

آزمون آزمایشی خیلی سبز



مرحله دوم پلاس

پایه دوازدهم

۱۶ تیر / ۱۴۰۵

سال تحصیلی ۱۴۰۴-۰۵

دفترچه شماره یک

پایه

مواد امتحانی	تعداد سؤال	از شماره	تا شماره	مدت پاسخگویی	دوازدهم	یازدهم	دهم
حسابان و ریاضیات پایه	۱۲	۱	۱۲	۴۵ دقیقه	کل کتاب صفحه ۱ تا ۱۴۴	کل کتاب صفحه ۱ تا ۱۵۱	فصل ۱ تا ۵ صفحه ۱ تا ۱۱۷
هندسه	۷	۱۳	۱۹		کل کتاب صفحه ۹ تا ۸۶	کل کتاب صفحه ۹ تا ۷۵	کل کتاب صفحه ۹ تا ۹۶
ریاضیات گسسته و آمار و احتمال	۶	۲۰	۲۵		کل کتاب صفحه ۱ تا ۸۴	کل کتاب صفحه ۱ تا ۱۲۱	فصل ۶ و ۷ صفحه ۱۱۸ تا ۱۷۰
مجموع	۲۵ سؤال			۴۵ دقیقه	—		

نام درس	طراحان به ترتیب حروف الفبا	مسئول درس - گزینشگر
حسابان و ریاضیات پایه	طراحان: علی افضل زاده - کوروش اسلامی - فرشاد حسن زاده - عادل حسینی علی شهبابی - محمد گودرزی - سروش موئینی - محمد سجاد نقیه کارشناسان علمی: علی افضل زاده - سروش موئینی	محمد سجاد نقیه
هندسه	طراحان: امیرحسین ابومحبوب - کیوان صارمی - حمید گلزاری - سروش موئینی حسین نادری - حسین هاشمی طاهری کارشناس علمی: امیرحسین ابومحبوب - سید عباس حسینی	حمید گلزاری
ریاضیات گسسته و آمار و احتمال	طراحان: مصطفی دیداری - سوگند روشنی - عطا صادقی - سعید قندچی کارشناس علمی: سعید قندچی	مصطفی دیداری

مدیر تألیف آزمون: دکتر فاطمه آقاجانپور

این آزمون نمره منفی دارد.

استفاده از ماشین حساب مجاز نیست.

دفترچه سؤالات آزمون های خیلی سبز، از همه نظر (تعداد سؤال ها، زمان پاسخگویی، نوع چینش گزینه ها، نوع صفحه آرابی، فونت سؤالات، سبک کلمات و اعداد، جای خالی محل انجام محاسبات و ...) در شبیه ترین حالت به دفترچه سؤالات کنکور سراسری طراحی می شود.



Azmoon.kheilisabz.com

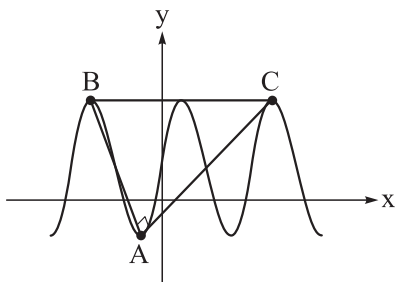
۱- تابع f با ضابطه $f(x) = |x+1| + |x-3|$ را در نظر بگیرید. ابتدا نمودار f را نسبت به خط $y = 3$ قرینه کرده، سپس آن را نسبت به خط $x = 4$ قرینه می‌کنیم. در ادامه آن را در راستای عمودی با ضریب $\frac{1}{5}$ فشرده کرده و در انتها نسبت به مبدأ مختصات قرینه می‌کنیم تا تابع g به دست آید. مساحت محدود بین نمودار تابع g و محور طول‌ها کدام است؟

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۸ (۴) ۴

۲- دو تابع f و g با ضابطه‌های $f(x) = \frac{3x-1}{2x+5}$ و $g(x) = \sqrt{x} + [\frac{1}{3} - \sqrt{x}]$ مفروض‌اند. اگر برد تابع $f \circ g$ بازه $(a, b]$ باشد، حاصل $a + b$ کدام است؟ ([] نماد جزء صحیح است.)

- (۱) $-\frac{9}{22}$ (۲) $-\frac{4}{11}$ (۳) $-\frac{9}{11}$ (۴) $-\frac{8}{11}$

۳- بخشی از نمودار تابع f با ضابطه $f(x) = a + \sqrt{3} \sin(a\pi x)$ در شکل زیر رسم شده است. اگر مطابق شکل، مثلث ABC در رأس A قائم باشد، مقدار $f(\frac{1}{3})$ کدام است؟



- (۱) $\frac{1}{2}$ (۲) $-\frac{1}{2}$ (۳) -1 (۴) ۱

۴- معادله $12 \sin x \cos x + 20 \sin x - 15 \cos x = 12$ در بازه $[0, 3\pi]$ چند جواب دارد؟

- (۱) ۴ (۲) ۵ (۳) ۶ (۴) ۷

۵- حاصل $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{1 - \tan \frac{x}{2}}{\sqrt{2} \sin^2 x - 2 \cos \frac{x}{2}}$ کدام است؟

- (۱) $-\sqrt{2}$ (۲) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ (۳) -1 (۴) $-\frac{1}{2}$

۶- دو تابع f و g با ضابطه‌های $f(x) = 2[x] - x$ و $g(x) = f(x + f(x))$ مفروض‌اند. آهنگ تغییر متوسط تابع h با ضابطه $h(x) = xg(x)$ در بازه $[-\sqrt{3}, -\frac{\pi}{4}]$ کدام است؟ ([] نماد جزء صحیح است.)

- (۱) -1 (۲) -2 (۳) -3 (۴) -4

محل انجام محاسبات

۷- تعداد نقاط مشتق ناپذیر تابع f با ضابطه $f(x) = [x - \frac{1}{3}] + [3x]$ در بازه $(-1, 3)$ کدام است؟ ([] نماد جزء صحیح است.)

- ۹ (۱) ۱۰ (۲) ۱۱ (۳) ۱۲ (۴)

۸- مقدار اکسترمم نسبی نمودار تابع f با ضابطه $x > 1$; $f(x) = 5 \log_3 x + \log_{\sqrt{x}} 9$ برابر m است. مقدار $[m]$ کدام است؟ ([] نماد جزء صحیح است.)

- ۶ (۱) ۷ (۲) ۸ (۳) ۹ (۴)

۹- اگر $a + b + c = 12$ و $\frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a} = \frac{2}{3}$ باشد، حاصل $\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b}$ کدام است؟

- ۵ (۱) ۶ (۲) ۷ (۳) ۸ (۴)

۱۰- اگر هر دو جواب متمایز معادله $x^2 - mx + 1 = 0$ بین -1 و 2 باشند، حاصل $[8m]$ چند مقدار مختلف دارد؟ ([] نماد جزء صحیح است.)

- ۵ (۱) ۴ (۲) ۳ (۳) ۲ (۴)

۱۱- نمودار تابع f با ضابطه $f(x) = (\frac{1}{\sqrt{x}})^2$ فقط در بازه $[\frac{1}{3}, 3]$ پایین تر از خط $y = ax + b$ قرار می گیرد. طول بازه

جواب های نامعادله $ax^2 + bx + 1 > 0$ کدام است؟

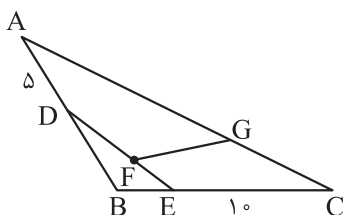
- (۱) $\frac{\sqrt{61}}{2}$ (۲) $\frac{\sqrt{61}}{4}$ (۳) $\frac{\sqrt{73}}{2}$ (۴) $\frac{\sqrt{73}}{4}$

۱۲- نمودارهای دو تابع f و g با ضابطه های $f(x) = 2^{x^2}$ و $g(x) = (\sqrt{10})^{2x-a}$ در نقطه ای به طول b مماس هستند. حاصل $a + b$ کدام است؟

- (۱) $\log 2$ (۲) $\frac{1}{\log 2}$ (۳) $\log 5$ (۴) $\frac{1}{\log 5}$

محل انجام محاسبات

۱۳- در شکل زیر، اگر $\hat{B} = 12^\circ$ و $\frac{DF}{FE} = \frac{AG}{GC} = \frac{3}{2}$ ، آن گاه طول پاره خط FG کدام است؟



$$3\sqrt{3} \quad (1)$$

$$2\sqrt{7} \quad (2)$$

$$6 \quad (3)$$

$$5 \quad (4)$$

۱۴- حجم شکل فضایی حاصل از دوران سطح محدود به نمودار تابع $f(x) = \begin{cases} \frac{3x}{4} & ; 0 \leq x \leq 4 \\ 3 & ; 4 < x \leq 8 \\ \sqrt{9 - (x-8)^2} & ; 8 < x \leq 11 \end{cases}$ حول محور x ها، چند برابر π است؟

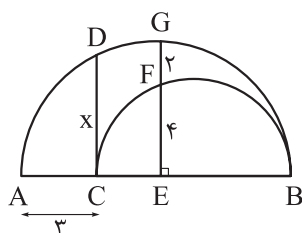
$$72 \quad (4)$$

$$66 \quad (3)$$

$$54 \quad (2)$$

$$48 \quad (1)$$

۱۵- در شکل زیر، دو نیم دایره به قطرهای AB و BC رسم شده اند و CD در نقطه C بر نیم دایره کوچک تر مماس است.



با توجه به اندازه های روی شکل، طول پاره خط CD کدام است؟

$$\sqrt{27/2} \quad (1)$$

$$\sqrt{27/4} \quad (2)$$

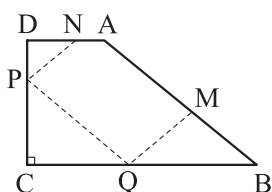
$$\sqrt{27/6} \quad (3)$$

$$\sqrt{27} \quad (4)$$

۱۶- در دوزنقه قائم الزاویه ABCD با ارتفاع به طول ۸، نقاط ثابت M و N به همراه نقاط متغیر P و Q بر روی اضلاع

دوزنقه طوری قرار دارند که کمترین مقدار طول خط شکسته MQPN برابر ۱۶ می باشد. اگر $ND = 1/5$ و $PQ = 3PN$

باشد، طول پاره خط MQ کدام است؟



$$5/5 \quad (1)$$

$$6 \quad (2)$$

$$6/5 \quad (3)$$

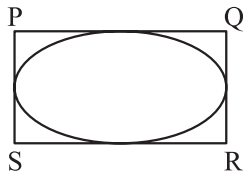
$$7 \quad (4)$$

محل انجام محاسبات

۱۷- اگر $A = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -1 & -1 \\ \frac{1}{2} & |A| & -1 \\ 1 & -2 & -1 \end{bmatrix}$ باشد، درایه سطر دوم و ستون دوم ماتریس A^3 کدام است؟

- (۱) ۱ (۲) -۱ (۳) $-3/75$ (۴) $3/75$

۱۸- در بیضی به شکل زیر، مستطیل PQRS، مستطیل طلایی است. طول قطر کوچک بیضی چند برابر فاصله کانونی آن است؟



$$\sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{2}} \quad (۲)$$

$$\sqrt{\frac{\sqrt{5}-2}{2}} \quad (۱)$$

$$\sqrt{\frac{\sqrt{5}+1}{2}} \quad (۴)$$

$$\sqrt{\frac{\sqrt{5}+2}{2}} \quad (۳)$$

۱۹- اگر تصویر قائم بردار $\vec{a}$ روی امتداد بردار $\vec{b}$ به صورت $\vec{a}' = (2, 2, 2)$ و زاویه بین $\vec{a}$ و $\vec{b}$ بزرگ‌تر از 90° باشد، آن‌گاه مجموع مؤلفه‌های بردار $\vec{a}$ کدام است؟

- (۱) -۶ (۲) ۶ (۳) ۱۲ (۴) -۱۲

۲۰- معادله سیاله $25x^3 + 3a = 57x + 190y = 25x^3 + 3a$ دارای جواب صحیح است. بزرگ‌ترین مقدار دورقمی a کدام است؟

- (۱) ۸۱ (۲) ۸۲ (۳) ۸۳ (۴) ۸۴

۲۱- در گراف G از مرتبه ۱۰، رابطه $|N_G[a]| = ۸۲$ برقرار است. این گراف حداکثر چند رأس درجه ۹ دارد؟

- (۱) ۴ (۲) ۵ (۳) ۶ (۴) ۷

۲۲- در یک کارگاه، ۱۰ کارگر هستند، در هر ماه با قرعه‌کشی به دو نفر وام ۲ میلیونی می‌دهند. حداقل چند ماه این عمل انجام شود تا مطمئن شویم، دست‌کم یک نفر هست که حداقل مبلغ ده میلیون تومان وام گرفته است؟

- (۱) ۱۰ (۲) ۱۱ (۳) ۲۰ (۴) ۲۱

۲۳- اگر بازه‌های $A = (-1, 2)$ و $B = (1, 3)$ تعریف شده باشد، مساحت ناحیه $A \times B - (A^2 - B^2)$ کدام است؟

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴

۲۴- سه دانش‌آموز ریاضی، سه دانش‌آموز تجربی و سه دانش‌آموز انسانی به چند طریق می‌توانند در یک ردیف کنار هم بایستند به شرط آن که همه دانش‌آموزان ریاضی کنار هم باشند، ولی هیچ دو دانش‌آموز تجربی کنار هم نباشند؟

- (۱) ۲۱۶۰ (۲) ۶۱۲۰ (۳) ۶۴۸۰ (۴) ۸۶۴۰

۲۵- معادله $(\sqrt{x_1} + x_2 + x_3 + x_4)(2x_1 + x_5 + x_6) = 30$ ، چند جواب صحیح نامنفی دارد که به ازای $i = 1, 2, 3, 4$ داشته باشیم $x_i \geq 1$ ؟

- (۱) ۱۷۳ (۲) ۷۸ (۳) ۱۳۴ (۴) ۱۴۹

پاسخ‌نامه تشریحی آزمون را ساعت ۱۶:۰۰ از صفحه شخصی خودتان در سایت آزمون خیلی سبز دریافت کنید.



azmoon.kheilisabz.com

اساتید، مشاوران و دانش‌آموزان گرامی؛

نظرات، پیشنهادات، انتقادات و بازخوردهای خود نسبت به سؤالات این آزمون را می‌توانید از طریق آیدی @Kheilisabz_edit در همه پیام‌رسان‌ها با ما به اشتراک بگذارید.

محل انجام محاسبات

آزمون آزمایشی خیلی سبز



مرحله دوم پلاس

پایه دوازدهم

۱۶ تیر / ۱۴۰۵

سال تحصیلی ۱۴۰۴-۰۵

دفترچه شماره دو

پایه							مواد امتحانی
دهم	یازدهم	دوازدهم	مدت پاسخگویی	تا شماره	از شماره	تعداد سؤال	
کل کتاب صفحه ۱ تا ۱۴۹	کل کتاب صفحه ۱ تا ۱۳۰	کل کتاب صفحه ۱ تا ۱۵۶	۲۵ دقیقه	۴۵	۲۶	۲۰	فیزیک
کل کتاب صفحه ۱ تا ۱۲۲	کل کتاب صفحه ۱ تا ۱۲۳	کل کتاب صفحه ۱ تا ۱۲۳	۱۵ دقیقه	۶۰	۴۶	۱۵	شیمی
—			۴۰ دقیقه	۳۵ سؤال			مجموع

نام درس	طراحان به ترتیب حروف الفبا	مسئول درس - گزینشگر
فیزیک	طراح: یاشار انگوتی کارشناسان علمی: علیرضا جباری - سعید محبی - هادی نجفی	نوید شاهی - یاشار انگوتی
شیمی	طراحان: عباس سرمایه - محمد عظیمیان زواره - محمد قهرمانی نژاد - محسن مجنون کارشناس علمی: مرتضی نصیرزاده	عباس سرمایه

مدیر تألیف آزمون: دکتر فاطمه آقاجانپور

این آزمون نمره منفی دارد.

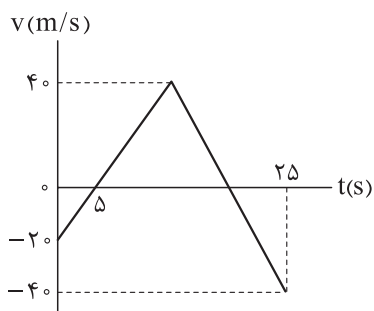
استفاده از ماشین حساب مجاز نیست.

دفترچه سؤالات آزمون های خیلی سبز، از همه نظر (تعداد سؤال ها، زمان پاسخگویی، نوع چینش گزینه ها، نوع صفحه آرای، فونت سؤالات، سبک کلمات و اعداد، جای خالی محل انجام محاسبات و ...) در شبیه ترین حالت به دفترچه سؤالات کنکور سراسری طراحی می شود.



Azmoon.kheilisabz.com

۲۶- نمودار سرعت - زمان متحرکی که در راستای محور x حرکت می‌کند و در مبدأ زمان در مبدأ مکان قرار دارد، به شکل زیر است. در این ۲۵ ثانیه، در بازه‌ای که بردار مکان و بردار سرعت متحرک در خلاف جهت یکدیگر هستند، مسافت پیموده‌شده توسط متحرک چند متر است؟



۵۰ (۱)

۱۰۰ (۲)

۱۵۰ (۳)

۳۰۰ (۴)

۲۷- یوزپلنگی به دنبال شکار یک آهو است. بیشینه تندی حرکت یوزپلنگ برابر با ۲۶ m/s است و حداکثر به مدت ۳۰ ثانیه می‌تواند با این تندی حرکت کند. هم‌چنین آهو به مدت طولانی می‌تواند با بیشینه تندی ۱۸ m/s حرکت کند. یوزپلنگ و آهو هر یک به ترتیب در مدت ۴ s و ۶ s به بیشینه تندی خود می‌رسند. اگر آهو، ۲ s پس از شروع حرکت یوزپلنگ شروع به فرار کند، حداقل فاصله این دو در شروع حرکت یوزپلنگ چند متر باشد تا آهو موفق به فرار شود؟

۳۶۴ (۴)

۳۴۴ (۳)

۳۱۰ (۲)

۲۹۰ (۱)

۲۸- گلوله‌ای را در راستای قائم و رو به بالا پرتاب می‌کنیم. اگر مدت زمان بالارفتن گلوله، نصف مدت زمان پایین آمدن آن باشد، نیروی مقاومت هوای وارد بر گلوله چند برابر وزن آن است؟ (بزرگی نیروی مقاومت هوای وارد بر گلوله را ثابت در نظر بگیرید.)

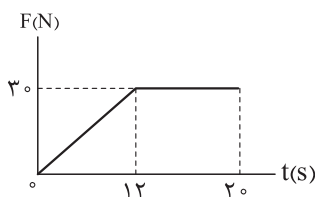
 $\frac{3}{4}$ (۲)

 $\frac{2}{3}$ (۱)

 $\frac{3}{5}$ (۴)

 $\frac{2}{5}$ (۳)

۲۹- جسمی به جرم ۴ kg روی سطحی افقی با ضرایب اصطکاک $\mu_s = ۰/۵$ و $\mu_k = ۰/۴$ قرار دارد. بر این جسم نیروی افقی F وارد می‌شود. شکل زیر نمودار تغییرات این نیرو بر حسب زمان را نشان می‌دهد. در بازه زمانی صفر تا ۲۰ s، نیروی خالص متوسط وارد بر این جسم چند نیوتون است؟ ($g = ۱۰ \text{ m/s}^2$)



۶ / ۸ (۱)

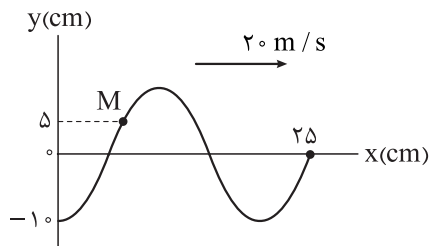
۷ (۲)

۷ / ۲ (۳)

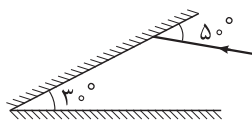
۷ / ۴ (۴)

محل انجام محاسبات

۳۰- نقش موج عرضی منتشر شده در ریسمانی کشیده، در مبدأ زمان به شکل زیر است. در لحظه $t = \frac{1}{240}$ s، فاصله ذره M از وضع تعادل خود چند سانتی متر و جهت حرکت آن کدام است؟

(۱) $\uparrow, 5\sqrt{3}$ (۲) $\downarrow, 5\sqrt{3}$ (۳) $\uparrow, 5\sqrt{2}$ (۴) $\downarrow, 5\sqrt{2}$

۳۱- در شکل زیر، پرتو نوری با یکی از دو آینه تخت متقاطع برخورد می کند. زاویه بازتابش پرتو در آخرین برخورد آن با آینه ها، چند برابر زاویه تابش پرتو در سومین برخورد آن با آینه ها است؟



(۱) ۲

(۲) ۳

(۳) ۴

(۴) ۵

۳۲- تار بین دو نقطه بسته شده و موج ایستاده ای در آن تشکیل شده است. اگر نیروی کشش تار را ۴۴ درصد افزایش و بسامد تار را ۲۵ درصد کاهش دهیم، در طول تار، ۶ گره تشکیل می شود. تعداد گره های تار، قبل از این تغییرات کدام است؟

(۴) ۹

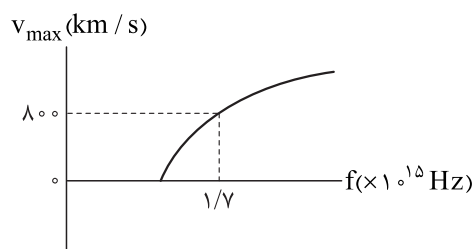
(۳) ۸

(۲) ۷

(۱) ۵

۳۳- در آزمایش فوتوالکتریک برای فلزی معین، نمودار تندی بیشینه فوتوالکترن های گسیل شده از سطح فلز بر حسب بسامد امواج الکترومغناطیسی تابیده شده بر سطح فلز، به شکل زیر است. تابع کار این فلز چند الکترون ولت است؟

$$(m_e = 9 \times 10^{-31} \text{ kg} \text{ و } e = 1.6 \times 10^{-19} \text{ C}, h = 4 \times 10^{-15} \text{ eV.s})$$



(۱) ۴

(۲) ۴/۵

(۳) ۵

(۴) ۵/۵

۳۴- در طیف اتمی هیدروژن، گستره طول موج رشته براکت، چند برابر گستره طول موج رشته بالمر است؟

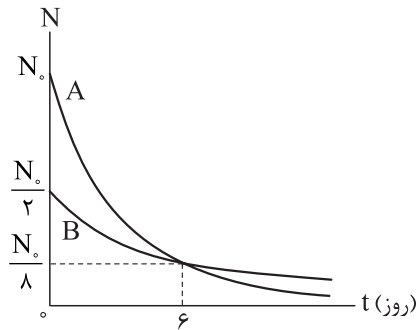
(۴) $\frac{80}{9}$ (۳) $\frac{64}{9}$

(۲) ۹

(۱) ۸

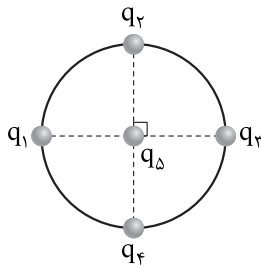
محل انجام محاسبات

۳۵- نمودار تعداد هسته‌های باقی‌مانده دو ماده پرتوزای A و B بر حسب زمان، به شکل زیر است. اگر تعداد هسته‌های اولیه یکسان از این دو ماده در اختیار داشته باشیم، پس از یک ماه، تعداد هسته‌های باقی‌مانده ماده B چند برابر تعداد هسته‌های باقی‌مانده ماده A خواهد بود؟



- (۱) ۴
(۲) ۸
(۳) ۱۶
(۴) ۳۲

۳۶- در شکل زیر، بارهای الکتریکی نقطه‌ای $q_1 = q_2 = -q_3 = q_4 = q_5 = q$ روی محیط و مرکز دایره‌ای قرار گرفته‌اند. بزرگی نیروی خالص وارد بر بار q_1 ، چند برابر بزرگی نیروی الکتریکی خالص وارد بر بار q_5 است؟

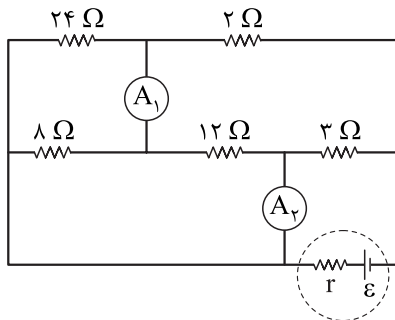


- (۱) $\frac{4+3\sqrt{2}}{16}$
(۲) $\frac{4+3\sqrt{2}}{8}$
(۳) $\frac{3+2\sqrt{2}}{16}$
(۴) $\frac{3+2\sqrt{2}}{8}$

۳۷- ظرفیت خازنی $8 \mu F$ ، بار الکتریکی آن Q و بین صفحات آن هوا است. اگر 8 mC بار الکتریکی از صفحه مثبت خازن به صفحه منفی آن منتقل شود و سپس در حالتی که خازن جدا از باتری است، فاصله بین صفحات 20% درصد کاهش یابد، انرژی ذخیره‌شده در خازن، نسبت به حالت اولیه‌اش J ۱۱ افزایش می‌یابد. بیشترین مقدار ممکن برای Q چند برابر کم‌ترین مقدار ممکن برای آن است؟

- (۱) $\frac{11}{3}$ (۲) $\frac{11}{4}$ (۳) $\frac{13}{3}$ (۴) $\frac{13}{4}$

۳۸- در مدار شکل زیر، جریان عبوری از آمپرسنج آرمانی A_2 ، چند برابر جریان عبوری از آمپرسنج آرمانی A_1 است؟



- (۱) ۲
(۲) ۲/۴
(۳) ۲/۸
(۴) ۳

محل انجام محاسبات

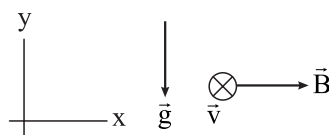
۳۹- در شکل زیر، ذره باردار $q = -2 \mu\text{C}$ به جرم یک گرم با تندی $v = 40 \text{ km/s}$ وارد فضایی می‌شود که میدان مغناطیسی یکنواخت $B = 500 \text{ G}$ و میدان الکتریکی یکنواخت $\vec{E}$ در آن جا وجود دارد. اگر ذره بدون انحراف به حرکت خود ادامه دهد، $\vec{E}$ در SI کدام است؟ ($g = 10 \text{ m/s}^2$)

(۱) $3000 \vec{j}$

(۲) $-3000 \vec{j}$

(۳) $7000 \vec{j}$

(۴) $-7000 \vec{j}$



۴۰- نمودار جریان متناوب گذرنده از سیملوله‌ای بر حسب زمان به شکل زیر است. این سیملوله ۲۰۰ حلقه دارد و طول آن $14/4 \text{ cm}$ است. اگر انرژی ذخیره شده در این سیملوله در لحظه $t = \frac{1}{80} \text{ s}$ برابر با 10 mJ باشد، قطر مقطع این

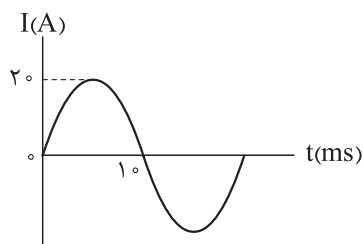
سیملوله چند سانتی متر است؟ ($\pi = 3$ و $\mu_0 = 12 \times 10^{-7} \frac{\text{T} \cdot \text{m}}{\text{A}}$)

(۱) ۱

(۲) ۲

(۳) ۳

(۴) ۴



۴۱- با ترکیب نقره و طلا، قطعه‌ای با چگالی 16 g/cm^3 ساخته‌ایم. چند درصد از حجم این قطعه را طلا تشکیل داده

است؟ ($\rho_{\text{نقره}} = 10 \text{ g/cm}^3$ و $\rho_{\text{طلا}} = 20 \text{ g/cm}^3$)

(۴) ۶۰

(۳) ۵۰

(۲) ۴۰

(۱) ۳۰

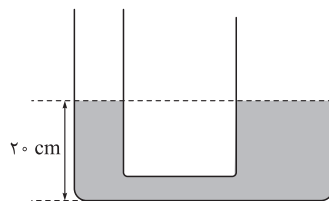
۴۲- در یک لوله U شکل که مساحت قاعده لوله‌های سمت راست و چپ آن به ترتیب 5 cm^2 و 2 cm^2 است، مطابق شکل زیر، آب وجود دارد. اگر در لوله سمت راست، 80 g روغن و در لوله سمت چپ 18 g بنزین بریزیم، ارتفاع آب در لوله سمت چپ، به چند سانتی متر می‌رسد؟ ($g = 10 \text{ N/kg}$ ، $\rho_{\text{آب}} = 1 \text{ g/cm}^3$ و چگالی آب بیشتر از چگالی روغن و بنزین است.)

(۱) ۱۵

(۲) ۱۸

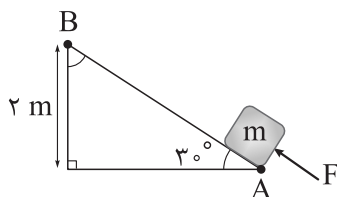
(۳) ۲۲

(۴) ۲۵



محل انجام محاسبات

۴۳- در شکل زیر، جسمی به جرم 2 kg ، توسط نیروی ثابت $F = 25\text{ N}$ که در راستای سطح شیبدار است، از نقطه A شروع به حرکت می‌کند. اگر تندی جسم در نقطه B برابر با 6 m/s باشد، بزرگی نیروی اصطکاک جنبشی وارد بر جسم چند نیوتون است؟ ($g = 10\text{ m/s}^2$)



۳ (۱)

۴ (۲)

۵ (۳)

۶ (۴)

۴۴- درون ظرف عایقی مقداری یخ به جرم M با دمای 60°C را با مقداری بخار آب با دمای 100°C و جرم m مخلوط می‌کنیم. اگر دمای تعادل مجموعه، برابر 40°C باشد، M/m کدام است؟

$$(c_{\text{آب}} = 2c_{\text{یخ}} = 4200 \frac{\text{J}}{\text{kg} \cdot ^\circ\text{C}} \text{ و } L_F = 336 \text{ kJ/kg}, L_V = 2268 \text{ kJ/kg})$$

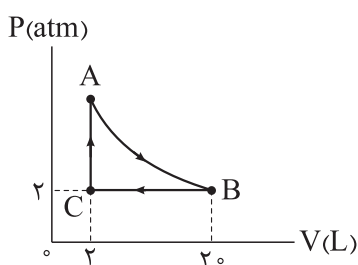
۴ / ۵ (۴)

۴ (۳)

۳ / ۵ (۲)

۳ (۱)

۴۵- مقدار معینی گاز کامل، چرخه شکل زیر را طی می‌کند. فرایند AB ، بی‌دررو است. اگر اندازه گرمای مبادله‌شده بین گاز و محیط در طی دو فرایند BC و CA به ترتیب 3000 J و 5400 J باشد، کار انجام‌شده توسط گاز در فرایند بی‌دررو چند ژول است؟



۴۰۰۰ (۱)

۵۰۰۰ (۲)

۶۰۰۰ (۳)

۸۴۰۰ (۴)

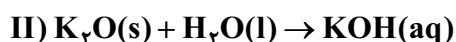
محل انجام محاسبات

۴۶- طبق مطالب کتاب درسی، کدام مورد نادرست است؟

- (۱) مجموع شمار خطوط طیف نشری خطی دو عنصر فراوان تر در سیاره مشتری در محدوده مرئی، با عدد اتمی نئون یکسان است.
- (۲) اگر نماد فرضی دومین عنصر فلزی فراوان در زمین به صورت M باشد، آرایش الکترون - نقطه‌ای آن به صورت M^0 می‌باشد.
- (۳) شمار نوترون در فراوان ترین ایزوتوپ لیتیم، ۲ برابر شمار عنصرهای با نماد تک حرفی دوره چهارم جدول دوره‌ای است.
- (۴) درصد الکترون‌های با $I = 2$ در اتم عنصر نخست گروه ۱۲ جدول دوره‌ای در مقایسه با اتم عنصرهای هم‌دوره آن بیشتر است.

۴۷- کدام مطلب نادرست است؟

- (۱) ایزوتوپ ^{235}U اغلب به عنوان سوخت در راکتورهای اتمی به کار می‌رود و فراوانی آن در مخلوط طبیعی کم‌تر از یک دهم درصد حجمی هلیوم در مخلوط گاز طبیعی است.
 - (۲) در بین ایزوتوپ‌های ساختگی هیدروژن، ایزوتوپی که دارای ۴ نوترون است نیم‌عمر بیشتری دارد.
 - (۳) مجموع n و l الکترون‌های ظرفیتی در اتم اکسیژن ۴ واحد بیشتر از تعداد عنصرهای دسته S در جدول دوره‌ای است.
 - (۴) عنصری در دسته p که تمام زیرلایه‌های آن دارای ۲ الکترون است، معیاری برای واحد جرم اتمی است.
- ۴۸- مقدار m گرم پتاسیم نیترات خالص را مطابق واکنش زیر گرما داده‌ایم، پس از تجزیه ۸۰ درصد آن مقدار a گرم پتاسیم اکسید تولید شده است. پتاسیم اکسید تولید شده را در آب حل کرده و حجم محلول حاصل را به ۲ لیتر رسانده‌ایم. اگر غلظت مولی این محلول برابر ۸/۰ مول بر لیتر باشد، کاهش جرم مخلوط واکنش (I) (بر حسب گرم) و حجم گاز اکسیژن تولید شده در شرایط STP (بر حسب لیتر) به ترتیب از راست به چپ کدام است؟ ($N = 14, O = 16, K = 39 : \text{g.mol}^{-1}$)
- (معادله‌ها موازنه شوند.)



۱۷/۹۲، ۱۷۲/۸ (۴) ۴۴/۸، ۱۷۲/۸ (۳) ۱۷/۹۲، ۸۶/۴ (۲) ۴۴/۸، ۸۶/۴ (۱)

۴۹- چند مورد از موارد زیر نادرست است؟

- (الف) اگر معادله انحلال پذیری نمک AB به صورت $S = 0 + 8\theta + 20$ باشد، ۸۰ گرم محلول سیر شده آن در دمای 50°C دارای g ۳۰ از این نمک می‌باشد.
- (ب) استون حلال مناسبی برای چربی‌هاست، بنابراین یک ماده ناقطبی بوده و در آب به خوبی حل نمی‌شود.
- (پ) مولکول‌های H_2O ، SO_2 و NH_3 ، مولکول‌های چند اتمی قطبی بوده و برخلاف مولکول‌های دواتمی در میدان الکتریکی جهت‌گیری می‌کنند.
- (ت) اگر در فرمول مولکولی یک ماده، اتم‌های H به همراه یکی از اتم‌های O، F یا N موجود باشد بین مولکول‌های آن به یقین پیوند هیدروژنی تشکیل خواهد شد.
- (ث) در تصفیه آب به روش صافی کربن برخلاف روش تقطیر، افزون بر میکروب‌ها، مواد آلی فرار از آب جدا نمی‌شوند.

۵ (۱) ۴ (۲) ۳ (۳) ۲ (۴)

محل انجام محاسبات

۵۰- از واکنش کلسیم کاربید (CaC_2) و آب، محلول کلسیم هیدروکسید و نوعی هیدروکربن سیر نشده گازی با ساختار خطی تولید می‌شود. با توجه به واکنش موازنه شده این واکنش کدام مورد درست است؟

($\text{H} = 1, \text{C} = 12, \text{O} = 16, \text{Ca} = 40: \text{g.mol}^{-1}$)

(۱) اگر ۶۵ گرم ترکیب آلی با بازده ۵۰ درصد تولید شود، جرم CaC_2 مصرف شده 160 g است.

(۲) در خانواده هیدروکربن تولید شده، درصد جرمی هیدروژن برابر $14/3$ درصد است.

(۳) اگر بازده این واکنش ۸۰ درصد باشد و تمام ترکیب آلی به طور کامل با هیدروژن سیر شود، نسبت جرم هیدروژن مصرف شده به جرم CaC_2 مصرف شده، ۵/۰ خواهد بود.

(۴) اگر نسبت جرم Ca(OH)_2 تولید شده به جرم H_2O مصرف شده حدود ۵/۰ باشد، درصد خلوص CaC_2 ، ۸۰ درصد بوده است.

۵۱- با توجه به جدول داده شده، اگر $38/6$ کیلوگرم زغال سنگ ناخالص در شرایط استاندارد سوزانده شود و بتواند 54 متر مکعب گاز آلاینده کربن دی اکسید تولید کند، درصد ناخالصی این زغال سنگ چند درصد است؟

($\text{C} = 12, \text{O} = 16 : \text{g.mol}^{-1}$)

نام سوخت	گرمای آزاد شده (kJ/g)	مقدار کربن دی اکسید به ازای هر کیلوژول انرژی تولید شده (g)
زغال سنگ	۳۰	۰/۱۰۴

(۱) ۸۸ (۲) ۱۲

(۳) ۴۴ (۴) ۵۶

۵۲- مجموع ضرایب استوکیومتری مواد در معادله واکنش زیر پس از موازنه کدام است و اگر در این واکنش ۸ لیتر گاز Br_2 تولید شود، چند گرم MnO_2 با خلوص ۷۲/۵ درصد مصرف شده است؟ ($\text{O} = 16, \text{Mn} = 55, \text{Br} = 80: \text{g.mol}^{-1}$)، چگالی گاز Br_2 را در شرایط واکنش برابر ۵ گرم بر لیتر در نظر بگیرید.



(۱) ۶۰ - ۱۱

(۲) ۳۰ - ۱۱

(۳) ۶۰ - ۱۰

(۴) ۳۰ - ۱۰

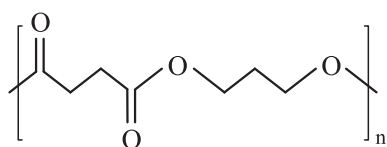
محل انجام محاسبات

۵۳- ۲ مول پتاسیم نیترات مطابق واکنش زیر در یک مرحله و در دمای معین، در یک ظرف دو لیتری تجزیه می‌شود. اگر سرعت متوسط تشکیل گاز اکسیژن در گستره زمانی ۱۰ تا ۳۰ ثانیه، برابر با $1/2 \text{ mol.L}^{-1} \cdot \text{min}^{-1}$ باشد، کدام مورد نادرست است؟

($N = 14, O = 16, K = 39 : \text{g.mol}^{-1}$)



- (۱) در ثانیه ۲۰، ۳۶/۱۳۷ گرم پتاسیم نیترات در ظرف وجود دارد.
 - (۲) بعد از یک دقیقه، غلظت گاز نیتروژن به 48 mol.L^{-1} می‌رسد.
 - (۳) در مدت زمان ۴۰ ثانیه، واکنش به میزان ۶۴ درصد پیشرفت می‌کند.
 - (۴) در ثانیه ۳۰، مجموع جرم مواد جامد درون ظرف برابر ۱۱۶/۵ گرم است.
- ۵۴- با بررسی پلیمر داده‌شده و براساس مطالب کتاب درسی کدام مورد درست است؟



- (۱) تعداد کربن‌های مولکول دی‌اسید سازنده آن با تعداد هیدروژن‌های مولکول مونومر به کاررفته در کیسه خون برابر است.
 - (۲) اختلاف جرم مولی دی‌الکل سازنده آن با جرم مولی آمیدی خطی و سیرشده با ۹ اتم هیدروژن، ۱۰ گرم بر مول است.
 - (۳) مجموع تعداد کربن‌های دی‌اسید و دی‌الکل سازنده این پلیمر ۳ واحد بیش از تعداد کربن‌های استر موجود در آناناس است.
 - (۴) اختلاف جرم مولی دی‌اسید و دی‌الکل سازنده آن ۱۱ واحد بیشتر از جرم مولی ساده‌ترین آمین است.
- ۵۵- با در نظر گرفتن ویژگی‌های اسیدها و بازها در محلول آبی، در دمای معین، کدام عبارت درست است؟

($H = 1, C = 12, O = 16 : \text{g.mol}^{-1}$)

- (۱) اگر در محلولی از استیک‌اسید، pH برابر ۲ و درصد یونش برابر ۵ باشد، در ۲۵۰ میلی‌لیتر از این محلول، ۳/۰ گرم از استیک‌اسید حل شده است.
- (۲) افزودن مقدار کمی سدیم سیانید جامد (NaCN) به محلول هیدروسیانیک اسید (HCN)، باعث افزایش pH محلول و کاهش درجه یونش اسید می‌شود.
- (۳) برای خنثی‌سازی کامل ۵۰ میلی‌لیتر از محلول ۰/۰۱ مولار HCl، دقیقاً به همان مقدار NaOH نیاز است که برای خنثی‌سازی کامل ۵۰ میلی‌لیتر از محلول ۰/۱ مولار HX با درصد یونش ۱۰ لازم است.
- (۴) تعداد یون‌ها در ۲۵ میلی‌لیتر از محلول ۰/۰۱ مولار HCl، ده برابر شمار یون‌های H^+ در ۵۰ میلی‌لیتر از محلول ۰/۲۵ مولار HY با درصد یونش ۴ است.

محل انجام محاسبات

۵۶- اگر انرژی الکتریکی مورد نیاز سلول برقکافت آب را توسط سلول گالوانی استاندارد $\text{Zn} - \text{H}_2$ تأمین کنیم، در اثر جابه‌جایی 0.2 مول الکترون بین دو سلول، تغییر pH در قطب آند سلول الکترولیتی چند برابر تغییر pH در نیم‌سلول هیدروژن است؟ (دما را 25°C و حجم محلول‌ها را نیم‌لیتر در نظر بگیرید. $\log 2 = 0.3$ و $\log 3 = 0.5$)

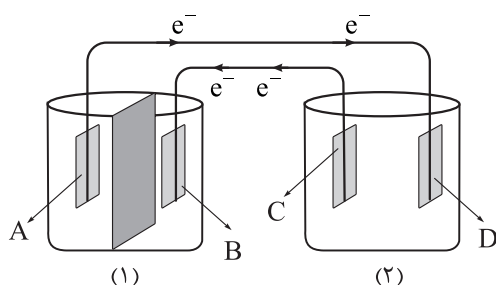
۶ / ۶ (۲)

۱ (۱)

۳۳ (۴)

۱۶ / ۵ (۳)

۵۷- چه تعداد از موارد زیر برای تکمیل عبارت داده‌شده، درست است؟



«اگر سلول (۱) و سلول (۲) باشد»

(الف) سلول سوختی هیدروژن - برقکافت آب - نیم‌واکنش انجام‌شده در الکترود A عکس نیم‌واکنش انجام‌شده در الکترود D است.

(ب) سلول (آهن - نقره) - آبکاری تیغه آهنی توسط نقره - جنس الکترودهای A و D یکسان است.

(پ) سلول نورالکتروشیمیایی - برقکافت آب - نیم‌واکنش‌های انجام‌شده در الکترودهای B و D یکسان است.

۲ (۲)

۱ (۱)

صفر (۴)

۳ (۳)

۵۸- مطابق شکل زیر یک قطعه آلومینیومی را درون یک بشر حاوی 120 گرم محلول مس (II) سولفات با درصد جرمی 30 درصد قرار می‌دهیم. اگر سرعت انجام واکنش ثابت و برابر $18 \text{ mol.L}^{-1} \cdot \text{min}^{-1}$ باشد، با فرض این‌که 75 درصد از مس رسوب‌کرده روی تیغه آلومینیومی بنشیند، چند ثانیه پس از شروع واکنش تغییر جرم تیغه آلومینیومی برابر $4/5$ گرم خواهد شد و چند ثانیه دیگر واکنش پایان می‌پذیرد؟ (چگالی محلول را 1.08 گرم بر میلی‌لیتر در نظر گرفته و از تغییر جرم و حجم محلول صرف نظر شود. $\text{O} = 16, \text{Al} = 27, \text{S} = 32, \text{Cu} = 64 : \text{g.mol}^{-1}$)



۶۰ - ۱۵۰ (۱)

۷۵ - ۱۲۰ (۲)

۷۵ - ۱۵۰ (۳)

۶۰ - ۱۲۰ (۴)

محل انجام محاسبات

۵۹- کدام مطلب درست است؟

(۱) اگر حجم محلول هیدروکلریک اسید را با افزودن آب، 10° برابر کنیم، غلظت یون هیدروکسید $\frac{1}{10}$ برابر خواهد شد.

(۲) NaCl(s) رسانا بوده و یک الکترولیت قوی به شمار می‌آید.

(۳) گرافیت برخلاف سایر جامدهای کووالانسی رسانای جریان الکتریسیته است.

(۴) تفاوت نقطه ذوب و جوش H_2O نسبت به HF کم‌تر است، ولی این تفاوت در O_2 بیشتر از N_2 است.

۶۰- کدام یک از مطالب زیر نادرست است؟ ($\text{Cu} = 64, \text{Ba} = 137 : \text{g.mol}^{-1}$)

(۱) با انتقال مخلوط تعادلی $\text{CaCO}_3(\text{s}) \rightleftharpoons \text{CaO}(\text{s}) + \text{CO}_2(\text{g})$ از یک ظرف ۵ لیتری به یک ظرف ۱ لیتری تعداد مول کربن دی‌اکسید در تعادل جدید 20% تعداد مول آن در تعادل اولیه خواهد بود.

(۲) با افزودن سدیم سولفات به مخلوط تعادلی $\text{Ba(s)} + \text{Cu}^{2+}(\text{aq}) \rightleftharpoons \text{Ba}^{2+}(\text{aq}) + \text{Cu(s)}$ ، جرم جامد باقی‌مانده افزایش می‌یابد.

(۳) افزودن آب به تعادل $2\text{H}_2\text{O}(\text{l}) + \text{O}_2(\text{g}) \rightleftharpoons 2\text{H}_2\text{O}(\text{aq})$ ، تأثیری بر جابه‌جایی تعادل ندارد.

(۴) افزودن سدیم نیترات جامد بر تعادل $\text{NaCl(s)} \rightleftharpoons \text{Na}^+(\text{aq}) + \text{Cl}^-(\text{aq})$ ، انحلال‌پذیری نمک خوراکی را کاهش می‌دهد.

پاسخ‌نامه تشریحی آزمون را ساعت ۱۶:۰۰ از صفحه شخصی خودتان در سایت آزمون خیلی سبز دریافت کنید.



azmoon.kheilisabz.com

اساتید، مشاوران و دانش‌آموزان گرامی؛

نظرات، پیشنهادات، انتقادات و بازخوردهای خود نسبت به سؤالات این آزمون را می‌توانید از طریق آیدی @Kheilisabz_edit در همه پیام‌رسان‌ها با ما به اشتراک بگذارید.

محل انجام محاسبات

پاسخ نامه آزمون آزمایشی خیلی سبز



مرحله دوم پلاس

پایه دوازدهم

۱۶/ تیر/ ۱۴۰۵

سال تحصیلی ۱۴۰۴-۰۵

نام درس	طراحان به ترتیب حروف الفبا
حسابان و ریاضیات پایه	علی افضل زاده - کوروش اسلامی - فرشاد حسن زاده - عادل حسینی - علی شهرابی - محمد گودرزی سروش موئینی محمدسجاد نقیه
هندسه	امیرحسین ابومحبوب - کیوان صارمی - حمید گلزاری - سروش موئینی - حسین نادری - حسین هاشمی طاهری
ریاضیات گسسته و آمار و احتمال	مصطفی دیداری - سوگند روشنی - عطا صادقی - سعید قندچی
فیزیک	یاشار انگوتی
شیمی	عباس سرمایه - محمد عظیمیان زواره - محمد قهرمانی نژاد - محسن مجنون

نام درس	مستقل درس	گزینشگر	مؤلف پاسخ نامه	کارشناسان علمی	ویراستاران به ترتیب حروف الفبا
حسابان و ریاضیات پایه	محمدسجاد نقیه	محمدسجاد نقیه	عادل حسینی	علی افضل زاده سروش موئینی	سید محمد مهدی حسینی عاطفه خان محمدی سهند محمد کریم نژاد
هندسه	حمید گلزاری	حمید گلزاری	حمید گلزاری	امیرحسین ابومحبوب سید عباس حسینی	محمد خندان ابوالفضل ناصری ماهان فنی فر
ریاضیات گسسته و آمار و احتمال	مصطفی دیداری	مصطفی دیداری	علیرضا کاظمی بقا	سعید قندچی	عباس حسینی محمد خندان ماهان فنی فر
فیزیک	نوید شاهی	یاشار انگوتی	علیرضا جباری	علیرضا جباری سعید محبی هادی نجفی	آیدین طهماسقلی زاده سعید محبی امیر محمودی انزایی فاطمه نجفی محمد رضا یاری
شیمی	عباس سرمایه	عباس سرمایه	نیلوفر درخشان	مرتضی نصیرزاده	امیر بیات مهتیس محبت پناه محمد نوروزی مال هادی عبادی

مدیر تألیف آزمون: دکتر فاطمه آقا جانپور



Azmoon.kheilisabz.com

آزمون آزمایشی خلی سبز

بیتا ابراهیمی - علیرضا جعفری - عادل حسینی - مینا کریمزاده

تیم اجرایی و تألیف آزمون

الناز علی یاریزاده	سرپرست تولید
نیلوفر اعتمادی - نیوشا پیمان - زهرا صفری الهه صفری - فاطمه علی اکبری - محیا غنی فرد نادره نازآوری - ساعده نمازی	ویراستاران فنی
ندا فخاری سارا گنجی آزادپور	رسام
مریم حسینزاده - سپیده سخائی - الهام سهرابی طاہره صادق نژاد - مائده صبری - نیلوفر فرخجسته فاطمه قیاسوند - مهدیه گل پور - دریا لطفی	صفحه آرایی



Azmoon.kheylisabz.com

تابع f با ضابطه $f(x) = |x+1| + |x-3|$ را در نظر بگیرید. ابتدا نمودار f را نسبت به خط $y = 3$ قرینه کرده، سپس آن را نسبت به خط $x = 4$ قرینه می‌کنیم. در ادامه آن را در راستای عمودی با ضریب $\frac{1}{5}$ فشرده کرده و در انتها نسبت به مبدأ مختصات قرینه می‌کنیم تا تابع g به دست آید. مساحت محدود بین نمودار تابع g و محور طول‌ها کدام است؟

۴ (۴)

۸ (۳)

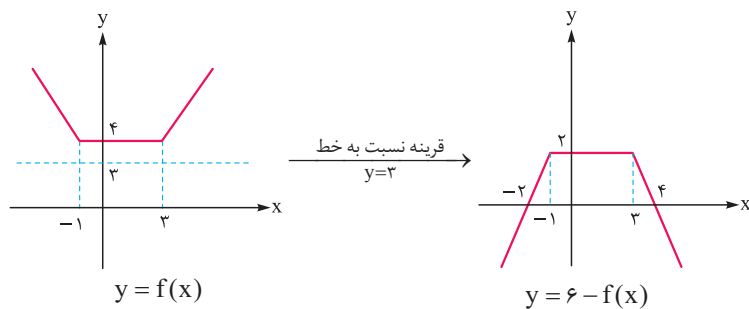
۲ (۲)

۱ (۱)

پاسخ: گزینه ۲

پاسخ خیلی تشریحی ✓

گام اول: اگر تابع f را نسبت به خط $y = 3$ قرینه کنیم، تابع $y = 2 \times 3 - f(x)$ یعنی $y = 6 - f(x)$ به دست می‌آید.



گام دوم: ناحیه محدود بین نمودار تابع $y = 6 - f(x)$ و محور طول‌ها یک دوزنقه است که مساحت آن برابر است با:

$$S = \frac{1}{2}((3 - (-1)) + (4 - (-2))) \times 2 = 4 + 6 = 10.$$

گام سوم: در اثر قرینه کردن تابع به دست آمده نسبت به خط $x = 4$ ، همچنین قرینه کردن نسبت به مبدأ مختصات مساحت تغییر نمی‌کند.

اما در اثر فشرده کردن با ضریب $\frac{1}{5}$ ، مساحت نیز $\frac{1}{5}$ برابر می‌شود. پس مساحت خواسته شده برابر است با:

$$S = \frac{1}{5} \times 10 = 2$$

۲ دو تابع f و g با ضابطه‌های $f(x) = \frac{3x-1}{2x+5}$ و $g(x) = \sqrt{x} + [\frac{1}{3} - \sqrt{x}]$ مفروض‌اند. اگر برد تابع fog بازه $(a, b]$ باشد، حاصل $a + b$ کدام است؟ ([] نماد جزء صحیح است.)

$$-\frac{8}{11} \quad (4)$$

$$-\frac{9}{11} \quad (3)$$

$$-\frac{4}{11} \quad (2)$$

$$-\frac{9}{22} \quad (1)$$

پاسخ: گزینه ۲

پاسخ خیلی تشریحی ✓

گام اول: دامنه تابع f ، $\mathbb{R} - \{-\frac{5}{2}\}$ و دامنه تابع g بازه $[0, +\infty)$ است. معادله $g(x) = -\frac{5}{2}$ نیز جواب ندارد؛ بنابراین $D_{fog} = D_g = [0, +\infty)$ است.

گام دوم: حالا باید برد تابع g را پیدا کنیم و برای این کار ضابطه آن را به صورت زیر بازنویسی می‌کنیم:

$$g(x) = (\sqrt{x} - \frac{1}{3}) + [\frac{1}{3} - \sqrt{x}] + \frac{1}{3}$$

پس اگر $h(x) = x - [x]$ باشد، آن‌گاه $g(x) = -h(\frac{1}{3} - \sqrt{x}) + \frac{1}{3}$ است. از آن‌جا که تبدیلات روی محور افقی تأثیری روی

برد تابع ندارد، کافی است برد تابع $y = -h(x) + \frac{1}{3}$ را حساب کنیم:

$$0 \leq h(x) < 1 \Rightarrow -1 < -h(x) \leq 0 \Rightarrow -\frac{2}{3} < -h(x) + \frac{1}{3} \leq \frac{1}{3}$$

این یعنی $R_g = (-\frac{2}{3}, \frac{1}{3}]$ است.

گام سوم: حالا کافی است برد تابع f را با دامنه R_g حساب کنیم:

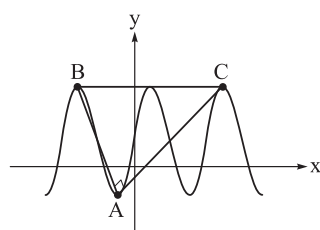
$$f(-\frac{2}{3}) = -\frac{9}{11}$$

$$f(\frac{1}{3}) = 0$$

پس برد تابع fog بازه $(-\frac{9}{11}, 0]$ است و داریم:

$$a = -\frac{9}{11}, \quad b = 0 \Rightarrow a + b = -\frac{9}{11}$$

بخشی از نمودار تابع f با ضابطه $f(x) = a + \sqrt{3} \sin(a\pi x)$ در شکل زیر رسم شده است. اگر مطابق شکل، مثلث



$$-\frac{1}{2} \quad (2)$$

$$\frac{1}{2} \quad (1)$$

$$1 \quad (4)$$

$$-1 \quad (3)$$

پاسخ: گزینه ۲

گام اول: شیب خطهای شامل دو پاره خط AB و AC را به دست می آوریم، دوره تناوب است:

پاسخ خیلی تشریحی ✓

$$\begin{cases} m_{AB} = \frac{-2\sqrt{3}}{\frac{T}{2}} = -\frac{4\sqrt{3}}{T} \\ m_{AC} = \frac{2\sqrt{3}}{\frac{3T}{2}} = \frac{4\sqrt{3}}{3T} \end{cases}$$

گام دوم: حاصل ضرب شیبهای به دست آمده باید برابر -1 شود:

$$\Rightarrow \frac{-4\sqrt{3}}{T} \times \frac{4\sqrt{3}}{3T} = \frac{-16}{T^2} = -1 \Rightarrow T = 4$$

$$\Rightarrow \frac{2\pi}{\pi|a|} = 4 \Rightarrow |a| = \frac{1}{2} \Rightarrow a = \pm \frac{1}{2}$$

اما چون $f'(0) = \sqrt{3}a\pi > 0$ مقدار $a = \frac{1}{2}$ قابل قبول است.

گام سوم: بنابراین $f(x) = \frac{1}{2} + \sqrt{3} \sin \frac{\pi x}{2}$ است:

$$\Rightarrow f\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{2} + \sqrt{3} \sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2} + \sqrt{3} \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -1$$

معادله $۲۵ \sin x \cos x + ۲۰ \sin x - ۱۵ \cos x = ۱۲$ در بازه $[۰, ۳\pi]$ چند جواب دارد؟

۴

۷ (۴)

۶ (۳)

۵ (۲)

۴ (۱)

پاسخ: گزینه ۲

سعی کن تجزیه کنی.

Hint

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: معادله زیر را داریم:

$$۲۵ \sin x \cos x + ۲۰ \sin x - ۱۵ \cos x - ۱۲ = 0 \Rightarrow (۲۵ \sin x \cos x - ۱۵ \cos x) + (۲۰ \sin x - ۱۲) = 0$$

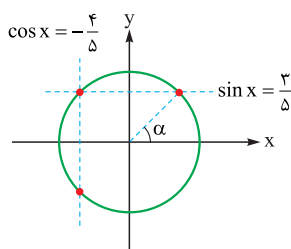
و با تجزیه درست، معادله زیر را داریم:

$$\Delta \cos x (\Delta \sin x - ۳) + ۴(\Delta \sin x - ۳) = 0 \Rightarrow (\Delta \cos x + ۴)(\Delta \sin x - ۳) = 0$$

گام دوم: حاصل ضرب صفر شده است، پس حداقل یکی از عوامل صفر است:

$$\begin{cases} \Delta \cos x + ۴ = 0 \Rightarrow \cos x = -\frac{۴}{\Delta} \\ \Delta \sin x - ۳ = 0 \Rightarrow \sin x = \frac{۳}{\Delta} \end{cases}$$

گام سوم: جواب‌های هر معادله را روی دایره مثلثاتی مشخص می‌کنیم:



بنابراین جواب‌های معادله در بازه $[۰, ۳\pi]$ عبارتند از α ، $\pi - \alpha$ ، $\pi + \alpha$ ، $۲\pi + \alpha$ و $۳\pi - \alpha$ که تعداد آن‌ها برابر ۵ است.

۵ حاصل $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{1 - \tan \frac{x}{2}}{\sqrt{2} \sin^2 x - 2 \cos \frac{x}{2}}$ کدام است؟

$-\frac{1}{2}$ (۴) -1 (۳) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ (۲) $-\sqrt{2}$ (۱)

پاسخ: گزینه ۱

پاسخ خیلی تشریحی ✓

گام اول: $\frac{x}{2} - \frac{\pi}{4}$ را متغیر جدید t در نظر می‌گیریم، بنابراین $x = 2t + \frac{\pi}{2}$ است و وقتی $x \rightarrow \frac{\pi}{4}$ ، آن‌گاه $t \rightarrow 0$.

$$\Rightarrow L = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1 - \tan(t + \frac{\pi}{4})}{\sqrt{2} \sin^2(2t + \frac{\pi}{2}) - 2 \cos(t + \frac{\pi}{4})} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1 - \tan(t + \frac{\pi}{4})}{\sqrt{2} \cos^2 2t - 2 \cos(t + \frac{\pi}{4})}$$

گام دوم: حالا از اتحادهای مثلثاتی استفاده می‌کنیم:

$$L = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1 - \frac{1 + \tan t}{1 - \tan t}}{\sqrt{2}(1 - \cos 2t) - 2 \frac{\cos t - \sin t}{\sqrt{2}}} \Rightarrow L = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{-2 \tan t}{(1 - \tan t)(\sqrt{2} - \sqrt{2} \cos t - 2\sqrt{2} \sin^2 t + \sqrt{2} \sin t)}$$

گام سوم: وقتی $t \rightarrow 0$ ، $\sin t \sim t$ و $\tan t \sim t$ از طرفی $\cos t \rightarrow 1$ و داریم:

$$L = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{-2t}{(1 - t)(\sqrt{2} - \sqrt{2} - 2\sqrt{2}t^2 + \sqrt{2}t)}$$

طبق قضیه کم‌توان داریم:

$$L = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{-2t}{\sqrt{2}t} = -\sqrt{2}$$

از هوپیتال استفاده می‌کنیم:

په‌چور دیگه

$$L = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{-\frac{1}{2}(1 + \tan^2 \frac{x}{2})}{\sqrt{2} \sin^2 x + \sin \frac{x}{2}} = \frac{-\frac{1}{2} \times 2}{0 + \frac{1}{\sqrt{2}}} = -\sqrt{2}$$

دو تابع f و g با ضابطه‌های $f(x) = 2[x] - x$ و $g(x) = f(x + f(x))$ مفروض‌اند. آهنگ تغییر متوسط تابع h با

ضابطه $h(x) = xg(x)$ در بازه $[-\sqrt{3}, -\frac{\pi}{4}]$ کدام است؟ ([] نماد جزء صحیح است.)

-4 (4

-3 (3

-2 (2

-1 (1

پاسخ: گزینه 4

پاسخ خیلی تشریحی ✓

گام اول: ضابطه تابع $y = x + f(x)$ برابر $y = 2[x]$ است که همواره خروجی آن عددی صحیح است:

$$\Rightarrow g(x) = f(2[x]) = 2[2[x]] - 2[x] = 2[x]$$

گام دوم: پس ضابطه تابع h به صورت زیر است:

$$h(x) = 2x[x] = \begin{cases} -4x & ; -2 \leq x < -1 \\ -2x & ; -1 \leq x < 0 \\ 0 & ; 0 \leq x < 1 \\ 2x & ; 1 \leq x < 2 \\ \vdots & \end{cases}$$

گام سوم: $-\sqrt{3}$ و $-\frac{\pi}{4}$ هر دو در بازه $(-2, -1)$ هستند و در این بازه $h(x) = -4x$ است. در این بازه، آهنگ تغییر متوسط همواره برابر -4 است.

تعداد نقاط مشتق ناپذیر تابع f با ضابطه $f(x) = [x - \frac{1}{3}] + [3x]$ در بازه $(-1, 3)$ کدام است؟ ($[]$ نماد جزء صحیح است).

۱۲ (۴)

۱۱ (۳)

۱۰ (۲)

۹ (۱)

پاسخ: گزینه ۲

نکته

$$[2x] = [x] + [x + \frac{1}{2}]$$

$$[3x] = [x] + [x + \frac{1}{3}] + [x + \frac{2}{3}]$$

:

$$n \in \mathbb{N} ; [nx] = [x] + [x + \frac{1}{n}] + [x + \frac{2}{n}] + \dots + [x + \frac{n-1}{n}]$$

گام اول: به کمک نکته بالا، ضابطه تابع را بازنویسی می‌کنیم:

$$f(x) = [x - \frac{1}{3}] + [x] + [x + \frac{1}{3}] + [x + \frac{2}{3}] \Rightarrow f(x) = \underbrace{[x - \frac{1}{3}] + [x + \frac{2}{3}]}_{[x - \frac{1}{3} + 1]} + [x] + [x + \frac{1}{3}] + 1$$

گام دوم: اگر عبارت‌های داخل جزء صحیح، عدد صحیحی شوند، تابع f در آن نقطه مشتق ناپذیر است؛ بنابراین مجموعه طول نقاط

مشتق ناپذیر تابع در بازه $(-1, 3)$ عبارت است از $\{-\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, 0, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 1, \frac{4}{3}, \frac{5}{3}, 2, \frac{7}{3}, \frac{8}{3}\}$ که تعداد اعضای آن برابر ۱۱ است.

مقدار اکستریم نسبی نمودار تابع f با ضابطه $f(x) = 5 \log_3 x + \log_{\sqrt{x}} 9$; $x > 1$ مقدار m برابر است. مقدار $[m]$ کدام است؟ ([] نماد جزء صحیح است.)

۹ (۴

۸ (۳

۷ (۲

۶ (۱

پاسخ: گزینه ۲

پاسخ خیلی تشریحی ✓ گام اول:

$$f(x) = 5 \log_3 x + \log_{\frac{1}{x^2}} 3^2 = 5 \log_3 x + 4 \log_x 3 ; x > 1$$

پس اگر دو تابع $g(x) = 5x + \frac{4}{x}$ و $h(x) = \log_3 x$; $x > 1$ را فرض کنیم، داریم:

$$f(x) = (g \circ h)(x)$$

گام دوم: نقاط اکستریم تابع f در جوابهای معادله $f'(x_0) = 0$ رخ می‌دهند:

$$f'(x_0) = h'(x_0) \cdot g'(h(x_0)) \xrightarrow{f'(x_0)=0} \begin{cases} h'(x_0) = 0 \\ g'(h(x_0)) = 0 \end{cases}$$

می‌دانیم که معادله $h'(x_0) = 0$ جواب ندارد.

گام سوم: حالا معادله $g'(h(x_0)) = 0$ را حل می‌کنیم:

$$g'(x) = 5 - \frac{4}{x^2}$$

$$\Rightarrow g'(h(x_0)) = 5 - \frac{4}{(h(x_0))^2} \xrightarrow{g'(h(x_0))=0} (h(x_0))^2 = \frac{4}{5} \Rightarrow h(x_0) = \pm \frac{2}{\sqrt{5}}$$

اما طبق فرض $x_0 > 1$ است، یعنی $h(x_0) > 0$ است:

$$\Rightarrow h(x_0) = \frac{2}{\sqrt{5}}$$

گام چهارم: حالا مقدار اکستریم را پیدا می‌کنیم:

$$m = f(x_0) = g(h(x_0)) = g\left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right) \Rightarrow m = 5\left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right) + \frac{4}{\frac{2}{\sqrt{5}}} = 2\sqrt{5} + 2\sqrt{5} = 4\sqrt{5}$$

از آن جا که $8 < m < 9$ است، $[m] = 8$ است.

۹ اگر $a + b + c = ۱۲$ و $\frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a} = \frac{2}{3}$ باشد، حاصل $\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b}$ کدام است؟

۸ (۴)

۷ (۳)

۶ (۲)

۵ (۱)

پاسخ: گزینه ۱

پاسخ خیلی تشریحی ✓

گام اول: $a + b$ را α ، $a + c$ را β و $b + c$ را γ می‌گیریم، طبق فرض $a + b + c = ۱۲$ است، پس داریم:

$$\begin{cases} a = ۱۲ - \gamma \\ b = ۱۲ - \beta \\ c = ۱۲ - \alpha \end{cases}$$

گام دوم: حالا از رابطه دوم استفاده می‌کنیم:

$$\frac{1}{a+b} + \frac{1}{a+c} + \frac{1}{b+c} = \frac{2}{3} \Rightarrow \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\gamma} = \frac{2}{3}$$

گام سوم: حالا می‌توانیم خواسته سؤال را حساب کنیم:

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{a+c} + \frac{c}{a+b} = \frac{۱۲-\gamma}{\gamma} + \frac{۱۲-\beta}{\beta} + \frac{۱۲-\alpha}{\alpha} = ۱۲\left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\gamma}\right) - ۳ = ۱۲ \times \frac{2}{3} - ۳ = ۸ - ۳ = ۵$$

۱۰ اگر هر دو جواب متمایز معادله $x^2 - mx + 1 = 0$ بین -1 و 2 باشند، حاصل $[8m]$ چند مقدار مختلف دارد؟ ()
نماد جزء صحیح است.

۲ (۴)

۳ (۳)

۴ (۲)

۵ (۱)

پاسخ: گزینه ۲

پاسخ خیلی تشریحی ✓

گام اول: تابع f را با ضابطه $f(x) = x^2 - mx + 1$ مفروض می‌گیریم. برای این‌که صفرهای تابع f هر دو بین -1 و 2 باشند، باید صفرهای تابع $y = f(x-1)$ هر دو مثبت و صفرهای تابع $y = f(x+2)$ هر دو منفی باشند.
گام دوم: طبق گام اول عمل می‌کنیم:

$$y = f(x-1) = (x-1)^2 - m(x-1) + 1 = x^2 - (m+2)x + m+2$$

$$\Rightarrow \begin{cases} S = m+2 > 0 \Rightarrow m > -2 \\ P = m+2 > 0 \Rightarrow m > -2 \end{cases} \xrightarrow{\text{اشتراک}} m > -2 \quad (1)$$

$$y = f(x+2) = (x+2)^2 - m(x+2) + 1 = x^2 + (4-m)x + 5-2m$$

$$\Rightarrow \begin{cases} S = m-4 < 0 \Rightarrow m < 4 \\ P = 5-2m > 0 \Rightarrow m < 2.5 \end{cases} \xrightarrow{\text{اشتراک}} m < 2.5 \quad (2)$$

از طرفی تابع f باید دو صفر داشته باشد:

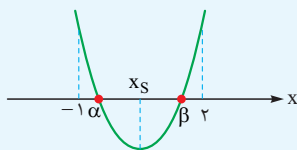
$$\Rightarrow \Delta = m^2 - 4 > 0 \Rightarrow m < -2 \text{ یا } m > 2 \quad (3)$$

گام سوم: از اشتراک مجموعه‌های (۱)، (۲) و (۳) مجموعه مقادیر قابل قبول برای m بازه $(2, 2.5)$ به دست می‌آید. در نتیجه $16 < 8m < 20$ است؛ این یعنی:

$$[8m] = 16, 17, 18, 19$$

وضعیت سهمی باید به صورت زیر باشد:

په‌چور دیگه



که با برقراری شرط‌های زیر، حدود m به دست می‌آید:

$$\begin{cases} \Delta = m^2 - 4 > 0 \Rightarrow m < -2 \text{ یا } m > 2 & (1) \\ -1 < x_S < 2 \Rightarrow -1 < \frac{m}{2} < 2 \Rightarrow -2 < m < 4 & (2) \\ f(-1) > 0 \Rightarrow 1+m+1 > 0 \Rightarrow m > -2 & (3) \\ f(2) > 0 \Rightarrow 4-2m+1 > 0 \Rightarrow m < \frac{5}{2} & (4) \end{cases} \xrightarrow{\text{اشتراک}} 2 < m < 2.5$$

نمودار تابع f با ضابطه $f(x) = (\frac{1}{\sqrt{x}})^2$ فقط در بازه $[\frac{1}{3}, 3]$ پایین تر از خط $y = ax + b$ قرار می گیرد. طول بازه

$f(x) \leq ax + b$

جواب های نامعادله $ax^2 + bx + 1 > 0$ کدام است؟

$\frac{\sqrt{61}}{4}$ (۲)

$\frac{\sqrt{61}}{2}$ (۱)

$\frac{\sqrt{73}}{4}$ (۴)

$\frac{\sqrt{73}}{2}$ (۳)

پاسخ: گزینه ۳

پاسخ خیلی تشریحی ✓

گام اول: مجموعه جواب های نامعادله $\frac{1}{x} \leq ax + b$ با شرط $x > 0$ ، بازه $[\frac{1}{3}, 3]$ است، این یعنی به ازای $x = \frac{1}{3}$ و $x = 3$ تساوی برقرار می شود:

$$\begin{cases} \frac{a}{2} + b = 2 \\ 3a + b = \frac{1}{3} \end{cases} \Rightarrow a = -\frac{2}{3}, b = \frac{7}{3}$$

گام دوم: حالا باید نامعادله $-\frac{2}{3}x^2 + \frac{7}{3}x + 1 > 0$ را حل کنیم:

$$\xrightarrow{\times(-3)} 2x^2 - 7x - 3 < 0 \Rightarrow \frac{7 - \sqrt{73}}{4} < x < \frac{7 + \sqrt{73}}{4}$$

طول بازه جواب ها برابر $\frac{\sqrt{73}}{2}$ است.

نمودارهای دو تابع f و g با ضابطه‌های $f(x) = 2^{x^2}$ و $g(x) = (\sqrt{10})^{2x-a}$ در نقطه‌ای به طول b مماس هستند. حاصل $a + b$ کدام است؟

$$\frac{1}{\log 5} (4)$$

$$\log 5 (3)$$

$$\frac{1}{\log 2} (2)$$

$$\log 2 (1)$$

پاسخ: گزینه ۲

پاسخ خیلی تشریحی ✓ گام اول: تساوی را برقرار می‌کنیم:

$$2^{x^2} = (\sqrt{10})^{2x-a}$$

از طرفین تساوی بالا در مبنای ۲، لگاریتم می‌گیریم:

$$x^2 = (2x-a) \log_2 \sqrt{10} = \frac{2x-a}{2} \log_2 10 \Rightarrow x^2 - \frac{1}{\log 2} x + \frac{a}{2 \log 2} = 0$$

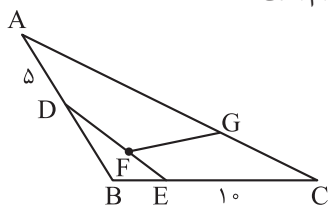
گام دوم: برای این که نمودارهای دو تابع f و g در یک نقطه بر هم مماس باشند، لازم است که Δ ی معادله بالا صفر شود:

$$\Delta = \frac{1}{(\log 2)^2} - \frac{4a}{2 \log 2} = 0 \Rightarrow 4a = \frac{2 \log 2}{(\log 2)^2} \Rightarrow a = \frac{1}{2 \log 2}$$

گام سوم: از طرفی طول نقطه مماس $b = \frac{\log 2}{2} = \frac{1}{2 \log 2}$ است. در نهایت داریم:

$$a + b = \frac{1}{2 \log 2} + \frac{1}{2 \log 2} = \frac{1}{\log 2}$$

در شکل زیر، اگر $\hat{B} = 12^\circ$ و $\frac{DF}{FE} = \frac{AG}{GC} = \frac{3}{2}$ ، آن گاه طول پاره خط FG کدام است؟



(۱) $3\sqrt{3}$

(۲) $2\sqrt{7}$

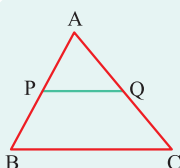
(۳) ۶

(۴) ۵

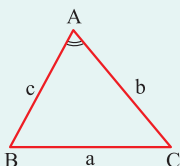
مشاوره: این سؤال، مشابه سؤال ۲۵، کنکور ریاضی دی ماه ۱۴۰۱، با سطحی دشوارتر از آن طراحی شده است.

پاسخ: گزینه ۲

(۱) قضیه تالس و عکس آن در مثلث:



مطابق شکل، اگر در مثلث ABC، دو نقطه P و Q را به ترتیب روی اضلاع AB و AC طوری انتخاب کنیم که $PQ \parallel BC$ ، آن گاه $\frac{AP}{PB} = \frac{AQ}{QC}$ و برعکس، یعنی اگر تساوی $\frac{AP}{PB} = \frac{AQ}{QC}$ برقرار باشد، می توانیم نتیجه بگیریم PQ با BC موازی است.



$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \hat{A}$$

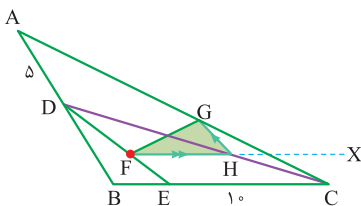
(۲) قضیه کسینوس ها:

مطابق شکل، در مثلث ABC، داریم:

پاسخ خیلی تشریحی ✓

گام اول: ابتدا از C به D وصل می کنیم، حال اگر از F خطی موازی با BC رسم کنیم تا CD را در نقطه H قطع کند، در مثلث DEC

بنا بر قضیه تالس:



$$\frac{DH}{HC} = \frac{DF}{FE} = \frac{3}{2}$$

گام دوم: طبق فرض سؤال $\frac{AG}{GC} = \frac{3}{2}$ می باشد؛ بنابراین $\frac{DH}{HC} = \frac{AG}{GC} = \frac{3}{2}$ و در نتیجه طبق عکس قضیه تالس در مثلث ADC، پاره خط GH موازی با AD است.

گام سوم: با توجه به خطوط موازی $\hat{GHX} = 12^\circ$ ؛ بنابراین $\hat{GHF} = 6^\circ$. حال کافی است اندازه GH و FH را پیدا کنیم و سپس به کمک قضیه کسینوس ها در مثلث رنگی FHG طول FG را محاسبه کنیم.

$$\begin{cases} \frac{DF}{DE} = \frac{3}{5} = \frac{FH}{10} \Rightarrow FH = 6 \\ \frac{GC}{AC} = \frac{2}{5} = \frac{GH}{5} \Rightarrow GH = 2 \end{cases} \Rightarrow FG^2 = FH^2 + GH^2 - 2FH \times GH \times \cos 6^\circ$$

$$\Rightarrow FG^2 = 36 + 4 - 2 \times 6 \times 2 \times \frac{1}{2} = 28 \Rightarrow FG = \sqrt{28} = 2\sqrt{7}$$

۱۴ حجم شکل فضایی حاصل از دوران سطح محدود به نمودار تابع $f(x)$ حول محور x ها، چند برابر π است؟

$$f(x) = \begin{cases} \frac{3x}{4} & ; 0 \leq x \leq 4 \\ 3 & ; 4 < x \leq 8 \\ \sqrt{9 - (x-8)^2} & ; 8 < x \leq 11 \end{cases}$$

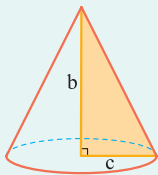
۷۲ (۴) ۶۶ (۳) ۵۴ (۲) ۴۸ (۱)

پاسخ: گزینه ۲

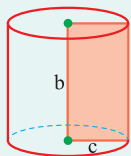
Hint $y = \sqrt{9 - (x-8)^2}$ ، معادله نیم دایره‌ای بالای محور x هاست.

(۱) معادله استاندارد دایره‌ای به مرکز (α, β) و شعاع R ، به صورت $(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 = R^2$ است.

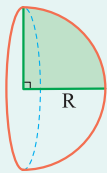
(۲) از دوران مثلث قائم الزاویه‌ای به طول اضلاع قائمه b و c ، حول ضلع به طول b ، مخروط قائمی به ارتفاع b و شعاع قاعده c حاصل می‌شود. حجم چنین مخروطی $\frac{1}{3}\pi bc^2$ است.



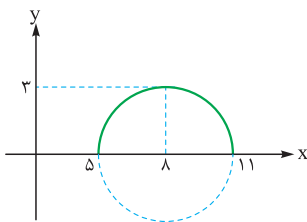
(۳) از دوران مستطیلی به اضلاع b و c ، حول ضلع به طول b ، استوانه قائمی به ارتفاع b و شعاع قاعده c به دست می‌آید، حجم چنین استوانه‌ای πbc^2 است.



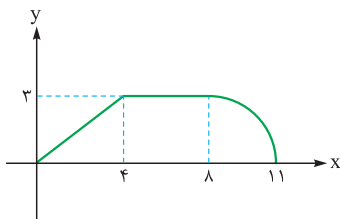
(۴) از دوران ربع دایره‌ای به شعاع R ، حول یکی از دو شعاع عمود بر هم آن، یک نیمکره به دست می‌آید که حجم آن برابر است با نصف حجم یک کره کامل، یعنی $\frac{1}{2}(\frac{4}{3}\pi R^3)$.



پاسخ خیلی تشریحی ✓ گام اول: از آن جا که $(x-8)^2 + y^2 = 9$ ، معادله دایره‌ای به مرکز $(8, 0)$ و شعاع ۳ است، پس $y = \sqrt{9 - (x-8)^2}$ نیم دایره‌ای است که بالای محور x ها قرار دارد.



گام دوم: با توجه به ضابطه تابع f و توضیحات گام اول، نمودار تابع را رسم می‌کنیم:



گام سوم: با توجه به نمودار تابع، شکل حاصل از دوران مورد نظر، از سه قسمت تشکیل شده است:

(۱) مخروطی به ارتفاع ۴ و شعاع قاعده ۳ که حجم آن برابر است با:

$$V_1 = \frac{1}{3}\pi \times 3^2 \times 4 = 12\pi$$

(۲) استوانه‌ای به ارتفاع ۴ و شعاع قاعده ۳ که حجم آن برابر است با:

$$V_r = \pi \times 3^2 \times 4 = 36\pi$$

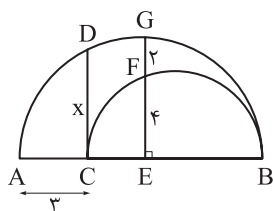
(۳) نیمکره‌ای به شعاع ۳ که حجم آن برابر است با:

$$V_r = \frac{1}{2} \times \frac{4}{3} \pi \times 3^3 = 18\pi$$

گام چهارم: بنابراین خواسته سؤال برابر است با:

$$V = V_1 + V_r + V_r = 12\pi + 36\pi + 18\pi = 66\pi$$

در شکل زیر، دو نیم‌دایره به قطرهای AB و BC رسم شده‌اند و CD در نقطه C بر نیم‌دایره کوچک‌تر مماس است.



با توجه به اندازه‌های روی شکل، طول پاره خط CD کدام است؟

(۱) $\sqrt{27/2}$

(۲) $\sqrt{27/4}$

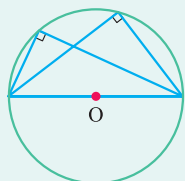
(۳) $\sqrt{27/6}$

(۴) $\sqrt{27}$

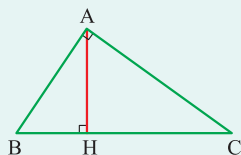
پاسخ: گزینه ۱

کدس Box

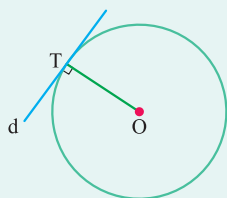
(۱) در هر دایره، اندازه هر زاویه محاطی، برابر است با نصف اندازه کمان روبه‌روی آن، پس در هر دایره، زاویه‌های محاطی روبه‌روی قطر، قائمه‌اند.



(۲) در مثلث قائم‌الزاویه ABC، اگر ارتفاع وارد بر وتر باشد، آن‌گاه $AH^2 = BH \cdot CH$.

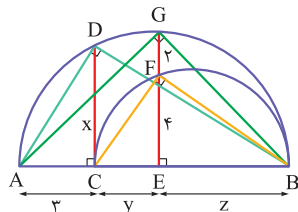


(۳) اگر خط d در نقطه T بر دایره‌ای به مرکز O مماس باشد، شعاع OT در نقطه T بر خط d عمود است.



گام اول: با توجه به این که زاویه محاطی مقابل به قطر دایره، قائمه است، مثلث‌های BCF، ABG و ABD، قائم‌الزاویه‌اند.

گام دوم: در هر مثلث قائم‌الزاویه، ارتفاع نظیر وتر، واسطه هندسی بین دو قطعه‌ای است که روی وتر ایجاد می‌کند، پس اگر $CE = y$ و $EB = z$ ، آن‌گاه:



$$\triangle BCF : 4^2 = y \cdot z \Rightarrow y \cdot z = 16 \quad (*)$$

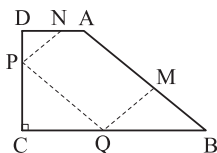
$$\triangle ABG : (4+2)^2 = (3+y) \cdot z \Rightarrow 36 = 3z + y \cdot z \xrightarrow{y \cdot z = 16} 36 = 3z + 16 \Rightarrow z = \frac{20}{3} \xrightarrow{(*)} y = \frac{12}{5}$$

گام سوم: CD در نقطه C بر نیم‌دایره کوچک مماس است، پس CD بر AB عمود است، یعنی در مثلث قائم‌الزاویه ABD، ارتفاع وارد بر وتر است و داریم:

$$x^2 = 3(y+z) = 3\left(\frac{12}{5} + \frac{20}{3}\right) = \frac{136}{5} \Rightarrow x = \sqrt{\frac{136}{5}} = \sqrt{27/2}$$

پاسخ خیلی تشریحی ✓

در دوزنقه قائم الزاویه $ABCD$ با ارتفاع به طول ۸، نقاط ثابت M و N به همراه نقاط متغیر P و Q بر روی اضلاع دوزنقه طوری قرار دارند که کمترین مقدار طول خط شکسته $MQPN$ برابر ۱۶ می باشد. اگر $ND = 1/5$ و $PQ = 3PN$ باشد، طول پاره خط MQ کدام است؟



(۱) ۵ / ۵

(۲) ۶

(۳) ۶ / ۵

(۴) ۷

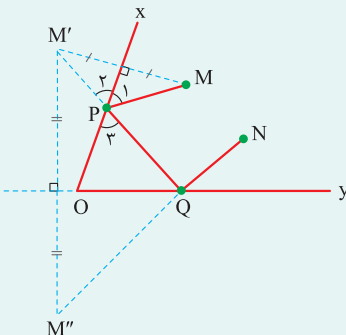
پاسخ: گزینه ۲

کدس Box

فرض کنید دو نقطه M و N ، درون زاویه xOy واقع اند و به دنبال دو نقطه P و Q به ترتیب واقع بر Ox و Oy هستیم، به طوری که طول مسیر شکسته $MPQN$ ، مینیمم باشد؛ برای این منظور:

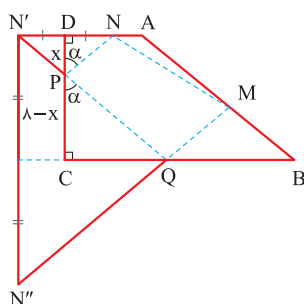
M را نسبت به Ox بازتاب می دهیم تا M' به دست آید و بازتاب M' را نسبت به امتداد Oy ، M'' می نامیم:

نقطه برخورد $M''N$ با Oy ، نقطه Q و نقطه برخورد $M'Q$ با Ox ، P است.



توجه در شکل بالا $\hat{P}_1 = \hat{P}_2 = \hat{P}_3$.

پاسخ خیلی تشریحی



گام اول: برای حداقل بودن طول خط شکسته $MQPN$ ، باید با طی کوتاه ترین مسیر از نقطه ثابت N آغاز به حرکت کنیم و پس از برخورد با پاره خط های DC و BC به نقطه ثابت M برسیم که برای این منظور کافی است بازتاب نقطه N را نسبت به DC به دست آوریم تا به نقطه N' و سپس بازتاب نقطه N' را نسبت به امتداد BC به دست آوریم تا به نقطه N'' برسیم.

محل برخورد $N''M$ با BC همان نقطه Q و همچنین محل برخورد $N'Q$ با DC نیز همان نقطه P می باشد.

گام دوم: به دلیل تشابه مثلث های NDP و PCQ داریم:

$$\frac{x}{8-x} = \frac{NP}{PQ} \xrightarrow{PQ=3NP} \frac{x}{8-x} = \frac{1}{3} \Rightarrow 3x = 8-x \Rightarrow 4x = 8 \Rightarrow x = 2$$

گام سوم: بنا به قضیه فیثاغورس در مثلث NDP داریم:

$$ND^2 + PD^2 = NP^2 \Rightarrow 4 + 2/25 = NP^2 \Rightarrow NP^2 = 6/25 \Rightarrow NP = 2/5$$

$$\xrightarrow{PQ=3NP} PQ = 3 \times 2/5 = 6/5$$

گام چهارم: طول خط شکسته $MQPN$ برابر ۱۶ است، پس:

$$NP + PQ + QM = 16 \Rightarrow 2/5 + 6/5 + QM = 16 \Rightarrow QM = 6$$

۱۷ اگر $A = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -1 & -1 \\ \frac{1}{2} & |A| & -1 \\ 1 & -2 & -1 \end{bmatrix}$ باشد، درایه سطر دوم و ستون دوم ماتریس A^3 کدام است؟

۱ (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴) ۵ (۵)

پاسخ: گزینه ۴

درس Box

ابتدا با استفاده از دستور ساروس یا روش بسط، دترمینان ماتریس A را محاسبه کنید.

(۱) دستور ساروس برای محاسبه دترمینان ماتریس های 3×3 : در این روش که فقط برای ماتریس های 3×3 قابل استفاده است، دو ستون اول و دوم ماتریس را در کنارش می نویسیم؛ سپس درایه های قطر اصلی و دو قطر موازی آن (مطابق شکل) را مشخص می کنیم و درایه های روی هر قطر را در هم ضرب کرده و سپس اعداد حاصل را با هم جمع می کنیم. سپس همین کار را برای قطر فرعی و دو قطر موازی آن انجام می دهیم و در نهایت اعداد حاصل را از هم کم می کنیم تا دترمینان به دست آید.

$$\begin{vmatrix} a & b & c & a & b \\ d & e & f & d & e \\ g & h & i & g & h \end{vmatrix} \Rightarrow (aei + bfg + cdh) \quad (1)$$

$$\begin{vmatrix} a & b & c & a & b \\ d & e & f & d & e \\ g & h & i & g & h \end{vmatrix} \Rightarrow (ceg + afh + bdi) \quad (2)$$

$$|A| = (1) - (2) = (aei + bfg + cdh) - (ceg + afh + bdi)$$

(۲) اگر $D = ABC$ ، آن گاه درایه سطر A م و ستون A م ماتریس D ، برابر است با:

$$[A \text{ سطر } A_m] B \begin{bmatrix} \text{ستون} \\ A_m \\ C \end{bmatrix}$$

گام اول: ابتدا به کمک دستور ساروس، دترمینان ماتریس A را محاسبه می کنیم.

پاسخ خیلی تشریحی ✓

$$\begin{vmatrix} \frac{1}{2} & -1 & -1 \\ \frac{1}{2} & |A| & -1 \\ 1 & -2 & -1 \end{vmatrix} \Rightarrow |A| = \begin{vmatrix} \frac{1}{2} & -1 & -1 \\ \frac{1}{2} & |A| & -1 \\ 1 & -2 & -1 \end{vmatrix} \Rightarrow |A| = (-\frac{1}{2}|A| + 1 + 1) - (-|A| + 1 + \frac{1}{2})$$

$$\Rightarrow |A| = \frac{1}{2}|A| + \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{1}{2}|A| = \frac{1}{2} \Rightarrow |A| = 1$$

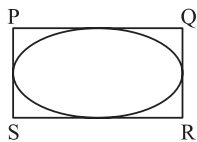
گام دوم: مقدار $|A|$ را در ماتریس A جای گذاری می کنیم:

$$A = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -1 & -1 \\ \frac{1}{2} & 1 & -1 \\ 1 & -2 & -1 \end{bmatrix}$$

گام سوم: درایه سطر دوم و ستون دوم ماتریس $A^3 = A.A.A$ به صورت زیر به دست می آید:

$$[A \text{ سطر دوم}] . A . \begin{bmatrix} \text{ستون} \\ \text{دوم} \\ A \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -1 & -1 \\ \frac{1}{2} & 1 & -1 \\ 1 & -2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{4} & \frac{5}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix} = \frac{1}{4} + \frac{5}{2} + 1 = 3 \frac{7}{4}$$

در بیضی به شکل زیر، مستطیل PQRS، مستطیل طلایی است. طول قطر کوچک بیضی چند برابر فاصله کانونی آن است؟



$$\sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{2}} \quad (۲)$$

$$\sqrt{\frac{\sqrt{5}+1}{2}} \quad (۴)$$

$$\sqrt{\frac{\sqrt{5}-2}{2}} \quad (۱)$$

$$\sqrt{\frac{\sqrt{5}+2}{2}} \quad (۳)$$

مشاوره این سؤال، به صورت ترکیبی از فصل اول حسابان (۱) (معادلات گویا) و فصل دوم هندسه (۳) (مقاطع مخروطی - بیضی) طراحی شده است.

پاسخ: گزینه ۲

در مستطیل طلایی، نسبت طول مستطیل به عرض آن، برابر است با $\frac{\sqrt{5}+1}{2}$.

Hint

درس Box

(۱) نسبت طلایی که ریشه مثبت معادله $k^2 - k - 1 = 0$ است، برابر است با $k = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$.

(۲) در هر بیضی بین نصف طول قطر بزرگ (a)، نصف طول قطر کوچک (b) و نصف فاصله کانونی (c)، رابطه $a^2 = b^2 + c^2$ برقرار است.

گام اول: طول و عرض این مستطیل، قطرهای بیضی هستند، پس:

$$\begin{cases} PQ = 2a \\ PS = 2b \end{cases}$$

$$\frac{2a}{2b} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

$$\frac{a}{b} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

گام دوم: طبق تعریف مستطیل طلایی داریم:

پس:

گام سوم: سؤال از ما $\frac{2b}{2c}$ یا همان $\frac{b}{c}$ را می‌خواهد. می‌دانیم:

$$a^2 = b^2 + c^2 \xrightarrow{\div b^2} \left(\frac{a}{b}\right)^2 = 1 + \left(\frac{c}{b}\right)^2 \Rightarrow \frac{c}{b} = \sqrt{\left(\frac{a}{b}\right)^2 - 1} = \sqrt{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2 - 1} = \sqrt{\frac{6+2\sqrt{5}}{4} - 1}$$

$$= \sqrt{\frac{2+2\sqrt{5}}{4}} = \sqrt{\frac{\sqrt{5}+1}{2}} \Rightarrow \frac{b}{c} = \sqrt{\frac{2}{\sqrt{5}+1}} = \sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{2}} = \frac{2b}{2c}$$

پاسخ خیلی تشریحی ✓

اگر تصویر قائم بردار $\vec{a}$ روی امتداد بردار $\vec{b}$ به صورت $\vec{a}' = (2, 2, 2)$ و زاویه بین $\vec{a}$ و $\vec{b}$ بزرگتر از 90° باشد، آن گاه مجموع مؤلفه‌های بردار $\vec{a}$ کدام است؟

۱۲ (۴)

۱۲ (۳)

۶ (۲)

۶ (۱)

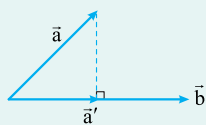
پاسخ: گزینه ۲

Hint

درس Box

ضرب داخلی دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{a}'$ را یک بار به صورت مؤلفه‌به‌مؤلفه و بار دیگر براساس اندازه بردارها و زاویه بین دو بردار محاسبه کنید.

فرض کنید بردار $\vec{a}'$ ، تصویر قائم بردار $\vec{a}$ روی امتداد بردار $\vec{b}$ باشد. در این صورت بردار $\vec{a}'$ از رابطه زیر محاسبه می‌شود:

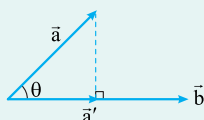


$$\vec{a}' = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{b}|^2} \vec{b}$$

در صورتی که زاویه بین دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ برابر θ باشد، آن گاه:

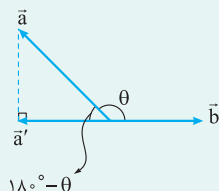
الف) $0^\circ < \theta < 90^\circ$

$$|\vec{a}'| = |\vec{a}| \cos \theta$$



ب) $90^\circ < \theta < 180^\circ$

$$|\vec{a}'| = |\vec{a}| (-\cos \theta)$$



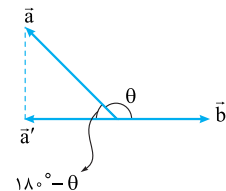
پاسخ خیلی تشریحی ✓

گام اول: فرض کنید $\vec{a} = (x, y, z)$ باشد. در این صورت داریم:

$$\begin{cases} \vec{a} = (x, y, z) \\ \vec{a}' = (2, 2, 2) \end{cases} \Rightarrow \vec{a} \cdot \vec{a}' = 2x + 2y + 2z$$

گام دوم: فرض کنید زاویه بین دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ برابر θ ($90^\circ < \theta \leq 180^\circ$) باشد. در این صورت مطابق شکل زاویه بین دو بردار $\vec{a}$

و $\vec{a}'$ برابر $180^\circ - \theta$ است و در نتیجه داریم:



$$\vec{a} \cdot \vec{a}' = |\vec{a}| |\vec{a}'| \cos(180^\circ - \theta)$$

از طرفی مطابق شکل $\cos(180^\circ - \theta) = \frac{|\vec{a}'|}{|\vec{a}|}$ پس می‌توان نوشت:

$$\vec{a} \cdot \vec{a}' = |\vec{a}| |\vec{a}'| \times \frac{|\vec{a}'|}{|\vec{a}|} = |\vec{a}'|^2 = 2^2 + 2^2 + 2^2 = 12$$

گام سوم: با توجه به نتایج گام‌های اول و دوم داریم:

$$2x + 2y + 2z = 12 \Rightarrow x + y + z = 6$$

یعنی مجموع مؤلفه‌های بردار $\vec{a}$ برابر ۶ است.

معادله سیاله $۲۵^{۳۱} + ۳a = ۵۷x + ۱۹۰y$ دارای جواب صحیح است. بزرگ‌ترین مقدار دورقمی a کدام است؟

۸۴ (۴)

۸۳ (۳)

۸۲ (۲)

۸۱ (۱)

پاسخ: گزینه ۱

عدد $۲۵^{۳۱} + ۳a$ به ۱۹ بخش پذیره.

Hint

درس Box

پیدا کردن باقی‌مانده اعداد توان‌دار با هم‌نهشتی:

برای به دست آوردن باقی‌مانده تقسیم a^n بر m داریم:

(۱) اگر a بزرگ باشد، به جای a یک هم‌نهشتی مناسب کوچک (عددی که با a به پیمانه m هم‌نهشت باشد، حال مثبت یا منفی) قرار می‌دهیم.

(۲) توانی از a پیدا می‌کنیم که هم‌نهشت ۱ یا -۱ به پیمانه m باشد. (اگر نشد سعی می‌کنیم توانی از a که هم‌نهشت عددی کوچک به پیمانه m باشد، پیدا کنیم.)

(۳) با توان رساندن دو طرف و ضرب دو طرف در اعداد مناسب a^n را می‌سازیم.

قضیه فرما: اگر p اول باشد به شرطی که $a \not\equiv ۰ \pmod{p}$ ، آن‌گاه $a^{p-1} \equiv ۱ \pmod{p}$.

اگر پیمانه اول باشد، با قضیه فرما هم می‌توانیم رابطه هم‌نهشتی اولیه را بنویسیم.

معادله هم‌نهشتی:

برای حل معادله هم‌نهشتی $ax \equiv b \pmod{m}$ مراحل زیر را طی می‌کنیم:

(۱) اگر a و b اعداد بزرگی هستند، به جایشان یک عدد هم‌نهشت با آن‌ها به پیمانه m را قرار می‌دهیم.

(۲) با اضافه کردن مضارب پیمانه به b کاری می‌کنیم تا دو طرف بر a بخش‌پذیر باشند.

(۳) با استفاده از ویژگی تقسیم، دو طرف را به a ساده می‌کنیم تا x به دست آید.

ساده کردن دو طرف هم‌نهشتی:

$$ac \equiv bc \xrightarrow[\div c]{(c,m)=1} a \equiv b \pmod{m}$$

حل معادله سیاله:

تعریف: به معادله $ax + by = c$ که همه ضرایب و مجهولات عدد صحیح هستند، معادله سیاله خطی درجه اول می‌گوییم.

شرط جواب: شرط این که معادله $ax + by = c$ جواب داشته باشد، این است که $(a, b) \mid c$ (و برعکس).

گام اول: شرط جواب داشتن معادله سیاله این است که $۲۵^{۳۱} + ۳a \mid (۵۷, ۱۹۰)$ از طرفی $(۵۷, ۱۹۰) = (۳ \times ۱۹, ۱۹ \times ۱۰) = ۱۹$

پس معادله وقتی جواب دارد که $۲۵^{۳۱} + ۳a \equiv ۰ \pmod{۱۹}$.

گام دوم: $۲۵ \equiv ۶ \pmod{۱۹}$ پس کافی است باقی‌مانده $۶^{۳۱}$ بر ۱۹ را پیدا کنیم:

$$۶^{۳۱} \equiv ۶^{۱۳} \times ۶^{۱۸} \xrightarrow{\times ۶^{۱۳}} ۶^{۱۳} \equiv ۶^{۱۳} = (۶^۲)^۶ \times ۶ \equiv (-۲)^۶ \times ۶ \equiv ۶۴ \times ۶ \equiv ۷ \times ۶ \equiv ۴ \pmod{۱۹}$$

$۳۶ \equiv -۲$

گام سوم:

$$۴ + ۳a \equiv ۰ \pmod{۱۹} \Rightarrow ۳a \equiv -۴ + ۱۹ = ۱۵ \xrightarrow[\div ۳]{(۳, ۱۹)=1} a \equiv ۵ \pmod{۱۹} \Rightarrow a = ۱۹k + ۵$$

به ازای $k = ۴$ بزرگ‌ترین عدد دورقمی $a = ۸۱$ به دست می‌آید.

پاسخ خیلی تشریحی

۲۱ در گراف G از مرتبه 10 ، رابطه $\sum_{a \in V(G)} |N_G[a]| = 82$ برقرار است. این گراف حداکثر چند رأس درجه 9 دارد؟

۷ (۴)

۶ (۳)

۵ (۲)

۴ (۱)

پاسخ: گزینه ۲

$$\sum_{a \in V(G)} |N_G[a]| = 2q + p$$

Hint

گام اول: همسایگی بسته هر رأس مثل v_i دارای $1 + d(v_i)$ عضو است، پس داریم:

$$\sum_{a \in V(G)} |N_G[a]| = (d(v_1) + 1) + (d(v_2) + 1) + \dots + (d(v_p) + 1) = \underbrace{d(v_1) + \dots + d(v_p)}_{2q} + p = 2q + p$$

گام دوم:

$$\begin{cases} p = 10 \\ 2q + p = 82 \Rightarrow q = 36 \end{cases}$$

گام سوم: گراف کامل مرتبه 10 ، تعداد $\binom{10}{2} = 45$ یال دارد. گراف مطلوب سؤال، گرافی است که $45 - 36 = 9$ یال از گراف

کامل هم‌رتبه‌اش کم‌تر یال دارد. 9 یال را از حداقل 5 رأس گراف کامل می‌توانیم حذف کنیم، در نتیجه حداکثر $5 - 10 = 5$

رأس، درجه 9 دارند.

پاسخ خیلی تشریحی

در یک کارگاه، ۱۰ کارگر هستند، در هر ماه با قرعه‌کشی به دو نفر وام ۲ میلیونی می‌دهند. حداقل چند ماه این عمل انجام شود تا مطمئن شویم، دست‌کم یک نفر هست که حداقل مبلغ ده میلیون تومان وام گرفته است؟

۱۱ (۲)

۱۰ (۱)

۲۱ (۴)

۲۰ (۳)

مشاوره طراحان کنکور به اصل لانه‌کبوتری علاقه زیادی دارند. از طرفی مطالب این موضوع زیاد نیست، پس حتماً روی آن کار کنید.

پاسخ: گزینه ۴

بدترین حالت این است که هر فرد ۴ بار وام گرفته باشد.

Hint

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: مبلغ ۱۰ میلیون وام، معادل ۵ بار برنده‌شدن در قرعه‌کشی است. بدترین حالت این است که هر کدام از این افراد ۴ بار برنده شوند؛ یعنی معادل $4 \times 4 = 16$ بار وام‌دادن.

گام دوم: $20 = 4 \div 2$ یعنی تا این‌جا ۲۰ بار باید عمل اهدای وام انجام شود چون در هر بار قرعه‌کشی به ۲ نفر وام داده می‌شود. بار ۲۱، دست‌کم یکی از افراد ۵ بار وام گرفته است.

۲۳ اگر بازه‌های $A = (-1, 2)$ و $B = (1, 3)$ تعریف شده باشد، مساحت ناحیه $A \times B - (A^2 - B^2)$ کدام است؟

۴ (۴)

۳ (۳)

۲ (۲)

۱ (۱)

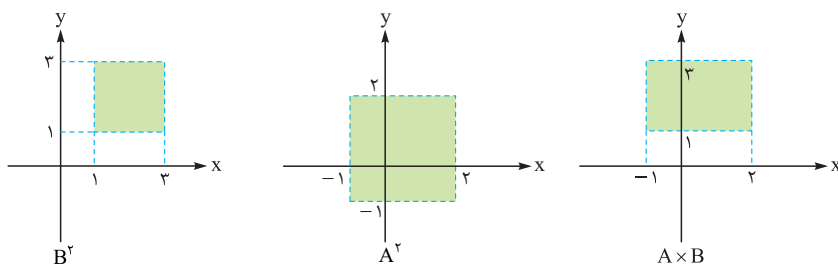
مشاوره چند سالی است که از نمودار ضرب دکارتی در کنکور سؤال نیامده است. امسال ممکن است نوبت آن باشد.

پاسخ: گزینه ۴

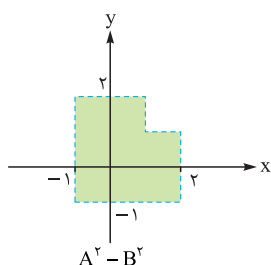
نمودار A^2 , B^2 و $A^2 - B^2$ رو بکش.

Hint

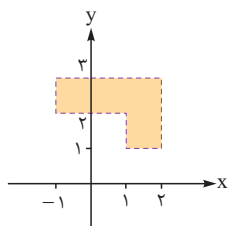
پاسخ خیلی تشریحی گام اول: نواحی $A \times B$ و A^2 و B^2 را رسم کنیم:



گام دوم: ناحیه $A^2 - B^2$ به صورت زیر است. (قسمت‌هایی که در A^2 هست ولی در B^2 نیست).



گام سوم: نمودار $A \times B$ منهای $(A^2 - B^2)$ یعنی ناحیه‌ای که در $A \times B$ باشد و در $A^2 - B^2$ نباشد به صورت زیر است:



گام چهارم: مساحت این ناحیه برابر ۴ واحد مربع است.

سه دانش آموز ریاضی، سه دانش آموز تجربی و سه دانش آموز انسانی به چند طریق می توانند در یک ردیف کنار هم بایستند به شرط آن که همه دانش آموزان ریاضی کنار هم باشند، ولی هیچ دو دانش آموز تجربی کنار هم نباشند؟

۲۱۶۰ (۱) ۶۱۲۰ (۲) ۶۴۸۰ (۳) ۸۶۴۰ (۴)

مشاوره ترکیب چند سؤال مهم کنکور را می توانید در این سؤال ببینید. تحلیل دقیق آن حتماً انجام شود.

پاسخ: گزینه ۴

دانش آموزان ریاضی را در یک بسته قرار بده و دانش آموزان تجربی را بین یا کنار انسانی ها و بسته ریاضی جاسازی کن.

Hint

درس: Box

انواع جایگشت	تعداد	توضیح فارسی
n شیء متمایز	$n!$	جایگاه اول n حالت، جایگاه بعدی $n-1$ حالت و ...
تعدادی شیء خاص کنار هم باشند.	—	آن اشیا را در یک دسته قرار داده و یک شیء فرض می کنیم. جایگشت دسته به همراه بقیه اشیا را در جایگشت اعضای دسته بین خودشان ضرب می کنیم.
یک درمیان	n شیء متمایز دسته A و $n+1$ شیء متمایز دسته B $n! \times (n+1)! = B$	با اشیا B باید شروع کنیم: $\underline{B} \times \underline{A} \times \underline{B} \times \dots \times \underline{B}$ $(n+1)!$ جایگشت اشیا B بین خودشان و $n!$ جایگشت گروه A بین خودشان
r تایی از n شیء	$P(n, r) = \frac{n!}{(n-r)!}$	دو گروه n تایی از اشیا متمایز $2! \times n! \times n!$ می توانیم با گروه A یا گروه B شروع کنیم. n شیء داریم، ولی جایگشت r تایی از آن ها را می خواهیم. (ترتیب هم مهم است.)

جایگشت های فاصله دار: n شیء و k شیء مختلف داریم. می خواهیم اشیا را طوری بچینیم که هیچ کدام از k شیء کنار هم نباشند. برای این کار ابتدا n شیء را در دایره ها می چینیم سپس k شیء را باید در بین یا کنار آن ها (در $n+1$ جا) جداسازی کنیم (تا هیچ کدام از k شیء کنار هم نباشند).

— ○ — ○ — ○ — ○ —

اگر اشیا کاملاً متمایز باشند، تعداد حالت ها برابر است با:

$$n! \times P(n+1, k)$$

دقت دارید که $P(n+1, k)$ را می توانیم به صورت $k! \binom{n+1}{k}$ نیز بنویسیم.

گام اول: دانش آموزان ریاضی را در یک بسته قرار می دهیم؛ جاهای خالی را به صورت زیر پر می کنیم:

$$\text{—} \text{ } \textcircled{R_1 R_2 R_3} \text{—} E_1 \text{—} E_2 \text{—} E_3 \text{—}$$

گام دوم: تعداد جایگشت ها برابر است با:

$$\binom{5}{3} \times 3! \times 3! \times 4! = 8640$$

جایگشت ۴ شیء E_3, E_2, E_1 و R_1, R_2, R_3 (جایگشت ریاضی ها بین خودشان) $\times$ جایگشت تجربی ها انتخاب ۳ جایگاه برای تجربی ها

پاسخ خیلی تشریحی

معادله $(\sqrt{x_1} + x_2 + x_3 + x_4)(2x_1 + x_5 + x_6) = 30$ ، چند جواب صحیح نامنفی دارد که به ازای $i = 1, 2, 3, 4$ داشته باشیم $x_i \geq 1$ ؟

۱۴۹ (۴)

۱۳۴ (۳)

۷۸ (۲)

۱۷۳ (۱)

پاسخ: گزینه ۱

حالت‌های ممکن 5×6 یا 10×3 یا 15×2 است. به کم‌ترین مقدار هر دو پرانتز دقت کن.

Hint

درس: Box

تعداد جواب‌های معادله سیاله خطی در حالت‌های مختلف:

معادله	تعداد جواب‌های صحیح نامنفی	تعبیر یا روش حل
$x_1 + x_2 + \dots + x_k = n$ k تا متغیر	$\binom{n+k-1}{k-1}$	توزیع n شیء یکسان بین k نفر انتخاب n شاخه گل از بین k نوع
$\begin{cases} x_1 + x_2 + \dots + x_k = n \\ x_i \geq a \end{cases}$	$\binom{n+k-1-a}{k-1}$	اگر متغیری شرط بزرگ‌تر یا مساوی (حدافلی) داشته باشد، آن را از n کم می‌کنیم.
$\begin{cases} x_1 + x_2 + \dots + x_k = n \\ x_i \geq 1, i = 1, 2, \dots, n \end{cases}$	$\binom{n-1}{k-1}$	جواب‌های طبیعی معادله
$\begin{cases} x_1 + x_2 + \dots + x_k = n \\ x_i \leq a \end{cases}$	$\binom{n+k-1}{k-1} - \binom{n-(a+1)+k-1}{k-1}$	کل جواب‌ها را از جواب‌های با شرط $x_i \geq a+1$ کم می‌کنیم.
$x_1 + x_2 + \dots + x_k \leq n$	$\binom{n+k}{k}$	متغیر نامنفی x_{k+1} را اضافه کرده تا نامعادله تبدیل به معادله $x_1 + x_2 + \dots + x_{k+1} = n$ گردد.
$\begin{aligned} ax_1 + \dots + x_k &= n \\ x_1^n + \dots + x_k &= n \\ \sqrt{x} + \dots + x_k &= n \end{aligned}$	—	متغیر دارای ضریب، توان، رادیکال و ... را حالت‌بندی می‌کنیم.

پاسخ خیلی تشریحی ✓ گام اول: چون x_1 تا x_4 طبیعی است، پس $\sqrt{x_1} + x_2 + x_3 + x_4 \geq 4$ و $2x_1 + x_5 + x_6 \geq 2$ باید باشد، پس تنها حالت‌های

ممکن به صورت زیر است:

الف) $\begin{cases} \sqrt{x_1} + x_2 + x_3 + x_4 = 5 \\ 2x_1 + x_5 + x_6 = 6 \end{cases}$

ب) $\begin{cases} \sqrt{x_1} + x_2 + x_3 + x_4 = 10 \\ 2x_1 + x_5 + x_6 = 3 \end{cases}$

پ) $\begin{cases} \sqrt{x_1} + x_2 + x_3 + x_4 = 15 \\ 2x_1 + x_5 + x_6 = 2 \end{cases}$

ت) $\begin{cases} \sqrt{x_1} + x_2 + x_3 + x_4 = 6 \\ 2x_1 + x_5 + x_6 = 5 \end{cases}$

گام دوم: در حالت «الف» فقط $x_1 = 1$ باید باشد که در این صورت داریم:

$$\begin{cases} x_2 + x_3 + x_4 = 4 \Rightarrow \text{تعداد جوابهای طبیعی} = \binom{4-1}{3-1} = \binom{3}{2} = 3 \\ x_5 + x_6 = 4 \Rightarrow \text{تعداد جوابهای صحیح} = \binom{5}{1} = 5 \end{cases} \Rightarrow \text{تعداد جوابهای دستگاه} = 3 \times 5 = 15$$

گام سوم: در حالت «ب» نیز فقط $x_1 = 1$ باید باشد که در این صورت داریم:

$$\begin{cases} x_2 + x_3 + x_4 = 9 \Rightarrow \text{تعداد جوابهای طبیعی} = \binom{8}{2} = 28 \\ x_5 + x_6 = 1 \Rightarrow \text{تعداد جوابهای صحیح} = \binom{2}{1} = 2 \end{cases} \Rightarrow \text{تعداد جوابهای دستگاه} = 28 \times 2 = 56$$

گام چهارم: در حالت «پ» نیز فقط $x_1 = 1$ می‌تواند باشد که در این صورت داریم:

$$\begin{cases} x_2 + x_3 + x_4 = 14 \Rightarrow \text{تعداد جوابهای طبیعی} = \binom{13}{2} = 78 \\ x_5 + x_6 = 0 \Rightarrow \text{تعداد جوابهای صحیح} = 1 \end{cases} \Rightarrow \text{تعداد جوابهای دستگاه} = 78$$

گام پنجم: در حالت «ت» نیز فقط $x_1 = 1$ باید باشد:

$$\begin{cases} x_2 + x_3 + x_4 = 5 \Rightarrow \text{تعداد جوابهای طبیعی} = \binom{4}{2} = 6 \\ x_5 + x_6 = 3 \Rightarrow \text{تعداد جوابهای صحیح} = \binom{4}{1} = 4 \end{cases} \Rightarrow \text{تعداد جوابهای دستگاه} = 24$$

پس معادله در کل $15 + 56 + 78 + 24 = 173$ جواب دارد.

تعداد جوابهای صحیح و نامنفی معادله $x_1 + 0/4x_2 + \sqrt{x_3} + x_4 = 4$ کدام است؟

(سؤال ۳۸ کنکور ریاضی ۱۴۰۴ - نوبت اول)

۲۱ (۴)

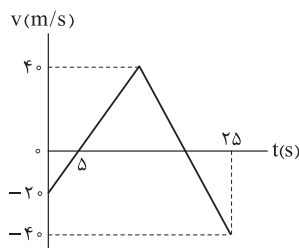
۲۲ (۳)

۱۵ (۲)

۱۶ (۱)

کنکور

نمودار سرعت - زمان متحرکی که در راستای محور x حرکت می‌کند و در مبدأ زمان در مبدأ مکان قرار دارد، به شکل زیر است. در این ۲۵ ثانیه، در بازه‌ای که بردار مکان و بردار سرعت متحرک در خلاف جهت یکدیگر هستند، مسافت



پیموده‌شده توسط متحرک چند متر است؟

(۱) ۵۰

(۲) ۱۰۰

(۳) ۱۵۰

(۴) ۳۰۰

پاسخ: گزینه ۲

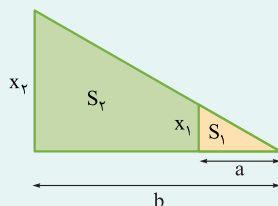
درس Box

(۱) بردار مکان ($\vec{r}$): برداری که مبدأ محور را به مکان جسم در هر لحظه وصل می‌کند، بردار مکان جسم در آن لحظه، نام دارد. در حرکت روی محور x ، بردار مکان را با $\vec{x}$ نشان می‌دهیم. اگر $x > 0$ باشد، یعنی بردار مکان در جهت مثبت است و اگر $x < 0$ باشد، یعنی بردار مکان در جهت منفی است.

(۲) در نمودار سرعت - زمان، در هر بازه زمانی‌ای که نمودار، بالای محور t باشد، بردار سرعت متحرک، در جهت مثبت است و در هر بازه زمانی‌ای که نمودار، پایین محور t باشد، بردار سرعت متحرک، در جهت منفی است.

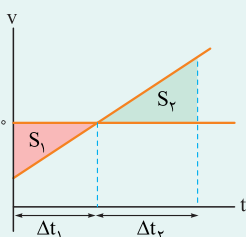
(۳) مساحت سطح بین نمودار سرعت - زمان و محور زمان، در هر بازه زمانی، برابر جابه‌جایی متحرک در آن بازه است. (مساحت بخشی از سطح را که زیر محور زمان است، منفی در نظر می‌گیریم؛ زیرا سرعت و جابه‌جایی در این بخش، منفی هستند).

(۴) قدرمطلق مساحت سطح بین نمودار سرعت - زمان و محور زمان، مسافت پیموده‌شده در بازه زمانی مورد نظر را نشان می‌دهد. در نمودارهای حرکت‌شناسی، نوشتن نسبت تشابه بین اضلاع مثلث‌ها (ابطال تالس) و همچنین نسبت مساحت‌های آن‌ها، می‌تواند مفید باشد.



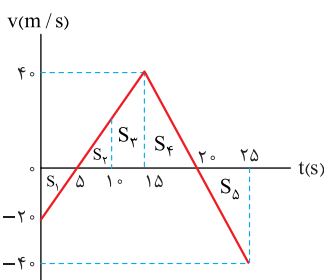
$$\frac{x_1}{x_2} = \frac{a}{b} \quad \frac{S_1}{S_1 + S_2} = \left(\frac{a}{b}\right)^2$$

همچنین اگر نسبت تشابه دو مثلث، برابر k باشد، نسبت مساحت این دو مثلث k^2 است.



$$\frac{\Delta t_2}{\Delta t_1} = k \Rightarrow \frac{S_2}{S_1} = k^2$$

گام اول: در بازه‌های زمانی ۵ ثانیه‌ای، جابه‌جایی متحرک را تعیین می‌کنیم: ✓ پاسخ خیلی تشریحی



$$\Delta x_1 = S_1 = \frac{-20 \cdot (5 - 0)}{2} = -50 \text{ m}$$

$$\Delta x_2 = S_2 = \frac{S_2 = |S_1|}{1} \rightarrow \Delta x_2 = 50 \text{ m}$$

$$\frac{S_2}{S_1 + S_2} = \left(\frac{10 - 5}{15 - 5}\right)^2 \Rightarrow \frac{50}{50 + S_2} = \left(\frac{1}{2}\right)^2$$

$$\Rightarrow \frac{50}{50 + S_2} = \frac{1}{4} \Rightarrow 50 + S_2 = 200 \Rightarrow S_2 = \Delta x_2 = 150 \text{ m}$$

$$\Delta x_3 = S_3 = \frac{(20 - 15) \times 40}{2} = 100 \text{ m}$$

$$\Delta x_4 = S_4 = \frac{S_4 = -S_3}{1} \rightarrow \Delta x_4 = -100 \text{ m}$$

گام دوم: مکان متحرک را در لحظه‌های $t_1 = 5s$ ، $t_2 = 10s$ ، $t_3 = 15s$ ، $t_4 = 20s$ و $t_5 = 25s$ مشخص می‌کنیم:

$$\Delta x_1 = x_1 - x_0 \Rightarrow -50 = x_1 - 0 \Rightarrow x_1 = -50 \text{ m}$$

$$\Delta x_2 = x_2 - x_1 \Rightarrow 50 = x_2 - (-50) \Rightarrow x_2 = 0 \text{ m}$$

$$\Delta x_3 = x_3 - x_2 \Rightarrow 150 = x_3 - 0 \Rightarrow x_3 = 150 \text{ m}$$

$$\Delta x_4 = x_4 - x_3 \Rightarrow 100 = x_4 - 150 \Rightarrow x_4 = 250 \text{ m}$$

$$\Delta x_5 = x_5 - x_4 \Rightarrow -100 = x_5 - 250 \Rightarrow x_5 = 150 \text{ m}$$

گام سوم: مطابق جدول زیر، در بازه‌های زمانی ۵ ثانیه‌ای، سرعت و مکان متحرک را تعیین علامت می‌کنیم:

t	۵ s تا ۰ s	۱۰ s تا ۵ s	۱۵ s تا ۱۰ s	۲۰ s تا ۱۵ s	۲۵ s تا ۲۰ s
v	-	+	+	+	-
x	-	-	+	+	+

گام چهارم: در بازه‌های زمانی ۵ s تا ۱۰ s و ۲۰ s تا ۲۵ s، بردار مکان و بردار سرعت متحرک در خلاف جهت یکدیگرند، مسافت طی شده در هر یک از این بازه‌های زمانی، برابر است با قدرمطلق مساحت محدود بین نمودار سرعت - زمان و محور زمان.

$$L = S_r + |S_d| = 50 + 100 = 150 \text{ m}$$

یوزپلنگی به دنبال شکار یک آهو است. بیشینه تندی حرکت یوزپلنگ برابر با 26 m/s است و حداکثر به مدت 30 ثانیه می‌تواند با این تندی حرکت کند. همچنین آهو به مدت طولانی می‌تواند با بیشینه تندی 18 m/s حرکت کند. یوزپلنگ و آهو هر یک به ترتیب در مدت 4 s و 6 s به بیشینه تندی خود می‌رسند. اگر آهو، 2 s پس از شروع حرکت یوزپلنگ شروع به فرار کند، حداقل فاصله این دو در شروع حرکت یوزپلنگ چند متر باشد تا آهو موفق به فرار شود؟

۳۶۴ (۴)

۳۴۴ (۳)

۳۱۰ (۲)

۲۹۰ (۱)

پاسخ: گزینه ۲

درس Box

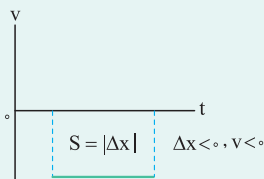
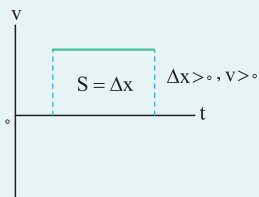
نکته

نمودار سرعت - زمان در حرکت با سرعت ثابت:

(۱) این نمودار به صورت یک خط افقی موازی با محور زمان است.

(۲) مساحت سطح محدود بین این نمودار و محور زمان در هر بازه زمانی، برابر جابه‌جایی (تغییر مکان) در آن بازه است ($S = \Delta x$). مساحت سطحی را که زیر محور t است، منفی در نظر می‌گیریم.

(۳) قدرمطلق مساحت سطح محدود بین این نمودار و محور زمان در هر بازه زمانی، برابر مسافت طی‌شده در آن بازه است ($|S| = l$).

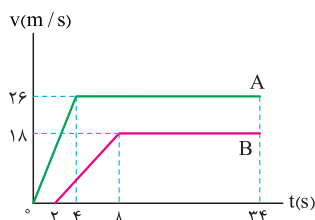


نمودار سرعت - زمان در حرکت با شتاب ثابت:

(۱) با توجه به این که معادله سرعت در این نوع حرکت، از درجه اول می‌باشد، نمودار آن به صورت یک خط شیب‌دار است و شیب آن شتاب متحرک را نشان می‌دهد.

(۲) نقطه شروع این نمودار روی محور v ، سرعت اولیه (v_0) را نشان می‌دهد.

گام اول: با استفاده از مقادیر داده‌شده در سؤال و با فرض آن که یوزپلنگ A و آهو B با شتاب ثابتی به بیشینه تندی خود برسند، نمودار سرعت - زمان را برای آن‌ها رسم می‌کنیم. اگر شروع حرکت یوزپلنگ را در لحظه $t = 0 \text{ s}$ در نظر بگیریم، حرکت آهو از لحظه $t = 2 \text{ s}$ شروع می‌شود:



گام دوم: برای آن که آهو موفق به فرار شود، حداقل فاصله بین یوزپلنگ و آهو در شروع حرکت باید به گونه‌ای باشد که وقتی یوزپلنگ به مدت 30 s با بیشینه تندی خود بدود، در لحظه $t = 34 \text{ s}$ به آهو برسد، ولی در این لحظه از نفس افتاده باشد و آهو فرار کند. بر این اساس، جابه‌جایی هر یک از آن‌ها را تا لحظه $t = 34 \text{ s}$ به کمک مساحت سطح زیر نمودار سرعت - زمان، حساب می‌کنیم:

$$\Delta x_A = \frac{(4-0) \times 26}{2} + (34-4) \times 26 = 2 \times 26 + 30 \times 26 = 32 \times 26 \Rightarrow \Delta x_A = 832 \text{ m}$$

$$\Delta x_B = \frac{(8-2) \times 18}{2} + (34-8) \times 18 = 3 \times 18 + 26 \times 18 = 29 \times 18 \Rightarrow \Delta x_B = 522 \text{ m}$$

پاسخ خیلی تشریحی ✓

گام سوم: رابطه اختلاف جابه‌جایی دو متحرک را تا لحظه $t = 34 \text{ s}$ می‌نویسیم و از آن‌جا، حداقل فاصله یوزپلنگ و آهو در شروع حرکت را پیدا می‌کنیم:

$$\Delta x_A - \Delta x_B = (x_A - x_{A0}) - (x_B - x_{B0})$$

$$\frac{\Delta x_A = 832 \text{ m}, x_A = x_B}{\Delta x_B = 522 \text{ m}} \rightarrow 832 - 522 = x_{B0} - x_{A0} \Rightarrow x_{B0} - x_{A0} = 310 \text{ m}$$

گلوله‌ای را در راستای قائم و رو به بالا پرتاب می‌کنیم. اگر مدت زمان بالارفتن گلوله، نصف مدت زمان پایین آمدن آن باشد، نیروی مقاومت هوای وارد بر گلوله چند برابر وزن آن است؟ (بزرگی نیروی مقاومت هوای وارد بر گلوله را ثابت در نظر بگیرید.)

$$\frac{2}{5} (۴)$$

$$\frac{2}{5} (۳)$$

$$\frac{2}{4} (۲)$$

$$\frac{2}{3} (۱)$$

پاسخ: گزینه ۴

درس: Box

(۱) معادله مستقل از سرعت اولیه برای محاسبه جابه‌جایی برحسب زمان، در حرکت با شتاب ثابت در راستای قائم:

$$\Delta y = -\frac{1}{2}at^2 + vt$$

Δy : جابه‌جایی (m)

a : شتاب (m/s^2)

t : زمان (s)

v : سرعت متحرک در لحظه t (m/s)

(۲) معادله جابه‌جایی برحسب زمان و سرعت اولیه، در حرکت با شتاب ثابت در راستای قائم:

$$\Delta y = \frac{1}{2}at^2 + v_0 t$$

v_0 : سرعت اولیه (m/s)

(۳) قانون دوم نیوتون:

هرگاه نیروهای وارد بر جسمی متوازن نباشند، یعنی بر جسم نیروی خالصی وارد شود، جسم تحت تأثیر آن نیرو، شتاب می‌گیرد که این شتاب با نیروی خالص وارد بر جسم نسبت مستقیم دارد و در همان جهت نیروی خالص است، اما با جرم جسم نسبت وارون دارد:

$$\vec{a} = \frac{\vec{F}_{net}}{m} \Rightarrow \vec{F}_{net} = m\vec{a}$$

$\vec{a}$: شتاب (m/s^2)

m : جرم (kg)

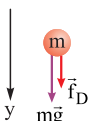
$\vec{F}_{net}$: نیروی خالص (N)

گام اول: معادله جابه‌جایی برحسب زمان را هنگام رفت (Δy_1) و هنگام برگشت (Δy_2) می‌نویسیم و اندازه آن‌ها را با هم برابر قرار می‌دهیم:

$$|\Delta y_1| = |\Delta y_2| \Rightarrow \frac{1}{2}a_1 t_1^2 - v t_1 = \frac{1}{2}a_2 t_2^2 + v' t_2$$

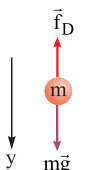
$$\xrightarrow[t_2=2t]{t_1=t} \frac{1}{2}a_1 t^2 = \frac{1}{2}a_2 \times 4t^2 \Rightarrow \frac{a_1}{a_2} = 4$$

گام دوم: قانون دوم نیوتون را برای هر دو مرحله رفت و برگشت، جداگانه می‌نویسیم و از آن‌جا a_1 و a_2 را به دست می‌آوریم:



$$F_{net} = ma \Rightarrow mg + f_D = ma_1 \Rightarrow a_1 = \frac{mg + f_D}{m} \Rightarrow a_1 = g + \frac{f_D}{m}$$

برگشت:



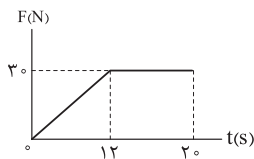
$$F_{net} = ma \Rightarrow mg - f_D = ma_2 \Rightarrow a_2 = \frac{mg - f_D}{m} \Rightarrow a_2 = g - \frac{f_D}{m}$$

پاسخ خیلی تشریحی ✓

گام سوم: نسبت شتاب حرکت گلوله در دو حالت را می‌نویسیم و از آن‌جا نسبت نیروی مقاومت هوا به وزن گلوله را حساب می‌کنیم:

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{g + \frac{f_D}{m}}{g - \frac{f_D}{m}} \Rightarrow 4 = \frac{g + \frac{f_D}{m}}{g - \frac{f_D}{m}} \Rightarrow 4g - 4\frac{f_D}{m} = g + \frac{f_D}{m} \Rightarrow 3g = 5\frac{f_D}{m} \Rightarrow 3mg = 5f_D \Rightarrow \frac{f_D}{mg} = \frac{3}{5}$$

جسمی به جرم 4 kg روی سطحی افقی با ضرایب اصطکاک $\mu_s = 0.5$ و $\mu_k = 0.4$ قرار دارد. بر این جسم نیروی افقی F وارد می‌شود. شکل زیر نمودار تغییرات این نیرو بر حسب زمان را نشان می‌دهد. در بازه زمانی صفر تا 20 s ، نیروی خالص متوسط وارد بر این جسم چند نیوتون است؟ ($g = 10 \text{ m/s}^2$)



۶ / ۸ (۱)

۷ (۲)

۷ / ۲ (۳)

۷ / ۴ (۴)

پاسخ: گزینه ۴

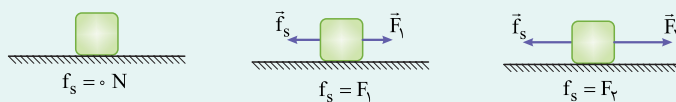
انواع نیروی اصطکاک:

درس Box

(۱) نیروی اصطکاک ایستایی یا در حال سکون (f_s):

وقتی نیرویی بخواهد جسمی را روی سطحی به حرکت درآورد، ولی قادر به تکان دادن آن نباشد، معلوم می‌شود نیروی دیگری هم‌اندازه آن و در جهت مخالف، بر جسم اثر می‌کند که مانع حرکت می‌شود. این نیروی مخالف، همان f_s است و مقدارهای متفاوتی بین صفر تا یک مقدار بیشینه دارد.

نیروی f_s را می‌توان با توجه به توازن نیروها و قانون دوم نیوتون تعیین کرد. مثلاً در شکل‌های زیر، برای جسم ساکن داریم:



تا زمانی که جسم ساکن است، نیروی خالص وارد بر آن صفر است.

بیشینه نیروی اصطکاک ایستایی که جسم برای شروع حرکت با آن روبه‌رو می‌شود، نیروی اصطکاک ایستایی در آستانه حرکت ($f_{s,max}$) نامیده می‌شود و در واقع به اندازه کم‌ترین نیروی محرکی است که می‌تواند حرکت جسم را آغاز کند:

$$f_{s,max} = \mu_s F_N$$

μ_s : ضریب اصطکاک ایستایی

F_N : اندازه نیروی عمودی سطح (N)

(۲) نیروی اصطکاک جنبشی (f_k):

نیروی اصطکاکی است که هنگام لغزش جسم، موازی با سطح و در خلاف جهت لغزش بر جسم اثر می‌کند:

$$f_k = \mu_k F_N$$

μ_k : ضریب اصطکاک جنبشی

F_N : اندازه نیروی عمودی سطح (N)

تکانه:

حاصل ضرب جرم جسم در سرعت آن را تکانه جسم می‌نامیم:

$$\vec{p} = m\vec{v}$$

$\vec{p}$: تکانه ($\frac{\text{kg.m}}{\text{s}}$)

$\vec{v}$: سرعت (m/s)

m : جرم (kg)

تکانه کمیتی برداری است که هم جهت با سرعت می باشد. رابطه نیروی خالص متوسط وارد بر جسم بر حسب تکانه:

$$F_{av} = \frac{\Delta p}{\Delta t}$$

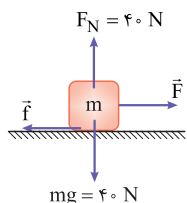
F_{av} : نیروی خالص متوسط (N)

Δp : تغییر تکانه ($\frac{kg \cdot m}{s}$)

Δt : بازه زمانی (s)

● اندازه تغییر تکانه یک جسم، با مساحت سطح زیر نمودار نیروی خالص - زمان آن جسم برابر است.

گام اول: نیروی اصطکاک ایستایی در آستانه حرکت و نیروی اصطکاک جنبشی وارد بر جسم را به دست می آوریم: ✓ پاسخ خیلی تشریحی

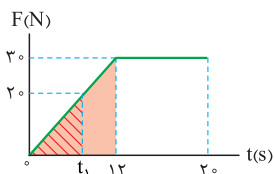


$$F_N = mg = 4 \times 10 = 40 \text{ N}$$

$$f_{s, \max} = \mu_s F_N = 0.5 \times 40 = 20 \text{ N}$$

$$f_k = \mu_k F_N = 0.4 \times 40 = 16 \text{ N}$$

گام دوم: برای شروع حرکت در لحظه t_1 ، باید نیروی F با نیروی $f_{s, \max}$ هم اندازه شود:



$$F_1 = f_{s, \max} = 20 \text{ N}$$

با توجه به تشابه مثلث های زیر نمودار، در بازه های زمانی صفر تا t_1 و صفر تا ۱۲ S داریم:

$$\frac{t_1 - 0}{12 - 0} = \frac{20}{30} \Rightarrow \frac{t_1}{12} = \frac{2}{3} \Rightarrow t_1 = 8 \text{ s}$$

بنابراین در لحظه $t_1 = 8 \text{ s}$ ، حرکت جسم شروع می شود.

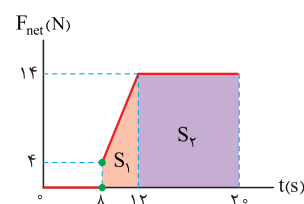
گام سوم: اکنون نمودار نیروی خالص بر حسب زمان را برای این جسم رسم می کنیم:

$$t_1 = 8 \text{ s} : F_{\text{net}} = 0$$

$$t_1 = 8 \text{ s} : F_{\text{net}_1} = F_1 - f_k = 20 - 16 = 4 \text{ N}$$

$$t_2 = 12 \text{ s} : F_{\text{net}_2} = F_2 - f_k = 20 - 16 = 4 \text{ N}$$

$$t_3 = 20 \text{ s} : F_{\text{net}_3} = F_3 - f_k = 30 - 16 = 14 \text{ N}$$



گام چهارم: مساحت سطح زیر نمودار نیروی خالص بر حسب زمان را در بازه زمانی صفر تا ۲۰ S به دست می آوریم:

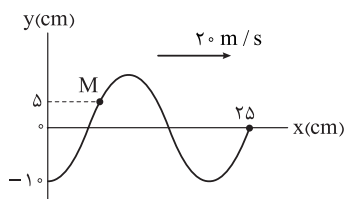
$$\Delta p = S_1 + S_2 = \frac{(4 + 14)(12 - 8)}{2} + (20 - 12) \times 4$$

$$\Rightarrow \Delta p = 36 + 112 = 148 \frac{kg \cdot m}{s}$$

گام پنجم: نیروی خالص متوسط وارد بر جسم در بازه زمانی صفر تا ۲۰ S را حساب می کنیم:

$$F_{av} = \frac{\Delta p}{\Delta t} = \frac{148}{20} = 7.4 \text{ N}$$

۳۰. نقش موج عرضی منتشر شده در ریسمانی کشیده، در مبدأ زمان به شکل زیر است. در لحظه $t = \frac{1}{240} \text{ s}$ ، فاصله ذره M



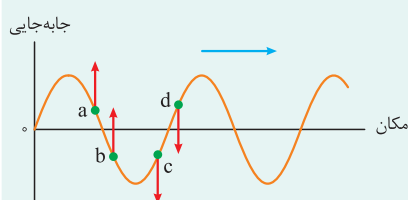
از وضع تعادل خود چند سانتی متر و جهت حرکت آن کدام است؟

- (۱) $\uparrow, 5\sqrt{3}$
- (۲) $\downarrow, 5\sqrt{3}$
- (۳) $\uparrow, 5\sqrt{2}$
- (۴) $\downarrow, 5\sqrt{2}$

پاسخ: گزینه ۱

درس: Box

● **موج‌های پیش‌رونده:** موج‌های مکانیکی ای هستند که از یک نقطه به نقطه دیگر حرکت کرده و انرژی را با خود منتقل می‌کنند. این موج است که در محیط منتشر می‌شود و با تندی ثابت از یک سر به سر دیگر می‌رود، نه ماده یا اجزای محیطی که موج در آن حرکت می‌کند. اجزای محیط، حول نقطه تعادل خود و با همان بسامد چشمه، نوسان می‌کنند و با تندی متغیر، حرکت هماهنگ ساده دارند.



شکل مقابل، نقش یک موج عرضی را در لحظه‌ای از زمان نشان می‌دهد که در جهت محور X در طول ریسمان کشیده شده‌ای منتشر می‌شود. جهت حرکت نوسانی چند ذره از ریسمان در این لحظه نشان داده شده است. هر ذره از محیط می‌خواهد به وضعیت ذره‌ای درآید که لحظه‌ای قبل، موج از آن عبور کرده است. مثلاً ذره b می‌خواهد به وضعیت ذره a درآید.

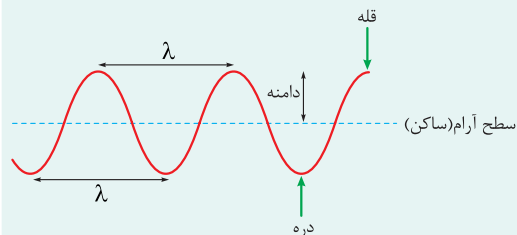
● **طول موج (λ):** فاصله بین دو برآمدگی یا دو فرورفتگی مجاور، طول موج نامیده می‌شود. به عبارت دیگر، طول موج برابر مسافتی است که موج در مدت دوره تناوب نوسان چشمه طی می‌کند.

● همان‌طور که در مورد چشمه موج به عنوان یک نوسانگر مشخصاتی مانند دامنه، دوره تناوب و بسامد وجود داشت، هر یک از ذره‌های محیط که موج در آن‌جا منتشر می‌شود نیز مشخصات مشابهی دارند.

دامنه (A): بیشینه فاصله یک ذره از مکان تعادل خود = فاصله قله یا دره نسبت به سطح آرام یا ساکن

دوره تناوب (T): مدت زمانی که هر ذره محیط، یک نوسان کامل انجام می‌دهد و با دوره تناوب چشمه موج برابر است.

● در یک نوسان کامل، هر نقطه از موج، یک λ جلو می‌رود، اما هر نقطه از محیط در جای خود نوسان می‌کند.



● **رابطه طول موج با تندی انتشار موج:**

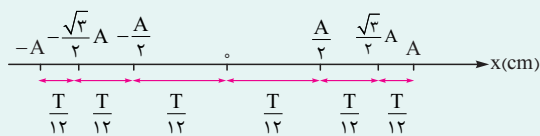
$$T = \frac{\lambda}{v}$$

T : دوره تناوب (s)

λ : طول موج (m)

v : تندی انتشار موج (m/s)

● در یک حرکت هماهنگ ساده که از دامنه مثبت شروع شده است، در بازه‌های زمانی $\frac{T}{12}$ از مکان‌های خاصی عبور می‌کنیم که در شکل زیر، نشان داده شده است:



پاسخ خیلی تشریحی ✓ گام اول: با توجه به نمودار داده‌شده، طول موج نوسان را به دست می‌آوریم:

$$\frac{\Delta \lambda}{4} = 25 \Rightarrow \lambda = 20 \text{ cm} = 0.2 \text{ m}$$

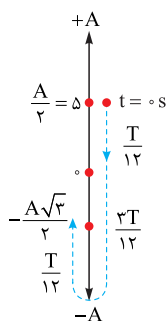
سپس دوره تناوب را محاسبه می‌کنیم:

$$T = \frac{\lambda}{v} = \frac{0.2}{200} = \frac{1}{1000} \text{ s}$$

گام دوم: حالا باید ببینیم بازه زمانی صفر تا $\frac{1}{440} \text{ s}$ چه کسری از دوره تناوب است:

$$\frac{\Delta t}{T} = \frac{\frac{1}{440}}{\frac{1}{1000}} = \frac{1000}{440} = \frac{5}{22} \Rightarrow \Delta t = \frac{5}{22} T$$

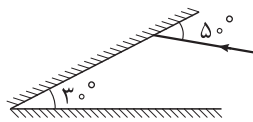
گام سوم: با توجه به این که جهت انتشار موج به طرف راست است، در لحظه $t = 0 \text{ s}$ جهت حرکت ذره M رو به پایین است. در بازه زمانی صفر تا $\frac{5T}{22}$ ، مسیر حرکت ذره M به صورت زیر است:



بنابراین در لحظه $t = \frac{1}{440} \text{ s}$ ، ذره M در حال عبور از مکان $-\frac{A\sqrt{3}}{2}$ و جهت حرکت آن رو به بالاست؛ یعنی در فاصله

$$\frac{A\sqrt{3}}{2} = 5\sqrt{3} \text{ cm} \text{ از وضع تعادل است.}$$

در شکل زیر، پرتو نوری با یکی از دو آینه تخت متقاطع برخورد می‌کند. زاویه بازتابش پرتو در آخرین برخورد آن با آینه‌ها، چند برابر زاویه تابش پرتو در سومین برخورد آن با آینه‌ها است؟



۲ (۱)

۳ (۲)

۴ (۳)

۵ (۴)

پاسخ: گزینه ۳

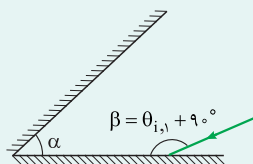
درس Box

اگر دو آینه تخت متقاطع با یکدیگر زاویه حاده α بسازند و پرتو نوری با زاویه تابش $\theta_{i,1}$ بر سطح یکی از آن‌ها بتابد:

(۱) تعداد بازتاب‌ها یا تعداد برخوردها به سطح این دو آینه (n) به صورت زیر به دست می‌آید:

الف) اگر $\frac{\beta}{\alpha}$ برابر با یک عدد صحیح باشد، $n = \frac{\beta}{\alpha}$ است. در این حالت، آخرین پرتوی بازتاب، موازی با سطح یکی از آینه‌ها، مسیر خود را ادامه می‌دهد.

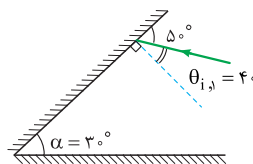
ب) اگر $\frac{\beta}{\alpha}$ برابر با یک عدد صحیح نباشد، $n = \left[\frac{\beta}{\alpha} \right] + 1$ است.



(۲) زاویه‌های تابش و بازتاب، در n امین برخورد پرتو به آینه‌ها، از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$\theta_{i,n} = \theta_{r,n} = |(n-1)\alpha - \theta_{i,1}|$$

گام اول: ابتدا تعداد بازتاب‌ها یا تعداد برخوردها به سطح این دو آینه را حساب می‌کنیم:



$$\frac{\beta}{\alpha} = \frac{\theta_{i,1} + 90^\circ}{3^\circ} = \frac{4^\circ + 90^\circ}{3^\circ} = \frac{13^\circ}{3^\circ}$$

$$n = \left[\frac{13^\circ}{3^\circ} \right] + 1 = 4 + 1 = 5$$

گام دوم: نسبت زاویه بازتابش پرتو در آخرین (پنجمین) برخورد آن با آینه‌ها، به زاویه تابش پرتو در سومین برخورد آن با آینه‌ها را به دست می‌آوریم:

$$\theta_{i,n} = \theta_{r,n} = |(n-1)\alpha - \theta_{i,1}| \xrightarrow[\theta_{i,1}=4^\circ]{\alpha=3^\circ} \frac{\theta_{r,5}}{\theta_{i,3}} = \frac{|(5-1)3^\circ - 4^\circ|}{|(3-1)3^\circ - 4^\circ|}$$

$$\Rightarrow \frac{\theta_{r,5}}{\theta_{i,3}} = \frac{12^\circ - 4^\circ}{6^\circ - 4^\circ} = \frac{8^\circ}{2^\circ} = 4$$

پاسخ خیلی تشریحی ✓

تاری بین دو نقطه بسته شده و موج ایستاده‌ای در آن تشکیل شده است. اگر نیروی کشش تار را ۴۴ درصد افزایش و بسامد تار را ۲۵ درصد کاهش دهیم، در طول تار، ۶ گره تشکیل می‌شود. تعداد گره‌های تار، قبل از این تغییرات کدام است؟

۹ (۴)

۸ (۳)

۷ (۲)

۵ (۱)

پاسخ: گزینه ۴

کوتاه‌ترین Box

● **بسامدهای تشدید تار:** هر تار مرتعش، به ازای بسامدهای معینی می‌تواند به تشدید درآید و موج‌های ایستاده بارز یا اصطلاحاً مدهای نوسانی را تولید کند. به این بسامدهای خاص، بسامدهای تشدید می‌گویند.

● **رابطه بسامدهای تشدید تار مرتعش:** در یک تار مرتعش که بین دو نقطه بسته شده، بسامد نوسان تار از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$\left. \begin{aligned} f_n &= \frac{nv}{2L} \\ v &= \sqrt{\frac{F}{\mu}} \end{aligned} \right\} \Rightarrow f_n = \frac{n}{2L} \sqrt{\frac{F}{\mu}}$$

f_n : بسامد هماهنگ n ام (Hz)

n : تعداد شکم $= 1 -$ تعداد گره

L : طول تار (m)

F : نیروی کشش تار (N)

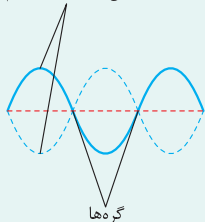
μ : چگالی خطی جرم (kg / m)

● **گره:** در یک موج ایستاده، نقاطی از محیط که همواره ساکن می‌مانند، گره نام دارند.

● **شکم:** وسط گره‌های مجاور را شکم می‌گویند و دامنه موج برابرند در آن‌جا بیشینه است.

● نقش یک موج ایستاده به چپ یا راست، حرکت نمی‌کند و محل گره‌ها و شکم‌ها نیز تغییر نمی‌کنند:

مکان‌های حدهای شکم



نسبت بسامدهای تشدیدی تار در دو حالت را می‌نویسیم و از آن‌جا n را به دست می‌آوریم:

$$f_n = \frac{n}{2L} \sqrt{\frac{F}{\mu}} \xrightarrow{\frac{L'=L}{\mu'=\mu}} \frac{f_{n'}}{f_n} = \frac{n'}{n} \times \sqrt{\frac{F'}{F}}$$

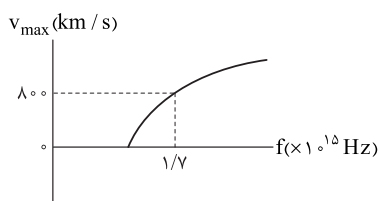
$$\frac{F'=F+0/44F=1/44F, n'=6-1=5}{f_{n'}=f_n-0/25f_n=0/25f_n} \rightarrow \frac{0/25f_n}{f_n} = \frac{5}{n} \times \sqrt{\frac{1/44F}{F}}$$

$$\Rightarrow \frac{3}{4} = \frac{5}{n} \times \frac{6}{5} \Rightarrow \frac{3}{4} = \frac{6}{n} \Rightarrow n = 8 \Rightarrow \text{تعداد گره در حالت اول} = n + 1 = 8 + 1 = 9$$

پاسخ خیلی تشریحی ✓

در آزمایش فوتوالکتریک برای فلزی معین، نمودار تندی بیشینه فوتوالکترون‌های گسیل شده از سطح فلز بر حسب بسامد امواج الکترومغناطیسی تابیده شده بر سطح فلز، به شکل زیر است. تابع کار این فلز چند الکترون ولت است؟

$$(m_e = 9 \times 10^{-31} \text{ kg}, e = 1.6 \times 10^{-19} \text{ C}, h = 4 \times 10^{-15} \text{ eV.s})$$



۴ (۱)

۴ / ۵ (۲)

۵ (۳)

۵ / ۵ (۴)

پاسخ: گزینه ۲

درس: Box

● رابطه‌های انرژی جنبشی بیشینه فوتوالکترون‌ها:

$$۱) K_{\max} = \frac{1}{2} m v_{\max}^2$$

$K_{\max}$: بیشینه انرژی جنبشی فوتوالکترون‌ها (J)

m : جرم الکترون (kg)

$v_{\max}$: تندی بیشینه فوتوالکترون‌ها (m/s)

$$۲) K_{\max} = hf - W_0$$

$K_{\max}$: بیشینه انرژی جنبشی فوتوالکترون‌ها (eV)

h : ثابت پلانک $4 \times 10^{-15} \text{ eV.s} \approx$

f : بسامد موج (Hz)

W_0 : تابع کار (eV)

● تابع کار فلز، کمینه کار لازم برای خارج کردن یک الکترون از سطح یک فلز معین است که به جنس فلز بستگی دارد.

● رابطه بین یکاهای الکترون ولت و ژول:

$$۱ \text{ eV} = 1.6 \times 10^{-19} \text{ J}$$

گام اول: بیشینه انرژی جنبشی فوتوالکترون‌ها را به دست می‌آوریم و یکای آن را از ژول به الکترون ولت، تبدیل می‌کنیم:

$$K_{\max} = \frac{1}{2} m v_{\max}^2 = \frac{1}{2} \times 9 \times 10^{-31} \times (80 \times 10^3)^2 = \frac{9}{2} \times 64 \times 10^{-21} = 9 \times 32 \times 10^{-21} \text{ J}$$

$$K_{\max} = 9 \times 32 \times 10^{-21} \text{ J} \times \frac{1 \text{ eV}}{1.6 \times 10^{-19} \text{ J}} \Rightarrow K_{\max} = 1.8 \text{ eV}$$

گام دوم: به کمک اطلاعات داده شده روی نمودار، تابع کار فلز را حساب می‌کنیم:

$$K_{\max} = hf - W_0 \Rightarrow 1.8 = 4 \times 10^{-15} \times 1/7 \times 10^{15} - W_0$$

$$\Rightarrow 1.8 = 6/8 - W_0 \Rightarrow W_0 = 5 \text{ eV}$$

پاسخ خیلی تشریحی ✓

در طیف اتمی هیدروژن، گستره طول موج رشته براکت، چند برابر گستره طول موج رشته بالمر است؟

$\frac{8}{9}$ (۴)

$\frac{64}{9}$ (۳)

۹ (۲)

۸ (۱)

پاسخ: گزینه ۴

معادله ریدبرگ:

درس Box

طول موج تمامی خط‌های طیف گسیلی اتم هیدروژن از رابطه زیر به دست می‌آید؛ به طوری که اگر الکترون اتم هیدروژن از تراز n به تراز n' برود، طول موج λ را تابش می‌کند و اگر از n' به n برود، طول موج λ را جذب می‌کند.

$$\frac{1}{\lambda} = R \left(\frac{1}{n'^2} - \frac{1}{n^2} \right)$$

λ : طول موج (nm)

n : شماره مدار بزرگ‌تر

n' : شماره مدار کوچک‌تر

R : ثابت ریدبرگ $= 1.097 \times 10^7 (nm)^{-1} \simeq 1.1 \times 10^7 (nm)^{-1}$

رشته خط‌های طیف گسیلی هیدروژن اتمی:

نام طیف	مقدار n'	رابطه ریدبرگ مربوط به رشته	مقدارهای n	ناحیه طیف
لیمان	۱	$\frac{1}{\lambda} = R \left(\frac{1}{1^2} - \frac{1}{n^2} \right)$	۲, ۳, ۴, ...	فرابنفش
بالمر	۲	$\frac{1}{\lambda} = R \left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{n^2} \right)$	۳, ۴, ۵, ...	فرابنفش و مرئی
پاشن	۳	$\frac{1}{\lambda} = R \left(\frac{1}{3^2} - \frac{1}{n^2} \right)$	۴, ۵, ۶, ...	فروسرخ
براکت	۴	$\frac{1}{\lambda} = R \left(\frac{1}{4^2} - \frac{1}{n^2} \right)$	۵, ۶, ۷, ...	فروسرخ
پفوند	۵	$\frac{1}{\lambda} = R \left(\frac{1}{5^2} - \frac{1}{n^2} \right)$	۶, ۷, ۸, ...	فروسرخ

کم‌ترین طول موج هر رشته، مربوط به بیشترین بسامد و بیشترین انرژی مبادله شده است. یعنی گذار بین ترازهای $n' = \infty$, $n = \infty$.

$$E_{\max} = \frac{hc}{\lambda_{\min}}$$

بیشترین طول موج هر رشته، مربوط به کم‌ترین بسامد و کم‌ترین انرژی مبادله شده است، یعنی گذار بین ترازهای $n' = n + 1$ و n .

$$E_{\min} = \frac{hc}{\lambda_{\max}}$$

گام اول: کم‌ترین و بیشترین طول موج مربوط به رشته براکت ($n' = 4$) را به دست می‌آوریم:

$$\frac{1}{\lambda} = R \left(\frac{1}{n'^2} - \frac{1}{n^2} \right)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{1}{\lambda_{\min}} = R \left(\frac{1}{4^2} - \frac{1}{\infty^2} \right) = \frac{1}{16} R \Rightarrow \lambda_{\min} = \frac{16}{R} \\ \frac{1}{\lambda_{\max}} = R \left(\frac{1}{4^2} - \frac{1}{5^2} \right) = R \left(\frac{1}{16} - \frac{1}{25} \right) = R \left(\frac{9}{400} \right) \Rightarrow \lambda_{\max} = \frac{16 \times 25}{9R} \end{cases}$$

پاسخ خیلی تشریحی ✓

$$\Rightarrow \lambda_{\max} - \lambda_{\min} = \frac{16 \times 25}{9R} - \frac{16}{R} = \frac{1}{R} \left(\frac{16 \times 25}{9} - 16 \right) = \left(\frac{16}{9} \times 16 \right) \frac{1}{R}$$

گام دوم: کمترین و بیشترین طول موج مربوط به رشته بالمر ($n' = 2$) را به دست می‌آوریم:

$$\frac{1}{\lambda} = R \left(\frac{1}{n'^2} - \frac{1}{n^2} \right) \Rightarrow \begin{cases} \frac{1}{\lambda'_{\min}} = R \left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{\infty^2} \right) = \frac{R}{4} \Rightarrow \lambda'_{\min} = \frac{4}{R} \\ \frac{1}{\lambda'_{\max}} = R \left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{3^2} \right) = R \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{9} \right) = \frac{5R}{36} \Rightarrow \lambda'_{\max} = \frac{36}{5R} \end{cases}$$

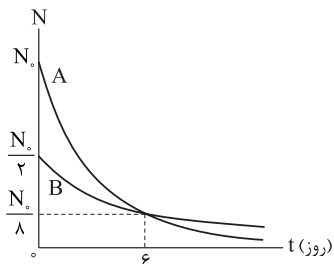
$$\Rightarrow \lambda'_{\max} - \lambda'_{\min} = \frac{36}{5R} - \frac{4}{R} = \frac{1}{R} \left(\frac{36}{5} - 4 \right) = \frac{16}{5R}$$

گام سوم: نسبت گستره طول موج رشته براکت، به گستره طول موج رشته بالمر را حساب می‌کنیم:

$$\frac{\lambda_{\max} - \lambda_{\min}}{\lambda'_{\max} - \lambda'_{\min}} = \frac{\left(\frac{16}{9} \times 16 \right) \frac{1}{R}}{\frac{16}{5R}} = \frac{\frac{16}{9}}{\frac{1}{5}} = \frac{80}{9}$$

۳۵

نمودار تعداد هسته‌های باقی‌مانده دو ماده پرتوزای A و B بر حسب زمان، به شکل زیر است. اگر تعداد هسته‌های اولیه یکسان از این دو ماده در اختیار داشته باشیم، پس از یک ماه، تعداد هسته‌های باقی‌مانده ماده B چند برابر تعداد هسته‌های باقی‌مانده ماده A خواهد بود؟



۴ (۱)

۸ (۲)

۱۶ (۳)

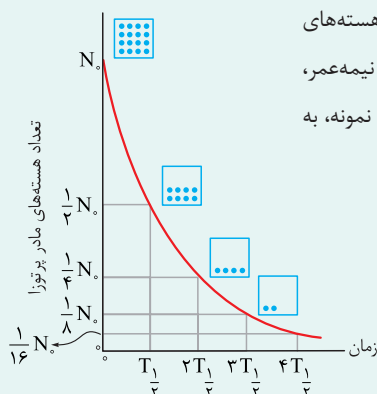
۳۲ (۴)

پاسخ: گزینه ۴

درس: Box

نیمه‌عمر: ایزوتوپ‌های پرتوزا با گذشت زمان واپاشیده می‌شوند؛ یعنی تعداد هسته‌های مادر (هسته‌های اولیه) آن‌ها کاهش می‌یابد و به صفر میل می‌کند. بنا به تعریف، نیمه‌عمر، مدت‌زمانی است که طول می‌کشد تا تعداد هسته‌های مادر (اولیه) موجود در یک نمونه، به نصف برسند و آن را با نماد « $T_{1/2}$ » نشان می‌دهیم:

$$N = \frac{N_0}{2^n}$$



N_0 : تعداد هسته‌های اولیه در یک نمونه پرتوزا

N : تعداد هسته‌های پرتوزای باقی‌مانده

$N_0 - N$: تعداد هسته‌های واپاشیده‌شده

$$n = \frac{t}{T_{1/2}}$$

n : تعداد تکرار نیمه‌عمر

t : کل زمان واپاشی

گام اول: با استفاده از نمودار داده‌شده، نیمه‌عمر هر یک از دو ماده پرتوزای A و B را پیدا می‌کنیم. برای ساده‌تر شدن نوشتار، نیمه‌عمرهای این دو ماده را به جای $T_{1/2, A}$ و $T_{1/2, B}$ با T_A و T_B نشان می‌دهیم:

$$N_A = \frac{N_{0A}}{2^{n_A}} \xrightarrow{N_A = \frac{1}{8} N_{0A}} \frac{N_0}{8} = \frac{N_{0A}}{2^{n_A}} \Rightarrow 8 = 2^{n_A} \Rightarrow n_A = 3$$

$$n_A = \frac{t}{T_A} \Rightarrow 3 = \frac{6}{T_A} \Rightarrow T_A = 2 \text{ روز}$$

$$N_B = \frac{N_{0B}}{2^{n_B}} \xrightarrow{N_B = \frac{1}{4} N_{0B}} \frac{N_0}{4} = \frac{N_{0B}}{2^{n_B}} \Rightarrow 4 = 2^{n_B} \Rightarrow n_B = 2$$

$$n_B = \frac{t}{T_B} \Rightarrow 2 = \frac{6}{T_B} \Rightarrow T_B = 3 \text{ روز}$$

گام دوم: حالا باید تعداد هسته‌های فعال باقی‌مانده از دو ماده پرتوزای A و B را پس از گذشت ۳۰ روز به دست آوریم و نسبت آن‌ها را پیدا کنیم:

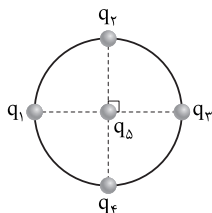
$$n'_A = \frac{t'}{T_A} \Rightarrow n'_A = \frac{30}{2} = 15$$

$$n'_B = \frac{t'}{T_B} \Rightarrow n'_B = \frac{30}{3} = 10$$

$$N = \frac{N_0}{2^n} \xrightarrow{N_{0A} = N_{0B}} \frac{N'_B}{N'_A} = \frac{2^{n'_A}}{2^{n'_B}} = 2^{n'_A - n'_B} \xrightarrow{\frac{n'_A}{n'_B} = \frac{15}{10}} \frac{N'_B}{N'_A} = 2^{15-10} = 2^5 = 32$$

پاسخ خیلی تشریحی ✓

در شکل زیر، بارهای الکتریکی نقطه‌ای $q_1 = q_2 = -q_3 = q_4 = q_5 = q$ روی محیط و مرکز دایره‌ای قرار گرفته‌اند. بزرگی نیروی خالص وارد بر بار q_1 ، چند برابر بزرگی نیروی الکتریکی خالص وارد بر بار q_5 است؟



$$\frac{4+3\sqrt{2}}{16} \quad (1)$$

$$\frac{4+3\sqrt{2}}{8} \quad (2)$$

$$\frac{3+2\sqrt{2}}{16} \quad (3)$$

$$\frac{3+2\sqrt{2}}{8} \quad (4)$$

پاسخ: گزینه ۴

درس Box

● **قانون کولن:** اندازه نیروی الکتریکی (الکتروستاتیکی) بین دو بار نقطه‌ای که در راستای خط مستقیم بین آن‌ها اثر می‌کند، با حاصل ضرب بزرگی آن‌ها متناسب است و با مربع فاصله بین آن‌ها نسبت وارون دارد:

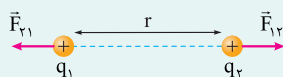
$$F = k \frac{|q_1| |q_2|}{r^2}$$



F: اندازه نیروی الکتریکی (N)

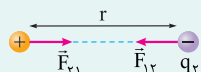
k: ثابت کولن: $9 \times 10^9 \frac{N.m^2}{C^2}$

ϵ_0 : ضریب گذردهی الکتریکی خلأ و هوا: $8.85 \times 10^{-12} \frac{C^2}{N.m^2}$



q_1, q_2 : بارهای الکتریکی نقطه‌ای (C)

r: فاصله بین دو بار (m)



● **اصل برهم‌نهی نیروهای الکتروستاتیکی:** وقتی تعدادی بار ذره‌ای داشته باشیم، نیروی الکتریکی خالص وارد بر هر ذره (بار هدف)، برابری نیروهایی است که هر یک از ذره‌های دیگر به تنهایی، بر آن ذره وارد می‌کنند.

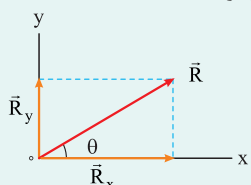
مثلاً برابری نیروهای وارد بر بار q_1 از طرف بارهای $q_2, q_3, q_4, \dots$ برابر است با:

$$\vec{F}_{T1} = \vec{F}_{12} + \vec{F}_{13} + \vec{F}_{14} + \dots$$

● اگر دو جسم رسانای مشابه دارای بارهای q_1 و q_2 را با هم تماس داده و سپس از هم جدا کنیم، بار الکتریکی کل، به طور مساوی بین دو جسم تقسیم می‌شود.

● **یادآوری تجزیه بردار و بردارهای یگه:**

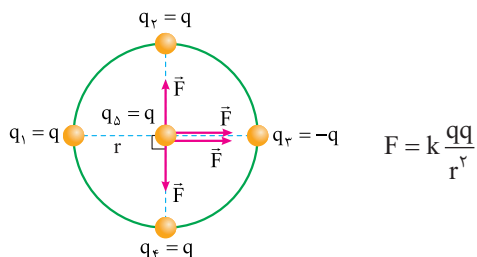
اگر R_x و R_y مؤلفه‌های بردار $\vec{R}$ روی محورهای x و y و $\vec{i}$ و $\vec{j}$ بردارهای یگه باشند، می‌توان نوشت:



$$\vec{R} = R_x \vec{i} + R_y \vec{j} \Rightarrow \vec{R} = (R \cos \theta) \vec{i} + (R \sin \theta) \vec{j}$$

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2}$$

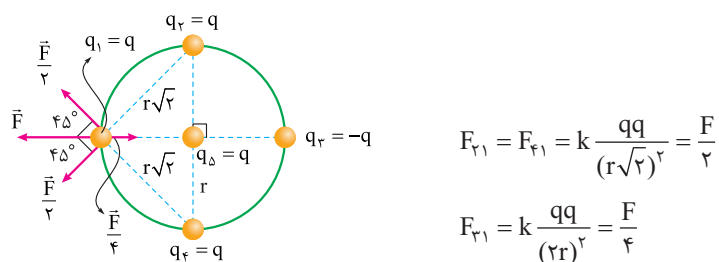
گام اول: نیروهای الکتریکی وارد بر بار q_5 را روی شکل نشان می‌دهیم و نیروی الکتریکی خالص آن‌ها را به دست می‌آوریم. اگر شعاع دایره را r فرض کنیم، اندازه نیروی الکتریکی بین دو بار ذره‌ای q را که در فاصله r از یکدیگر قرار دارند، با F نشان می‌دهیم:



بر این اساس، نیروی الکتریکی خالص وارد بر بار q_5 برابر است با:

$$\vec{F}_{T5} = \vec{F}_{15} + \vec{F}_{25} + \vec{F}_{35} + \vec{F}_{45} \Rightarrow F_{T5} = F + F = 2F$$

گام دوم: نیروهای الکتریکی وارد بر بار q_1 را روی شکل نشان می‌دهیم و نیروی الکتریکی خالص آن‌ها را به دست می‌آوریم. با استفاده از رابطه فیثاغورس، به راحتی معلوم می‌شود که فاصله هر یک از بارهای q_2 و q_4 تا بار q_1 به اندازه $r\sqrt{2}$ است. بر این اساس داریم:



بر این اساس، نیروی الکتریکی خالص وارد بر بار q_1 برابر است با:

$$\vec{F}_{T1} = \vec{F}_{12} + \vec{F}_{13} + \vec{F}_{14}$$

$$\vec{F}_{T1} = -\left(\frac{F}{2} \cos 45^\circ\right) \vec{i} + \frac{F}{4} \vec{i} - \left(\frac{F}{2} \cos 45^\circ\right) \vec{i} - F \vec{i}$$

$$\Rightarrow \vec{F}_{T1} = -\left(\frac{3}{4}F\right) \vec{i} - \left(\frac{\sqrt{2}}{2}F\right) \vec{j} \Rightarrow F_{T1} = \frac{3}{4}F + \frac{\sqrt{2}}{2}F$$

گام سوم: خواسته سؤال یعنی نسبت F_{T1} به F_{T5} را محاسبه می‌کنیم:

$$\frac{F_{T1}}{F_{T5}} = \frac{\frac{3}{4}F + \frac{\sqrt{2}}{2}F}{2F} = \frac{\frac{3}{4} + \frac{\sqrt{2}}{2}}{2} = \frac{3 + 2\sqrt{2}}{8}$$

ظرفیت خازنی $8 \mu\text{F}$ ، بار الکتریکی آن Q و بین صفحات آن هوا است. اگر 8 mC بار الکتریکی از صفحه مثبت خازن به صفحه منفی آن منتقل شود و سپس در حالتی که خازن جدا از باتری است، فاصله بین صفحات 20% کاهش یابد، انرژی ذخیره شده در خازن، نسبت به حالت اولیه اش 11 J افزایش می یابد. بیشترین مقدار ممکن برای Q چند برابر کمترین مقدار ممکن برای آن است؟

$$\frac{13}{4} (4)$$

$$\frac{13}{3} (3)$$

$$\frac{11}{4} (2)$$

$$\frac{11}{3} (1)$$

پاسخ: گزینه ۲

درس Box

● رابطه ظرفیت خازن براساس مشخصات ساختاری آن:

$$C = \kappa \epsilon_0 \frac{A}{d}$$

C : ظرفیت خازن (فاراد)

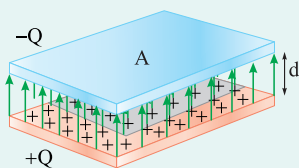
κ : ثابت دی الکتریک

ϵ_0 : ضریب گذردهی الکتریکی خلأ: $8.85 \times 10^{-12} \text{ F/m}$

A : مساحت متقابل صفحه ها (m^2)

d : فاصله جدایی صفحه ها (m)

● ظرفیت خازن تخت با ثابت دی الکتریک و مساحت سطح متقابل صفحه ها نسبت مستقیم دارد، ولی با فاصله دو صفحه از یکدیگر نسبت وارون دارد.



$$\frac{C_2}{C_1} = \frac{\kappa_2}{\kappa_1} \times \frac{A_2}{A_1} \times \frac{d_1}{d_2}$$

● انرژی خازن: انرژی ذخیره شده در یک خازن، براساس ظرفیت و بار الکتریکی ذخیره شده در آن از رابطه زیر به دست می آید:

$$U = \frac{Q^2}{2C}$$

U : انرژی خازن (J)

Q : بار الکتریکی خازن (C)

C : ظرفیت خازن (F)

● در رابطه فوق، اگر بار الکتریکی برحسب mC و ظرفیت خازن برحسب μF عددگذاری شوند، انرژی خازن برحسب ژول به دست می آید.

● در یک خازن پر شده، وقتی از صفحه دارای بار مثبت، مقداری بار منفی جدا کرده و آن را به صفحه دارای بار منفی انتقال دهیم، بار خازن، به اندازه بار انتقال یافته افزایش پیدا می کند.

گام اول: با توجه به کاهش فاصله بین صفحه های خازن، ظرفیت خازن در حالت دوم را به دست می آوریم:

$$C = \kappa \epsilon_0 \frac{A}{d} \Rightarrow \frac{C'}{C} = \frac{d}{d'} \xrightarrow{d' = d - \frac{1}{2}d = \frac{1}{2}d} \frac{C'}{C} = \frac{d}{\frac{1}{2}d} \Rightarrow C' = 2C = 16 \mu\text{F}$$

گام دوم: با استفاده از نکته آخر درس باکس، می توان گفت که انتقال بار 8 mC از صفحه مثبت به صفحه منفی خازن، بار خازن را به اندازه 8 mC افزایش می دهد:

$$Q' = Q + 8 \text{ mC}$$

پاسخ خیلی تشریحی

بر این اساس، می‌توانیم رابطه تغییر انرژی خازن در این دو حالت را به صورت زیر بنویسیم:

$$U = \frac{Q^2}{2C} \Rightarrow U' - U = \frac{Q'^2}{2C'} - \frac{Q^2}{2C}$$

$$\frac{Q' = Q + 8 \text{ mC}, U' - U = 1 \text{ J}}{C' = 10 \mu\text{F}, C = 8 \mu\text{F}} \rightarrow 11 = \frac{(Q + 8)^2}{2 \times 10} - \frac{Q^2}{2 \times 8} = \frac{1}{4} \left[\frac{(Q + 8)^2}{5} - \frac{Q^2}{4} \right]$$

$$\Rightarrow 44 = \frac{Q^2 + 16Q + 64}{5} - \frac{Q^2}{4} \Rightarrow 44 = \frac{4Q^2 + 64Q + 256 - 5Q^2}{20}$$

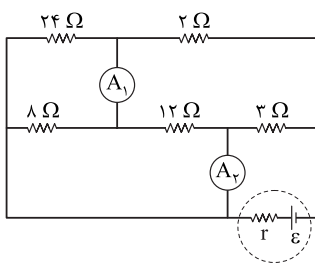
$$\Rightarrow 880 = -Q^2 + 64Q + 256 \Rightarrow Q^2 - 64Q + 624 = 0$$

$$\Rightarrow (Q - 52)(Q - 12) = 0 \Rightarrow \begin{cases} Q_{\max} = 52 \text{ mC} \\ Q_{\min} = 12 \text{ mC} \end{cases}$$

گام سوم: نسبت بیشترین مقدار ممکن برای Q به کم‌ترین مقدار ممکن برای آن را حساب می‌کنیم:

$$\frac{Q_{\max}}{Q_{\min}} = \frac{52}{12} = \frac{13}{3}$$

در مدار شکل زیر، جریان عبوری از آمپرسنج آرمانی A_2 ، چند برابر جریان عبوری از آمپرسنج آرمانی A_1 است؟



۲ (۱)

۲ / ۴ (۲)

۲ / ۸ (۳)

۳ (۴)

پاسخ: گزینه ۳

قانون اهم:

درس Box

در دمای ثابت، نسبت اختلاف پتانسیل برخی وسیله‌ها که جریان الکتریکی را از خود عبور می‌دهند، به جریانی که از آن‌ها می‌گذرد، مقدار ثابتی است:

$$\frac{V}{I} = R \Rightarrow V = IR$$

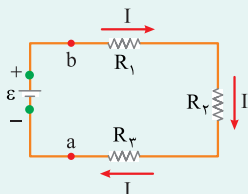
V : اختلاف پتانسیل (V)

I : جریان الکتریکی (A)

R : مقاومت الکتریکی (Ω)

الف) به هم بستن متوالی مقاومت‌ها: دو مقاومت را متوالی می‌گوییم که فقط از یک سر به هم متصل بوده و از محل اتصال آن‌ها هیچ انشعاب جریان‌داری خارج نگردد. از مقاومت‌های متوالی، جریان یکسانی عبور می‌کند.

باید توجه داشت که مقاومت‌های متوالی لازم نیست که از نظر ترسیمی حتماً در یک راستا قرار گیرند، بلکه متوالی به معنای بسته‌شدن مقاومت‌ها، یکی پس از دیگری است:



$$I = I_1 = I_2 = I_3$$

$$V = V_1 + V_2 + V_3 \Rightarrow IR_{eq} = I_1 R_1 + I_2 R_2 + I_3 R_3 \Rightarrow IR_{eq} = I(R_1 + R_2 + R_3) \Rightarrow R_{eq} = R_1 + R_2 + R_3$$

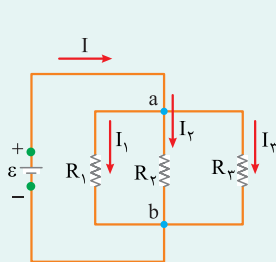
گره و شاخه در مدار: یک نقطه انشعاب (گره) در مدار، نقطه‌ای است که در آن سه یا چند سیم جریان‌دار به یکدیگر متصل شده‌اند. هر اتصالی بین دو نقطه انشعاب در مدار، شاخه نامیده می‌شود. یک شاخه می‌تواند شامل هر تعدادی از اجزای مختلف مدار و سیم‌های بین آن‌ها باشد. از هر شاخه یک جریان می‌گذرد.

مجموع جریان‌هایی که به هر نقطه انشعاب (گره) وارد می‌شود، برابر با مجموع جریان‌هایی است که از آن نقطه انشعاب خارج می‌شود. این موضوع بیانی از اصل پایستگی بار الکتریکی است. یعنی مجموع بار وارد شده به هر گره در واحد زمان برابر با مجموع بار خارج شده از آن نقطه در واحد زمان است؛ پس هیچ باری نمی‌تواند در گره جمع یا نابود شود.

ب) به هم بستن موازی مقاومت‌ها:

مقاومت‌هایی را موازی می‌گوییم که دو سر هر یک از آن‌ها به وسیله سیم‌های رابط به دو سر سایر مقاومت‌ها متصل شده باشد. در این حالت اختلاف پتانسیل دو سر مقاومت‌ها یکسان است. باید توجه داشت که مقاومت‌های موازی لازم نیست که از نظر ترسیمی حتماً شکل موازی با هم داشته باشند.

برای سه مقاومت موازی در شکل زیر می‌توان نوشت:



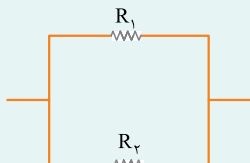
$$V = V_1 = V_2 = V_3$$

$$I = I_1 + I_2 + I_3$$

$$\Rightarrow \frac{V}{R_{eq}} = \frac{V}{R_1} + \frac{V}{R_2} + \frac{V}{R_3} \Rightarrow \frac{V}{R_{eq}} = V \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} \right)$$

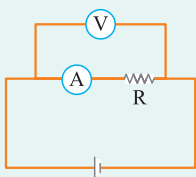
$$\frac{1}{R_{eq}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}$$

● اگر دو مقاومت به صورت موازی به یکدیگر وصل شده باشند، مقاومت معادل آن‌ها به صورت زیر محاسبه می‌شود:



$$\frac{1}{R_{eq}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \Rightarrow R_{eq} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$$

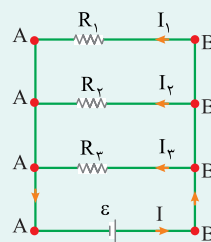
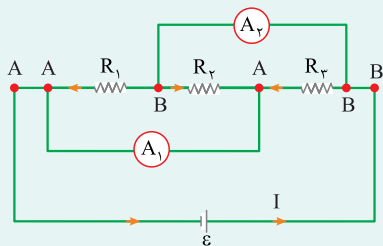
● در تقسیم جریان بین شاخه‌های موازی، چون اختلاف پتانسیل آن‌ها یکسان است، هر شاخه که مقاومت بیشتری داشته باشد، جریان کمتری از آن می‌گذرد.



● **آمپرسنج:** وسیله‌ای است برای اندازه‌گیری جریان الکتریکی در یک شاخه از مدار که به طور متوالی در آن شاخه قرار می‌گیرد. آمپرسنج، مقاومت الکتریکی بسیار کمی دارد و اگر آرمانی فرض شود، مقاومت الکتریکی آن را صفر در نظر می‌گیریم. اگر آمپرسنج آرمانی به تنهایی در یک شاخه قرار گیرد و دو نقطه از مدار را به هم وصل کند، آن دو نقطه هم‌پتانسیل می‌شوند.

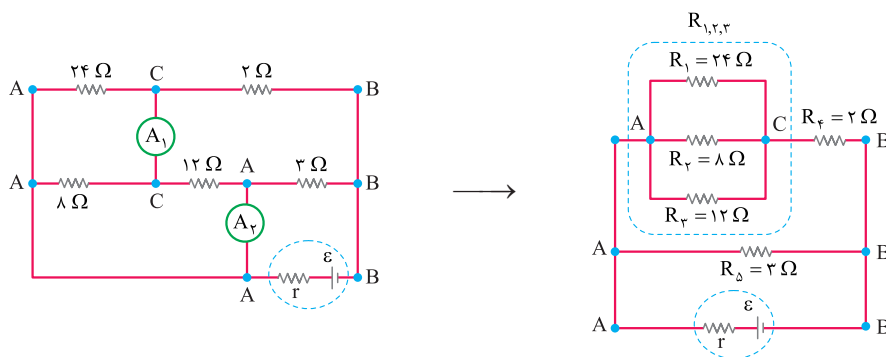
نام‌گذاری نقاط هم‌پتانسیل: بعضی وقت‌ها تشخیص متوالی یا موازی بودن مقاومت‌ها مشکل است. در این صورت می‌توانیم شکل ساده‌تری از مدار را رسم کنیم تا متوالی یا موازی بودن مقاومت‌ها را تشخیص بدهیم. برای این کار، نقاطی از مدار را که با سیم رابط (به مقاومت ناچیز) به یکدیگر وصل شده‌اند، با یک نام مشترک در نظر می‌گیریم. بعد از نام‌گذاری چنین نقاطی از مدار، دو سر مولد یا دو سر مدار را مبنا قرار می‌دهیم و بقیه اجزای مدار را بین نقطه‌های نام‌گذاری شده جای‌گذاری می‌کنیم تا شکل ساده‌تری از مدار به دست بیاید.

مثال



توجه داشته باشید که در شکل بالا، همه جریان‌ها از نقطه B به طرف نقطه A هستند. بر این اساس، از آمپرسنج‌های آرمانی A_1 و A_2 نیز جریان عبور می‌کند.

پاسخ خیلی تشریحی ✓ گام اول: با استفاده از نام گذاری نقاط هم پتانسیل، شکل ساده تری از مدار را رسم می کنیم:



R_1, R_2, R_3 و R_4 به صورت موازی بسته شده اند. مقاومت معادل آن ها ($R_{1,2,3}$) را به دست می آوریم:

$$\frac{1}{R_{1,2,3}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} = \frac{1}{24} + \frac{1}{8} + \frac{1}{12} = \frac{6}{24} \Rightarrow R_{1,2,3} = \frac{24}{6} = 4 \Omega$$

$R_{1,2,3}$ به صورت متوالی با R_4 بسته شده است:

$$R_{1,2,3,4} = R_{1,2,3} + R_4 = 4 + 2 = 6 \Omega$$

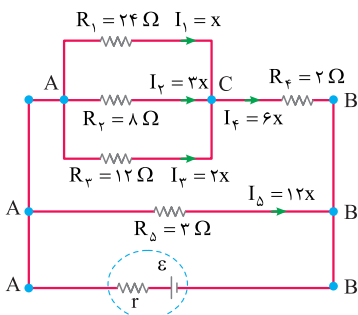
گام دوم: اگر جریان عبوری از مقاومت R_1 را برابر با x فرض کنیم، با توجه به قانون اهم، جریان های عبوری از مقاومت های R_3 و R_4 به ترتیب $3x$ و $2x$ خواهد بود.

با استفاده از قاعده تقسیم جریان در گره C ، جریان عبوری از مقاومت R_4 نیز به دست می آید:

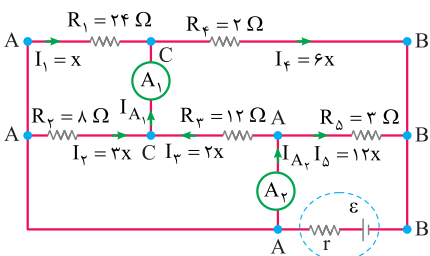
$$I_1 + I_3 + I_4 = I_4 \Rightarrow x + 3x + 2x = I_4 \Rightarrow I_4 = 6x$$

مقاومت R_Δ با مجموعه مقاومت های R_1 تا R_4 موازی بسته شده و می توان نوشت:

$$V_{1,2,3,4} = V_\Delta \Rightarrow I_{1,2,3,4} \times R_{1,2,3,4} = I_\Delta \times R_\Delta \Rightarrow 6x \times 6 = I_\Delta \times 3 \Rightarrow I_\Delta = 12x$$



گام سوم: جریان های به دست آمده را با رعایت جهت آن ها در شکل مدار اولیه نشان می دهیم:



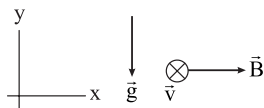
گام چهارم: با استفاده از اصل پایستگی بار (قاعده انشعاب) در گره های A و C ، جریان های عبوری از آمپرسنج های A_1 و A_2 و

$$\text{نسبت بین آن ها را به دست می آوریم: در گره } C: I_3 + I_4 = I_{A_1} \Rightarrow 3x + 2x = I_{A_1} \Rightarrow I_{A_1} = 5x$$

$$\text{در گره } A: I_{A_2} = I_3 + I_\Delta = 3x + 12x \Rightarrow I_{A_2} = 15x$$

$$\frac{I_{A_2}}{I_{A_1}} = \frac{15x}{5x} = 3$$

در شکل زیر، ذره باردار $q = -2 \mu C$ به جرم یک گرم با تندی $v = 40 \text{ km/s}$ ، وارد فضایی می‌شود که میدان مغناطیسی یکنواخت $B = 500 \text{ G}$ و میدان الکتریکی یکنواخت $\vec{E}$ در آن جا وجود دارد. اگر ذره بدون انحراف به حرکت خود ادامه دهد، $\vec{E}$ در SI کدام است؟ ($g = 10 \text{ m/s}^2$)



- (۱) $3000 \vec{j}$
- (۲) $-3000 \vec{j}$
- (۳) $7000 \vec{j}$
- (۴) $-7000 \vec{j}$

پاسخ: گزینه ۲

درس‌Box

● اگر بار ذره‌ای q در میدان الکتریکی $\vec{E}$ قرار گیرد، نیروی $\vec{F}_E$ از طرف میدان الکتریکی بر آن وارد می‌شود.

$$\vec{F}_E = q\vec{E}$$

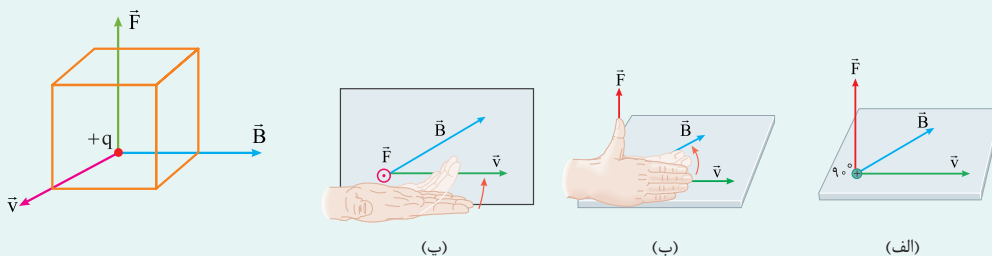
اگر $q > 0$ باشد، $\vec{F}_E$ و $\vec{E}$ هم‌جهت هستند.

اگر $q < 0$ باشد، $\vec{F}_E$ و $\vec{E}$ در خلاف جهت هم هستند.

● نیروی مغناطیسی وارد بر ذره باردار متحرک در میدان مغناطیسی:

اگر ذره باردار q با سرعت $\vec{v}$ در میدان مغناطیسی $\vec{B}$ حرکت کند (به شرط آن‌که جهت حرکت آن با میدان مغناطیسی موازی نباشد)، بر آن نیرویی وارد خواهد شد که بر راستای سرعت و میدان مغناطیسی عمود است. این نیرو را نیروی مغناطیسی می‌نامند و جهت آن، به کمک قاعده دست راست تعیین می‌شود.

● قاعده دست راست: اگر دست راست خود را طوری نگه داریم که انگشتان باز شده ما در جهت $\vec{v}$ باشد - به گونه‌ای که وقتی آن‌ها را روی زاویه کوچک‌تری که $\vec{B}$ با $\vec{v}$ می‌سازد و در جهت چرخش طبیعی انگشتان خم کنیم، در جهت $\vec{B}$ قرار گیرد. - انگشت شست ما در جهت نیروی وارد بر ذره باردار مثبت خواهد بود. توجه کنید که نیروی وارد بر بار منفی، در خلاف جهت نیروی وارد بر بار مثبت است. به عبارت دیگر، طی همین مراحل اما با دست چپ تعیین می‌گردد. در شکل‌های زیر، بارهای الکتریکی مثبت هستند.



(الف) بر ذره باردار q که با سرعت $\vec{v}$ در میدان مغناطیسی $\vec{B}$ حرکت می‌کند، نیروی مغناطیسی $\vec{F}$ وارد می‌شود.

(ب) و (پ) جهت این نیرو به کمک قاعده دست راست تعیین می‌شود.

● اندازه این نیرو از رابطه $F = |q|vB\sin\theta$ به دست می‌آید.

F : اندازه نیرو (N)

$|q|$: بزرگی بار الکتریکی (C)

v : تندی (اندازه سرعت) بار الکتریکی (m/s)

B : اندازه میدان مغناطیسی (T)

θ : زاویه بین سرعت و میدان مغناطیسی

⊗ نماد میدان مغناطیسی درون‌سو:

⊙ نماد میدان مغناطیسی برون‌سو:

⊗
⊙

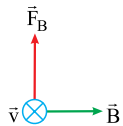
● این نیرو بر راستای سرعت و راستای میدان عمود است. $F \perp v$ و $F \perp B$

گام اول: بزرگی نیروی مغناطیسی $\vec{F}_B$ وارد بر این ذره باردار را محاسبه می‌کنیم و جهت آن را به کمک قاعده دست راست، تعیین می‌کنیم:

$$F_B = |q| v B \sin \theta \quad \frac{|q| = |-2 \mu C| = 2 \times 10^{-6} C, v = 40 \text{ km/s} = 4 \times 10^4 \text{ m/s}}{B = 500 \text{ G} = 5 \times 10^{-2} \text{ T}, \theta = 90^\circ}$$

$$F_B = 2 \times 10^{-6} \times 4 \times 10^4 \times 5 \times 10^{-2} \times \sin 90^\circ = 4 \times 10^{-3} \text{ N}$$

با توجه به قاعده دست راست، جهت نیروی $\vec{F}_B$ ، رو به بالا است.



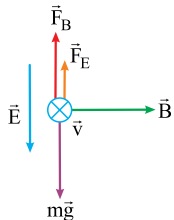
توجه داشته باشید که بار این ذره، منفی است؛ بنابراین باید جهت به دست آمده به کمک قاعده دست راست را برعکس کنیم و با اصلاً با دست چپ جهت نیروی $\vec{F}_B$ را تعیین کنیم.

گام دوم: نیروی وزن ذره رو به پایین اثر می‌کند و اندازه آن برابر است با:

$$W = mg = 1 \times 10^{-3} \times 10 = 10 \times 10^{-3} \text{ N}$$

برای آن که ذره، بدون انحراف به حرکت خود ادامه دهد، باید نیروی خالص وارد بر آن صفر باشد. با توجه به این که $mg > F_B$

است؛ بنابراین باید $\vec{F}_E$ ، هم جهت با $\vec{F}_B$ باشد. از طرفی چون بار ذره، منفی است، جهت میدان الکتریکی باید برخلاف جهت $\vec{F}_E$ یعنی رو به پایین باشد.

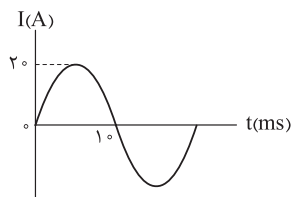


گام سوم: اندازه $\vec{F}_E$ را پیدا می‌کنیم و به کمک آن $\vec{E}$ را به دست می‌آوریم:

$$F_B + F_E - mg = 0 \Rightarrow 4 \times 10^{-3} + F_E - 10 \times 10^{-3} = 0 \Rightarrow F_E = 6 \times 10^{-3} \text{ N}$$

$$\vec{F}_E = q\vec{E} \Rightarrow (6 \times 10^{-3} \text{ N})\vec{j} = -2 \times 10^{-6} \times \vec{E} \Rightarrow \vec{E} = -(3000 \text{ N/C})\vec{j}$$

نمودار جریان متناوب گذرنده از سیملوله‌ای برحسب زمان به شکل زیر است. این سیملوله ۲۰۰ حلقه دارد و طول آن ۱۴/۴ cm است. اگر انرژی ذخیره‌شده در این سیملوله در لحظه $t = \frac{1}{\lambda_0}$ s برابر با ۱۰ mJ باشد، قطر مقطع این سیملوله چند سانتی‌متر است؟ ($\pi = 3$) و $\mu_0 = 12 \times 10^{-7} \frac{T \cdot m}{A}$



۱ (۱)

۲ (۲)

۳ (۳)

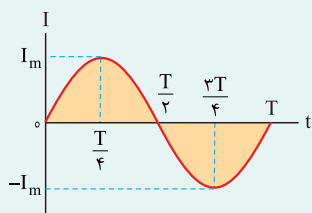
۴ (۴)

پاسخ: گزینه ۲

درس Box

● دوره (T): زمان یک دور چرخش کامل پیچه را دوره یا زمان تناوب می‌نامند و یکای آن ثانیه است.

● جریان متناوب: جریانی است که اندازه، علامت و جهت آن برحسب زمان تغییر می‌کند و متداول‌ترین نوع آن، جریان متناوب سینوسی است:



$$I = I_m \sin \frac{\pi}{T} t$$

● رابطه انرژی ذخیره‌شده در القاگر:

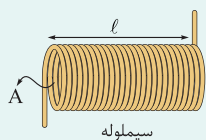
$$U = \frac{1}{2} LI^2$$

U : انرژی ذخیره‌شده در القاگر (J)

L : ضریب القاوری (H)

I : جریان عبوری از القاگر (A)

● ضریب القاوری: هر القاگر دارای یک ضریب القاوری است که به ویژگی‌های فیزیکی آن همچون تعداد دور، طول، سطح مقطع و جنس هسته‌ای که داخل آن قرار می‌گیرد، بستگی دارد. ضریب القاوری سیملوله‌ای آرمانی و بدون هسته که دارای حلقه‌های نزدیک به هم است، از رابطه زیر به دست می‌آید:



$$L = \mu_0 \frac{AN^2}{l}$$

L : ضریب القاوری (H) یا (Ωs)

μ_0 : تراوایی مغناطیسی خلأ $= 4\pi \times 10^{-7} \left(\frac{T \cdot m}{A} \right)$

A : مساحت هر حلقه (m^2)

N : تعداد حلقه‌ها

l : طول سیملوله (m)

پاسخ خیلی تشریحی ✓ گام اول: با استفاده از نمودار داده شده، دوره جریانی را به دست می آوریم:

$$\frac{T}{2} = 10 \text{ ms} = 10 \times 10^{-3} \text{ s} \Rightarrow T = 2 \times 10^{-2} \text{ s}$$

گام دوم: معادله جریانی متناوب را می نویسیم و جریانی عبوری از سیملوله را در لحظه $t = \frac{1}{\lambda_0} \text{ s}$ به دست می آوریم:

$$I = I_m \sin \frac{2\pi}{T} t \xrightarrow{I_m = 2 \text{ A}, t = \frac{1}{\lambda_0} \text{ s}} I = 2 \sin \frac{2\pi}{2 \times 10^{-2}} \times \frac{1}{\lambda_0}$$

$$\Rightarrow I = 2 \sin \frac{5\pi}{4} = 2 \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} \right) = -1.0\sqrt{2} \text{ A}$$

گام سوم: با معلوم بودن انرژی ذخیره شده در القاگر، ضریب القاوری آن را محاسبه می کنیم:

$$U = \frac{1}{2} LI^2 \xrightarrow{U = 10 \text{ mJ} = 10 \times 10^{-3} \text{ J} = 10^{-2} \text{ J}, I = -1.0\sqrt{2} \text{ A}} 10^{-2} = \frac{1}{2} L \times (-1.0\sqrt{2})^2$$

$$\Rightarrow 2 \times 10^{-2} = L \times 200 \Rightarrow L = 10^{-4} \text{ H}$$

گام چهارم: به کمک رابطه ضریب القاوری، مساحت مقطع سیملوله و از آن جا، قطر مقطع سیملوله را پیدا می کنیم:

$$L = \mu_0 \frac{AN^2}{\ell} \xrightarrow{L = 10^{-4} \text{ H}, \mu_0 = 12 \times 10^{-7} \frac{\text{T.m}}{\text{A}}, N = 200, \ell = 14/4 \text{ cm} = 14/4 \times 10^{-2} \text{ m}} \rightarrow$$

$$10^{-4} = 12 \times 10^{-7} \times \frac{A \times 200^2}{14/4 \times 10^{-2}} \Rightarrow A = \frac{14/4 \times 10^{-6}}{12 \times 10^{-7} \times 4 \times 10^4} = 3 \times 10^{-4} \text{ m}^2$$

$$A = \pi \frac{d^2}{4} \xrightarrow{\pi = 3} 3 \times 10^{-4} = 3 \times \frac{d^2}{4} \Rightarrow d^2 = 4 \times 10^{-4} \text{ m}^2$$

$$\Rightarrow d = 2 \times 10^{-2} \text{ m} \Rightarrow d = 2 \text{ cm}$$

با ترکیب نقره و طلا، قطعه‌ای با چگالی 16 g/cm^3 ساخته‌ایم. چند درصد از حجم این قطعه را طلا تشکیل داده است؟

($\rho_{\text{طلا}} = 20 \text{ g/cm}^3$ و $\rho_{\text{نقره}} = 10 \text{ g/cm}^3$)

۶۰ (۴)

۵۰ (۳)

۴۰ (۲)

۳۰ (۱)

پاسخ: گزینه ۴

درس: Box

اگر از ترکیب دو فلز به حجم‌های V_1 و V_2 و چگالی‌های ρ_1 و ρ_2 ، آلیاژی به حجم V و چگالی ρ به دست آید، می‌توان نوشت:

$$\rho = \frac{\rho_1 V_1 + \rho_2 V_2}{V}$$

طلا را به عنوان فلز (۱) و نقره را به عنوان فلز (۲) در نظر می‌گیریم. بر این اساس می‌توان نوشت:

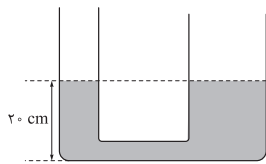
$$\rho = \frac{\rho_1 V_1 + \rho_2 V_2}{V} \Rightarrow 16 = \frac{20 V_1 + 10(V - V_1)}{V}$$

$$\Rightarrow 16V = 20V_1 + 10V - 10V_1 \Rightarrow 6V = 10V_1 \Rightarrow \frac{V_1}{V} = 0.6$$

$$\Rightarrow \text{درصد طلا در قطعه} = \frac{V_1}{V} \times 100 = 60\%$$

پاسخ خیلی تشریحی ✓

در یک لوله U شکل که مساحت قاعده لوله‌های سمت راست و چپ آن به ترتیب 5 cm^2 و 2 cm^2 است، مطابق شکل زیر، آب وجود دارد. اگر در لوله سمت راست، 80 g روغن و در لوله سمت چپ 18 g بنزین بریزیم، ارتفاع آب در لوله سمت چپ، به چند سانتی‌متر می‌رسد؟ (1 g/cm^3 ، $g = 10 \text{ N/kg}$) و چگالی آب بیشتر از چگالی روغن و بنزین است.)



(۱) ۱۵

(۲) ۱۸

(۳) ۲۲

(۴) ۲۵

پاسخ: گزینه ۴

درس Box

(۱) فشار ناشی از نیروی F بر سطح A از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$P = \frac{F}{A}$$

P : فشار (Pa)

F : اندازه نیروی عمودی وارد بر سطح (N)

A : مساحت سطح (m^2)

گاهی ممکن است که نیروی F ناشی از وزن جسم باشد. در این صورت می‌توان نوشت:

$$F = mg$$

(۲) فشار پیمانه‌ای ناشی از یک مایع، از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$P_g = \rho gh$$

P_g : فشار پیمانه‌ای (Pa)

ρ : چگالی مایع (kg/m^3)

g : شتاب گرانش (N/kg)

h : ارتفاع مایع (m)

همواره مایع درون لوله‌های U شکل، از طرفی که فشار بیشتری دارد، به طرفی که فشار کم‌تری دارد، رانده می‌شود تا جایی که تعادل برقرار شود.

در این لوله‌ها اگر یک سطح افقی فرضی را از طرفین لوله بگذرانیم، به طوری که زیر آن سطح، فقط یک نوع مایع به صورت پیوسته قرار گیرد، فشار مطلق در طرفین لوله، روی این سطح، برابر است.

هنگام نوشتن این رابطه تساوی فشار، اگر هر دو انتهای لوله باز بوده و سطوح مایع‌ها در دو طرف لوله، با هوای آزاد در تماس باشند، نوشتن P_0 لازم نیست، زیرا از دو طرف معادله حذف می‌شود.

گام اول: فشار ناشی از مایع‌های اضافه‌شده در دو طرف لوله را جداگانه حساب می‌کنیم و آن‌ها را در سمت چپ و راست، به ترتیب P_1 و P_2 نشان می‌دهیم:

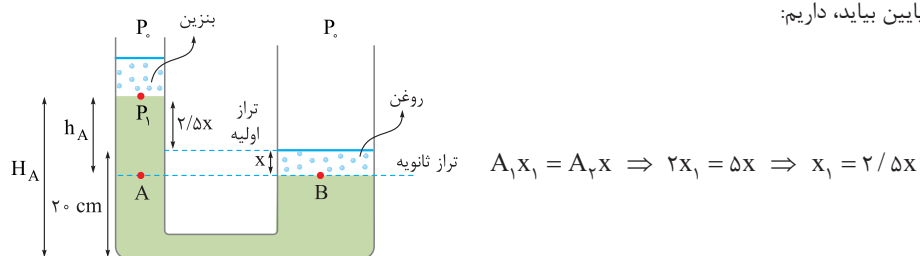
$$P_1 = \frac{m_1 g}{A_1} = \frac{m_1 = 18 \text{ g} = 18 \times 10^{-3} \text{ kg}}{A_1 = 2 \text{ cm}^2 = 2 \times 10^{-4} \text{ m}^2} \rightarrow P_1 = \frac{18 \times 10^{-3} \times 10}{2 \times 10^{-4}} = 900 \text{ Pa}$$

$$P_2 = \frac{m_2 g}{A_2} = \frac{m_2 = 80 \text{ g} = 80 \times 10^{-3} \text{ kg}}{A_2 = 5 \text{ cm}^2 = 5 \times 10^{-4} \text{ m}^2} \rightarrow P_2 = \frac{80 \times 10^{-3} \times 10}{5 \times 10^{-4}} = 1600 \text{ Pa}$$

گام دوم: با توجه به این که فشار مایع اضافه‌شده در سمت راست لوله (P_2) بزرگ‌تر از فشار مایع اضافه‌شده در سمت چپ لوله (P_1) است، مقداری از آب درون لوله، از سمت راست به سمت چپ جابه‌جا می‌شود.

پاسخ خیلی تشریحی ✓

از آن جا که حجم آب کاهش یافته از سمت راست، همان حجم آب افزایش یافته در سمت چپ است، اگر سطح آب در سمت راست به اندازه x پایین بیاید، داریم:



گام سوم: فشار نقاط A و B را مساوی با هم قرار می دهیم:

$$P_A = P_B \xrightarrow{P_B = P_2} \rho g h_A + P_1 = P_2 \Rightarrow 1000 \times 10 \times h_A + 900 = 1600$$

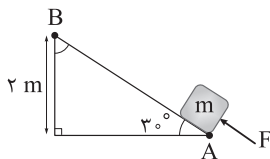
$$\Rightarrow 10^4 h_A = 700 \Rightarrow h_A = 0.07 \text{ m} = 7 \text{ cm}$$

$$h_A = 2/5 x + x \Rightarrow 7 = 2/5 x \Rightarrow x = 2 \text{ cm}$$

بنابراین ارتفاع مایع در سمت چپ (H_A) برابر است با:

$$H_A = 20 + 2/5 x = 20 + (2/5 \times 2) = 25 \text{ cm}$$

در شکل زیر، جسمی به جرم ۲ kg ، توسط نیروی ثابت $F = ۲۵\text{ N}$ که در راستای سطح شیبدار است، از نقطه A شروع به حرکت می‌کند. اگر تندی جسم در نقطه B برابر با ۶ m/s باشد، بزرگی نیروی اصطکاک جنبشی وارد بر جسم چند نیوتون است؟ ($g = ۱۰\text{ m/s}^2$)



۳ (۱)

۴ (۲)

۵ (۳)

۶ (۴)

پاسخ: گزینه ۴

درس: Box

(۱) کار نیروی ثابت $\vec{F}$ در جابه‌جایی $\vec{d}$ ، از رابطه زیر به دست می‌آید:

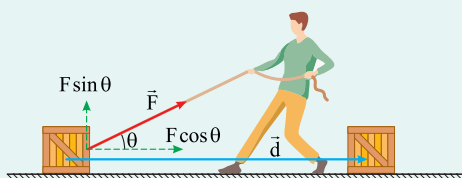
$$W_F = Fd \cos \theta$$

W_F : کار نیروی $\vec{F}$ (J)

F : اندازه نیرو (N)

d : اندازه جابه‌جایی (m)

θ : زاویه بین نیرو و جابه‌جایی



(۲) رابطه کار نیروی وزن:

$$W_{mg} = -mg\Delta h$$

W_{mg} : کار نیروی وزن (J)

m : جرم (kg)

g : شتاب گرانش زمین (N/kg)

Δh : جابه‌جایی جسم در راستای قائم (m)

اگر جسم رو به بالا جابه‌جا شود، $\Delta h > 0$ و اگر رو به پایین جابه‌جا شود، $\Delta h < 0$ است.

(۳) رابطه کار نیروی اصطکاک:

$$W_{f_k} = -f_k d$$

W_{f_k} : کار نیروی اصطکاک (J)

f_k : نیروی اصطکاک جنبشی (N)

d : اندازه جابه‌جایی (m)

(۴) قضیه کار - انرژی جنبشی: کار انجام‌شده روی یک جسم در یک جابه‌جایی معین، با تغییر انرژی جنبشی آن برابر است.

$$W_t = K_2 - K_1$$

W_t : کار کل (کار برابند نیروها) (J)

K_2 : انرژی جنبشی در وضعیت ۲ (J)

K_1 : انرژی جنبشی در وضعیت ۱ (J)

(۵) رابطه انرژی جنبشی:

$$K = \frac{1}{2}mv^2$$

K: انرژی جنبشی (J)

m: جرم (kg)

v: تندی (m/s)

پاسخ خیلی تشریحی ✓

می‌دانیم در یک مثلث قائم‌الزاویه، ضلع مقابل به زاویه 30° ، نصف وتر است؛ بنابراین جابه‌جایی جسم روی سطح شیب‌دار (d) برابر ۴m است.

قضیه کار - انرژی جنبشی را برای این جسم، بین دو نقطه A و B می‌نویسیم:

$$\Delta K = W_t \Rightarrow K_B - K_A = W_{mg} + W_F + W_{f_k}$$

$$\xrightarrow{K_A=0} \frac{1}{2}mv_B^2 = -mg\Delta h + Fd \cos \theta - f_k d$$

$$\xrightarrow{\Delta h=2\text{ m}, d=4\text{ m}, \theta=0^\circ} \frac{1}{2} \times 2 \times 6^2 = -2 \times 10 \times 2 + 25 \times 4 \times 1 - f_k \times 4$$

$$\Rightarrow 36 = -40 + 100 - f_k \times 4 \Rightarrow -24 = -4f_k \Rightarrow f_k = 6\text{ N}$$

درون ظرف عایقی مقداری یخ به جرم M با دمای ${}^{\circ}\text{C} - 60$ را با مقداری بخار آب با دمای ${}^{\circ}\text{C} 100$ و جرم m مخلوط می‌کنیم. اگر دمای تعادل مجموعه، برابر ${}^{\circ}\text{C} 40$ باشد، M/m کدام است؟

$$(c_{\text{آب}} = 2c_{\text{یخ}} = 4200 \frac{\text{J}}{\text{kg} \cdot {}^{\circ}\text{C}} \text{ و } L_F = 336 \text{ kJ/kg}, L_V = 2268 \text{ kJ/kg})$$

۴ / ۵ (۴)

۴ (۳)

۳ / ۵ (۲)

۳ (۱)

پاسخ: گزینه ۳

(۱) رابطه گرمای مبادله‌شده برای جسمی که بدون تغییر حالت، در اثر تبادل گرمایی، فقط دمای آن تغییر می‌کند:

$$Q = mc\Delta\theta$$

Q : گرما (J)

m : جرم (kg)

c : گرمای ویژه $(\frac{\text{J}}{\text{kg} \cdot {}^{\circ}\text{C}})$

$\Delta\theta$: تغییر دما (${}^{\circ}\text{C}$)

(۲) رابطه گرمای مبادله‌شده برای ذوب یا انجماد جسم در دمای ثابت:

ذوب (گرم‌گیر)

$$Q = \pm mL_F$$

انجماد (گرم‌ده)

Q : گرما (J)

m : جرم (kg)

L_F : گرمای نهان ذوب (J/kg)

(۳) رابطه گرمای مبادله‌شده برای تبخیر یا میعان جسم در دمای ثابت:

تبخیر (گرم‌گیر)

$$Q = \pm mL_V$$

میعان (گرم‌ده)

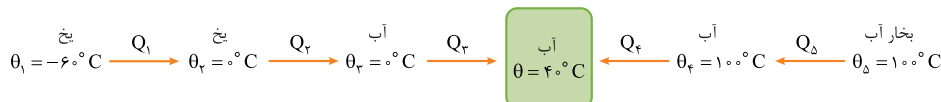
Q : گرما (J)

m : جرم (kg)

L_V : گرمای نهان تبخیر (J/kg)

(۴) اگر دو یا چند جسم با دماهای مختلف در تماس با یکدیگر قرار گیرند، پس از مدتی، هم‌دما می‌شوند، یعنی دمای آن‌ها به مقدار یکسانی می‌رسد که دمای تعادل نام دارد. بنا به قرارداد، برای اجسامی که گرما می‌گیرند، $Q > 0$ و برای اجسامی که گرما از دست می‌دهند، $Q < 0$ ، می‌باشد. براساس قانون پایستگی انرژی، همان‌قدر که اجسام گرم انرژی از دست می‌دهند، اجسام سرد انرژی می‌گیرند، پس جمع جبری این Q ها صفر می‌شود.

فرایندهای تبادل گرما در این سؤال را در طرح‌واره زیر بررسی می‌کنیم:



مجموع جبری گرماهای مبادله‌شده را برابر با صفر قرار می‌دهیم:

$$Q_1 + Q_2 + Q_3 + Q_4 + Q_5 = 0$$

$$Mc_{\text{یخ}}(\theta_r - \theta_1) + ML_F + Mc_{\text{آب}}(\theta - \theta_r) + mc_{\text{آب}}(\theta - \theta_r) - mL_V = 0$$

$$\frac{c_{\text{یخ}} = \frac{1}{2}c_{\text{آب}}, L_F = 8c_{\text{آب}}}{L_V = 54c_{\text{آب}}} \rightarrow$$

پاسخ خیلی تشریحی ✓

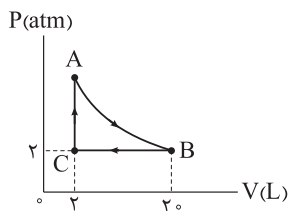
$$M \times \frac{1}{\cancel{\gamma}} \cancel{c_{\text{آب}}} (\theta_{\gamma} - \theta_{\lambda}) + M \times \lambda \cancel{c_{\text{آب}}} + M \cancel{c_{\text{آب}}} (\theta - \theta_{\gamma}) + m \cancel{c_{\text{آب}}} (\theta - \theta_{\epsilon}) - m \times \Delta \epsilon \cancel{c_{\text{آب}}} = 0$$

$$\frac{\theta = 40^{\circ}\text{C}, \theta_{\lambda} = -60^{\circ}\text{C}, \theta_{\gamma} = \theta_{\epsilon} = 0^{\circ}\text{C}}{\theta_{\epsilon} = \theta_{\Delta} = 100^{\circ}\text{C}} \rightarrow M \times \frac{1}{\gamma} (0 - (-60)) + M \times \lambda + M(40 - 0) + m(40 - 100) - m \times \Delta \epsilon = 0$$

$$\Rightarrow 30M + \lambda M + 40M = 60m + \Delta \epsilon m$$

$$\Rightarrow 150M = 600m \Rightarrow M = 4m \Rightarrow \frac{M}{m} = 4$$

مقدار معینی گاز کامل، چرخه شکل زیر را طی می کند. فرایند AB، بی دررو است. اگر اندازه گرمای مبادله شده بین گاز و محیط در طی دو فرایند BC و CA به ترتیب 3000 J و 5400 J باشد، کار انجام شده توسط گاز در فرایند



بی دررو چند ژول است؟

- (۱) 4000
- (۲) 5000
- (۳) 6000
- (۴) 8400

پاسخ: گزینه ۳

درس Box

(۱) قانون اول ترمودینامیک: در یک فرایند ایستوار، تغییر انرژی درونی دستگاه، برابر است با مجموع کار انجام شده توسط محیط روی گاز (W) و گرمای داده شده به گاز (Q).

$$\Delta U = Q + W$$

ΔU : تغییر انرژی درونی (J)

(۲) در یک چرخه ترمودینامیکی، تغییر انرژی درونی گاز، صفر است:

$$\Delta U = 0$$

(۳) برخی فرایندهای خاص:

● فرایند هم حجم: در این فرایند، حجم گاز ثابت می ماند و کار انجام شده صفر است، پس گاز (دستگاه) با محیط، فقط تبادل گرما دارد.

$$\Delta U = Q$$

● فرایند هم فشار: در این فرایند، در حالی که فشار گاز ثابت می ماند، هم گرما و هم کار مبادله می شوند.

$$W = -P\Delta V$$

رابطه محاسبه کار (W) در فرایند هم فشار به صورت زیر است:

W : کار محیط روی گاز (J)

P : فشار گاز (Pa)

ΔV : تغییر حجم گاز (m^3)

بنابراین در تراکم، $W > 0$ و در انبساط، $W < 0$ است.

● فرایند بی دررو: در این فرایند، بین گاز و محیط، گرما مبادله نمی شود و $Q = 0$ است.

(۴) اگر روی نمودار $P - V$ به طرف راست یا به طرف بالا برویم، به دمای بالاتری می رسیم؛ اما اگر به طرف چپ یا به طرف پایین برویم، به دمای پایین تری می رسیم.

بنابراین در تراکم هم فشار، دمای گاز کاهش یافته و گاز گرما از دست می دهد: $Q < 0$

اما در افزایش فشار به صورت هم حجم، دمای گاز افزایش یافته و گاز گرما دریافت می کند: $Q > 0$

گام اول: کار انجام شده در فرایند BC را که یک فرایند تراکم هم فشار است، به دست می آوریم:

$$W_{BC} = -P\Delta V = -P(V_C - V_B)$$

$$\frac{P=2 \text{ atm}=2 \times 10^5 \text{ Pa}}{V_B=2 \times 10^{-3} \text{ m}^3, V_C=4 \times 10^{-3} \text{ m}^3} \rightarrow W_{BC} = -2 \times 10^5 (4 - 2) \times 10^{-3} = -400 \text{ J}$$

گام دوم: تغییر انرژی درونی در کل چرخه صفر است؛ بنابراین می توان نوشت:

$$\Delta U = 0 \Rightarrow \Delta U_{AB} + \Delta U_{BC} + \Delta U_{CA} = 0$$

پاسخ خیلی تشریحی ✓

با توجه به قانون اول ترمودینامیک داریم:

$$Q_{AB} + W_{AB} + Q_{BC} + W_{BC} + Q_{CA} + W_{CA} = 0$$

$$\frac{Q_{AB} = 0 \text{ (بی درز)}}{W_{CA} = 0 \text{ (هم حجم)}} \rightarrow W_{AB} + Q_{BC} + W_{BC} + Q_{CA} = 0 \Rightarrow W_{AB} + (-3000) + 3600 + 5400 = 0$$

$$\Rightarrow W_{AB} = -6000 \text{ J}$$

کار محیط روی گاز:

$$W'_{AB} = -W_{AB} = 6000 \text{ J}$$

کار گاز روی محیط:

طبق مطالب کتاب درسی، کدام مورد نادرست است؟

- (۱) مجموع شمار خطوط طیف نشری خطی دو عنصر فراوان تر در سیاره مشتری در محدوده مرئی، با عدد اتمی نئون یکسان است.
- (۲) اگر نماد فرضی دومین عنصر فلزی فراوان در زمین به صورت M باشد، آرایش الکترون - نقطه‌ای آن به صورت $\dot{M}$ می‌باشد.
- (۳) شمار نوترون در فراوان‌ترین ایزوتوپ لیتیم، ۲ برابر شمار عنصرهای با نماد تک‌حرفی دوره چهارم جدول دوره‌ای است.
- (۴) درصد الکترون‌های با $l=2$ در اتم عنصر نخست گروه ۱۲ جدول دوره‌ای در مقایسه با اتم عنصرهای هم‌دوره آن بیشتر است.

پاسخ: گزینه ۴



در مقایسه عناصر سازنده زمین و مشتری لازمه، مقایسه زیر را حفظ باشید.

مقایسه فراوانی عنصرها در مشتری: $H > He > C > O > N > S > Ar > Ne$

مقایسه فراوانی عنصرها در زمین: $Fe > O > Si > Mg > Ni > S > Ca > Al$

عنصر نخست گروه ۱۲، روی ($_{30}Zn$) است. با توجه به آرایش الکترونی آن، 10 الکترون با $l=2$ (زیرلایه d) دارد. در این دوره عنصر مس ($_{29}Cu$) هم 10 الکترون با $l=2$ دارد. درصد الکترون‌های با $l=2$ در این دو عنصر به صورت زیر است:

$$_{29}Cu : [Ar]3d^9 4s^1 \rightarrow \text{الکترون‌های با } l=2 = \frac{10}{29} \times 100 \approx 34.48\%$$

برای $_{30}Zn$:

$$_{30}Zn : [Ar]3d^{10} 4s^2 \rightarrow \text{الکترون‌های با } l=2 = \frac{10}{30} \times 100 \approx 33.33\%$$

بررسی عبارت‌های درست:

گزینه (۱): دو عنصر نخست مشتری $_{1}H$ و $_{2}He$ هستند. شمار خطوط طیف نشری خطی هیدروژن و هلیم در محدوده مرئی برای عنصرهای H و He به ترتیب برابر ۴ و ۶ خط و عدد اتمی نئون برابر ۱۰ است.

گزینه (۲): دومین عنصر فلزی فراوان زمین منیزیم ($_{12}Mg$) است و آرایش الکترون - نقطه‌ای آن به صورت $\dot{Mg}$ می‌باشد.

گزینه (۳): درصد فراوانی ایزوتوپ ${}^7Li$ از ${}^6Li$ بیشتر است. تعداد نوترون‌ها در ${}^7Li$ برابر ۴ بوده و شمار عنصرهای با نماد تک‌حرفی دوره چهارم جدول دوره‌ای برابر ۲ می‌باشد ($_{19}K$ و $_{23}V$).

$${}^7Li \rightarrow n = 7 - 3 = 4$$

پاسخ خیلی تشریحی ✓

۴۷ کدام مطلب نادرست است؟

- (۱) ایزوتوپ ^{235}U اغلب به عنوان سوخت در راکتورهای اتمی به کار می‌رود و فراوانی آن در مخلوط طبیعی کم‌تر از یک دهم درصد حجمی هلیوم در مخلوط گاز طبیعی است.
- (۲) در بین ایزوتوپ‌های ساختگی هیدروژن، ایزوتوپی که دارای ۴ نوترون است نیم‌عمر بیشتری دارد.
- (۳) مجموع n و l الکترون‌های ظرفیتی در اتم اکسیژن ۴ واحد بیشتر از تعداد عنصرهای دسته S در جدول دوره‌ای است.
- (۴) عنصری در دسته p که تمام زیرلایه‌های آن دارای ۲ الکترون است، معیاری برای واحد جرم اتمی است.

پاسخ: گزینه ۲

پاسخ خیلی تشریحی ✓

مجموع n و l الکترون‌های ظرفیتی اتم ^{16}O برابر ۱۶ می‌باشد:

$$\text{تعداد } (n+l) \times e$$

$$_{8}\text{O} : 1s^2 \underbrace{2s^2 2p^4}_{(2+0) \times 2 = 4} \quad \begin{cases} 2s^2 : (2+0) \times 2 = 4 \\ 2p^4 : (2+1) \times 4 = 12 \end{cases} \quad 4 + 12 = 16$$

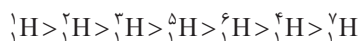
تعداد عناصر دسته S جدول دوره‌ای برابر با ۱۴ است؛ بنابراین این اختلاف برابر ۲ است $(2 = 14 - 16)$ نه ۴!

بررسی سایر گزینه‌ها:

گزینه (۱): درصد فراوانی ایزوتوپ ^{235}U در مخلوط طبیعی آن از ۰/۷ درصد کم‌تر است و حدود ۷ درصد حجمی از مخلوط گاز طبیعی را هلیوم تشکیل می‌دهد.

$$\frac{0.7\%}{100} = 0.007\%$$

گزینه (۲): با توجه به ترتیب پایداری ایزوتوپ‌های هیدروژن:



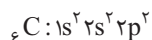
بیشترین نیم‌عمر در بین ایزوتوپ‌های ساختگی هیدروژن مربوط به ^5_1H است.

عدد اتمی - عدد جرمی = تعداد نوترون

$$5 - 1 = 4$$

گزینه (۴): هر amu برابر $\frac{1}{12}$ جرم ایزوتوپ کربن - ۱۲ است؛ بنابراین عنصر کربن، معیاری برای واحد جرم اتمی است.

در دسته p تنها در اتم کربن با عدد اتمی ۶ تمام زیرلایه‌ها دارای ۲ الکترون می‌باشند:



مقدار m گرم پتاسیم نیترات خالص را مطابق واکنش زیر گرما داده‌ایم، پس از تجزیه ۸۰ درصد آن مقدار a گرم پتاسیم اکسید تولید شده است. پتاسیم اکسید تولیدشده را در آب حل کرده و حجم محلول حاصل را به ۲ لیتر رسانده‌ایم. اگر غلظت مولی این محلول برابر ۸/۰ مول بر لیتر باشد، کاهش جرم مخلوط واکنش (I) (برحسب گرم) و حجم گاز اکسیژن تولیدشده در شرایط STP (برحسب لیتر) به ترتیب از راست به چپ کدام است؟
($N = ۱۴, O = ۱۶, K = ۳۹ : g.mol^{-1}$) (معادله‌ها موازنه شوند.)



$$۱۷/۹۲,۸۶/۴(۲)$$

$$۴۴/۸,۸۶/۴(۱)$$

$$۱۷/۹۲,۱۷۲/۸(۴)$$

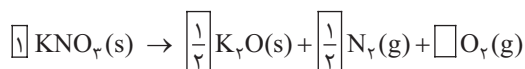
$$۴۴/۸,۱۷۲/۸(۳)$$

پاسخ: گزینه ۱

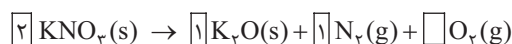
پاسخ خیلی تشریحی ✓ گام اول:



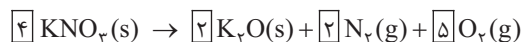
برای موازنه N و K به K_2O و N_2 ضریب $\frac{۱}{۲}$ می‌دهیم.



برای از بین بردن ضریب کسری، همه به جز O_2 در ۲ ضرب می‌شوند.



برای موازنه O به O_2 ضریب $\frac{۵}{۲}$ می‌دهیم و همه ضرایب را در ۲ ضرب می‌کنیم تا ضریب کسری از بین برود.



برای موازنه معادله دوم کافیه به KOH ضریب ۲ و به بقیه ضریب ۱ بدهیم.



ابتدا مقدار مول KOH را محاسبه می‌کنیم:

$$n_{KOH} = ۰/۸ \times ۲ = ۱/۶ \text{ mol KOH}$$

$$n = \underset{\substack{\downarrow \\ \text{غلظت مولی}}}{M} \times \underset{\substack{\downarrow \\ \text{حجم}}}{V} \Rightarrow ? \text{ mol } K_2O = ۱/۶ \text{ mol KOH} \times \frac{۱ \text{ mol } K_2O}{۲ \text{ mol KOH}} = ۰/۸ \text{ mol } K_2O$$

$$N_2 \text{ جرم مولی} = ۲ \times ۱۴ = ۲۸ \text{ g.mol}^{-1} \quad O_2 \text{ جرم مولی} = ۲ \times ۱۶ = ۳۲ \text{ g.mol}^{-1}$$

کاهش جرم مخلوط واکنش (I) به دلیل تولید مواد گازی شکل است. مطابق واکنش (I) به ازای تولید ۲ مول K_2O مقدار ۲ مول N_2 (۵۶ گرم) و ۵ مول O_2 (۱۶۰ گرم) تولید شده است، بنابراین کاهش جرم مخلوط واکنش به ازای تولید ۲ مول K_2O برابر ۲۱۶ گرم می‌باشد و می‌توان نوشت:

$$\text{کاهش جرم} = ۰/۸ \text{ mol } K_2O \times \frac{۲۱۶ \text{ g}}{۲ \text{ mol } K_2O} = ۸۶/۴ \text{ g}$$

$$? LO_2 = ۰/۸ \text{ mol } K_2O \times \frac{۵ \text{ mol } O_2}{۲ \text{ mol } K_2O} \times \frac{۲۲/۴ LO_2}{۱ \text{ mol } O_2} = ۴۴/۸ \text{ L } O_2$$

چند مورد از موارد زیر نادرست است؟

الف) اگر معادله انحلال پذیری نمک AB به صورت $S = \frac{1}{10} \theta + 20$ باشد، 80° گرم محلول سیرشده آن در دمای 50°C دارای 30 g از این نمک می باشد.

ب) استون حلال مناسبی برای چربی هاست، بنابراین یک ماده ناقطبی بوده و در آب به خوبی حل نمی شود.
پ) مولکول های H_2O ، SO_2 و NH_3 ، مولکول های چنداتمی قطبی بوده و برخلاف مولکول های دواتمی در میدان الکتریکی جهت گیری می کنند.

ت) اگر در فرمول مولکولی یک ماده، اتم های H به همراه یکی از اتم های F، O یا N موجود باشد بین مولکول های آن به یقین پیوند هیدروژنی تشکیل خواهد شد.

ث) در تصفیه آب به روش صافی کربن برخلاف روش تقطیر، افزون بر میکروب ها، مواد آلی فرار از آب جدا نمی شوند.

۲ (۴)

۳ (۳)

۴ (۲)

۵ (۱)

پاسخ: گزینه ۲

پاسخ خیلی تشریحی ✓

عبارت «الف» درست بوده و بقیه عبارت ها نادرست هستند.

الف) درست، بنابراین در هر 160 g محلول سیرشده نمک AB در دمای 50°C مقدار 60° گرم نمک حل شده است:

$$S = \frac{1}{10} \theta + 20 \xrightarrow{\theta=50^\circ \text{C}} S = 60 \text{ g} / 100 \text{ g H}_2\text{O}$$

$$? \text{ g نمک} = 80 \text{ g} \times \frac{60 \text{ g}}{160 \text{ g}} = 30 \text{ g}$$

محلول محلول

بررسی سایر عبارت ها:

ب) نادرست؛ استون قطبی بوده و به هر نسبتی در آب محلول است.

پ) نادرست؛ مولکول های دواتمی ناجورهسته مانند HF ، CO ، NO و ... قطبی بوده و در میدان الکتریکی جهت گیری می کنند.

ت) نادرست؛ زیرا اتم H در این مولکول ها می تواند به O، N یا F متصل نباشد.

ث) نادرست؛ در تصفیه آب به روش تقطیر، افزون بر میکروب ها، مواد آلی فرار از آب جدا نمی شوند.

از واکنش کلسیم کاربید (CaC_2) و آب، محلول کلسیم هیدروکسید و نوعی هیدروکربن سیر نشده گازی با ساختار خطی تولید می‌شود. با توجه به واکنش موازنه شده این واکنش کدام مورد درست است؟

$$(H = 1, C = 12, O = 16, Ca = 40; \text{g.mol}^{-1})$$

(۱) اگر ۶۵ گرم ترکیب آلی با بازده ۵۰ درصد تولید شود، جرم CaC_2 مصرف شده ۱۶۰ g است.

(۲) در خانواده هیدروکربن تولید شده، درصد جرمی هیدروژن برابر ۱۴/۳ درصد است.

(۳) اگر بازده این واکنش ۸۰ درصد باشد و تمام ترکیب آلی به طور کامل با هیدروژن سیر شود، نسبت جرم هیدروژن مصرف شده به جرم CaC_2 مصرف شده، ۰/۵ خواهد بود.

(۴) اگر نسبت جرم Ca(OH)_2 تولید شده به جرم H_2O مصرف شده حدود ۰/۵ باشد، درصد خلوص CaC_2 ، ۸۰ درصد بوده است.

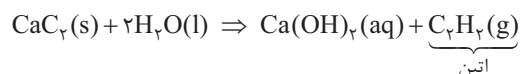
پاسخ: گزینه ۲

پاسخ خیلی تشریحی ✓

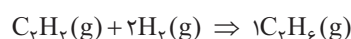
در فصل ۳، شیمی دوازدهم دیدیم که در هیدروکربن اتین، همه اتم‌ها در یک خط راست قرار دارند و ساختار اتین خطی است:



بنابراین معادله واکنش به صورت زیر است:



برای سیر شدن هیدروکربن فرض می‌کنیم که a مول C_2H_2 در واکنش اول تولید و در دومی مصرف شده است.



$$\frac{\text{جرم هیدروژن}}{\text{CaC}_2 \text{ جرم}} = \frac{a \text{ mol } \text{C}_2\text{H}_2 \times \frac{2 \text{ mol } \text{H}_2}{1 \text{ mol } \text{C}_2\text{H}_2} \times \frac{2 \text{ g } \text{H}_2}{1 \text{ mol } \text{H}_2}}{a \text{ mol } \text{C}_2\text{H}_2 \times \frac{100}{80} \times \frac{1 \text{ mol } \text{CaC}_2}{1 \text{ mol } \text{C}_2\text{H}_2} \times \frac{64 \text{ g } \text{CaC}_2}{1 \text{ mol } \text{CaC}_2}} = \frac{4 \times 80}{64 \times 100} = 0/5$$

با توجه به مساوی بودن ضریب اتین در دو معادله:

یه جور دیگه

$$\frac{\frac{\text{CaC}_2}{\text{بازده} \times \text{جرم}}}{\text{ضریب} \times \text{جرم مولی}} = \frac{\frac{\text{H}_2}{\text{جرم}}}{\text{ضریب} \times \text{جرم مولی}} \Rightarrow \frac{\frac{\text{CaC}_2}{m \times 0/8}}{\frac{64 \times 1}{2 \times 2}} = \frac{\frac{\text{H}_2}{x}}{2 \times 2} \Rightarrow 0/8m = 16x \Rightarrow \frac{x}{m} = \frac{0/8}{16} = 0/5$$

بررسی سایر عبارت‌ها:

گزینه (۱):

$$65 \text{ g } \text{C}_2\text{H}_2 \times \frac{100}{50} \times \frac{1 \text{ mol } \text{C}_2\text{H}_2}{26 \text{ g } \text{C}_2\text{H}_2} \times \frac{1 \text{ mol } \text{CaC}_2}{1 \text{ mol } \text{C}_2\text{H}_2} \times \frac{64 \text{ g } \text{CaC}_2}{1 \text{ mol } \text{CaC}_2} = 320 \text{ g } \text{CaC}_2$$

یه جور دیگه

$$\frac{\frac{\text{CaC}_2}{\text{بازده} \times \text{جرم}}}{\text{جرم مولی} \times \text{ضریب}} = \frac{\frac{\text{C}_2\text{H}_2}{\text{جرم}}}{\text{جرم مولی} \times \text{ضریب}} \\ \frac{x \times 0/5}{1 \times 64} = \frac{65}{1 \times 26} \Rightarrow x = 320 \text{ g}$$

گزینه (۲): در آلکن‌ها درصد جرمی هیدروژن برابر با ۱۴/۳٪ است.

گزینه (۴): نسبت جرم Ca(OH)_2 تولید شده به جرم H_2O مصرف شده، ارتباطی به درصد خلوص CaC_2 ندارد.

با توجه به جدول داده شده، اگر $38/6$ کیلوگرم زغال سنگ ناخالص در شرایط استاندارد سوزانده شود و بتواند 54 متر مکعب گاز آلایندۀ کربن دی اکسید تولید کند، درصد ناخالصی این زغال سنگ چند درصد است؟

($C = 12, O = 16 : g.mol^{-1}$)

نام سوخت	گرمای آزاد شده (kJ/g)	مقدار کربن دی اکسید به ازای هر کیلوژول انرژی تولید شده (g)
زغال سنگ	۳۰	$0/104$
۸۸ (۱)	۱۲ (۲)	۴۴ (۳)
		۵۶ (۴)

پاسخ: گزینه ۲

برای محاسبه درصد ناخالص زغال سنگ باید درصد خلوص آن را محاسبه کنیم.

پاسخ خیلی تشریحی ✓

$$54 m^3 CO_2 \times \frac{1000 L CO_2}{1 m^3} \times \frac{1 mol CO_2}{22/4 L CO_2} \times \frac{44 g CO_2}{1 mol CO_2} \times \frac{1 kJ انرژی}{0/104 g CO_2} \times$$

$$\frac{1 g C}{30 kJ انرژی} \times \frac{1 kg C خالص}{1000 g C} \times \frac{100 g C خالص}{x g C خالص} = 38/6 kg C خالص$$

$$\Rightarrow x = 88 \Rightarrow \text{درصد خلوص} = 88\%$$

$$\text{درصد ناخالصی} = 100 - \text{درصد خلوص} = 100 - 88 = 12\%$$

مجموع ضرایب استوکیومتری مواد در معادله واکنش زیر پس از موازنه کدام است و اگر در این واکنش ۸ لیتر گاز Br_2 تولید شود، چند گرم MnO_2 با خلوص ۷۲/۵ درصد مصرف شده است؟ ($\text{O} = ۱۶$, $\text{Mn} = ۵۵$, $\text{Br} = ۸۰$: g.mol^{-1})
چگالی گاز Br_2 را در شرایط واکنش برابر ۵ گرم بر لیتر در نظر بگیرید.



(۱) ۱۱ - ۶۰

(۲) ۱۱ - ۶۰

(۳) ۱۰ - ۶۰

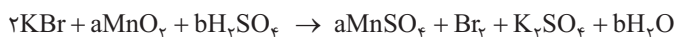
(۴) ۱۰ - ۶۰

پاسخ: گزینه ۴

در ابتدا واکنش مورد نظر را موازنه می‌کنیم:



با توجه به عناصر K و Br، موازنه را با K_2SO_4 شروع می‌کنیم به طوری که برای آن ضریب ۱ قرار داده و سپس برای KBr ضریب ۲ می‌گذاریم (موازنة K). ضریب Br_2 را نیز عدد ۱ قرار می‌دهیم (موازنة Br). با توجه به این که عناصر دیگر در ترکیب‌هایی هستند که ضرایب مشخصی ندارند، از مجهول‌گذاری کمک می‌گیریم به طوری که برای MnO_2 و MnSO_4 به خاطر عنصر Mn ضریب مجهول a و برای H_2SO_4 و H_2O به دلیل عنصر H ضریب مجهول b قرار می‌دهیم:



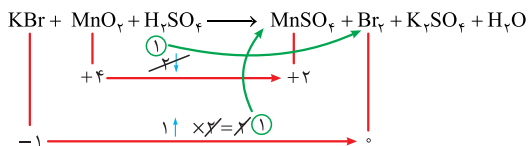
$$\begin{aligned} \text{موازنة S: } b &= a + 1 \\ \text{موازنة O: } 2a + 4b &= 4a + 4 + b \end{aligned} \Rightarrow \begin{cases} b - a = 1 \\ 3b - 2a = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -2b + 2a = -2 \\ 3b - 2a = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{aligned} b &= 2, a = 1 \end{aligned}$$

معادله واکنش موازنه‌شده به صورت زیر می‌شود:



مجموع ضرایب: $2 + 1 + 2 + 1 + 1 + 2 = 10$

روش دوم موازنه: استفاده از تغییر عدد اکسایش گونه‌ها:



حال اعداد به‌دست‌آمده را به صورت ضربدری در سمت فرآورده‌ها قرار داده و سپس باقی عناصر را هم موازنه می‌کنیم:



برای حل قسمت دوم سؤال از استوکیومتری استفاده می‌کنیم:

$$\begin{aligned} & 8 \text{ L Br}_2 \times \frac{5 \text{ g Br}_2}{1 \text{ L Br}_2} \times \frac{1 \text{ mol Br}_2}{160 \text{ g Br}_2} \times \frac{1 \text{ mol MnO}_2}{1 \text{ mol Br}_2} \times \frac{87 \text{ g MnO}_2}{1 \text{ mol MnO}_2} \\ & \times \frac{100 \text{ g MnO}_2 \text{ خالص}}{72/5 \text{ g MnO}_2 \text{ خالص}} = 30 \text{ g MnO}_2 \text{ خالص} \end{aligned}$$

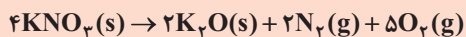
$$\frac{\text{چگالی} \times \text{حجم}}{\text{جرم مولی} \times \text{ضریب}} = \frac{\text{درصد خلوص} \times \text{جرم ناخالص}}{\text{جرم مولی} \times \text{ضریب}}$$

$$\frac{x \times \frac{72}{5}}{1 \times 87} = \frac{5 \times 8}{1 \times 160} \Rightarrow x = 30 \text{ g MnO}_2 \text{ خالص}$$

پاسخ خیلی تشریحی ✓

یه جور دیگه

۲ مول پتاسیم نیترات مطابق واکنش زیر در یک مرحله و در دمای معین، در یک ظرف دو لیتری تجزیه می‌شود. اگر سرعت متوسط تشکیل گاز اکسیژن در گستره زمانی ۱۰ تا ۳۰ ثانیه، برابر با $1/2 \text{ mol.L}^{-1}.\text{min}^{-1}$ باشد، کدام مورد نادرست است؟ ($N = 14, O = 16, K = 39 : \text{g.mol}^{-1}$)



- (۱) در ثانیه ۲۰، ۳۶/۱۳۷ گرم پتاسیم نیترات در ظرف وجود دارد.
- (۲) بعد از یک دقیقه، غلظت گاز نیتروژن به 48 mol.L^{-1} می‌رسد.
- (۳) در مدت زمان ۴۰ ثانیه، واکنش به میزان ۶۴ درصد پیشرفت می‌کند.
- (۴) در ثانیه ۳۰، مجموع جرم مواد جامد درون ظرف برابر ۱۱۶/۵ گرم است.

پاسخ: گزینه ۴

بررسی سایر عبارت‌ها:

پاسخ خیلی تشریحی ✓

گزینه (۱): اول باید سرعت تولید اکسیژن برحسب $\text{mol.L}^{-1}.\text{min}^{-1}$ به mol.s^{-1} تبدیل کنیم:

$$\bar{R}_{\text{O}_2} = 1/2 \text{ mol.L}^{-1}.\text{min}^{-1} \times \frac{2 \text{ L}}{1} \times \frac{1 \text{ min}}{60 \text{ s}} = 0.04 \text{ mol.s}^{-1}$$

حالا سرعت KNO_3 را حساب می‌کنیم:

$$\frac{\bar{R}_{\text{O}_2}}{5} = \frac{\bar{R}_{\text{KNO}_3}}{4} \Rightarrow \frac{0.04}{5} = \frac{\bar{R}_{\text{KNO}_3}}{4}$$

$$\Rightarrow \bar{R}_{\text{KNO}_3} = \frac{0.04 \times 4}{5} = 0.032 \text{ mol.s}^{-1}$$

$$\bar{R}_{\text{KNO}_3} = \frac{\Delta n}{\Delta t} \Rightarrow 0.032 = \frac{\Delta n}{20} \Rightarrow \Delta n(\text{KNO}_3) = 0.64 \text{ mol}$$

تغییرات تعداد مول KNO_3 را به تغییرات جرم آن تبدیل می‌کنیم:

$$0.64 \text{ mol KNO}_3 \times \frac{101 \text{ g KNO}_3}{1 \text{ mol KNO}_3} = 64.64 \text{ g}$$

$$\text{KNO}_3 \text{ باقی مانده} = 202 \text{ g} - 64.64 \text{ g} = 137.36 \text{ g}$$

گزینه (۲): سرعت تولید O_2 را به سرعت تولید N_2 تبدیل می‌کنیم:

$$\frac{\bar{R}_{\text{N}_2}}{2} = \frac{\bar{R}_{\text{O}_2}}{5} \Rightarrow \frac{\bar{R}_{\text{N}_2}}{2} = \frac{1/2}{5}$$

$$\bar{R}_{\text{N}_2} = 0.04 \text{ mol.L}^{-1}.\text{min}^{-1}$$

$$\bar{R}_{\text{N}_2} = \frac{\Delta[\text{N}_2]}{\Delta t} \Rightarrow 0.04 = \frac{\Delta[\text{N}_2]}{1} \Rightarrow \Delta[\text{N}_2] = 0.04 \text{ mol.L}^{-1}$$

گزینه (۳): برای محاسبه درصد پیشرفت واکنش می‌توانیم از مقادیر آغازی و پایانی KNO_3 استفاده کنیم. در اینجا از سرعت KNO_3 برحسب mol.s^{-1} که در بررسی گزینه‌های قبلی به دست آوردیم استفاده می‌کنیم:

$$\text{KNO}_3 : n_1 = 2 \text{ mol}$$

$$\text{KNO}_3 : n_2 \Rightarrow \bar{R}_{\text{KNO}_3} = \frac{\Delta n}{\Delta t}$$

$$\Rightarrow 0.032 = \frac{\Delta n}{40} \Rightarrow \Delta n = 1.28 \text{ mol}$$

$$\text{درصد پیشرفت واکنش} = \frac{\Delta n}{n_1} \times 100 = \frac{1.28}{2} \times 100 = 64\%$$

واکنش دهنده جامد است، بنابراین واکنش با سرعت ثابت پیش می‌رود.

ابتدا باید مقدار گاز (O_2 , N_2) تولید شده در ثانیه ۳۰ را محاسبه کرد و از مقدار اولیه واکنش دهنده کم کنیم تا جرم مواد جامد باقی مانده به دست آید.

$$\bar{R}_{O_2} = 1/2 \frac{\text{mol}}{\text{L} \times \text{min}} \times 2 \text{ L} = 2/4 \text{ mol/min}$$

$$30 \text{ s} = 0.5 \text{ min}$$

$$\bar{R}_{O_2} = \frac{\Delta n_{O_2}}{\Delta t} \Rightarrow 2/4 = \frac{n_2 - 0}{0.5}$$

$$n_2 = 1/2 \text{ mol } O_2 \xrightarrow{\text{تبدیل به گرم}} 1/2 \text{ mol } O_2 \times \frac{32 \text{ g } O_2}{1 \text{ mol } O_2} = 16 \text{ g } O_2$$

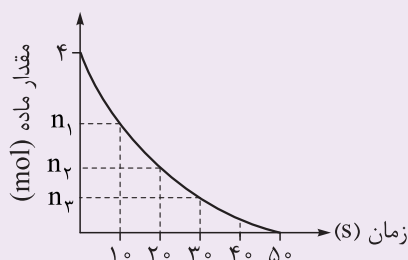
$$gN_2 = 1/2 \text{ mol } O_2 \times \frac{2 \text{ mol } N_2}{5 \text{ mol } O_2} \times \frac{28 \text{ g } N_2}{1 \text{ mol } N_2} = 14 \text{ g } N_2$$

$$KNO_3 \text{ جرم اولیه} = 2 \text{ mol } KNO_3 \times \frac{101 \text{ g } KNO_3}{1 \text{ mol } KNO_3} = 202 \text{ g } KNO_3$$

$$\text{جرم جامد باقی مانده} = 202 - 16 - 14 = 172 \text{ g}$$

نمودار داده شده، تجزیه ۴ مول گاز N_2O_5 را در یک ظرف ۲ لیتری نشان می‌دهد. اگر سرعت متوسط تشکیل گاز NO_2 در گستره زمانی ۱۰ تا ۳۰ ثانیه، برابر $5/4 \text{ mol.L}^{-1}.\text{min}^{-1}$ باشد، کدام مورد درست است؟ (واکنش، یک طرفه در نظر گرفته شود).

(سوال ۹۶ کنکور تهرانی ۱۴۰۴ - نوبت دوم)



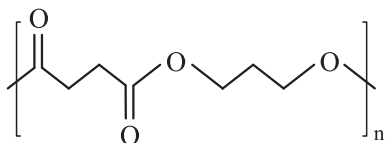
(۱) n_3 و n_1 به ترتیب می‌تواند $2/2$ و $0/4$ باشد.

(۲) اگر $n_1 - n_2 = 1/2$ ، سرعت واکنش در گستره زمانی ۱۰ تا ۲۰ ثانیه، برابر $10^{-2} \text{ mol.L}^{-1}.\text{s}^{-1}$ است.

(۳) اگر $n_2 = 1$ ، مجموع غلظت فراورده‌ها در ثانیه ۲۰، برابر $7/5 \text{ mol.L}^{-1}$ خواهد بود.

(۴) پس از کامل شدن واکنش، شمار مول‌های گازی درون ظرف، $1/5$ برابر شمار مول‌ها در آغاز واکنش است.

با بررسی پلیمر داده شده و براساس مطالب کتاب درسی کدام مورد درست است؟



(۱) تعداد کربن‌های مولکول دی‌اسید سازنده آن با تعداد هیدروژن‌های مولکول مونومر به کاررفته در کیسه خون برابر است.

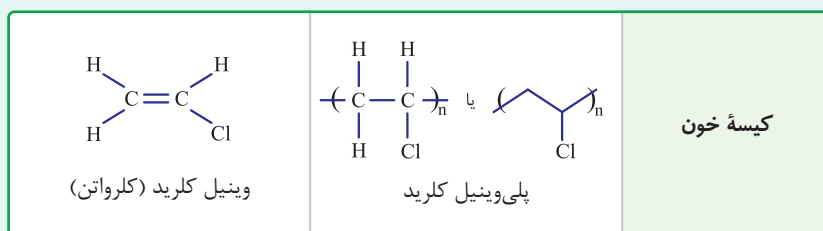
(۲) اختلاف جرم مولی دی‌الکل سازنده آن با جرم مولی آمیدی خطی و سیرشده با ۹ اتم هیدروژن، ۱۰ گرم بر مول است.

(۳) مجموع تعداد کربن‌های دی‌اسید و دی‌الکل سازنده این پلیمر ۳ واحد بیش از تعداد کربن‌های استر موجود در آناناس است.

(۴) اختلاف جرم مولی دی‌اسید و دی‌الکل سازنده آن ۱۱ واحد بیشتر از جرم مولی ساده‌ترین آمین است.

پاسخ: گزینه ۴

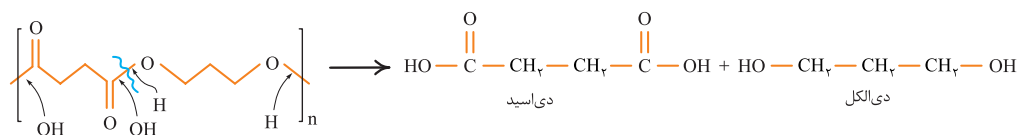
ساختار پلیمر سازنده کیسه خون و مونومر آن به صورت زیر است:



ساختار استر عامل بوی آناناس در جدول زیر آورده شده است:

نام و ساختار کربوکسیلیک اسید سازنده	نام و ساختار الکل سازنده	ساختار استر	نام استر سازنده	نام میوه
بوتانویک اسید	اتانول	(C₆H₁₂O₂)	اتیل بوتانوات	آناناس

پاسخ خیلی تشریحی ✓



$$\text{جرم مولی دی‌اسید} = \left(\overset{\text{C}}{4 \times 12} \right) + \left(\overset{\text{H}}{6 \times 1} \right) + \left(\overset{\text{O}}{4 \times 16} \right) = 118 \text{ g.mol}^{-1}$$

$$\text{جرم مولی دی‌الکل} = \left(\overset{\text{C}}{3 \times 12} \right) + \left(\overset{\text{H}}{8 \times 1} \right) + \left(\overset{\text{O}}{2 \times 16} \right) = 76 \text{ g.mol}^{-1}$$

$$\text{ساده‌ترین آمین} \Rightarrow \text{متیل آمین } \text{CH}_5\text{N} \xrightarrow{\text{جرم مولی}} 12 + 5 + 14 = 31 \text{ g.mol}^{-1} = a$$

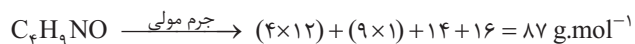
$$b = 118 - 76 = 42 = \text{اختلاف جرم مولی دی‌اسید و دی‌الکل}$$

$$b - a = 42 - 31 = 11$$

بررسی سایر عبارت‌ها:

گزینه (۱): تعداد هیدروژن‌های مونومر سازنده کیسه خون ۳ عدد است و دی‌اسید سازنده ساختار اصلی ۴ کربن دارد.

گزینه (۲): فرمول عمومی آمیدهای خطی و سیر شده به صورت $C_nH_{2n+1}NO$ است، بنابراین:



جرم مولی دی‌الکل سازنده ساختار در پاسخ گزینه‌های قبلی 76 g.mol^{-1} به دست آمد.

$$87 - 76 = 11$$

گزینه (۳):

$$\text{مجموع } C \text{ های دی‌اسید و دی‌الکل ساختار اصلی} = 3 + 4 = 7 \Rightarrow 7 - 6 = 1$$

$$\text{مجموع } C \text{ های استر سازنده آناناس} = 6$$

با در نظر گرفتن ویژگی‌های اسیدها و بازها در محلول آبی، در دمای معین، کدام عبارت درست است؟

$$(H = 1, C = 12, O = 16 : g.mol^{-1})$$

(۱) اگر در محلولی از استیک‌اسید، pH برابر ۲ و درصد یونش برابر ۵ باشد، در ۲۵ میلی‌لیتر از این محلول، ۳ ° گرم از استیک‌اسید حل شده است.

(۲) افزودن مقدار کمی سدیم سیانید جامد (NaCN) به محلول هیدروسیانیک اسید (HCN)، باعث افزایش pH محلول و کاهش درجه یونش اسید می‌شود.

(۳) برای خنثی‌سازی کامل ۵۰ میلی‌لیتر از محلول ۰/۰۱ مولار HCl، دقیقاً به همان مقدار NaOH نیاز است که برای خنثی‌سازی کامل ۵۰ میلی‌لیتر از محلول ۰/۱ مولار HX با درصد یونش ۱۰ لازم است.

(۴) تعداد یون‌ها در ۲۵ میلی‌لیتر از محلول ۰/۰۱ مولار HCl، ده برابر شمار یون‌های H^+ در ۵۰ میلی‌لیتر از محلول ۰/۲۵ HY با درصد یونش ۴ است.

پاسخ: گزینه ۲

پاسخ خیلی تشریحی ✓

هیدروسیانیک اسید (HCN) یک اسید ضعیف است:



سدیم سیانید جامد (NaCN) یک نمک است که در آب به طور کامل تفکیک شده و یون سیانید (CN^-) تولید می‌کند. یون سیانید، یون مشترک با تعادل یونش هیدروسیانیک اسید است. طبق اصل لوشاتلیه، افزایش غلظت یون مشترک (CN^-) باعث جابه‌جایی تعادل به سمت چپ (مصرف H^+ و CN^- و تولید HCN) می‌شود.

● اثر بر $[H^+]$ و pH: با جابه‌جایی تعادل به سمت چپ، غلظت $[H^+]$ کاهش می‌یابد، بنابراین pH محلول افزایش می‌یابد (محلول کم‌تر اسیدی می‌شود).

● اثر بر درجه یونش (α): از آنجایی که تعادل به سمت مولکول‌های یونیزه‌نشده جابه‌جا می‌شود، درجه یونش هیدروسیانیک اسید کاهش می‌یابد.

بررسی سایر گزینه‌ها:

گزینه (۱):

گام اول: محاسبه غلظت یون هیدرونیوم $[H^+]$:

$$[H^+] = 10^{-pH} = 10^{-2} \text{ M}$$

pH محلول داده‌شده برابر ۲ است.

گام دوم: محاسبه غلظت اولیه استیک‌اسید (M_A)

درجه یونش اسید:

$$(\alpha) = \frac{5}{100} = 0.05$$

برای اسید ضعیف تک‌پروتونه CH_3COOH ، رابطه $[H^+] = \alpha \times M_A$ برقرار است.

$$10^{-2} \text{ M} = 0.05 \times M_A \Rightarrow M_A = \frac{10^{-2}}{0.05} \text{ M} = \frac{10^{-2}}{5 \times 10^{-2}} \text{ M} = 0.2 \text{ M}$$

گام سوم: محاسبه تعداد مول استیک‌اسید (CH_3COOH) حل‌شده:

$$M_A = \frac{\text{تعداد مول } CH_3COOH(n)}{\text{حجم محلول } V} \Rightarrow 0.2 \frac{\text{mol}}{\text{L}} = \frac{n \text{ mol}}{0.25 \text{ L}} \Rightarrow n = 0.05 \text{ mol}$$

گام چهارم: محاسبه جرم استیک‌اسید (CH_3COOH) حل‌شده:

$$CH_3COOH(n) = \frac{\text{جرم } CH_3COOH}{\text{جرم مولی } CH_3COOH} = \frac{x \text{ g}}{60 \text{ g/mol}} = 0.05 \text{ mol} \Rightarrow x = 3 \text{ g}$$

گزینۀ (۳):

مقدار مول اسید HCl در ۵۰ میلی لیتر (۰/۰۵ لیتر):

$$n_{\text{HCl}} = M \times V = (0/01 \text{ mol/L}) \times (0/05 \text{ L}) = 0/0005 \text{ mol}$$

این مقدار مول اسید برای خنثی سازی کامل به ۰/۰۰۰۵ mol NaOH نیاز دارد.

مقدار مول اسید HX در ۵۰ میلی لیتر (۰/۰۵ لیتر):

$$n_{\text{HX}} = M \times V = (0/01 \text{ mol/L}) \times (0/05 \text{ L}) = 0/0005 \text{ mol}$$

این مقدار مول اسید برای خنثی سازی کامل به ۰/۰۰۵ mol NaOH نیاز دارد. مقدار مول مورد نیاز NaOH برای هر دو حالت برابر نیست!

دقت داشته باشید که هر دو اسید قوی یا ضعیف به طور کامل با یک باز قوی واکنش می دهند، یعنی در این مورد، درجه یونش اسید ضعیف اهمیت ندارد!

گزینۀ (۴):

تعداد مول یون ها در محلول HCl:

$$2 \times n(\text{H}^+) = 2 \times [\text{H}^+] \times V = 2 \times (M \times \alpha) \times V = 2 \times (0/01 \text{ M} \times 1) \times 0/025 \text{ L} = 0/0005 \text{ mol}$$

تعداد مول یون H^+ در محلول HY:

$$n(\text{H}^+) = [\text{H}^+] \times V = (M \times \alpha) \times V = (0/25 \times 0/04) \times 0/05 = 0/0005 \text{ mol}$$

نسبت این دو عدد برابر یک است! نه ده!



اگر انرژی الکتریکی مورد نیاز سلول برقکافت آب را توسط سلول گالوانی استاندارد $Zn - H_2$ تأمین کنیم، در اثر جابه‌جایی 0.2 مول الکترون بین دو سلول، تغییر pH در قطب آند سلول الکترولیتی چند برابر تغییر pH در نیم‌سلول هیدروژن است؟ (دما را $25^\circ C$ و حجم محلول‌ها را نیم‌لیتر در نظر بگیرید. $\log 2 = 0.3$ و $\log 3 = 0.5$)

۱ (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴) ۵ (۵) ۶ (۶)

پاسخ: گزینه ۴

پاسخ خیلی تشریحی ✓

در مرحله اول تغییرات pH در نیم‌سلول آندی برقکافت آب در اثر جابه‌جایی 0.2 مول الکترون را حساب می‌کنیم.



با توجه به یکسان بودن ضریب استوکیومتری H^+ و e^- به ازای مبادله 0.2 مول e^- ، 0.2 مول H^+ تولید می‌شود، بنابراین:

$$[H^+] = \frac{\text{مول}}{\text{حجم}} = \frac{0.2}{0.5} = 0.4 \text{ mol.L}^{-1}$$

$$pH_2 = -\log[H^+] = -\log 0.4 = -(2 \log 2 + \log 10^{-1}) = 0.4$$

قبل از شروع واکنش آب خالص با pH مساوی ۷ در سلول الکترولیتی وجود دارد.

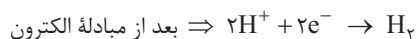
$$\Delta pH = 7 - 0.4 = 6.6$$

در برقکافت

در مرحله بعد اختلاف pH در نیم‌سلول SHE قبل و بعد از مبادله 0.2 مول الکترون را محاسبه می‌کنیم:

$$[H^+] = 1 \text{ M} \Rightarrow pH = -\log 1 = 0$$

قبل از مبادله الکترون



$$[H^+]_2 = [H^+]_{\text{اولیه}} - [H^+]_{\text{مصرف شده}} = 1 \text{ M} - \frac{0.2}{0.5} \text{ M} = 1 - 0.4 = 0.6 \text{ M}$$

به ازای مبادله 0.2 مول e^- ، 0.2 مول H^+ مصرف می‌شود.

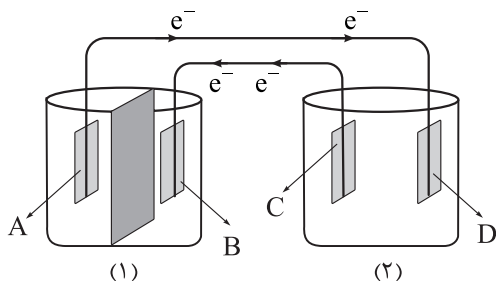
$$pH_2 = -\log[H^+] = -\log 0.6 = -\log(6 \times 10^{-1})$$

$$= -(\log 6 + \log 10^{-1}) = 0.2$$

$$\Delta pH_{\text{در SHE}} = 0.2 - 0 = 0.2$$

$$\frac{\Delta pH(\text{برقکافت})}{\Delta pH(\text{SHE})} = \frac{6.6}{0.2} = 33$$

چه تعداد از موارد زیر برای تکمیل عبارت داده شده، درست است؟



«اگر سلول (۱) و سلول (۲) باشد»

الف) سلول سوختی هیدروژن - برقکافت آب - نیم‌واکنش انجام شده در الکترود A عکس نیم‌واکنش انجام شده در الکترود D است.

ب) سلول (آهن - نقره) - آبکاری تیغه آهنی توسط نقره - جنس الکترودهای A و D یکسان است.

پ) سلول نورالکتروشیمیایی - برقکافت آب - نیم‌واکنش‌های انجام شده در الکترودهای B و D یکسان است.

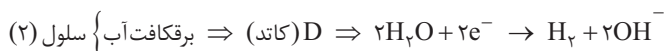
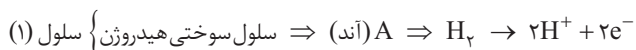
۱ (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴) صفر

پاسخ: گزینه ۲

بررسی عبارت‌ها:

پاسخ خیلی تشریحی ✓

الف) نادرست:

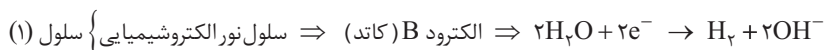


ب) درست:

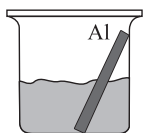
از جنس Fe است $A \Rightarrow (\text{آند}) \Rightarrow \text{سلول آهن-نقره} \{ \text{سلول } (۱)$

تیغه آهنی $D \Rightarrow (\text{کاتد}) \Rightarrow \text{آبکاری تیغه آهنی توسط نقره} \{ \text{سلول } (۲)$

پ) درست:



مطابق شکل زیر یک قطعه آلومینیمی را درون یک بشر حاوی ۱۲۰ گرم محلول مس (II) سولفات با درصد جرمی ۳۰ درصد قرار می‌دهیم. اگر سرعت انجام واکنش ثابت و برابر $0.18 \text{ mol.L}^{-1}.\text{min}^{-1}$ باشد، با فرض این که ۷۵ درصد از مس رسوب کرده روی تیغه آلومینیمی بنشینند، چند ثانیه پس از شروع واکنش تغییر جرم تیغه آلومینیمی برابر ۴/۵ گرم خواهد شد و چند ثانیه دیگر واکنش پایان می‌پذیرد؟ (چگالی محلول را 1.08 g/mL گرم بر میلی لیتر در نظر گرفته و از تغییر جرم و حجم محلول صرف نظر شود. $O = 16, Al = 27, S = 32, Cu = 64 \text{ g.mol}^{-1}$)



$$60 - 150 \quad (1)$$

$$75 - 120 \quad (2)$$

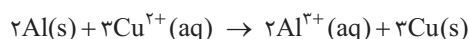
$$75 - 150 \quad (3)$$

$$60 - 120 \quad (4)$$

پاسخ: گزینه ۳

پاسخ خیلی تشریحی ✓

در ابتدا معادله واکنش انجام شده را نوشته و موازنه می‌کنیم:



قسمت اول: با استفاده از تناسب زیر، مقدار مول مصرفی Cu^{2+} (برابر با مول $CuSO_4$) را به دست می‌آوریم:

$$\frac{x}{3 \text{ mol } Cu^{2+} \text{ مول مصرفی}} = \frac{\text{رسوب } 4/5 \text{ g}}{(3 \text{ mol } Cu^{2+} \times 64 \text{ g/mol} \times \frac{75}{100} - 2 \text{ mol } Al \times 27 \text{ g/mol})} \Rightarrow x = 0.15 \text{ mol } Cu^{2+}$$

تغییر جرم تیغه Al

حال با استفاده از سرعت واکنش، زمان مصرف ۰/۱۵ مول Cu^{2+} را محاسبه می‌کنیم:

$$\left\{ \begin{aligned} \bar{R}_{\text{واکنش}} &= \frac{\Delta n Cu^{2+}}{3.L.\Delta t} \Rightarrow 0.18 = \frac{0.15 \text{ mol}}{3 \times \frac{1}{9} L \times \Delta t} \Rightarrow \Delta t = 2/5 \text{ min} = 150 \text{ s} \\ L_{\text{محلول}} &= 120 \text{ g} \times \frac{1 \text{ mL}}{1.08 \text{ g}} \times \frac{1 L}{1000 \text{ mL}} = \frac{1}{9} L \end{aligned} \right.$$

قسمت دوم: در ابتدا مقدار مول اولیه Cu^{2+} (برابر با $CuSO_4$) را به دست آورده و سپس مقدار مول باقی مانده آن را محاسبه می‌کنیم:

$$a = \frac{\text{جرم } CuSO_4}{\text{جرم محلول}} \times 100 \Rightarrow \text{جرم } CuSO_4 = \frac{30 \times 120}{100} = 36 \text{ g} \rightarrow$$

$$\text{mol } Cu^{2+} = \text{mol } CuSO_4 = \frac{36}{160 \text{ g/mol}} = 0.225 \text{ mol}$$

$$\text{mol } Cu^{2+} \text{ باقی مانده} = 0.225 - 0.15 = 0.075$$

$$\bar{R}_{\text{واکنش}} = \frac{\Delta n Cu^{2+}}{3.L.\Delta t} \Rightarrow \Delta t = \frac{0.075}{3 \times \frac{1}{9} \times 0.18} = 1/25 \text{ min} = 75 \text{ s}$$

کدام مطلب درست است؟ **۵۹**

- (۱) اگر حجم محلول هیدروکلریک اسید را با افزودن آب، 10° برابر کنیم، غلظت یون هیدروکسید $\frac{1}{10}$ برابر خواهد شد.
- (۲) NaCl(s) رسانا بوده و یک الکترولیت قوی به شمار می‌آید.
- (۳) گرافیت برخلاف سایر جامدهای کووالانسی رسانای جریان الکتریسیته است.
- (۴) تفاوت نقطه ذوب و جوش H_2O نسبت به HF کم‌تر است، ولی این تفاوت در O_2 بیشتر از N_2 است.

پاسخ: گزینه ۴

پاسخ خیلی تشریحی ✓

تفاوت نقطه ذوب و جوش H_2O (100°C) از HF (102°C) کم‌تر است. همچنین این تفاوت در O_2 (35°C) بیشتر از N_2 (14°C) است.

بررسی سایر گزینه‌ها:

گزینه (۱): نادرست؛ اگر حجم یک محلول اسیدی را 10° برابر کنیم، غلظت یون هیدرونیوم $\frac{1}{10}$ برابر می‌شود و به دلیل ثابت بودن $[\text{H}^+][\text{OH}^-]$ ، غلظت یون هیدروکسید 10° برابر می‌شود.

گزینه (۲): نادرست؛ NaCl(s) رسانا نیست، زیرا یون‌ها در شبکه بلور امکان جابه‌جایی ندارند.

گزینه (۳): نادرست؛ سیلیسیم (به دلیل شبه‌فلز بودن) و گرافن، همانند گرافیت رسانای جریان الکتریسیته هستند.

۶۰. کدام یک از مطالب زیر نادرست است؟ ($\text{Cu} = 64, \text{Ba} = 137 : \text{g} \cdot \text{mol}^{-1}$)

- (۱) با انتقال مخلوط تعادلی $\text{CaCO}_3(\text{s}) \rightleftharpoons \text{CaO}(\text{s}) + \text{CO}_2(\text{g})$ از یک ظرف ۵ لیتری به یک ظرف ۱ لیتری تعداد مول کربن دی‌اکسید در تعادل جدید ۲۰٪ تعداد مول آن در تعادل اولیه خواهد بود.
- (۲) با افزودن سدیم سولفات به مخلوط تعادلی $\text{Ba}(\text{s}) + \text{Cu}^{2+}(\text{aq}) \rightleftharpoons \text{Ba}^{2+}(\text{aq}) + \text{Cu}(\text{s})$ ، جرم جامد باقی‌مانده افزایش می‌یابد.
- (۳) افزودن آب به تعادل $2\text{H}_2\text{O}(\text{l}) \rightleftharpoons 2\text{H}_2\text{O}(\text{aq}) + \text{O}_2(\text{g})$ ، تأثیری بر جابه‌جایی تعادل ندارد.
- (۴) افزودن سدیم نیترات جامد بر تعادل $\text{NaCl}(\text{s}) \rightleftharpoons \text{Na}^+(\text{aq}) + \text{Cl}^-(\text{aq})$ ، انحلال‌پذیری نمک خوراکی را کاهش می‌دهد.

پاسخ: گزینه ۲

پاسخ خیلی تشریحی ✓

با افزودن آب غلظت $\text{H}_2\text{O}(\text{aq})$ کاهش می‌یابد و طبق اصل لوشاتلیه تعادل در جهت برگشت جابه‌جا می‌شود تا بخشی از کاهش غلظت را جبران کند.
بررسی سایر عبارت‌ها:
گزینه (۱): عبارت ثابت تعادل برای این واکنش به صورت $K = [\text{CO}_2]$ است، زیرا مواد با حالت فیزیکی جامد در عبارت ثابت تعادل ظاهر نمی‌شوند.
با توجه به ثابت‌بودن دما، ثابت تعادل در نتیجه غلظت CO_2 می‌بایست ثابت باشد، بنابراین برای ثابت‌ماندن غلظت، مقدار مول CO_2 می‌بایست به همان نسبت کاهش پیدا کند.

$$V \text{ درصد کاهش} = \frac{\Delta V}{V_1} \times 100 = \frac{5-1}{5} \times 100 = 80\%$$

پس تعداد مول هم ۸۰٪ کاهش یافته و مقدار آن ۲۰٪ تعداد مول اولیه است.
گزینه (۲): با افزودن Na_2SO_4 یون‌های SO_4^{2-} و Ba^{2+} رسوب جامد تشکیل داده و به علت کاهش مقدار Ba^{2+} در تعادل، تعادل برای جبران کمبود Ba^{2+} به سمت رفت جابه‌جا می‌شود، بنابراین x مول $\text{Ba}(\text{s})$ مصرف و x مول BaSO_4 و x مول Cu تولید می‌شود، بنابراین جرم مواد جامد افزایش می‌یابد.
گزینه (۴): افزودن سدیم نیترات، سبب افزایش یون‌های سدیم شده و تعادل به سمت برگشت و کاهش انحلال‌پذیری نمک جابه‌جا می‌شود.