x\to a^-} f(x)=b^-$$

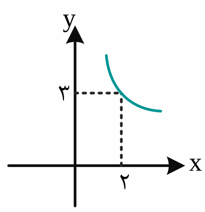
B: اگر نزولی اکید باشد، آن‌گاه:



$$\lim_{x\to a^+} f(x)=b^-$$
$$\lim_{x\to a^-} f(x)=b^+$$

پاسخ تشریحی

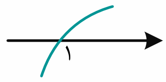
نمودار فرضی f به صورت مقابل است:

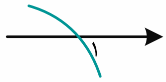


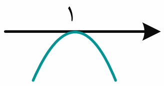
$$\text{طبق نمودار}\begin{cases}\lim\limits_{x\to 2^+}\frac{5-x[f(x)]}{x^2-4}=\frac{5-4}{0^+}=+\infty\\ \lim\limits_{x\to 2^-}\frac{5-x[f(x)]}{x^2-4}=\frac{5-6}{0^-}=+\infty\end{cases}$$

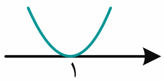
گروه آموزشی ماز

۱۹- اگر $\lim\limits_{x\to 1}\log\dfrac{f(x)}{\cos(\pi[x])}=-\infty$ باشد، نمودار f در مجاورت $x=1$ کدام می‌تواند باشد؟

۱) 

۲) 

۳) 

۴) 

پاسخ: گزینه ۲ (متوسط ـ مفهومی / محاسباتی ـ ۱۲۰۳)

حد نامتناهی، خیلی دوست داریم!

در ۲ حالت، حد برابر $-\infty$ می‌شود:

۱) $\dfrac{+\text{عدد}}{0^-}=-\infty$ ۲) $\dfrac{-\text{عدد}}{0^+}=-\infty$

پاسخ تشریحی:

اگر $A\to 0^+$ آن‌گاه $\log A\to -\infty$، پس باید داخل لگاریتم برابر 0^+ باشد.

$$\begin{cases} x=1^+: \dfrac{f(1^+)}{-1}=0^+ \Rightarrow f(1^+)=0^- \\ x=1^-: \dfrac{f(1^-)}{1}=0^+ \Rightarrow f(1^-)=0^+ \end{cases}$$

نمودار گزینه ۲ شرایط بالا را دارد.

گروه آموزشی ماز

۲۰- از برخورد مجانب‌های تابع $f(x)=\dfrac{3x+|ax+2|}{b-|x|}$ یک مربع بوجود آمده است. اگر مرکز مربع بر مبدأ مختصات منطبق باشد، حاصل $\lim\limits_{x\to a}(bf(x))$ کدام است؟

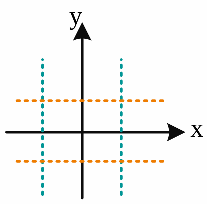
۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۲- ۴) ۱-

پاسخ: گزینه ۲ (متوسط ـ مفهومی / محاسباتی ـ ۱۲۰۳)

پاسخ تشریحی:

ریشه‌های مخرج، مجانب‌های قائم‌اند.

$$b-|x|=0 \xrightarrow{b>0} \begin{cases} x=b \\ x=-b \end{cases}$$



مقدار حد در بی‌نهایت، مجانب‌های افقی‌اند.

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{3x+|a|x}{-x}=\frac{3+|a|}{-1}\Rightarrow y=-3-|a|$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{3x-|a|x}{x}=3-|a|\Rightarrow y=3-|a|$$

برای آن‌که مجانب‌های افقی نیز نسبت به مبدأ، متقارن باشند (چون مرکز مربع مذکور بر مبدأ مختصات واقع است)، باید: $-(-3-|a|)=3-|a|\Rightarrow a=0$

$$\Rightarrow \lim_{x\to a} bf(x)=\lim_{x\to 0} bf(x)=\frac{2b}{b}=2$$

گروه آموزشی ماز

اینک هندسه!

این آزمون دارای دو بخش متفاوت از هندسه است. یکی فصل ۱ هندسه ۳ که در مورد ماتریس‌ها صحبت می‌کند و یکی هم فصل ۳ هندسه ۲ که یه سری از فرمول‌ها و روابط طولی مثلث رو بیان می‌کند. خب اول بریم سراغ ماتریس.

ماتریس چیست اصن!؟ به هر آرایش مستطیلی از اعداد حقیقی ماتریس میگن. تو این فصل، یه سری ماتریس خاص معرفی میشه، بعد از اون می‌ریم سراغ اعمال روی ماتریس، مثل جمع و ضرب. خب این جمع و ضرب‌ها هم یه سری ویژگی دارند که شما بایستی بلد باشید. اما بخش دیگر ماتریس‌ها که مهمتر هم هست، در مورد وارون ماتریس و دترمینان است که نکات مربوط به خودش رو هم داره. در کل ماتریس‌ها سوالات خیلی چالشی نداره و باید علاوه بر یادگیری فرمول‌ها و مفاهیم، سرعت محاسبات رو تو این قسمت افزایش بدید.

و اما فصل نه چندان چالشی و فرمولی محور این بخش، یعنی فصل سوم هندسه ۲. در این فصل خیلی کار سختی پیش رو نداریم. چون فصل براساس چند رابطه به نام‌های قضیهٔ سینوس‌ها، قضیهٔ کسینوس‌ها، قضیهٔ نیمسازها و قضیهٔ وارون جلو میره. یادت باشه امکان تست ترکیبی از این بخش با بخش‌های دیگه زیاده.

پیش‌نیازهای مطالعهٔ این بخش چه مباحثی است؟

ماتریس‌ها که خب بخش تازه‌ای هست و با یه سری مفاهیم پایه‌ای ریاضی که همتون بلدید، می‌تونید روش مسلط بشید. حالا اگه خیلی وسواسی تشریف دارید! می‌تونید دستگاه دو معادله دو مجهولی رو یه مرورکی بکنید. اما برای فصل «روابط طولی در مثلث» نیاز هست که به مثلث مسلط باشید، یعنی توی فصل ۲ هندسه ۱ مشکلی نداشته باشید.

این دو فصل در کدام قسمت‌ها کاربرد دارند؟

فصل ماتریس، یه بخش ایزوله است و معمولاً ترکیبی ازش سوال نمیاد، (سوال ترکیبی هم داشتیم‌ها!)، (البته سوالات ترکیبی‌اش هم از مفاهیم پایه‌ای بخش ماتریس‌ها استفاده کرده) و کاربرد آنچنانی در جاهای دیگر ریاضی ندارد.

فصل ۳ هندسه ۲ هم در فصل‌های دیگر کاربرد چندانی ندارد. اما احتمال سوال ترکیبی از این فصل ۳ با فصل‌های دیگر هم خیلی کم نیست.

از این بخش در کنکور سال‌های قبل چه تعداد سوال طرح شده است؟ این سوالات از چه موضوعاتی بوده؟

۱۳۹۸	۱۳۹۹	۱۴۰۰	۱۴۰۱	۱۴۰۱ (دی)	۱۴۰۲	۱۴۰۳ (اردیبهشت)
۵	۵	۳	۳	۲	۲	۳
قضیهٔ نیمسازها قضیهٔ کسینوس‌ها ضرب ماتریس‌ها معادلات ماتریس دترمینان ماتریس	قضیهٔ کسینوس‌ها قضیهٔ کسینوس‌ها (ترکیب با فصل ۱ هندسه۲) ضرب ماتریس‌ها معادلات ماتریسی دترمینان ماتریس	دترمینان (ترکیب با فصل ۳ حسابان ۱) ضرب ماتریس ضرب ماتریس، ترانهاده ماتریس (نظام قدیم)	قضیهٔ نیمسازها، قضیهٔ کسینوس‌ها ضرب ماتریس، ماتریس اسکالر دترمینان، معادلهٔ ماتریسی	ضرب ماتریس‌ها دترمینان	قضیهٔ نیمسازها دترمینان (ترکیب با فصل ۳ حسابان ۱)	روابط طولی در مثلث اعمال جبری روی ماتریس ضرب ماتریس‌ها

پیش‌بینی شما برای کنکور سال آینده چیه؟

با توجه به کاهش تعداد سوالات ریاضی کنکور به ۴۰ سوال، انتظار می‌رود ۲ الی ۳ سوال از فصول ۳ هندسه ۲ و ۱ هندسه ۳ طرح شود. طرح سوال از فصل ماتریس حتمی خواهد بود، اما طرح سوال از فصل «روابط طولی در مثلث» ۵۰ ـ ۵۰ است.

۲۱- مجموع ریشه‌های معادله $\begin{bmatrix}x & ۲x & ۳x\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-۱ & ۰ & ۱\\ ۲ & ۱ & -۲\\ ۰ & ۰ & ۳\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-x\\ \frac{۱}{۲}\\ \frac{۱}{۳x}\end{bmatrix}=۰$ کدام است؟

۱) ۲　　۲) ۳　　۳) $\frac{۱}{۲}$　　۴) $\frac{۱}{۳}$

پاسخ: گزینه ۴　　(متوسط ـ ترکیبی / محاسباتی ـ ۱۲۰۱)

پاسخ تشریحی:

کافی است ماتریس‌ها را در هم ضرب کنیم و خواهیم داشت:

$$\begin{bmatrix}x & ۲x & ۳x\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-۱ & ۰ & ۱\\ ۲ & ۱ & -۲\\ ۰ & ۰ & ۳\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۳x & ۲x & ۶x\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}۳x & ۲x & ۶x\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-x\\ \frac{۱}{۲}\\ \frac{۱}{۳x}\end{bmatrix}=-۳x^۲+x+۲=۰$$

$$S=x_۱+x_۲=-\frac{b}{a}=\frac{-۱}{-۳}=\frac{۱}{۳}$$

گروه آموزشی ماز

۲۲- اگر A و B ماتریس‌های وارون‌پذیر و $A^۲-۵A=B^۲-۳B=I$ بوده و رابطه $((B+۲I)(A-۳I))^{-۱}=mAB+nA+tB+sI$ برقرار باشد، آن‌گاه $\frac{n+s}{m}$ کدام است؟

۱) ۲　　۲) ۳　　۳) ۴　　۴) ۵

پاسخ: گزینه ۴　　(سخت ـ مفهومی / محاسباتی ـ ۱۲۰۱)

بچه‌ها نکتهٔ زیر خوراک خودتونه!

اگر A و B دو ماتریس وارون‌پذیر باشند، آن‌گاه: $(AB)^{-۱}=B^{-۱}A^{-۱}$

پاسخ تشریحی:

$$((B+۲I)(A-۳I))^{-۱}=(A-۳I)^{-۱}(B+۲I)^{-۱}$$

می‌دانیم: $(A-۳I)(A-۲I)=A^۲-۵A+۶I$

$$\Rightarrow A^۲-۵A+۶I=I+۶I=۷I$$

$$(A-۲I)(A-۳I)=۷I\Rightarrow (A-۳I)^{-۱}=\frac{۱}{۷}(A-۲I)$$

می‌دانیم: $(B+۲I)(B-۵I)=B^۲-۳B-۱۰I$

$$B^۲-۳B-۱۰I=I-۱۰I=-۹I\Rightarrow (B-۵I)(B+۲I)=-۹I\Rightarrow (B+۲I)^{-۱}=\frac{-۱}{۹}(B-۵I)$$

$$\Rightarrow (A-۳I)^{-۱}(B+۲I)^{-۱}=\frac{۱}{۷}(A-۲I)(-\frac{۱}{۹})(B-۵I)=\frac{-۱}{۶۳}(AB-۵A-۲B+۱۰I)$$

بنابراین: $m=\frac{-۱}{۶۳}\ ,\ n=\frac{۵}{۶۳}\ ,\ s=\frac{-۱۰}{۶۳}\Rightarrow \frac{n+s}{m}=\frac{-\frac{۵}{۶۳}}{-\frac{۱}{۶۳}}=۵$

گروه آموزشی ماز

۲۳- اگر $A=\begin{bmatrix}۱ & -۲\\ ۰ & ۱\end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix}۰ & \cot ۳\theta\\ \tan ۳\theta & ۰\end{bmatrix}$ باشد، مجموع درایه‌های $A^{۳۰}+B^{۴۰}$ کدام است؟

۱) ۶۰　۲) -۷۰　۳) -۵۶　۴) ۲

پاسخ: گزینه ۳　(متوسط ـ مفهومی / محاسباتی ـ ۱۴۰۱)

فوت کوزه‌گری تو ماتریس!

اگر بهت ماتریس A^n با توان بالا دادند، قطعاً A^n از یه الگویی پیروی می‌کند و لازم نیست تا آخرین n، اونو حساب کنی، مثل ماتریس‌های این سوال.

پاسخ تشریحی

ابتدا با به دست آوردن توان‌های بالاتر A و B خواهیم داشت:

$$A^۲=\begin{bmatrix}۱ & -۲\\ ۰ & ۱\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۱ & -۲\\ ۰ & ۱\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۱ & -۴\\ ۰ & ۱\end{bmatrix}$$

$$A^۳=\begin{bmatrix}۱ & -۶\\ ۰ & ۱\end{bmatrix}\Rightarrow A^n=\begin{bmatrix}۱ & -۲n\\ ۰ & ۱\end{bmatrix}\Rightarrow A^{۳۰}=\begin{bmatrix}۱ & -۶۰\\ ۰ & ۱\end{bmatrix}$$

$$B^۲=\begin{bmatrix}۱ & ۰\\ ۰ & ۱\end{bmatrix}=I\Rightarrow B^{۴۰}=\begin{bmatrix}۱ & ۰\\ ۰ & ۱\end{bmatrix}$$

$$A^{۳۰}+B^{۴۰}=\begin{bmatrix}۲ & -۶۰\\ ۰ & ۲\end{bmatrix}\Rightarrow \text{جمع درایه‌ها}: ۴-۶۰=-۵۶$$

گروه آموزشی ماز

۲۴- اگر دستگاه معادلات خطی $\begin{cases}(k^۲+۲)x-۲y=k+۴\\ (۲k+۴)x+(k-۵)y=k+۲\end{cases}$ جواب نداشته باشد، k چند مقدار صحیح می‌تواند اختیار کند؟

۱) ۱　۲) ۲　۳) ۳　۴) صفر

پاسخ: گزینه ۱　(متوسط ـ مفهومی / محاسباتی ـ ۱۴۰۱)

۳ حالت بیش‌تر نیست!

برای دو خط به معادلات ۱) $ax+by=c$ و ۲) $a'x+b'y=c'$ داریم:

A: دو خط منطبق‌اند: $\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}=\frac{c}{c'}$

B: دو خط موازی و غیرمنطبق‌اند: $\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}\neq\frac{c}{c'}$

C: دو خط متقاطع‌اند: $\frac{a}{a'}\neq\frac{b}{b'}$

پاسخ تشریحی

در صورتی دستگاه معادلات خطی جواب ندارد که دو خط موازی باشند:

$$\underbrace{\frac{k^۲+۲}{۲k+۴}=\frac{-۲}{k-۵}}_{k^۳-۵k^۲+۲k-۱۰=-۴k-۸}\neq\frac{k+۴}{k+۲}\quad (*)$$

$$\Rightarrow k^۳-۵k^۲+۶k-۲=۰\xrightarrow{\text{جمع ضرایب}=۰}k=۱\Rightarrow$$

$$\begin{array}{l|l} k^۳-۵k^۲+۶k-۲ & k-۱\\ \hline -k^۳+k^۲ & k^۲-۴k+۲\\ -۴k^۲+۶k-۲ & \\ +۴k^۲-۴k & \\ ۲k-۲ & \\ -۲k+۲ & \\ ۰ & \end{array}$$

$k^۲ - ۴k + ۲ = ۰ \Rightarrow \Delta = ۱۶ - ۴(۲) = ۸$

$k = \frac{۴ \pm ۲\sqrt{۲}}{۲} = ۲ \pm \sqrt{۲} \not\in \mathbb{Z} \Rightarrow$ اصلاً لازم نیست در رابطه (※) جایگذاری شود.

بنابراین k، یک مقدار صحیح می‌تواند داشته باشد.
$k = ۱ \xrightarrow{\text{در رابطه (※) قرار می‌دهیم}} \frac{۳}{۶} = \frac{-۲}{-۴} \neq \frac{۵}{۳} \Rightarrow k = ۱$

گروه آموزشی ماز

۲۵- اگر در ماتریس وارون‌پذیر $A = \begin{bmatrix} |A|-۲ & ۰ & -۱ \\ ۱ & \frac{|A|}{۳} & ۳ \\ -۱ & ۰ & ۱ \end{bmatrix}$ به درایه واقع در سطر سوم ستون دوم ۳ واحد اضافه کنیم، دترمینان چه تغییری می‌کند؟

۱) ۱۳ واحد اضافه می‌شود.
۲) ۱۳ واحد کم می‌شود.
۳) ۳۹ واحد اضافه می‌شود.
۴) ۳۹ واحد کم می‌شود.

پاسخ: گزینه ۴ (متوسط ـ مفهومی / محاسباتی ـ ۱۴۰۱)

پاسخ تشریحی:

از طرفین رابطه، دترمینان می‌گیریم:

$$|A| = (|A|-۲)(\frac{|A|}{۳}) - ۱(\frac{|A|}{۳}) \Rightarrow |A| = \frac{|A|}{۳}(|A|-۳)$$

$$\text{وارون‌پذیر } A \Rightarrow |A| \neq ۰ \xrightarrow{\div |A|} ۱ = \frac{۱}{۳}(|A|-۳) \Rightarrow |A| = ۶$$

$$A = \begin{bmatrix} ۴ & ۰ & -۱ \\ ۱ & ۲ & ۳ \\ -۱ & ۰ & ۱ \end{bmatrix}$$

اگر به درایه‌ای k واحد اضافه شود به دترمینان، (همسازه آن درایه) $k \times$ واحد اضافه می‌شود.

$$|A| + ۳(-۱)(۱۳) = |A| - ۳۹$$

گروه آموزشی ماز

۲۶- اگر $(A-I)^{-۱} = \begin{bmatrix} -۱ & ۰ & ۲ \\ ۱ & ۳ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۲ \end{bmatrix}$ باشد، جمع درایه‌های ماتریس $A(A-I)^{-۱}$ کدام است؟

۱) ۶
۲) ۸
۳) ۹
۴) ۱۰

پاسخ: گزینه ۴ (متوسط ـ مفهومی / محاسباتی ـ ۱۴۰۱)

اظهر من الشمس!

اینم قطعاً می‌دونید که ماتریس‌ها خاصیت توزیع‌پذیری دارند:

$$(A+B)C = AC + BC$$

پاسخ تشریحی:

$$(A-I)(A-I)^{-۱} = I \Rightarrow A(A-I)^{-۱} - (A-I)^{-۱} = I$$

$$A(A-I)^{-۱} = I + (A-I)^{-۱} = \begin{bmatrix} ۰ & ۰ & ۲ \\ ۱ & ۴ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۳ \end{bmatrix}$$

جمع درایه‌ها $= ۲ + ۱ + ۴ + ۳ = ۱۰$

گروه آموزشی ماز

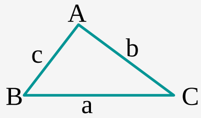
۲۷- در مثلث $\overset{\triangle}{ABC}$، اگر ضلع $BC=4$ و $4\hat{B}=5\hat{C}$ و زاویه $\hat{A}=45^\circ$ باشد، ضلع AB کدام است؟

۱) $2\sqrt{6}$ ۲) ۴ ۳) $4\sqrt{6}$ ۴) ۶

پاسخ: گزینه ۱ (آسان ـ مفهومی / محاسباتی ـ ۱۱۰۳)

اینجا هم به قضیهٔ سینوس‌ها در مثلث می‌پردازیم:

در مثلث $\overset{\triangle}{ABC}$ با اضلاع $AB=c\ ,\ AC=b\ ,BC=a$ داریم:



$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=2R$$

که R شعاع دایرهٔ محیطی مثلث است.

پاسخ تشریحی:

$$\hat{A}+\hat{B}+\hat{C}=180^\circ$$

$$45^\circ+\frac{5}{4}\hat{C}+\hat{C}=180^\circ\Rightarrow\frac{9}{4}\hat{C}=135^\circ\Rightarrow\hat{C}=60^\circ\ ,\ \hat{B}=75^\circ$$

$$\frac{a}{\sin\hat{A}}=\frac{c}{\sin\hat{C}}\Rightarrow\frac{4}{\sin 45^\circ}=\frac{c}{\sin 60^\circ}\Rightarrow c=\frac{4\times\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}}=\frac{4\sqrt{3}}{\sqrt{2}}=\frac{4\sqrt{6}}{2}=2\sqrt{6}$$

گروه آموزشی ماز

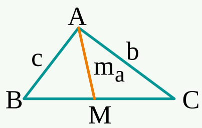
۲۸- در مثلث قائم‌الزاویه‌ای، جمع مربعات سه میانه ۶ است. اگر یک زاویه مثلث ۷۵° باشد، مساحت مثلث کدام است؟

۱) ۰/۵ ۲) ۰/۷۵ ۳) ۱ ۴) ۲

پاسخ: گزینه ۱ (متوسط ـ ترکیبی / محاسباتی ـ ۱۱۰۳)

ای بابا چقدر این فصل سوم هندسه ۲ رابطه داره!

قضیهٔ میانه‌ها: در مثلث ABC، اگر m_a میانه باشد، داریم:



$$b^2+c^2=\frac{a^2}{2}+2m_a^2$$

نتیجه: بنابراین اگر m_a, m_b, m_c، ۳ میانهٔ مثلث باشند، داریم:

$$m_a^2+m_b^2+m_c^2=\frac{3}{4}(a^2+b^2+c^2)$$

پاسخ تشریحی:

در هر مثلث، اگر m_a, m_b, m_c میانه‌های مثلث باشند، همواره: $m_a^2+m_b^2+m_c^2=\frac{3}{4}(a^2+b^2+c^2)$ است. در مثلث قائم‌الزاویه، چون $a^2=b^2+c^2$ است، این مقدار برابر $\frac{3}{2}a^2$ می‌شود.

$$\Rightarrow\frac{3}{2}a^2=6\Rightarrow a=2\ \text{وتر}$$

و می‌دانیم اگر در مثلث قائم‌الزاویه، یک زاویه ۱۵° باشد، ارتفاع وارد بر وتر، $\frac{1}{4}$ وتر است. $AH=\frac{1}{4}(2)=\frac{1}{2}$، بنابراین:

$$S=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times 2=\frac{1}{2}$$

گروه آموزشی ماز

۲۹- در مثلث $\overset{\triangle}{ABC}$، با اضلاع ۲۰،۱۳،۱۱ سانتی‌متر، طول کوتاه‌ترین ارتفاع کدام است؟

۱) ۶/۶ ۲) ۱۲ ۳) ۱۰/۲ ۴) ۱۳

پاسخ: گزینه ۱ (متوسط ـ مفهومی / محاسباتی ـ ۱۱۰۳)

این فرموله خلی گوگولیه!

قضیهٔ هرون در محاسبهٔ مساحت مثلث:

اگر محیط مثلث برابر ۲P باشد، داریم: $S=\sqrt{P(P-a)(P-b)(P-c)}$

پاسخ تشریحی:

$$P=\frac{۱۱+۱۳+۲۰}{۲}=۲۲$$

$$S=\sqrt{P(P-a)(P-b)(P-a)}=\sqrt{۲۲\times ۱۱\times ۹\times ۲}=۶۶$$

$$۶۶=\frac{۱}{۲}\times h\times ۲۰\Rightarrow h=۶/۶$$

گروه آموزشی ماز

۳۰- اگر شعاع دایره‌های محاطی خارجی مثلثی $r_1=۱۴$، $r_2=۱۲$، $r_3=۱۰/۵$ باشند، مساحت مثلث کدام است؟

۱) ۸۴ ۲) ۵۰ ۳) ۵۶ ۴) ۴۸

پاسخ: گزینه ۱ (متوسط ـ ترکیبی / محاسباتی ـ ۱۱۰۳)

و دوباره فرمول!!

اگر r_a, r_b, r_c به ترتیب شعاع دایره‌های محاطی خارجی مثلث ABC، متناظر با ضلع a, b, c و r شعاع دایرهٔ محاطی داخلی باشند، آن‌گاه داریم:

$$S=\sqrt{r\,r_a r_b r_c}$$

پاسخ تشریحی:

ابتدا شعاع دایره محاطی داخلی را به دست می‌آوریم:

$$\frac{۱}{r}=\frac{۱}{r_1}+\frac{۱}{r_2}+\frac{۱}{r_3}=\frac{۱}{۱۴}+\frac{۱}{۱۲}+\frac{۱}{\frac{۲۱}{۲}}=\frac{۱}{۱۴}+\frac{۱}{۱۲}+\frac{۲}{۲۱}=\frac{۶+۷+۸}{۸۴}=\frac{۲۱}{۸۴}=\frac{۱}{۴}\Rightarrow r=۴$$

$$S=\sqrt{rr_a r_b r_c}=\sqrt{۴\times ۱۴\times ۱۲\times \frac{۲۱}{۲}}=۸۴$$

گروه آموزشی ماز

و در آخر گسسته رو داریم!

خب یک راست بریم سر اصل مطلب، یعنی گراف. گراف متشکل است از مجموعه نقاط و پاره‌خط‌ها، توی فصل دوم ریاضیات گسسته، حسابی با گراف سروکله می‌زنید. ویژگی‌های گراف مثل درجهٔ گراف و اندازهٔ گراف رو یاد می‌گیرید. با انواع گراف مثل گراف کامل، گراف $k-$ منتظم، گراف همبند و ناهمبند و... آشنا می‌شید. همچنین در مورد مسیر و دور در گراف خواهید آموخت. بعد از اون می‌رید سراغ مدل‌سازی با گراف و مجموعه‌های احاطه‌گر در گراف رو به دانش خودتون اضافه می‌کنید! بچه‌ها بحث گراف تو مسائل کاربردی هم حسابی استفاده می‌شه، مثل مسیریابی، کوتاه‌ترین مسیر و... .

پیش‌نیازهای مطالعهٔ این بخش چه مباحثی است؟

این بخش نیاز به مطالعهٔ پیش‌نیاز خاصی نداره. فقط بحث شمارش از ریاضی دهم، یعنی فصل ششم رو یه نگاهی بندازید.

مباحث این بخش در کدام قسمت‌ها کاربرد دارند؟

مباحث این فصل در فصل دیگر کاربرد خاصی ندارد و معمولاً به صورت غیرترکیبی ازشون سوال میاد.

از این بخش در کنکور سال‌های قبل چه تعداد سوال طرح شده است؟ این سوالات از چه موضوعاتی بوده؟

۱۳۹۸	۱۳۹۹	۱۴۰۰	۱۴۰۱	۱۴۰۱ (دی)	۱۴۰۲	۱۴۰۳ (اردیبهشت)
۲	۳	۲	۲	۲	۱	۱
تعداد دور مجموعه‌های احاطه‌گر	تعداد دور مجموعه‌های احاطه‌گر گراف $k-$ منتظم	رسم گراف مجموعه‌های احاطه‌گر	گراف کامل درجه رئوس گراف	مجموعه‌های احاطه‌گر رسم گراف	رسم گراف، گراف مکمل	رسم گراف- درجه گراف

پیش‌بینی شما برای کنکور سال آینده چیه؟

با توجه به روند پیش‌رو احتمال ۱ الی ۲ سوال از مبحث گراف را می‌توان داشت. در سال‌های اخیر، سوالات گراف معمولاً درجه سختی متوسط را داشته‌اند. بنابراین با تسلط به آن‌ها می‌توان از پس همهٔ سوالات این بخش در کنکور بر بیاین.

۳۱- گراف G ناهمبند و ۴-منتظم با حداقل مرتبه است. این گراف چند دور دارد؟

۱) ۵۴ ۲) ۷۴ ۳) ۳۷ ۴) ۵۰

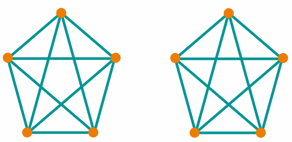
پاسخ: گزینه ۲ (متوسط ـ مفهومی / محاسباتی ـ ۱۲۰۲)

تعداد دورها رو بلدی حساب کنی؟

در گراف کامل k_n، تعداد دور به طول m $(m \le n)$ برابر است با: $\binom{n}{m} \times \frac{(m-۱)!}{۲}$

پاسخ تشریحی

گراف ناهمبند ۴- منتظم با حداقل مرتبه به صورت زیر است:



که تشکیل دو گراف کامل در کنار هم می‌دهد، بنابراین تعداد دورهای به طول ۵,۴,۳ در هر کدام را به دست آورده و با هم جمع می‌کنیم.

دورهایی به طول ۳ : $\binom{۵}{۳}\frac{۲!}{۲} = ۱۰$

دورهایی به طول ۴ : $\binom{۵}{۴}\frac{۳!}{۲} = ۱۵ \Rightarrow$ مجموع کل دورها $= ۲\times(۱۰+۱۵+۱۲) = ۳۷\times۲ = ۷۴$

دورهایی به طول ۵ : $\binom{۵}{۵}\frac{۴!}{۲} = ۱۲$

گروه آموزشی ماز

۳۲- اگر در گراف G، همواره رابطه $\forall x,y \in V(G): N[x]=N[y]$ و $p+q=۲۸$ برقرار باشد، این گراف چند مسیر به طول ۵ بین دو رأس a و b از گراف و شامل یال cd دارد؟

۱) ۳۶ ۲) ۱۸ ۳) ۶ ۴) ۹

پاسخ: گزینه ۱ (متوسط ـ مفهومی / محاسباتی ـ ۱۲۰۲)

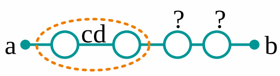
عه، پس گرافمون کامله!

در گراف کامل، اندازهٔ گراف (q) برابر است با: $q = \binom{p}{۲} = \frac{p(p-۱)}{۲}$

پاسخ تشریحی

با توجه به تعریف داده شده در صورت سوال، گراف G کامل است و چون $p+q=۲۸ \Rightarrow p+\frac{p(p-۱)}{۲} = ۲۸$ است، $p = ۷$ می‌باشد. در نتیجه:

تعداد مسیر به طول ۵ بین دو رأس a و b و شامل یال cd :



$\binom{۳}{۲}\times۳!\times۲! = ۳۶$

گروه آموزشی ماز

۳۳- گراف ۲- منتظم مرتبه ۱۲ را به گونه‌ای رسم کرده‌ایم که بیشترین عدد احاطه‌گری را دارد. تعداد مجموعه‌های احاطه‌گر مینیمم گراف، چند برابر تعداد مجموعه‌های احاطه‌گر مینیمال گراف است؟

۱) ۱   ۲) ۲   ۳) ۳   ۴) $\frac{۳}{۲}$

پاسخ: گزینه ۱   (متوسط ـ مفهومی / محاسباتی ـ ۱۴۰۲)

۲ تا تعریف که شاید با هم قاطیشون کنید!

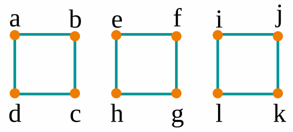
مجموعهٔ احاطه‌گر مینیمم: در بین تمام مجموعه‌های احاطه‌گر گراف G، مجموعه یا مجموعه‌های احاطه‌گری که کمترین عضو را دارند، مجموعهٔ احاطه‌گر مینیمم می‌گویند.

مجموعهٔ احاطه‌گر مینیمال:

یک مجموعهٔ احاطه‌گر را که با حذف هر یک از رأس‌هایش، دیگر احاطه‌گر نباشد، احاطه‌گر مینیمال می‌نامند.

پاسخ تشریحی:

برای اینکه گراف ۲-منتظم مرتبه ۱۲ بیشترین عدد احاطه‌گری را داشته باشد باید با رئوس آن، تشکیل چهارضلعی دهیم، در نتیجه گراف به صورت زیر خواهد بود:



تعداد مجموعه‌های احاطه‌گر min : $\binom{۴}{۲}\binom{۴}{۲}\binom{۴}{۲} = ۲۱۶$

و اگر دقت کنید تعداد مجموعه‌های احاطه‌گر مینیمال نیز همین تعداد است، بنابراین نسبت آنها، یک می‌باشد.

گروه آموزشی ماز

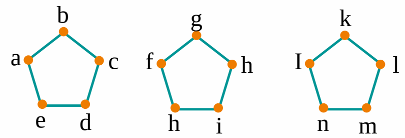
۳۴- گراف ناهمبند G از مرتبه ۱۵ با شرط $۲ = \delta = \Delta$، دارای فقط ۳ دور با طول‌های یکسان است. این گراف چند مجموعه احاطه‌گر دارد؟

۱) $۷^{۱۵}$ ۲) $۳^{۱۵}$ ۳) $۳^{۳} \times ۷^{۳}$ ۴) $۳^{۷} \times ۷^{۳}$

پاسخ: گزینه ۳   (سخت ـ مفهومی / محاسباتی ـ ۱۴۰۲)

پاسخ تشریحی:

با توجه به توضیحات سوال، گراف به صورت زیر است:



تعداد مجموعه‌های احاطه‌گر هر کدام : $\begin{cases} \binom{۵}{۲} - ۵ = ۵ \\ \binom{۵}{۳} = ۱۰ \\ \binom{۵}{۴} = ۵ \\ \binom{۵}{۵} = ۱ \end{cases} \Rightarrow ۲۱ \Rightarrow ۲۱ \times ۲۱ \times ۲۱ = ۳^{۳} \times ۷^{۳}$

گروه آموزشی ماز

۳۵- در گراف G از مرتبه ۱۱ همواره $\sum_{i=1}^{p}|N_G[V_i]| = 115$ است. اگر $\Delta = \delta + 1$ باشد، این گراف چند γ- مجموعه متفاوت دارد؟

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۵

پاسخ: گزینه ۴ (متوسط ـ مفهومی / محاسباتی ـ ۱۴۰۲)

یک فوت کوزه‌گری توگراف!

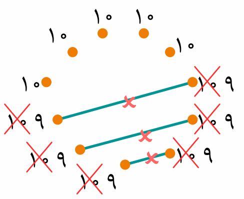
وقتی تو سوالی هم بهت p رو میده و هم q رو، q هم خیلی بزرگه، شاید حرف‌هایمان از گراف کامل مرتبهٔ p بهت کمک کنه.

پاسخ تشریحی:

مجموع تعداد عضوهای همسایگی‌های بسته همه رئوس یا همان $\sum_{i=1}^{p}|N_G[V_i]|$ همواره برابر $2q + p$ است.

$2q + 11 = 115 \Rightarrow 2q = 104 \Rightarrow q = 52$

بنابراین از گراف کامل مرتبه ۱۱ که $55 = \frac{11 \times 10}{2} = \binom{11}{2}$ یال دارد، ۳ یال حذف می‌کنیم که چون $\Delta = \delta + 1$ پس Δ و δ دو عدد متوالی‌اند خواهیم داشت:



عدد احاطه‌گری گراف $\gamma(G) = 1$ است. بنابراین هر کدام از رأس‌های درجه ۱۰ را می‌توان به عنوان γ- مجموعه درنظر گرفت، بنابراین گراف ۵ مجموعه احاطه‌گر min می‌تواند داشته باشد.

گروه آموزشی ماز

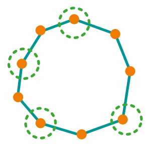
۳۶- گراف‌های G_1 و G_2 از مرتبه ۹ هستند. G_1 فقط یک دور دارد که شامل ۹ رأس است و G_2 نیز به گونه‌ای است که فقط یک مسیر دارد که شامل ۹ رأس است. درگراف‌های G_1 و G_2 به ترتیب یک مجموعه احاطه‌گر مینیمال، حداکثر چند عضو دارد؟

۱) ۴ ,۵ ۲) ۴ , ۴ ۳) ۵ , ۵ ۴) ۳ , ۴

پاسخ: گزینه ۱ (متوسط ـ مفهومی ـ ۱۴۰۲)

پاسخ تشریحی:

گراف G_1 با تعریف گفته شده همان C_9 است که مجموعه احاطه‌گر مینیمال طبق رأس‌های مشخص شده زیر حداکثر ۴ عضو دارد.



گراف G_2 نیز با توضیحات گفته شده P_9 است که مجموعه احاطه‌گر مینیمال آن طبق رأس‌های مشخص شده حداکثر ۵ عضو دارد.

گروه آموزشی ماز

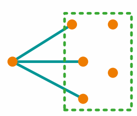
۳۷- با رئوس $V = \{a, b, c, d, e, f\}$ چند گراف از اندازه ۴ می‌توان ساخت که در هر یک از آن‌ها $\Delta = 3$ است؟

۱) ۲۰۰ ۲) ۴۰۰ ۳) ۱۰۰ ۴) ۶۰۰

پاسخ: گزینه ۴ (متوسط ـ مفهومی / محاسباتی ـ ۱۴۰۲)

پاسخ تشریحی:

ابتدا یک رأس را برای $\Delta = 3$ انتخاب می‌کنیم و از رئوس باقی‌مانده نیز ۳ رأس را انتخاب و به آن وصل می‌کنیم، سپس ۱ یال دیگر را تعیین می‌کنیم:



$\Leftarrow$ یال‌هایی که با این ۵ رأس می‌توان ساخت : $\binom{5}{2} = 10$

$\binom{6}{1}\binom{5}{3}\binom{10}{1} = 600$

۳۸- گراف منتظم همبندی با ۶ یال ساخته‌ایم. تمام مقادیر متمایزی که عدد احاطه‌گری می‌تواند اختیار کند را در نظر گرفته‌ایم. میانگین آن‌ها کدام است؟

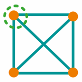
۱) ۳ ۲) ۲ ۳) ۱ ۴) ۱/۵

پاسخ: گزینه ۴ (متوسط ـ مفهومی / محاسباتی ـ ۱۴۰۲)

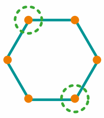
پاسخ تشریحی

در گراف k-منتظم همواره $kp = ۲q$.

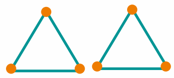
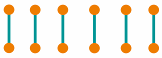
$$kp = ۲\times۶ = ۱۲ \Rightarrow \begin{cases} ۱)\ k = ۳, p = ۴ \\ ۲)\ k = ۲, p = ۶ \end{cases}$$



$\gamma = ۱$



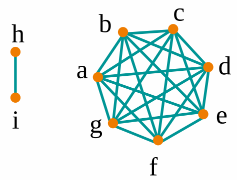
$\gamma = ۲$

البته حالت سوم و چهارم به صورت  و  نیز می‌تواند باشد ولی به دلیل ناهمبند بودن قابل قبول نیستند.

$$\bar{x} = \frac{۱+۲}{۲} = \frac{۳}{۲}$$

گروه آموزشی ماز

۳۹- گراف شکل زیر، چند زیرگراف دارد که $\deg(b) = ۶$ و از اندازه ۷ باشد؟



۱) ۳۶۱
۲) ۳۰۰
۳) ۶۱
۴) ۶۰

پاسخ: گزینه ۳ (متوسط ـ مفهومی / محاسباتی ـ ۱۴۰۲)

پاسخ تشریحی

چون درجه رأس b برابر ۶ است، رأس b و ۶ یال متصل به آن باید رسم شود، حال ۲ حالت اتفاق می‌افتد:

یک یال مانده را از $k_۷$ انتخاب می‌کنیم و دو رأس h و i می‌توانند باشند یا نباشند: (حالت اول)

$$q(k_۷) = \frac{۷\times۶}{۲} = ۲۱$$

$$۲۱ - ۶ = ۱۵\ ,\ \binom{۱۵}{۱}\times۲\times۲ = ۶۰$$

یال مانده را hi انتخاب می‌کنیم که یک حالت دارد: (حالت دوم)

$$۶۰ + ۱ = ۶۱$$

گروه آموزشی ماز

۴۰- اگر n بزرگ‌ترین عدد یک رقمی باشد که در رابطه $\gamma(\bar{C}_n) + \gamma(\bar{P}_n) = ۴$ صدق می‌کند، عدد احاطه‌گری مکمل گراف k_n کدام است؟

۱) ۶ ۲) ۷ ۳) ۸ ۴) ۹

پاسخ: گزینه ۴ (متوسط ـ مفهومی ـ ۱۴۰۲)

نکته اگر از دل برآید، بر دل نشیند!

عدد احاطه‌گری $\bar{C}_n$ $(n \geq ۴)$ همواره ۲ و عدد احاطه‌گری $\bar{P}_n$ نیز همواره ۲ است. در نتیجه بزرگ‌ترین عدد تک‌رقمی که در رابطه داده شده صدق می‌کند، $n = ۹$ است.

پاسخ تشریحی

مکمل گراف کامل گراف تهی است که عدد احاطه‌گری آن همان n است.

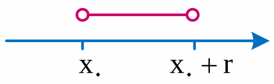
گروه آموزشی ماز

جمع‌بندی سریع

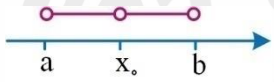
خب خسته نباشید! حالا بریم کل مباحث این آزمون رو به شکل نمودار درختی مرور کنیم تا یه نقشه ذهنی خوب از این مباحث توی ذهنتون شکل بگیره!

- **حد توابع شامل قدرمطلق و جزء صحیح**
  - شامل قدرمطلق
    - اگر $x = a$ ریشه عبارت داخل قدرمطلق نباشد ← تعیین تکلیف قدرمطلق با عددگذاری
    - اگر $x = a$ ریشه عبارت داخل قدرمطلق باشد ← حد چپ و راست را جداگانه محاسبه می‌کنیم.
  - شامل براکت
    - اگر $x = a$ عبارت داخل براکت را صحیح نکند ← تعیین مقدار براکت به ازای $x = a$.
    - اگر $x = a$ عبارت داخل براکت را صحیح کند ← حد چپ و راست را جداگانه محاسبه می‌کنیم.

تعاریف اولیه

- همسایگی راست x_0
  - 

  - $(x_0, x_0 + r)$
- همسایگی چپ x_0
  - 

  - $(x_0 - r, x_0)$
- همسایگی محذوف x_0
  - 

  - $(a,b) - \{x_0\}$
  - $(a, x_0) \cup (x_0, b)$
- قضیه تقسیم
  - $f(x) = p(x)q(x) + r(x)$
  - اگر مقسوم از درجه n و مقسوم‌علیه از درجه m باشد.
    - خارج‌قسمت از درجه $n-m$
    - باقی‌مانده، حداکثر از درجه $m-1$ است.
  - اگر $f(x)$ بر $p(x)$ بخش‌پذیر باشد
    - باقی‌مانده تقسیم $f(x)$ بر $p(x)$ برابر صفر است.
    - $f(x)$ بر همه عامل‌های $p(x)$ نیز بخش‌پذیر است.
- شرط وجود حد: $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = \lim\limits_{x \to a^-} f(x)$
- اگر $\lim\limits_{x \to a} f(x) = L_1$ و $\lim\limits_{x \to a} g(x) = L_2$ باشد
  - $\lim\limits_{x \to a} f(x) \pm g(x) = L_1 \pm L_2$
  - $\lim\limits_{x \to a} f(x) \times g(x) = L_1 \times L_2$
  - $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{L_1}{L_2}, L_2 \neq 0$
  - $\lim\limits_{x \to a} (cf(x)) = cL_1$
  - $\lim\limits_{x \to a} (f(x))^n = (L_1)^n$

رفع ابهام صفر صفرم

- حذف عامل ابهام از صورت و مخرج به کمک
  - فاکتورگیری، تجزیه، ...
  - تقسیم عبارت به عامل ابهام
- قاعده هوپیتال: $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{۰}{۰}\xrightarrow{HOP}\lim\limits_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$
- استفاده از اتحاد مزدوج در عبارت‌های رادیکالی: $(\sqrt{a}-\sqrt{b})(\sqrt{a}+\sqrt{b})=a-b$
- استفاده از اتحاد چاق و لاغر در عبارت‌های رادیکالی: $(\sqrt[۳]{a}\pm\sqrt[۳]{b})(\sqrt[۳]{a^۲}\mp\sqrt[۳]{ab}+\sqrt[۳]{b^۲})=a\pm b$
- استفاده از اتحادهای مثلثاتی
  - $\sin^۲ x+\cos^۲ x=۱$
    - $\sin^۲ x=۱-\cos^۲ x=(۱-\cos x)(۱+\cos x)$
    - $\cos^۲ x=۱-\sin^۲ x=(۱-\sin x)(۱+\sin x)$
  - $\sin ۲x=۲\sin x\cos x$
  - $\cos ۲x=\cos^۲ x-\sin^۲ x=۲\cos^۲ x-۱=۱-۲\sin^۲ x$
  - $\sin^۲ x=\frac{۱-\cos ۲x}{۲}$ $\quad$ $\cos^۲ x=\frac{۱+\cos ۲x}{۲}$
- استفاده از هم‌ارزی در صفر
  - هم‌ارزی کم‌توان: در چندجمله‌ای‌ها، جمله‌های با کم‌ترین توان رو نگه می‌داریم و بقیه رو حذف می‌کنیم.
  - هم‌ارزی مثلثاتی $(u\to ۰)$
    - $\sin u\sim u$
    - $\sin^n u\sim u^n$
    - $\tan u\sim u$
    - $\tan^n u\sim u^n$
    - $\cos u\sim ۱-\frac{u^۲}{۲}$
    - $\cos^n u\sim ۱-\frac{nu^۲}{۲}$

پیوستگی

- پیوستگی در نقطه: $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = \lim\limits_{x\to a^-} f(x) = f(a)$

- انواع
  - پیوستگی راست: $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = f(a)$

  - پیوستگی چپ: $\lim\limits_{x\to a^-} f(x) = f(a)$

- پیوستگی تابع براکتی $y=[f(x)]$
  - عبارت داخل براکت به ازای $x=a$ عدد صحیح نباشد ← تابع در $x=a$ پیوسته
  - عبارت داخل براکت به ازای $x=a$ عدد صحیح باشد
    - $x=a$ مینیمم نسبی تابع است ← تابع در $x=a$ پیوسته
    - در غیراین‌صورت تابع در $x=a$ ناپیوسته
  - در توابع $y=g(x)[f(x)]$، اگر $f(a)\in\mathbb{Z}$ و $g(x)$ پیوسته و $g(a)=0$ باشد، تابع در $x=a$ پیوسته است

- توابع همواره پیوسته در دامنه خود: $\sin x$، $\cos x$، چندجمله‌ای‌ها، رادیکالی با فرجه فرد، توابع نمایی و لگاریتمی و ....

- توابع کسری در ریشه مخرج خود ناپیوسته‌اند.

- تابع $y=\tan x$ در نقاط به طول $x=k\pi+\frac{\pi}{2}$ ناپیوسته است.

- تابع $y=\cot x$ در نقاط به طول $x=k\pi$ ناپیوسته است.

- در توابع به فرم $y=\sqrt{ax+b}$، تابع در ریشه عبارت زیر رادیکال یعنی $x=-\frac{b}{a}$ ناپیوسته است.

- پیوستگی در $\mathbb{R}$ توابع خاص
  - توابع رادیکالی با فرجه زوج ← عبارت زیر رادیکال باید همواره نامنفی باشد.
  - توابع گویا ← مخرج کسر باید ریشه نداشته باشد.
  - چندضابطه‌ای
    - هریک از ضابطه‌ها در دامنه خود پیوسته باشند.
    - تابع در نقاط مرزی دامنه پیوسته باشد.

حد نامتناهی

- $\lim\limits_{x\to a} f(x)=+\infty$ یا $\lim\limits_{x\to a} f(x)=-\infty$

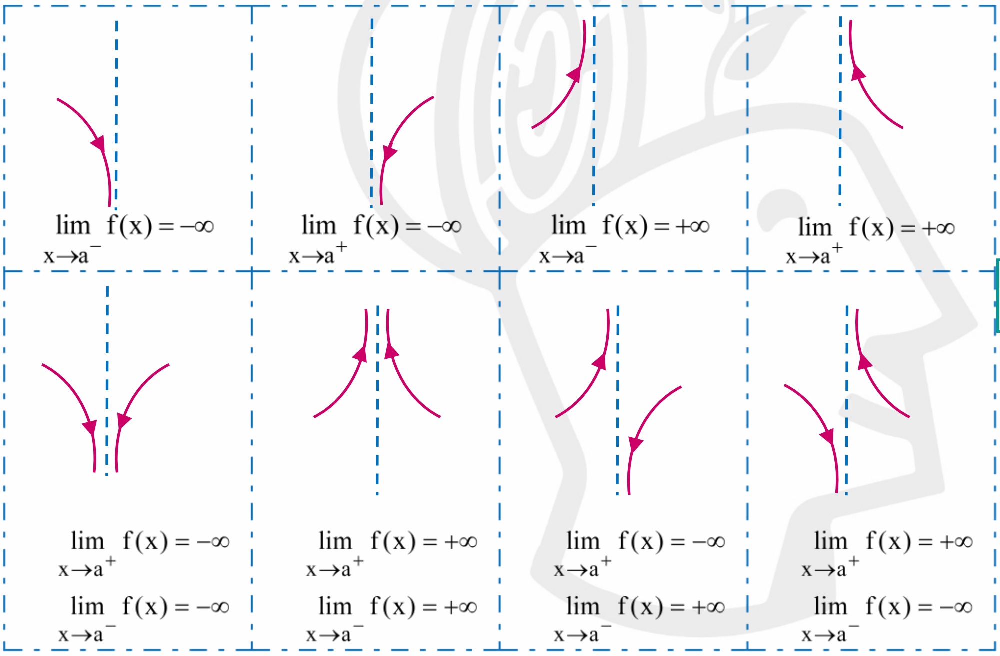
- **تعیین علامت ∞**

$\dfrac{+\text{عدد}}{0^+}=+\infty$	$\dfrac{-\text{عدد}}{0^+}=-\infty$	$\dfrac{-\text{عدد}}{0^-}=+\infty$	$\dfrac{+\text{عدد}}{0^-}=-\infty$

- **توجه**

$\dfrac{\text{صفرمطلق}}{\text{صفرحدی}}=0$	$\dfrac{\text{صفرمطلق}}{\text{صفرمطلق}}=$ وجود ندارد	$\dfrac{\text{صفرحدی}}{\text{صفر مطلق}}=$ وجود ندارد	(مبهم) $\dfrac{\text{صفر حدی}}{\text{صفرحدی}}=\dfrac{0}{0}$	$\dfrac{\text{عدد}}{\text{صفرحدی}}=\infty$

- **انواع**



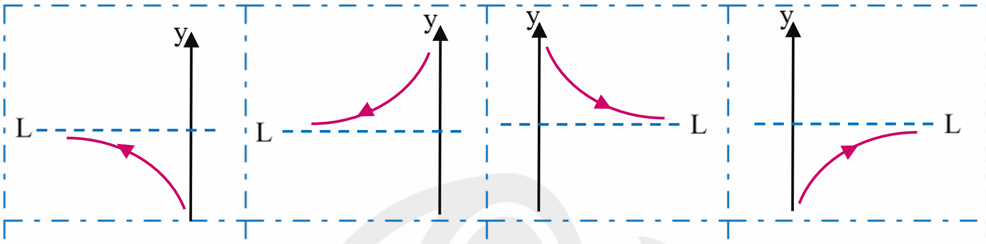
- خاص: $\lim\limits_{x\to k}\dfrac{f(x)}{ax^2+bx+c}=\pm\infty \Leftarrow x=k$ ریشه مضاعف مخرج کسر است. (به شرطی که k ریشه صورت نباشد.)

- **رفع حالت مبهم $(\infty-\infty)$**
  - ساده کردن با مخرج مشترک گیری
  - ضرب در مزدوج
  - هم‌ارزی نیوتن (بنا) $x\to\pm\infty:\ \sqrt[n]{ax^n+bx^{n-1}+\dots}\sim\sqrt[n]{a}\left|x+\dfrac{b}{na}\right|$

حد در بی‌نهایت

- $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)=\infty$ یا $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)=L(L\in\mathbb{R})$

- انواع



$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=L^-$	$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=L^+$	$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=L^+$	$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=L^-$

- اگر مخرج کسری $\pm\infty$ و صورت کسر، عدد شود حاصل حد برابر صفر است. $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{a}{x^n}=۰\ ,\ (a\in\mathbb{R})(n>۰)$

- قاعده پرتوان: در چندجمله‌ای‌ها جمله با بیشترین توان را نگه می‌داریم و بقیه را حذف می‌کنیم.

- در عبارت‌های گویا:

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{ax^n+a'x^{n-۱}+\dots}{bx^m+b'x^{m-۱}+\dots}=\begin{cases}\pm\infty & n>m\\ \frac{a}{b} & n=m\\ \text{صفر} & n<m\end{cases}$$

- در توابع نمایی به فرم $y=a^x+b^x+\dots$
  - اگر $x\to+\infty$: جمله با بزرگ‌ترین پایه را انتخاب می‌کنیم و بقیه را حذف می‌کنیم.
  - اگر $x\to-\infty$: جمله با کمترین پایه را انتخاب می‌کنیم و بقیه را حذف می‌کنیم.

مجانب‌ها

- قائم
  - خط $x=a$ را مجانب قائم تابع f می‌گوییم، هرگاه: $\lim\limits_{x\to a^{\pm}} f(x)=\pm\infty$.
  - کاندیدهای مجانب قائم
    - ریشه‌های مخرج کسر در توابع کسری
    - خطوط $x=(2k+1)\frac{\pi}{2a}$ در تابع $y=\tan ax$
    - خطوط $x=\frac{k\pi}{a}$ در تابع $y=\cot ax$
    - ریشه‌های معادله $f(x)=0$ و $g(x)=1$ در تابع $y=\log_{g(x)}^{f(x)}$
- افقی ← خط $y=L$ را مجانب افقی تابع f می‌گوییم، هرگاه $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)=L$
- مایل ← در محدوده کتاب درسی نیست.

ماتریس

تعریف: هر آرایش مستطیلی از اعداد حقیقی: $A_{m\times n}$ ، m سطر و n ستون

ماتریس‌های خاص:

- ماتریس مربعی: $A_{n\times n}$ $\xrightarrow{\text{قطر اصلی}}$ درایه‌های واقع بر قطر
- ماتریس سطری: $A_{1\times m}$ [......]
- ماتریس ستونی: $A_{n\times 1}$
- ماتریس قطری: یک ماتریس مربعی که تمام درایه‌های غیرواقع بر قطر اصلی صفر باشد.
- ماتریس اسکالر: یک ماتریس قطری که تمام درایه‌های روی قطر اصلی یکسان باشد.
- ماتریس همانی: یک ماتریس اسکالر که تمام درایه‌های روی قطر اصلی برابر ۱ است.
- ماتریس صفر: $O_{m\times n}$: ماتریسی است که همهٔ درایه‌های آن صفر باشد.
- ماتریس قرینه: $A=[a_{ij}]_{m\times n} \Rightarrow (-A)=[-a_{ij}]_{m\times n}$

تساوی ۲ ماتریس: A: هم‌مرتبه باشند. B: تمام درایه‌های آن‌ها نظیر به نظیر برابر شوند.

$A=[a_{ij}]_{m\times n} \quad B=[b_{ij}]_{m\times n} \quad \forall i,j, a_{ij}=b_{ij} \Leftrightarrow [a_{ij}]=[b_{ij}]$

جمع(تفاضل) دو ماتریس: A: هم‌مرتبه باشند. B: تمام درایه‌های آن‌ها نظیر به نظیر با هم جمع (از هم کم) شوند.

$A=[a_{ij}]_{m\times n} \quad B=[b_{ij}]_{m\times n} \quad \Rightarrow A\pm B=[a_{ij}\pm b_{ij}]_{m\times n}$

ضرب عدد حقیقی در ماتریس: $A=[a_{ij}]_{m\times n}, r\in\mathbb{R} \Rightarrow rA=[ra_{ij}]_{m\times n}$

ضرب ماتریس در ماتریس: $C_{m\times p}=(A_{m\times n})\times(B_{n\times p})$

خواص جمع ماتریس‌ها و ضرب عدد در ماتریس (A و B ماتریس) $(r,s\in\mathbb{R})$:

- جابه‌جایی در جمع: $A+B=B+A$
- شرکت‌پذیری در جمع: $A+(B+C)=(A+B)+C$
- عضو خنثی در جمع: $A+\bar{O}=\bar{O}+A=A$
- عضو قرینه: $A+(-A)=(-A)+A=\bar{O}$
- توزیع‌پذیری ضرب حقیقی به جمع ماتریس: $r(A\pm B)=rA\pm rB$
- توزیع‌پذیری ضرب ماتریس به جمع حقیقی: $(r\pm s)A=rA\pm sA$
- خاصیت حذف: $rA=rB, r\neq 0 \Rightarrow A=B$

ماتریس

خواص ضرب ماتریس‌ها (ماتریس A,B,C)

- لزوماً خاصیت جابه‌جایی برقرار نیست. $AB \neq BA$ (در حالت کلی)
- عضو خنثی در ضرب: $A_{n\times n} \times I_n = I_n \times A_{n\times n} = A_{n\times n}$
- توزیع‌پذیری ضرب ماتریس به جمع ماتریس: $A\times(B+C) = A\times B + A\times C$
- شرکت‌پذیری: $A\times(B\times C) = (A\times B)\times C$
- قانون حذف لزوماً برقرار نیست. (در حالت کلی) $AB = AC \not\Rightarrow B = C$

$$A_{n\times n} = \begin{bmatrix} r_1 & & & 0 \\ & r_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & r_n \end{bmatrix} \quad B_{n\times n} = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_n \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \vdots & b_{nn} \end{bmatrix}$$

$$AB = \begin{bmatrix} r_1b_{11} & r_1b_{12} & \cdots & r_1b_{1n} \\ r_2b_{21} & r_2b_{22} & \cdots & r_2b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ r_nb_{n1} & r_nb_{n2} & \cdots & r_nb_{nn} \end{bmatrix} \quad BA = \begin{bmatrix} r_1b_{11} & r_2b_{12} & \cdots & r_nb_{1n} \\ r_1b_{21} & r_2b_{22} & \cdots & r_nb_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ r_1b_{n1} & r_2b_{n2} & \cdots & r_nb_{nn} \end{bmatrix}$$

- A سطری باشد: A^m

$$A_{n\times n} = \begin{bmatrix} r_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & r_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & r_n \end{bmatrix} \Rightarrow A^m = \begin{bmatrix} r_1^m & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & r_2^m & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & r_n^m \end{bmatrix}$$

- اگر $A\times B = B\times A \Leftarrow$ اتحادهای جبری:

۱) $(A+B)^2 = A^2 + B^2 + 2AB$ ۲) $(A+B)(A-B) = A^2 - B^2$

۳) و سایر اتحادهای دیگر

- $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$
- نحوهٔ محاسبهٔ A^m : پیدا کردن الگو

وارون ماتریس

- تعریف: $AA^{-1} = A^{-1}A = I \quad (|A| \neq 0)$
- 1×1: $A = [a] \Rightarrow A^{-1} = \left[\frac{1}{a}\right]$
- 2×2: $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & c \end{bmatrix} \Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$
- حل دستگاه معادلات:

$$\begin{cases} ax+by=c \\ a'x+b'y=c' \end{cases} \quad A = \begin{bmatrix} a & b \\ a' & b' \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} c \\ c' \end{bmatrix} \quad X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

گراف

- تعریف ← مجموعه‌ای از نقاط و پاره‌خط‌ها (رأس و یال) یال‌ها: $E(G)$ رأس‌ها: $V(G)$
- گراف جهت‌دار
- مرتبه و اندازهٔ گراف ← مرتبه: $p = |V(G)|$ (تعداد رأس) اندازه: $q = |E(G)|$ (تعداد یال)
- درجه یک رأس ← تعداد یال‌های متصل به یک رأس
  - $\deg(V)$ (اسم رأس ← V)
    - $\deg(V) =$ فرد ⇐ رأس فرد
    - $\deg(V) =$ زوج ⇐ رأس زوج
  - $\sum^{p} \deg(V_i) = ۲q$ ⇐ تعداد رأس‌های فرد هر گراف عددی زوج است.
- رأس تنها ← $\deg(V) = ۰$
- طوقه ← یالی که ابتدا و انتهایش روی یک رأس باشد.
- دو رأس مجاور (همسایه) ← اگر بین دو رأس u و v یک یال باشد، با هم مجاورند.
- مجموعهٔ همسایه‌های یک رأس
  - همسایگی باز $N_G(V)$: همسایه‌های V بدون خود V
  - همسایگی بسته $N_G[V]$: همسایه‌های V به همراه خود V
- دو یال مجاور ← ۲ یال را مجاور گویند، هرگاه شامل یک رأس مشترک باشند.
- $\delta(G)$, $\Delta(G)$ ← بزرگ‌ترین درجه یک گراف: $\Delta(G)$ کوچک‌ترین درجهٔ یک گراف: $\delta(G)$
- زیرگراف ← G' زیرگراف G است، هرگاه:
  - ۱) $E(G') \subset E(G)$
  - ۲) $V(G') \subset V(G)$
- مکمل یک گراف ← $\bar{G}$ (G°) مکمل G است، هرگاه:
  - ۱) $V(\bar{G}) = V(G)$
  - ۲) بین دو رأس از $\bar{G}$ یک یال است اگر و تنها اگر بین همان دو رأس در G یالی وجود نداشته باشد.
  - $\deg_G(V_i) + \deg_{\bar{G}}(V_i) = (p-۱)$: A
  - $q(G) + q(\bar{G}) = \binom{p}{۲}$: B
- مسیر
  - تعریف: یک مسیر از u به v، دنباله‌ای از رئوس دوبه‌دو متمایز است که از u شروع و به v ختم می‌شود، به
  - طوری که هر دو رأس متوالی این دنباله، مجاور هم باشند.
  - طول مسیر: (تعداد یال‌های مسیر) = (۱− تعداد رئوس)
  - مسیر صفر: رأس تنها
  - p_n: گرافی که تنها از یک مسیر n رأسی تشکیل شده باشد.
  - $\delta(G) \geq k$ ⇐ G لزوماً شامل یک مسیر به طول حداقل k است.

گراف

دور

- تعریف: دنبالهٔ $V_1V_2V_3,\dots V_nV_1\ (n \geq 3)$ از رئوس دوبه‌دو متمایز که در آن هر رأس با رأس بعدی مجاور است را یک دور به طول n گوییم.
- C_n: گرافی که تنها از یک دور n رأسی تشکیل شده باشد.
- تعداد دور به طول m در گراف کامل k_n $(m \leq n)$: $\binom{n}{m}\dfrac{(m-1)!}{2}$

انواع گراف

- گراف تهی: گرافی که هیچ یالی ندارد.
- گراف ساده: گرافی که ۱) طوقه ندارد. ۲) بین هر دو رأس حداکثر یک یال دارد.
- گراف k - منتظم: گرافی که هر رأس آن k رأس مجاور دارد.
- گراف r - منتظم از مرتبهٔ n $\Leftarrow$ $r \times n$ نباید فرد باشد.
- گراف کامل (k_n): گرافی که هر رأس آن با تمام رئوس دیگر مجاور باشد.
  - ۱) تعداد یال‌های گراف k_n: $\binom{n}{2}$
  - ۲) $\delta(G) = \Delta(G) = n-1$
  - ۳) مکمل گراف کامل: گراف تهی
- همبند: گرافی که بین هر دو رأس آن، حداقل یک مسیر وجود داشته باشد.
- ناهمبند: گرافی که همبند نباشد.

سقف x $\lceil x \rceil$:

$$\lceil x \rceil = \begin{cases} x & x \in \mathbb{Z} \\ \text{کوچک‌ترین عدد صحیح بزرگ‌تر از } x & x \notin \mathbb{Z} \end{cases}$$

مجموعهٔ احاطه‌گر

- تعریف: زیرمجموعهٔ D از مجموعه رئوس گراف G را احاطه‌گر نامیم، هرگاه هر رأس از گراف یا در D باشد و یا حداقل با یکی از رئوس D مجاور باشد.
- مجموعهٔ احاطه‌گر مینیمم ($\gamma-$ مجموعه): مجموعه یا مجموعه‌های احاطه‌گری که کمترین تعداد عضو را دارند.
- تعداد اعضای $\gamma-$ مجموعه: عدد احاطه‌گری $= \gamma(G)$ — $\left\lceil \dfrac{n}{\Delta+1} \right\rceil \leq \gamma(G)$: n رأس
  - ۱) گراف $k-$ منتظم n رأسی: $\left\lceil \dfrac{n}{k+1} \right\rceil \leq \gamma(G)$
  - ۲) $\gamma(P_n) = \left\lceil \dfrac{n}{3} \right\rceil$
  - ۳) $\gamma(C_n) = \left\lceil \dfrac{n}{3} \right\rceil$

مجموعهٔ احاطه‌گر مینیمال

- یک مجموعهٔ احاطه‌گر را که با حذف هر یک از رأس‌هایش دیگر احاطه‌گر نباشد، احاطه‌گر مینیمال می‌نامیم.